حل تمرینهای کتاب

کنترل اتوماتیک

استاد دکتر کریمی

مؤلف اسمارا جیت بوش

محمد حسین رضایی کمال آباد

۸۲۱۱۱۱۱۵۱

فهرست

فصل (۱)
اساس سیستم کنترلی

۱) واژه‌های زیر را تعریف کنید.

i) سیستم کنترل دست ساز:

به سیستم‌های کنترلی که توسط بشر طراحی شده و گسترش یافته باشد؛ مثل سیستم‌های اتومبیل.

ii) سیستم کنترل اتوماتیک:

به سیستم کنترلی که بصورت خودکار با مقایسه مقادیر خروجی و ورودی و تعیین انحراف آنها از هم و بوجود آوردن سیگنال کنترل کننده برای رسیدن انحراف به صفر عمل کرده و عکس العمل مطلوب و مورد نظر را ایجاد می‌نماید، گفته می‌شود.

iii) سیستم کنترل قطعی:

اگر جواب ورودی و خروجی قابل پیش‌بینی و قابل تکرار باشند، کنترل را قطعی می‌گویند.

۲) سیستم کنترلی مدار باز را تعریف کرده، مزایا و معایب آن را بیان و مثالی بیاورید.

سیستم‌هایی که در آنها خروجی بر عمل کنترل تأثیر ندارد، مدار باز نامیده می‌شود. در واقع خروجی این سیستم نه اندازه‌گیری می‌شود و نه برای مقایسه با ورودی فیدبک می‌شود.

از جمله محاسن این سیستم می توان موارد زیر را نام برد:

ـ طراحی ساده　　　ـ اقتصادی

ـ نگهداری آسان　　　ـ معمولاً این سیستم‌ها در زمینهٔ پایداری، زیاد مشکل‌ساز نیستند.

اما معایب این سیستم‌ها بصورت زیر است:

ـ زیاد قابل اطمینان نیستند

ـ نسبت به ورودی مزاحم حساسیت ندارند

ـ کنترل این سیستم‌ها نیاز به دقت و صحت بالایی دارد

به‌عنوان مثال برای این سیستم می‌توان به تنظیم کردن شیر گاز بخاری خانگی اشاره کرد؛ شما برحسب تجربه این شیر را روی یک میزان مشخص برای رساندن دمای اتاق به دمای مطلوب(با

کمک تولید حرارت) تنظیم می‌کنید و یک دبی حرارت ثابت وارد اتاق می‌شود، حال با ورود باد سرد و ورودی‌های مزاحم سیستم فیدبکی برای اندازه‌گیری تغییر دما و اعمال آن به شیر ندارد. پس این سیستم مدار باز است.

۳) تفاوت بین سیستم‌های کنترل خطی و غیر خطی را بنویسید.

در سیستم‌های خطی، رابطهٔ بین ورودی و خروجی بصورت خطی است. یعنی اگر ورودی را در یک ضریب ضرب کنیم، خروجی هم در همان ضریب ضرب می‌شود، ولی در سیستم‌های غیر خطی ممکن است خروجی به عوامل دیگری نیز وابسته باشد و در هر صورت این ارتباط بصورت خطی نمی‌باشد.

۴) سیستم کنترلی مدار بسته را تعریف کرده، مزایا و معایب آن را بیان و مثالی را از آن ذکر کنید.

سیستمی که برای ایجاد ارتباط مطلوب بین خروجی و ورودی مرجع، از مقایسهٔ آنها استفاده می‌کند مدار بسته نام دارد.

مزایای این سیستم عبارتند از:

ـ دقت بسیار بالایی دارد(به علت اصلاح تغییرات و افزایش خطا)

ـ پهنای باند و فرکانس بالایی در این سیستم داریم

ـ وقتی تغییرات محیطی به سیستم اعمال می‌شود و باعث عدم تعادل سیستم می‌گردد، سیستم اصلاح می‌شود

ـ اثرات غیر خطی بودن در این سیستم کم است.

معایب این سیستم نیز عبارتند از پیچیدگی بالای این سیستم و پرهزینه بودن آن و امکان ناپایداری آن.

برای مثال نیز می‌توان به سیستم کنترل خودکار هواپیماها (auto pilot)، سیستم‌های کنترلی ماشین آلات و کنترل دمای اتاق با کلیدهای فرمان حرارتی اشاره کرد.

فصل (۲)

تبدیل لاپلاس و ماتریس

۱) تبدیل لاپلاس‌های زیر را بنویسید.

i) $5 + e^{-2t} + te^{-5t} \rightarrow \frac{5}{s} + \frac{1}{s+2} + \frac{1}{(s+5)^2}$

ii) $5t + 3e^{-2t} + e^{-2t}\text{Sin}(t) \rightarrow \frac{5}{s^2} + \frac{3}{s+2} + \frac{1}{(s+2)^2+1}$

iii) $e^{-2t}\text{Cos}(t) + 3e^{-5t} + 2t \rightarrow \frac{s}{(s+2)^2+1} + \frac{3}{s+5} + \frac{2}{s^2}$

۲) مقدار اوّلیه و نهایی عبارت مقابل را بدست آورید.

$$F_{(s)} = \frac{0.39}{s(s^2 + 2.52s + 1)}$$

مقدار اوّلیه:

$$\lim_{x \to 0} F(t) = \lim_{s \to \infty} sF(s) = \lim_{s \to \infty} \frac{0.39s}{s^2 + 2.5s^2 + s} \overset{HOP}{===} \frac{0.39}{\infty} = 0$$

مقدار نهایی:

$$\lim_{x \to \infty} F(t) = \lim_{s \to 0} sF(s) = \lim_{s \to 0} \frac{0.39s}{s^3 + 2.52s^2 + s} \overset{HOP}{===} \frac{0.39}{1} = 0.39$$

۳) مقدار F(t) را محاسبه کنید.

i) $F(t) = \frac{s}{(s+1)(s+2)}$

حل: $\frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} = \frac{s}{(s+1)(s+2)} \Rightarrow As + 2A + Bs + B = s \Rightarrow \begin{cases} A + B = 1 \\ 2A + B = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 2 \end{cases}$$

$$F(t) = -\frac{1}{s+1} + 2\frac{1}{s+2} = -e^{-t} + 2e^{-2t}$$

ii) $F(s) = \frac{(s+1)}{s(s+2)^2}$

حل:

$$\frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{(s+2)^2} = \frac{A(s+2)^2 + Bs(s+2) + Cs}{s(s+2)^2}$$

$$As^2 + 4A + 4As + Bs^2 + 2Bs + Cs = s + 1 \Rightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ 4A = 1 \\ 4A + 2B + C = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{4} \\ B = -\frac{1}{4} \\ C = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$F(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{1}{2}te^{-2t}$$

iii) $F(s) = \frac{s+2}{s(s+1)(s+3)}$

حل:

$$\frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+3} = \frac{(As + A)(s+3) + Bs(s+3) + Cs(s+1)}{s(s+1)(s+3)}$$

$$As^2 + 3As + As + Bs^2 + 3Bs + Cs^2 + Cs = s + 2 \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{2}{3} \\ B = -\frac{1}{2} \\ C = -\frac{1}{6} \end{cases}$$

$$F(t) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{6}e^{-3t}$$

۴) Y(s) را بیابید.

i) $\frac{d^2y}{dt^2} + 8\frac{dy}{dt} + 3y = 11$

حل:(با فرض صفر بودن شرایط اولیه داریم)

$$s^2F(s) + 8sF(s) + 3F(s) = 11$$

$$F(s) = \frac{11}{s^2 + 8s + 3}$$

ii) $\frac{d^3y}{dt^3} + 9\frac{dy}{dt} + 3y = 13$

حل:

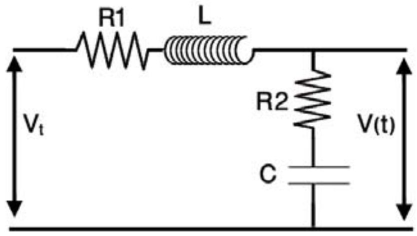
$$s^3F(s) + 9sF(s) + 5F(s) = 13$$

$$F(s) = \frac{13}{s^3 + 9s + 5}$$

فصل (۳)

تابع تبدیل

۱) تابع تبدیل سیستم شکل زیر را بدست آورید.



$$\begin{bmatrix} 1 & R_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & LD \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{CD}{RCD+1} & 1 \end{bmatrix}$$

امپراس معادل شاخهٔ موازی: $R_2 + \dfrac{1}{CD} = \dfrac{RCD+1}{CD}$

$$V_{(t)} = I_1R_1 + LDI_1 + R_2I_1 + \frac{1}{DC}I_1 \quad \Rightarrow V_t = \frac{(R_1 + LD_1R_2 + \frac{1}{CD})}{R_2 + \frac{1}{CD}}V_0$$

$$V_{(0)} = R_2I_1 + \frac{1}{CD}I_1 \ \Rightarrow I_1 = \frac{V_0}{R_2 + \frac{1}{CD}}$$

$$\frac{V_0}{V_t} = \frac{R_2CD+1}{CD(R_1+R_2)+LCD^2+1} \ \Rightarrow G(s) = \frac{sR_2C+1}{s^2LC+sC(R_1+R_2)+1}$$

۲) سؤال مشخص نیست.

۳) معادلهٔ سیستمی بصورت مقابل است. تابع تبدیل آن را محاسبه کنید.

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 4y = 2\frac{d^2a}{dt^2} + 6a$$

حل:

$$s^2Y_{(s)} + 3sY_{(s)} + 4Y_{(s)} = 2s^2X_{(s)} + 6X_{(s)}$$

$$G(s) = \frac{Y_{(s)}}{X_{(s)}} = \frac{2s^2+6}{s^2+3s+4}$$

۴) رفتار دینامیکی سیستمی با تابع مقابل بیان می‌شود. اگر r ورودی و c خروجی باشد، تابع تبدیل سیستم را بیابید.

$$\frac{dc}{dt} + 12c = 20r$$

حل: $sc_{(s)} + 12c_{(s)} = 20r_{(s)} \quad \Rightarrow G(s) = \frac{c_{(s)}}{r_{(s)}} = \frac{20}{s + 12}$

۵) سیستمی با معادلهٔ مقابل داریم. تابع تبدیل آن را بیابید.

$$3\frac{d^2c(t)}{dt^2} + 5\frac{dc(t)}{dt} + c(t) = r(t) + 3r(t - 2)$$

حل: $3s^2c_{(s)} + 5sc_{(s)} + c_{(s)} = R_{(s)} + 3e^{-2t}R_{(s)} \quad \Rightarrow G_{(s)} = \frac{1 + 3e^{-2t}}{3s^2 + 5s + 1}$

۶) تابع تبدیل سیستمی بصورت مقابل است. معادلهٔ دیفرانسیل حالت آن را بنویسید.

$$G_{(s)} = \frac{4s + 1}{s^2 + 2s + 3}$$

حل: $\frac{Y_{(s)}}{X_{(s)}} = \frac{4s + 1}{s^2 + 2s + 3} \Rightarrow 4sX_{(s)} + X_{(s)} = s^2Y_{(s)} + 2sY_{(s)} + Y_{(s)}$

$$4\frac{dx_{(t)}}{dt} + x_{(t)} = \frac{d^2y_{(t)}}{dt^2} + 2\frac{dy_{(t)}}{dt} + 3y_{(t)} \Rightarrow \ddot{y}_{(t)} + 2\dot{y}_{(t)} + 3y_{(t)} = 4\dot{x}_{(t)} + x_{(t)}$$

۷) پاسخ سیستمی بصورت e^{-5t} است. تابع تبدیل آن را بنویسید.

حل: $\frac{Y_{(s)}}{X_{(s)}} = G_{(s)} = \frac{1}{s + 5}$

۸) پاسخ سیستمی به ورودی پله واحد بصورت مقابل است. تابع تبدیل آن را بنویسید.

$$e^{-t}(1 - Cos3t)$$

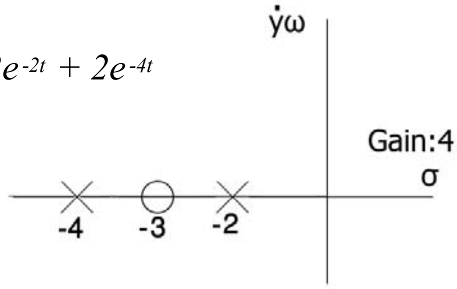
حل: $G_{(s)} = \frac{1}{s + 1}(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 9}) = \frac{1}{s + 1}(\frac{s^2 + 9 - s^2}{s(s^2 + 9)}) = \frac{9}{s(s + 1)(s^2 + 9)}$

۹) قطب‌های سیستمی s=-4 و s=-2 و صفر آن s=-3 است. اگر ضریب بهرهٔ سیستم 4 باشد، تابع تبدیل را یافته و نمودار قطبها و صفرها را رسم کنید.

حل: $G_{(s)} = \dfrac{4(s+3)}{(s+2)(s+4)} = \dfrac{4s+12}{(s+2)(s+4)} = \dfrac{A}{s+2} + \dfrac{B}{s+4}$

$$\Rightarrow As + 4A + Bs + 2B = 4s + 12 \Rightarrow \begin{cases} A + B = 4 \\ 4A + 2B = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = 2 \end{cases}$$

$$x_{(t)} = 2e^{-2t} + 2e^{-4t}$$



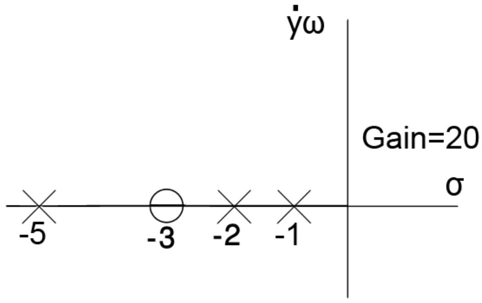
۱۰) صفرها و قطبهای تابع تبدیل زیر را بدست آورید و رسم کنید.

$$G_{(s)} = \frac{20(s+3)}{(s+1)(s^2+7s+10)}$$

حل: $s^2 + 7s + 10 = (s+2)(s+5)$

Gain=20 *Zero=-3*

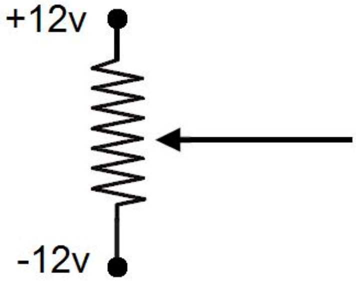
Pole=-1,-2,-5



فصل (۴)

ترکیب سیستم کنترلی

۱) یک پتانسیومتر 50_k اهمی همانند شکل مقابل دارای ولتاژ دوسر ±12 ولت است. مطلوبست:



i) ثابت k_p پتانسیومتر v/Rad

ii)

حل:

i)

$$E_i = +12 - (-12) = 24v \rightarrow k_p = \frac{E_i}{\theta} = \frac{24}{10 \times 360 \times \frac{2\pi}{360}} = 0.382$$

ii)

$$k_p = \frac{E_i}{\theta_i} = \frac{x}{70^0 \times \frac{2\pi}{360}} = 0.382 \Rightarrow x = \frac{0.382 \times 2\pi \times 70}{360} = 0.467v$$

۲) یک تاکومتر دارای ضریب بهرهٔ $0.05\, v/rad/s$ است. مطلوبست:

i) ولتاژ خروجی وقتی سرعت شفت $40 rad/s$ است.

ii) ولتاژ خروجی وقتی سرعت شفت $20 rad/s$ است.

iii) سرعت شفت برحسب rad/s و Deg/s وقتی ولتاژ $18v$ است.

$$E_{ou} = k_T \omega$$

$$k = \frac{\bar{v}}{rad/s} = 0.05$$

حل:

i) $E = k\omega = 40 \times 0.05 = 2v$

ii) $E = k\omega = 20 \times 0.05 = 1v$

iii) $1.8 = 0.05 \times \omega \Rightarrow \omega = \frac{1.8}{0.05} = 36\ rad/s \qquad 36 \times \frac{360}{2\pi} = 2063\ deg/s$

۳) سؤال مشخص نیست.

۴) یک آرمیچر کنترل کنستریک سرومترdc دارای مشخصات زیر است:

i) سنسور خطای پتانسیومتر دارای حساسیت $k_e = 0.5\,v/deg$

ii) ضریب بهرهٔ آمپلی‌فایر $k_1 = 10$

iii) مشخصات موتور:

مقاومت آرمیچر $R_a = 10$

Lu نـــــــــــــــاچیز

$Lu \approx 0$

ثابت گشتاور $K_T = 1Nm/A$

$\dot{y} = 2gmm^2$

iv) نسبت چرخدنده‌ها $n = \dfrac{1}{10}$

v)

$\dot{y}_L = 0.2kgm^2$

$D_L = 0.2Nms/rad$

مطلوبست محاسبهٔ تابع تبدیل سیستم.

حل:

$$\dot{y} = \dot{y}_m + (\frac{N_1}{N_2})^2 \dot{y}_L = 2 + \frac{1}{100}0.2 = 2.002$$

$$D = D_m + (\frac{N_1}{N_2})BL = 0$$

$$\frac{\theta_{(s)}}{F_{(s)}} = \frac{K_T / Ra}{S(\dot{y} s + f^{١})}$$

$$f^{١} = f + \frac{k_r k_b}{Ra}$$

$$\Rightarrow G = \frac{K_T}{(LiS + R_f)(\dot{y} S + f)} = \frac{K_m}{S(T_1 S + 1)(T_m S + 1)}$$

۵) مطلوبست محاسبهٔ تابع تبدیل یک AC سروموتور دارای مشخصات زیر:

i) گشتاور راه‌اندازی برابر $0.166Nm^2$

ii) ممان اینرسی $\dot{y}_L = 1 \times 10^{-5} kgm^2$

iii) ولتاژ کاری 115v

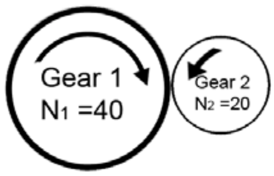
iv) $\omega_n L = 2.904Rpm$

v) اصطکاک ناچیز

فصل (۵)

مدلسازی ریاضی سیستم‌های فیزیکی

۱) در چرخدنده‌های شکل روبرو مطلوبست:



i) نسبت $\frac{D_1}{D_2}$

ii) اگر چرخدندهٔ (1) 35 درجه حرکت کند، دومی چند درجه حرکت می‌کند؟

iii) اگر $\omega_1 = 20$ رادیان بر ثانیه باشد، ω_2 را بیابید.

iv) اگر $\alpha_2 = 5$ رادیان بر مجذور ثانیه باشد، α_1 را بیابید.

حل:

i) $\frac{N_1}{N_2} = \frac{D_1}{D_2} = \frac{40}{20} = 2$

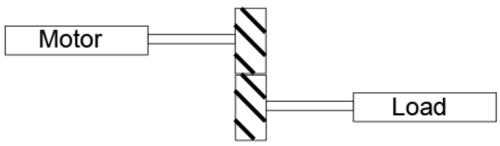
ii) $\frac{N_1}{N_2} = \frac{\theta_2}{\theta_1} = 2 = \frac{\theta_2}{35} \Rightarrow \theta_2 = 70^0$

iii) $\frac{N_1}{N_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} \Rightarrow 2 = \frac{\omega_2}{2\theta} \Rightarrow \omega_2 = 40\, {}^{rad}\!/_{s}$

iv) $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{r_1\omega_1^2}{r_2\omega_2^2} = \frac{2(1)^2}{1(2)^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha_2 = 5 \Rightarrow \alpha_1 = 2.5$

۲) با توجه به شکل، مطلوبست گشتاور تولیدی موتور.

حل:



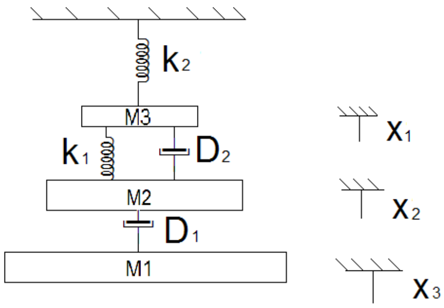
$\dot{y}_m = 8$

$f_m = 0.5$

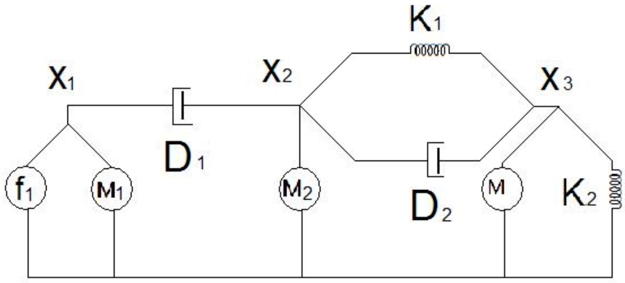
$\dot{y}_L = 4$

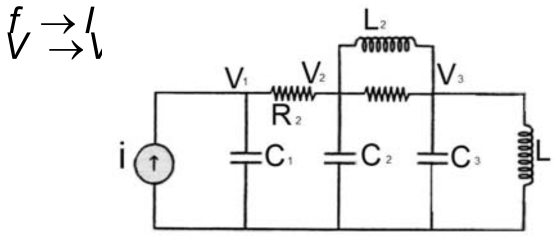
$f_L = 0.4$

۳) مدل الکتریکی شکل زیر را با روش‌های f-v و f-I بدست آورید.

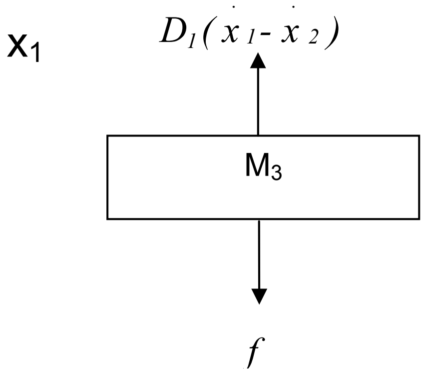


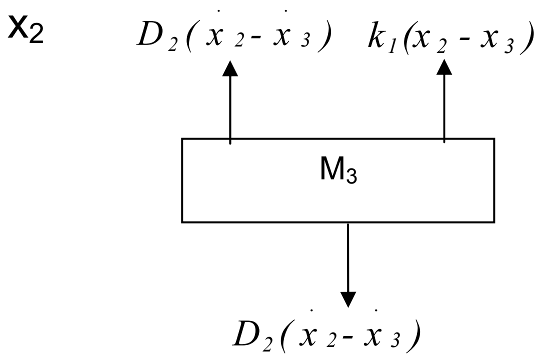
حل:





$$
\begin{cases}
m_1 \ddot{a}_1 = f - D_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \\
m_2 \ddot{x}_2 = D_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - D_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_3) - k_1(x_2 - x_3) \\
m_3 \ddot{x}_3 = D_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_3) + k(x_2 - x_3) - k_2 x_3
\end{cases}
$$



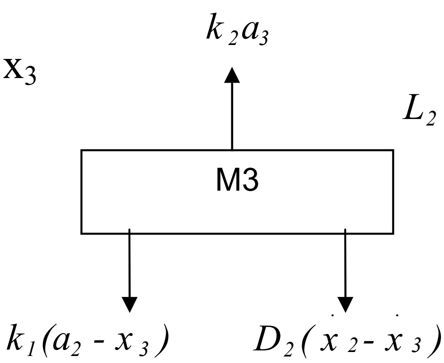


$KVL:$

$$V = L_1 \frac{d^2 q_1}{dt^2} + R_1\left(\frac{dq_1}{dt} - \frac{dq_2}{dt}\right) \Rightarrow \boxed{V = LDi_1 + R(i_1 - i_2)}$$

$$L_2 \frac{d^2 q_2}{dt^2} + R_2\left(\frac{dq_2}{dt} - \frac{dq_3}{dt}\right) + \frac{1}{C_1}(q_2 - q_3) = R_1\left(\frac{dq_1}{dt} - \frac{dq_2}{dt}\right)$$

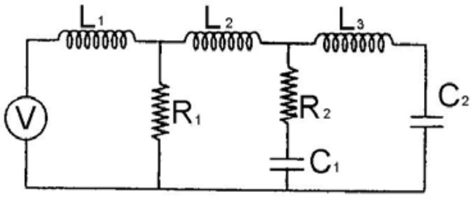
$$\boxed{L_2 DI_2 + R_2(i_2 - i_3) + \frac{1}{C_1 D}(i_2 - i_3) = R_1(i_1 - i_2)}$$



$$L_2 \frac{d^2q_3}{dt^2} + \frac{1}{CD} q_3 = R_2\left(\frac{dq_2}{dt} - \frac{dq_3}{dt}\right) + \frac{1}{C_1}(q_2 - q_3)$$

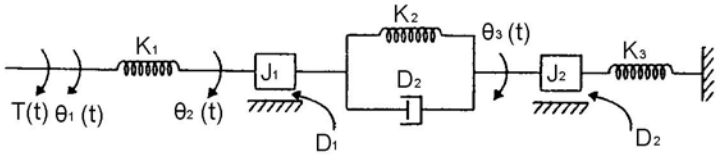
$$\boxed{L_3DI_3 + \frac{1}{CD} i_3 = R_2(i_2 - i_3) + \frac{1}{C_1D}(i_2 - i_3)}$$

$$\begin{cases} f \to V \\ V \to I \end{cases} \to$$



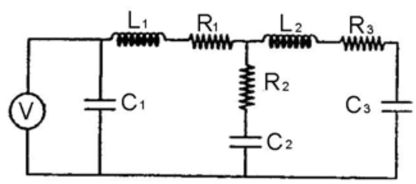
۴) مدار الکتریکی سیستم زیر را به دو روش T-V و T-i رسم کنید.

حل:

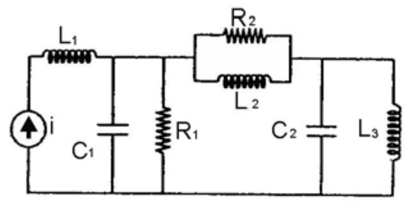


حل:

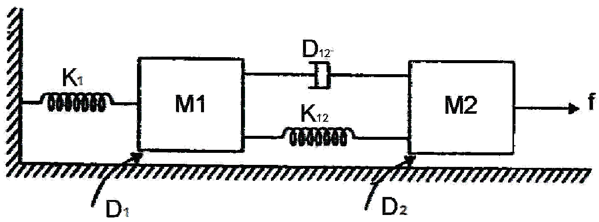
T-V



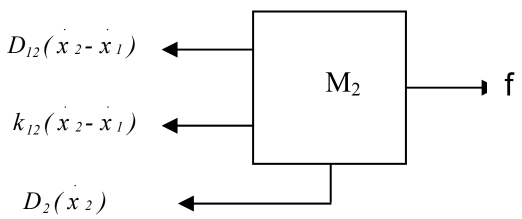
T-i



۵) مدارها و معادلات شکل زیر را رسم کنید.



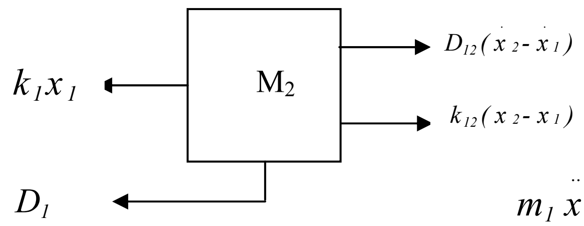
حل:



$$m_2 \ddot{x}_2 + D_{12}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + D_2(\dot{x}_2) + k_{12}(x_2 - x_1) = f$$

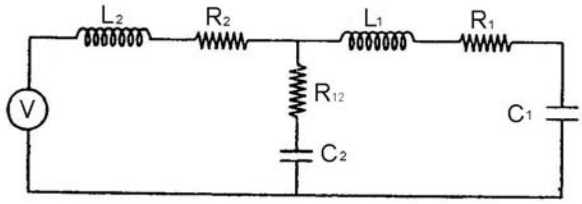
$$m_2 \dot{x}_2 + D_{12}(\dot{x}_2) - D_{12}\dot{x}_1 + D_2 \dot{x}_2 + k_{12}x_1 = f$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dot{x}_1 \\ \dot{x} = x_2 \\ \ddot{x} = \dot{x}_2 \end{cases}$$

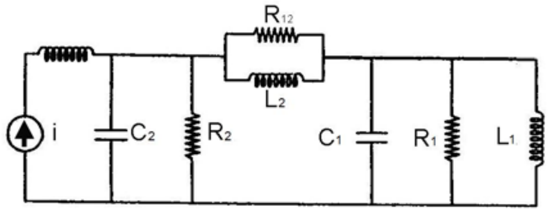


$$m_1 \ddot{x}_1 = D_{12}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_{12}(x_2 - x_1) - D_1 \dot{x}_1 - k_1 x_1$$

f-v:



f-i:

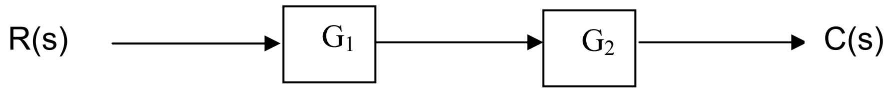


فصل(۶)

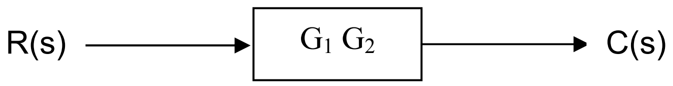
دیاگرام بلوکی (Block Diagram)

۱) تابع تبدیل سیستم زیر را درآورید.

i)

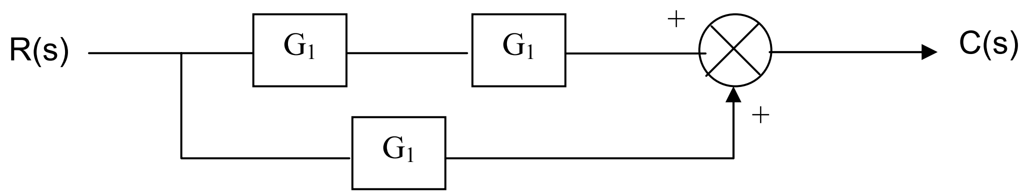


حل:

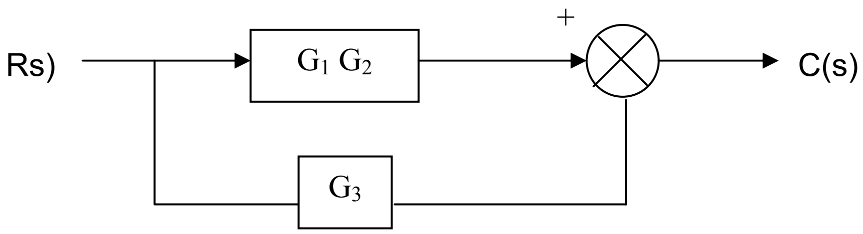


$$\frac{C(s)}{R(s)} = G_1 G_2$$

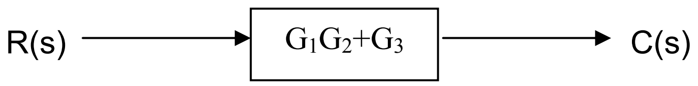
ii) a)



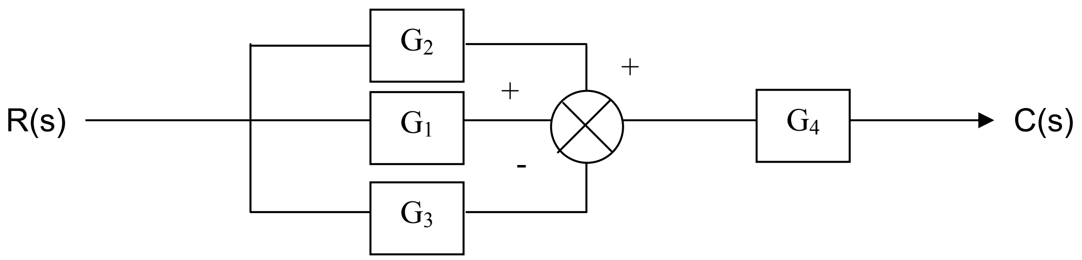
b)



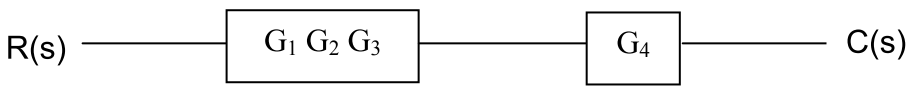
c)



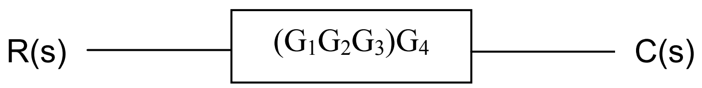
iii) a)



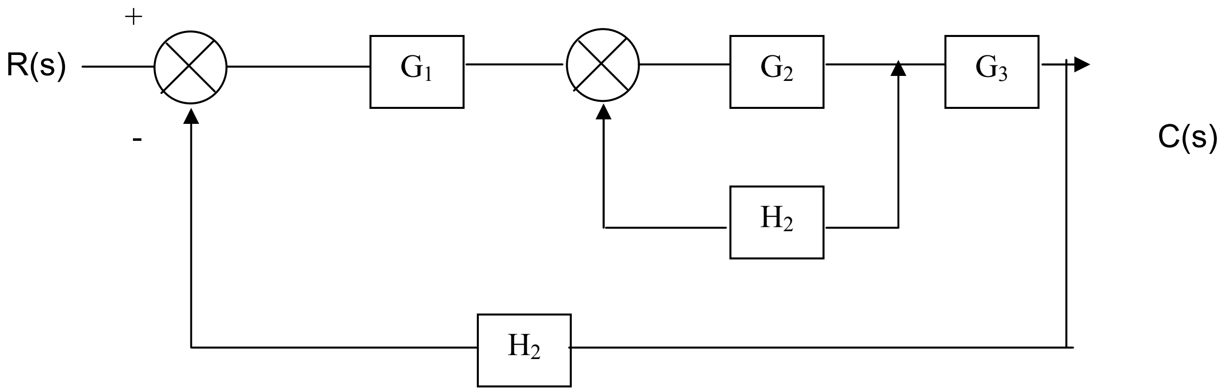
b)



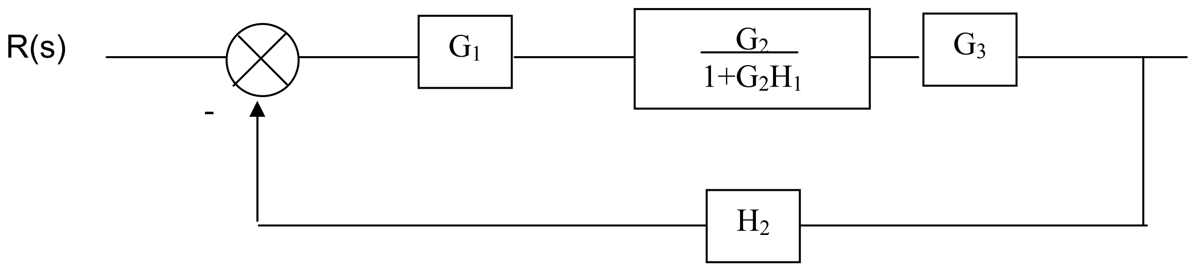
c)



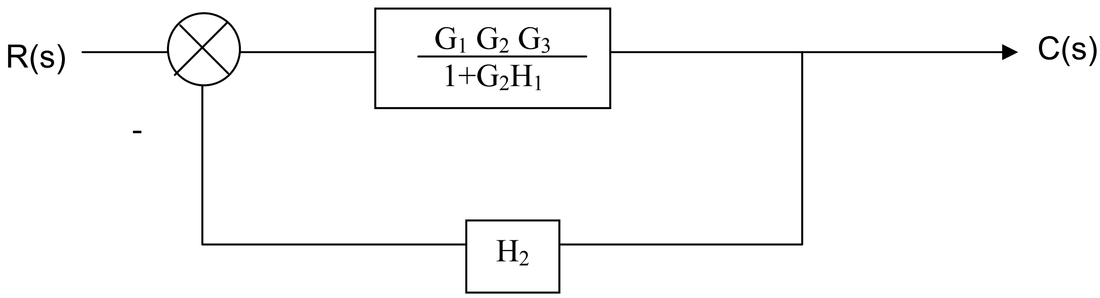
iv) a)



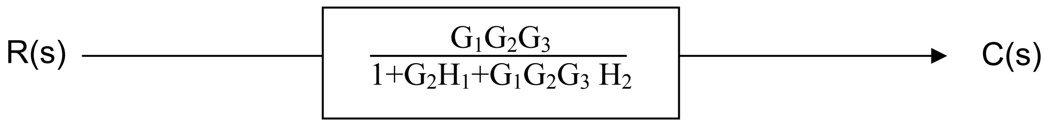
b)



c)

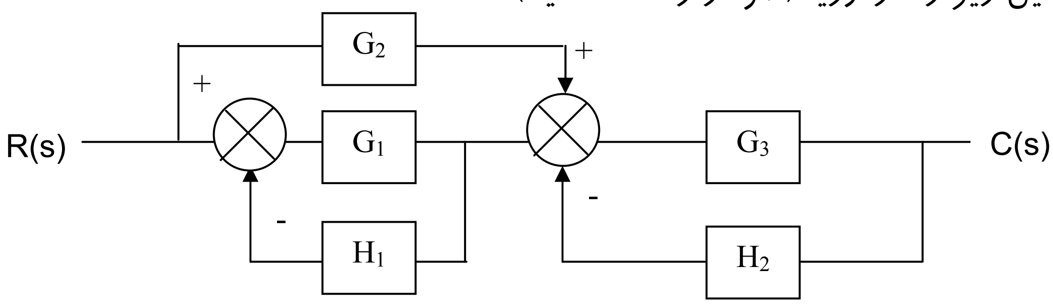


d)

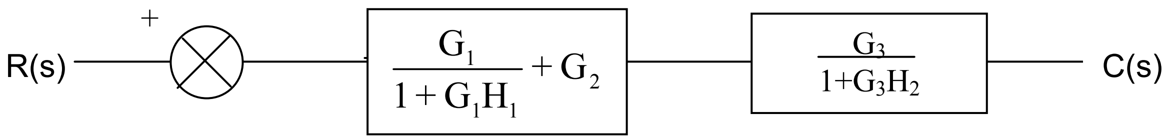


۲) تابع تبدیل زیر را درآورید(نمودار را ساده کنید).

a)



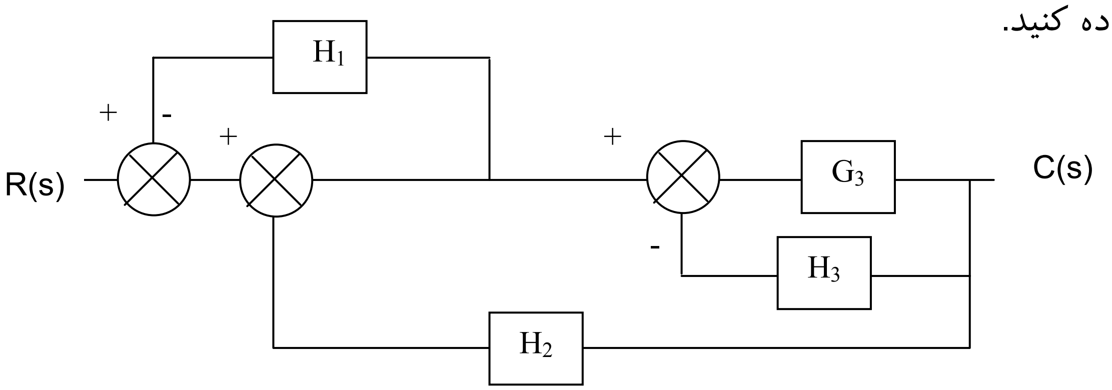
b)



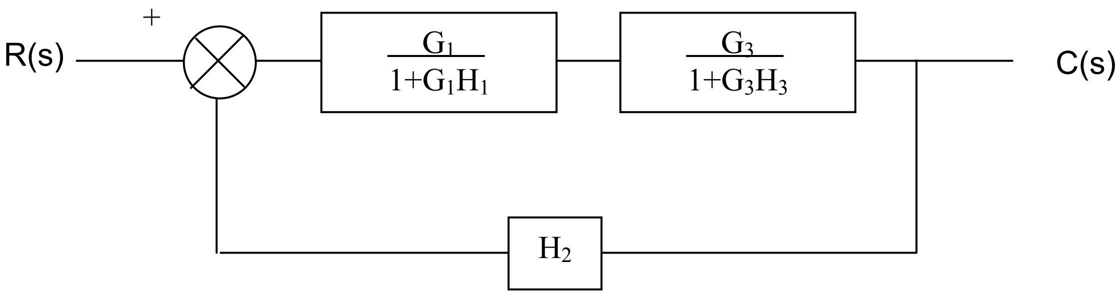
c)

۳) ساده کنید.

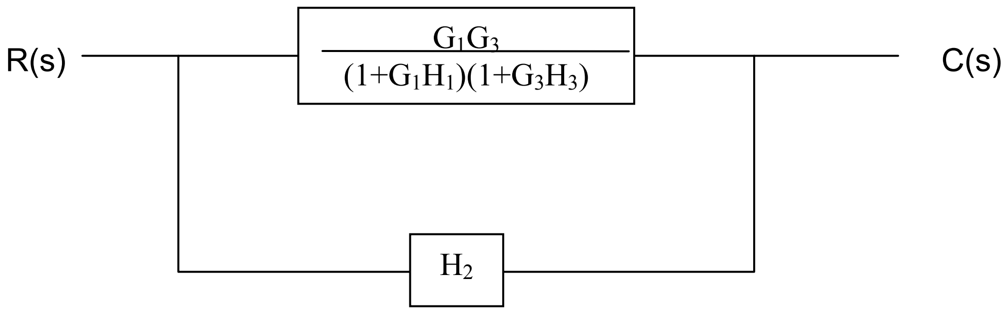
a)



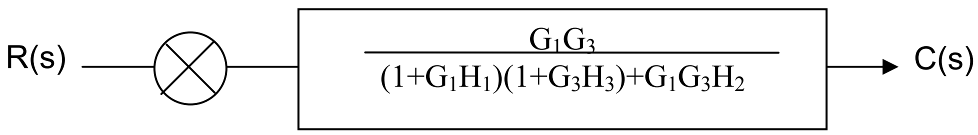
b)



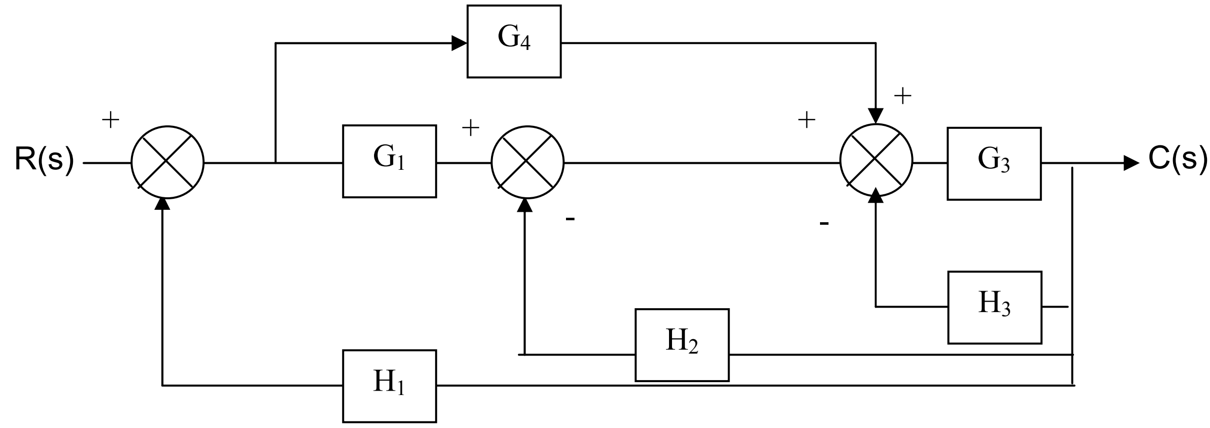
c)

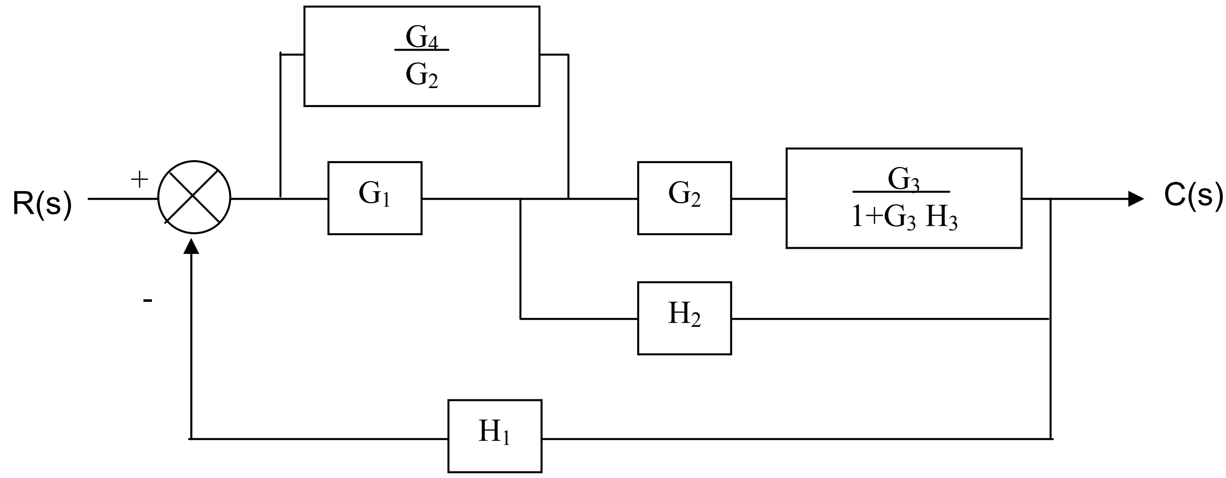


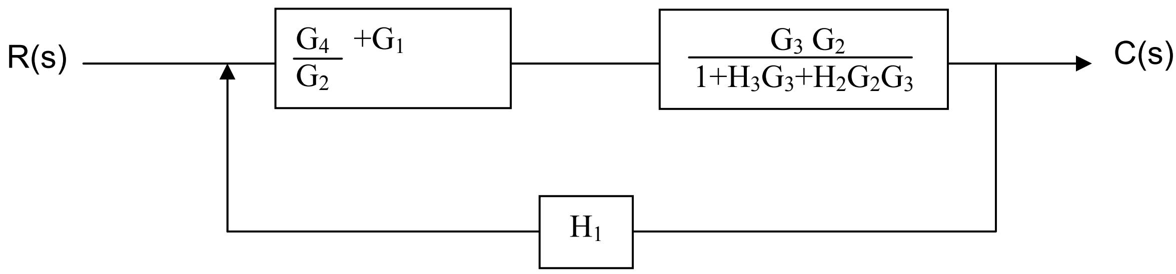
d)

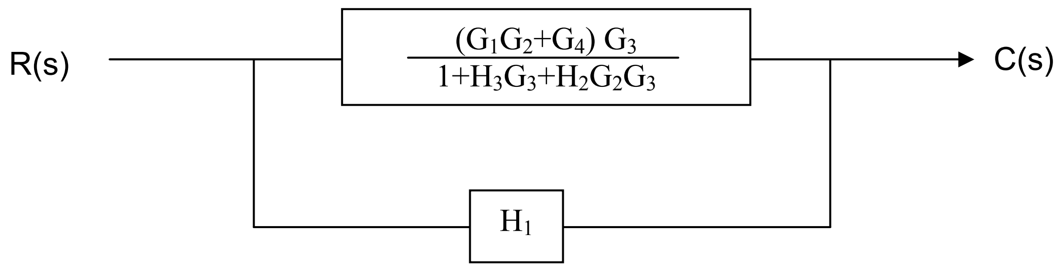


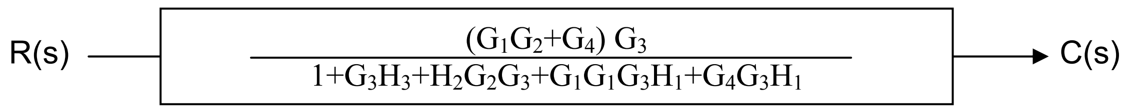
۴) تابع تبدیل سیستمی که بلوک دیاگرام آن به‌شکل زیر است را تعیین کنید.



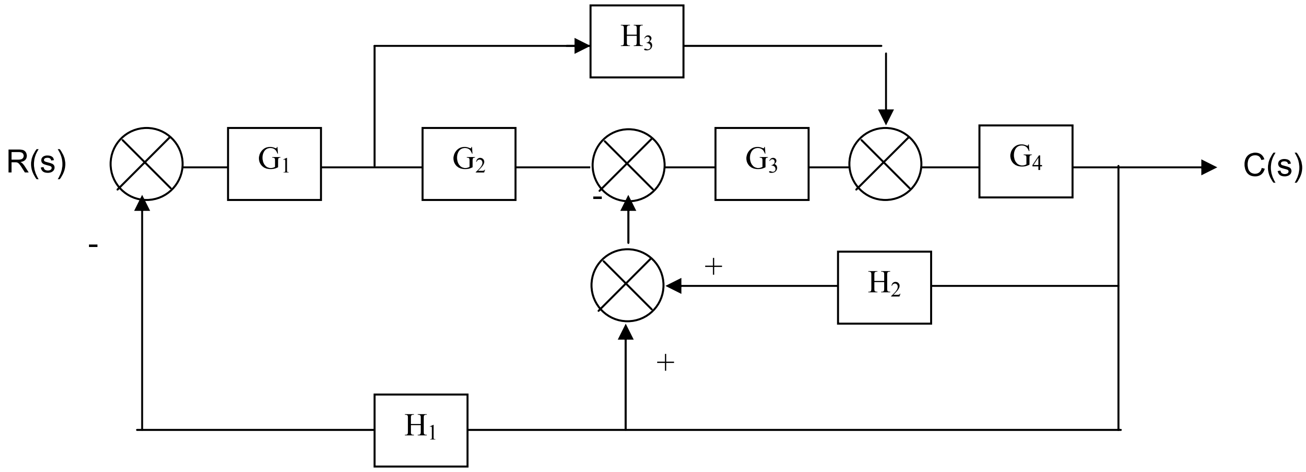


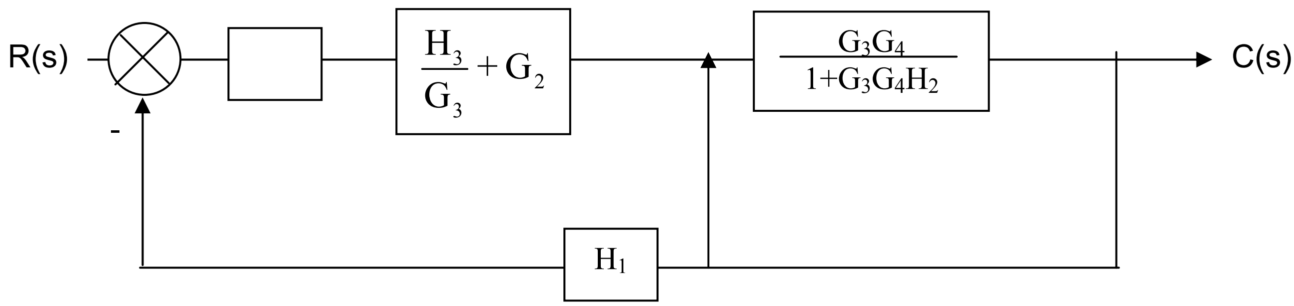


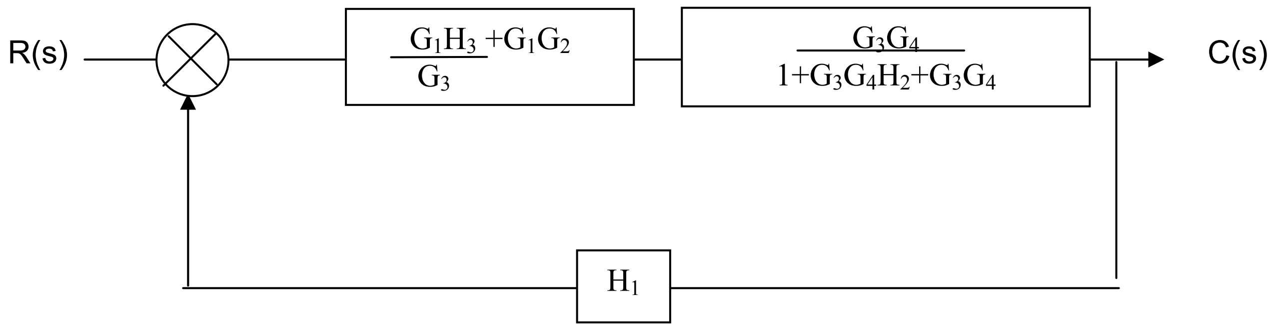


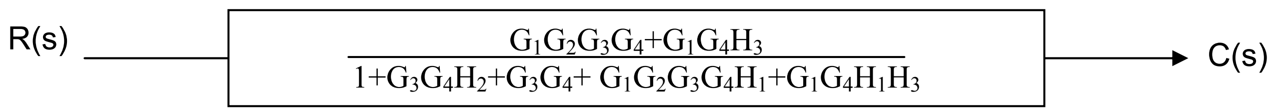


۵) تابع تبدیل را محاسبه کنید.

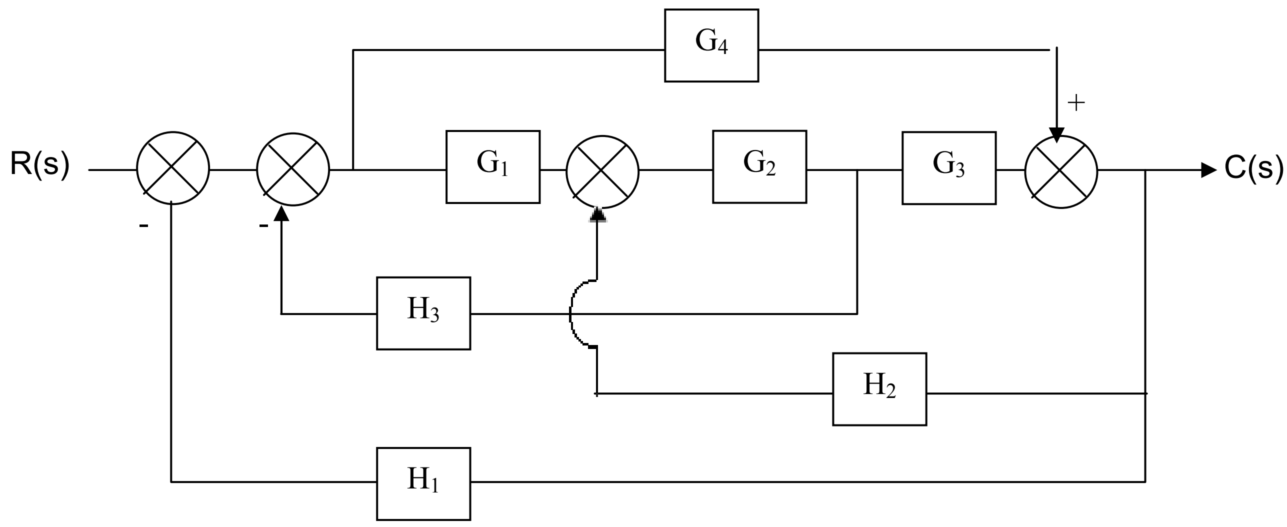




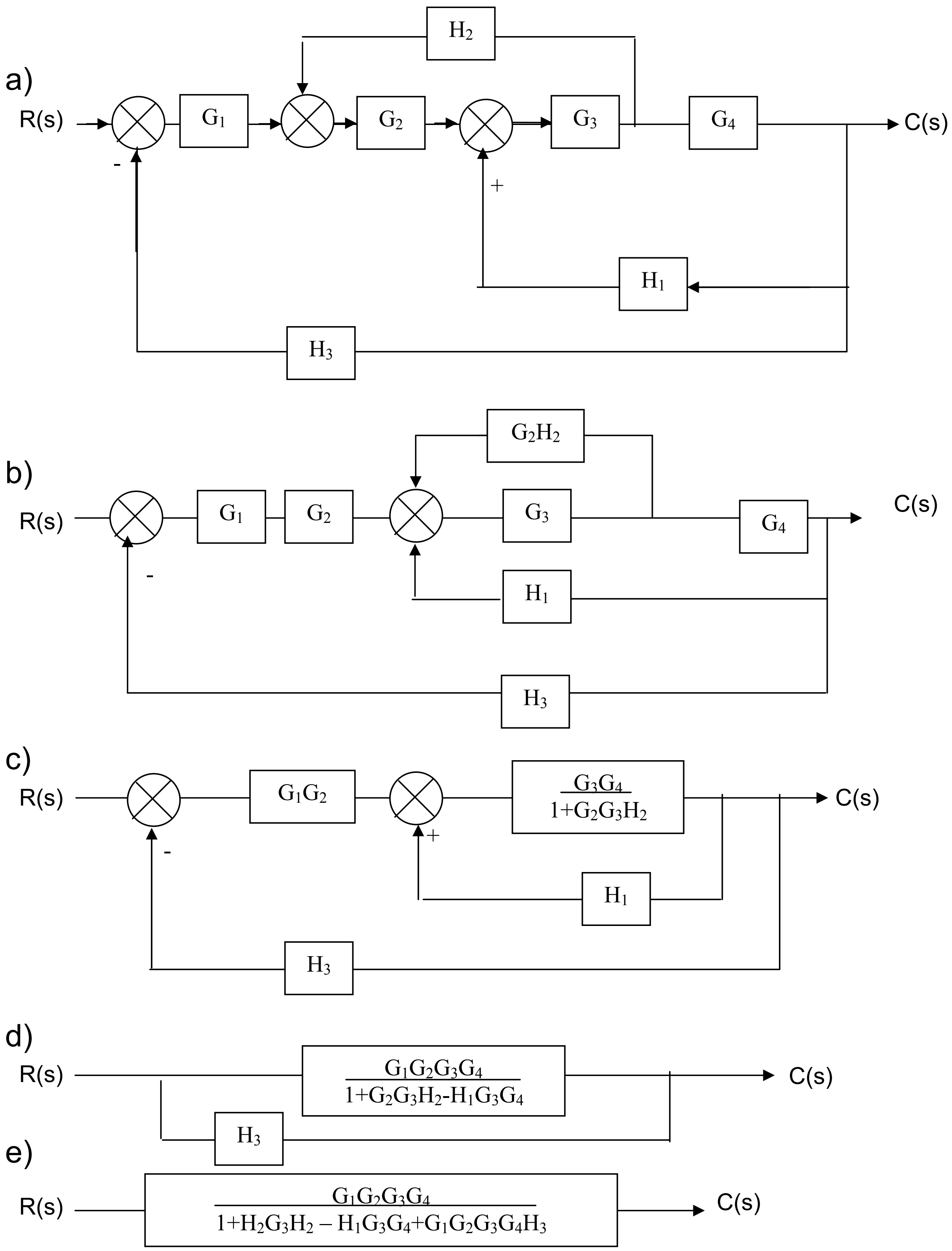




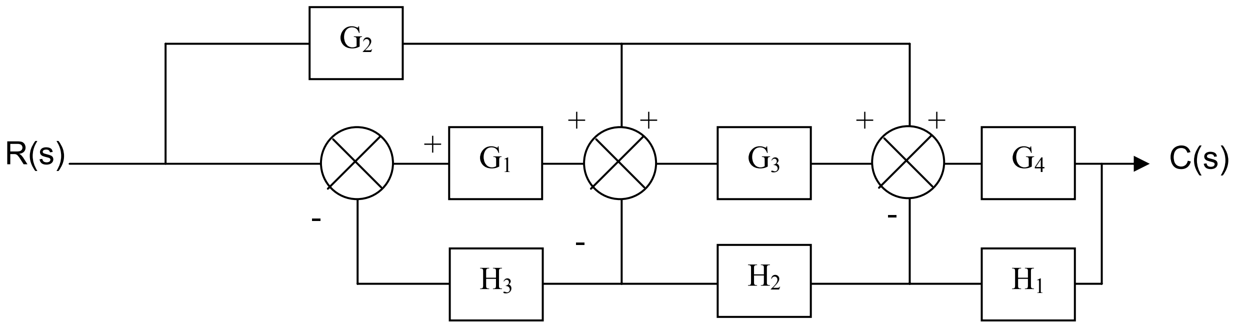
۶) دیاگرام را ساده کرده و تابع تبدیل را بنویسید.



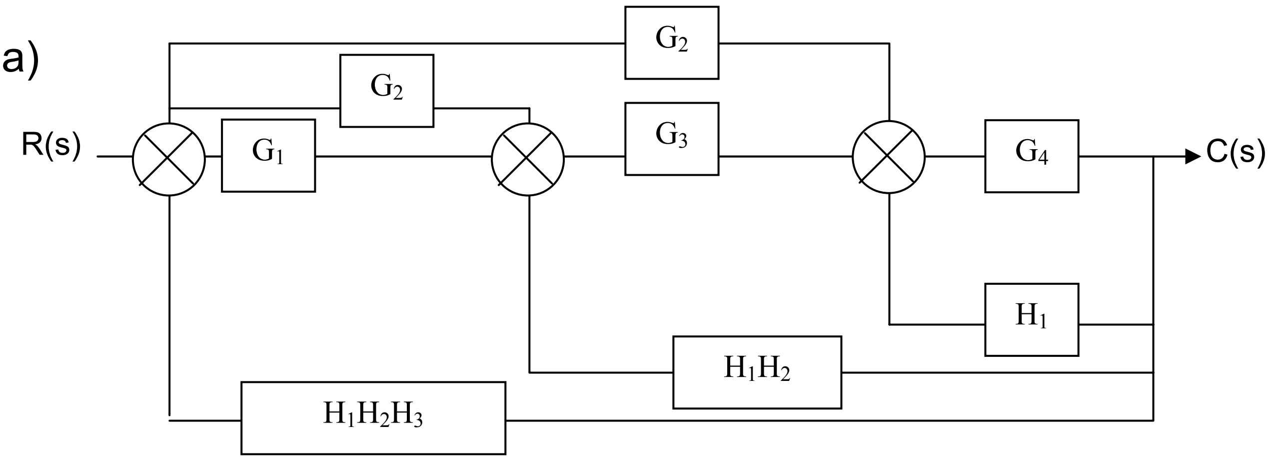
۷) دیاگرام زیر را ساده کرده و تابع تبدیل سیستم را درآورید.



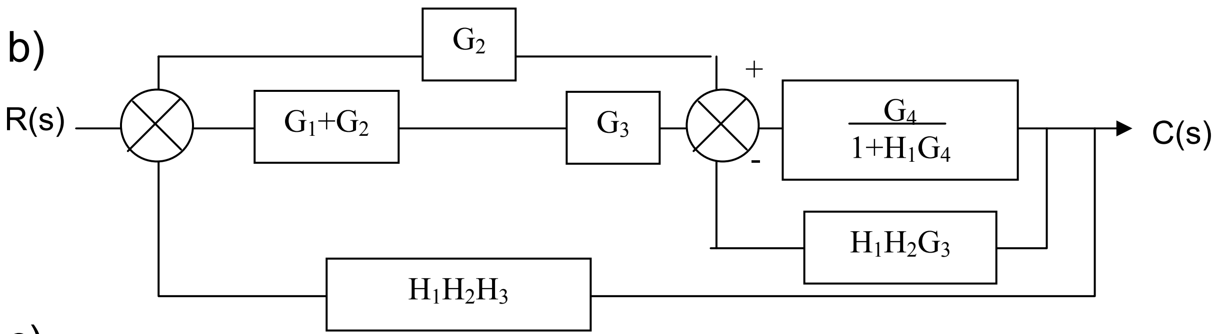
۸) شکل زیر یک دیاگرام بلوکی سیستم خطی فیدبک‌دار را نشان می‌دهد. تـابع تبـدیل آن را بدسـت آورید.



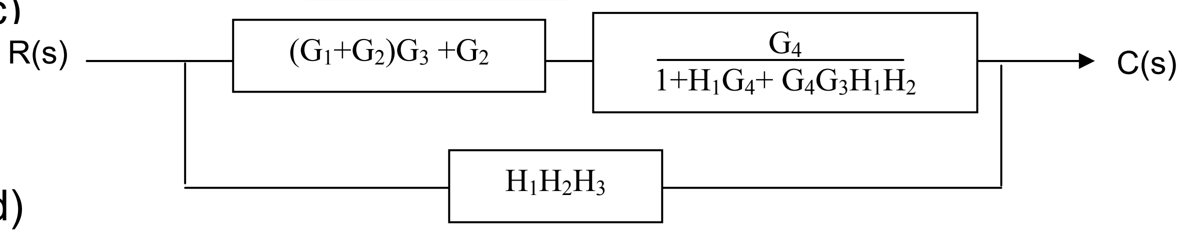
حل: a)



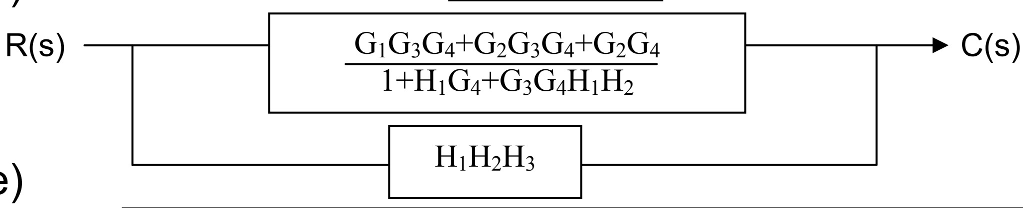
b)



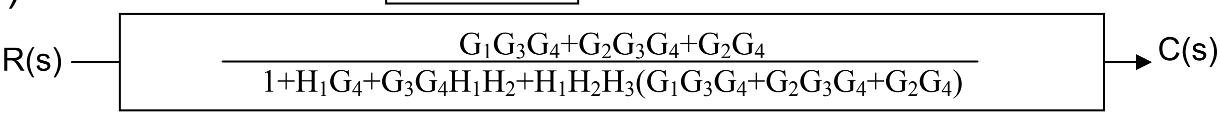
c)



d)



e)

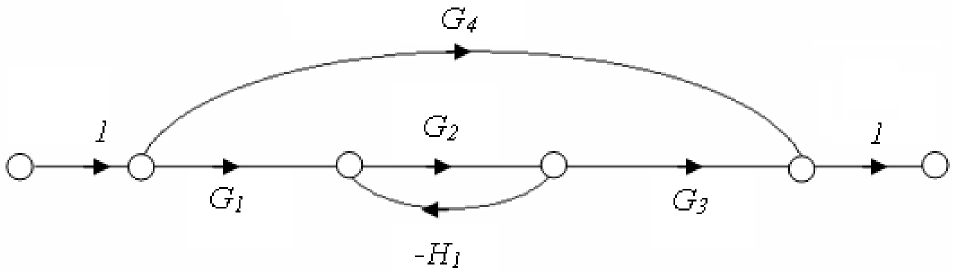


فصل (۷)

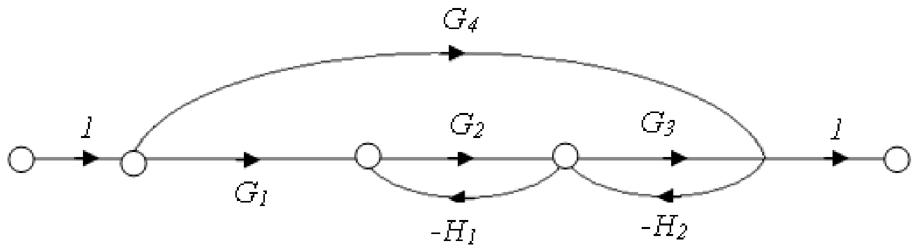
دیاگرام جریانی

۱) تابع تبدیل هریک از شکل‌های زیر را بدست آورید.

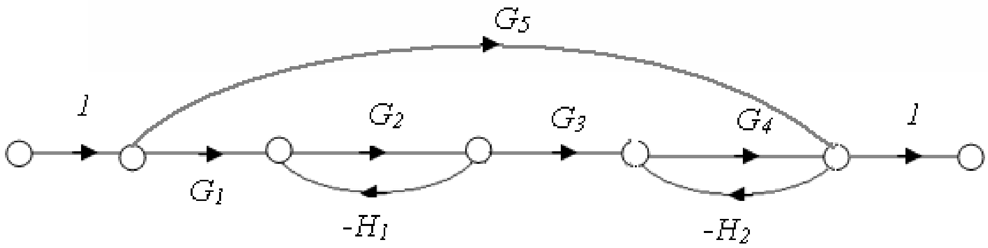
a)



b)



c)

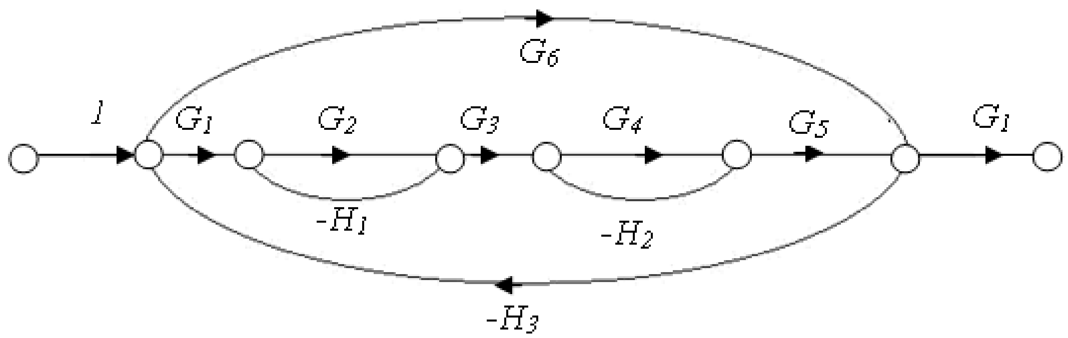


$$(a)\frac{G_1G_2G_3+G_4(I+G_2H_4)}{I+G_2H_1}$$

$$(b)\frac{G_1G_2G_3+G_4(I+G_2H_1)}{I+G_2H_1+G_3H_2}$$

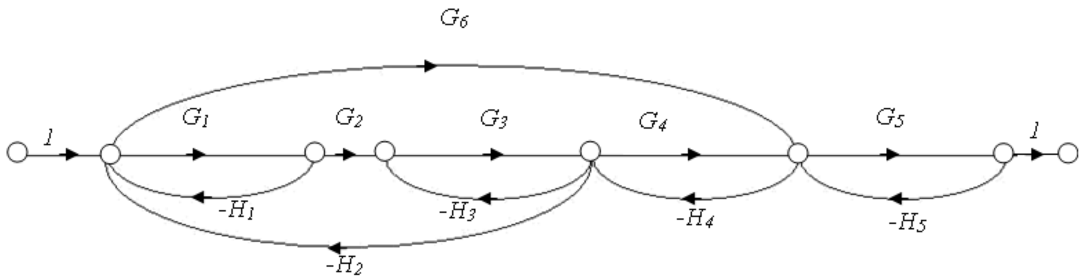
$$(c)\frac{G_1G_2G_3G_4+G_5(I+G_2H_1)}{I+G_2H_1+G_4H_2+G_2G_4H_1H_2}$$

۲) تابع تبدیل دیاگرام و جریانی زیر را بیابید.



$$\frac{G_1G_2G_3G_4G_5 + G_6(I + G_1H_1 + G_4H_2 + G_2G_4H_1H_2)}{I + G_1H_1 + G_4H_2 + G_1G_2G_3G_4G_5H_1 + G_6H_1 + G_2G_4H_1H_2 + G_1G_6H_1H_3 + G_4G_6H_2H_3}$$

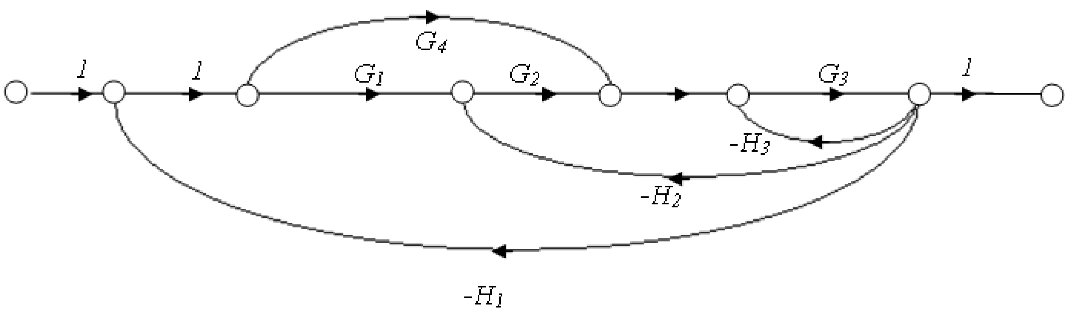
۳) تابع تبدیل دیاگرام و جریانی زیر را بیابید.



$$\frac{G_1G_2G_3G_4G_5 + G_6(I + G_1H_1 + G_3H_3 + G_4H_4 + G_1G_4H_1H_3 + G_1G_4H_1H_4) +}{I + G_1H_1 + G_3H_3 + G_1G_2G_3H_2 + G_4H_4 + G_5H_5 + G_1G_3H_1H_4 + G_1G_4H_1H_4}$$

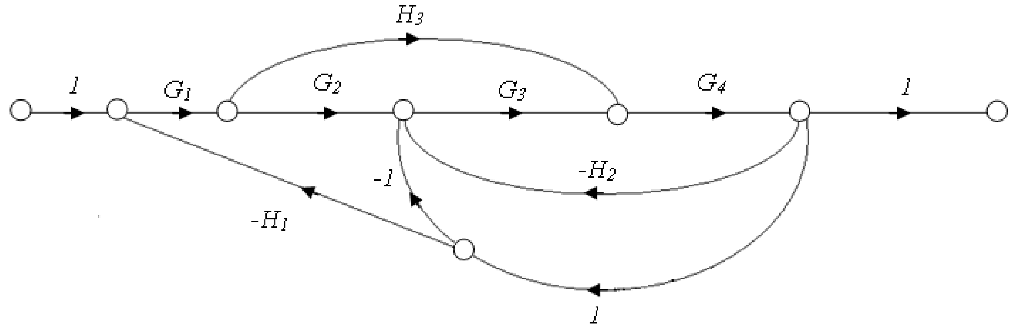
$$G_1G_5H_1H_5 + G_1G_5H_1H_5 + G_1G_2G_4G_5H_2H_5 + G_1G_2G_5H_1H_2H_5$$

۴) تابع تبدیل دیاگرام و جریانی زیر را بیابید.



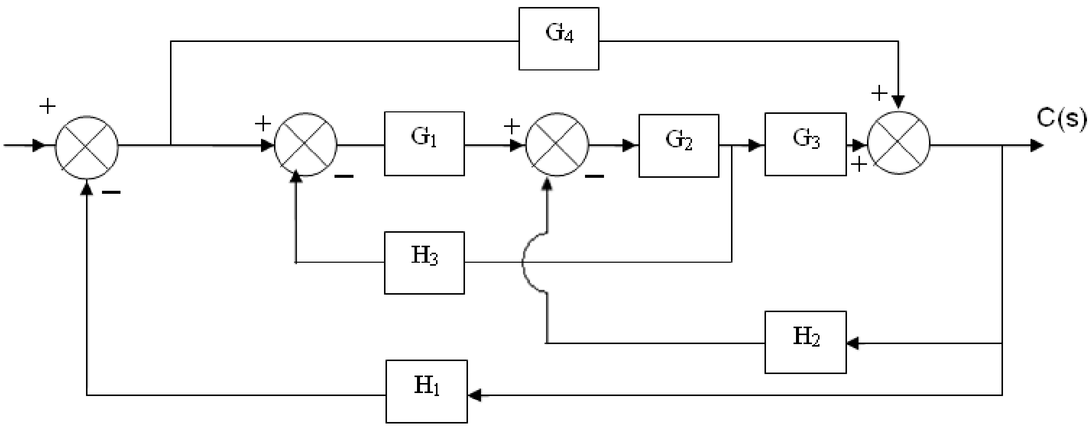
$$\frac{(G_1G_2 + G_4)G_3}{I + G_1G_2G_3H_1 + G_4G_3H_1 + G_2G_3H_2 + G_3H_3}$$

۵) تابع تبدیل بلوکی دیاگرام زیر را بیابید.



$$\frac{G_1G_2G_3G_4 + G_1G_4H_3}{I + G_3G_4 + G_3G_4H_2 + G_1G_4H_1H_2 + G_1G_2G_3G_4H_1}$$

۶) تابع تبدیل بلوکی دیاگرام زیر را بیابید.



$$\frac{G_1G_2G_3 + G_4}{I + G_1G_2G_3H_1 + G_1G_2H_3 + G_2G_3H_3 + G_4H_1 - G_2G_4H_2H_3}$$

فصل (۸)

آنالیز زمان در سیستم کنترلی

۱) مطلوبست ثوابت خطای پله‌ـشیب و منحنی درجه۲ برای هریک از توابـع تبـدیل زیرکـه بصـورت مدار بار در زیر نشان داده شده‌اند.

i) $G_{(s)} = \dfrac{1200}{(1+0.25)(1+11S)}$

حل: $K_p = \lim\limits_{s\to 0} G_{(s)}H_{(s)} = \lim\limits_{s\to 0} \dfrac{1200}{(1+0.25)(1+11S)} = 1200$

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG_{(s)}H_{(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{1200}{(1+0.25)(1+11S)} = 0$$

$$K_u = \lim_{s\to 0} s^2G_{(s)}H_{(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{1200\, s^2}{(1+0.25)(1+11S)} = 0$$

ii) $G_{(s)} = \dfrac{120}{s(s^2+10s+120)}$

حل: $K_p = \lim\limits_{s\to 0} G_{(s)}H_{(s)} = \lim\limits_{s\to 0} \dfrac{120}{s(s^2+10s+120)} =$ ¥

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG_{(s)}H_{(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{120s}{s(s^2+10s+120)} = 1$$

$$K_u = \lim_{s\to 0} s^2G_{(s)}H_{(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{120s}{(s^2+10s+120)} = 0$$

iii) $G_{(s)} = \dfrac{110}{s(1+0.2s)(1+12s)}$

حل: $K_p = \lim\limits_{s\to 0} G_{(s)}H_{(s)} = \lim\limits_{s\to 0} \dfrac{110}{s(1+0.2s)(1+12s)} = \infty$

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG_{(s)}H_{(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{110}{(1+0.2s)(1+12s)} = 110$$

$$K_u = \lim_{s \to 0} s^2 G_{(s)} H_{(s)} = \lim_{s \to 0} \frac{110s}{(1+0.2s)(1+12s)} = 0$$

iv) $G_{(s)} = \dfrac{120}{s(s^2+10s+110)}$

حل: $$K_p = \lim_{s \to 0} G_{(s)} H_{(s)} = \lim_{s \to 0} \frac{120}{s(s^2+10s+110)} = \infty$$

$$K_v = \lim_{s \to 0} s G_{(s)} H_{(s)} = \lim_{s \to 0} \frac{120s}{s(s^2+10s+110)} = \frac{12}{11}$$

$$K_u = \lim_{s \to 0} s^2 G_{(s)} H_{(s)} = \lim_{s \to 0} \frac{120s}{s(s^2+10s+110)} = 0$$

v) $G_{(s)} = \dfrac{1100}{s(s+10)(s+110)}$

حل: $$K_p = \lim_{s \to 0} \frac{1100}{s(s+10)(s+110)} = \infty$$

$$K_v = \lim_{s \to 0} \frac{1100}{(s+10)(s+110)} = 1$$

$$K_u = \lim_{s \to 0} \frac{1100s}{(s+10)(s+110)} = 0$$

vi) $G_{(s)} = \dfrac{10(1+4s)(1+6s)}{s^2(s^2+2s+1)}$

حل: $$K_p = \lim_{s \to 0} \frac{10(1+4s)(1+6s)}{s^2(s^2+2s+1)} = \infty$$

$$K_v = \lim_{s \to 0} \frac{10(1+4s)(1+6s)}{s(s^2+2s+1)} = \infty$$

$$K_u = \lim_{s \to 0} \frac{10(1+4s)(1+6s)}{(s^2+2s+1)} = 10$$

۲) مطلوبست تعیین نوع، خطای حالت ماندگار و ثابتهای خطای سیستمی با تابع تبدیل مدارباز $G_{(s)} = \dfrac{k(s+4)}{s(s^3+8s^2+4)}$ وقتی ورودی $\dfrac{A}{2}t^2$ است.

$$r(t) = \frac{A}{2}t^2 \to R_{(s)} = \frac{A}{s^3}$$

i) سیستم نوع (1) است.

$$\begin{cases} K_p = \lim\limits_{s\to 0} G_{(s)}H_{(s)} = \lim\limits_{s\to 0} \dfrac{k(s+4)}{s(s^3+8s^2+4)} = \infty \\ K_v = \lim\limits_{s\to 0} \dfrac{k(s+4)}{(s^3+8s^2+4)} = k \\ K_u = \lim\limits_{s\to 0} \dfrac{ks(s+4)}{(s^3+8s^2+4)} = 0 \end{cases}$$

$$C_{ss} = \lim_{s\to 0}\left\{\frac{sR_{(s)}}{1+G_{(s)}H_{(s)}}\right\} = \frac{A}{s^2 + \dfrac{ks^2+4ks}{s^3+8s^2+4}} = \infty$$

۳) مطلوبست تعیین موارد زیر برای هریک از حالات باتوجه به سیستم شکل(۱).

نوع سیستم، ثوابت خطا و خطای حالت ماندگار اگر

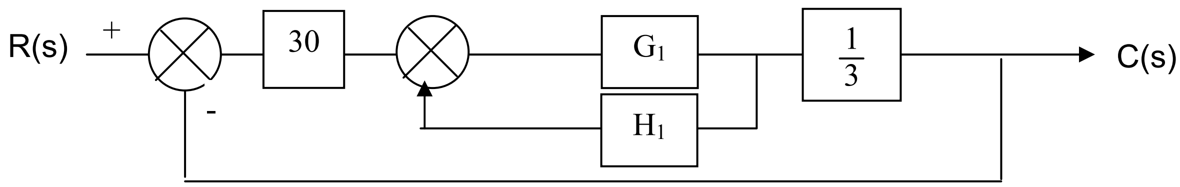
a) $r(t) = 2$

b) $r(t) = 6t$

c) $r(t) = 12 + 6t + \dfrac{s}{2}t^2$

حل:

$$G_{(s)} = \frac{25}{(s+5)(s+10)} \qquad H_{(s)} = 5s$$



$$K_p = \lim_{s \to 0} G_{(s)} H_{(s)} = \lim_{s \to 0} \frac{125s}{(s+5)(s+10)} = 0$$

$$K_v = \lim_{s \to 0} sG_{(s)} H_{(s)} = \lim_{s \to 0} \frac{125s^2}{(s+5)(s+10)} = 0$$

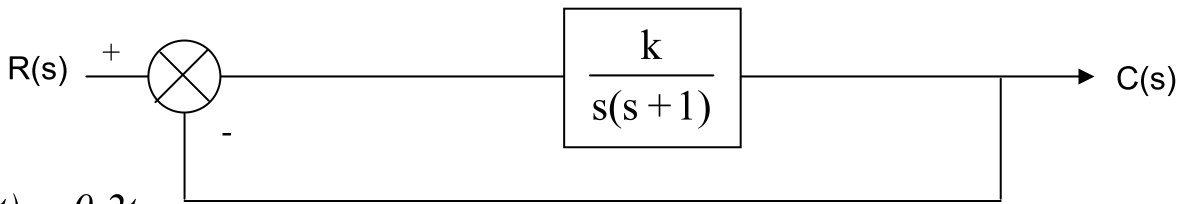
$$K_u = \lim_{s \to 0} s^2 G_{(s)} H_{(s)} = \lim_{s \to 0} \frac{125s^2}{(s+5)(s+10)} = 0$$

a) $\begin{cases} r(t) = 12 \\ R_{(s)} = \dfrac{12}{s} \end{cases} \quad C_{ss} = \lim_{s \to 0} \dfrac{sR_{(s)}}{1 + G_{(s)} H_{(s)}} = \lim_{s \to 0} \dfrac{12}{1 + \dfrac{125s}{(s+5)(s+10)}} = 12$

b) $\begin{cases} r(t) = 6t \\ R_{(s)} = \dfrac{6}{s^2} \end{cases} \quad C_{ss} = \lim_{s \to 0} \dfrac{6}{s + \dfrac{125s^2}{(s+5)(s+10)}} = \infty$

c) $\begin{cases} r(t) = 12 + 6t + \dfrac{\delta}{2} t \\ R_{(s)} = \dfrac{12}{s} + \dfrac{6}{s^2} + \dfrac{\delta}{s^3} \end{cases} \quad C_{ss} = \lim_{s \to 0} \dfrac{12 + \dfrac{6}{s} + \dfrac{\delta}{s^2}}{1 + \dfrac{125s}{(s+5)(s+10)}} = \infty$

۴) مطلوبست تغییرات k در سیستم شکل زیر اگر $C_{ss}<0.004$ و $r(t)=0.2t$ باشد.



$$\begin{cases} r(t) = 0.2t \\ R_{(s)} = \dfrac{0.2}{s^2} \Rightarrow C_{ss} = \lim_{s \to 0} \dfrac{sR_{(s)}}{1 + G_{(s)} H_{(s)}} = \lim_{s \to 0} \dfrac{0.2}{s + \dfrac{k}{s+1}} \\ H_{(s)} = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow C_{ss} = \frac{0.2}{k} < 0.004 \Rightarrow k > \frac{0.2}{0.004} \Rightarrow k > 50$$

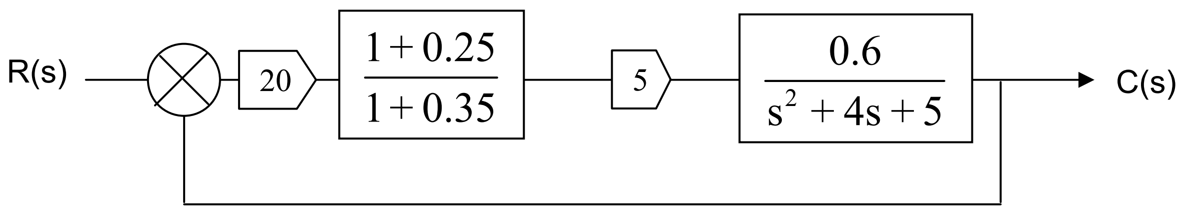
۵) یک سیستم کنترل فیدبک واحد دارای یک تابع تبدیل بصورت زیر است. اگر ورودی r(t)=1+5(t) باشد، مطلوبست حداقل مقدار k بطوری‌که خطای حالت ماندگار کمتر از 0.1 باشد.

حل: $$C_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{sR(s)}{1+G(s)H(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{1+\frac{5}{s}}{1+\frac{k(2s+1)}{s(4s+1)(s^2+2s+3)}} = \frac{5}{\frac{k}{3}} = \frac{15}{k}$$

$$\frac{15}{k} \le 0.1 \Rightarrow k \ge 150 \Rightarrow k = 150$$

۶) برای سیستم نمایش داده شده در شکل زیر مطلوبست توابت خطا و خطای حالت ماندگار برای حالات زیر:

i) ورودی پله واحد



$$G_{(s)} = \frac{60(1+0.25)}{(1+0.35)(s^2+4s+5)} \begin{cases} K_p = \lim\limits_{s\to 0} G_{(s)}H_{(s)} = \dfrac{60}{5} = 12 \\ K_v = 0 \\ K_u = 0 \end{cases}$$

i) $$C_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+\frac{60(1+0.25)}{(1+0.3s)(s^2+4s+5)}} = \frac{1}{1+\frac{60}{5}} = \frac{1}{13} = 0.076923 \quad R_{(s)} = \frac{1}{s}$$

ii) $$\lim_{s\to 0} \frac{1}{s+\frac{60s(1+0.25)}{(1+0.3s)(s^2+4s+5)}} = \infty \qquad R_{(s)} = \frac{1}{s^2}$$

iii) $$R_{(s)} = \frac{2}{s^3} \Rightarrow \lim_{s\to 0} \frac{2}{s^2+\frac{60s^2(1+0.25)}{(1+0.3s)(s^2+4s+5)}} = \infty$$

۷) تابع تبدیل سیستم فیدبک واحد بصورت $G_{(s)} = \dfrac{k}{s(sT+1)}$ است. مطلوبست:

i)

۸) برای تابع تبدیل زیر مطلوبست: i) ω_n ii) $C_{(t)}, T_s, M_p, T_p, T_r, \omega_d$.

حل: $$\frac{C_{(s)}}{R_{(s)}} = \frac{25}{s^2 + 6s + 25} \Rightarrow \omega_n{}^2 = 25 \Rightarrow \omega_n = 5$$

$$2\zeta\omega_n = 6 \Rightarrow \frac{6}{2(5)} = 0.6 = \zeta$$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} = 5\sqrt{1 - 0.36} \Rightarrow \omega_d = 4\ rad/s$$

$$T_r = \frac{\pi - \alpha}{\omega_d} = \frac{\pi - tg^{-1}\dfrac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}{\omega_d} = \frac{3.14 - tg^{-1}\dfrac{0.6}{0.8}}{4} \Rightarrow T_r = 0.6245$$

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{3.14}{4} = 0.785$$

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{0.6 \times 5} = 1.33$$

$$M_p = 100 \times e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = 100 \times e^{\frac{-0.6 \times 3.14}{0.8}} = 100 \times e^{-2.35} \Rightarrow M_p = 9.5369\%$$

$$\frac{Y_s}{X_s} = \frac{25}{s^2 + 6s + 25}$$

$$C_{(t)} = \left[1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} Sin(\omega_d t + \alpha)\right] = \left[1 - \frac{e^{-3t}}{0.8} Sin(4t + 0.6435)\right]$$

$$Þ\, C_{(t)} = 1 - 1.25e^{-3t} Sin(4t + 0.6435)$$

۹) سیستم کنترلی درجه ۲ با تابع تبدیل مقابل مفروض است که در آن $\theta_{(s)}$ خروجـی و $T_{(s)}$ ورودی است. اگر برای ورودی از یک پله به میزان 12Nm استفاده کنیم، مطلوبست $K, D, \dot{y}$ برای رسـیدن به نتایج زیر:

$$M_p = 7\%, T_p = 1.2$$

$$\frac{\theta_{(s)}}{T_{(s)}} = \frac{1}{\dot{y}s^2 + Ds + k}$$

حل: $T_p = 1.2 = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{3.14}{\omega_d} \Rightarrow \omega_d = 2.617$

$$M_p = 7\% \Rightarrow \frac{-\zeta\pi}{e\sqrt{1-\zeta^2}} = 0.07 \Rightarrow \frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} = -2.65926$$

$$\Rightarrow \zeta^2 = 0.4174 \Rightarrow \zeta = 0.6461$$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \Rightarrow \omega_n = \frac{2.617}{\sqrt{1-0.4174}} = 3.4286$$

می‌دانیم: $G_{(s)} = \frac{{\omega_n}^2}{s^2 + 2{\zeta_n}^0 + {\omega_n}^2} = \frac{1}{\frac{1}{{\omega_n}^2}s^2 + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + 1}$

$$G_{(s)} = \frac{1 \times \frac{0.6}{12}}{0.085s^2 + 0.3769s + 1} \Rightarrow G_{(s)} = \frac{1}{1.7029s^2 + 7.54s + 20}$$

$$\begin{cases} \dot{y} = 1.7029\ N.m/rad/s \\ D = 7.54\ N.m/rad/s \end{cases} \qquad K = 20\ N.m/rad$$

۱۰) تابع تبدیل سیستم درجه ۲ فیدبک واحد در حالت مدار بار بصورت $G_{(s+5)} = \frac{500}{s(s+5)}$است.

مطلوبست:

i) ω_n, ζ

ii) T_p, M_p

iii) T_s

iv) خطای حالت ماندگار اگر ورودی سیستم تابع شیب به میزان 0.5 باشد.

حل:

$$\text{i)}\ G_{(s)} = \frac{500}{s^2+5s+500} \Rightarrow \begin{cases} \omega_n = \sqrt{500} = 10\sqrt{5} = 22.36 \\ 2\zeta\omega_n = 5 \Rightarrow \zeta = \frac{5}{2\times\sqrt{500}} = 0.1118 \end{cases}$$

$$\text{ii)}\ M_p = 100 \times e^{\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \Rightarrow 100 \times e^{\frac{-3.14\times 0.1118}{\sqrt{1-0.1118^2}}} = 35.34$$

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{3.14}{22.36\sqrt{1-0.1118^2}} = 0.141s$$

$$\text{iii)}\ T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{0.1118\times 22.36} = 1.6s$$

iv)

$$\begin{cases} R(t) = 0.5 \\ A = 0.5 \end{cases}$$

$$K_v = sG_{(s)}H_{(s)} = \frac{500}{s+5} = 100$$

$$C_{ss} = \frac{A}{K_v} = \frac{0.5}{100} = 0.005$$

۱۱) یک تابع تبدیل مداراباز یک سیستم سرو بصورت $G_{(s)} = \frac{10}{s(s+2)}$ است. مطلوبست:

i) زمان پاسخ برای ورودی پله واحد

ii) فرکانس طبیعی سیستم

iii) M_p, T_p

iv) خطای حالت ماندگار برای ورودی 1+4t

حل:

$$G_{(s)} = \frac{10}{s^2 + 2s + 10} \Rightarrow \begin{cases} \omega_n = \sqrt{10} = 3.1623 \\ 2\zeta\omega_n = 2 \Rightarrow \zeta = 0.31623 \end{cases}$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = \sqrt{10}\sqrt{1 - 0.3162^2} = 3$$

$$C_{(t)} = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} Sin(\omega_d t + tg^{-1} \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}})$$

$$C_{(t)} = 1 - \frac{e^{-0.31623 \times 3.1623t}}{\sqrt{1 - 0.31623^2}} Sin3t + tg^{-1} \frac{0.31623}{\sqrt{1 - 0.31623^2}}$$

$$C_{(t)} = 1 - 1.0549e^{-t} Sin(\overbrace{3t + 0.32}^{Rad})$$

$$M_p = 100 \times e^{\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta}}} = 100e$$

$$T_p = \frac{4\pi}{\omega_d} = 4.1888s$$

$$R_{(t)} = 1 + 4t \rightarrow R_{(s)} = \frac{1}{s} + \frac{4}{s^2}$$

$$\Rightarrow C_{ss} = \lim_{s \to 0} \frac{1 + \frac{4}{s}}{1 + \frac{10}{s^2 + 2s}} = \lim_{s \to 0} \frac{s + 4}{s + \frac{10}{s + 2}} = \frac{4}{5} = 0.8$$

۱۲) برای سیستم کنترلی فیدبک منفی دارای تابع تبدیل $G_{(s)} = \frac{k}{s(s+6)}$ با $H_{(s)}=1$ مطلوبست مقدار k برای سیستم وقتی نسبت میرایی 0.832 باشد. برای این مقدار k مطلوبست $C_{(t)}$ برای ورودی $y_{(t)}=2u_{(t)}$ که در آن $u_{(t)}$ یک پله واحد است.

حل:

$$G_{(s)}H_{(s)} = \frac{k}{s(s+6)} \rightarrow G_{(s)} = \frac{k}{s^2+6s+k} \Rightarrow \begin{cases} \omega_n{}^2 = k \Rightarrow \omega_n = \sqrt{k} \\ 2\zeta\omega_n = 6 \Rightarrow \zeta = \dfrac{3}{\sqrt{k}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 0.832 = \frac{3}{\sqrt{k}} \Rightarrow \boxed{k = 13}$$

$$G_{(s)} = \frac{2\times 3}{s^2+6s+13} \Rightarrow C_{(t)} = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} Sin(\omega_d t + \alpha)$$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = \sqrt{13}\times\sqrt{1-(0.832)^2} = 2$$

$$\alpha = tg^{-1}\frac{0.832}{\sqrt{1-0.832^2}} = tg^{-1}1.5$$

$$C_{(t)} = 2(1-1.8025e^{-3t}Sin(\overbrace{2t+0.98}^{Rad}))$$

$$C_{(t)} = 2-3.605e^{-3t}Sin(\overbrace{2t+56.3}^{Deg})$$

۱۳) برای یک سیستم کنترلی داریم: $G_{(s)} = \dfrac{k}{s(1+0.1s)}$. مطلوبست:

i) مقدار k برای اینکه نسبت میرائی 0.5 شود.

ii) پاسخ ورودی پله واحد برای این مقدار k.

حل:

$$G_{(s)} = \frac{k}{s+0.1s^2+0.1k} = \frac{10k}{s^2+10s+k}\begin{cases} \omega_n = \sqrt{k} \\ 2\zeta\omega_n = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_n = 10 \\ k = 100 \end{cases}$$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = 10\sqrt{1-0.25} = 8.66$$

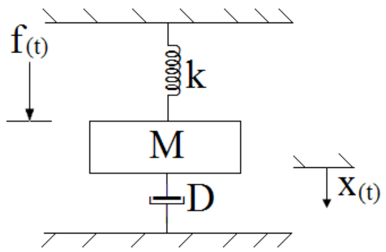
$$\alpha = tg^{-1}\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = tg^{-1}\frac{0.5}{\sqrt{1-0.5^2}} = 30^o = 0.523\,rad$$

$$C_{(t)} = 10(1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} Sin(\omega_d t + \alpha))$$

$$C_{(t)} = 10 - 1.155\,e^{-5t} Sin(8.66\,t + 30^o))$$

۱۴) مطلوبست مقادیر M,D,k برای سیستم شکل زیر وقتی نیروی اعمالی 93N باشد.

حل:



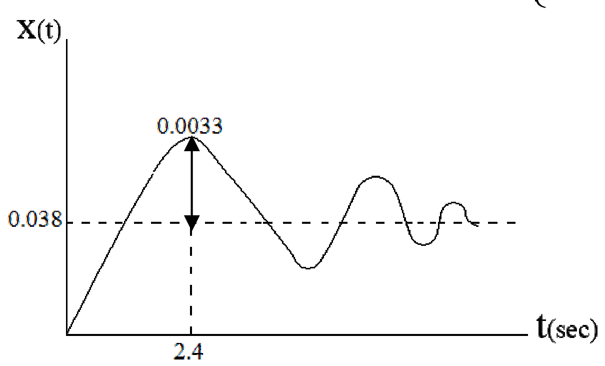
$$f_{(t)} = M\ddot{x} + D\dot{x} + kx$$

$$f_{(s)} = s^2 M x_{(s)} + sDx_{(s)} + kx_{(s)}$$

$$f_{(s)} = (s^2 M + sD + k)x_{(s)}$$

$$\begin{cases} f_{(t)} = 93 \\ f_{(s)} = \dfrac{93}{s} \end{cases} \qquad X_{(s)} = \frac{f_{(s)}}{s^2 + sD + k} \Rightarrow X_{(s)} = \frac{93}{s(s^2 M + sD + k)}$$

$$X_{(s)} = \frac{\frac{93}{M}}{s(s^2 + s\frac{D}{M} + \frac{k}{M})} \Rightarrow \begin{cases} \omega_n{}^2 = \dfrac{k}{M} \\ \omega_n = \sqrt{\dfrac{k}{M}} \\ 2\zeta\omega_n = \dfrac{D}{M} \\ \zeta = \dfrac{D}{M}\dfrac{1}{2\omega_n} = \dfrac{D}{2\sqrt{Mk}} \end{cases}$$



$$\lim_{s\to 0} sX_{(s)} = \frac{93}{Ms^2 + sD + k} = \frac{93}{k}$$

مقدار نهایی : با توجه به نمودار=0.038

$$\frac{93}{k} = 0.038 \Rightarrow k = 2447.37$$

$$M_p = 100 \times \frac{0.0033}{0.038} = \%8.68 \Rightarrow 8.68 = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \Rightarrow \frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 2.444$$

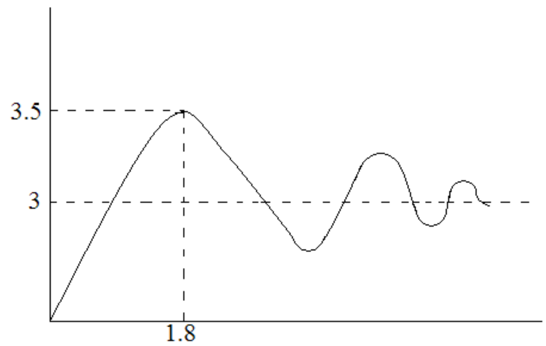
$$\Rightarrow \begin{cases} 15.83\zeta^2 = 5.97 \\ \zeta = 0.6143 \end{cases}$$

$$T_r = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = 2.4 = \frac{3.14}{\omega_n\sqrt{1-0.614\zeta^2}} \Rightarrow \omega_n = 2.1$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M}} \Rightarrow 1.66 = \sqrt{\frac{2447.37}{M}} \Rightarrow M = 889.31$$

$$\zeta = \frac{D}{2\sqrt{Mk}} \Rightarrow 0.6143 = \frac{D}{2\sqrt{889.31 \times 2447.37}} = \boxed{1812.537}$$

۱۵) شکل زیر نشان‌دهندهٔ پاسخ پله یک سیستم درجه2 به ورودی $3u_{(t)}$ است. مطلوبست ζ و ω_n و تابع تبدیل مدار بار سیستم.



حل:

$$M_p = \frac{3.5-3}{3} \times 100 = 0.167 \times 100 = 16\%$$

$$\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = -1.792 \Rightarrow 13.08\zeta^2 = 3.21 \Rightarrow \zeta^2 = 0.245 \Rightarrow \zeta = 0.495$$

$$\frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = T_r = 1.8 \Rightarrow \omega_n = \frac{3.14}{1.8\sqrt{1-0.495^2}} \Rightarrow \boxed{\omega_n = 2}$$

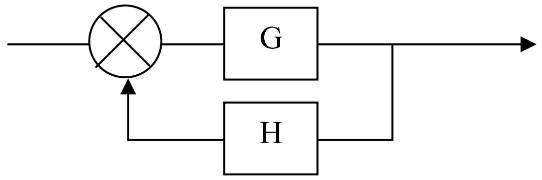
مدار بسته: $G_{(s)} = \frac{\omega_n{}^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n{}^2} = \frac{4}{s^2 + 1.98s + 4}$

مدار باز: $G_{(s)} = \frac{4}{s(s + 1.98)}$

فصل(۹)

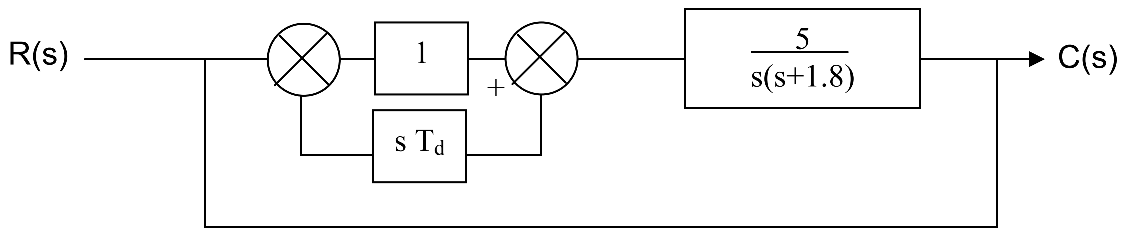
اثر فیدبک در سیستم کنترلی

۱) در شکل زیر یک سیستم کنترل مداربستهٔ تنظیم کنندهٔ ولتاژ ژنراتور نشان داده شده است که در آن G و H بترتیب 110 و 0.12 است. ولتاژ ورودی برای خروجی 260 ولت چقدر است؟



$$\begin{cases} G = 220 \\ H = 0.12 \end{cases} \Rightarrow \frac{E_0}{E_r} = \frac{G}{1+HG} = \frac{220}{1+220(0.12)} = 8.029 \Rightarrow E_r = \frac{260}{8.029} = \boxed{32.38V}$$

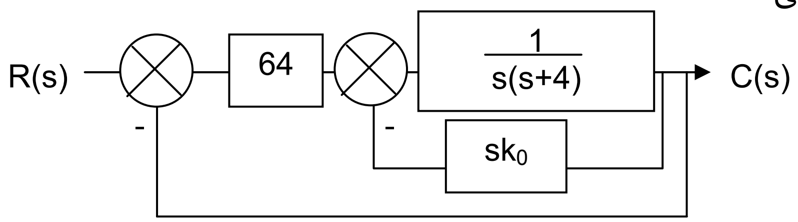
۲) در شکل زیر از یک کنترولر PD استفاده شده است. T_d و T_s را برای ζ=0.85 بدست آورید.



محاسبهٔ تابع تبدیل: $\dfrac{5(1+sT_d)}{s(s+1.8)+5(1+sT_d)} = \dfrac{5(1+sT_d)}{s^2+s(1.8+5T_d)+5}$

$$\begin{matrix} \omega_n^2 = 5 \to \omega_n = \sqrt{5} = 2.23 \\ 2\zeta\omega_n = 1.8 + 5T_d \end{matrix} \Rightarrow T_d = \frac{0.85(2\sqrt{5}) - 1.8}{5} = 0.4 \quad \boxed{T_d = 0.4s}$$

۳) شکل زیر یک فیدبک واحد را نشان می‌دهد.



i) اگر k_0=0 باشد، ζ و ω_n را بیابید.

ii) اگر ζ=056 باشد، k_0را بیابید.

حل:

i)

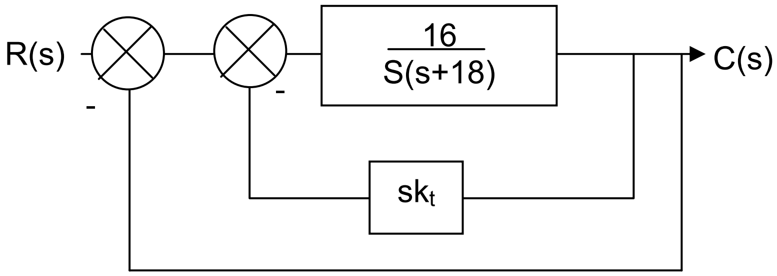
$$G(s) = \frac{64}{s(s+4)+64} = \frac{64}{s^2+4s+64} \begin{cases} \omega_n = 8 \\ 2\zeta\omega_n = 4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\zeta = \frac{1}{4} = 0.25}$$

(ii

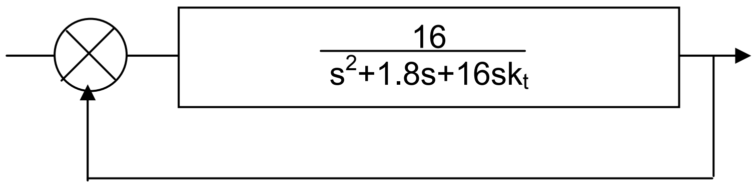
$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + sk_0} \times 64 \rightarrow \text{فیدبک} \rightarrow G(s) = \frac{64}{s^2 + s(4 + k_0) + 64}$$

$$\begin{cases} \omega_n = 8 \\ 2\zeta\omega_n = 4 + k_0 \end{cases} \rightarrow \zeta = \frac{4 + k_0}{16} = 0.56 \Rightarrow k_0 = 16(0.56) - 4 \Rightarrow k_0 = 4.96$$

۴) در شکل زیر k_t را در صورتیکه $\zeta=0.45$ باشد بیابید. همچنین T_p، M_p، ω_d و T_v را هم بیابید.



حل:



$$G(s) = \frac{16}{s^2 + s(1.8 + 16k_t) + 16}$$

$$\omega_n = 4 \Rightarrow 2\zeta\omega_n = 1.8 + 16k_t \Rightarrow k_t = \frac{8\zeta - 1.8}{16} = \frac{8 \times 0.45 - 1.8}{16} = 0.1125$$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \zeta_n^2} = 4 \times \sqrt{1 - (0.45)^2} = 3.572$$

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{0.45 \times 4} = \frac{1}{0.45} = 2.22sec$$

$$M_p = e^{-\frac{3.14 \times 0.45}{\sqrt{1-(0.45)^2}}} \times 100 = e^{-1.582256236} = 0.2055 \times 100 \Rightarrow M_p = 20.55$$

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{3.14}{3.576} = 0.879sec$$

فصل (۱۰)

پایداری

۱) تابع تبدیل زیر برای یک سیستم فیدبک واحد مدنظر است. پایداری آن را بررسی کنید.

$$G_{(s)} = \frac{10}{s(s+2)(s^2+3)}$$

حل:

$$1+G_{(s)}H_{(s)} = 0 \Rightarrow H_{(s)} = 1$$
$$(s^2+2s)(s^2+3)+10 = 0$$
$$\Rightarrow s^4+3s^2+2s^3+6s+10 = 0$$
$$\Rightarrow s^4+2s^3+3s^2+6s+10 = 0$$

$$\begin{cases} s^4 & 1 & 3 & 10 \\ s^3 & 2 & 6 & 0 \\ s^2 & pos\{+\varepsilon & 10 & 0 \\ s^1 & neg\left\{\dfrac{6\varepsilon-20}{\varepsilon}\right. & 0 & 0 \\ s^0 & 10 & 0 & 0 \end{cases} \Rightarrow$$

دو تغییر علامت دارد.
پس ناپایدار است

۲) تابع تبدیل سیستمی بصورت زیر است. مقدار k را برای پایدار بودن سیستم یافته، فرکـانس آن را نیز محاسبه کنید.

$$G_{(s)} = \frac{k}{s(s^2+5s+3)}$$

حل:

$$1+G_{(s)}+H_{(s)} = 0 \Rightarrow \frac{k}{s^3+5s^2+3s+k}$$

$$\begin{array}{c|ccc} s^3 & 1 & 3 & 0 \\ s^2 & 5 & k & 0 \\ s^1 & \dfrac{15-k}{5} & & 0 \\ s^0 & k & & \end{array}$$

$$\begin{cases} k>0 \\ 15-k>0 \end{cases} \Rightarrow 0<k<15$$

$$5s^2+k = 0 \xrightarrow{if(k=15)} s^2 = -\frac{15}{5} \rightarrow s = \pm \dot{y}\sqrt{3} \Rightarrow \omega = \pm\sqrt{3}\ {rad}/{s}$$

۳) معادلهٔ سیستمی بصورت زیر است. با کمک تست روث مقدار k را برای پایـداری محاسـبه کنیـد. چند مقدار ریشه در طرف راست عدد حقیقی داریم اگر k=280 باشد؟

$$s^3 + 3408.3s^2 + 120400s + 1.5 \times 107k = 0$$

حل:

$$\begin{array}{c|ccc} 3 & 1 & 120400 & 0 \\ 2 & 3408.3 & 1.5 \times 107k & 0 \\ 1 & \dfrac{120400 \times 3408.3 - 1.5 \times 107k}{3408.3} & 0 & \\ 0 & 1.5 \times 107k & 0 & \end{array}$$

$$\begin{cases} 1.5 \times 107k > 0 \\ k > 0 \\ \dfrac{410359320 - 160.5k}{3408.3} > 0 \\ k < \dfrac{410359320}{160.5} \Rightarrow 0 < k < 2556755.8 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 120400 \\ 2 & 3408.3 & 44940 \\ 1 & 120386.81 & 0 \\ 0 & 44940 & 0 \end{array} \Rightarrow 3408.3s^2 + 44940 = 0 \Rightarrow s^2 = -\frac{44940}{3408.3} \Rightarrow$$

هر دو ریشه روی محور موهومی است. $\boxed{s = \pm \dot{y}\,(3.631)}$

۴) تابع تبدیل زیر مدنظر است. حداکثر مقدار k را برای پایداری سیستم محاسبه کنید.

$$G_{(s)} = \frac{ke^{-s}}{s(s^2 + 5s + 9)}$$

حل:

$$1 + H_{(s)} + G_{(s)} = 0 \Rightarrow s^3 + 5s^2 + 9s + ke^{-5} = 0$$

$$\Rightarrow s^3 + 5s^2 + 9s + k(1 - s) = 0 \qquad e^{-sT} = 1 - sT \Rightarrow e^{-s} = 1 - s$$

$$\Rightarrow s^3 + 5s^2 + (9 - k)s + k = 0$$

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 9 - k \\ 2 & 5 & k \\ 1 & \dfrac{45 - 5k - k}{5} & 0 \\ 0 & k & \end{array} \qquad \frac{45 - 6k}{5} > 0 \Rightarrow 9 - \frac{6}{5}k > 0 \Rightarrow \boxed{k < 7.5}$$

۵) معادلهٔ زیر مد نظر است. پایداری آن را بررسی کرده و تمام ریشه‌های آن‌را بیابید.

$$s^5+2s^4+24s^3+48s^2-25s-50=0$$

حل:

5	1	24	-25	0
4	2	48	-50	0
3	8	96	0	
2	$24\left\{\frac{8\times48-2\times96}{8}\right.$	-50	0	
1	112.6	0	0	
0	-112.6			

$$2s^4+48s^2-50=0 \xrightarrow{\text{مشتق } ①}$$

$$8s^3+96s=0 \xrightarrow{①}$$

$$s^2=\frac{-48\pm\sqrt{(48)^2-4(2)(-50)}}{4}$$

$$s^2=\frac{-48\pm52}{4}\begin{cases}s^2=1\\ s^2=-25\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}s=\pm1\\ s=\pm5\,j\end{cases}$$

در ریشه‌ها یک تغییر علامت داریم. چون اولین شرط که مثبت بودن سطر اول و دوم است هم برقرار نیست، بنابراین سیستم ناپایدار است.

۶) برای تابع تبدیل زیر تغییرات k را درصورتی‌که سیستم پایدار باشد، محاسبه کنید.

$$G_{(s)}=\frac{k(s+13)}{s(s+3)(s+7)}$$

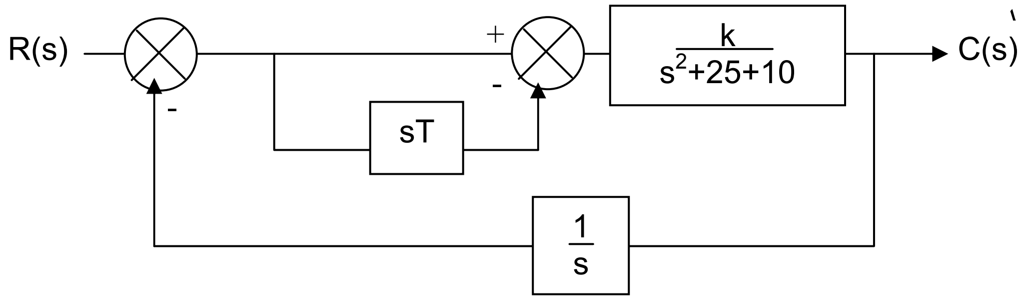
حل:

$$(s^2+3s)(s+7)+ks+13k=0\Rightarrow s^3+10s^2+(12+k)s+13k=0$$

1	21+k	0
10	13k	0
$\frac{210-3k}{10}$	0	
13k		

$$\Rightarrow\begin{cases}21-\frac{3}{10}k>0\Rightarrow k<\frac{210}{3}\\ 13k>0\Rightarrow k>0\end{cases}\Rightarrow \boxed{0<k<70}$$

۷) برای سیستم نشان‌داده‌شده در شکل زیر، تغییرات T را برای پایداری با k>0 بدست آورید و معادلهٔ سیستم را بنویس. ۱۰



حل:

$$G_{(s)}=\frac{k(1+sT)}{s^2+2s+10+\dfrac{k}{s}(1+sT)}=\frac{k(s+s^2T)}{s^3+2s^2+10s+k+ksT}\Rightarrow$$

$$s^3+2s^2+(10+kT)s+k=0\Rightarrow\left|\begin{array}{cc}1 & 10+kT\\ 2 & k\\ \dfrac{20+2kT-k}{2} & 0\\ k & \end{array}\right.\Rightarrow$$

$$\begin{cases}k>0\\ 10+\dfrac{k(2T-1)}{2}>0\end{cases}\Rightarrow kT>-10+\frac{k}{2}\Rightarrow\quad\boxed{T>(\frac{1}{2}-\frac{10}{k})}$$

۸) اگر تابع تبدیل فیدبک واحد بصورت مقابل باشد، در حالت پایدار با فرکانس $5\,\mathrm{rad}/s$، k_{max} و p را تعیین کنید.

$$G_{(s)}=\frac{5}{s^3+ps^2+ks}$$

حل:

$$G_{(s)}=\frac{5}{s^2+ps^2+ks+5}$$

$$\begin{array}{c|cc}s^3 & 1 & k\\ s^2 & p & 5\\ s^1 & \dfrac{pk-5}{p} & 0\\ s^0 & 5 & \end{array}$$

$$ps^2+5=0\Rightarrow s^2=-\frac{5}{p}\Rightarrow s=\pm j\sqrt{\frac{5}{p}}\Rightarrow\sqrt{\frac{5}{p}}=\omega=5\Rightarrow$$

$$\frac{5}{p}=25\Rightarrow\boxed{p=0.2}$$

$$k>0\Rightarrow\frac{pk-5}{p}>0\Rightarrow\frac{0.2k-5}{0.2}>0\Rightarrow k-25>0\Rightarrow\boxed{k>25}$$

حداقل مقدار k باید 25 باشد

۹) برای سیستمی با فیدبک واحد، تابع تبدیل مقابل مفروض است. مطلوبست:

$$G_{(s)} = \frac{k}{(s+1)^3(s+4)}$$

i) مقدار k برای پایداری

ii) فرکانس سیستم در حالت پایدار

حل:

$$G_{(s)} = \frac{k}{(s^3+1+3s^2+3s)(s+4)+k} \Rightarrow s^4+7s^3+15s^2+13s+4+k=0$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 15 & 4+k \\ s^3 & 7 & 13 & 0 \\ s^2 & 13.14 & 4+k & 0 \\ s^1 & \frac{13.14\times 13-28-7k}{13.14} & & \\ s^0 & 4+k & & \end{array}$$

$$\begin{cases} 4+k>0 \Rightarrow k>-4 \\ \frac{7}{13.14}k < 10.8691 \Rightarrow k < \frac{10.8691\times 13.14}{7} \Rightarrow k < 20.4028 \Rightarrow \boxed{-4<k<20.4} \end{cases}$$

$$s^2 \text{ جملهٔ} \rightarrow 13.14s^2+4+k=0 \Rightarrow s^2 = \frac{-24.4028}{13.14} = -1.857 \Rightarrow s = \pm \dot{y}(1.3627) \Rightarrow$$

$$\boxed{\omega = 1.3627\ rad/s}$$