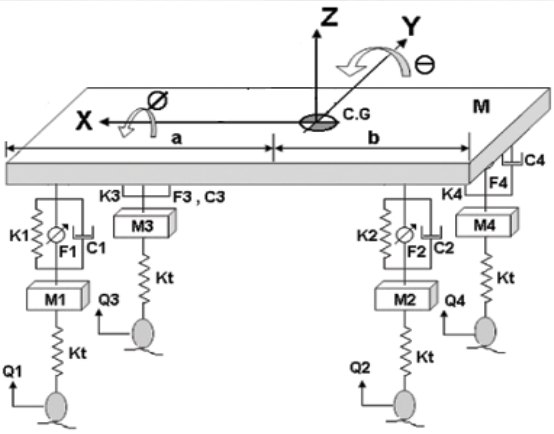
جزوه درسی کنترل اتوماتیک

بخش دوم: مدلسازی ریاضی



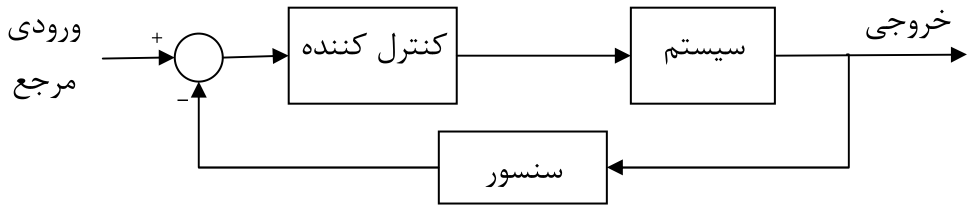
دکتر نیکوبین

۲- مدلسازی ریاضی

۲-۱- مقدمه

۲-۱-۱- هدف از مدلسازی ریاضی

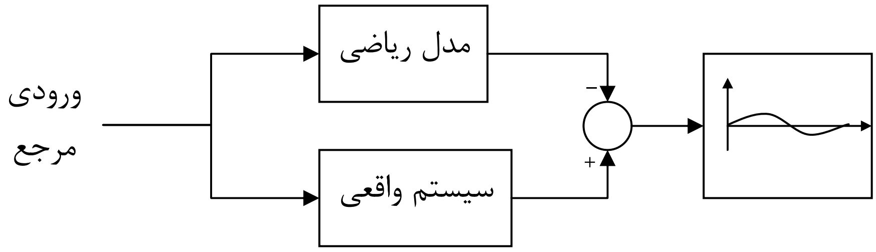
همانطور که قبلا ذکر شد دیاگرام بلوکی یک سیستم کنترل را میتوان طبق شکل ۱ نشان داد. قسمت بسیار مهم از این دیاگرام بلوکی سیستم آن است. یعنی برای طراحی کنترل کننده باید سیستم مورد نظر (مثلا ربات، رادار، ماهواره، اتاق و غیره) در دسترس باشد تا بتوان از طریق سنسور، خروجی مورد نظر را اندازه گرفت، با ورودی مرجع مقایسه کرد، سیگنال خطا را به کنترل کننده داد و سپس سیگنال کنترلی را به سیستم اعمال نمود، رفتار سیستم را تحلیل کرده و کنترلر مناسب را طراحی نمود.



شکل ۱- سیستم کنترل حلقه بسته

اما مشکلی که در اینجا وجود دارد این است که در اغلب موارد سیستمی که قصد کنترل آنرا داریم در دسترس نیست. یعنی ممکن است ساخت سیستم مورد نظر (که مثلا یک رادار است) هنوز به اتمام نرسیده باشد، یا اینکه میخواهیم قبل از راه اندازی سیستم در شرایط واقعی از عملکرد درست کنترلر آن اطمینان حاصل کنیم مثلا برای یک ماهواره. بهترین راه حل برای این مشکل این است که قبل از پیاده سازی کنترلر روی سیستم واقعی، از طریق تحلیل ریاضی و شبیه سازی از عملکرد درست کنترلر مطمئن شویم. بنابراین به منظور طراحی کنترلر برای یک سیستم دینامیکی در قدم اول باید یک مدل ریاضی مناسب از سیستم بدست آوریم. مدل ریاضی سیستم دینامیکی، یک مجموعه معادله است که رفتار دینامیکی سیستم را دقیقا، یا حداقل به خوبی نمایش دهد. باید توجه کرد که مدل ریاضی برای یک سیستم معین یکتا نیست. یک سیستم را میتوان به صورتهای مختلف نمایش داد، بنابراین بسته به دیدگاه شخص مدلهای ریاضی متفاوتی برای یک سیستم وجود دارد.

همانطور که در شکل ۲ نشان داده شده است، هر چه قدر خطای بین پاسخ مدل ریاضی و سیستم واقعی به ازای یک ورودی به صفر نزدیک تر باشد، مدل ریاضی بهتر و مطلوب تر میباشد. مدل ریاضی بدست آمده باید بتواند رفتار سیستم واقعی را به ازای ورودیهای مختلف مدل کند. مدل ریاضی ایده آل، مدلی است که رفتار سیستم را به ازای هر ورودی مدل کند.



شکل ۲- مدل ریاضی مطلوب

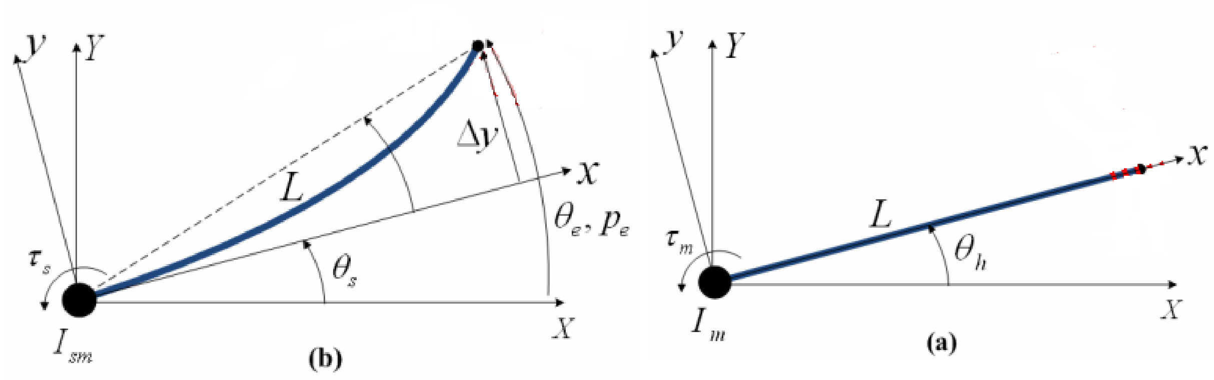
بدست آوردن یک مدل ریاضی ایده آل کار بسیار مشکل و پرهزینه‌ای است. اغلب بدست آوردن یک مدل ریاضی که بتواند رفتار سیستم را به ازای ورودی‌های شبیه به ورودی‌های واقعی مدل کند، کافی است.

۲-۱-۲- سادگی در برابر دقت

در یافتن مدل ریاضی باید مصالحه‌ای بین سادگی مدل و دقت نتایج تحلیل صورت دهیم. برای بدست آوردن یک مدل ریاضی ساده قابل قبول، اغلب از بعضی ویژگیهای ذاتی فیزیکی سیستم صرف نظر میکنیم. وقتی به دنبال یک مدل خطی با پارامترهای مجزا هستیم باید از بعضی ویژگیهای غیرخطی و پارامترهای توزیع شده موجود در سیستم که منجر به معادلات PDE میشود صرف نظر کنیم. باید به این نکته کاملا آگاه باشیم که یک مدل خطی با عناصر فشرده، که در فرکانس پایین معتبر است میتواند در فرکانسهای بالا معتبر نباشد، زیرا در این فرکانسها ویژگیهای چشم پوشی شده عناصر توضیع شده، عامل مهمی در رفتار دینامیکی سیستم است.

نکته کلیدی و اساسی در مدلسازی این است که از ساده ترین مدل ممکن شروع کنیم و در مراحل بعدی با توجه به نیاز و خواسته ها مدل را دقیق تر کنیم.

مثال ۱- منیپولاتور تک لینکی

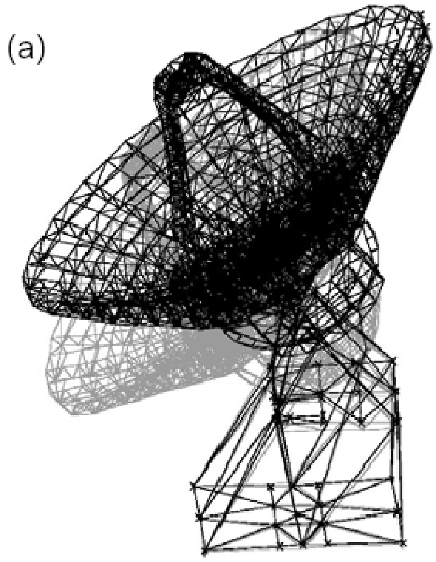


شکل ۳- ربات تک لینکی با فرض صلب بودن لینک

شکل ۴- در نظر گرفتن خاصیت انعطاف پذیری ربات

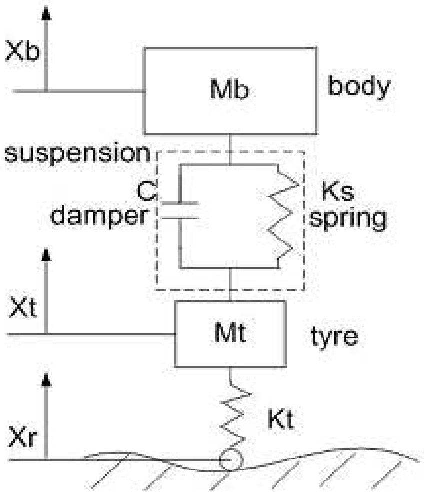
مثال۲- آنتن

شکل ۵- The deep space network antenna

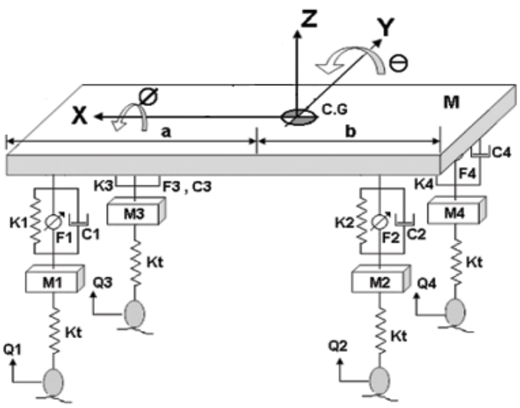


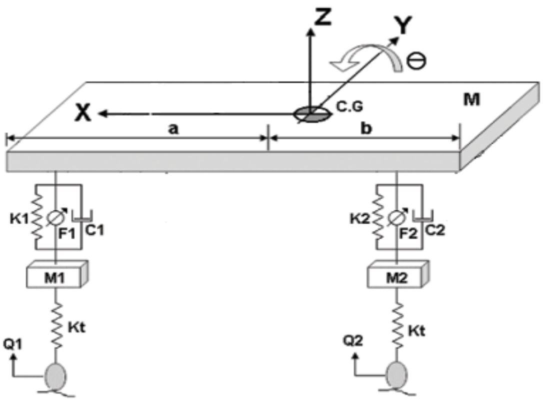
شکل ۶- مد ارتعاشی اول آنتن

مثال ۳- سیستم تعلیق خودرو



شکل ۷- مدل یک چهارم سیستم تعلیق خودرو





شکل ۸- مدل یک دوم و مدل کامل سیستم تعلیق خودرو

۲-۲- تقسیم بندی سیستمهای دینامیکی

سیستمهای دینامیکی را میتوان از جنبه های مختلف تقسیم بندی نمود. در شکل زیر این تقسیم بندی نشان داده شده است.

سیستمهای دینامیکی Dynamic systems

پارامترهای مجزا Lumped parameters　　پارامترهای گسترده Distributed parameters

رفتار معین Determinate behavior　　رفتار آماری Statistical behavior

خطی Linear　　غیر خطی Nonlinear

پارامتر ثابت Invariant parameter　　پارامتر متغیر Variant parameter

تک ورودی-تک خروجی SISo　　چند ورودی- چند خروجی MIMO

شکل ۹- تقسیم بندی سیستم‌های دینامیکی

۲-۳- نحوه نمایش مدل ریاضی سیستم

۲-۱-۱- مقایسه نظریه نوین و نظریه کلاسیک کنترل

در علم کنترل دو روش (نظریه) برای تحلیل سیستمهای کنترلی وجود دارد. نظریه کنترل کلاسیک و نظریه کنترل مدرن. نظریه کنترل کلاسیک که قدمت بیشتری دارد تنها به سیتمهای خطی، مستقل از زمان و تک ورودی-تک خروجی قابل اعمال است. حال آنکه نظریه نوین کنترل را میتوان به سیستمهای چند ورودی-چند خروجی، خطی یا غیر خطی، مستقل از زمان یا متغیر با زمان اعمال کرد. نظریه نوین کنترل یک رهیافت حوزه زمان است، حال آنکه نظریه کلاسیک رهیافت حوزه فرکانس دارد. بنابراین در هر یک از این نظریه ها مدل ریاضی سیستم باید متناسب با آن نمایش داده شود. در نظریه کنترل کلاسیک مدل ریاضی به صورت تابع تبدیل در حوزه فرکانس نمایش داده میشود، حال آنکه در نظریه کنترل مدرن مدل ریاضی سیستم به فرم فضای حالت در حوزه زمان نمایش داده میشود. نحوه بدست آوردن تابع تبدیل یک سیستم در حوزه فرکانس در بخش مربوط به تبدیل لاپلاس توضیح داده شد. در اینجا نمایش فضای حالت مورد توجه قرار میگیرد.

۲-۱-۲- تعریف مفاهیم اولیه

در ابتدا یک سری مفاهیم اولیه تعریف میشود.

- حالت (State): منظور از حالت یک سیستم دینـامیکی، کـوچکترین مجموعـه متغیرهـا (موسـوم بـه متغیرهای حالت) است کـه اگـر در $t = t_0$ معلـوم باشـند، همچنـین ورودی سیسـتم نیـز در $t \ge t_0$ مشخص باشد، رفتار سیستم را در $t \ge t_0$ به طور کامل مشخص کنند.
- بردار حالت (State Vector): اگر برای توصیف کامل رفتار یک سیستم n متغیر حالت لازم باشد، ایـن n متغیر حالت را میتوان n درایه بردار X در نظر گرفت، این بردار را بردار حالت می نامند.
- فضای حالت (State space): فضای n بعدی که محورهـای مختصـات آن محـور x_1، محـور x_2 و ... محور x_n باشد. هر حالت را میتوان با یک نقطه در فضای حالت مشخص کرد.
- معادلات فضای حالت (Sate space equation): در تحلیل فضای حالت با سه نوع متغیر کـه در مـدل کردن رفتار دینامیکی سیستم دخیل اند سرو کـار داریـم: متغیرهـای ورودی، متغیرهـای خروجـی و متغیرهای حالت. معادلاتی که رابطه بین این سه دسته متغیر را نشان میدهد، معادلات فضای حالـت گفته میشود.

۲-۱-۳- نمایش فضای حالت معادلات دینامیکی

در حالت کلی، سیستم میتواند چند ورودی-چند خروجی باشد. فرض کنید که سیستم

- r ورودی u_1، u_2، ....، u_r
- m خروجی y_1، y_2، ....، y_m
- n متغیر حالت x_1، x_2، ....، x_n

داشته باشد. پس سیستم و خروجیهای سیستم را میتوان به صورت زیر تعریف کرد:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n,u_1,u_2,\ldots,u_r;t)\\
\dot{x}_2(t) &= f_n(x_1,x_2,\ldots,x_n,u_1,u_2,\ldots,u_r;t)\\
&\vdots\\
\dot{x}_n(t) &= f_n(x_1,x_2,\ldots,x_n,u_1,u_2,\ldots,u_r;t)
\end{aligned}
\quad , \quad
\begin{aligned}
y_1(t) &= g_1(x_1,x_2,\ldots,x_n,u_1,u_2,\ldots,u_r;t)\\
y_2(t) &= g_n(x_1,x_2,\ldots,x_n,u_1,u_2,\ldots,u_r;t)\\
&\vdots\\
y_m(t) &= f_n(x_1,x_2,\ldots,x_n,u_1,u_2,\ldots,u_r;t)
\end{aligned}$$

با تعریف بردار های زیر

$$X(t)=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix},\ Y(t)=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_m\end{bmatrix},\ U(t)=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\\vdots\\u_r\end{bmatrix},\ f(x,u,t)=\begin{bmatrix}f_1\\f_2\\\vdots\\f_n\end{bmatrix},\ g(x,u,t)=\begin{bmatrix}g_1\\g_2\\\vdots\\g_m\end{bmatrix}$$

معادلات سیستم در حالت کلی میشود:

$$\dot{X}(t) = f(X,U,t)$$
$$Y(t) = g(X,U,t)$$

با خطی کردن این معادلات حول نقطه کار، معادله حالت و خروجی خطی شده زیر حاصل میشود:

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + B(t)U(t)$$
$$Y(t) = C(t)X(t) + D(t)U(t)$$

که در آن $A(t)$ ماتریس حالت، $B(t)$ ماتریس ورودی، $C(t)$ ماتریس خروجی و $D(t)$ ماتریس انتقال مستقیم گفته میشود. اگر در توابع f و g زمان t به طور صریح وارد نشود، سیستم خطی مستقل از زمان میشود:

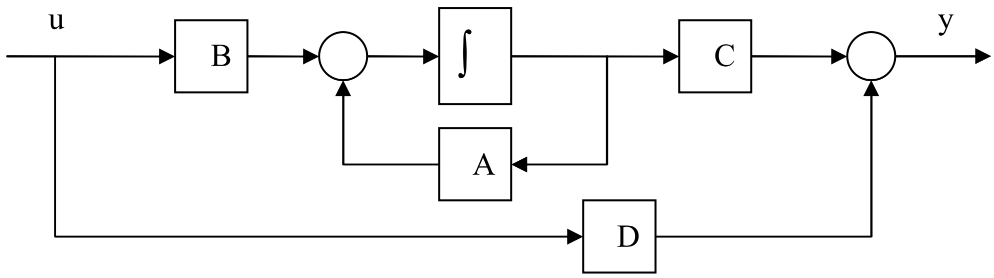
$$\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t)$$
$$Y(t) = CX(t) + DU(t)$$

ماتریس $A \in R^{n\times m}$ به ورودی و خروجی وابسته نیست و نشان دهنده درون سیستم میباشد.

ماتریس $B \in R^{n\times r}$ رابطه بین متغیرها و ورودی را نشان میدهد.

ماتریس $C \in R^{m\times n}$ رابطه بین متغیرها و خروجی را نشان میدهد.

دیاگرام بلوکی یک سیستم کنترل خطی، توصیف شده با معادلات حالت را طبق شکل ۱۰ میتوان نمایش داد.



شکل ۱۰- دیاگرام بلوکی سیستم در فرم فضای حالت

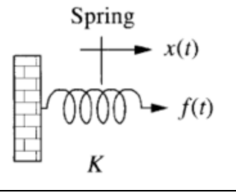
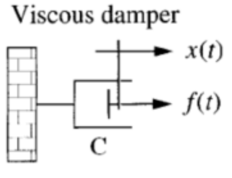
۲-۱-۴- نمایش تابع تبدیل معادلات دینامیکی

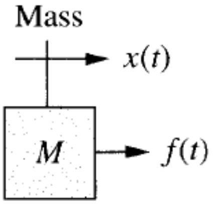
نحوه دیگر نمایش یک سیستم، استخراج تابع تبدیل آن میباشد. برای استخراج تابع تبدیل یک سیستم باید پس از بدست آوردن معادلات دینامیکی آن، از معادلات تبدیل لاپلاس گرفته و نسبت خروجی به ورودی را به صورت یک تابع $G(s)$ بدست آوریم. در مثالهای بعدی نحوه انجام این کار آورده میشود.

۲-۴- مدلسازی سیستمهای مکانیکی

۲-۱-۵- سیستم های مکانیکی با حرکت خطی

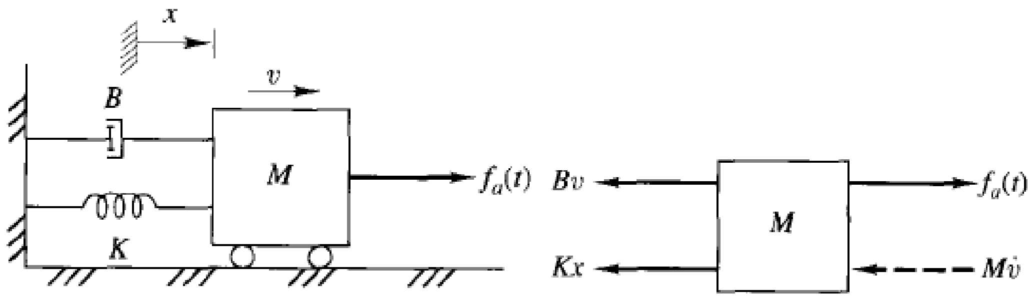
المانهای متداول در سیستمهای مکانیکی با حرکت خطی در شکل ۱۱ نشان داده شده است.

	$f(t) = Kx(t)$
	$f(t) = C\dot{x}(t)$

	$f(t) = M\ddot{x}(t)$

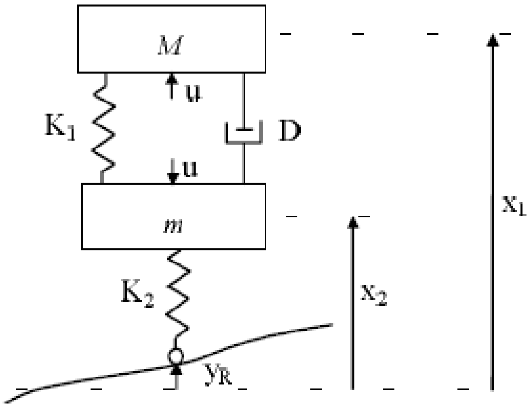
شکل ۱۱- المانهای مکانیکی با حرکت خطی و روابط آنها

مثال ۱- مدل جرم و فنر یک درجه آزادی



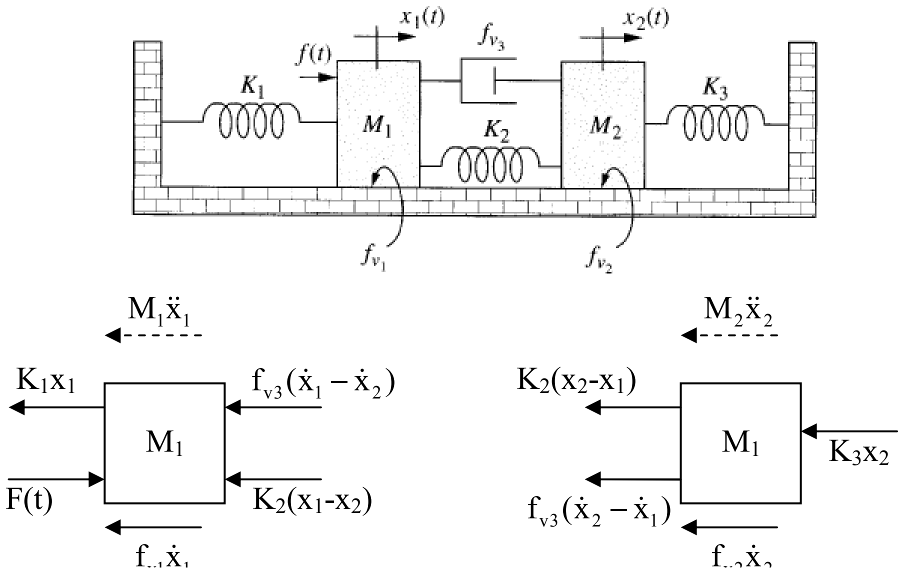
شکل ۱۲- مدل و دیاگرام آزاد سیستم جرم و فنر یک درجه آزادی

مثال ۲- مدل یک چهارم سیستم تعلیق خودرو



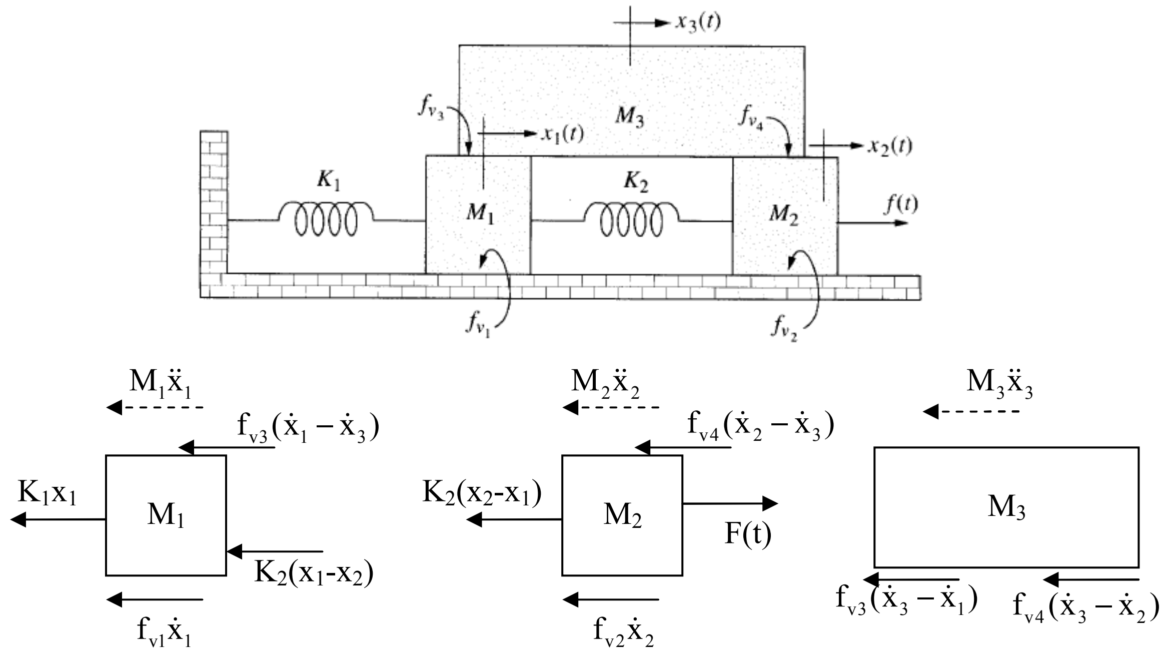
شکل ۱۳- مدل یک چهارم خودرو با سیستم تعلیق فعال

مثال ۳- سیستم جرم و فنر دو درجه آزادی با اصطکاک ویسکوز



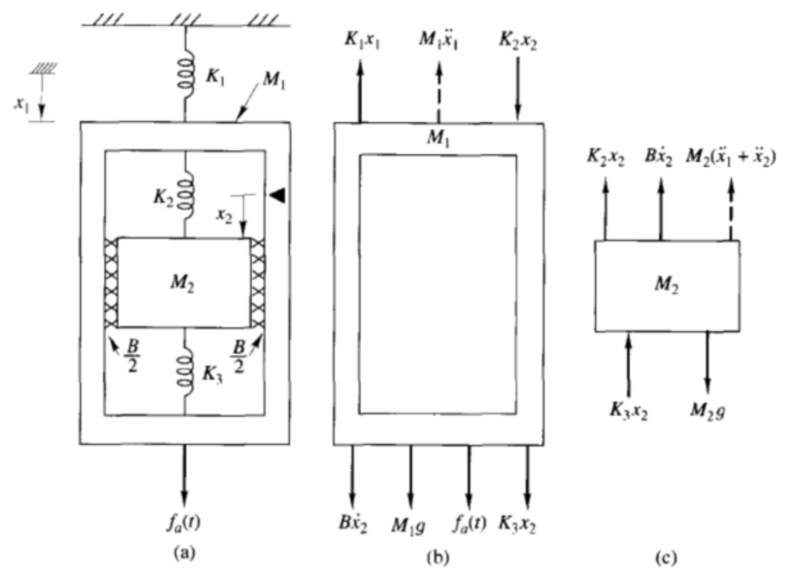
شکل ۱۴- سیستم جرم و فنر دو درجه آزادی و دیاگرام آزاد آن

مثال ۴- سیستم جرم و فنر سه درجه آزادی



شکل ۱۵- سیستم جرم و فنر سه درجه آزادی و دیاگرام آزاد آن

مثال ۵- سیستم جرم و فنر دو درجه آزادی

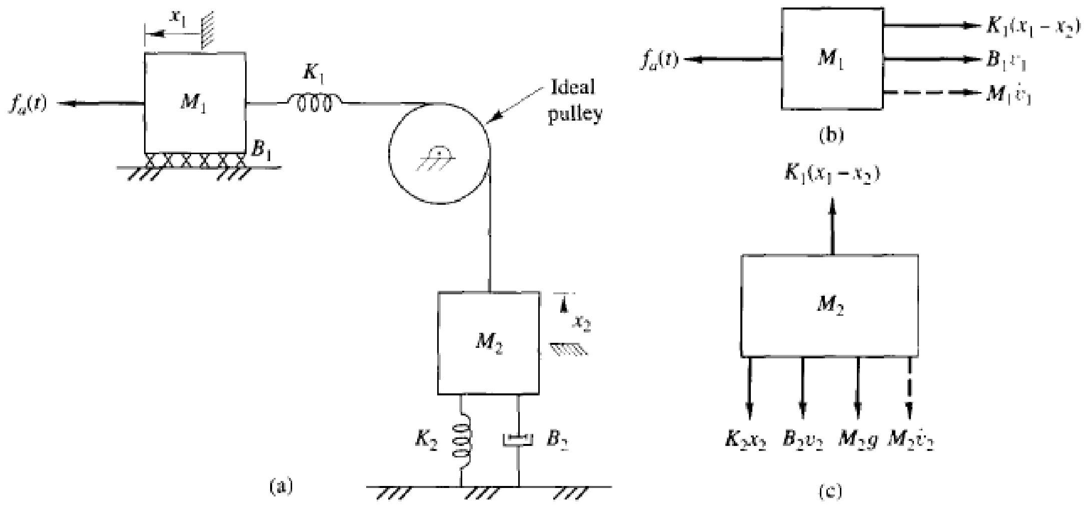


شکل ۱۶- سیستم جرم و فنر دو درجه آزادی به همراه دیاگرام آزاد آن

$$M_1\ddot{x}_1 + K_1x_1 - B\dot{x}_2 - (K_2+K_3)x_2 = M_1g + f_a(t)$$

$$M_2\ddot{x}_1 + M_2\ddot{x}_2 + B\dot{x}_2 + (K_2+K_3)x_2 = M_2g$$

مثال ۶- سیستم دو درجه آزادی با پولی هرزگرد

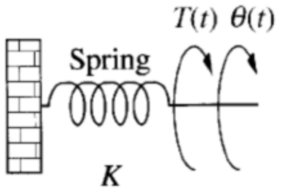
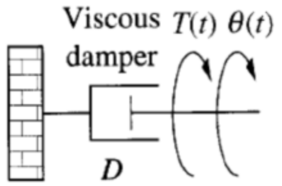
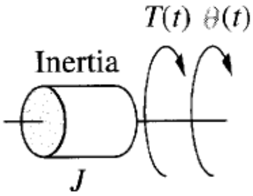


شکل ۱۷- سیستم جرم و فنر با پولی هرزگرد، به همراه دیاگرام آزاد آن

$$M_1\dot{v}_1 + B_1 v_1 + K_1(x_1 - x_2) = f_a(t)$$
$$M_2\dot{v}_2 + B_2 v_2 + K_2 x_2 = K_1(x_1 - x_2)$$

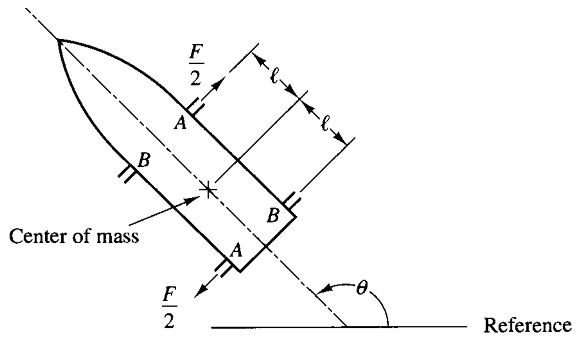
۲-۱-۶- سیستم های مکانیکی با حرکت دورانی

المانهای متداول در سیستمهای مکانیکی با حرکت دورانی در شکل ۱۸ نشان داده شده است.

	$T(t) = K\theta(t)$
	$T(t) = D\dot{\theta}(t)$
	$T(t) = J\ddot{\theta}(t)$

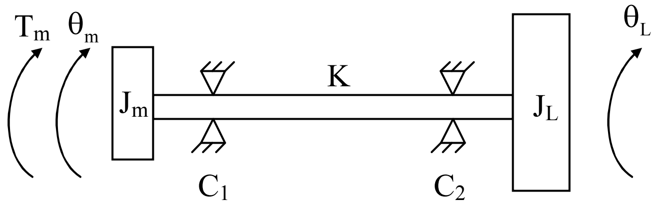
شکل ۱۸- المانهای مکانیکی با حرکت دورانی و روابط آنها

مثال ۱- سیستم دوران ماهواره



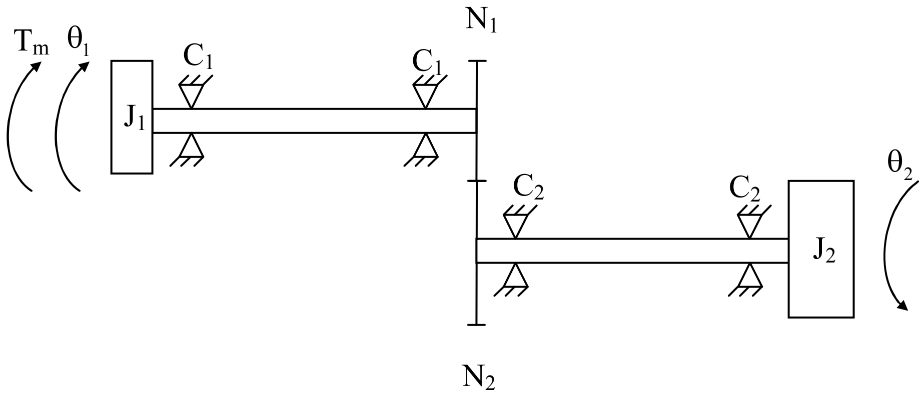
شکل ۱۹- سیستم دوران ماهواره

مثال ۲- سیستم دورانی موتور و بار



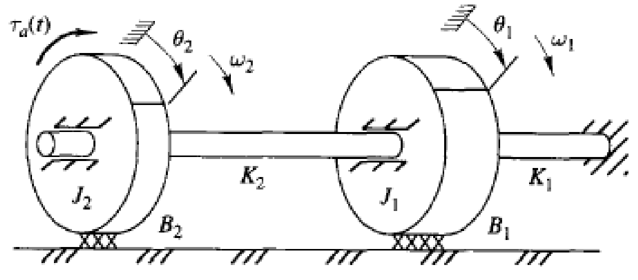
شکل ۲۰- سیستم دورانی موتور و بار

مثال ۲- سیستم انتقال قدرت دورانی

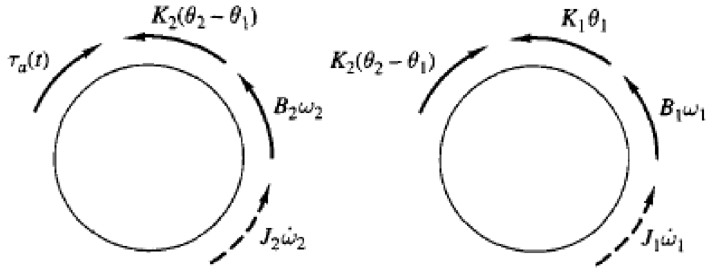


شکل ۲۱- سیستم انتقال قدرت دورانی

مثال ۳- سیستم دورانی دو درجه آزادی

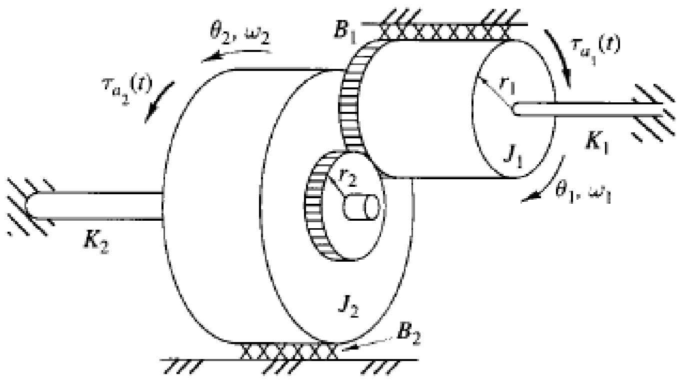


(a)

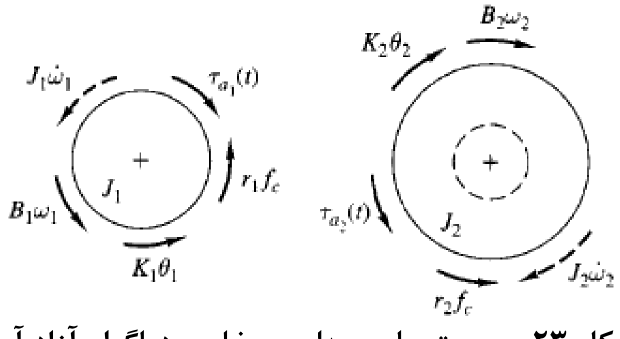


شکل ۲۲- سیستم دورانی دو درجه آزادی و دیاگرام آزاد آن

مثال ۴- سیستم دو جرم چرخان چرخدنده دار



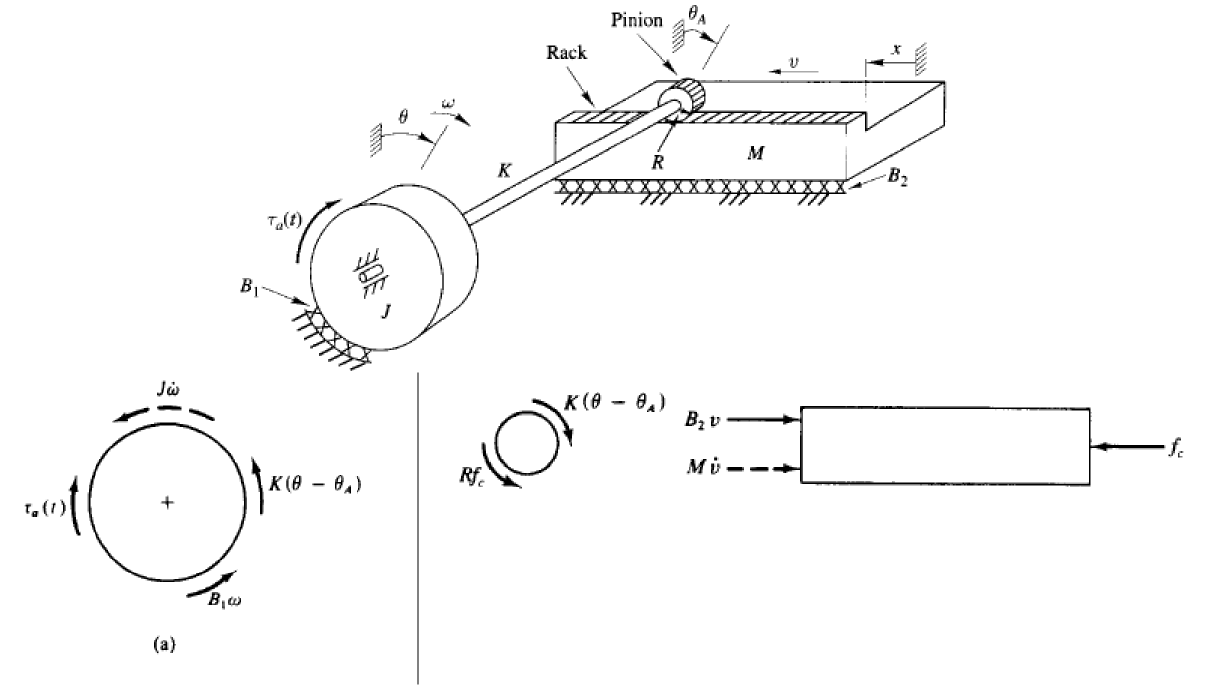
(a)



شکل ۲۳- سیستم با جرمهای چرخان و دیاگرام آزاد آن

۲-۱-۷- سیستم های مکانیکی با حرکت خطی و دورانی

مثال ۲- سیستم خطی-دورانی با پینیون و چرخدنده شانه ای



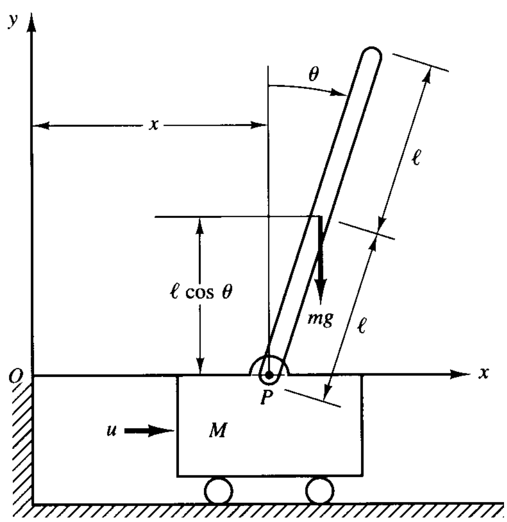
شکل ۲۴- سیستم خطی- دورانی با چرخدنده شانه ای به همراه دیاگرام آزاد آن

نشان دهید معادلات دینامیکی این سیستم با متغیرهای x و θ به صورت زیر بدست می آید.

$$J\ddot{\theta}+B_1\dot{\theta}+K\theta-\frac{K}{R}x=\tau_a(t)$$

$$M\ddot{x}+B_2\dot{x}+\frac{K}{R^2}x-\frac{K}{R}\theta=0$$

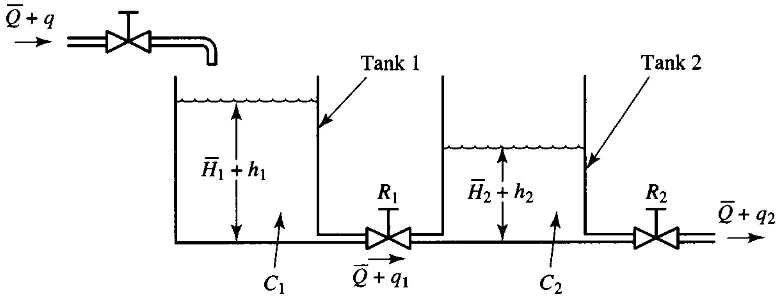
مثال ۲- سیستم پاندول معکوس



شکل ۲۵- سیستم پاندول معکوس

۲-۱-۸-سیستمهای حرارت و سیالات

مثال ۱- سیستم دو مخزن مرتبط

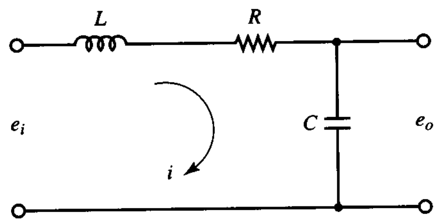


شکل ۲۶- سیستم دو مخزن مرتبط

مثال ۲- مدل حرارتی یک اتاق

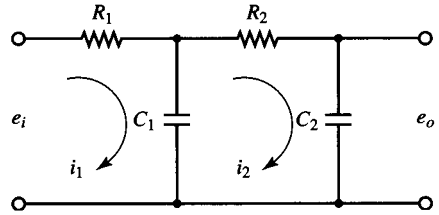
۲-۱-۹- سیستمهای الکتریکی

مثال ۱- مدار RCL



شکل ۲۷- مدار الکتریکی RCL

مثال ۲- مدار RCL



شکل ۲۸- مدار الکتریکی RCL

۲-۱-۱۰- سیستمهای الکترومکانیکی

موتور DC مغناطیس دائم

۲-۵- خطی سازی ریاضی [۱]

همانگونه که در مثالهای قبل مشاهده نمودیم، بسیاری از سیستمهای صنعتی دارای دینامیک غیر خطی می باشند. به منظور استفاده از تکنیکهای طراحی کنترل کننده های خطی برای این گونه سیستم ها لازم است ابتدا معادلات غیرخطی سیستم را به صورت ریاضی خطی سازی کنیم. در سیستمهای کنترل، تقریب خطی از یک مدل ریاضی غیر خطی خوب عمل می کند چرا که اگر سیستم کنترلی درست طراحی شده باشد هدف سیستم کنترل یعنی تنظیم پارامترهای خروجی در نزدیکی شرایط کارکرد نامی ارضاء خواهد شد. لذا تقریب خطی که در زیر بدان می پردازیم دارای درجهٔ اعتبار خوبی در نزدیکی نقطهٔ کارنامی سیستم می باشد.
برای خطی سازی سیستم لازم است دو مرحلهٔ زیر صورت پذیرد.

۱- تعیین شرایط ماندگار سیستم یا نقطهٔ تعادل با توجه به مقادیر نامی خروجی و ورودی.
۲- طراحی سیستم کنترلی براساس تغییرات تفاضلی سیستم از شرایط نامی.

با این توصیف متغیرهای کنترلی سیستم u سبب می گردند تغییرات پاسخ سیستم از شرایط ماندگار با سرعت مناسبی به سمت صفر میل نموده و همواره در نزدیکی شرایط نامی باقی

بمانند. این موضوع به نوبهٔ خود باعث می شود تقریب خطی از یک معادلهٔ غیر خطی معتبر بماند. با معادلهٔ برداری و عمومی یک سیستم غیرخطی شروع می کنیم.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,u) \\ y &= h(x,u) \end{aligned} \tag{۵۸-۲}$$

در عمل برای انجام این دو مرحله به صورت سیستماتیک، ابتدا مقادیر ماندگار را تعیین نموده و سپس معادلات دینامیکی سیستم را برای تغییرات کوچک حول مقادیر ماندگار بدست می آوریم. درحالت ماندگار دیگر تغییراتی در متغیرهای حالت وجود نداشته لذا در حالت تعادل $\dot{x}^* = 0$ است. از حل معادلهٔ زیر مقادیر متغیرهای حالت، ورودیهای لازم و خروجیهای نتیجه شده در حالت ماندگار و یا تعادل تعیین می شوند.

$$\begin{cases} f(x^*,u^*) = 0\}n \\ h(x^*,u^*) = y^*\}m \end{cases} \tag{۵۹-۲}$$

دقت کنید این معادله دارای m+n معادله بوده اما با توجه به ابعاد $y^*_{m\times1}$، $u^*_{r\times1}$، $x^*_{n\times1}$ تعداد r+m+n مجهول دارد. لذا در حالت کلی قابل حل نیست. بایستی برای تعیین مقادیر تعادل تعداد r مجهول را دانسته فرض نمود. این کاملاً منطبق با فیزیک مسئله است، چراکه به ازای اعمال ورودی دلخواه به سیستم (u^*)، مسلماً خروجی سیستم نیز متناظراً به مقدار ماندگار دیگری میل خواهد نمود. لذا بایستی یا $u^* = u_d$ یا $x^* = x_d$ یا $y^* = y_d$ به تعداد r معادله مفروض درنظر گرفته شده و سایر مقادیر را از معادلات تعادل (۲-۵۹) بدست آوریم. در عین حال این معادلات غیرخطی اند، لذا ممکن است جواب نداشته و یا جواب تکراری داشته باشند. انجام این مرحله در عمل بسیار مهم ولی به صورت تحلیلی معمولاً مشکل می باشد. لذا برای حل این معادلات در عمل می توان از طرق دیگری همانند تعیین مقادیر ماندگار از روی فیزیک مسئله و یا مشابه سازی سیستم و یا حل عددی، استفاده نمود.

مرحلهٔ بعدی بدست آوردن معادلات دینامیکی برای متغیرهای تفاضلی[1] می باشد. متغیر تفاضلی Δu، Δy، Δx اختلاف جزئی متغیرهای حالت نسبت به حالت تعادل خود می باشند:

$$x(t) = x^* + \Delta x(t),\ \ u(t) = u^* + \Delta u(t),\ \ y(t) = y^* + \Delta y(t) \tag{۶۰-۲}$$

با توجه به اینکه $\dot{x}^* = 0$ می باشد معادلات سیستم براساس متغیرهای جدید Δ به فرم زیر تعبیر می شود.

$$\begin{cases}\Delta\dot{x} = f\,(x^* + \Delta x,\ u^* + \Delta u) \\ \Delta y = h\,(x^* + \Delta x,\ u^* + \Delta u) - y^* \end{cases} \quad (۶۱-۲)$$

توابع f, h را حول متغیرهای حالت x^* و ورودیهای u^* با تقریب چند متغیره سری تیلور نمایش می دهیم.

$$\begin{aligned} f_i(x^* + \Delta x,\ u^* + \Delta u) &= f_i(x^*, u^*) + \left.\frac{\partial f_i}{\partial x_1}\right|_* \Delta x_1 + \cdots + \left.\frac{\partial f_i}{\partial x_n}\right|_* \Delta x_n \\ &+ \left.\frac{\partial f_i}{\partial u_1}\right|_* \Delta u_1 + \cdots + \left.\frac{\partial f_i}{\partial u_r}\right|_* \Delta u_r + O(\Delta x)^2 + O(\Delta u)^2 + \cdots \end{aligned} \quad (۶۲-۲)$$

که در آن نماد $\left(\ \left.\right|_*\ \right)$ به معنای تعیین مقادیر توابع در x^*, u^* می باشد. با توجه به فرض خطی سازی که در آن تغییرات متغیرهای حالت و ورودیهای سیستم از شرایط نامی $\Delta x,\ \Delta u$ بسیار کوچک تر از u, x می باشند می توان براحتی از ترمهای رتبهٔ بالاتر صرفنظر نمود. این فرض مهم در عمل در زمانی که سیستم کنترل خوب عمل نماید معتبر است. لذا می توان توابع f, g را به فرم زیر نمایش داد.

$$f_i(x^* + \Delta x, u^* + \Delta u) \approx \left.\frac{\partial f_i}{\partial x}\right|_* \Delta x + \left.\frac{\partial f_i}{\partial u}\right|_* \Delta u \quad (۶۳-۲)$$

که در آن $\frac{\partial f}{\partial x}$ ژاکوبین تابع f نسبت به x می باشد و از رابطهٔ زیر بدست می آید.

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_* = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_* \quad (۶۴-۲)$$

به طریق مشابه معادلات حالت تغییرات را می توان به فرم زیر نگاشت:

$$\begin{cases} \Delta\dot{x} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_* \Delta x + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_* \Delta u \\ \Delta y = \left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_* \Delta x + \left.\frac{\partial h}{\partial u}\right|_* \Delta u \end{cases} \quad (۶۵-۲)$$

دقت کنید کلیهٔ ژاکوبین ها در نقطهٔ تعادل مقدار دهی شده اند. لذا ماتریسهای معینی را تشکیل می دهند و می توان معادلهٔ فوق را به فرم استاندارد معادلات حالت خطی غیر متغیر با زمان نمایش داد.

$$\begin{cases}\Delta\dot{x}=A\,\Delta x+B\,\Delta u\\ \Delta y=C\,\Delta x+D\,\Delta u\end{cases} \tag{۲-۶۶}$$

نکته ۱: به جای خطی سازی حول یک نقطهٔ تعادل ثابت x^* و u^*، می توان معادلات خطی سیستم را حول یک مسیر یا Trajectory بدست آورد. مسیر عبارتست از توابع $u^*(t),\ x^*(t)$ که در معادلات حالت صدق کنند. در اینحالت مشابه حالت قبل سیستم را می توان حول مسیر خطی سازی نمود. تنها اختلاف مهم در این مورد آنست که ماتریسهای A, B, C, D سیستم تابعی از زمان خواهند بود (TV). برای بررسی این روش به مسئلهٔ ۲-۱۸ مراجعه شود.

نکتهٔ ۲: اگر سیستم غیرخطی دارای ورودیهای اغتشاشی w و نویز اندازه گیری v نیز باشد و به صورت زیر قابل نمایش باشد:

$$\begin{aligned}\dot{x}&=f(x,u,\omega)\\ y&=h(x,u,\omega,v)\end{aligned} \tag{۲-۶۷}$$

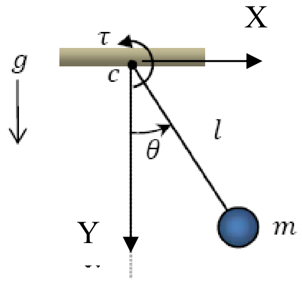
به صورت مشابه سیستم تفاضلی حول نقاط کار یا مسیر را می توان به صورت زیر خطی سازی نمود.

$$\begin{aligned}\Delta\dot{x}&=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_*\Delta x+\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_*\Delta u+\left.\frac{\partial f}{\partial w}\right|_*\Delta w\\ \Delta y&=\left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_*\Delta x+\left.\frac{\partial h}{\partial u}\right|_*\Delta u+\left.\frac{\partial h}{\partial w}\right|_*\Delta\omega+\left.\frac{\partial h}{\partial v}\right|_*\Delta v\end{aligned} \tag{۲-۶۸}$$

و یا به صورت ماتریسی به صورت زیر تعبیر نمود.

$$\begin{cases}\Delta\dot{x}=A\Delta x+B\Delta u+F\Delta w\\ \Delta y=C\Delta x+D\Delta u+G\Delta\omega+H\Delta v\end{cases} \tag{۲-۶۹}$$

مثال۱: پاندول تک لینکی



برای پاندول نوسانی مطابق شکل زیر مطلوب است:

الف) معادله دینامیکی سیستم.

ب) استخراج فرم فضای حالت سیستم (τ ورودی و θ خروجی).

ج) ترسیم دیاگرام بلوکی سیستم.

د) تعیین نقاط تعادل و استخراج فرم خطی فضای حالت حول نقاط تعادل.

ه) محاسبه تابع تبدیل سیستم برای حالت د.

الف) معادله دینامیکی پاندول به صورت زیر استخراج میگردد.

$$ml^2\ddot{\theta} + c\dot{\theta} + mgL\sin\theta = \tau$$

ب) متغیرهای حالت، خروجی و ورودی سیستم را به صورت زیر تعریف میکنیم

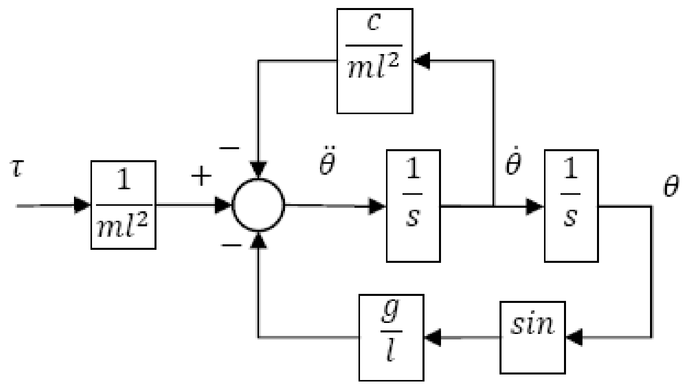
$$\theta = x_1,\ \dot{\theta} = x_2$$
$$\tau = u$$
$$\theta = y_1$$

بنابراین فرم فضای حالت معادلات که غیر خطی است به صورت زیر بدست می آید.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{c}{mL^2}x_2 - \dfrac{g}{L}\sin x_1 + \dfrac{u}{mL^2} \end{cases} \quad , \quad \{ y_1 = x_1$$

ج) دیاگرام بلوکی سیستم

$$\ddot{\theta} = -\frac{c}{mL^2}\dot{\theta} - \frac{g}{L}\sin\theta + \frac{\tau}{mL^2}$$



د) تعیین نقاط تعادل و استخراج فرم خطی فضای حالت حول نقاط تعادل.

با فرض $u = 0$ و قرار دادن $\dot{x}_1 = 0$ و $\dot{x}_2 = 0$ در معادلات فضای حالت

$$\dot{x}_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \xrightarrow{\dot{x}_2=0} -\frac{c}{mL^2}x_2 - \frac{g}{L}\sin x_1 + \frac{u}{mL^2} = 0 \Rightarrow \sin x_1 = 0$$

پس نقاط تعادل عبارتند از

$$p_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ p_2 = \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix}$$

از قسمت ب داریم

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 = f_1 \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{c}{mL^2}x_2 - \dfrac{g}{L}\sin x_1 + \dfrac{u}{mL^2} = f_2 \end{cases} \quad , \quad \{y_1 = x_1 = h_1$$

بنابراین ماتریسهای A, B, C و D طبق معادلات ۲-۶۴ و ۲-۶۵ به صورت زیر بدست می آیند.

$$A = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{g}{L}\cos x_1 & \dfrac{-c}{mL^2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \text{About } p_1 \rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -g/L & -c/mL^2 \end{bmatrix} \\ \text{About } p_2 \rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ g/L & -c/mL^2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$B = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{mL^2} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{About } p_1 \text{ and } p_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{mL^2} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial h_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial h_1}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \text{About } p_1 \rightarrow C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \text{About } p_2 \rightarrow C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \end{cases},\quad D = [0]$$

ه) معادلات خطی شده در قسمت د) به صورت زیر استخراج گردید:

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{L}x_1 - \frac{c}{mL^2}x_2 + \frac{u}{mL^2}$$
$$y = x_1$$

با گرفتن تبدیل لاپلاس از این معادلات داریم:

$$sX_1 = X_2$$
$$sX_2 = -\frac{g}{L}X_1 - \frac{c}{mL^2}X_2 + \frac{U}{mL^2}$$
$$Y = X_1$$

با جایگذاری X_1 و X_2 در معادله دوم تابع تبدیل به صورت زیر بدست می آید

$$s^2Y = -\frac{g}{L}Y - \frac{cs}{mL^2}Y + \frac{U}{mL^2} \Rightarrow (s^2 + \frac{cs}{mL^2} + \frac{g}{L})Y = \frac{U}{mL^2} \Rightarrow \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{mL^2s^2 + cs + mLg}$$

مثال ۲: پاندول معکوس

در مثال پاندول معکوس فرم غیر خطی معادلات فضای حالت به صورت زیر استخراج گردید.

$$\dot{x}_1 = x_2 = f_1$$

$$\dot{x}_2 = \frac{F + mlx_4^2 \sin x_3 - mg \sin x_3 \cos x_3}{M + m(1-\cos^2 x_3)} = f_2$$

$$\dot{x}_3 = x_4 = f_3$$

$$\dot{x}_4 = \frac{-F \cos x_3 - mlx_4^2 \sin x_3 \cos x_3 + (M + m) g \sin x_3}{l(M + m(1-\cos^2 x_3))} = f_4$$

به منظور بدست آوردن فرم خطی معادلات ابتدا باید نقاط تعادل آنرا بدست آورد. این سیستم بینهایت نقطه تعادل به صورت زیر دارد.

$$p = [c \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$p = [c \quad 0 \quad \pi \quad 0]$$

بنابراین خطی سازی را حول یکی از این نقاط مثلا $p = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$ انجام میدهیم. طبق معادلات ۲-۶۴ تا ۲-۶۶ معادلات خطی شده به صورت زیر بدست می آید

$$\Delta\dot{X} = A\Delta X + B\Delta U$$

$$\Delta y = C\Delta X + D\Delta U$$

بنابراین داریم

$$A = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_1} & \frac{\partial f_4}{\partial x_2} & \frac{\partial f_4}{\partial x_3} & \frac{\partial f_4}{\partial x_4} \end{bmatrix}\right|_* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_3}\right|_* & \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_4}\right|_* \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \left.\frac{\partial f_4}{\partial x_3}\right|_* & \left.\frac{\partial f_4}{\partial x_4}\right|_* \end{bmatrix}, \quad B = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u} \\ \frac{\partial f_4}{\partial u} \end{bmatrix}\right|_* = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ \frac{1}{Ml} \end{bmatrix}$$

مثال ۳-۴ کتاب اگاتا را بخوانید.

[۱] مقدمه ای بر کنترل مدرن، دکتر حمید رضا تقی راد