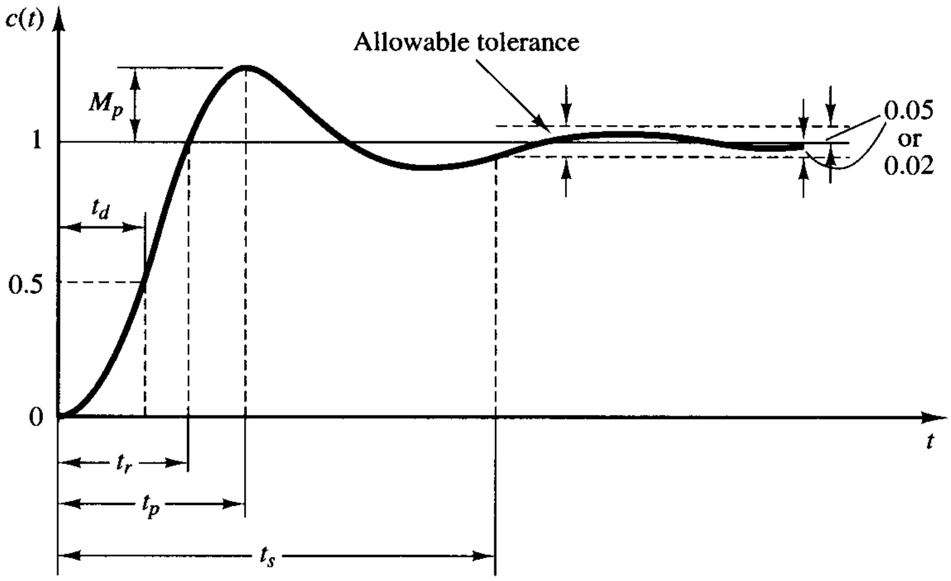
جزوه درسی کنترل اتوماتیک

بخش سوم: تحلیل پاسخ گذرا و پاسخ حالت ماندگار



دکتر نیکوبین

تحلیل پاسخ گذرا و پاسخ حالت ماندگار

مقدمه

در این بخش پاسخ زمانی سیستمهای مختلف به ازای ورودی های مختلف مورد بررسی قرار میگیرد. در اینجا از یک سری سیگنالهای آزمون خاص به عنوان ورودی استفاده میشود و پاسخ سیستمهای مختلف مورد بررسی قرار میگیرد.

پاسخ زمانی یک سیستم کنترل از دو بخش تشکیل شده است: پاسخ گذرا و پاسخ ماندگار.

$C(t) = C_{tr}(t) + C_{ss}(t)$

پاسخ گذرا: عبور از حالت ابتدایی و رسیدن به حالت نهایی

پاسخ ماندگار: چگونگی رفتار خروجی سیستم به ازای $t \to \infty$

پایداری مطلق: اینکه آیا نهایتا سیستم به پاسخ محدود می رسد یا نه

- سیستم پایدار: اگر انحراف کوچکی نسبت به نقطه تعادل داشته باشد، پس از مدت زمانی دوباره بـه نقطـه تعادل باز گردد.

- سیستم ناپایدار: اگر انحراف کوچکی نسبت به نقطه تعادل داشته باشد، از نقطه تعادل دور شود و به آن باز نگردد.

- پایدار بحرانی: نوسانات خروجی برای همیشه باقی می ماند.

پایداری نسبی:

- بحث در کیفیت رفتار سیستم و مدت زمان رسیدن به پاسخ
- میزان و چگونگی نوسانات قبل از رسیدن به حالت ماندگار
- آیا حالت ماندگار با مقدار ورودی دقیقا یکی است و یا یک خطای حالت ماندگار وجود دارد.

داشتیم که $C(s) = G(s)R(s)$

C خروجی، G تابع تبدیل، R ورودی

$$\Rightarrow C(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{s + p_i} + \sum_{i=1}^{m} \frac{b_i}{s + p_i}$$

m مرتبه تابع ورودی و یا تعداد قطبهای آن

n مرتبه تابع تبدیل و یا تعداد قطبهای آن

$$\Rightarrow C(s) = \sum_{i=1}^{n} a_i e^{-p_i t} + \sum_{i=1}^{m} b_i e^{-p_i t}$$

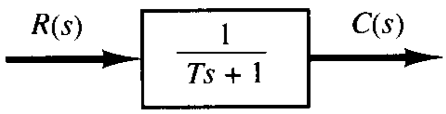
پس می بینیم که پاسخ سیستم، تابع قطبهای ورودی و تابع تبدیل است و رفتار پاسخ سیستم را قطبهای سیستم تعیین می کند. اگر $-p_i > 0$ باشد، پاسخ به سمت بینهایت میل می کند.

سیستم های مرتبه اول

تابع تبدیل یک سیستم مرتبه اول به صورت زیر میباشد:

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts+1}$$

درجه یک سیستم ، درجه مخرج تابع تبدیل آن سیستم می باشد.
پاسخ سیستم را به ورودی های ضربه، پله و شیب تحلیل و بررسی می کنیم.
این تابع تبدیل می تواند یک مدار الکتریکی یا یک سیستم حرارتی باشد.

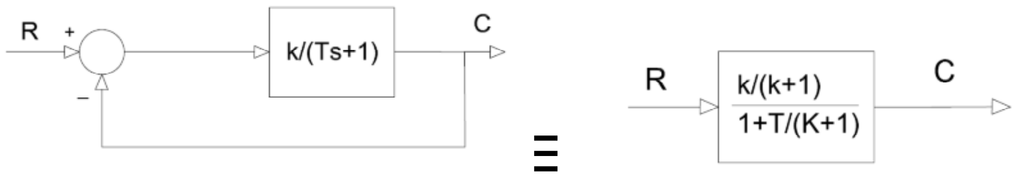


K بهره، T ثابت زمانی

$$Ts+1=0 \Rightarrow s=-\frac{1}{T}$$

هر چه ثابت زمانی کوچکتر شود ، قطب از محور jw دورتر می شود.

تاثیر فیدبک روی ثابت زمانی:

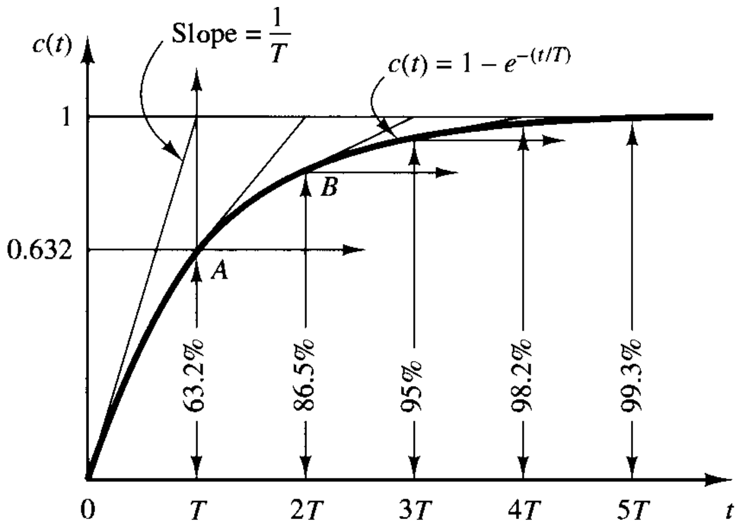


برای این سیستم بهره برابر است با $\frac{K}{K+1}$، ثابت زمانی برابر است با $\frac{T}{K+1}$
فیدبک منفی ثابت زمانی را کوچکتر میکند و هر چه مقدار بهره بیشتر باشد ثابت زمانی کوچکتر میشود.

پاسخ سیستم مرتبه اول به پلۀ واحد

شرایط اولیه سیستم صفر است.

$$r(t) = 1(t) \;\Rightarrow\; R(s) = \frac{1}{s}$$
$$\Rightarrow C(s) = \frac{1}{Ts+1}R(s) \;\;\Rightarrow C(s) = \frac{1}{s(Ts+1)}$$
$$\Rightarrow C(s) = \frac{-T}{Ts+1} + \frac{1}{s} \;\;\Rightarrow C(t) =$$



$t = T \Rightarrow c(t) = 0.632$
$t = 2T \Rightarrow c(t) = 0.865$

.
.
.

$t = 4T \Rightarrow c(t) = 0.982$

$$\left.\frac{dc}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{1}{T}e^{\frac{-t}{T}}\right|_{t=0} = \frac{1}{T}$$

هر چه ثابت زمانی T کوچکتر باشد ، پاسخ سیستم سریعتر است.

تمرین: پاسخ دو سیستم زیر را به ازای ورودی پله بدست آورده و با هم مقایسه کنید. (MATLAB)

زمان نشست (t_s): مدت زمان لازم برای اینکه پاسخ به حوالی مقدار نهایی برسد و از آن خارج نشود.

هر چه T کوچکتر زمان نشست کمتر،

هر چه قطب از محور jw دورتر باشد ، سرعت رسیدن به پاسخ نهایی بیشتر است.

$$\begin{cases} 5\% \rightarrow\ t_s = 3T \\ 2\% \rightarrow\ t_s = 4T \\ 1\% \rightarrow\ t_s = 5T \end{cases}$$

زمان صعود t_r: (زمان رشد، زمان نمو)

معیاری برای سرعت پاسخ در حالت گذرا، ، زمان لازم برای طی کردن حالت گذرا.

مدت زمان لازم برای اینکه از حوالی مقدار اولیه به حوالی مقدار نهایی برسد.(مثلاً از ٪۱۰ مقدار نهایی به ٪۹۰ مقدار نهایی)

$$c(t_1) = 0.1 = \left(1 - e^{\frac{-t_1}{T}}\right) \Rightarrow e^{\frac{-t_1}{T}} = 0.9$$

$$C(t_2) = 0.9 = \left(1 - e^{\frac{-t_2}{T}}\right) \Rightarrow e^{\frac{-t_2}{T}} = 0.1$$

$$\Rightarrow \frac{e^{\frac{-t_1}{T}}}{e^{\frac{-t_2}{T}}} = 9 \Rightarrow e^{\frac{t_2-t_1}{T}} = 9 \Rightarrow e^{\frac{t_r}{T}} = 9 \Rightarrow t_r = T\ \ln 9 = 2.2T$$

هرچه T کمتر شود، زمان صعود نیز کمتر میشود، صعود سریعتر اتفاق می افتد.

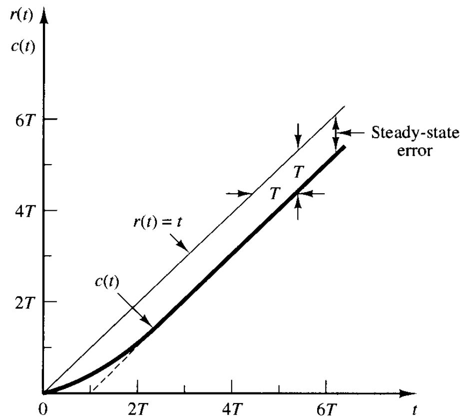
پاسخ سیستمهای مرتبه اول به ورودی شیب

$$\mathrm{r(t)} = \mathrm{t} \;\Rightarrow\; \mathrm{R(s)} = \frac{1}{\mathrm{s}^2}$$

$$c(s) = \frac{1}{Ts+1}\,\frac{1}{s^2} = \frac{1}{s}\left(\frac{1}{(Ts+1)s}\right)$$ (پاسخ به پله)انتگرال = پاسخ به شیب

$$C(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{T^2}{s} + \frac{T^2}{Ts+1} \;\Rightarrow C(t) = t - T + Te^{\frac{-t}{T}}$$

$$e(t) = r(t) - y(t) = T\left(1 - e^{\frac{-t}{T}}\right) \quad \Rightarrow \underset{t\to\infty}{\mathrm{e(t)}} = T$$



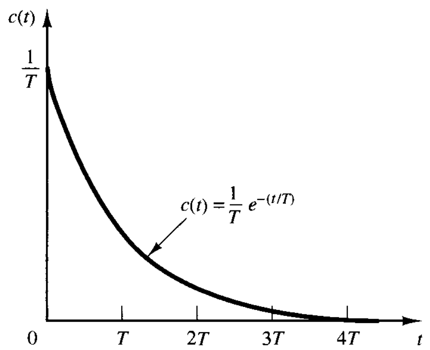
تمرین: پاسخ سیستم زیر را به ازای ورودی شیب بدست آورید. (MATLAB)

پاسخ سیستم مرتبۀ یک به ورودی ضربه

$$r(t) = \delta(t) \Rightarrow \mathrm{R}(s) = 1$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{T_s+1} \;\Rightarrow \mathrm{C(s)} = \frac{1}{\mathrm{T_s}+1} \;\Rightarrow \mathrm{C(t)} = \frac{1}{\mathrm{T}}\mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{t}}{\mathrm{T}}}$$

پاسخ به ورودی ضربه، رفتار حالت گذرا را تعیین می کند. هرچه ثابت زمانی (T) کوچکتر باشد، قطب از محور $j\omega$ دورتر و پاسخ حالت گذرا سریعتر می شود.



یک ویژگی مهم سیستم های خطی مستقل از زمان(LTI)

پاسخ سیستم به ورودی شیب واحد: $R(s) = \frac{1}{s^2}$, $r(t) = t \Rightarrow C(t) = t - T + Te^{\frac{-t}{T}}$

پاسخ سیستم به ورودی پله واحد: $R(s) = \frac{1}{s}$, $r(t) = 1 \Rightarrow C(t) = 1 - e^{\frac{-t}{T}}$

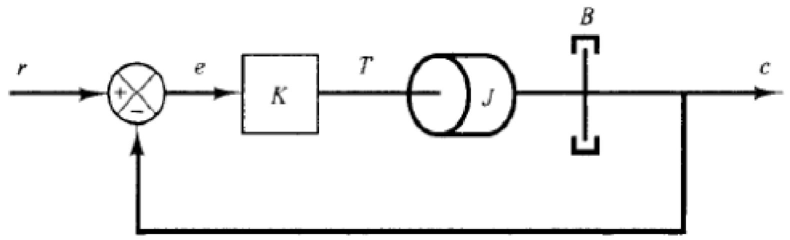
پاسخ سیستم به ورودی ضربه واحد: $R(s) = 1$, $r(t) = \delta(t) \Rightarrow C(t) = \frac{1}{T}e^{\frac{-t}{T}}$

بنابراین می توان نتیجه گرفت که پاسخ به مشتق یک سیگنال ورودی را می توان با مشتق گیری از پاسخ سیستم به سیگنال اصلی بدست آورد.

همچنین می توان نتیجه گرفت که پاسخ به انتگرال یک سیگنال ورودی را می توان با انتگرال گیری از پاسخ سیستم به سیگنال اصلی بدست آورد.

سیستم های مرتبه دوم

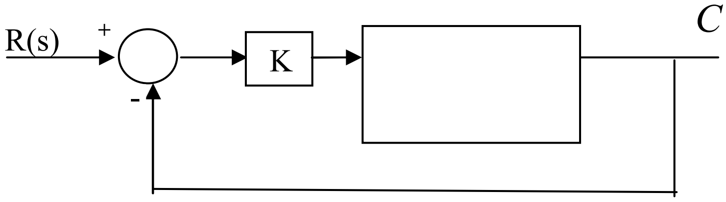
سیستم ساده شدهٔ سرو متشکل از یک کنترل کنندهٔ تناسبی k ، عنصر بار با لختـی J و اصـطکاک B را در نظر بگیرید. T گشتاور تولید شده توسط کنترل کنندهٔ تناسبی، C مقدار زاویهٔ موتور که توسط اینکدر اندازه گیری می شود.



معادلهٔ دینامیکی موتور : $J\ddot{C} + B\dot{C} = T \Rightarrow Js^2C(s) + BsC(s) = T(s)$

$\Rightarrow$ تابع تبدیل موتور : $\frac{C(s)}{T(s)} = \frac{1}{s(Js + B)}$

دیاگرام بلوکی سرو سیستم را می توان بصورت زیر در نظر گرفت:



تابع تبدیل حلقه بستهٔ سیستم : $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{Js^2 + Bs + K} = \frac{\frac{K}{J}}{s^2 + \left(\frac{B}{J}\right)s + \left(\frac{K}{J}\right)}$

فرم استاندارد سیستم های مرتبهٔ دوم را بصورت زیر در نظر می گیریم:

$$\frac{C(s)}{R(S)} = \frac{{\omega_n}^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + {\omega_n}^2}$$

که برای سیستم سرو ، $\omega_n{}^2 = \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{J}}$ و $2\xi\omega_n = \frac{B}{\mathrm{J}}$ بنابراین $\xi = \frac{B}{2\sqrt{\mathrm{JK}}}$

در فرم استاندارد ، ω_n فرکانس طبیعی نامیرا و ξ نسبت میرایی گفته میشود.

مثال: برای سیستم مرتبۀ دوم زیر ω_n و ξ را تعیین کنید.

$$\longrightarrow \boxed{\frac{100}{\mathrm{S}^2 + 10\mathrm{S} + 81}} \longrightarrow$$

برای تحلیل پاسخ گذرای سیستم باید قطب های حلقه بسته سیستم را محاسبه کنیم.

معادله مشخصه سیستم حلقه بسته: $s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n{}^2 = 0 \quad \Rightarrow \; P_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$

قطبهای سیستم به ξ بستگی دارد.

- $0 < \xi < 1$: دو قطب مزدوج مختلط $\Rightarrow$ حالت زیر میرا و پاسخ نوسانی میرا
- $\xi = 0$: دو قطب مزدوج روی محور $j\omega$ $\Rightarrow$ حالت نا میرا و پاسخ نوسانی نا میرا
- $\xi = 1$: دو قطب حقیقی برابر ، منفی $\Rightarrow$ میرای بحرانی
- $\xi > 1$: دو قطب حقیقی منفی نابرابر $\Rightarrow$ حالت فوق میرا ، پاسخ میرا ، غیرنوسانی

حالت زیر میرا $0<\xi<1$

در این حالت دو ریشه مختلط مزدوج سمت چپ محور $j\omega$ داریم.

$$p_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n = -\sigma \pm j\omega_d$$

که در آن $\sigma = \xi\omega_n$ و $\omega_d = \sqrt{1-\xi^2}$ ⟵ فرکانس طبیعی میرا

$$\begin{cases} \cos\beta = \frac{\xi\omega_n}{\omega_n} = \xi \rightarrow \beta = \cos^{-1}\xi \\ \xi^2\omega_n^2 + \omega_d^2 = \xi^2\omega_n^2 + (1-\xi^2)\omega_n^2 = \omega_n^2 \end{cases}$$

پاسخ سیستم مرتبه ۲ به ورودی پله در حالت زیر میرا:

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)s} = \frac{1}{s} - \frac{s + 2\xi\omega_n}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \cdots$$

$$c(t) = 1 - e^{-\xi\omega_n t}\left(\cos\omega_d t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_d t\right) = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\omega_d t + \beta)$$

که در آن $\beta = \cos^{-1}\xi$

می بینیم که فرکانس نوسانهای پاسخ گذرا ω_d (فرکانس طبیعی میرا) می باشد. یعنی سیستم با فرکانس ω_d نوسان می کند.

حالت نامیرا $\xi = 0$

$p_{1,2}= \pm j\omega_n \rightarrow c(t) = 1 - cos\omega_n t$

در این حالت پاسخ نامیرا می شود و نوسان تا بینهایت ادامه می یابد.

اگر $\xi = 0$ باشد سیستم با فرکانس نامیرای ω_n نوسان می کند.

اگر $0 < \xi < 1$ باشد با فرکانس میرای ω_d نوسان می کند.

حالت میرای بحرانی $\xi = 1$

$p_{1,2} = -\xi\omega_\mathrm{n}$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{(s+\omega_n)^2} \xRightarrow{R(s)=\frac{1}{s}} c(t) = 1 - e^{-\omega_n t}(1+\omega_n t)$$

حالت فوق میرا $\xi > 1$

دو قطب حقیقی منفی

$$p_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2-1}=\omega_n(-\xi \pm \sqrt{\xi^2-1})$$
$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{(s-p_1)(s-p_2)} \times \frac{1}{s} = \frac{a}{s-p_1} + \frac{b}{s-p_2} + \frac{c}{s}$$
$$\lim_{s\to p_1}[(s-p_1)C(s)] = \frac{\omega_n^2}{p_1(p_1-p_2)}\ , \quad b = \frac{\omega_n^2}{p_2(p_2-p_1)} \quad c = \frac{\omega_n^2}{p_1p_2} = 1$$

$$\Rightarrow\ c(t) = 1 + ae^{p_1t} + be^{p_2t} = 1 + \frac{p_1p_2}{p_1-p_2}\left(\frac{e^{p_1t}}{p_1} - \frac{e^{p_2t}}{p_2}\right)$$

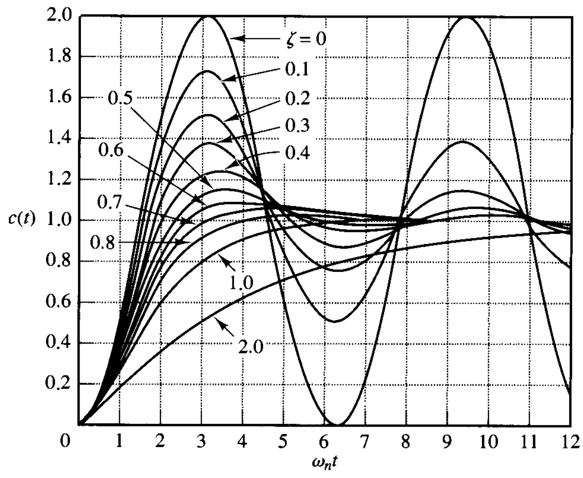
اگر $|p_2| \gg |p_1|$ می توان پاسخ سیستم را به صورت زیر تقریب زد:

$c(t) = ae^{p_1t}$

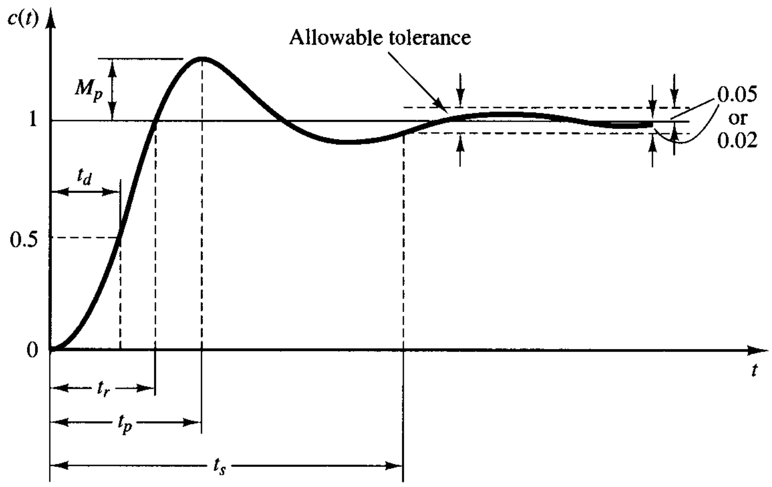
زیرا جمله ی مشتمل بر p_2 (be^{p_2t}) بسیار سریع میرا میشود و اثر چندانی در پاسخ ندارد.

اصطلاحاً p_1 را قطب غالب سیستم می گویند و میتوان سیستم مرتبه دوم را به یک سیستم مرتبه اول به صورت زیر تقریب زد.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{p_1p_2}{(s-p_1)(s-p_2)} \rightarrow \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{-p_1}{s-p_1}$$



تعریف مشخصات پاسخ گذرا



Max overshoot ماکزیمم فراجهش :M_P

Delay time زمان تاخیر : t_d

Rise time زمان صعود : t_r

Peak time زمان اوج : t_p

Settling time زمان نشست : t_s

- **زمان صعود(t_r):** مدت زمانی است که پاسخ از 10% به 90% و یا از 5% به 95% و یا از0% به 100% میرسد.

از حل این معادله:

$$c(t_r) = 1 = 1 - e^{-\xi\omega_n t_r}(cos\omega_d t_r + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\, sin\omega_d t_r$$

$$t_r = \frac{\pi - \cos^{-1}\xi}{\omega_d} = \frac{\pi - \beta}{\omega_d}$$

- **زمان اوج(t_p):** زمان لازم برای رسیدن پاسخ به اولین اوج فراجهش

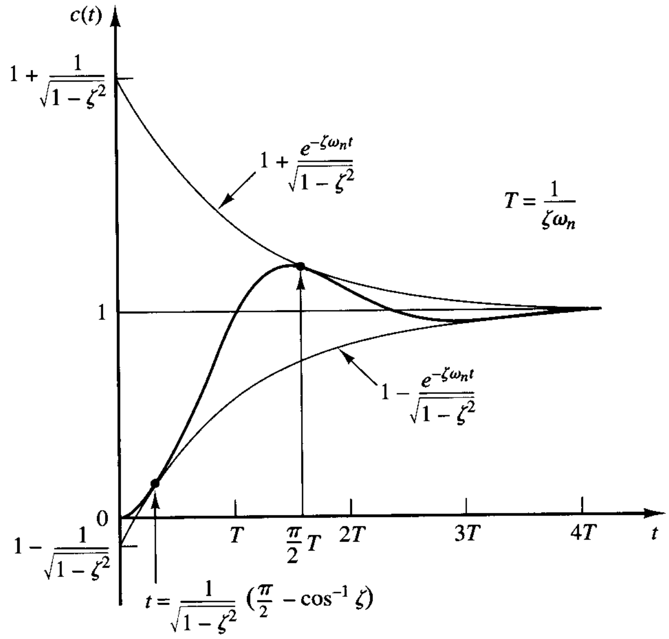
$$\left.\frac{dc}{dt}\right|_{t=t_p} = 0 \rightarrow \left(sin\omega_d t_p\right)\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}}\, e^{-\xi\omega_n t_p} = 0 \rightarrow t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

$$M_p = C\left(t_p\right) - 1 = e^{\frac{-\sigma\pi}{\omega_d}} = e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

ماکزیمم درصد فراجهش : $e^{\frac{-\sigma\pi}{\omega_d}} \times 100$

مثال: ماکزیمم فراجهش را برای پاسخ زیر بیابید.

- **زمان نشست t_s:** زمانی است که پاسخ به گستره معینی حول مقدار نهایی اش میرسد و در آن گستره باقی می ماند.



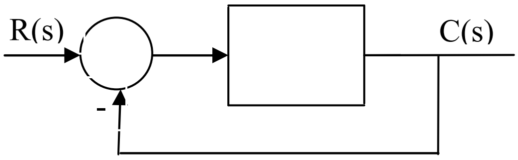
$$y(t)=1-\frac{e^{-\sigma t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\omega_d t+\beta)$$

$y(\mathrm{t})$ بین دو تابع نمایی با ثابت زمـانی $\frac{1}{\xi\omega_n}$ محصور شده است.

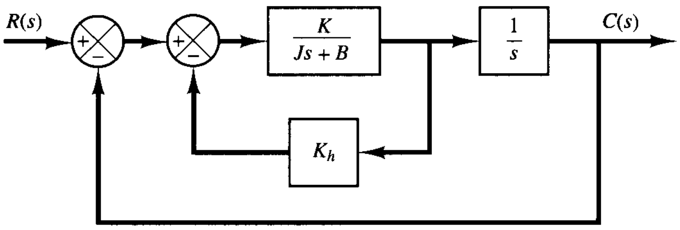
زمان نشست به مقدار $\xi\omega_n$ بستگی دارد.

مکان هندسی پارامترهای ثابت

مثال: برای سیستم زیر زمان صعود، زمان ماکزیمم فراجهش و زمان نشست را به ازای ورودی پله بیابید.



مثال: برای مدل سروی زیر که هم سیگنال سرعت و هم سیگنال موقعیت به عنوان فیدبک استفاده میشود، مقادیر بهره K و K_h را طوری تعیین کنید که: $M_p = 20\%$ و $t_p = 1s$



$$\rightarrow \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{Js^2 + (B + KK_h)s + K} \Longrightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{K}{J}}\ , 2\xi\omega_n = \frac{B + KK_h}{J} \ \Longrightarrow \xi = \frac{B + KK_h}{2\sqrt{KJ}}$$

در اینجا اگر t_s و M_p داده شده باشد میتوان K_h و k را حساب کرد. اما اگر از سرعت فیدبک نمی گرفتیم فقط یک پارامترk در دسترس بود که با آن یا t_sو یا M_pرا می توانستیم تنظیم کنیم نه هر دو را.

-بهره k برای افزایش سرعت است که در اینجا ω_n وk وابسته اند.

-بهره فیدبک k_h برای کاهش M_p است.k_hوM_p وابسته اند.

پاسخ سیستم های درجه بالاتر به ورودی مختلف:

اگر تابع تبدیل حلقه بسته یک سیستم به صورت زیر باشد

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+a_1 s+a_0}\quad n>m$$

$$\frac{C(s)}{\mathrm{R(s)}}=\frac{\prod_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{q}_1}(\mathrm{s}+\mathrm{z_i})\ \prod_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{r}_1}(\mathrm{s}^2+2\xi_{\mathrm{i}}.\omega_{\mathrm{ni}}\mathrm{s}+\omega_{\mathrm{ni}}^2)}{\prod_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{q}_2}(\mathrm{s}+\mathrm{p_j})\ \prod_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{r}_2}(\mathrm{s}^2+2\xi_{\mathrm{j}}.\omega_{\mathrm{nj}}\mathrm{s}+\omega_{\mathrm{nj}}^2)}$$

فرض می کنیم که همه قطبها سمت چپ محور $j\omega$ باشند. بنابراین

$$y(t)=\sum_{i=1}^{q_2}A_i e^{-p_i t}+\sum_{j=1}^{r_2}B_j e^{-\alpha_j t}\ \sin(\omega_{dj}t+\theta_j)+y_R$$

A_j و B_j به محل صفرها وابسته اند.

قطب غالب:

فرض می کنیم یک قطب حقیقی به محور $j\omega$ از بقیه قطبها نزدیکتر باشد و بقیه قطبها از این قطب دور باشند و اگر نزدیک این قطب صفری نباشد آنگاه به غیر از آغاز پاسخ، پاسخ شبیه یک سیستم درجه یک با آن قطب خواهد شد. و اگر یک جفت قطب مختلط به محور $j\omega$ از بقیه قطبها نزدیکتر باشد و بقیه قطبها از این جفت قطب دور باشند، و نزدیک این جفت قطب صفری نباشد، آنگاه پاسخ این سیستم به غیر از آغاز پاسخ، نوسانی میرا شونده با در نظر گرفتن آن جفت قطب خواهد شد.

اثر صفر:

تغییر محل صفر باعث می گردد که دامنه توابع نمایی و دامنه توابع نوسانی میراشونده تغییر کند و اگر صفری نزدیک یک قطب باشد، دامنه مربوط به تابع آن قطب بسیار کوچک میشود و اگر حتی این قطب نزدیک محور $j\omega$ باشد به دلیل دامنه بسیار کوچک، می توان از آن قطب صرفنظر کرد و در واقع این قطب تاثیر زیادی در پاسخ نخواهد داشت.

مثال: زمان نشست سیستم زیر را به ورودی پله بیابید.

$$G(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{2s(s+0.48)}{8(s+3)(s+0.5)}$$

پاسخ سیستم درجه ۲ به ورودی ضربه

$$r(t)=\delta(t)\ \rightarrow R(s)=1\ \rightarrow Y(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n+\omega_n^2}$$

$$0<\xi<1\ \rightarrow\ Y(t)=Ae^{-\sigma t}\sin(\omega_d t+\theta)=\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_n t}\sin\omega_d t$$

$$\xi=1\rightarrow\ Y\big(t\big)=\omega_n^2 te^{-\omega_n t}$$

$$\xi>1\ \rightarrow\ Y(t)=\frac{\omega_n}{2\sqrt{\xi^2-1}}e^{-s_2 t}-\frac{\omega_n}{2\sqrt{\xi^2-1}}e^{-s_1 t}$$

$$s_{1,2}=\left(\xi\pm\sqrt{\xi^2-1}\right)\omega_n$$

پاسخ به شیب:

$$r(t)=t\ \rightarrow R(s)=\frac{1}{s^2}\ \rightarrow Y(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)}$$

$$0<\xi<1\ \rightarrow Y(t)=t-\frac{2\xi}{\omega_n}+\frac{1}{\omega_n}e^{-\alpha t}\sin(\omega_1 t+2\beta)$$

$$\xi=1\rightarrow Y(t)=t-\frac{2}{\omega_n}+\frac{2}{\omega_n}e^{-\omega_n t}(1+\frac{\omega_n t}{2})$$

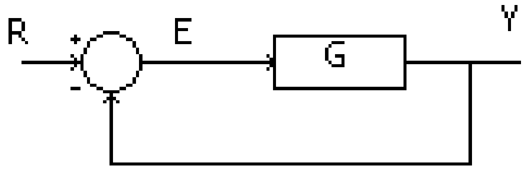
$$\xi>1\ \rightarrow Y(t)=t-\frac{2\xi}{\omega_n}+Ae^{-s_1 t}+Be^{-s_2 t}$$

خطای حالت ماندگار در سه حالت برابر است با

$$e_{ss}=r(t)-y(t)=\frac{2\xi}{\omega_n}$$

خطای حالت ماندگار

این که سیستمی به ازای یک ورودی خاص، خطای حالت ماندگار دارد یا نه، به نوع تابع تبدیل حلقه باز سیستم بستگی دارد.



$$E = R - Y \ \Rightarrow \ \frac{E}{R} = \frac{1}{1+\mathrm{G}} \ \Rightarrow \mathrm{E} = \frac{\mathrm{R}}{1+\mathrm{G}}$$

$$e_{\mathrm{ss}} = \lim_{\mathrm{s}\to 0} \mathrm{sE(s)} = \lim_{\mathrm{s}\to 0} \frac{\mathrm{sR}}{1+\mathrm{G}}$$

G تابع تبدیل حلقه باز سیستم را به صورت زیر در نظر میگیریم

$$G = \frac{K(T_a s+1)(T_b s+1)\ldots(T_m s+1)}{s^N(T_1 s+1)(T_2 s+1)\ldots(T_P s+1)}$$

نوع سیستم (Type) ، سیستم را نوع 0، نوع ۱، نوع ۲و.... می خوانیم اگر N=0 و N=1 و N=2 و .... باشد

نوع سیستم با مرتبه ی سیستم که قبلا تعریف کرده بودیم متفاوت است.

با بالا رفتن عدد نوع دقت بهتر می شود ، ولی این افزایش مسئله پایداری را مشکل تر می کند.

همیشه باید بین دقت حالت ماندگار و پایداری نسبی مصالحه ای برقرار کرد.

محاسبه تابع تبدیل حلقه باز

ثابت خطای ایستای موقعیت K_P :

خطای حالت ماندگار سیستم به ورودی پله برابر است با :

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{S}{1+G}\,\frac{1}{S} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+G}$$

ثابت خطای ایستای موقعیت به صورت زیر تعریف می شود

$$K_P = \lim_{s\to 0} G \;\Rightarrow e_{ss} = \frac{1}{1+K_P}$$

$$K_P = \lim_{s\to 0} \frac{K(T_a s+1)(T_b s+1)\ldots}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)\ldots} = K \quad For \quad N=0$$

$$K_P = \lim_{s\to 0} \frac{K(T_a s+1)(T_b s+1)\ldots}{s^N(T_1 s+1)(T_2 s+1)\ldots} = \infty \quad For \quad N \geq 1$$

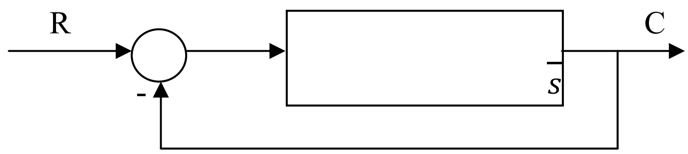
بنابراین خطای حالت ماندگار به ازای ورودی پله برابر است با

$$\begin{cases} e_{ss} = \dfrac{1}{1+k} & N=0 \\ e_{ss} = 0 & N \geq 1 \end{cases}$$

اگر بخواهیم خطای حالت ماندگار به ورودی پله صفر باشد باید سیستم نوع ۱ یا بالاتر باشد.

اگر K خیلی بزرگ انتخاب شود ، دستیابی به پایداری نسبی مورد قبول مشکل می شود.

مثال: مینیمم خطای ماندگار به ورودی پله این سیستم چقدر می تواند باشد؟



$$G = \frac{K}{s^3 + 5s^2 + s + 1}$$

$$\mathrm{K_P} = \lim_{\mathrm{s}\to 0} G = \mathrm{K} \ \Rightarrow \ e_{\mathrm{ss}} = \frac{1}{1+\mathrm{K}}$$

مینیمم خطا، به ازای ماکزیمم بهره ای است که سیستم پایدار می ماند.

در بخش بعدی(معیار پایداری روت) خواهیم دید که اگر k>4 شود، قطبهای سیستم سمت راست محور jw قرار می گیرند و سیستم ناپایدار می شود. (محل قطبهای سیستم حلقه بسته با تغییر k جابجا می شود)

$$e_{\mathrm{ss}} = \frac{1}{1+4} = 0.2$$

ثابت خطای ایستای سرعت k_{v}

خطای حالت ماندگار سیستم به ازای ورودی شیب واحد برابر است با

$$e_{\mathrm{ss}} = \lim_{\mathrm{s}\to 0} \mathrm{sE(s)} = \lim_{\mathrm{s}\to 0} \frac{\mathrm{s}}{1+\mathrm{GH}} \ \frac{1}{\mathrm{s}^2} = \lim_{\mathrm{s}\to 0} \ \frac{1}{\mathrm{sGH}}$$

بنابراین ثابت خطای ایستای سرعت k_{v} به صورت زیر تعریف می شود.

$$k_{\mathrm{v}} = \lim_{\mathrm{s}\to 0} \mathrm{sG} \quad \Rightarrow \quad e_{\mathrm{ss}} = \frac{1}{k_{\mathrm{v}}}$$

$$k_{\mathrm{v}} = \lim_{\mathrm{s}\to 0} \frac{sK(T_a s+1)(T_b s+1)\ldots}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)\ldots} = 0 \qquad N = 0$$

$$k_{\mathrm{v}} = \lim_{\mathrm{s}\to 0} \frac{sK(T_a s+1)(T_b s+1)\ldots}{s(T_1 s+1)(T_2 s+1)\ldots} = K \qquad N = 1$$

$$k_{\mathrm{v}} = \lim_{\mathrm{s}\to 0} \frac{sK(T_a s+1)(T_b s+1)\ldots}{s^N(T_1 s+1)(T_2 s+1)\ldots} = \infty \qquad N \geq 2$$

بنابراین خطای حالت ماندگار به ازای ورودی شیب

$$e_{\mathrm{ss}} = \begin{cases} \dfrac{1}{k_{\mathrm{v}}} = \infty & N = 0 \\ \dfrac{1}{\mathrm{K}} & N = 1 \\ \dfrac{1}{\infty} = 0 & N \geq 2 \end{cases}$$

ثابت خطای ایستای شتاب K_a

$$r(t) = \frac{t^2}{2} \Rightarrow R(s) = \frac{1}{s^3}$$

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{s}{1+G}\,\frac{1}{s^3} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s^2 G}$$

ثابت خطای ایستای شتاب K_a به صورت زیر تعریف می شود

$$K_a = \lim_{s\to 0} s^2 GH \quad \Rightarrow \quad e_{ss} = \frac{1}{K_a}$$

$$K_a = \begin{vmatrix} 0 & N=0 \\ 0 & N=1 \\ K & N=2 \\ \infty & N\geq 3 \end{vmatrix} \quad \Rightarrow \quad e_{ss} = \begin{vmatrix} \infty & N=0 \\ \infty & N=1 \\ \frac{1}{K} & N=2 \\ 0 & N\geq 3 \end{vmatrix}$$

مثال: تابع تبدیل حلقه بسته یک سیستم به صورت زیر است. خطای ماندگار سیستم را به ورودی $r(t) = -2 + t + \frac{t^2}{2}$ بدست آورید.

$$M(s) = \frac{4(s+1)}{s^3 + 2s^2 + 4s + 4}$$

معیار پایداری روث

قبلا دیده شد که یک سیستم کنترل پایدار است اگر و تنها اگر تمام قطبهای حلقه بسته آن در نیمه چپ صفحه s باشد.

اگر تابع تبدیل حلقه بسته یک سیستم به صورت زیر باشد.

$$\frac{C(s)}{\mathrm{R}(s)}=\frac{\mathrm{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}}{\mathrm{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n}}=\frac{\mathrm{B(s)}}{\mathrm{A(s)}}$$

بنابراین برای تعین پایداری باید چند جمله ای A(s) را تجزیه کرده و قطبهای حلقه بسته را بیابیم.

اما اگر حل چند جمله ی A(s) مشکل بود روشی وجود دارد که میتوان بدون حل معادله مشخصه پایداری را بررسی نمود. این روش به روش پایداری روث معروف است.

این روش به ما میگوید که آیا یک چند جمله ای ریشه ناپایدار دارد یا نه، بدون اینکه حل واقعی آن لازم باشد. روند اعمال معیار پایداری روث به صورت زیر است.

۱-چند جمله ای بر حسب s را به صورت زیر بنویسید.

$$a_0 \mathrm{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n} = 0$$

که در آن همگی ضرایب حقیقی اند. $a_{\mathrm{n}} \neq 0$ یعنی ریشه های برابر صفر را خارج کرده ایم.

۲- اگر یکی از ضرائب صفر یا منفی باشد، یک یا چند ریشه موهومی یا دارای بخش حقیقی مثبت وجود دارد. بنابراین سیستم ناپایدار است. مثبت بودن همه ضرائب شرایط لازم پایداری است اما کافی نیست.

۳- تمام ضرائب را به صورت زیر در سطرها و ستون ها قرار دهید. که ضرائب b_1, b_2 به صورت زیر محاسبه می شوند.

$$\begin{array}{lllll}
S^{\mathrm{n}} & \mathrm{a_0} & \mathrm{a_2} & \mathrm{a_4} & \mathrm{a_6} \ \ldots \\
S^{\mathrm{n-1}} & \mathrm{a_1} & \mathrm{a_3} & \mathrm{a_5} & \mathrm{a_7} \ \ldots \\
S^{\mathrm{n-2}} & \mathrm{b_1} & \mathrm{b_2} & \mathrm{b_3} & \mathrm{b_4} \ \ldots \\
S^{\mathrm{n-3}} & \mathrm{c_1} & \mathrm{c_2} & \mathrm{c_3} & \mathrm{c_4} \ \ldots \\
S^{\mathrm{n-4}} & \mathrm{d_1} & \mathrm{d_2} & \mathrm{d_3} & \mathrm{d_4} \ \ldots \\
. & & & & \\
. & & & & \\
S^2 & e_1 & e_2 & & \\
S & f_1 & & & \\
S^0 & g_0 & & &
\end{array}$$

$$\mathrm{b_1}=\frac{\mathrm{a_1 a_2 - a_0 a_3}}{\mathrm{a_1}}$$

$$\mathrm{b_2}=\frac{\mathrm{a_1 a_4 - a_0 a_5}}{\mathrm{a_1}}$$

$$\mathrm{b_3}=\frac{\mathrm{a_1 a_6 - a_0 a_7}}{\mathrm{a_1}}$$

محاسبه b ها را آنقدر ادامه می دهیم تا به صفر های متوالی برسیم. در محاسبه c ها و d ها و ... همان شیوه قبلی را دنبال می کنیم.

$$c_1 = \frac{\mathrm{b}_1\mathrm{a}_3 - \mathrm{a}_1\mathrm{b}_2}{\mathrm{b}_1} \qquad \mathrm{c}_2 = \frac{\mathrm{b}_1\mathrm{a}_5 - \mathrm{a}_1\mathrm{b}_3}{\mathrm{b}_1}$$

$$d_1 = \frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{c_1} \qquad d_2 = \frac{c_1 b_3 - b_1 c_3}{c_1}$$

معیار پایداری روث می گوید تعداد ریشه های نیم صفحه راست با تعداد تغییر علامت های ستون اول آرایه برابراست .

شرط لازم و کافی برای پایداری این است که تمام ضرائب چند جمله ای مثبت و تمام جملات ستون اول آرایه روث نیز مثبت باشد.

مثال: معادله مشخصه یک سیستم به صورت چند جمله ای زیر است. پایداری آن را بررسی کنید.

$s^4 + 3s^3 + s^2 + 4s + 12$

حالت خاص: صفر شدن المان اول یک ستون

$a) s^3 + 2s^2 + s + 2$

$b) s^4 + 2s^3 + 2s^2 + 4s + 5$

حالت خاص: اگر تمام المانهای یک سطر صفر شوند

$s^5 + 2s^4 + 24s^3 + 48s^2 - 25s - 50$

تحلیل پایداری نسبی

یکی از معیارها این است که قطب های غالب چه قدر از محور jω دور هستند. با جایگـذاری $s = \hat{s} - \sigma$ در چند جمله ای مورد نظر و اعمال پایداری روث تعداد ریشه های سمت چپ $s = -\sigma$ را بدست می آوریم

$s = \hat{s} - \sigma \rightarrow \hat{s} = s + \sigma$
$Re[\hat{s}] < 0 \rightarrow Re[s + \sigma] < 0 \rightarrow Re[s] < -\sigma$

مثال : به ازای چه محدوده ای از k سیستم پایدار مجانبی است.

$$\frac{y}{R} = \frac{k}{s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s + k}$$

s^4 : 1 6 k   k>0
s^3 : 4 4   0<k<5
s^2 : 5 k
S : $1 - \frac{k}{5}$ $1 - \frac{k}{5} > 0 \rightarrow k < 5$
s^0 : k

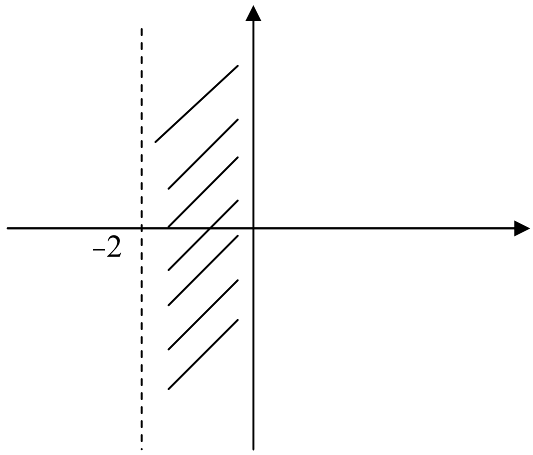
مثال : در مثال قبل k را به گونه‌ای تعیین کنید که ضریب میرایی قطبهـای غالـب سیســتم بزرگتـر از یـک باشد.

$(\omega - 1)^3 + 7(\omega - 1)^2 + 12(\omega - 1) + 2k = 0$
$\omega^3 + 4\omega^2 + 2k - 6 = 0$

ω^3 : 1 1   3<k<5
ω^2 : 2 k-3
ω : $1 - \frac{k-3}{2} > 0$
ω^0 : k-3>0

مثال: چند قطب در این ناحیه هاشور خورده قرار دارد.

$$s^3 + s^2 + 15s + 5 = 0$$



مطالعه شود :

۵-۸ اثر عملهای کنترلی و انتگرالی و مشتقی بر عملکرد سیستم (فصل ۵)

از مسائل نمونه و حلشان ۵-۲ و ۵-۳ و ۵-۴ و ۵-۵ و ۵-۶ و ۵-۹ تـا ۵-۱۷ و ۵-۱۸ و۵-۲۴ و ۵-۲۵ و ۵-۲۶ و ۵ـ۲۷ و ۵ـ۲۸