

پرتال جامع دانشجویان و مهندسين عمران

[www.icivil.ir](http://www.icivil.ir)

دانلود شده از: پرتال جامع دانشجویان و مهندسين عمران

پایگاه تخصصی دانشجویان و مهندسين عمران

اتاق گفتگو جامعه مجازی دانشجویان و مهندسين عمران

دانلود رایگان جزوات و نمونه سوالات و کتابها و مقالات روز علم عمران

اولین فروشگاه اینترنتی مهندسی عمران و معماری

بسم الله الرحمن الرحيم  
و صل الله على محمد و آل محمد

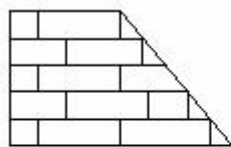
# تحليل سازه ها

میثم آزادمنش

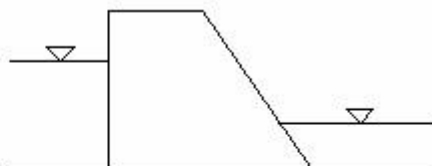
دانشجوی عمران دانشگاه آزاد اسلامی واحد زنجان

## انواع سازه ها

**1- سازه های وزنی Mass Structures :** دیوارهای حایل ، سدهای وزنی آجری ، سنگی و یا بتنی و ... مثالهایی از این سازه ها می باشند. مقاومت در برابر بارهای وارده به وزن این سازه ها بستگی دارد .



Retaining Wall دیوار حایل



Mass Dam سد وزنی

**2- سازه های قاب بندی شده Framed Structures :** قابهای چوبی ، فلزی ، بتنی ، قاب بندی بدنه کشتی ها ، قوس ها ، بدنه هواپیما و ... مثالهایی از سازه های قاب بندی شده می باشند .

**3- سازه های پوسته ای Shell Structures :** منابع ذخیره مایعات ، مخازن تحت فشار ، سیلوها ، سدهای پوسته ای ، دالهای بتنی تحت فشار و تاشده ( folded ) مثالهایی از این نوع سازه می باشند . در اعضای این سازه ها نیروی محوری وجود دارد .

**4- سازه های کششی ( کابلها ) :** مصالح این نوع سازه ها باید مقاومت کششی زیادی داشته باشند یک سازه کششی بارهای وارده را تنها از طریق کشش در اعضای اصلی سازه به تکیه گاه منتقل می کند .

## تعریف سازه

عبارتست از جسم و یا مجموعه ای از مصالح و اجسام که به منظور تحمل و انتقال نیرو به کار می رود

## تحلیل سازه

علمی است که عمل نیروها را روی مجموعه های ساختمانی بررسی می نماید یعنی تاثیر و نحوه انتقال نیروهای موثر به سازه ها که توسط اجزای سازه از نقاط تاثیر به تکیه گاه هدایت می گردند در علم تحلیل سازه مورد بحث و مطالعه قرار می گیرند .

تحلیل سازه شامل موارد زیر می باشد : 1- بررسی پایداری و ناپایداری سازه ها 2- تعیین واکنشهای تکیه گاهی

3- تعیین نیروهای داخلی و محاسبه تغییر شکلها

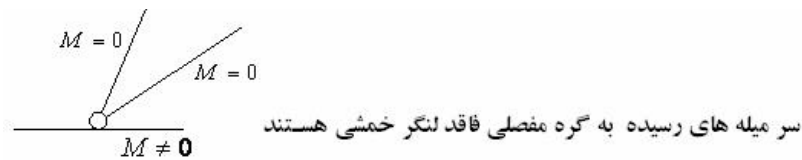
Equilibrium Equations معادلات تعادل } پایه های اصلی تحلیل سازه ها  
 Material Behavior رفتار مصالح }  
 Compatibility Equations معادلات سازگاری }

**گره**

یک نقطه هندسی از سازه است که به طور معمول در محل برخورد دو یا چند عضو واقع می شود بر اساس این تعریف یک عضو بخشی از سازه است که بین دو گره متوالی از سازه قرار می گیرد .

گره مفصلی }  
 گره صلب }  
 گره نیمه صلب یا نسبتا صلب } **عادی**  
 گره قیچی سان }  
 تکیه گاه مفصلی }  
 تکیه گاه صلب } **تکیه گاهی**  
 تکیه گاه نیمه صلب یا نسبتا صلب }

**تقسیم بندی گره ها**



**معادلات شرط ( درجه آزادی )**

روابطی که در صورت وجود ناپیوستگی در سازه های میله ای نوشته می شود معادلات شرط نامیده می شود . ناپیوستگی در هر نقطه از سازه ناتوانی در انتقال نیروی داخلی خاصی از یک مقطع به مقطع دیگر است و در نتیجه نوعی آزادی حرکت یک مقطع به مقطع پهلویی است .

**انواع عضو میله ای**



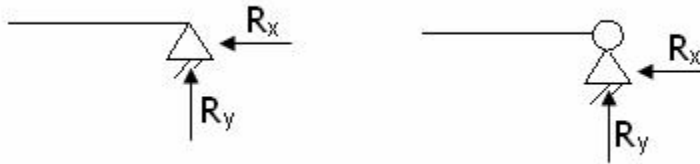
**تکیه گاه Support**

محل اتصال سازه به پی و یا سازه ای دیگر را تکیه گاه گویند

- انواع تکیه گاهها**
- Hinged Support** تکیه گاه مفصلی ثابت
  - Roller Support** تکیه گاه مفصلی متحرک ( غلطکی )
  - Fixed Support** تکیه گاه گیردار
  - Elastic support** تکیه گاه فنری یا ارتجاعی
  - تکیه گاه گیردار هدایت شده یا ریل دار ( گیردار غلطکی )

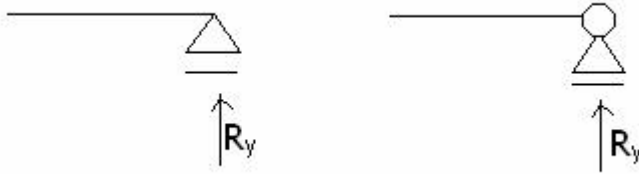
### 1- تکیه گاه مفصلی ثابت

این تکیه گاه دو عکس العمل یکی در جهت افق و دیگری در جهت قائم می باشد. تکیه گاه می تواند دوران نماید ( دارای درجه آزادی واحد است )



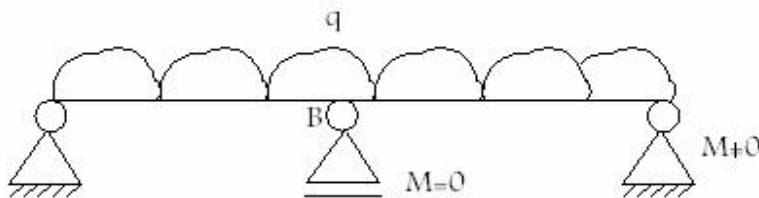
### 2- تکیه گاه مفصلی متحرک ( غلطکی )

در این نوع تکیه گاه آزادی حرکت در امتداد چرخش غلطکها وجود دارد و دارای درجه آزادی 2 می باشد ( یک درجه آزادی انتقالی و یک درجه آزادی چرخشی ). این تکیه گاه یک عکس العمل در جهت عمود بر جهت لغزش غلطکها تولید می کند



**نکته 1** تکیه گاه انتهای تیر نقش مفصل خالص را دارد .

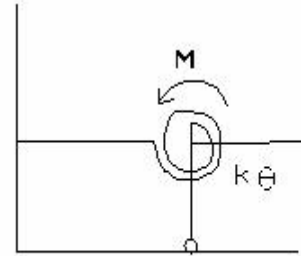
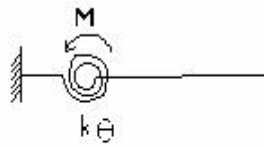
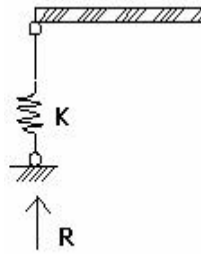
**نکته 2** در تکیه گاه غلطکی میانی تیرهای سرتاسری لنگر خمشی تیر مخالف صفر است .



لنگر تیر در نقطه B صفر نیست

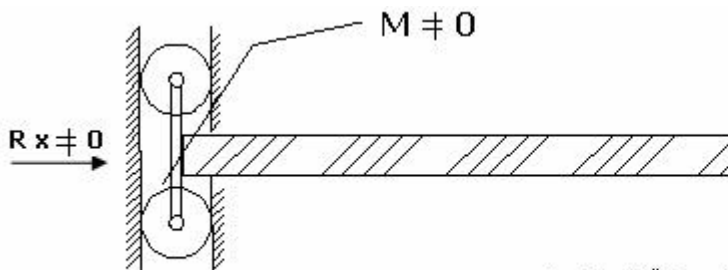
### 3- تکیه گاه گیردار





### 5- تکیه گاه هدایت شده یا ریل دار (گیردار غلطکی)

در این نوع تکیه گاه حرکت در جهت هدایت شده بصورت آزادانه صورت می گیرد و از چرخش آن جلوگیری به عمل می آید این تکیه گاه قابلیت پایداری در برابر نیروی برشی قائم را ندارد.



یک درجه آزادی قائم دارد  $\Rightarrow$  عکس العمل قائم ندارد

### ویژگی های تکیه گاهها از نظر تغییر مکان

سه واکنش دارد	$\delta_x = 0, \delta_y = 0, \theta = 0$	تکیه گاه گیردار
یک واکنش دارد	$\delta_x \neq 0, \delta_y = 0, \theta \neq 0$	تکیه گاه غلطکی
دو واکنش دارد	$\delta_x = 0, \delta_y = 0, \theta \neq 0$	تکیه گاه مفصلی ثابت
دو واکنش دارد	$\delta_x = 0, \delta_y \neq 0, \theta = 0$	تکیه گاه ریل دار افقی

### نکاتی در مورد تکیه گاهها

- 1- همه تکیه گاههای گفته شده می توانند نسبی باشند (تکیه گاه مفصلی نسبتا ثابت = تا حدودی ثابت)
- 2- در عمل از تکیه گاه ایده آل یا مطلق استفاده می کنیم و تجربه و محاسبات نشان داده است که تکیه گاههای ایده آل که مدلی از واقعیتند، اگر خوب انتخاب شوند مخاطره ای برای ما ایجاد نخواهد کرد.
- 3- ممکن است تکیه گاه گیردار چنان ساخته شود که یک یا دو واکنش را نداشته باشد.

## روشهای تعیین درجه نامعینی Degree of indeterminacy

تعیین درجه نامعینی یک گام مهم در تحلیل سازه به روش نیرو می باشد در اینجا پنج روش برای تعیین درجه نامعینی گفته می شود که در اصل همه یک روش زیر هستند:

$$\text{تعداد معادلات} - \text{تعداد مجهولات} = \text{درجه نامعینی (در همه روش ها)}$$

$\left. \begin{array}{l} \text{مجهولات واکنشهای تکیه گاهی یا مجهولات نیرویی تکیه گاهی} \\ \text{مجهولات نیرویی داخلی} \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} \text{معادلات} \\ \text{مجهولات} \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} \text{تعادل (Equilibrium)} \\ \text{شرط (Condition)} \end{array} \right\}$
---	---	---

چهار روش زیر درجه نامعینی استاتیکی را به ما خواهد داد که مربوط به روش نیرو در تحلیل سازه های نامعین است در همه روشهای محاسبه  $X: 1-$  می توان میله شکسته ای را که هیچ شاخه ای از ابتدا و انتهای آن منشعب نشده باشد، یک میله محسوب کرد. 2- طره ها (کنسول ها یا پیش آمدگی ها) در محاسبه  $X$  تاثیری ندارند زیرا معین هستند یعنی در محاسبه  $X$  طره ها را حذف می کنیم و پس از محاسبه  $X$  آنها را در جای خود قرار می دهیم. 3- اگر سازه ای بدون تکیه گاه باشد به فرمولهای زیر (3+) افزوده می شود. - فرمولی که در استاتیک برای محاسبه درجه نامعینی خرپای ایده آل یاد گرفتیم بصورت زیر است

$m$ : تعداد اعضای خرپا

$$X = (m + r) - 2j$$

$r$ : تعداد عکس العملهای تکیه گاهی

$j$ : تعداد گرههای عادی و تکیه گاهی خرپای ایده آل

## روش اول (mrnc)

درجه نامعینی در این روش با فرمول زیر تعیین می شود:

$$X = (3m + r) - (3n + c)$$

$m$ : تعداد اعضا (فاصله گره تا گره)

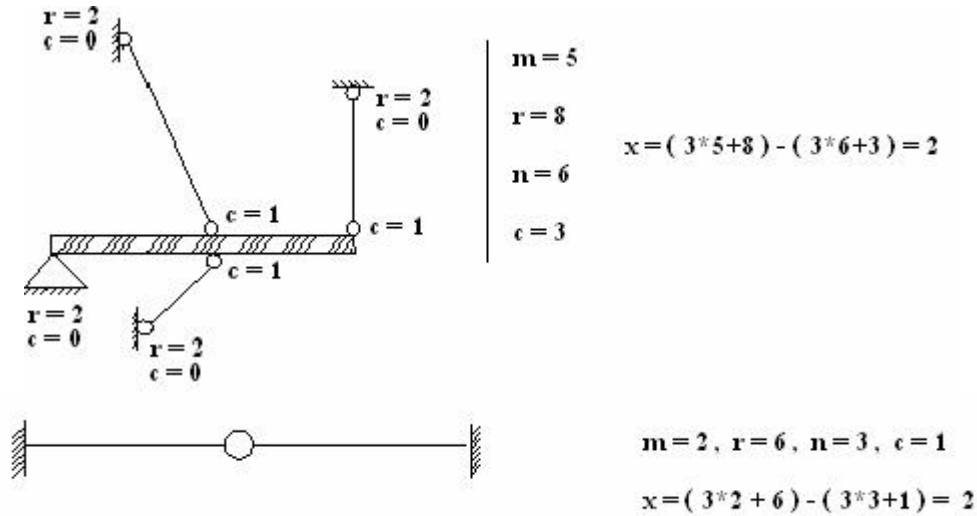
$r$ : تعداد عکس العملهای تکیه گاهی

$n$ : تعداد گرههای تکیه گاهی و غیر تکیه گاهی

$c$ : تعداد معادلات شرط



مثال : با استفاده از روش اول X را تعیین کنید .



روش دوم: روش اسفنجی (اس اف ان جی) (s f n g):

فرمول کلی این روش بصورت زیر است:

$$sX = (3s - f) - (3n - G)$$

تعداد میله ها

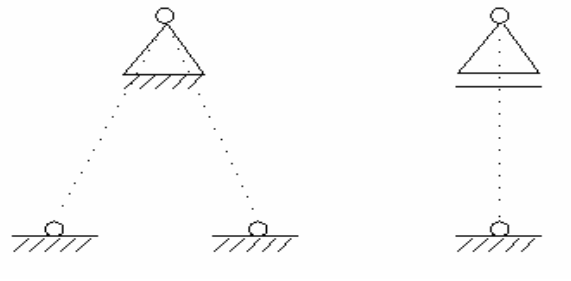
**f**: تعداد سر میله های منتهی به مفصل عادی و تکیه گاهی

**n**: تعداد گرهای غیر تکیه گاهی

**G**: تعداد مفصلهای خالص سازه

**نکاتی در مورد این روش:**

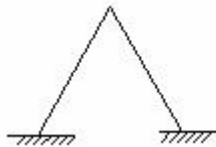
- 1- در محاسبه X به روش sfnng باید همه تکیه گاهها گیردار باشد در غیر اینصورت با تغییرات زیر آنرا به شکل گیردار در می آوریم:  
 تکیه گاه مفصلی ثابت را با دو میله به دو تکیه گاه مفصلی گیردار که خودمان رسم می کنیم، وصل می کنیم و محل تکیه گاه مفصلی ثابت تبدیل به یک مفصل می شود  
 تکیه گاه مفصلی متحرک یا غلطکی را بایک میله به یک تکیه گاه مفصلی گیردار که خودمان رسم می کنیم، وصل می کنیم و محل تکیه گاه مفصلی متحرک تبدیل به یک مفصل می شود



2- در سازه های صلب دو بعدی چون مفصل ندارد پس  $f$  و  $G$  برابر صفر هستند پس برای محاسبه  $X$  این سازه ها می توان از فرمول زیر استفاده کرد

$$X = (3s - f) - (3n - G) \longrightarrow X = 3s - 3n$$

**مثال** : درجه نامعینی سازه های زیر را تعیین کنید .



$$x = 3s - 3n = 3 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 3$$



$$(1) \quad S = 0, n = 0, x = 3 \cdot 0 - 3 \cdot 0 = 0$$

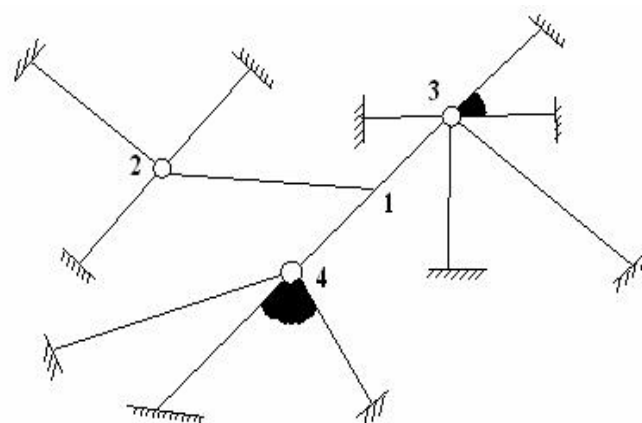
$$(2) \quad S = 1, n = 1, x = 3 \cdot 1 - 3 \cdot 1 = 0$$

$$(3) \quad S = 1, n = 0, x = 3 \cdot 1 - 3 \cdot 0 = 1$$

حالت 3 نادرست است زیرا طره ها همواره معین هستند در محاسبه درجه نامعینی اگر میله طره را عضو در نظر بگیریم باید نوک آنرا گره بشماریم ولی بهتر است ابتدا طره ها را حذف کرده و سپس  $X$  را تعیین کنیم .

### و حال محاسبه درجه نامعینی سازه های دارای گره های متنوع صلب و غیر صلب

**نکته مهم** : در محاسبه  $f$  و  $G$  در گره های بصورت مثال زیر که یک گروه میله جوشی دارند اگر مفصل را خالص در نظر بگیریم دو میله جوش خورده یک میله به حساب می آید و اگر مفصل را غیر خالص در نظر بگیریم گروه میله جوشی را حساب نمی کنیم بنابراین با فرض خالص بودن و غیر خالص بودن  $f-G$  عدد ثابتی می آید پس می توان مفصل را خالص یا غیر خالص تلقی کرد. بطور کلی هر گروه میله جوشی می تواند یک  $f$  داشته باشد با حفظ تعداد میله هایش در شمارش  $S$ . در اینصورت می توان مفصل را خالص تلقی کرد (  $G = 1$  ) و  $S =$  مجموع میله های هر گروه + میله های منفرد ) .

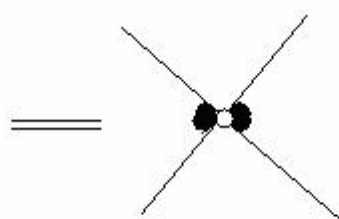
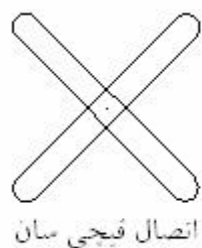
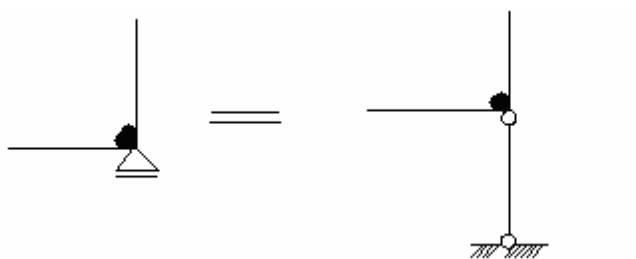


- گره ۱ :  $G=0, n=1, f=0$
- گره ۲ :  $G=1, n=1, f=4$
- گره ۳ :  $G=0, n=1, f=4$
- گره ۴ :  $G=0, n=1, f=2$

$s = 14, f = 10, n = 4, G = 1$

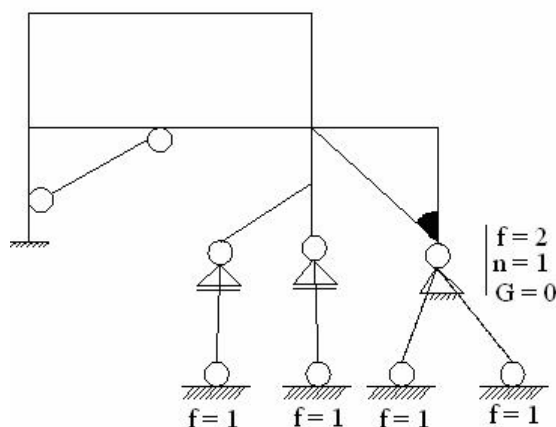
$x = (3s - f) - (3n - G) = (3 \cdot 14 - 10) - (3 \cdot 4 - 1) = 21$

مثالهایی از تبدیلات در روش sfng



تعداد خوشه ها منتهای یک  $f = 1$   
 $G = 0$        $f - G = 1$

مثال 5:



$s = 17, n = 9, f = 22, G = 4$   
 $s = 19, n = 11, f = 22, G = 4$

$X = (3s - f) - (3n - G) = 6$

کاربرد روش sfnج برای خرپای ایده آل دو بعدی ( حالت خاص ):

در یک خرپای ایده آل داریم :

$f = 2s$  زیرا هر دو انتهای میله مفصل است

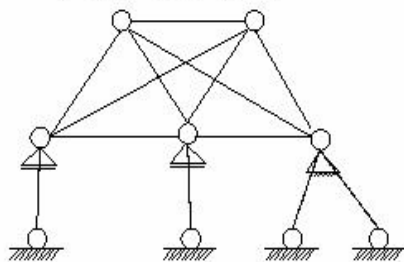
$G = n$  زیرا همه گرہها مفصلی خالص هستند

$$X = (3s - f) - (3n - G) = (3s - 2s) - (3n - n)$$

$$X = s - 2n$$

مثال 6 :

اعضای داخلی از روی هم عبور کرده اند

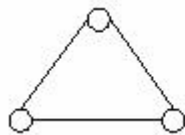


$$S = 13 \quad n = 5$$

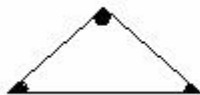
$$X = s - 2n = 13 - 2 \cdot 5 = 3$$

محل عبور یک میله از روی میله دیگر گرہ نیست و اگر گرہ در نظر بگیریم تاثیری در محاسبه X نخواهد داشت ولی در حالت کلی برای تحلیل سازه پذیرفته نیست .

چند نمونه از محاسبه X برای سازه های بی تکیه گاه و صلب بدون تکیه گاه

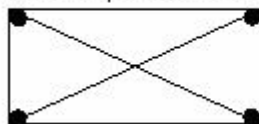


$$X = s - 2n + 3 = 3 - 2(3) + 3 = 0$$



$$X = 3s - 3n + 3 = 3(3) - 3(3) + 3 = 3$$

اعضای داخلی از روی هم عبور کرده اند



$$X = 3s - 3n + 3 = 3(6) - 3(4) + 3 = 9$$

روش سوم : روش درختی برای تعیین درجه نامعینی سازه های دوبعدی

ویژگی های درخت :

1- مدار ( کادر = سلول = مسیر ) بسته ندارند.

2- مسیر رفت و برگشت بدون پریدن بر هم منطبق است ( نتیجه ویژگی اول )

3- مفصل خالص و غیر خالص ندارد .

4- ایزواستاتیک می باشد .

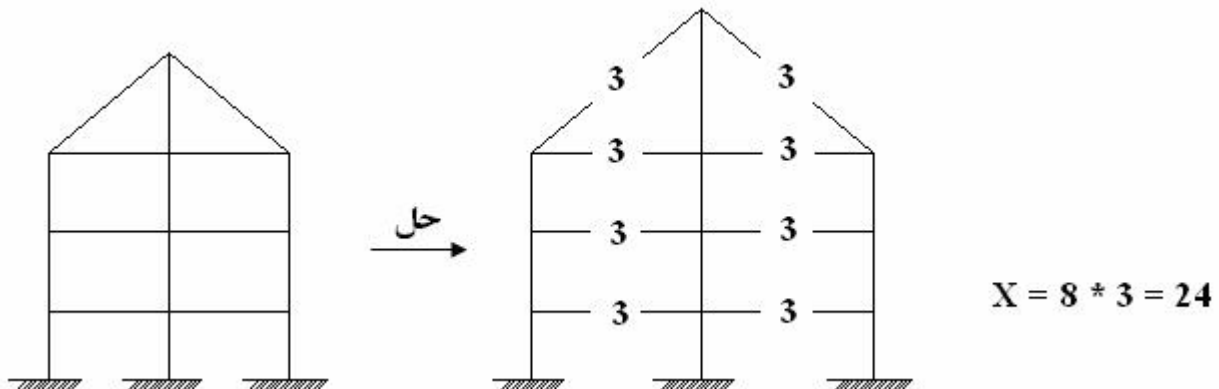
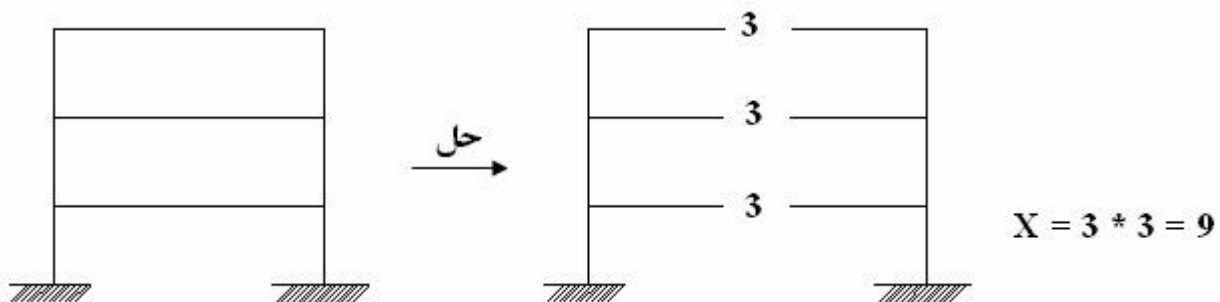
اساس کار روش درختی بویژه در سازه های صلب تبدیل سازه به درخت یا جنگل است . و در سازه های دارای گره های متنوع و مختلط ( غیر خالص ) از تبدیل به قلمه یا قطعه درخت استفاده می کنیم .

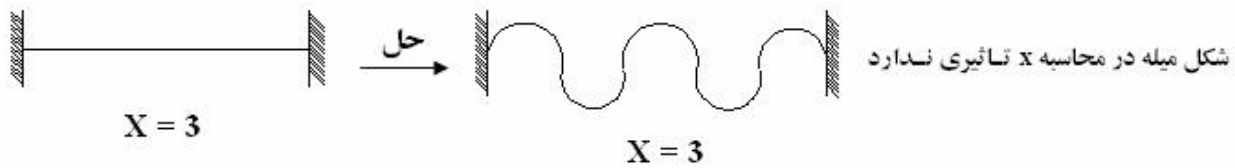
### الف) روش درختی در سازه های صلب دوبعدی :

سازه را چنان می بریم که تبدیل به درخت یا جنگل شود در این صورت از محل هر بریدگی سه مجهول ظاهر خواهد شد این مجهولات همان مجهولات زاید در حالت درختی یا جنگلی ایزواستاتیک هستند ، بنابراین تعداد آن ها همان درجه نامعینی سازه است .

$$X = 3 * \text{تعداد بریدگی های لازم برای رسیدن به درخت یا جنگل}$$

مثال:





**تبصره:** اگر در حین ایجاد درخت اتفاقاً قلمه یا قطعه درخت نیز تولید شود دیگر نمی توان محاسبه X را صرفاً با شمارش مجهولات ظاهر شده مشخص کرد زیرا قطعه درخت سازه ایزواستاتیک نیست ( بر خلاف درخت و جنگل ) در این حالت باید تکیه گاه ها را هم برید تا مثلاً از هر بریدگی تکیه گاهی گیردار سه مجهول، تکیه گاه غلطکی یک مجهول، تکیه گاه مفصلی ثابت دو مجهول ظاهر شود. آن گاه خواهیم داشت :

$$x = m - 3T \quad \text{تعداد معادلات} - \text{تعداد مجهولات} = X$$

m : تعداد مجهولات ظاهر شده تکیه گاهی و غیر تکیه گاهی

T : تعداد قلمه های تولید شده

### ب) تعمیم روش درختی برای سازه های صلب سه بعدی :

تنها تفاوت عبارت محاسبه X نسبت به حالت قبل این است که در سازه های سه بعدی از محل هر بریدگی 6 مجهول ظاهر می شود

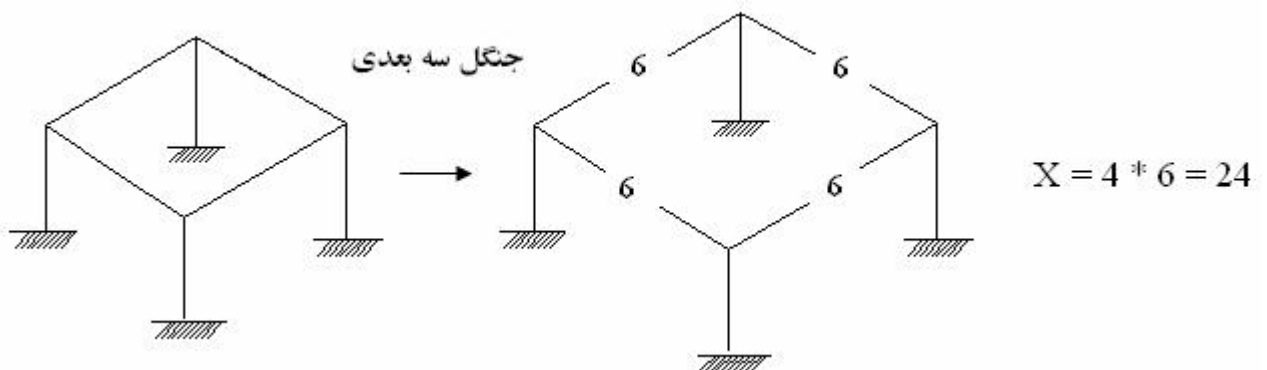
چه در نقاط عادی و چه در تکیه گاه ها ( چون سازه صلب است تکیه گاه ها گیردار می باشند ) بنابراین:

$$x = 6 * \text{تعداد بریدگی} \quad \text{ب 1) اگر بریدن سازه منجر به تشکیل درخت یا جنگل شود}$$

ب 2) اگر در حین بریدن قطعه درخت نیز تولید شود باید تکیه گاه ها را نیز ببریم ، 6 مجهول هر تکیه گاه را در محل آن بنویسیم آن گاه

$$x = m - 6T \quad \text{خواهیم داشت}$$

مثال :

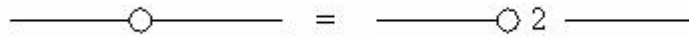


ج) حالت کلی روش درختی برای سازه های دو بعدی با گره های مختلط و متنوع

گام 1) حذف تکیه گاه ها و نوشتن مجهولات هر تکیه گاه در محل آن . بدیهی است در تکیه گاه غلطکی عدد 1 ، در تکیه گاه مفصلی ثابت عدد 2 و در تکیه گاه گیردار عدد 3 را خواهیم نوشت .

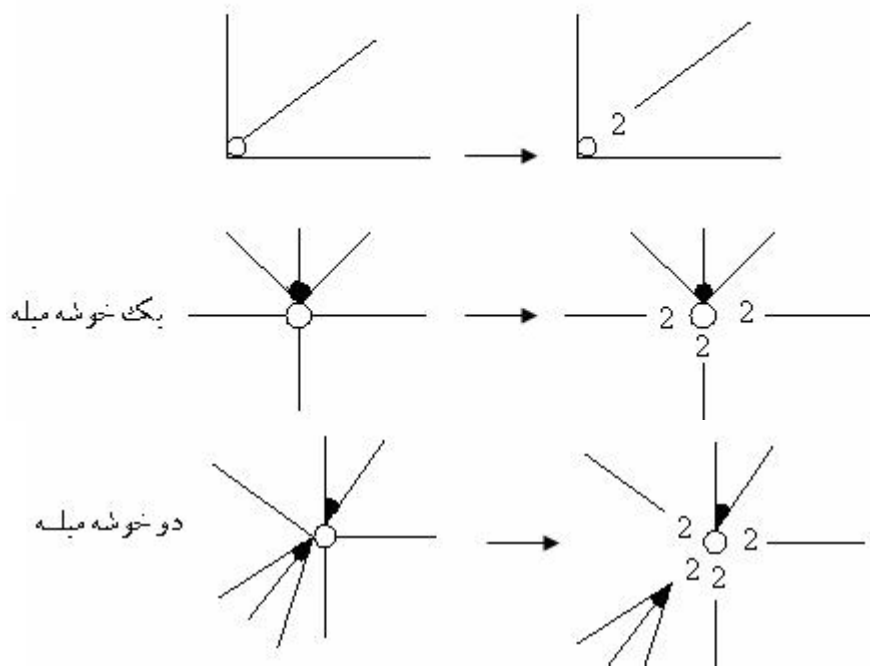
گام 2) بریدن مفصل های خالص و غیر خالص

2-1) بریدن مفصل های خالص : اگر  $n$  میله به گره مفصلی خالص رسیده باشد  $(n-1)$  میله را می بریم تا از محل هر بریدگی 2 مجهول ظاهر گردد .



2-2) بریدن مفصل های غیر خالص : در این گره ها اگر فقط یک خوشه میله وجود داشته باشد ، سر میله منتهی به مفصل بریده

می شود تا از محل هر بریدگی 2 مجهول ظاهر شود . و اگر تعداد خوشه میله ها بیش از یکی باشد ، به جز یکی بقیه را باید برید تا از هر بریدگی 2 مجهول ظاهر شود .



گام 3) حذف کادرهای بسته ( گشودن یا باز کردن کادرهای بسته ) از طریق بریدن آن ها و نوشتن عدد 3 در محل هر بریدگی .

گام 4) کنترل باقی نماندن قطعه درخت مفصل دار و مدار بسته و تکیه گاه حذف نشده

گام 5) شمارش قطعه درخت های بدست آمده (  $T$  )

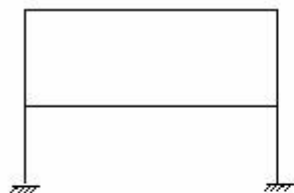
گام 6) شمارش مجهولات ظاهر شده (  $m$  )

گام 7) محاسبه  $X$  از رابطه :  $X = m - 3T$



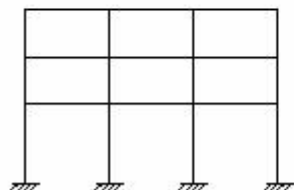


مثال :



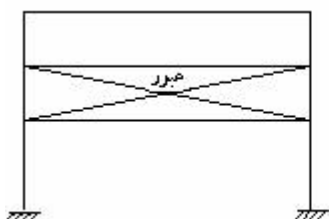
$$k = 1 \quad x = 3k + r - 3$$

$$r = 6 \quad x = 3 * 1 + 6 - 3 = 6$$



$$k = 6 \quad x = 3k + r - 3$$

$$r = 12 \quad x = 3 * 6 + 12 - 3 = 27$$



$$k = 4 \quad x = 3k + r - 3$$

$$r = 6 \quad x = 3 * 4 + 6 - 3 = 15$$

ب) حالت کلی روش کادر بسته :

$$X = (3k + r) - (c + 3)$$

c : تعداد معادلات شرط سازه

برای سازه های صلب چهار روش تعیین درجه نامعینی را می توان به حالت سه بعدی تعمیم داد

سازه دو بعدی صلب	سازه سه بعدی صلب
$x = 3(m - n) + r$	$x = 6(m - n) + r$
$x = 3s - 3n$	$x = 6s - 6n$
$x = m - 3T$	$x = m - 6T$
$x = 3k + r - 3$	$x = 6k + r - 6$

روش پنجم: روش ساختارگرا

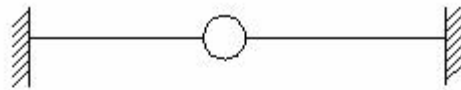
$$x = 3k_1 - c$$

در این نگرش، زمین به عنوان یک عضو ممتد به سازه ملحق می شود و تکیه گاه به عنوان رابط میله زمین با میله های سوپراستراکچر هویت (حضور انتهایی) خود را از دست می دهند و در حلقه به مثابه مکانیزم ساده (منفرد) نقش رهاساز خود را در پیوندها ایفا می کنند.

محاسبه C در این روش



مثال های متنوع (حل با پنج روش گفته شده)



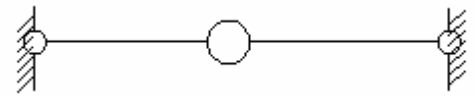
$$\text{mrmc} \begin{cases} m = 2 \\ n = 3 \\ r = 6 \\ c = 1 \end{cases} \quad x = (3 \cdot 2 + 6) - (3 \cdot 3 + 1) = 2$$

$$\text{sfnG} \begin{cases} s = 2 \\ f = 2 \\ n = 1 \\ G = 1 \end{cases} \quad x = (3 \cdot 2 - 2) - (3 \cdot 1 - 1) = 2$$

$$\text{درختی} \begin{cases} m = 8 \\ T = 2 \end{cases} \quad x = 8 - 3 \cdot 2 = 2$$

$$\text{krc} \begin{cases} k = 0 \\ r = 6 \\ c = 1 \end{cases} \quad x = 0 + 6 - 1 - 3 = 2$$

$$\text{ساختارگرا kc} \begin{cases} k = 1 \\ c = 1 \end{cases} \quad x = 3 \cdot 1 - 1 = 2$$



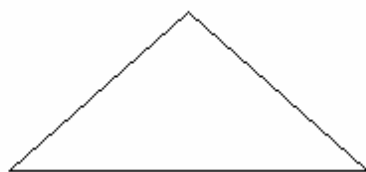
$$\text{mmc} \begin{cases} m = 2 \\ n = 3 \\ r = 4 \\ c = 1 \end{cases} \quad x = (3 \cdot 2 + 4) - (3 \cdot 3 + 1) = 0$$

$$\text{sfn} \begin{cases} s = 2 \\ f = 4 \\ n = 1 \\ G = 1 \end{cases} \quad x = (3 \cdot 2 - 4) - (3 \cdot 1 - 1) = 0$$

$$\text{درختی} \begin{cases} m = 6 \\ T = 2 \end{cases} \quad x = 6 - 3 \cdot 2 = 0$$

$$\text{krc} \begin{cases} k = 0 \\ r = 4 \\ c = 1 \end{cases} \quad x = 0 + 4 - 1 - 3 = 0$$

$$\text{ke ساختار گرا} \begin{cases} k = 1 \\ c = 3 \end{cases} \quad x = 3 \cdot 1 - 3 = 0$$



$$\text{mmc} \begin{cases} m = 3 \\ n = 3 \\ r = 0 \\ c = 0 \end{cases} \quad x = (3 \cdot 3 + 0) - (3 \cdot 3 + 0) + 3 = 3$$

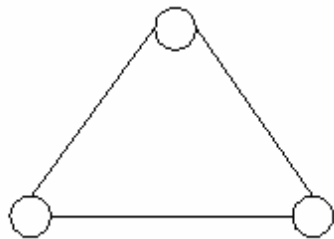
بی تکیه گاه

$$\text{sfn} \begin{cases} s = 3 \\ f = 0 \\ n = 3 \end{cases} \quad x = (3 \cdot 3 - 0) - (3 \cdot 3 - 0) + 3 = 3$$

بی تکیه گاه

$$\begin{aligned} \text{درختی} & \begin{cases} m = 3 \\ x = 3 - 3*1 + 3 = 3 \\ T = 1 \end{cases} \quad \text{بی تکیه گاه} \\ \text{krc} & \begin{cases} k = 1 \\ r = 0 \\ c = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3*1 + 0 - 3 + 3 = 3 \\ \text{بی تکیه گاه} \end{cases} \\ \text{ke ساختارگرا} & \begin{cases} k = 1 \\ c = 0 \end{cases} \quad x = 3*1 - 0 = 3 \end{aligned}$$

برای سازه های بی تکیه گاه فقط در روش ke، (+3) اضافه نمی کنیم



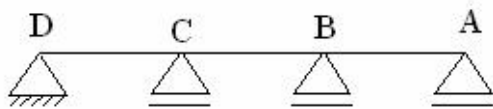
$$\begin{aligned} \text{mrnc} & \begin{cases} m = 3 \\ n = 3 \\ r = 0 \end{cases} \quad x = (3*3 + 0) - (3*3 + 3) + 3 = 0 \quad \text{بی تکیه گاه} \\ \text{sfn} & \begin{cases} s = 3 \\ f = 6 \\ n = 3 \\ G = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = (3*3 - 6) - (3*3 - 3) + 3 = 0 \\ \text{بی تکیه گاه} \end{cases} \\ \text{درختی} & \begin{cases} m = 6 \\ x = 6 - 3*3 + 3 = 0 \\ T = 3 \end{cases} \quad \text{بی تکیه گاه} \end{aligned}$$

$$krc \begin{cases} k = 1 \\ r = 0 \\ c = 3 \end{cases} \quad x = 3 \cdot 1 + 0 - 3 - 3 + 3 = 0$$

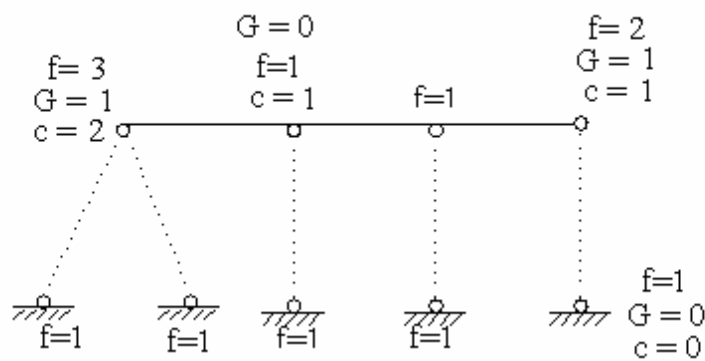
بی تکیه گاه

$$kc \text{ ساختارگرا} \begin{cases} k = 1 \\ c = 3 \end{cases} \quad x = 3 \cdot 1 - 3 = 0$$

برای سازه های بی تکیه گاه فقط در روش kc، (+3) اضافه نمی کنیم



نکته ای که در مورد تکیه گاه مفصلی انتهایی گفتیم در این قسمت مورد استفاده قرار می گیرد به تبدیل سازه به میله پاندولی دقت کنید.



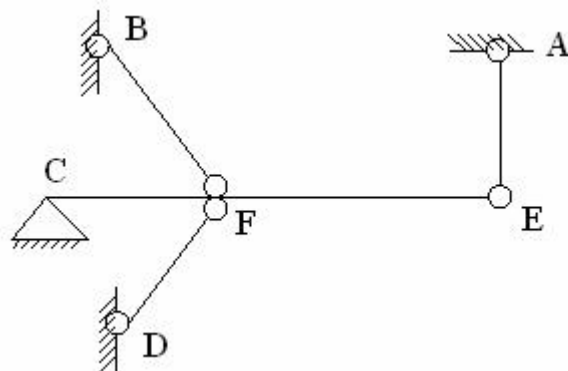
$$mmc \begin{cases} m = 3 \\ n = 4 \\ r = 5 \\ c = 0 \end{cases} \quad x = (3 \cdot 3 + 5) - (3 \cdot 4 + 0) = 2$$

$$sfmg \begin{cases} s = 8 \\ f = 12 \\ n = 4 \\ G = 2 \end{cases} \quad x = (3 \cdot 8 - 12) - (3 \cdot 4 - 2) = 2$$

$$\text{درختی} \begin{cases} m = 5 \\ T = 1 \end{cases} \quad x = 5 - 3 \cdot 1 = 2$$

$$\text{krc} \begin{cases} k = 0 \\ r = 5 \\ c = 0 \end{cases} \quad x = 0 + 5 - 0 - 3 = 2$$

$$\text{ke ساختار گرا} \begin{cases} k = 6 - 4 + 1 = 3 \\ c = 2 + 2 + 2 + 1 = 7 \\ \quad \quad \quad A \quad B \quad C \quad D \end{cases} \quad x = 3 * 3 - 7 = 2$$



$$\text{mmc} \begin{cases} m = 5 \\ n = 6 \\ r = 8 \\ c = 3 \end{cases} \quad x = (3 * 5 + 8) - (3 * 6 + 3) = 2$$

$$\text{sfn} \begin{cases} s = 7 \\ f = 11 \\ n = 3 \\ G = 1 \end{cases} \quad x = (3 * 7 - 11) - (3 * 3 - 1) = 2$$

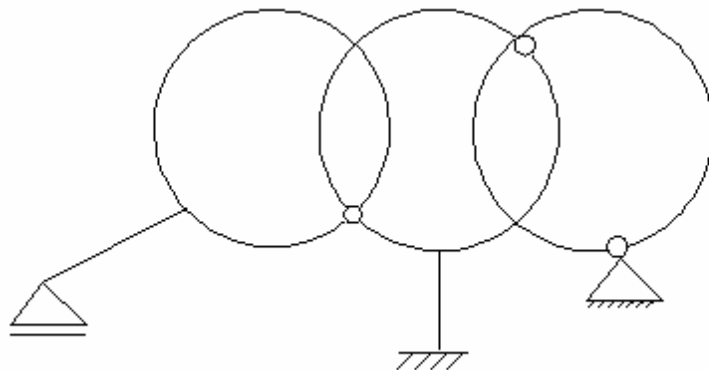
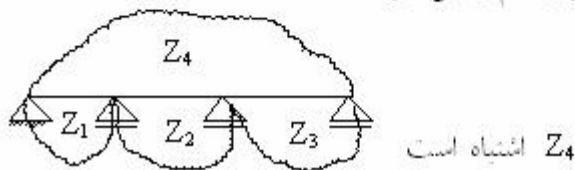
$$\text{درختی} \begin{cases} m = 8 + 2 + 4 = 14 \\ T = 4 \end{cases} \quad x = 14 - 3 * 4 = 2$$

می توانیم تکیه گاه مفصلی را به میله پاندولی تبدیل کرده ، بعد حل کنیم

$$krc \begin{cases} k = 0 \\ r = 8 & x = 0 + 8 - 3 - 3 = 2 \\ c = 3 \end{cases}$$

$$kcs \text{ ساختار گرا} \begin{cases} k = 8 - 6 + 1 = 3 \\ c = 1 + 1 + 1 + 2 + 1 + 1 = 7 \\ x = 3 * 3 - 7 = 2 \end{cases}$$

در محاسبه باید خیلی دقت شود، نمی توان تکیه گاه را هم از بالا و هم از پایین به هم وصل کرد



$$mrc \begin{cases} m = 13 \\ n = 9 & x = (3 * 13 + 6) - (3 * 9 + 5) = 13 \\ r = 6 \\ c = 5 \end{cases}$$

$$sfng \begin{cases} s = 16 \\ f = 14 & x = (3 * 16 - 14) - (3 * 8 - 3) = 13 \\ n = 8 \\ G = 3 \end{cases}$$

$$\text{درختی} \begin{cases} m = 2 + 3 + 1 + 2 + 2 + 6 = 16 \\ T = 1 & x = 16 - 3 * 1 = 13 \end{cases}$$

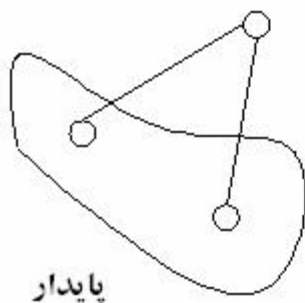
$$\left. \begin{array}{l} \text{krc} \\ \text{ke ساختار گرا} \end{array} \right\} \begin{cases} k = 5 \\ r = 6 \\ c = 5 \\ x = 3 * 5 + 6 - 5 - 3 = 13 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{krc} \\ \text{ke ساختار گرا} \end{array} \right\} \begin{cases} k = 7 \\ c = 8 \\ x = 3 * 7 - 8 = 13 \end{cases}$$

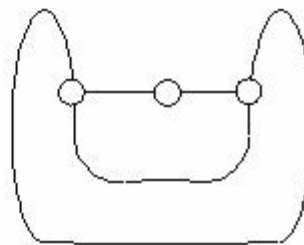
### قوانین ترکیب پایدار اجسام صلب در صفحه

#### الف) ترکیب یک گره و یک جسم صلب

سیستمی که از ترکیب یک جسم صلب و یک گره تشکیل یافته، وقتی پایدار است که گره حداقل توسط دو میله که محورهای آنها در یک امتداد نمی باشند، به جسم صلب متصل شده باشد. اگر گره توسط دو میله هم امتداد به جسم صلب متصل شده باشد سیستم حاصل ناپایدار آنی خواهد بود.



پایدار



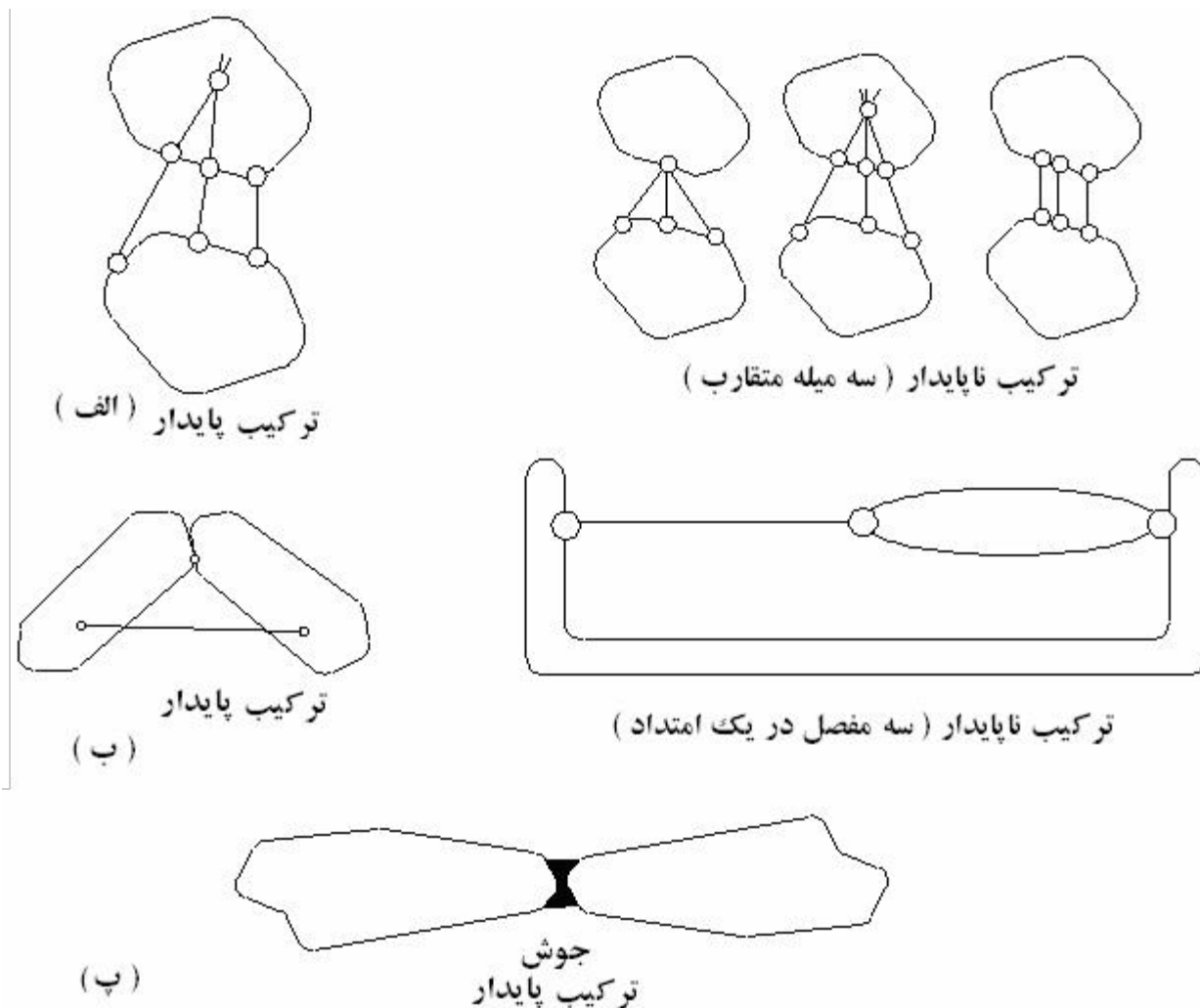
ناپایدار آنی

#### ب) ترکیب پایدار دو جسم صلب

ترکیب دو جسم صلب وقتی تشکیل سیستم صلبی را می دهند که به یکی از روش های زیر به یکدیگر متصل شده باشند:

- 1- توسط سه میله غیر موازی و غیر متقارب ( شکل الف )
- 2- توسط یک مفصل و یک میله رابط که محور میله از مفصل عبور نمی کند ( شکل ب )
- 3- توسط یک اتصال صلب ( شکل پ )

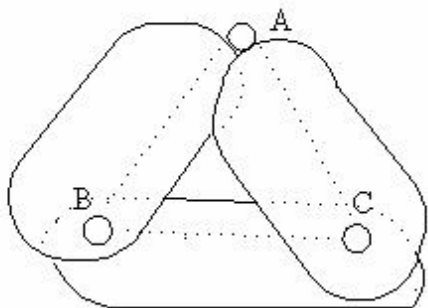




### (پ) ترکیب پایدار سه جسم صلب

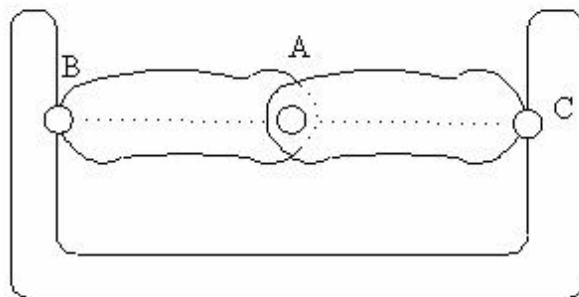
سه جسم صلب وقتی تشکیل یک سیستم صلب می دهند که به یکی از روش های زیر به یکدیگر متصل شده باشند :

- 1- توسط سه مفصل که در یک امتداد قرار ندارند ( شکل الف )
- 2- توسط شش میله که هر دو میله ، دو جسم صلب را به یکدیگر متصل نمایند و محل های تقاطع دو به دوی این میله ها اعم از این که مفصل مفصل حقیقی باشند یا موهومی (A,B,C در شکل ب ) در روی یک خط مستقیم قرار نداشته باشند و تشکیل مثلث بدهند .
- 3- توسط ترکیبی از مفصل ها و میله ها به نحوی که مفصل های واقعی و موهومی در روی یک خط مستقیم قرار نگرفته باشند ( شکل پ ) با توجه به این که هر پیوند مفصل معادل (( پیوند با دو میله متلاقی )) است بنابراین در حالت اخیر هم ، پیوند سه جسم در واقع با شش میله صورت گرفته است .

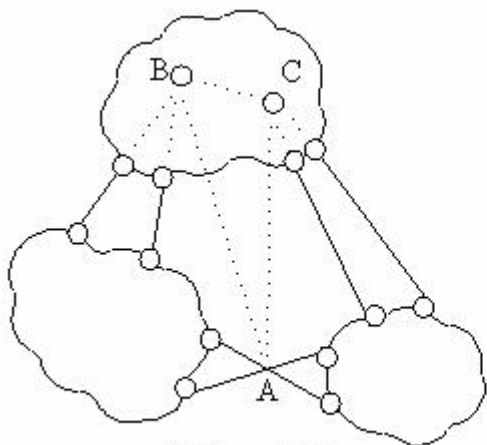


ترکیب پایدار

( الف )

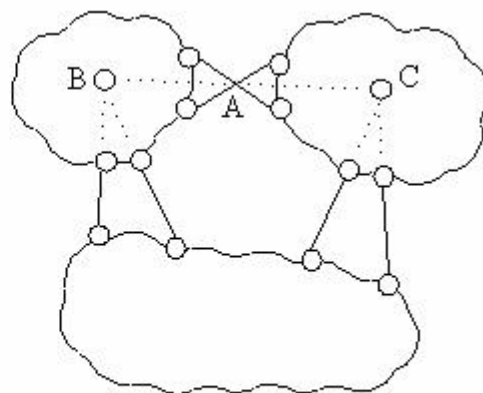


ترکیب ناپایدار

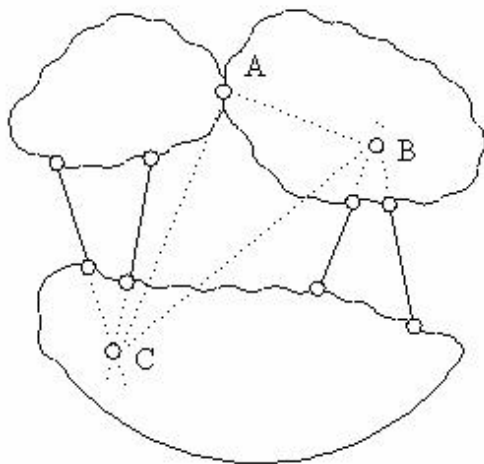


ترکیب پایدار

( ب )

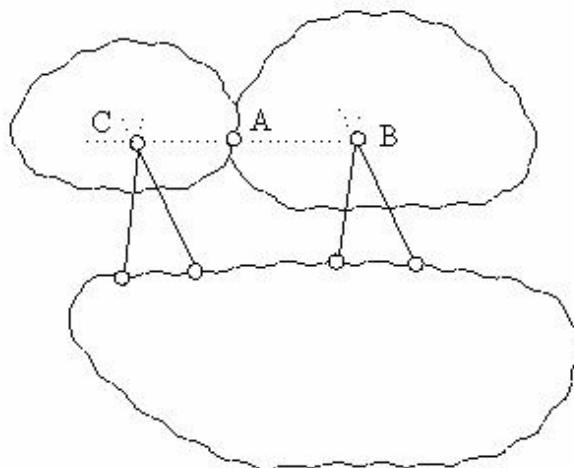


ترکیب ناپایدار



ترکیب پایدار

( پ )



ترکیب ناپایدار

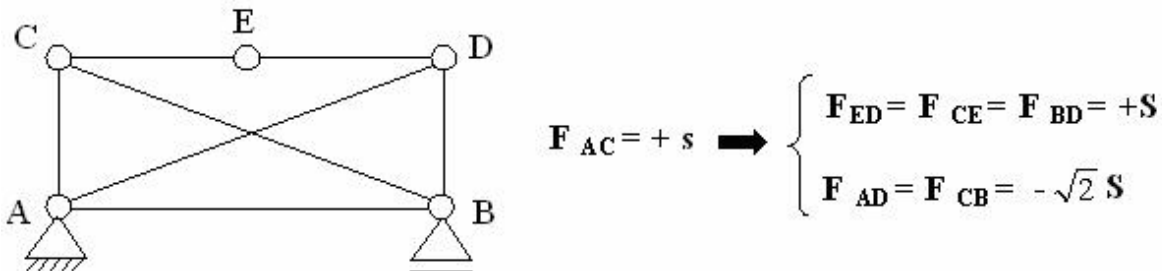
### آزمون بار صفر برای تشخیص پایداری و ناپایداری خرپاها

آزمون بار صفر یکی از روش های ناپایداری خرپای معین ( $x = 0$ ) است. اساس این روش بر این قاعده بدیهی فلسفی است که وجود علت بدون معلول محال است اگر بار خارجی علت باشد نیروی داخلی از جمله معلول ها می باشد اگر در یک خرپا که بار خارجی

ندارد و بنابراین عکس العمل های تکیه گاهی آن صفر است به یکی از میله ها نیرویی مانند  $S$  نسبت دهیم سپس با استفاده از معادلات تعادل نیروهای داخلی بقیه میله ها را بر حسب  $S$  بدست آوریم بدون آنکه هیچ کدام از معادلات تعادل نقض شود بدست آوردن چنین نتیجه ای به این معناست که این خرپای بی آزمون توانسته است در غیاب بار خارجی نه یک دسته جواب بلکه جواب های بیشمار داشته باشد که خود نشانه پایداری است

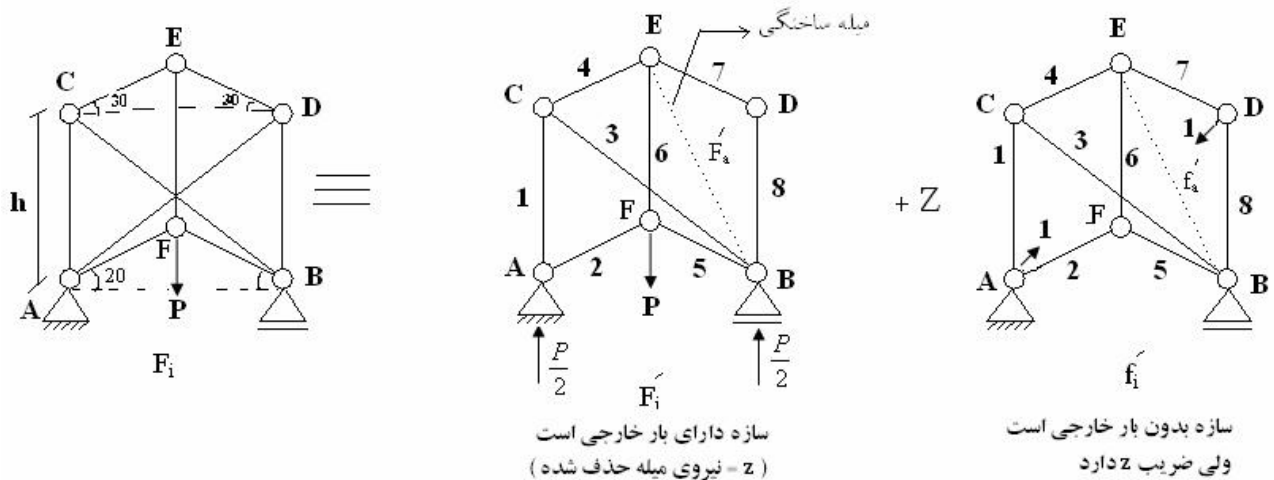
### مثال

اگرچه این خرپا به دلیل وجود زنجیر سینماتیکی آشکارا ناپایدار است ولی در اینجا می خواهیم آزمون بار صفر را به کار ببریم .



اگر سازه پایدار باشد باید  $S = 0$  باشد وجود این جواب ها در حکم ناپایداری سازه است .

### روش هنبرگ در آنالیز خراباهای پیچیده



1- یک عضو خرپا را طوری جابجا می کنیم که خرابای حاصل یک خرابای پایدار ساده یا مرکب شود . باید توجه کرد که شرایط تکیه گاهی و بارگذاری تغییر نمی کند .

2- خرابای حاصل را با بارگذاری واقعی اولیه حل می کنیم (نیروی داخلی اعضا در این مرحله با  $F_i'$  و نیروی میله ساختگی را با  $F_a'$  نشان می دهیم .

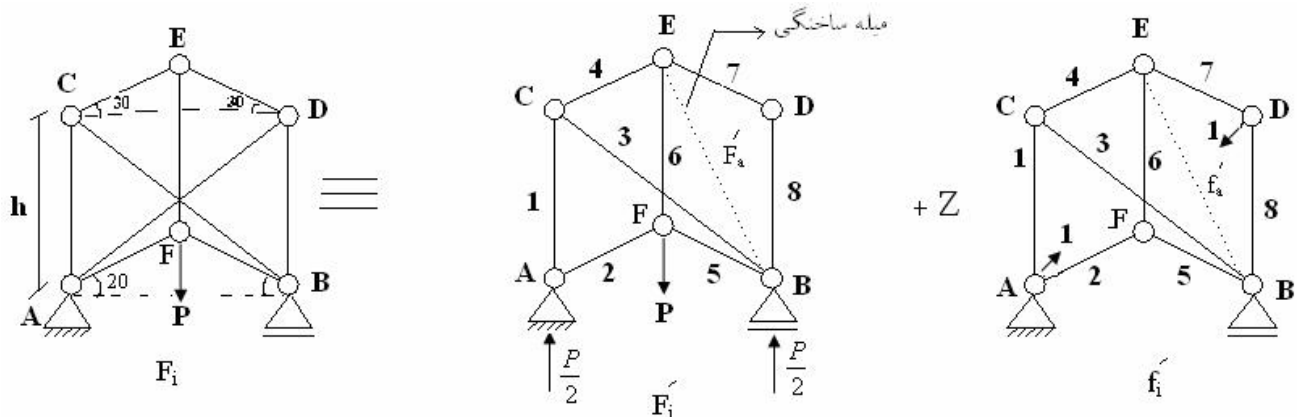
3- در خرپای مرحله 2 بارهای خارجی را بر می داریم و در محل عضو جابجا شده یک جفت نیروی واحد قرار می دهیم و این خرپا را آنالیز می کنیم (نیروی داخلی اعضا در این حالت با  $F_i'$  نشان داده می شود (عکس العمل های تکیه گاهی در این حالت مساوی صفر است).

$$F_i = F_i' + Zf_i' \quad (1)$$

$$\left( \begin{array}{l} \text{کاربرد رابطه 1 برای میله a (چون میله ساختگی a} \\ \text{در واقع وجود ندارد) پس نیرویش مساوی صفر است} \end{array} \right) F_a = 0 \Rightarrow F_a' + Zf_a' = 0 \Rightarrow Z = -\frac{F_a'}{f_a'} \quad (2)$$

با معلوم شدن مقدار  $Z$ ، نیروی داخلی هر یک از اعضا خرپا با رابطه جمع آثار مرحله ای  $F_i = F_i' + f_i'$  بدست می آید. توجه: دیده می شود که روش هنبرگ ضمن حل خرپای بغرنج پایداری و ناپایداریش را هم مشخص می کند.

مثال: نیروی داخلی اعضای خرپای بغرنج زیر را با فرض  $a = 1.5 \text{ m}$ ،  $h = 2.7 \text{ m}$  و  $p = 1000 \text{ kg}$  محاسبه کنید.



ابتدا عضو AD خرپا را برداشته و به جای آن عضو BE را قرار می دهیم تا خرپای ساده  $F_i'$  به دست آید این خرپا را می توانیم برای بارهای خارجی و همچنین نیروهای واحد در امتداد خط AD خرپای  $f_i'$  با روش مفاصل به راحتی حل کنیم. نتایج بدست آمده در ستون های 2 و 3 جدول زیر ثبت شده اند. با استفاده از رابطه (2) مقدار  $Z$  را محاسبه کرده و ستون 4 جدول زیر را پر می کنیم و سپس نیروهای داخلی اعضای دیگر را از معادله (1) محاسبه می کنیم و نتایج را در ستون 5 می نویسیم. در ستون 5 نیروی عضو جعلی a صفر است از این نکته می توان برای کنترل جواب ها استفاده کرد.

شماره میله (1)	$F'_i$ (2)	$f'_i$ (3)	$Zf'_i$ (4)	$F_i = F'_i + Zf'_i$ (5)
1	-500 kg	- 0.547	- 546	- 1046
2	0	- 0.749	- 714	- 714
3	+ 455	+ 0.522	+ 498	+ 953
4	- 391	- 0.488	- 427	- 818
5	0	- 0.749	- 714	- 714
6	+ 1000	- 0.191	- 182	+ 818
7	0	- 0.858	- 818	+ 818
8	0	- 1.098	- 1046	- 1046
a	-872	+ 0.915	+ 872	0

### اصل تغییر مکان های مجازی

اگر جسم صلبی در حال تعادل باشد و این تعادل را حین وقوع تغییر مکان کوچک مجازی حفظ کند کار مجازی خارجی انجام یافته بوسیله نیروها در همه حالت ها صفر خواهد بود .

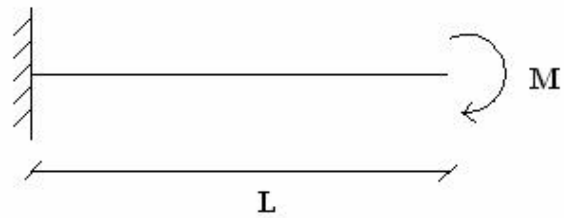
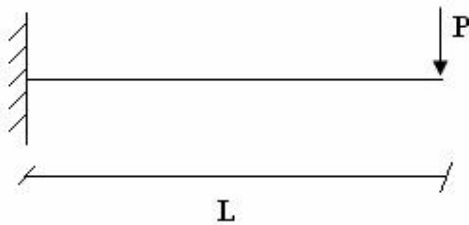
$$\sum W_{ext} = 0 \quad W_{ext} = \text{تغییر مکان مجازی در امتداد نیرو} \times \text{نیروی حقیقی}$$

توجه : برای سازه های غیر صلب یا تغییر شکل پذیر علاوه بر کار مجازی نیروهای خارجی ، کار مجازی نیروهای داخلی یا برآیندهای تنش نیز باید محاسبه شود .

$$P \cdot \bar{\delta} = \text{جابجایی در امتداد نیرو} \times \text{نیرو} = \text{کار نیرو}$$

$$M \cdot \bar{\theta} = \text{تغییر زاویه (رادیان)} \times \text{لنگر} = \text{کار لنگر}$$

**مثال:** واکنش های تکیه گاهی تیرهای زیر را با استفاده از اصل تغییر مکان های مجازی محاسبه کنید.



**بیان اصل نیروهای مجازی ( که برای محاسبه تغییر مکان ها به کار می رود ):**

اگر به سازه شکل پذیری که تحت اثر مقداری بار در حال تعادل است تغییر شکل مجازی کوچکی داده شود در این صورت کار مجازی انجام شده به وسیله نیروهای خارجی ( بارها ) برابر با کار مجازی انجام شده به وسیله نیروهای داخلی یا برآیندهای تنش می باشد :

$$\sum W_{ext}^{مجازی} = \sum W_{int}^{مجازی}$$

لفظ کار مجازی به این دلیل به کار می رود که یا نیرو و یا تغییر مکان مجازی می باشند .

نکته : در مکانیک ، انرژی ، ظرفیت انجام کار تعریف می شود و کار نیز حاصل ضرب نیرو در تصویر تغییر مکان در امتداد نیرو می باشد در اجسام جامد شکل پذیر حاصل ضرب تنش در سطح مربوطه تشکیل نیرو و تغییر شکل ها ، تشکیل تغییر مکان ها را می دهند . حاصل ضرب این دو کار داخلی انجام شده در جسم توسط نیروهای موثر خارجی می باشد و این کار داخلی در جسم به صورت انرژی کرنشی الاستیک ( انرژی کرنشی داخلی ) ذخیره می شود .

**گام های محاسبه  $\delta^i_m$  در خرابی ( محاسبه تغییر مکان نقطه گرهی m در امتداد دلخواه )**

گام 1) خرابی را تحت اثر عامل خارجی حل می کنیم ( نظیر حرارت یا بار خارجی P ) نیروهای این مرحله را با  $\bar{N}$  نشان می دهیم

گام 2) خرابی را در غیاب بار خارجی تحت اثر نیروی واحد در نقطه m ( نقطه مورد نظر ) و در امتداد  $\bar{i}$  ( که توسط صورت مسئله مشخص

می شود ) حل می کنیم. نیروهای داخلی در این مرحله با  $\bar{N}$  (  $\bar{N}_1$  ،  $\bar{N}_2$  و ... ) نشان می دهیم

گام 3) تغییر مکان های حقیقی مجهول سازه را به سازه گام 2 نسبت می دهیم ( اهدا یا تحمیل تغییر مکان ) از آن جا که این تغییر مکان ها با

نیروهای مجازی هیچ نسبتی ( خویشاوندی ) ندارند یعنی  $\bar{N}$  ،  $\delta$  را تولید نمی کند بنابراین کار داخلی انجام شده حاصل از مستطیل کار

است و ضریب  $\frac{1}{2}$  نخواهد داشت ( زیرا کار مجازی است و کار مجازی ضریب  $\frac{1}{2}$  ندارد ) یعنی به جای مثلث کار مستطیل کار داریم یعنی کار داخلی عبارت است از :

$$W_{int} = \sum_{j=1}^n \bar{N}_j (\Delta L_{red}) = \sum_{j=1}^n \bar{N}_j \cdot \frac{N_j \ell_j}{(EA)_j}$$

( $\Delta L_{red}$ ) : تغییر مکان های حقیقی گام 1 می باشد .

گام 4) محاسبه کار خارجی انجام شده : تنها کار خارجی انجام شده در حالتی که نشست نداریم برابر است با :

$$\sum \bar{W}_{ext} = \bar{1} * \delta_m^i$$

$$\text{کار خارجی در حالتی که نشست داریم} \quad \sum \bar{W}_{ext} = \bar{1} * \delta_m^i + \bar{W}_R^0$$

$\bar{W}_R$  : کار عکس العمل در حین نشست ( به فرض وجود )

گام 5) تساوی کار داخلی و کار خارجی را می نویسیم :

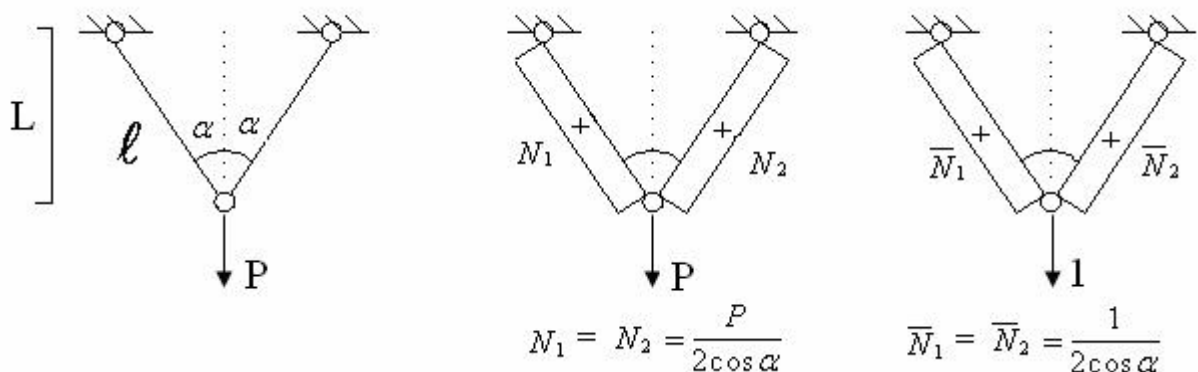
$$\bar{1} * \delta_m^i = \sum_{j=1}^n \bar{N}_j \cdot \frac{N_j \ell_j}{(EA)_j}$$

گام 6) اگر  $\delta_m^i$  مثبت باشد به این معناست که تغییر مکان واقعی نقطه m در امتداد  $\bar{i}$  در جهت بار واحد است و اگر  $\delta_m^i$  منفی باشد تغییر مکان نقطه m در امتداد  $\bar{i}$  در خلاف جهت بار واحد است .

**تبصره:** علت وارد کردن بار واحد و نه لنگر واحد این است که هر تغییر مکانی با نیروی واحد مجازی متناظر با آن می تواند محاسبه شود یعنی

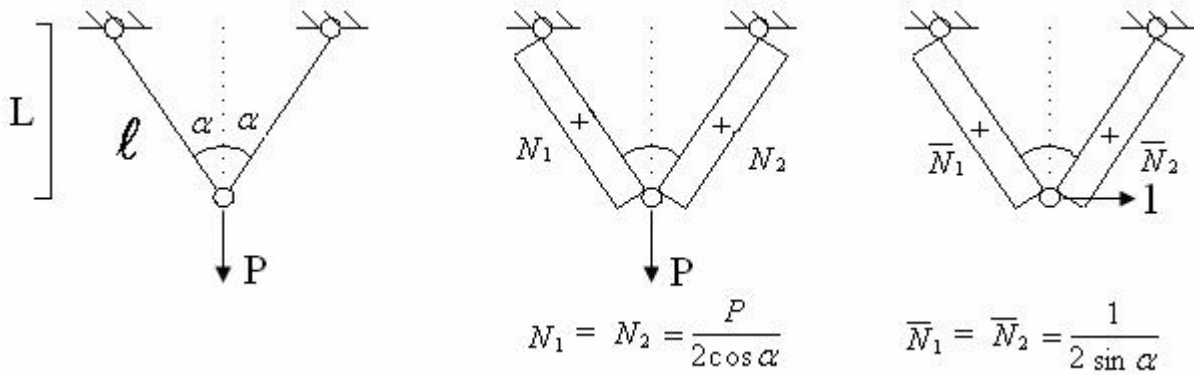
کسی که قصد محاسبه  $\delta$  را دارد بار متمرکز واحد در امتداد  $\bar{i}$  وارد می کند و برای محاسبه دوران نقطه m باید لنگر واحد را در نقطه m وارد کنیم . دوران گره در خرپا و اعمال لنگر در خرپا منفی است .

**مثال:** تغییر مکان قائم نقطه m را در خرپای زیر محاسبه کنید . ( تغییر مکان قائم m در امتداد  $\bar{i}$  )



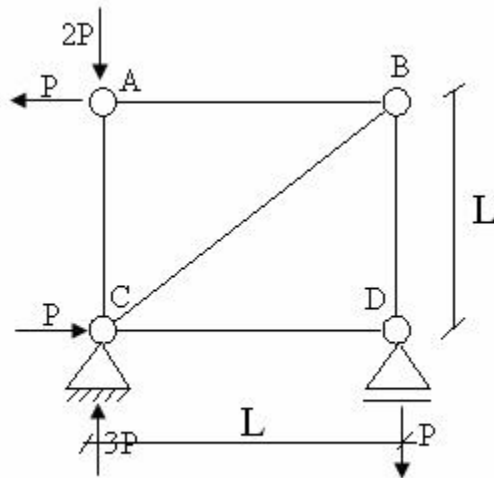
$$\bar{i} * \delta_m^i = \sum_{j=1}^2 \bar{N}_j \frac{N_j \ell_j}{(EA)_j} = \frac{2}{EA} \left( \frac{1}{2 \cos \alpha} * \frac{P}{2 \cos \alpha} * \frac{L}{\cos \alpha} \right) = \frac{PL}{2EA \cos^3 \alpha}$$

در مثال بالا ثابت کنید که تغییر مکان نقطه m در امتداد عمود بر  $\bar{i}$  صفر است.



$$\bar{i} * \delta_m^j = \sum_{j=1}^2 \bar{N}_j \frac{N_j \ell_j}{(EA)_j} = \frac{1}{EA} \left( \frac{1}{2 \sin \alpha} * \frac{P}{2 \cos \alpha} * \frac{L}{\cos \alpha} - \frac{1}{2 \sin \alpha} * \frac{P}{2 \cos \alpha} * \frac{L}{\cos \alpha} \right) = 0$$

مثال: تغییر مکان افقی نقطه B را در خرابی زیر محاسبه کنید.



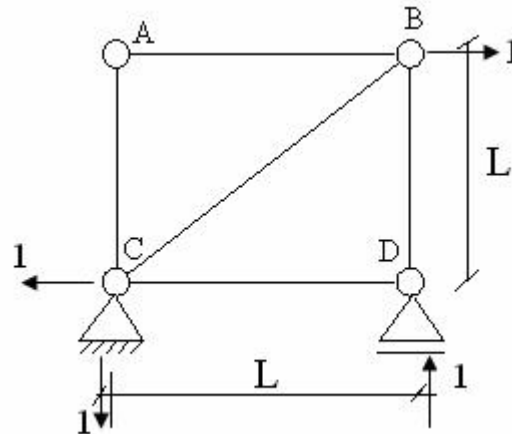
حل: ابتدا تحت اثر بار خارجی نیروی داخلی اعضا را بدست می آوریم.

$$\text{محاسبه عکس العمل ها} \left\{ \begin{array}{l} \sum F_x = 0 \Rightarrow R_D = P \\ \sum F_y = 0 \Rightarrow R_C = 3P \end{array} \right. \quad \text{گره A} \left\{ \begin{array}{l} \sum F_x = 0 \Rightarrow F_{AB} = P \\ \sum F_y = 0 \Rightarrow F_{AC} = -2P \end{array} \right.$$



$$\begin{aligned}
 \text{B. گره} & \begin{cases} \sum F_x = 0 \Rightarrow P + \frac{1}{\sqrt{2}} F_{BC} = 0 \Rightarrow F_{BC} = -P\sqrt{2} \\ \sum F_y = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{2}P) = F_{BD} \Rightarrow F_{BD} = P \end{cases} \\
 \text{C. گره} & \begin{cases} \sum F_x = 0 \Rightarrow F_{CD} + P = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{2}P) \Rightarrow F_{CD} = 0 \\ \sum F_y = 0 \Rightarrow ok \end{cases}
 \end{aligned}$$

حال بار واحد را در نقطه B در امتداد افق وارد کرده و نیروهای داخلی را محاسبه می کنیم .



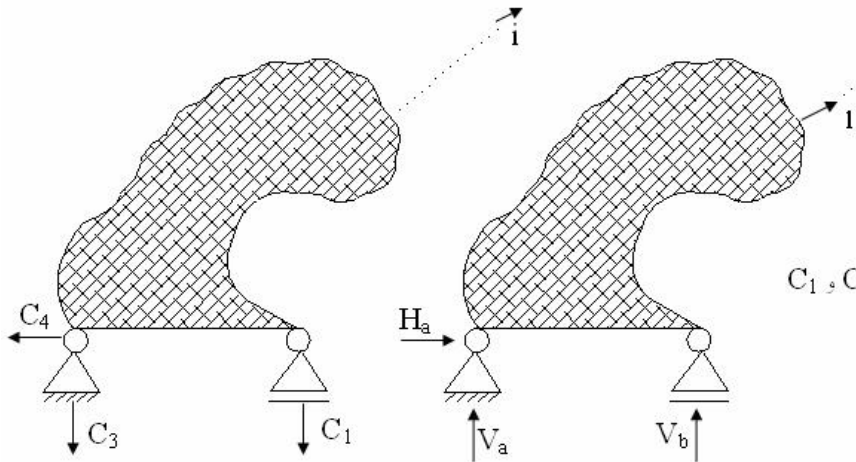
$$\begin{aligned}
 \text{محاسبه عکس العمل ها} & \begin{cases} \sum F_x = 0 \Rightarrow R_{CX} = 1 \\ \sum M_D = 0 \Rightarrow R_{CY} = 1 \\ \sum F_y = 0 \Rightarrow R_{DY} = 1 \end{cases} \\
 \text{A. گره} & \begin{cases} \sum F_x = 0 \Rightarrow F_{AB} = 0 \\ \sum F_y = 0 \Rightarrow F_{AC} = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{D. گره} & \begin{cases} \sum F_x = 0 \Rightarrow F_{DC} = 0 \\ \sum F_y = 0 \Rightarrow F_{BD} = -1 \end{cases} \\
 \text{C. گره} & \begin{cases} \sum F_x = 0 \Rightarrow F_{BC} * \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 \Rightarrow F_{BC} = \sqrt{2} \\ \sum F_y = 0 \Rightarrow ok \end{cases}
 \end{aligned}$$

$\bar{N}NL$	$N$	$\bar{N}$	طول	عصر
0	P	0	L	AB
0	-2P	0	L	AC
-PL	P	-1	L	BD
0	0	0	L	CD
-2.828 PL	$-\sqrt{2}P$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}L$	CB

$$\sum = -3.828PL$$

گام های محاسبه  $\delta_m^i$  در اثر نشست تکیه گاهی



مقدار نشست های معلوم تکیه گاهی هستند  $C_1$  و  $C_3$  و  $C_4$

گام 1) در اینجا گام اول سابق را نداریم چون بار خارجی نداریم.

گام 2) محاسبه عکس العمل های مجازی ناشی از بار واحدی که در نقطه مورد نظر اعمال کرده ایم.

گام 3) مجموع کارهای خارجی را مساوی صفر قرار می دهیم زیرا در این حالت کار خارجی نداریم. کار عکس العمل هایی که با نشست مربوطه هم جهت باشند، مثبت منظور می شود و کار عکس العمل هایی که با نشست مربوطه هم جهت نباشند منفی در نظر گرفته می شود.

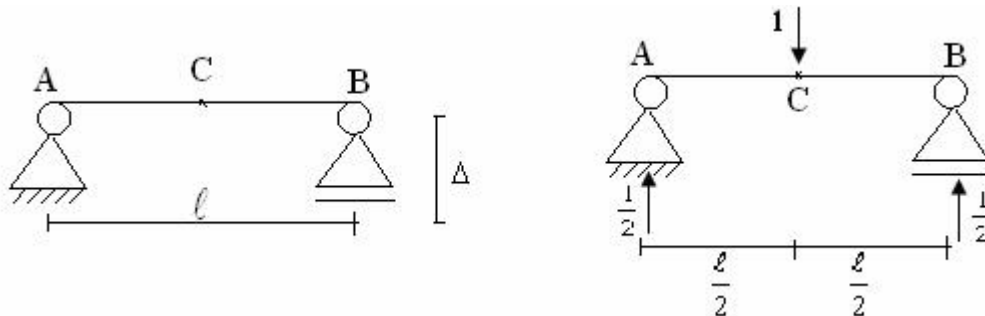
$$W_{ext} = 0 \Rightarrow \bar{1} * \delta_i^m - V_B * C_1 - \bar{V}_a * C_3 - H_a * C_4 = 0$$

$$1 * \delta_m^i = - \sum_{j=1}^n \bar{C}_j C_j$$

$C_j$ : نشست متناظر با نیروی تکیه گاهی

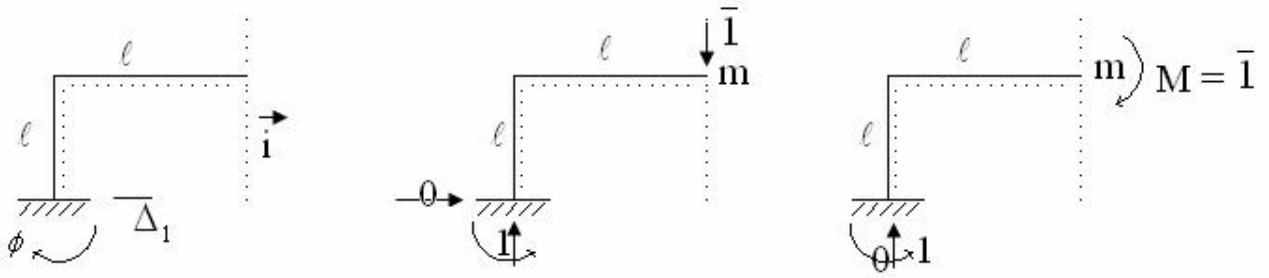
$\bar{C}_j$ : عکس العمل مجازی ناشی از بار واحد

**مثال:** در تیر شکل زیر نقطه B دارای نشست قائم  $\Delta$  (معلوم) می باشد پیدا کنید: جابجایی قائم نقطه C؟



$$1 * \delta_c^v = \sum_{j=1}^2 \bar{C}_j C_j = - \left[ \left(-\frac{1}{2}\right)(\Delta) + \left(\frac{1}{2}\right)(0) \right] = \frac{\Delta}{2}$$

مثال: در قاب شکل زیر تکیه گاه A دارای دوران  $\phi$  و تغییر مکان افقی  $\Delta_1$  می باشد مطلوبست محاسبه  $\delta_m^i$  و  $\theta_m$ .



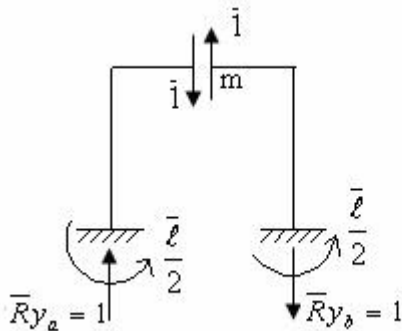
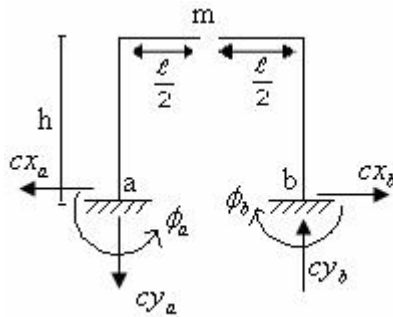
$$1 * \delta_m^i = -[0 + \Delta_1 + (1)(0) - (\ell)(\phi)]$$

$$\Rightarrow \delta_m^i = \phi \ell > 0$$

$$1 * \theta_m = -[(-1)(\phi)] = \phi \theta_m$$

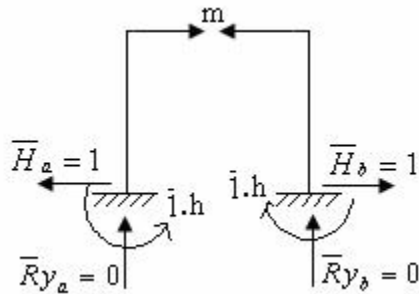
$$\Rightarrow \theta_m = +\phi$$

مثال: تغییر مکان نقطه m در اثر نشست های تکیه گاهی  $C_{xa}$  و  $C_{xb}$  و  $C_{ya}$  و  $C_{yb}$  و  $\phi_a$  و  $\phi_b$  محاسبه کنید (تغییر مکان نسبی افقی و قائم نقطه m)



$$\bar{1} * \delta_m^i = -\left\{-1 * C_{y_a} + \frac{\ell}{2} * \phi_a - 1 * C_{y_b} - \frac{\ell}{2} * \phi_b\right\}$$

$$\Rightarrow \delta_m^i = C_{y_a} - \frac{\ell}{2} \phi_a + C_{y_b} + \frac{\ell}{2} \phi_b$$



$$\bar{i} * \delta_m^H = -\{0 * C_{y_a} + \bar{i} * C_{x_a} + \bar{i} * h * \phi_a + 0 * C_{y_b} + \bar{i} * C_{x_b} + \bar{i} * h * \phi_b\}$$

$$\Rightarrow \delta_m^H = -C_{x_a} - h \phi_a - C_{x_b} - h \phi_b$$

**نکته:** ما در اینجا سازه را برای عواقب نشست آماده می کنیم نه اینکه از نشست جلوگیری کنیم

- هرگونه تغییر وضعیت در تکیه گاه به عنوان نشست در نظر گرفته می شود
  - جابجایی در حین اثر توام بارگذاری و نشست به کمک جمع آثار محاسبه می شود.
- $\delta$  (بارگذاری) +  $\delta$  (نشست) =  $\delta$  (بارگذاری + نشست)

محاسبه  $\delta_m^i$  سازه معین (خرپایی، خمشی، مختلط) به کمک اصل کار مجازی در اثر وجود  $t_s$ :

$t_s$ : تغییر یکنواخت دمای یک یا چند عضو یا همه اعضا نسبت به زمان نصب.

$t_s > 0$ : عضو مورد نظر گرم شده

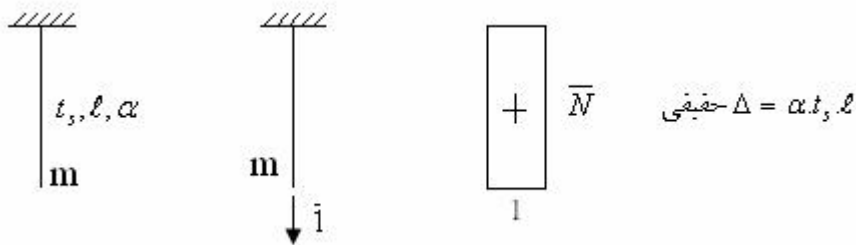
$t_0$ : دما در زمان نصب

$$t_s = t_1 - t_0$$

$t_1$ : دما در زمان مورد مطالعه

$t_s < 0$ : عضو مورد نظر سرد شده

**مثال:** تغییر مکان قائم نقطه m را در اثر وجود  $t_s$  به دست آورید.



گام 1) اثر بار خارجی (حرارت) و محاسبه  $\Delta$  حقیقی

گام 2) حل سازه تحت اثر بار واحد در امتداد قائم در نقطه m

گام 3) نوشتن رابطه تساوی کار خارجی و کار داخلی

$$W_{ext} = W_{int}$$

$$\Rightarrow 1 * \delta_m^v = \bar{N} \Delta_{real} \Rightarrow \bar{N} \alpha l t_s = \alpha l t_s$$

بنابراین تغییر مکان نقطه  $m$  ناشی از حرارت  $t_s$  به صورت زیر محاسبه می شود .

$$1 * \delta_m^i = \sum_{j=1}^n \overline{N}_j (\Delta_{real})_j = \sum_{j=1}^n \overline{N}_j (\alpha t_s)_j = \int \overline{N}(x) \alpha t_s dx$$

**نکته:** سازه معین تحت اثر افزایش دما تغییر مکان دارد اما هیچ نیروی داخلی ندارد ( به علت سازگاری اعضا و عدم ممانعت از تغییر شکل محوری اعضا نسبت به همدیگر )

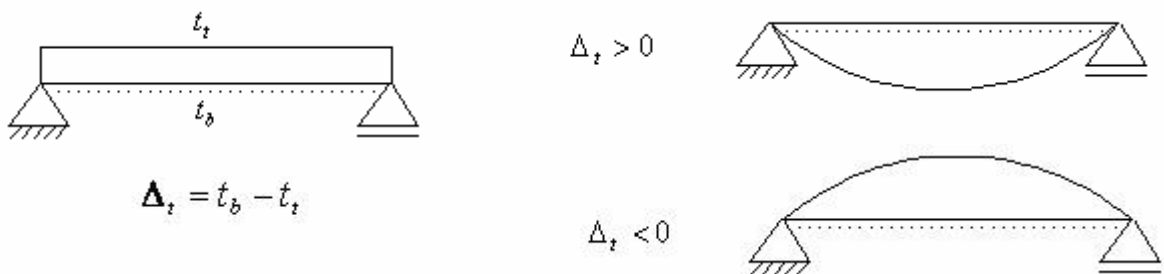
### محاسبه $\delta_m^i$ در اثر تغییر دمای غیر یکنواخت ( $\Delta t$ ): (در سازه های خمشی)

$\Delta t$ : تغییر غیر یکنواخت دما با گرادیان خطی در ارتفاع عضو در سازه های خمشی ( $\Delta t$  در خرابای ایده آل مطرح نیست)

$\Delta t$  و  $t_s$  در سازه های معین فقط ایجاد تغییر شکل می کنند ولی در سازه های نامعین تنش نیز تولید می کنند و معمولاً تغییر شکل هم به وجود می آورند ولی استثناً هم وجود دارد

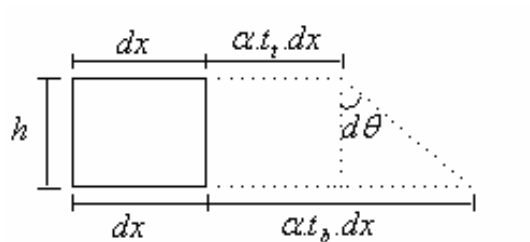
سازه معین تحت اثر تغییر غیر یکنواخت درجه حرارت، نیروی داخلی نخواهد داشت این اختلاف درجه حرارت بین تار بالا و تار پایین منجر به انحنای محور تیر می گردد و این به معنای به وجود آمدن تغییر شکل جانبی است.

ضمناً شرط وجود گرادیان خطی دما بین تار بالا و تار پایین ضروری است تا مقاطع تیر که مسطح می باشند بعد از تغییر شکل نیز مسطح باقی بمانند. (فرض اساسی در مبحث خمش تیر در مقاومت مصالح)



اثر  $\Delta t$  عملاً در خرابا بررسی نمی شود چون در خرابای ایده آل لنگر نداریم و در محاسبه کار مجازی داخلی دچار مشکل می شویم:

\*\* برای محاسبه  $\delta_m^i$  در اثر  $\Delta t$  یک المان به طول  $dx$  از تیر را در نظر می گیریم



$$\tan d\theta \cong d\theta = \frac{\alpha t_b \cdot dx - \alpha t_i \cdot dx}{h} = \frac{\alpha(t_b - t_i)dx}{h} = \frac{\alpha \Delta t dx}{h}$$

انحناء = K

$$\Rightarrow d\theta = \frac{\alpha \Delta t dx}{h} \Rightarrow \frac{d\theta}{dx} = \frac{\alpha \Delta t}{h} = \frac{M}{EI} = K$$

### گام های محاسبه $\delta_m^i$ در حالت وجود $\Delta t$ :

گام 1) حل سازه تحت اثر بار خارجی (حرارت غیر یکنواخت) و رسم دیاگرام  $\frac{\alpha \Delta t}{h}$  و یا محاسبه مقدار آن. چون  $\frac{\alpha \Delta t}{h}$  عدد ثابتی است پس دیاگرام آن مستطیل و دارای علامت است اگر  $\Delta t > 0$  در این صورت مستطیل مثبت و اگر  $\Delta t < 0$  مستطیل منفی خواهیم داشت.

گام 2) اعمال بار واحد متناظر با تغییر مکان مطلوب و نوشتن معادلات  $\bar{M}$  و رسم دیاگرام آن ها

گام 3) نوشتن رابطه کار مجازی

$$\bar{W}_{ext} = \bar{W}_{int} \Rightarrow \bar{1} * \delta_m^i = \sum \int_0^\ell \bar{M} \frac{\alpha \Delta t}{h} dx$$

**نکته:** در صورتی که بار واحد در سازه  $\bar{N}$  تولید نماید با توجه به این که تار خنثی نسبت به زمان نصب افزایش دما داشته است می توان کار داخلی ناشی از آن را هم در عبارت کار داخلی مجازی منظور کرد:

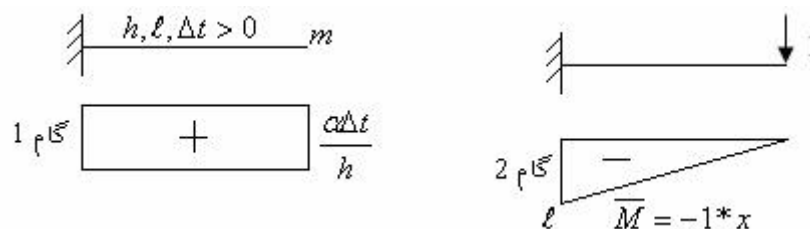
$$\bar{1} * \delta_m^i = \sum_{j=1}^n \int_0^\ell \bar{M} \frac{\alpha \Delta t}{h} dx + \sum \int_0^\ell \bar{N} \alpha t_s dx$$

$t_s$ : عبارت از تغییر دمای تراز تار خنثی است

ولی اگر در مسئله ای فقط  $\Delta t$  داده شود یا موقعیت تار خنثی قابل تشخیص نباشد نمی دانیم در تار وسط چه می گذرد پس  $\bar{N}$  را منظور نمی کنیم و اگر  $t_s$  داده شده باشد و یا بتوان آنرا بدست آورد، نمی توان از اثر آن صرف نظر کرد.

**مثال:** تغییر مکان قائم نقطه m را در اثر حرارت غیر یکنواخت  $\Delta t$  تعیین کنید (بروش کار مجازی)

حل: در این مسئله  $\bar{N}$  تولید نمی شود و بنابراین عبارت کار مجازی فقط حاوی اثر M است و جمله  $\int_0^\ell \bar{N} \alpha t_s dx$  را ندارد



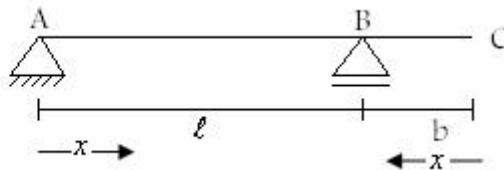
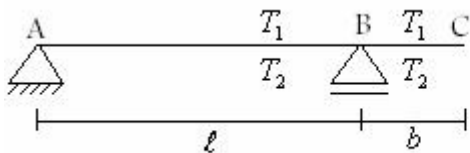
$$1 * \delta_m^v = \int_0^\ell \bar{M} \frac{\alpha \Delta t}{h} dx = \int_0^\ell (-1 * x) \frac{\alpha \Delta t}{h} dx = \frac{\ell^2}{2} * \frac{\alpha \Delta t}{h} = -\frac{\alpha \Delta t \ell^2}{2h}$$

$$\Rightarrow \delta_m^v = -\frac{\alpha \Delta t \ell^2}{2h}$$

علامت منفی نشان می دهد که جهت  $m$  رو به بالا و مخالف بار واحد است

**مثال:** خیز انتهای آزاد سمت پیش آمده تیر ( $\delta_c^v$ ) را محاسبه کنید (بارگذاری حرارتی در روی تیر نشان داده شده است)

حل: در این مسئله هم تحت اثر بار واحد نیروی محوری  $\bar{N}$  تولید نمی شود، علاوه بر این موقعیت تار خشی هم معلوم نیست بنابراین در عبارت کار مجازی جمله  $\sum \int_0^\ell \bar{N} \alpha t_s dx$  وجود ندارد.



عکس العمل های تیر ناشی از بار واحد در نقطه C

$$\begin{cases} \sum M_B = 0 \Rightarrow 1 * b = R_A * l \Rightarrow R_A = \frac{b}{l} \\ \sum F_y = 0 \Rightarrow R_B = 1 + \frac{b}{l} \end{cases}$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 \quad \begin{cases} 0 \leq x \leq l & \bar{M} = -\frac{b}{l}x \\ 0 \leq x \leq b & \bar{M} = -x \end{cases}$$

$$\bar{1} * \delta_c^v = \int \bar{M} \frac{\alpha \Delta t}{h} dx = \int_0^l \bar{M} \frac{\alpha \Delta t}{h} dx + \int_0^b \bar{M} \frac{\alpha \Delta t}{h} dx = \int_0^l \left(-\frac{b}{l}x\right) \left(\frac{\alpha \Delta t}{h}\right) dx + \int_0^b (-x) \left(\frac{\alpha \Delta t}{h}\right) dx$$

$$\Rightarrow \delta_c^v = \frac{-ab\Delta t(\ell + b)}{2h}$$

اگر  $\Delta t > 0$  نقطه C رو به بالا می رود و اگر  $\Delta t < 0$  نقطه C رو به پایین می رود

**محاسبه تغییر مکان های  $\theta_m$  و  $\theta_{mm}$  و  $\delta_m^i$  و  $\delta_{mm}$  در سازه های خمشی یا مختلط با روش بار واحد:**

مقدمه:

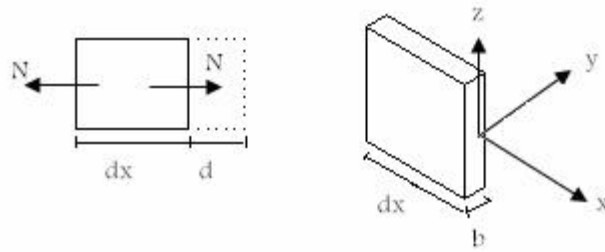
محاسبه کار داخلی در سازه های خمشی ناشی از  $T, N, V, M$

$$W_{int} = W_N + W_V + W_M + W_T$$

اغلب مسئله های دو بعدی پیچش ندارند زیرا پیچش مسئله را قدری سه بعدی می کند.

**توجه:** کار داخلی همان کار تنش هاست وقتی که کرنش ها رخ می دهند.

الف) کار داخلی نیروی محوری



همان کار مجازی است زیرا یکی از دو عامل  $\delta, \varepsilon$  مجازی است  $W_{int} = \int \delta \varepsilon dx dy dz$  در عدم تناسب  $\delta, \varepsilon$

همان کار حقیقی یا انرژی کرنشی یا انرژی تغییر شکل نسبی است  $W_{int} = \int \frac{1}{2} \delta \varepsilon dx dy dz$  در حالت متناسب بودن  $\delta, \varepsilon$

$$\varepsilon = \frac{N}{EA}, \delta = \frac{N}{A}$$

از طرفی می دانیم

$$\bar{W}_{int} = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_0^\ell \frac{\bar{N}}{A} * \frac{N}{EA} dx dy dz = \int_0^\ell \bar{N} \frac{N}{EA} dx$$

در حالت عدم تناسب  $\delta, \varepsilon$

$$W_{int} = \int_0^\ell \frac{1}{2} * \frac{N}{A} * \frac{N}{EA} * A dx = \int_0^\ell \frac{N^2 dx}{2EA}$$

در حالت متناسب بودن  $\delta, \varepsilon$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{W}_{int} = \int_0^\ell \bar{N} \frac{N}{EA} dx \\ W_{int} = u = \int_0^\ell \frac{N^2}{2EA} dx \end{cases}$$

نتیجه

کارهای مجازی ممکن است مثبت یا منفی باشند اما انرژی کرنشی به علت وجود توان دوم N هیچگاه منفی نمی شود.

**روش دوم: برای محاسبه انرژی کرنشی المان میله ای که تحت اثر بار محوری است:**

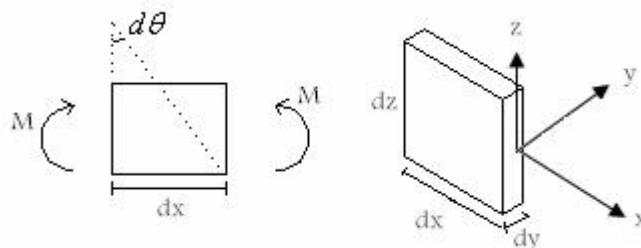
$$\Delta = dx \text{ تغییر مکان}$$

$$W_{int} = \frac{1}{2} \Delta N = \frac{1}{2} \frac{N dx}{EA} N = \frac{N^2 dx}{2EA}$$

برای المان، برای یافتن انرژی کرنشی میله باید در طول میله انتگرال بگیریم

$$\Rightarrow W_{int} = \int_0^\ell \frac{N^2}{2EA} dx$$

**(ب) محاسبه کار داخلی مجازی و انرژی کرنشی برای یک المان در صورت وجود M:**



$$W_{int} = \int \delta \varepsilon dx dy dz$$

در عدم تناسب  $\delta, \varepsilon$

$$W_{int} = \int \frac{1}{2} \delta \varepsilon dx dy dz$$

در حالت متناسب بودن  $\delta, \varepsilon$

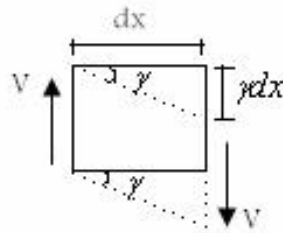


$$\varepsilon = \frac{MZ}{EI}, \delta = \frac{MZ}{I}, I_y = \int Z^2 dA$$

$$\begin{aligned} \text{نتیجه} &\Rightarrow \begin{cases} \bar{W}_{\text{int}} = \int_0^\ell \bar{M} \frac{M}{EI_y} dx \\ W_{\text{int}} = u = \int_0^\ell \frac{M^2}{2EI_y} dx \end{cases} \\ \text{راه دوم} &\begin{cases} W_{\text{int}} = \frac{1}{2} M d\theta = \frac{1}{2} M \frac{M dx}{EI_y} = \frac{M^2 dx}{2EI} \\ \Rightarrow W_{\text{int}} = \int_0^\ell \frac{M^2}{2EI} dx \end{cases} \end{aligned}$$

برای تعیین انرژی کرنشی کل میله باید در طول میله انتگرال بگیریم

محاسبه کار داخلی مجازی و انرژی کرنشی در حالت وجود نیروی برشی (V):



$$\text{انرژی کرنشی برای المان} \begin{cases} W_{\text{int}} = \frac{1}{2} V (\gamma dx) = \frac{1}{2} V \frac{\tau}{G} dx \\ W_{\text{int}} = \frac{1}{2} V \frac{V}{GA'} dx = \frac{V^2 dx}{2GA'} \end{cases}$$

علت ظهور  $A'$  به جای  $A$  این است که  $\tau = \frac{VQ}{Ib} \neq \frac{V}{A}$  است

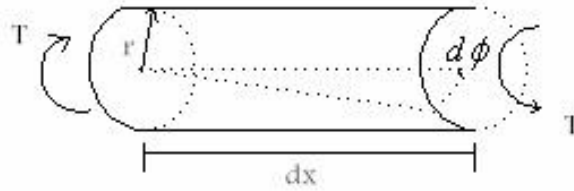
$$\bar{W}_{\text{int}} = \frac{\bar{V} V dx}{GA'}$$

$$W_{\text{int}} = \int_0^\ell \frac{V^2 dx}{2GA'}$$

$$U = \sum_{i=1}^n \int_0^\ell \frac{V^2 dx}{2GA'}$$

$$A' < A, A' = \frac{A}{f_s}, f_s = \frac{A}{I^2} \int \frac{Q^2}{b^2} dA > 1$$

محاسبه کار داخلی و انرژی کرنشی در پیچش :



$$W_{int} = \frac{1}{2} T dQ = \frac{1}{2} T \frac{T dx}{GJ}$$

$$W_{int} = \frac{T^2 dx}{2GJ} \quad \text{عضو}$$

$$\text{کار داخلی مجازی برای المان} = \frac{\bar{T} T dx}{GJ}$$

$$\text{نتیجه} \begin{cases} W_{int} = U = \sum \int_0^{\ell} T^2 \frac{dx}{2GJ} \\ W_{int} = \bar{T} T \frac{dx}{GJ} \end{cases}$$

روش کار حقیقی برای محاسبه تغییر مکان ها : ( این روش محدود به موارد خاص می باشد و قابلیت تعمیم برای بارگذاری متنوع و متعدد را ندارد )

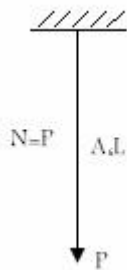
این قسمت بخش فرعی و حاشیه ای در مبحث کار مجازی می باشد روش کار حقیقی بر قاعده زیر استوار است :

$$W_{ext} = U \quad \text{کار خارجی} = \text{انرژی کرنشی داخلی}$$

$$U = W_{int} = U_N + U_M + U_V + U_T$$

$$= \sum \int \frac{N^2 dx}{2EA} + \sum \int \frac{M^2 dx}{2EI} + \sum \int \frac{V^2 dx}{2GA'} + \sum \int \frac{T^2 dx}{2GJ}$$

**مثال :** مطلوبست محاسبه تغییر مکان انتهای آزاد یک میله الاستیک با سطح مقطع A و طول  $\ell$  در اثر نیروی محوری P که بر انتهای آزاد آن وارد می گردد .

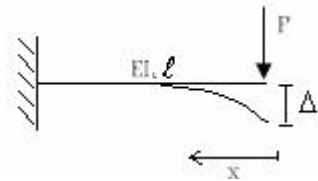


$$W_{ext} = \frac{1}{2} P \Delta$$

$$U = U_N = \int_0^{\ell} \frac{N^2 dx}{2EA} = \frac{P^2 \ell}{2EA}$$

$$W_{ext} = U \Rightarrow \frac{1}{2} P \Delta = \frac{P^2 \ell}{2EA} \Rightarrow \Delta = \frac{P \ell}{EA}$$

**مثال:** مطلوبست محاسبه میزان  $\Delta$  (تغییر مکان قائم) در تیر زیر با استفاده از کار حقیقی (فقط اثر  $M$  منظور شود)



$$M = -P \cdot x$$

$$U = U_M = \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EI} = \int_0^l \frac{(-Px)^2 dx}{2EI} = \frac{P^2 l^3}{6EI}$$

$$W_{ext} = U \Rightarrow \frac{1}{2} P \cdot \Delta = \frac{P^2 l^3}{6EI} \Rightarrow \Delta = \frac{P^2 l^3}{3EI}$$

### روش های انتگرال گیری برای حل عددی انتگرال $\int \bar{m} \frac{M}{EI} dx$

برای محاسبه تغییر مکان های الاستیک با استفاده از روش کار مجازی، حل انتگرال  $\int \bar{m} \frac{M}{EI} dx$  اغلب پر زحمت و وقت گیر بوده

و باعث طولانی شدن محاسبات می گردد. در زیر دو روش که استفاده از آن ها باعث سهولت زیادی در محاسبات و صرفه جویی در وقت می گردد ارائه می شود.

**(1) روش تحلیلی:** در این روش دو تابع زیر انتگرال (مثلا  $M$  و  $\bar{M}$ ) را به هم ضرب می کنیم و از حاصل ضرب آن ها با استفاده از قواعد ریاضی انتگرال می گیریم.

\* معادلات هر دو تابع زیر انتگرال باید در دستگاه معادلات یکسانی نوشته شده باشند (وحدت مبدا مختصات)

**(2) روش استفاده از جدول:** استفاده از جدول های موجود در پیوست

**(3) روش مور:** از آن جایی که لنگر  $\bar{m}$  همواره از بار واحد مجازی ناشی می شود نمودار آن همواره به صورت تابع خطی از  $X$  می باشد.

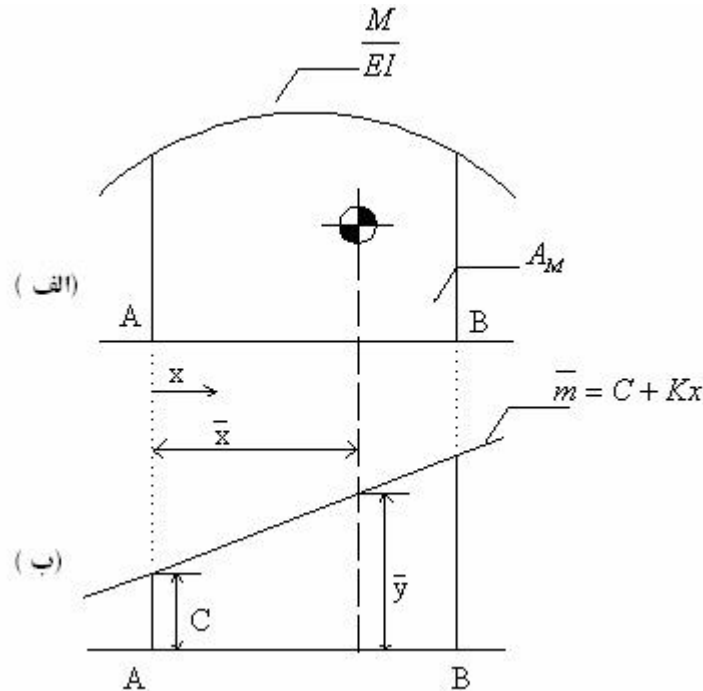
حال شکل زیر را که در آن توابع  $\bar{m}$  و  $\frac{M}{EI}$  در زیر یکدیگر رسم شده اند، در نظر بگیرید. توجه شود که هرگاه  $EI$  ثابت باشد، نمودار

$\frac{M}{EI}$  همان شکل نمودار  $M$  را داراست که عرض های آن بر  $EI$  تقسیم گشته اند. نمودار  $M$  نیز معمولاً بصورت توابع درجه اول، دوم و یا سوم از  $X$  می باشد که در شکل زیر تابع آن دلخواه انتخاب شده است.

چون نمودار  $\bar{m}$  یک تابع خطی از  $X$  می باشد، آنرا می توانیم بصورت  $\bar{m} = C + Kx$  بنویسیم که در آن  $C$  و  $K$  مقادیر ثابتی می باشند. با

گذشتن این مقادیر در انتگرال  $\int \bar{m} \frac{M}{EI} dx$  می توانیم بنویسیم:

$$\int_A^B \bar{m} \frac{M}{EI} dx = \int_A^B (C + Kx) \frac{M}{EI} dx = C \int_A^B \frac{M}{EI} dx + K \int_A^B \frac{M}{EI} x dx \quad (\text{الف})$$



انتگرال اول سمت راست معادله فوق ، مساحت نمودار  $\frac{M}{EI}$  بین دو حد A و B و انتگرال دوم لنگر اول سطح زیر نمودار  $\frac{M}{EI}$  نسبت به نقطه A می باشد و آن را می توان به صورت زیر نوشت :

$$\int_A^B \frac{M}{EI} x dx = \bar{x} A_M$$

که در آن  $A_M$  سطح زیر نمودار M بین دو حد A و B و  $\bar{x}$  فاصله نقطه A تا مرکز هندسی  $A_M$  می باشد . با توجه به موارد فوق ، رابطه ( الف ) به صورت زیر در می آید :

$$\int_A^B \bar{m} \left( \frac{M}{EI} \right) dx = C A_M + K \bar{x} A_M = (C + K \bar{x}) A_M$$

لیکن مقدار  $(C + K \bar{x})$  در رابطه فوق نشان دهنده مقدار  $\bar{m}$  در موقعیت مرکز هندسی سطح  $A_M$  می باشد که اگر آن را با  $\bar{y}$  نشان دهیم ، رابطه زیر که موسوم به رابطه مور می باشد به دست می آید :

$$\int_A^B \bar{m} \left( \frac{M}{EI} \right) dx = \bar{y} A_M$$

یعنی مقدار انتگرال  $\int_A^B \bar{m} \left( \frac{M}{EI} \right) dx$  مساوی حاصل ضرب سطح زیر نمودار  $\frac{M}{EI}$  در مقدار  $\bar{m}$  در موقعیت مرکز هندسی سطح زیر نمودار می باشد . البته توجه داشته باشید که رابطه فوق وقتی صحیح است که نمودار  $\bar{m}$  حتما خطی باشد .

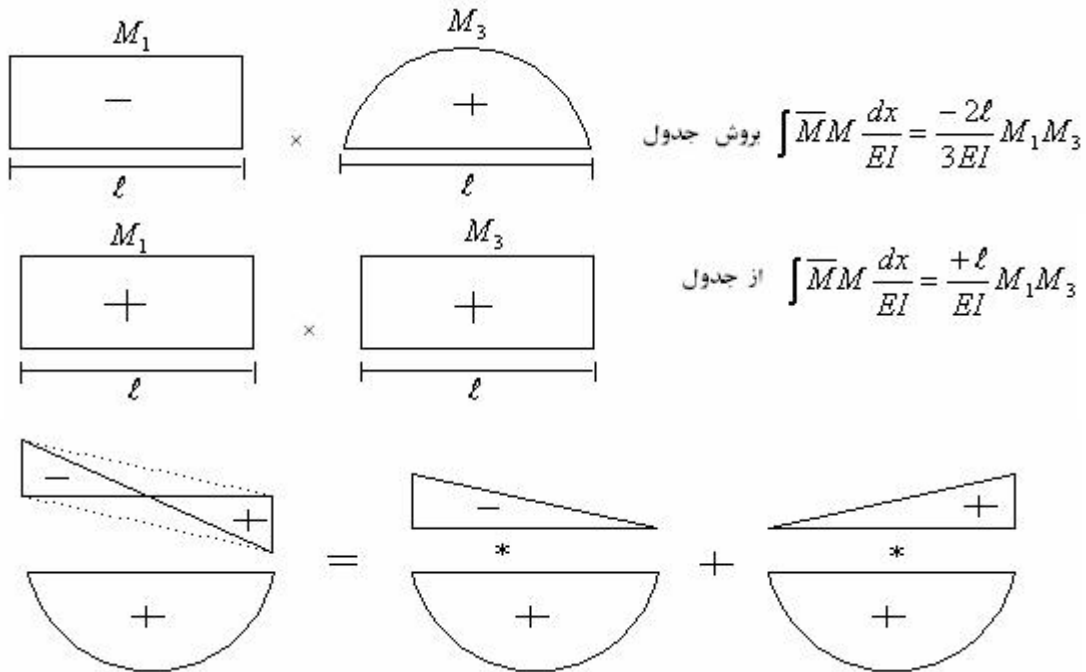
از آن جایی که در استفاده از رابطه مور به استفاده از مرکز هندسی اشکال هندسی زیاد بر می خوریم ، در جدول شکل بالا مرکز هندسی سطوح ساده نشان داده شده است .

توجه نمایید که  $A_M$  و  $\bar{y}$  را نمی توان در طول یک ناپیوستگی در هریک از توابع  $\frac{M}{EI}$  و یا  $\bar{m}$  محاسبه نمود . یعنی هر دو تابع

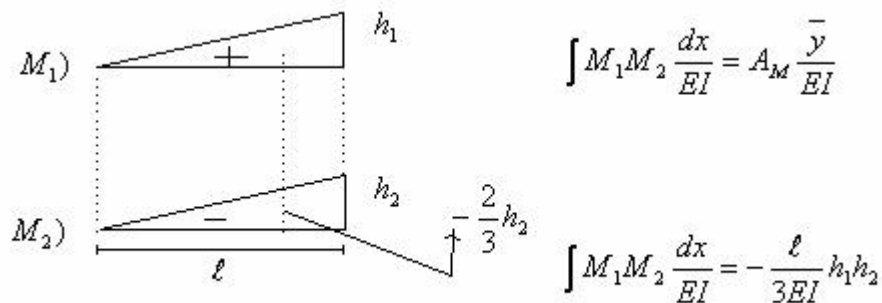
برای  $\frac{M}{EI}$  و  $\bar{m}$  بین نقاط A و B بایستی تابع پیوسته و یکنواختی بر حسب X باشند . در صورتی که هریک از توابع غیر پیوسته باشند ، سازه را می توان به قسمت هایی تقسیم نمود که در هریک از آن ها M و m پیوسته باشند . نتایج حاصل از هر قسمت را می توان جمع جبری نمود تا نتیجه نهایی حاصل گردد یعنی :

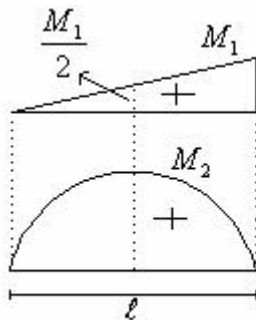
$$\int \bar{m} \frac{M}{EI} dx = \sum \bar{y} A_M$$

### مثال بروش جدول



### مثال برای روش مور





$$A_M \bar{y} = \left(\frac{2}{3} M_2 \ell\right) \left(\frac{M_1}{2}\right) = \frac{\ell}{3} M_1 M_2$$

$$\int M_1 M_2 \frac{dx}{EI} = \frac{\ell}{3EI} M_1 M_2$$

### گام های محاسبه تغییر مکان در سازه های خمشی

گام 1) حل سازه تحت اثر بارهای خارجی برای یافتن  $T, N, V, M$

گام 2) حل سازه تحت اثر بار واحد متناظر با تغییر مکان برای یافتن  $\bar{T}, \bar{N}, \bar{V}, \bar{M}$

گام 3) نوشتن رابطه تساوی کار داخلی و کار خارجی:

$$1 * \delta_m^i = W_{int}$$

$$W_{int} = W_{int}^N + W_{int}^M + W_{int}^V + W_{int}^T$$

$$1 * \delta_m^i = \sum_{i=1}^n \int_0^{\ell} \bar{N} N \frac{dx}{EA} + \sum_{i=1}^n \int_0^{\ell} \bar{M} M \frac{dx}{EI} + \sum_{i=1}^n \int_0^{\ell} \bar{V} V \frac{dx}{GA'}$$

چند نکته: 1- جمله دوم سمت راست تساوی فوق یعنی انتگرال ( $M$ ) ها در سازه های خمشی اهمیت اساسی دارد

2- جمله اول سمت راست تساوی ( $N$ ) در خرپا اهمیت حیاتی دارد در سازه های خمشی کوچک بوده و صرف نظر می شود و این جمله در

اغلب تیرها وجود ندارد. 3- جمله سوم سمت راست تساوی ( $V$ ) در سازه های طره ای کوتاه، تیر عمیق، تیرهای شبکه پی اهمیت اساسی

دارد در سازه های خمشی معمولی (تیر و قاب) اهمیت ثانوی دارد و در خرپا اصلا وجود ندارد.

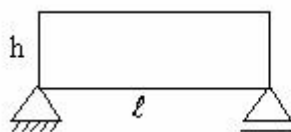
4- عناصر جملات اول و سوم ( $N$  و  $V$ ) سمت راست تساوی فوق در کار داخلی مجازی و همچنین در انرژی کرنشی سازه خمشی سهم

کمتری دارند. 5- بی نهایت شدن  $EA$  مقدار کار نیروی محوری را صفر می کند همچنان که بی نهایت شدن  $GA'$  و  $GJ$  و  $EI$  به ترتیب

کار نیروی برشی و لنگر پیچشی و لنگر خمشی را صفر می کند.

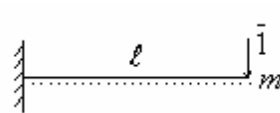
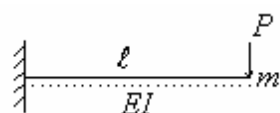
\* تیر عمیق تیری است که  $\frac{\ell}{h} < 4$  باشد در این تیر توزیع تنش خمشی در ارتفاع مقطع از رابطه  $E_{(y)} = \frac{M_y}{I}$  تبعیت نمی کند زیرا در

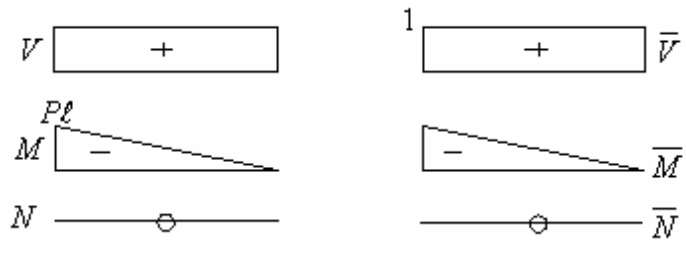
دهانه های کوچک، مقدار خمش کوچک و اثر نیروی برشی بزرگ و غیر قابل صرف نظر کردن می شود.



$$\frac{\ell}{h} < 4$$

مثال: تغییر مکان قائم نقطه  $m$  را محاسبه کنید (بروش کار مجازی)





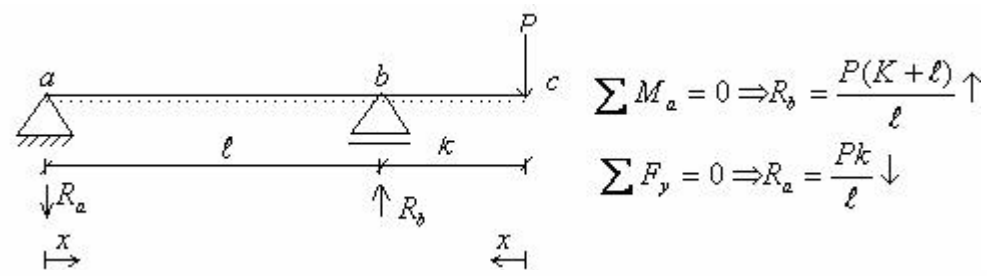
$$1 * \delta_m^v = \int_0^\ell \overline{M} M \frac{dx}{EI} + \int_0^\ell \overline{N} N \frac{dx}{EA} + \int_0^\ell \overline{V} V \frac{dx}{GA'}$$

$$1 * \delta_m^v = \int_0^\ell \overline{M} M \frac{dx}{EI} = \frac{P\ell^3}{3EI}$$

مثال: در تیر زیر مطلوبست محاسبه  $\delta_c^v$  (بروش کار مجازی)

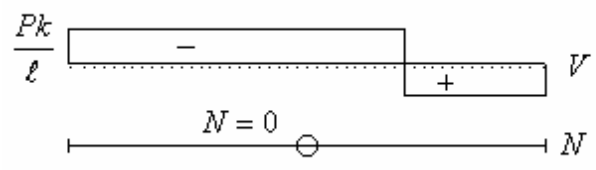
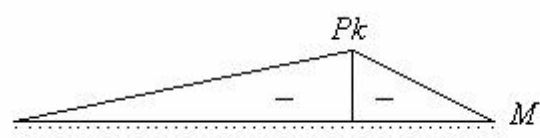
حل:

گام اول:

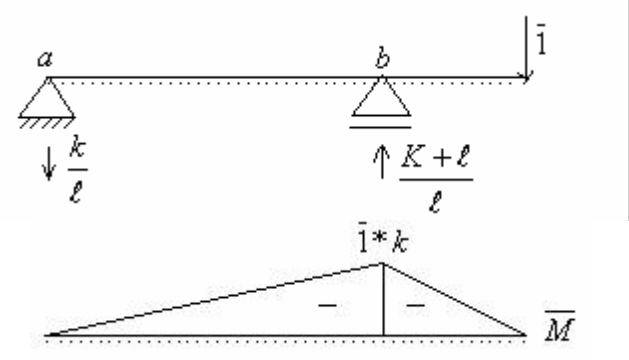


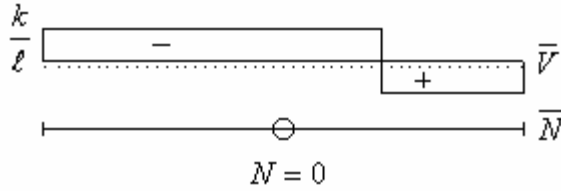
$$\sum M_a = 0 \Rightarrow R_b = \frac{P(K + \ell)}{\ell} \uparrow$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_a = \frac{Pk}{\ell} \downarrow$$



گام دوم:





$$\overline{M}_{ab} = -1 * \frac{k}{l} x$$

$$M_{ab} = -P * \frac{k}{l} x$$

$$\overline{V}_{ab} = -1 * \frac{k}{l}$$

$$V_{ab} = -P * \frac{k}{l}$$

$$\overline{N}_{ab} = 0$$

$$N_{ab} = 0$$

$$\overline{M}_{bc} = -1 * x$$

$$M_{bc} = -P * x$$

$$\overline{V}_{bc} = 1$$

$$V_{bc} = P$$

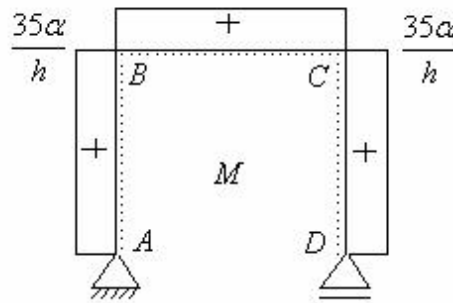
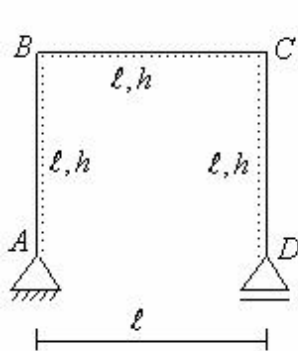
$$\overline{N}_{bc} = 0$$

$$N_{bc} = 0$$

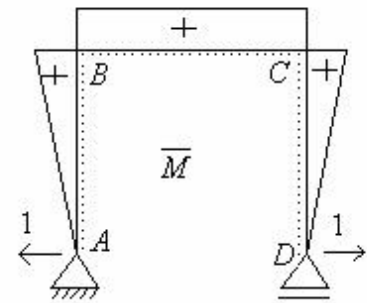
گام سوم:

$$\begin{aligned} \delta_c^V &= \int \overline{M} M \frac{dx}{EI} + \int \overline{V} V \frac{dx}{GA'} + \int \overline{N} N \frac{dx}{EA} = \\ &= \int_0^k \left(-1 \frac{k}{l} x\right) \left(-P \frac{k}{l} x\right) \frac{dx}{EI} + \int_0^k (-1x) (-Px) \frac{dx}{EI} + \int_0^k \left(-1 \frac{k}{l}\right) \left(-P \frac{k}{l}\right) \frac{dx}{GA'} + \int_0^k (1)(P) \frac{dx}{GA'} + 0 \Rightarrow \\ \delta_c^V &= \frac{Pk^2}{3EI\ell^2} (\ell^3 + k\ell^2) + \frac{Pk^2}{GA'\ell^2} \left(\ell + \frac{\ell^2}{k}\right) \end{aligned}$$

**مثال:** اگر درجه حرارت قاب در شکل زیر 20 درجه افزایش و درجه حرارت خارج آن 15 درجه کاهش یابد، مطلوبست محاسبه تغییر مکان افقی تکیه گاه D (بروش کار مجازی)



حل سازه تحت اثر بار خارجی (حرارت)



حل سازه تحت اثر بار واحد

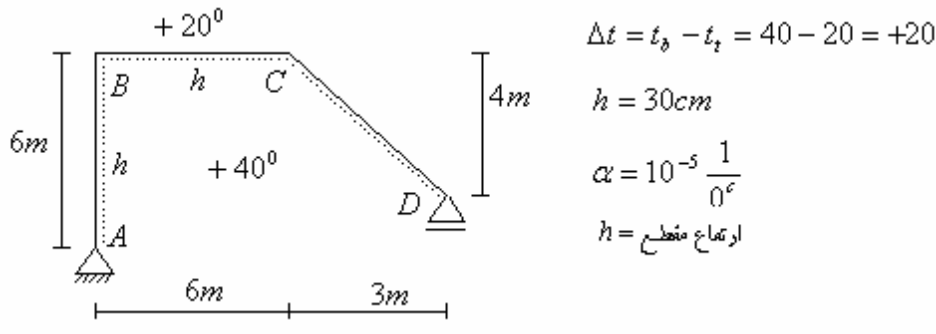
$$\Delta t = 20 - (-15) = 35 \Rightarrow \frac{\alpha \Delta t}{h} = \frac{35\alpha}{h}$$



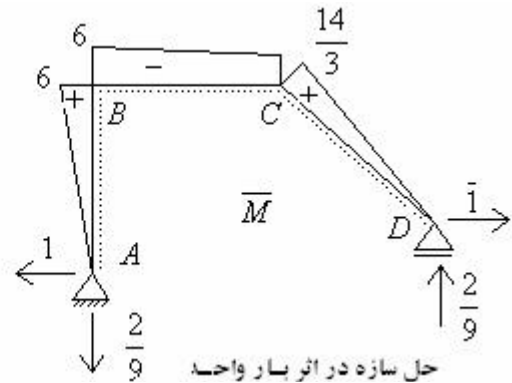
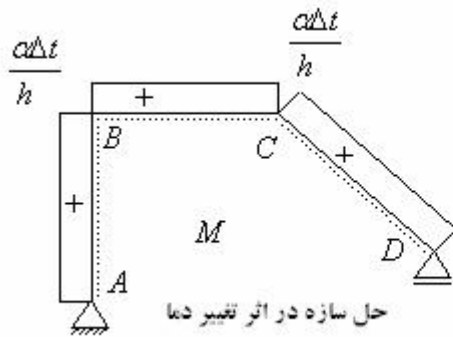
$$1 * \delta_D^H = \int \bar{M} \cdot \frac{\alpha \Delta t}{h} dx = \frac{\ell}{2} \left( \frac{35\alpha}{h} \right) (\ell) + \ell \left( \frac{35\alpha}{h} \right) (\ell) + \frac{\ell}{2} \left( \frac{35\alpha}{h} \right) (\ell)$$

$$\Rightarrow \delta_D^H = 2 \left( \frac{35\alpha \ell^2}{h} \right) = \frac{70\alpha \ell^2}{h}$$

مثال: تغییر مکان افقی گره D را تحت بارگذاری داده شده محاسبه کنید. (بروش کار مجازی)



حل:



$$\sum M_A = 0 \Rightarrow R_D * 9 = 2 * 1 \Rightarrow R_D = \frac{2}{9}$$

$$1 * \delta_D = \int \bar{M} \frac{\Delta t \alpha}{h} dx = \frac{6}{2} \left( \frac{\Delta t \alpha}{h} \right) (6) + \frac{6}{2} \left( 6 + \frac{14}{3} \right) \left( \frac{\Delta t \alpha}{h} \right) + \frac{5}{2} \left( \frac{14}{3} \right) \left( \frac{\Delta t \alpha}{h} \right) = 61.66 \frac{\Delta t \alpha}{h}$$

$$\delta_D^H = 61066 * \frac{10^{-5} (40 - 20)}{30 * 10^{-2}} = 0.04m = 4cm$$

قضیه بتی

قانون بتی یکی از اصول بسیار مهم مکانیک است و موارد استفاده زیادی دارد.

بیان قضیه بتی

در هر سازه ای که ماده آن الاستیک بوده و از قانون هوک پیروی کند به شرطی که تکیه گاه های سازه غیر قابل تغییر شکل بوده و درجه حرارت ثابت باشد داریم: کار مجازی خارجی انجام شده توسط سیستم نیروهای  $P_m$  به علت تغییر شکل سازه در نتیجه ی تاثیر سیستم نیروهای  $P_n$  برابر است با کار مجازی خارجی انجام شده توسط سیستم نیروهای  $P_n$  به علت تغییر شکل سیستم در نتیجه ی تاثیر سیستم نیروهای  $P_m$  یعنی:

$$\sum P_m \cdot \delta_{mn} = \sum P_n \cdot \delta_{nm}$$

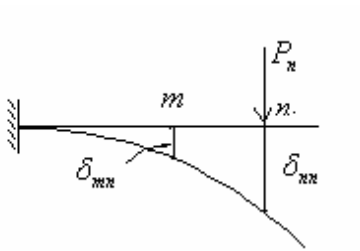
$\delta_{mn}$ : تغییر مکان نقطه  $m$  در اثر بار موجود در نقطه  $n$ .

$\delta_{nm}$ : تغییر مکان نقطه  $n$  در اثر بار موجود در نقطه  $m$ .

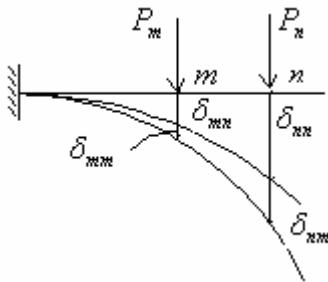
### اثبات ساده قضیه بتی

برای اثبات تیر یک سر گیرداری را در نظر می گیریم

الف) فرض می کنیم سیستم نیروهای  $P_n$  بر سازه وارد می شود:

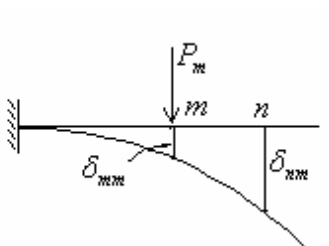


حال نیروهای  $P_m$  را به تیر وارد می کنیم:

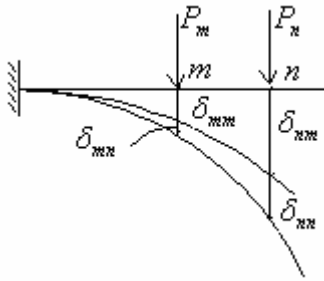


$$W_{ext}^1 = W_{ext}^n + W_{ext}^m + W_{ext}^{m,n} = \frac{1}{2} \sum P_n \delta_{nn} + \frac{1}{2} \sum P_m \delta_{mm} + \sum P_n \delta_{nm}$$

ب) فرض می کنیم نیروهای  $P_m$  بر سازه وارد می شود:



حال نیروهای  $P_n$  را به تیر وارد می کنیم:



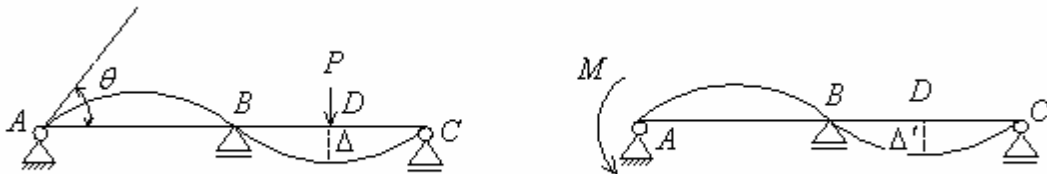
$$W_{ext}^{II} = W_{ext}^m + W_{ext}^n + W_{ext}^{n,m} = \frac{1}{2} \sum P_m \delta_{mm} + \frac{1}{2} \sum P_n \delta_{nn} + \sum P_m \delta_{mn}$$

کل کار خارجی در حالت الف و ب باید مساوی باشد زیرا تقدم و تاخر تاثیری در مقدار کار سیستم های ارتجاعی خطی نداشته باشد.

$$W_{ext}^I = W_{ext}^{II} \Rightarrow \sum P_n \delta_{nm} = \sum P_m \delta_{mn}$$

قضیه بتی به علت تقارن ماتریس نرمی سازه و حتی ماتریس سختی سازه را نیز توضیح می دهد.

**مثال:** در تیر زیر در صورتی که دوران نقطه A تحت اثر بار P در نقطه D برابر  $\theta$  باشد تغییر مکان نقطه D تحت اثر ممان منفی M در A چه مقدار خواهد بود. ( $\Delta' = ?$ )



$$\text{قضیه بتی: } P\Delta' = M\theta \Rightarrow \Delta' = \frac{M\theta}{P}$$

$\Delta'$ : تغییر مکانی است که لنگر M در محل اثر بار P در امتداد آن ایجاد کرده است.

$\theta$ : تغییر مکانی است که بار P در محل اثر لنگر M ایجاد کرده است. (تغییر مکان متناسب با لنگر دوران است)

### قضیه ماکسول

اگر در قضیه بتی  $P_m = P_n = 1$  در نظر بگیریم خواهیم داشت:

$$P_m = P_n = 1 \Rightarrow \delta_{mn} = \delta_{nm}$$

پس قضیه ماکسول حالت خاص قضیه بتی می باشد.

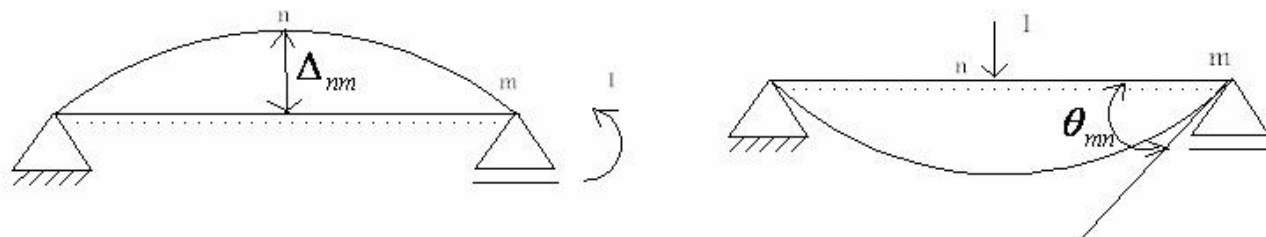
### بیان قضیه ماکسول

در هر سازه ارتجاعی، هوکی، با تکیه گاه های تغییر ناپذیر و دمای ثابت مقدار عددی تغییر مکان نقطه n در امتداد j تحت اثر بار

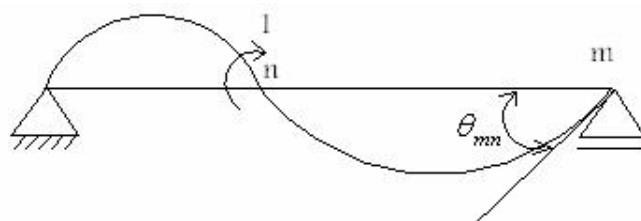
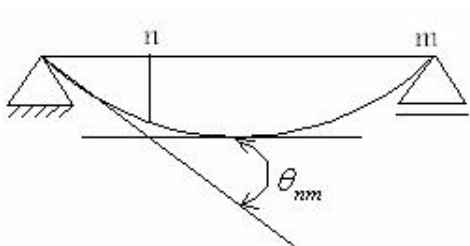
واحدی که در m و در امتداد i اثر می کند برابر است با تغییر مکان نقطه m در امتداد i تحت اثر بار واحدی در n که در امتداد j اثر می

کند.

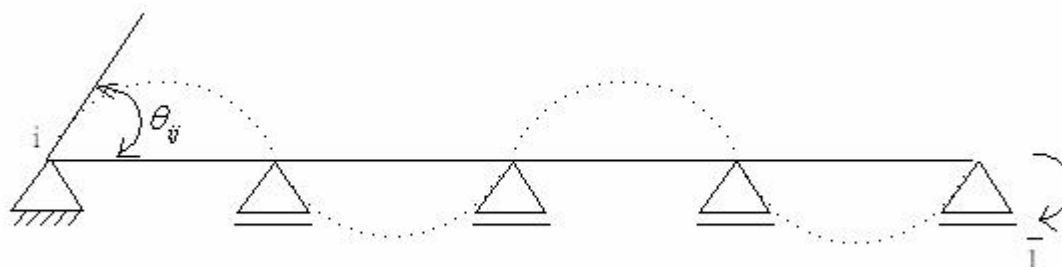
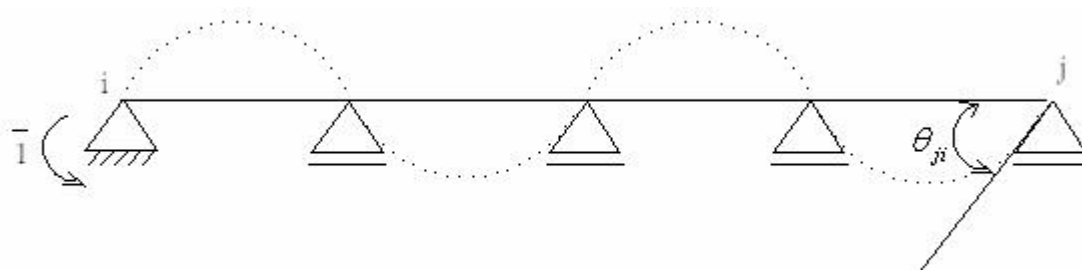
**مثال:**



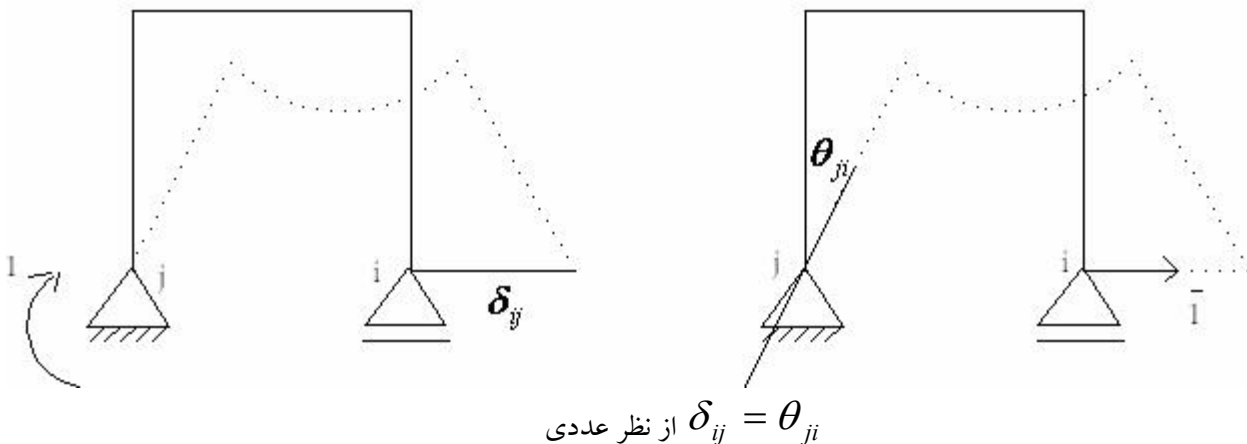
از نظر عددی  $\Delta_{nm} = \theta_{mn}$



$\theta_{nm} = \theta_{mn}$



مقدار عددی  $\theta_{ij} = \theta_{ji}$

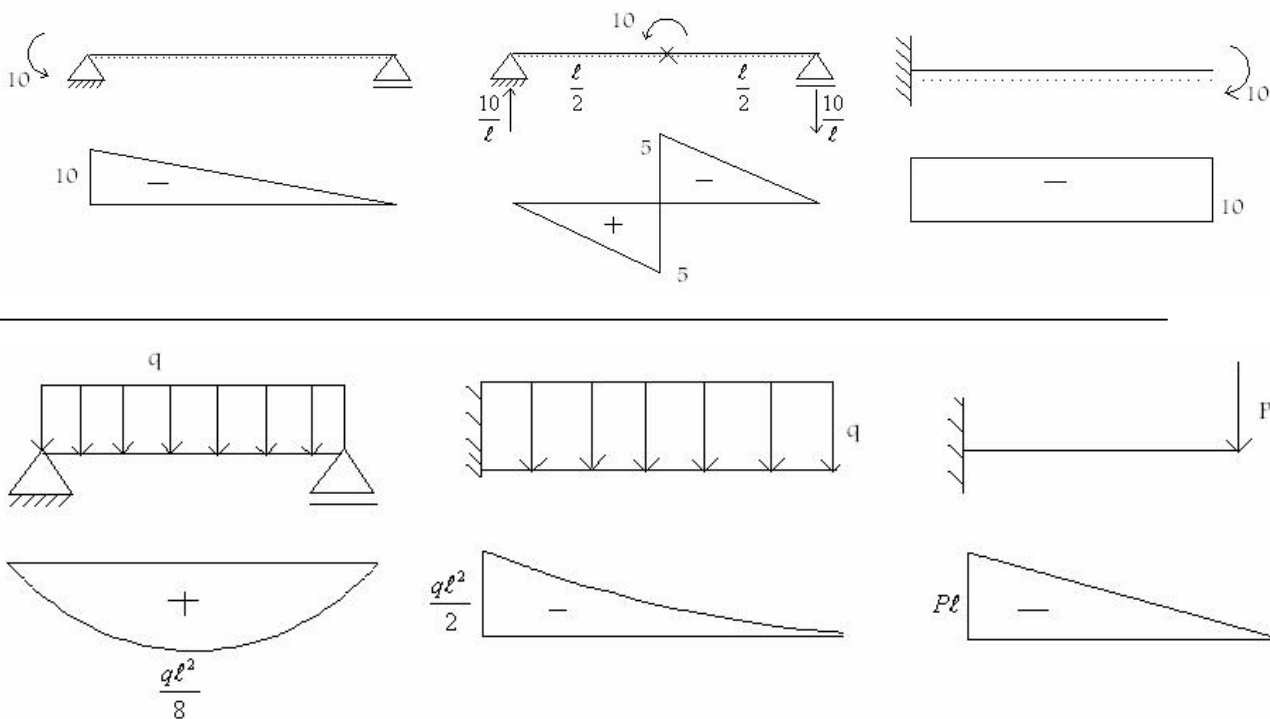


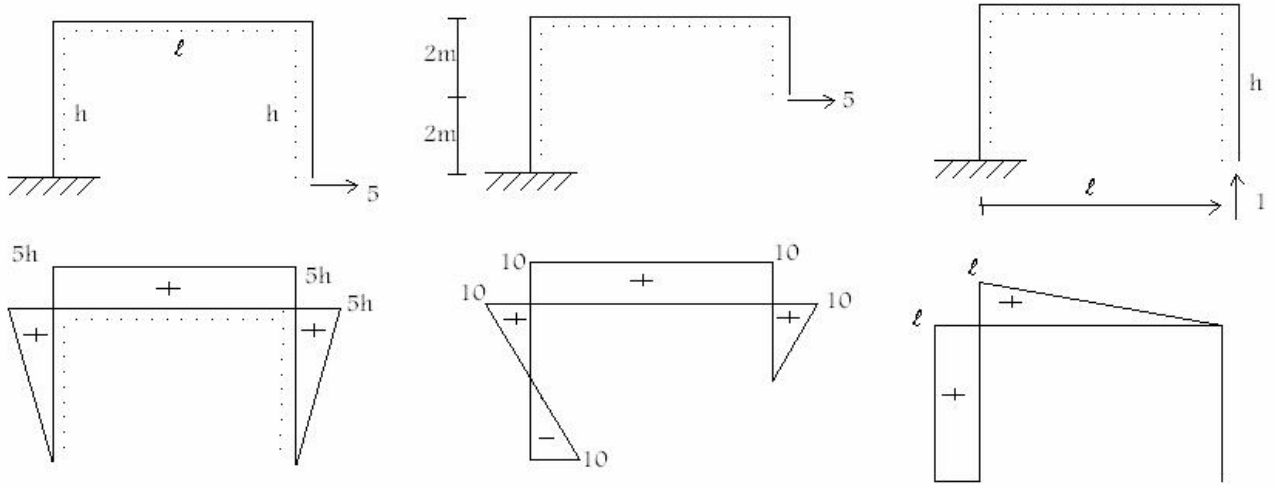
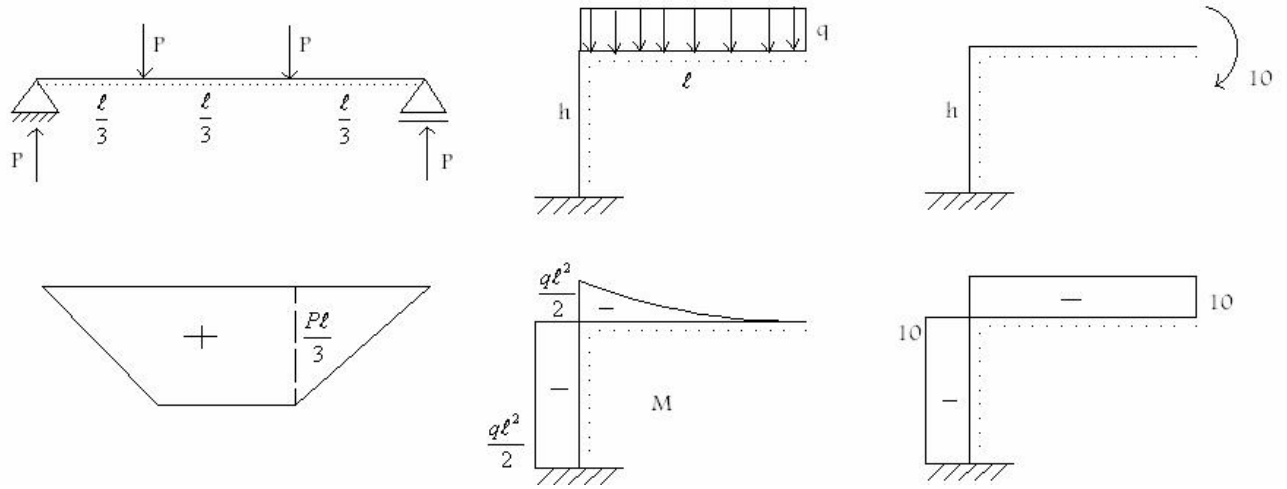
### تعریف سازه با رفتار خطی

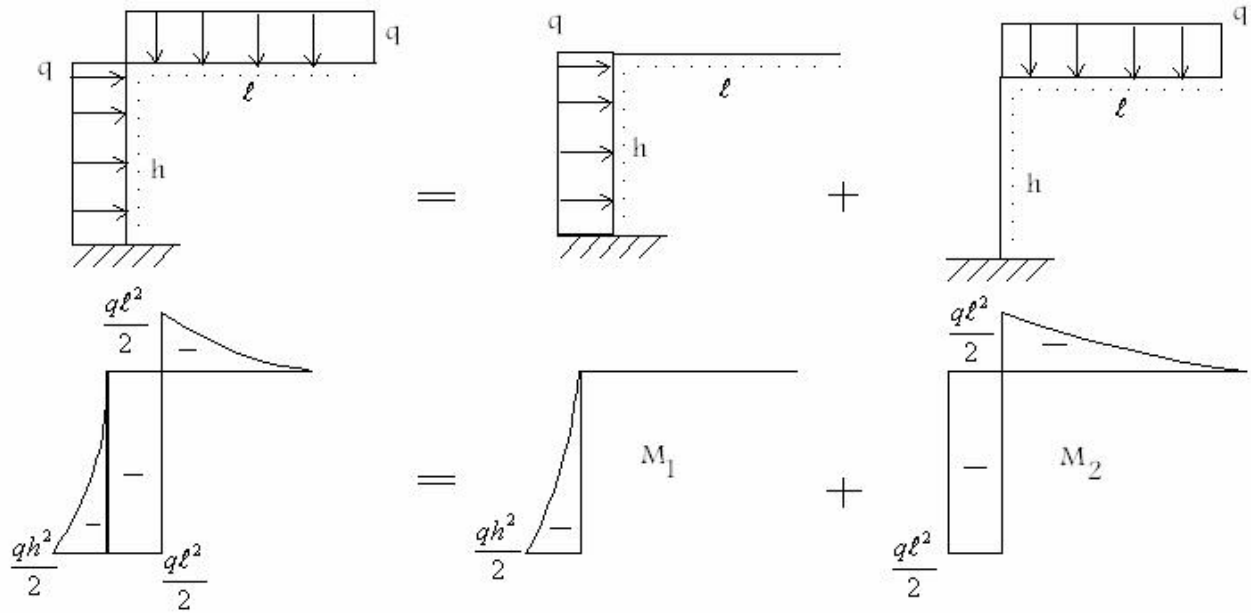
در سازه با رفتار خطی دو شرط زیر باید صادق باشد:

- 1- مصالح سازه از قانون هوک پیروی کنند یعنی رابطه تنش - کرنش خطی باشد.
- 2- تغییر شکل های سازه باید کوچک باشد نباید روی عمل و امتداد بارهای وارده تاثیر داشته باشد.

### مروری بر چند دیاگرام نیروهای داخلی پر کاربرد







### تحلیل سازه های نامعین بروش نیرو

- گام 1) تعیین درجه نامعینی استاتیکی سازه (X)
- گام 2) انتخاب سازه مبنای مناسب (رجوع کنید به مقاومت مصالح 1)
- گام 3) حل سازه مبنا تحت بار خارجی یا عامل خارجی (مانند حرارت) و رسم دیاگرام های لازم. (نیروی محوری و برشی و لنگر خمشی زیرنویس صفر خواهند داشت  $M_0, N_0, V_0$ )
- گام 4) حل سازه مبنا تحت اثر اولین نیروی تعاملی که مقدارش واحد فرض شده است و رسم دیاگرام های لازم. (نیروی محوری و برشی و لنگر خمشی زیرنویس یک خواهند داشت  $M_1, N_1, V_1$ )
- گام 5) تکرار گام 4 برای هر یک از نیروی تعاملی باقیمانده در غیاب بار خارجی و نیروهای تعاملی دیگر. (نیروی محوری و برشی و لنگر خمشی زیرنویس دو خواهند داشت  $M_2, N_2, V_2$ )
- گام 6) محاسبه عناصر ماتریس نرمی سازه  $(\dots, \delta_{13}, \delta_{12}, \delta_{11})$  که معادل همان محاسبه تغییر مکان ها می باشد.
- گام 7) نوشتن معادلات سازگاری در محل نیروهای تعاملی که برای هر نیروی تعاملی یک معادله سازگاری خواهیم داشت.

$$\begin{Bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{21} & \dots & \delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \delta_{n1} & \delta_{n1} & \dots & \delta_{nn} \end{Bmatrix}_{n \times n} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}_{n \times 1} = \begin{Bmatrix} -\delta_{10} \\ -\delta_{10} \\ \vdots \\ -\delta_{n0} \end{Bmatrix}_{n \times 1}$$

ماتریس نرمی و اعضای آن مستقل از بارگذاری، نشست و تغییر دمای محیط است و تا سازه مبنا را عوض نکنیم ماتریس نرمی

عوض نخواهد شد و بنابراین برای انواع بارگذاری ها از ماتریس نرمی یکسان استفاده می کنیم.

نکته: شرط وجود جواب مخالف صفر بودن دترمینان ماتریس نرمی پایدار بودن سازه می باشد.

بردار ستونی طرف راست در حالت های مختلف نظیر بارگذاری ، تغییر حرارت یکنواخت و غیر یکنواخت و نشست های تکیه گاهی بطور جداگانه محاسبه می شود یعنی طرف راست معادلات در هر یک از این حالات با حالات دیگر تفاوت دارد ( طرف راست معادلات به بارگذاری ، نشست و تغییر دما وابستگی دارد)

$$\left. \begin{aligned} [A][X] &= [b] \\ [A][X] &= [c] \\ [A][X] &= [t] \end{aligned} \right\} \begin{aligned} [A][X] &= [b] + [c] + [t] \\ &= \{b + c + t\} \end{aligned}$$

گام 8) حل معادلات سازگاری و یافتن  $X_1, X_2, \dots, X_n$

گام 9) پردازش ثانوی: با یکی از دو روش زیر

الف) استفاده از معادلات تعادل سازه پس از قرار دادن مجهولات بدست آمده در سازه اصلی

ب) استفاده از جمع آثار مرحله ای

$$A = A_0 + X_1 A_1 + X_2 A_2 + \dots + X_n A_n$$

A: اثری بنام A

$A_0$ : همان اثر تحت بار خارجی

$A_1$ : همان اثر تحت بار واحد  $X_1 = 1$

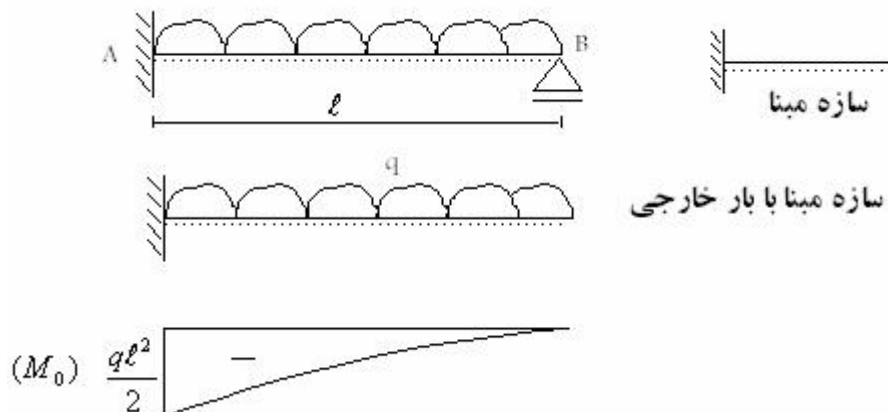
⋮

$A_n$ : همان اثر تحت بار واحد  $X_n = 1$

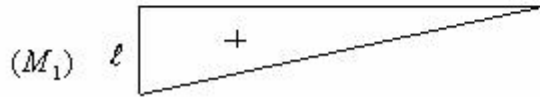
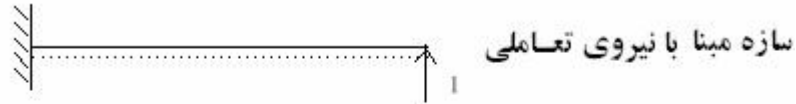
نکته 1) مثبت بودن مقادیر  $X_1, X_2, \dots, X_n$  نشانه آن است که بارهای واحد اعمال شده در سازه مینا جهت نیروهای مجهول را درست نشان داده و منفی بودن نشانه آن است که جهت نیروهای تعاملی بایستی عوض شود.

نکته 2) اگر یکی یا تعدادی از جواب ها  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  منفی آمده باشد در قسمت پردازش ثانوی ، وقتی از قسمت الف استفاده می کنیم جهت درست را در روی سازه اصلی قرار می دهیم و سپس از معادلات تعادل استفاده می کنیم ولی وقتی از قسمت ب) جمع آثار مرحله ای) استفاده می کنیم  $X_1, X_2, \dots, X_n$  را با همان علامت بدست آمده در رابطه جمع آثار مرحله ای قرار می دهیم.

**مثال:** عکس العمل های تکیه گاهی تیر زیر را بر روش نیرو محاسبه کنید.





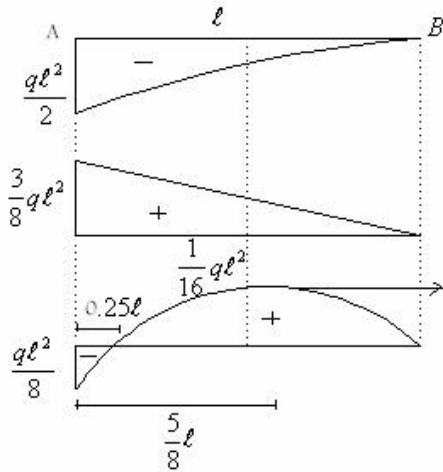


$$\delta_{11} = \int M_1 M_1 \frac{dx}{EI} = \frac{l}{3}(\ell)(\ell) \frac{1}{EI} = \frac{l^3}{3EI} \quad \delta_{10} = \int M_1 M_0 \frac{dx}{EI} = \frac{l}{4}(\ell) \left( \frac{-q\ell^2}{2} \right) \frac{1}{EI} = \frac{-q\ell^4}{8EI}$$

$$\text{معادله سازگاری: } \delta_{11} x_1 = -\delta_{10} \Rightarrow \frac{l^3}{3EI} x_1 = + \frac{q\ell^4}{8EI} \Rightarrow x_1 = \frac{3}{8} q\ell$$

$$\text{جمع آثار مرحله ای} \begin{cases} R_A = R_{0A} + x_1 R_{1A} = q\ell + \left(\frac{3}{8} q\ell\right)(-1) = \frac{5}{8} q\ell \\ M_A = M_{0A} + x_1 M_{1A} = \frac{-q\ell^2}{2} + \left(\frac{3}{8} q\ell\right)(\ell) = -\frac{q\ell^2}{8} \end{cases}$$

برای رسم دیاگرام لنگر خمشی می توان  $M_1, M_0$  را با هم جمع کرد.

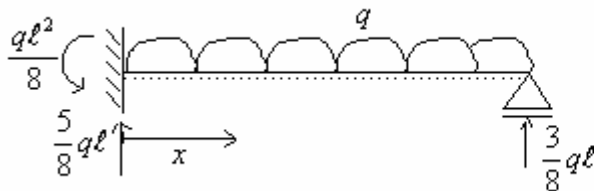


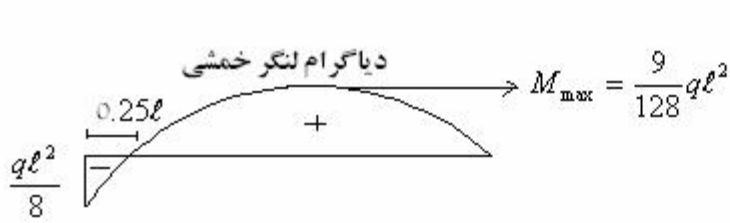
$$\text{در } x=0 : -\frac{q\ell^2}{2} + \frac{3}{8}q\ell^2 = -\frac{q\ell^2}{8}$$

$$\text{در } x=\ell : 0+0=0$$

$$\text{در } x=\frac{\ell}{2} : \begin{cases} M_0\left(\frac{\ell}{2}\right) = -\frac{q\ell^2}{8} \\ M_1\left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{3q\ell^2}{16} \end{cases} \Rightarrow -\frac{q\ell^2}{8} + \frac{3q\ell^2}{16} = \frac{q\ell^2}{16}$$

راه دوم برای رسم دیاگرام لنگر خمشی استفاده از برش زدن و پیدا کردن معادله  $M$  می باشد:





$$M(x) = \frac{5}{8}qx - \frac{qx^2}{8} - \frac{qx^2}{2}$$

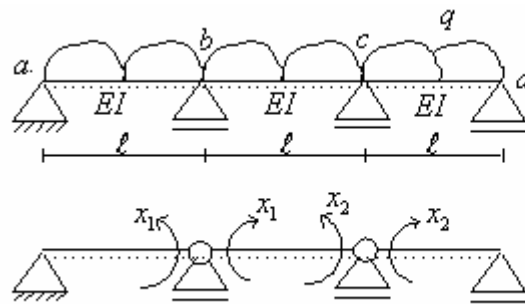
$$: x = \frac{5l}{8} \Rightarrow M = \frac{9}{128}ql^2$$

$$M(x) = 0 \Rightarrow x = 0.25l$$

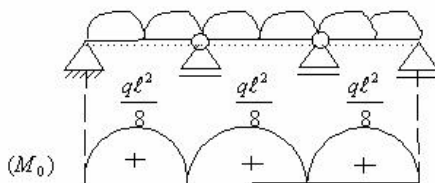
تمرین : حل مثال قبل با سازه مبنای دیگر مثلا با سازه مبنای زیر



مثال : تیر شکل زیر را به روش نیرو حل کرده و دیاگرام لنگر خمشی (M) را هم رسم کنید. (فقط اثر M منظور شود)



$$x = 2$$

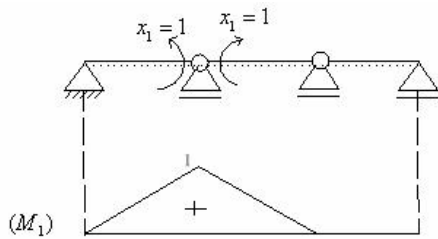


سازه مینا با بار خارجی

$$\delta_{11} = \int M_1^2 \frac{dx}{EI} = 2\left(\frac{l}{3} M_1 M_3\right) = 2\left(\frac{l}{3} * 1 * 1\right) \frac{1}{EI} = \frac{2l}{3EI}$$

$$\delta_{21} = \delta_{12} = \int M_1 M_2 \frac{dx}{EI} = \frac{l}{6} (1)(1) \frac{1}{EI} = \frac{l}{6EI}$$

$$\delta_{22} = \int M_2^2 \frac{dx}{EI} = 2\left(\frac{l}{3} * 1 * 1\right) \frac{1}{EI} = \frac{2l}{3EI}$$

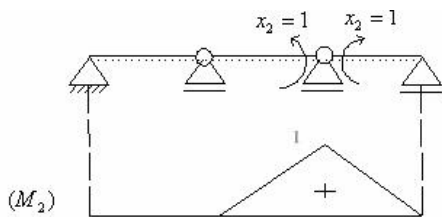


سازه مینا با نیروی تعاملی اول

$$\delta_{10} = 2 \left\{ \left( \frac{\ell}{3} \right) (1) \left( \frac{q\ell^2}{8} \right) \right\} \frac{1}{EI} = \frac{q\ell^3}{12EI}$$

$$\delta_{10} = \int M_2 M_0 \frac{dx}{EI} = 2 \left\{ \left( \frac{\ell}{3} \right) (1) \left( \frac{q\ell^2}{8} \right) \right\} \frac{1}{EI} = \frac{q\ell^3}{12EI}$$

$$\begin{Bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\delta_{10} \\ -\delta_{20} \end{Bmatrix}$$

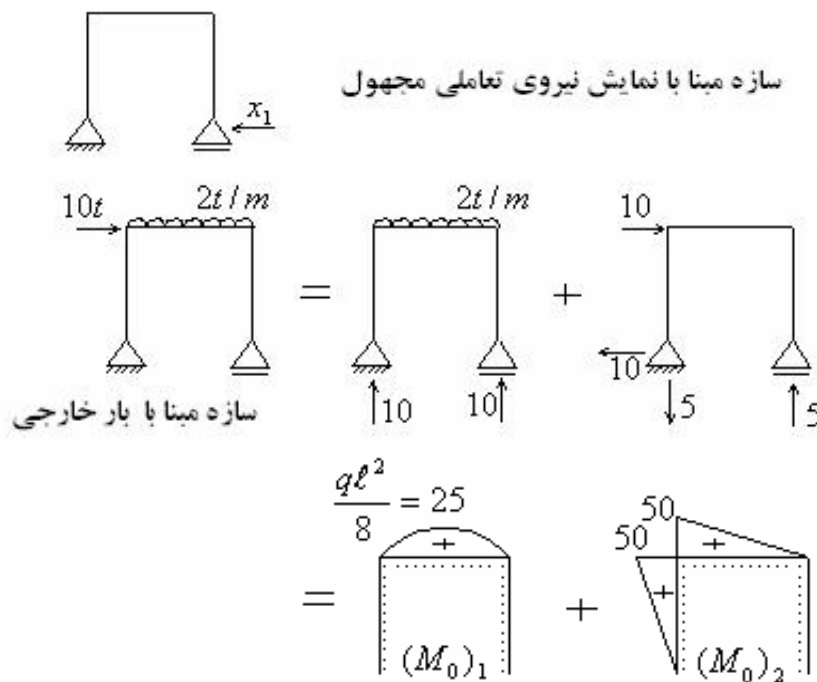
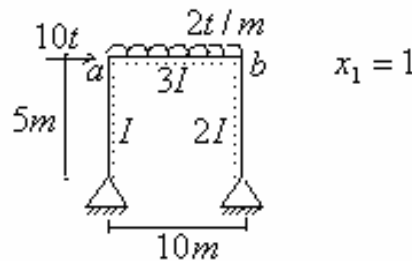


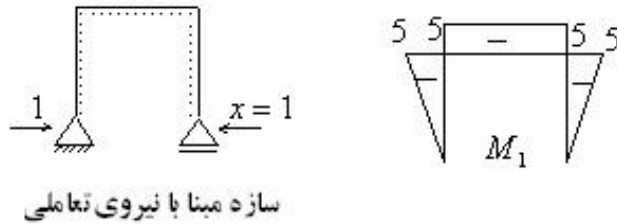
سازه مینا با نیروی تعاملی دوم

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} \frac{2\ell}{3EI} & \frac{\ell}{6EI} \\ \frac{\ell}{6EI} & \frac{2\ell}{3EI} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{q\ell^3}{12EI} \\ -\frac{q\ell^3}{12EI} \end{Bmatrix} \Rightarrow x_1 = x_2 = -\frac{1}{10} q\ell^2$$

یعنی جهت  $x_2, x_1$  نادرست است

مثال: مطلوبست حل سازه بروش نیرو و رسم دیاگرام لنگر خمشی



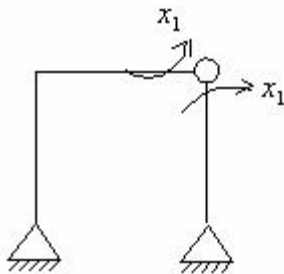


$$\delta_{11} = \frac{5}{3} * 5 * 5 \frac{1}{EI} + 5 * 5 * 10 \frac{1}{3EI} + \frac{5}{3} * 5 * 5 \frac{1}{2EI} = \frac{875}{6EI}$$

$$\delta_{10} = -\frac{5}{3} * 5 * 50 \frac{1}{EI} - 5 * \frac{10}{2} * 50 \frac{1}{3EI} - \frac{2}{3} * 5 * 25 * 10 \frac{1}{3EI} = \frac{-10000}{2EI}$$

$$\text{معادله سازگاری } \delta_{11} x_{11} = -\delta_{10} \Rightarrow \frac{875}{6EI} x_1 = \frac{10000}{2EI} \Rightarrow x_1 = \frac{+160}{21}$$

**تمرین:** سازه مثال قبل را با سازه مبنای زیر دوباره حل کنید



### تحلیل سازه های نامعین در اثر نشست تکیه گاهی

اگر سازه معین باشد در اثر نشست تکیه گاهی در اعضای سازه تنش تولید نخواهد شد به عبارت دیگر نیروی داخلی در اثر نشست برابر صفر است ولی اگر سازه نامعین باشد ممکن است در اثر نشست تنش نیز تولید شود نیروهای داخلی ناشی از نشست مخصوص سازه هایی است که:

1- از نظر تکیه گاهی نامعین باشد 2- نشست های آن نه متساوی و نه متناسب باشند

نشست متساوی و متناسب در هیچ سازه ای اعم از معین و نامعین تنش تولید نخواهد کرد

در نشست های نامتناسب و نامتساوی آن بخش از نشست که تنش تولید می کند نشست موثر نامیده می شود.

اگر در سازه فقط نشست داشته باشیم معادلات سازگاری به صورت زیر خواهد شد

$$\begin{Bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{21} & \dots & \delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \delta_{n1} & \delta_{n1} & \dots & \delta_{nn} \end{Bmatrix}_{n \times n} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}_{n \times 1} = \begin{Bmatrix} \sum c_1 c \\ \sum c_2 c \\ \vdots \\ \sum c_n c \end{Bmatrix}_{n \times 1} \quad (\text{در حالت فقط نشست})$$

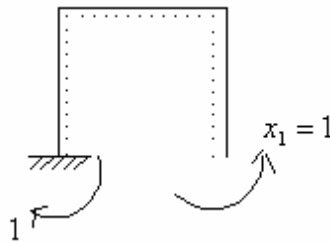
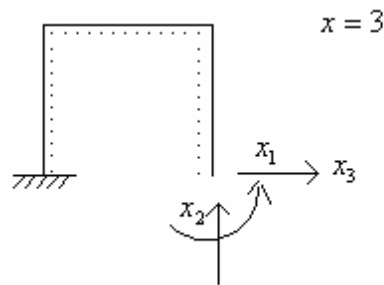
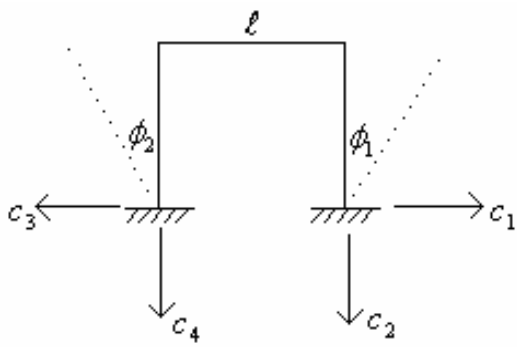
$C_1$ : عکس العمل تکیه گاهی ناشی از  $x_1=1$       مجموع جبری کارهای خارجی تکیه گاهی در حین اعمال  $x_1=1$

$C_2$ : عکس العمل تکیه گاهی ناشی از  $x_2=1$

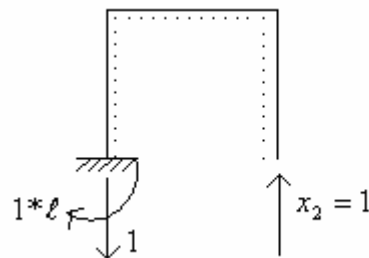
⋮

$C_n$ : عکس العمل تکیه گاهی ناشی از  $x_n=1$

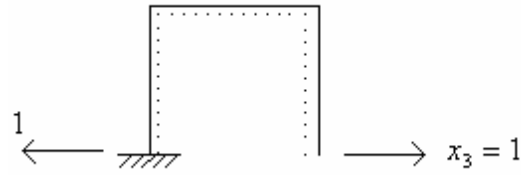
**مثال**: مطلوبست نوشتن طرف راست معادلات حاکم بر مسئله در اثر نشست های نشان داده شده در روی قاب



$$\sum c_1 c = -1 * \phi_1 - 1 * \phi_2 = -(\phi_1 + \phi_2)$$



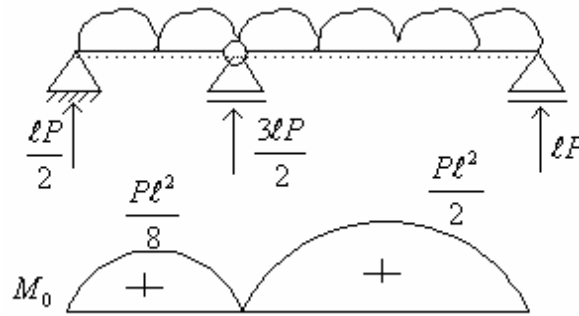
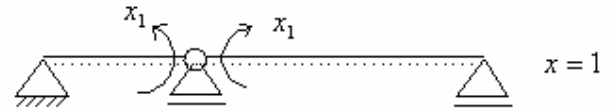
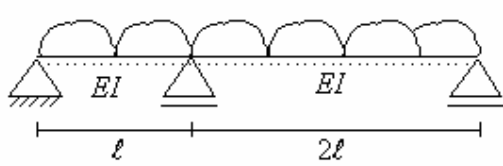
$$\sum c_2 c = -1 * c_2 - 1 * l_1 * \phi_2 + 1 * c_4 = -c_2 + c_4 - l_1 \phi_2$$



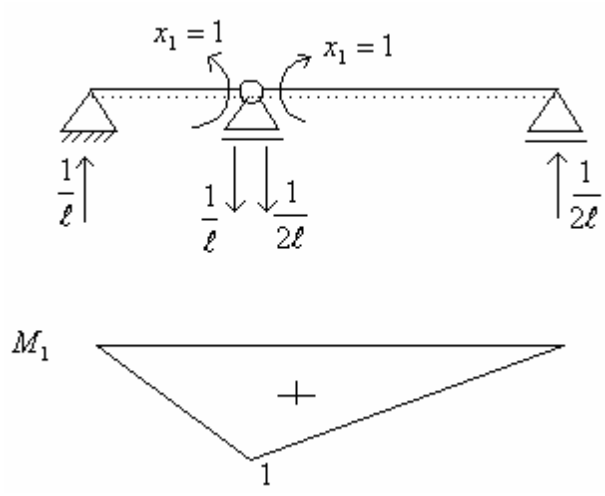
$$\sum c_3 c = 1 * c_1 + 1 * c_3 = c_1 + c_3$$

$$\begin{cases} \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \delta_{13}x_3 = -(\phi_1 + \phi_2) \\ \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \delta_{23}x_3 = -c_2 + c_4 - \ell_1\phi_2 \\ \delta_{31}x_1 + \delta_{32}x_2 + \delta_{33}x_3 = c_1 + c_3 \end{cases}$$

مثال: مطلوبست حل سازه زیر تحت اثر بار  $P, c_b$  (نشست تکیه گاه b) باروش نیرو



$$\delta_{10} = \frac{2}{3} \left( \frac{P\ell^2}{2} \right) (2\ell) \left( \frac{1}{2} \right) \frac{1}{EI} + \frac{2}{3} \left( \frac{P\ell^2}{8} \right) (\ell) \left( \frac{1}{2} \right) \frac{1}{EI} = \frac{3P\ell^3}{8EI}$$



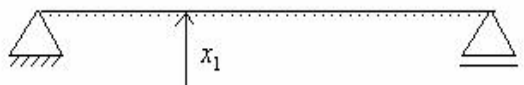
$$\delta_{11}x_1 = \frac{3l}{3} * 1 * 1 * \frac{1}{EI} = \frac{l}{EI}$$

$$\sum c_1c = \frac{3c_b}{2l}$$

$$\delta_{11}x_1 = -\delta_{10} + \sum c_1c \Rightarrow \frac{l}{EI}x_1 = -\frac{3P\ell^3}{8EI} + \frac{3c_b}{2l}$$

$$\Rightarrow x_1 = -\frac{3P\ell^2}{8} + \frac{3}{2\ell^2}EIc_b$$

تمرین: مثال بالا را با سازه مبنای زیر حل کنید

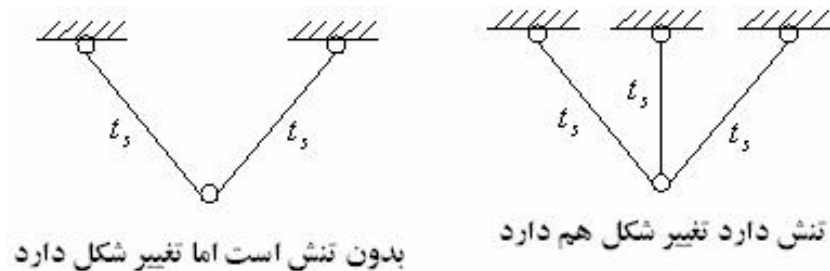


نکته: در مسائل تغییر حرارت یکنواخت و غیر یکنواخت جمله اول در جمع آثار صفر است زیرا سازه مبنای در اثر نشست و حرارت عکس العمل و نیروی داخلی تولید نمی کند.

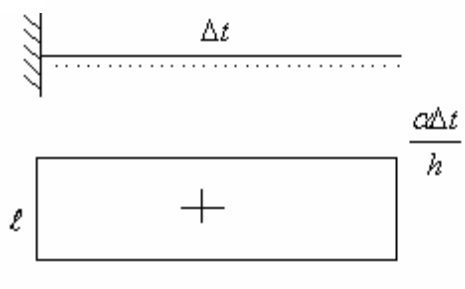
$$A = 0 + x_1A_1 + x_1A_1 + \dots + x_1A_1 = \sum_{i=1}^n x_iA_i$$

$$\delta_m = \delta_{m0} + \sum_{i=1}^n x_i\delta_{mi}$$

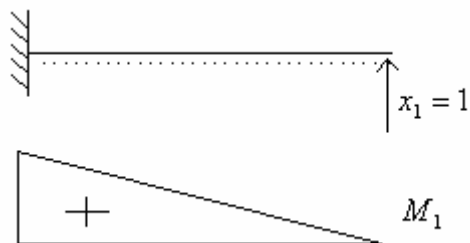
نکته:  $t_s$  فقط در خرپا نیست در هر سازه ای ممکن  $t_s$  وجود داشته باشد



مثال : مطلوبست محاسبه عکس العمل های تکیه گاهی در اثر تغییر درجه حرارت غیر یکنواخت  $\Delta t$



$$\delta_{1\Delta} = \int M_1 \frac{\alpha \Delta t}{h} dx = \frac{\ell}{2} (\ell) \frac{\alpha \Delta t}{h} = \frac{\alpha \Delta t \ell^2}{2h}$$

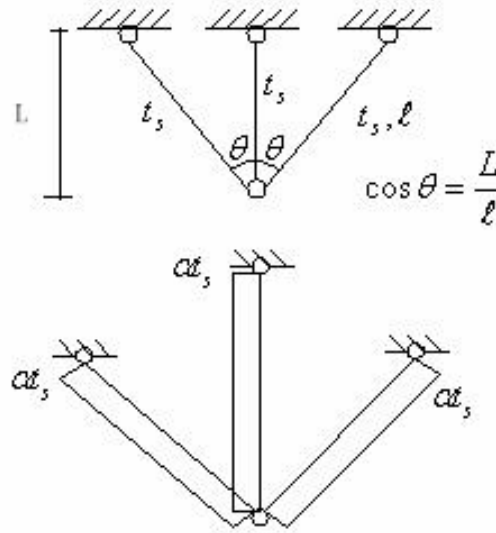


$$\delta_{11} = \frac{\ell}{3} (\ell) (\ell) \frac{1}{EI} = \frac{\ell^3}{3EI}$$

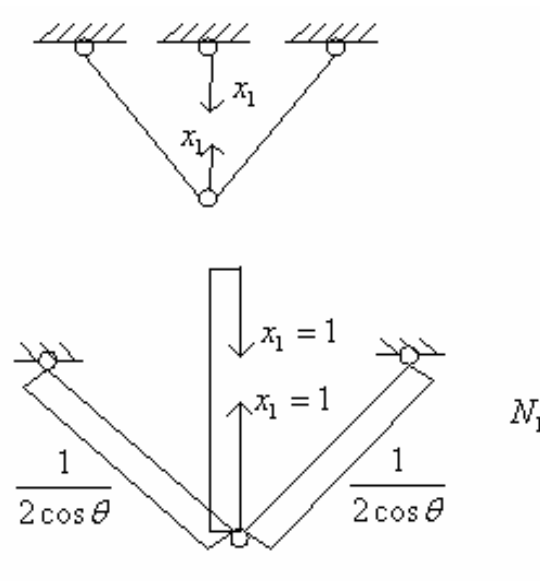
$$\delta_{11} x_1 = -\delta_{1\Delta} \Rightarrow \frac{\ell^3}{3EI} x_1 = -\frac{\alpha \Delta t \ell^2}{2h} \Rightarrow x_1 = -\frac{3EI \alpha \Delta t}{2h \ell}$$



مثال: مطلوبست حل سازه زیر تحت اثر حرارت یکنواخت نشان داده شده در روی خرپا با روش نیرو



$$\delta_{1t_s} = 2\left(-\frac{1}{2\cos\theta}\right)(\alpha_s l) + 1 * (\alpha_s)(L) = -\frac{\alpha_s l}{\cos\theta} + \alpha_s l \cos\theta$$

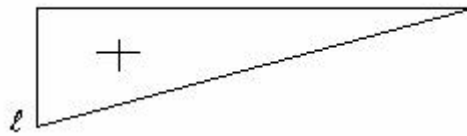
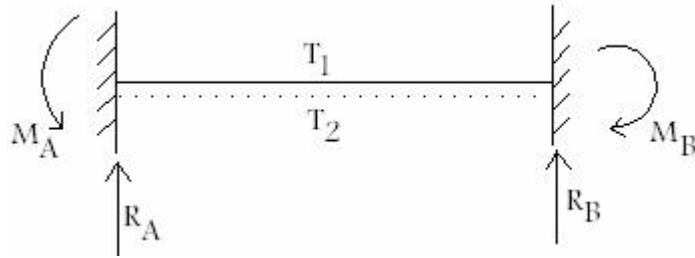


$$\delta_{11} = \int N_1^2 \frac{dx}{EA} = \sum_{i=1}^3 N_i^2 \frac{\ell_i}{EA} = 2\left(-\frac{1}{2\cos\theta}\right)\left(-\frac{1}{2\cos\theta}\right)(l) \frac{1}{EA} + 1 * 1 * \frac{l \cos\theta}{EA}$$

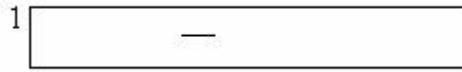
$$\Rightarrow \delta_{11} = \frac{l}{2EA \cos^2 \theta} + \frac{l \cos\theta}{EA} = \frac{l + 2l \cos^2 \theta}{2EA \cos^2 \theta}$$

$$\delta_{11} x_1 = -\delta_{1t_s} \Rightarrow \frac{l + 2l \cos^2 \theta}{2EA \cos^2 \theta} x_1 = -\left(-\frac{\alpha_s l}{\cos\theta} + \alpha_s l \cos\theta\right)$$

مثال : عكس العمل های تکیه گاهی را در اثر حرارت  $\Delta t$  پیدا کنید :  $T_2 - T_1 = \Delta t > 0$

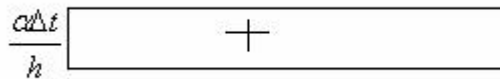


$$\delta_{11} = \frac{l}{3}(-l)(-l) = \frac{l^3}{3EI}$$



$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{l}{2}(\ell)(-1) = \frac{-l^2}{2EI}$$

$$\delta_{22} = (-1)(-1)(\ell) \frac{1}{EI} = \frac{l}{EI}$$



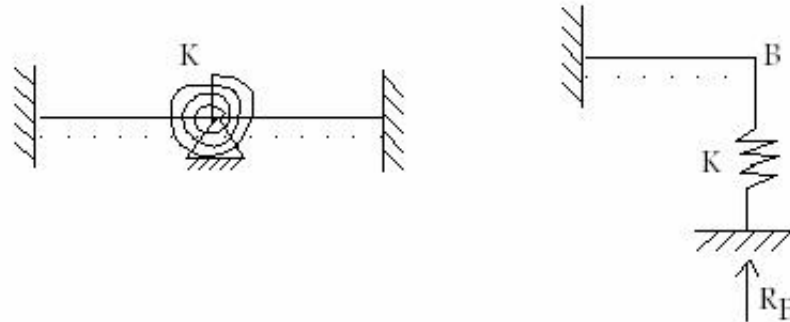
$$\delta_{1\Delta t} = \frac{l}{2}(-l)\left(\frac{\alpha\Delta t}{h}\right) = \frac{\alpha\Delta t l^2}{2h}$$

$$\delta_{2\Delta t} = (-1)\left(\frac{\alpha\Delta t}{h}\right)(\ell) = \frac{\alpha\Delta t l}{h}$$

$$\begin{cases} \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 = -\delta_{1\Delta t} \\ \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 = -\delta_{2\Delta t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{l^3}{3EI}x_1 - \frac{l^2}{2EI}x_2 = \frac{-\alpha\Delta t l^2}{2h} \\ \frac{l^2}{2EI}x_1 + \frac{l}{EI}x_2 = \frac{\alpha\Delta t l}{h} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{\alpha EI \Delta t}{h}$$

تکیه گاه ارتجاعی در سازه نا معین



$$\theta_B = \frac{M_B}{K} = \frac{X_1}{K}$$

$$\Delta_B = \frac{R_B}{K} = \frac{X_1}{K}$$

در انتخاب سازه مبنا حتما باید نیروی فنر جزو نیروهای زائد تلقی گردد. نرمی فنر  $(\frac{1}{K})$  با نرمی گره مربوطه سازه جمع می شود.

قضیه کاستلیانو

بیان قضیه دوم کاستلیانو

در سازه ارتجاعی بدون نشست و با دمای ثابت مشتق انرژی تغییر شکل نسبی (انرژی کرنشی) نسبت به نیرو برابر است با تغییر مکان

نقطه اثر نیرو در امتداد نیرو یعنی:

$$\frac{\partial u}{\partial P_n} = \delta_n \quad \text{و} \quad \frac{\partial u}{\partial M_n} = \theta_n \quad : U = f(P_n), U = f(M_n)$$

توجه: در محل محاسبه تغییر مکان یا شیب با استفاده از قضیه دوم کاستلیانو حتما باید نیرویی باشد اگر می خواهیم خیز (تغییر مکان) را حساب کنیم باید در نقطه مورد نظر P (بار) داشته باشیم و اگر می خواهیم شیب را حساب کنیم در نقطه مورد نظر باید لنگر متمرکز داشته باشیم.

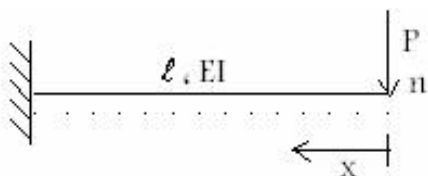
$$U = \sum \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EI} + \sum \int_0^l \frac{V^2 dx}{2GA'} + \sum \int_0^l \frac{N^2 dx}{2EA}$$

برای محاسبه  $\delta_n$  یا  $\theta_n$  کافی است U را بر حسب  $P_n$  یا  $M_n$  حساب کرده و بعد از آن نسبت به  $P_n$  یا  $M_n$  مشتق بگیریم.

نکته: در مواردی که محل محاسبه  $\delta_n$  فاقد  $P_n$  و یا محل محاسبه  $\theta_n$  فاقد  $M_n$  باشد در اولی از  $P_n$  ساختگی و در دومی از  $M_n$  ساختگی

استفاده می کنیم و پس از محاسبه مشتقات مقدار  $P_n$  یا  $M_n$  را صفر می گذاریم.

**مثال:** با استفاده از قضیه دوم کاستلیانو تغییر مکان نقطه n را محاسبه کنید.



حل: روش اول (بدون استفاده از قاعده زنجیری):

$$U = \int_0^{\ell} \frac{M^2 dx}{2EI} = \int_0^{\ell} \frac{(-Px)^2 dx}{2EI} = \frac{P^2 \ell^3}{6EI}$$

انرژی کرنشی

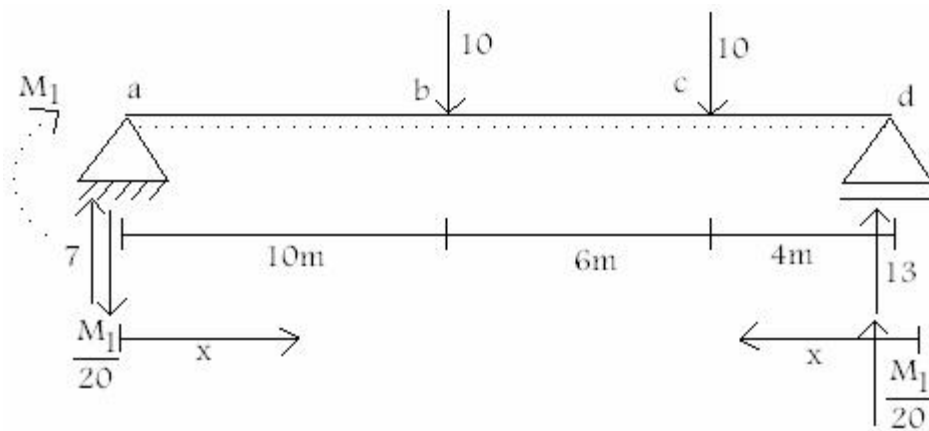
$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial P_n} = \delta_n^v = \frac{P^2 \ell^3}{6EI}$$

روش دوم (استفاده از قائده مشتق زنجیری):

$$M(x) = -Px \quad \frac{\partial M}{\partial P} = -x$$

$$\frac{\partial u}{\partial P} = \delta_n^v = \int_0^{\ell} M \cdot \frac{\partial M}{\partial P} \cdot \frac{dx}{EI} = \int_0^{\ell} (-Px)(-x) \frac{dx}{EI} = \int_0^{\ell} Px^2 dx = \frac{P\ell^3}{3EI}$$

**مثال:** با استفاده از قضیه دوم کاستلیانو مطلوبست محاسبه  $\theta_a$  (در محاسبه انرژی فقط از اثر  $M$  استفاده گردد)



حل: چون در محاسبه  $\theta$  لنگر متمرکزی وجود ندارد لنگر  $M_1$  را موقتا در آنجا وارد می کنیم:  $\frac{\partial u}{\partial M_1} = \theta_a$

$$M_{ab} = M_1 + (7 - \frac{M_1}{20})x \quad : \quad \frac{\partial M_{ab}}{\partial M_1} = (1 - \frac{1}{20})x \quad \text{(a) از مبدا چپ}$$

$$M_{cd} = (13 + \frac{M_1}{20})x \quad : \quad \frac{\partial M_{cd}}{\partial M_1} = \frac{1}{20}x \quad \text{(d) از مبدا راست}$$

$$M_{bc} = (13 + \frac{M_1}{20})x - 10(x - 4) \quad : \quad \frac{\partial M_{bc}}{\partial M_1} = \frac{1}{20}x \quad \text{(d) از مبدا راست}$$

$$\frac{\partial u}{\partial M_1} = \theta_a = \int_0^{10} \left[ M_1 + (7 - \frac{M_1}{20}) \right] * (1 - \frac{x}{20}) \frac{dx}{EI} + \int_0^4 (13 + \frac{M_1}{20})x * \frac{x}{20} * \frac{dx}{EI}$$

$$+ \int_4^{10} \left[ (13 + \frac{M_1}{20})x - 10(x - 4) \right] * \frac{x}{20} * \frac{dx}{EI}$$

در این مرحله لنگر ساختگی  $M_1$  را مساوی صفر قرار می دهیم و انتگرال ها را محاسبه می کنیم.

$$EI\theta_a = \int_0^{10} 7x(1 - \frac{x}{20})dx + \int_0^4 13(\frac{x^2}{20})dx + \int_4^{10} (3x + 40)(\frac{x}{20})dx$$

$$= (\frac{7x^2}{2} - \frac{7x^3}{60}) \Big|_0^{10} + \frac{13x^3}{60} \Big|_0^4 + (\frac{3x^3}{60} + x^2) \Big|_4^{10} = 378$$

$$\Rightarrow \theta_a = \frac{378}{EI}$$

مثال : مطلوبست محاسبه  $\theta_b$  در تیر زیر با استفاده از قضیه دوم کاستلیانو .



حل : چون در نقطه b لنگر متمرکزی نیست لنگر ساختگی  $M_b$  را وارد می کنیم :

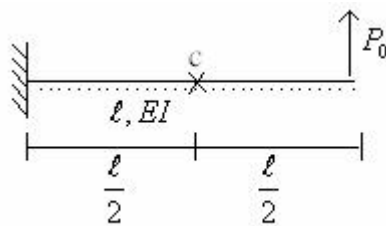
$$M(x) = \frac{M_0}{l}x - \frac{M_b}{l}x - M_0 \quad : \quad \frac{\partial M}{\partial M_b} = -\frac{x}{l}$$

$$\theta_b = \frac{\partial u}{\partial M_b} = \int_0^l M \frac{\partial M}{\partial M_b} \left(\frac{dx}{EI}\right) = \int_0^l \left(\frac{M_0}{l}x - \frac{M_b}{l}x - M_0\right) \left(-\frac{x}{l}\right) \frac{dx}{EI}$$

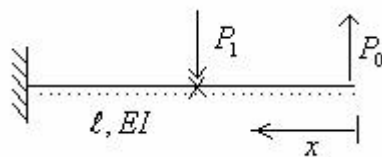
$$M_b = 0 \Rightarrow \theta_b = \int_0^l \left(\frac{M_0}{l}x - M_0\right) \left(-\frac{x}{l}\right) \frac{dx}{EI} = \left(-\frac{M_0 x^3}{3l^2} - \frac{M_0 x^2}{2l}\right) \Big|_0^l$$

$$\theta_b = \frac{M_0 l}{6EI}$$

مثال : مطلوبست محاسبه  $\delta_c^v$  با استفاده از قضیه دوم کاستلیانو



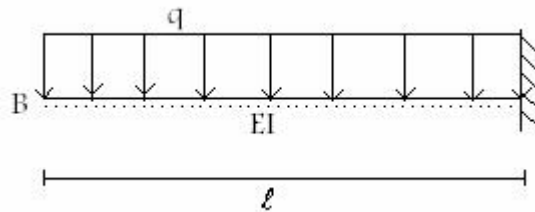
حل : چون در نقطه c بار متمرکز وجود ندارد بار متمرکز  $p_1$  را در نقطه c وارد می کنیم :



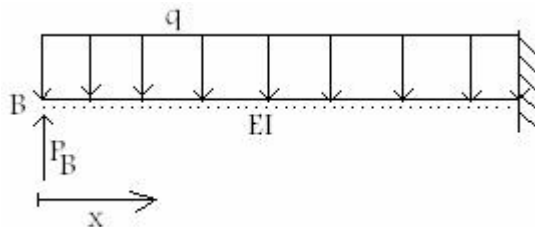
$$\begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{\ell}{2} & M_1(x) = P_0 x & : \frac{\partial M_1}{\partial P_1} = 0 \\ \frac{\ell}{2} \leq x \leq \ell & M_2(x) = P_0 x - P_1 \left(x - \frac{\ell}{2}\right) & : \frac{\partial M_2}{\partial P_1} = -\left(x - \frac{\ell}{2}\right) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \delta_c^v &= \frac{\partial u}{\partial P_1} = \int_0^{\frac{\ell}{2}} M_1 \cdot \frac{\partial M_1}{\partial P_1} \left(\frac{dx}{EI}\right) + \int_{\frac{\ell}{2}}^{\ell} M_2 \frac{\partial M_2}{\partial P_1} \left(\frac{dx}{EI}\right) \\ &= \int_0^{\frac{\ell}{2}} (P_0 x)(0) \frac{dx}{EI} + \int_{\frac{\ell}{2}}^{\ell} \left[ P_0 x - P_1 \left(x - \frac{\ell}{2}\right) \right] \left(-x + \frac{\ell}{2}\right) \frac{dx}{EI} \\ &= \int_{\frac{\ell}{2}}^{\ell} P_0 x \left(\frac{\ell}{2} - x\right) \frac{dx}{EI} + \int_{\frac{\ell}{2}}^{\ell} \left[ P_1 \left(x - \frac{\ell}{2}\right) \left(x - \frac{\ell}{2}\right) \right] \frac{dx}{EI} \\ P_1 = 0 &\Rightarrow \delta_c^v = \int_{\frac{\ell}{2}}^{\ell} P_0 x \left(\frac{\ell}{2} - x\right) \frac{dx}{EI} = \left( \frac{P_0 \ell x^2}{4} - \frac{P_0 x^3}{3} \right) \Big|_{\frac{\ell}{2}}^{\ell} \\ &\Rightarrow \delta_c^v = \frac{-5P_0 \ell^3}{48EI} \end{aligned}$$

**مثال:** در تیر طره ای مقابل مطلوبست: الف - تغییر مکان قائم نقطه B  $(\delta_B^v)$ . ب - چرخش نقطه B  $(\theta_B)$ .



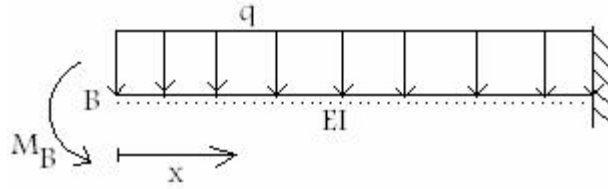
حل الف: برای محاسبه تغییر مکان قائم نقطه B، چون در نقطه B بار متمرکز وجود ندارد بار متمرکز ساختگی  $P_B$  را در نقطه B وارد می کنیم.



$$\begin{aligned} M(x) &= P_B x - \frac{qx^2}{2} & \frac{\partial M}{\partial P_B} &= x \\ \delta_B^v &= \frac{\partial u}{\partial P_B} = \int M \cdot \frac{\partial M}{\partial P_B} \cdot \frac{dx}{EI} = \int_0^{\ell} \left( P_B x - \frac{qx^2}{2} \right) (x) \cdot \frac{dx}{EI} = -\frac{q\ell^4}{8EI} \end{aligned}$$

علامت منفی نشان می دهد که تغییر مکان نقطه B در خلاف جهت نیروی  $P_B$  می باشد

حل ب: چون در نقطه B لنگر متمرکزی وجود ندارد لنگر متمرکز ساختگی  $M_B$  را در نقطه B وارد می کنیم



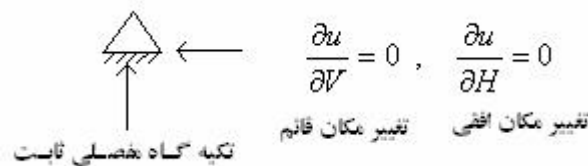
$$M(x) = -\frac{qx^2}{2} - M_B \quad ; \quad \frac{\partial M}{\partial M_B} = -1$$

$$\theta_B = \frac{\partial u}{\partial M_B} = \int M \frac{\partial M}{\partial M_B} \left(\frac{dx}{EI}\right) = \int_0^l \left(-\frac{qx^2}{2} - \overset{0}{M_B}\right)(-1) \frac{dx}{EI} = \frac{q\ell^3}{6EI}$$

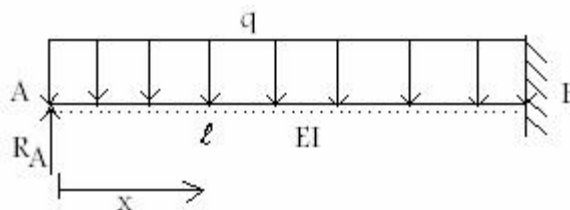
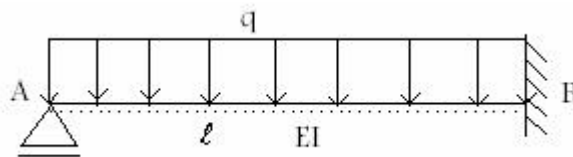
بنابراین با قضیه دوم کاستلیانو می توان تغییر مکان هر نقطه دلخواه دیگری را در صورتی که بار متمرکز نداشته باشد با وارد کردن بار متمرکز ساختگی محاسبه کرد .

### اصل کار کمینه

برای حل سازه های نامعین کاربرد دارد که بعد از انتخاب سازه مبنا مشتق انرژی کرنشی را نسبت به نیروهای تکیه گاهی حذف شده می گیریم . اگر مشتق انرژی کرنشی نسبت به واکنش قائم تکیه گاه غلطکی محاسبه شود مقدار آن حتما صفر است چون جابجایی در راستای قائم ندارد همچنین اگر مشتق انرژی کرنشی نسبت به لنگر تکیه گاه گیردار محاسبه شود حتما صفر خواهد بود .



**مثال:** واکنش های تکیه گاهی تیر زیر را با استفاده از قضیه دوم کاستلیانو ( اصل کار کمینه ) تعیین کنید .



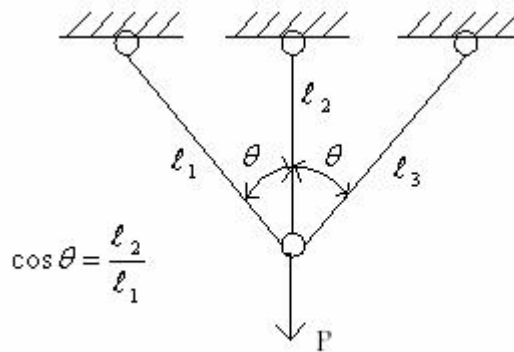
$$M(x) = R_A x - \frac{qx^2}{2} \quad ; \quad \frac{\partial M(x)}{\partial R_A} = x$$

$$\delta_A = \frac{\partial u}{\partial R_A} = 0 \Rightarrow \delta_A = \int_0^\ell M \cdot \frac{\partial M}{\partial R_A} \left( \frac{dx}{EI} \right) = \int_0^\ell \left( R_A x - \frac{qx^2}{2} \right) (x) \frac{dx}{EI} = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^\ell \left( R_A x^2 - \frac{qx^3}{2} \right) \frac{dx}{EI} = \frac{R_A \ell^3}{3EI} - \frac{q \ell^4}{8EI} = 0 \Rightarrow R_A = \frac{3}{8} q \ell$$

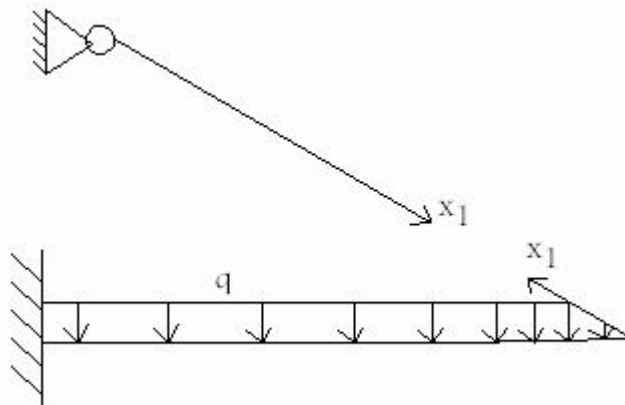
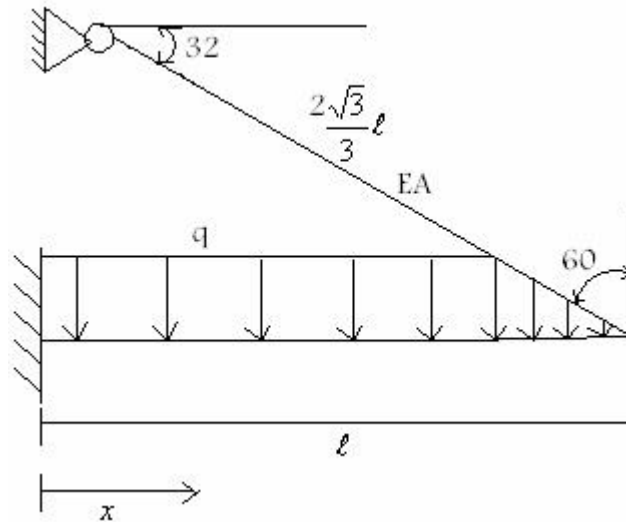
$$\text{پردازش ثانوی} : \sum F_y = 0 \Rightarrow R_B = \frac{5}{8} q \ell$$

**تمرین:** نیروی داخلی میله وسط را در خرابای زیر با استفاده از اصل کار کمینه محاسبه کنید





مثال: نیروی کابل BC را در سازه زیر حساب کنید (با استفاده از قضیه دوم کاستلیانو)



$$M(x) = -\frac{qx^2}{2} + x_1 \sin 30^\circ * x \Rightarrow M(x) = -\frac{qx^2}{2} + \frac{x_1}{2} \quad \frac{\partial M(x)}{\partial x_1} = \frac{x}{2}$$

$$N = x_1 \quad \frac{\partial N}{\partial x_1} = 1$$

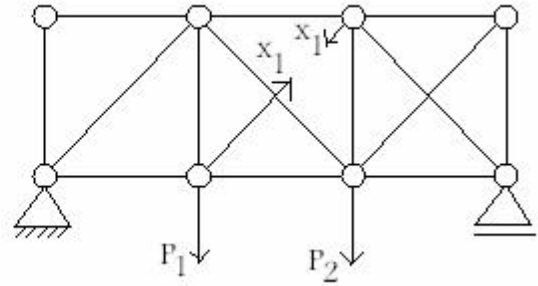
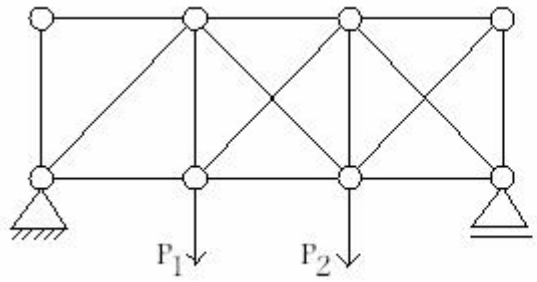
$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow \int_0^\ell M \frac{\partial M}{\partial x_1} \left(\frac{dx}{EI}\right) + \int_0^{\frac{2\sqrt{3}}{3}\ell} N \frac{\partial N}{\partial x_1} \left(\frac{dx}{EA}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^\ell \left(-\frac{qx^2}{2} + \frac{x_1}{2}x\right) \left(\frac{x}{2}\right) \frac{dx}{EI} + \int_0^{\frac{2\sqrt{3}}{3}\ell} x_1(1) \frac{dx}{EA} = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^\ell -\frac{qx^3}{4} \left(\frac{dx}{EI}\right) + \int_0^\ell \frac{x_1}{4} x^2 \left(\frac{dx}{EI}\right) + \int_0^{\frac{2\sqrt{3}}{3}\ell} x_1 \frac{dx}{EA} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{-q\ell^4}{16EI} + \frac{x_1\ell^3}{12EI} + \frac{x_1(2\sqrt{3}\ell)}{3EA} = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{\frac{q\ell^4}{16EI}}{\frac{\ell^3}{12EI} + \frac{(2\sqrt{3}\ell)}{3EA}}$$

در اصل کار کمینه اگر سازه یک درجه نامعین باشد :

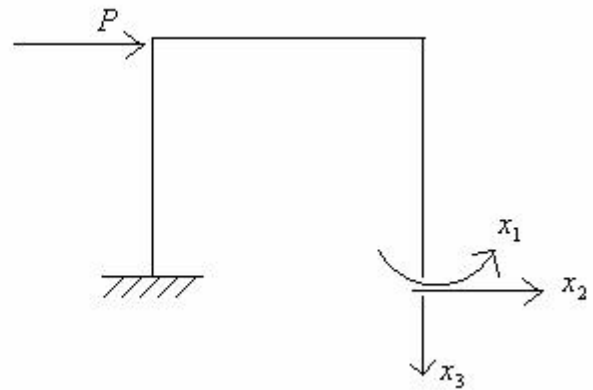
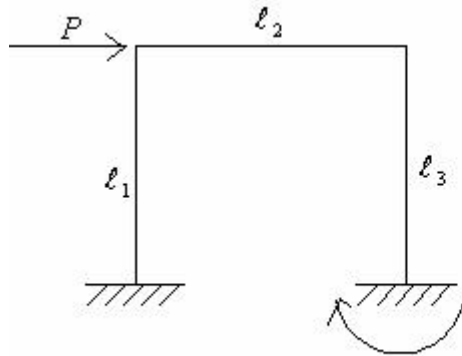


نیروهای داخلی خرابا بر حسب  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $x_1$  بدست می آید .

$x_1$  محاسبه می شود

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{14} N_i \cdot \frac{\partial N_i}{\partial x_1} \left( \frac{l_i}{EA} \right) = 0$$

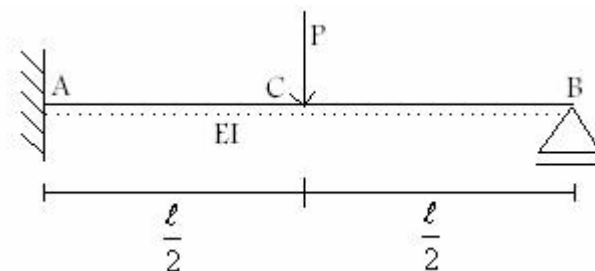
و اگر سازه سه درجه نامعین باشد :



با حل سه معادله سه مجهولی مقادیر  $x_1$  و  $x_2$  و  $x_3$  بدست می آید

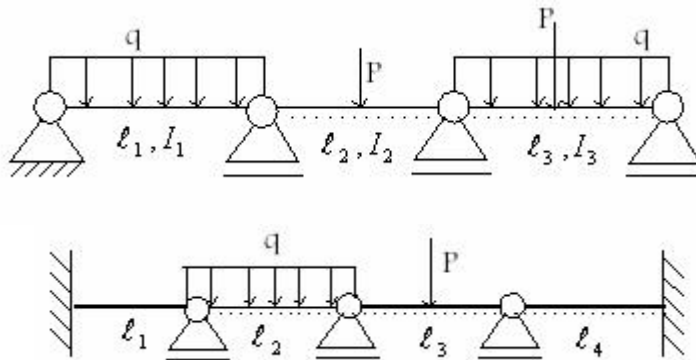
$$\left[ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow \int M \cdot \frac{\partial M}{\partial x_1} \left( \frac{dx}{EI} \right) = 0 \quad (1) \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow \int M \cdot \frac{\partial M}{\partial x_2} \left( \frac{dx}{EI} \right) = 0 \quad (2) \\ \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0 \Rightarrow \int M \cdot \frac{\partial M}{\partial x_3} \left( \frac{dx}{EI} \right) = 0 \quad (3) \end{array} \right.$$

**تمرین :** عکس العمل تکیه گاه B را در سازه نامعین زیر با استفاده از اصل کار کمینه محاسبه نمایید .

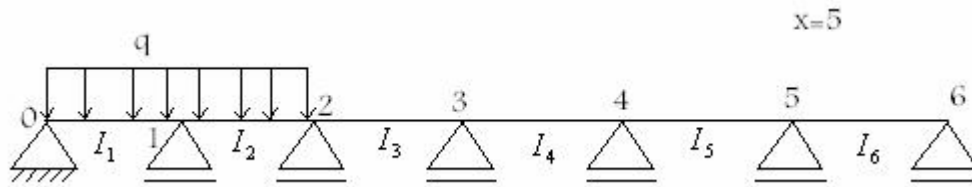


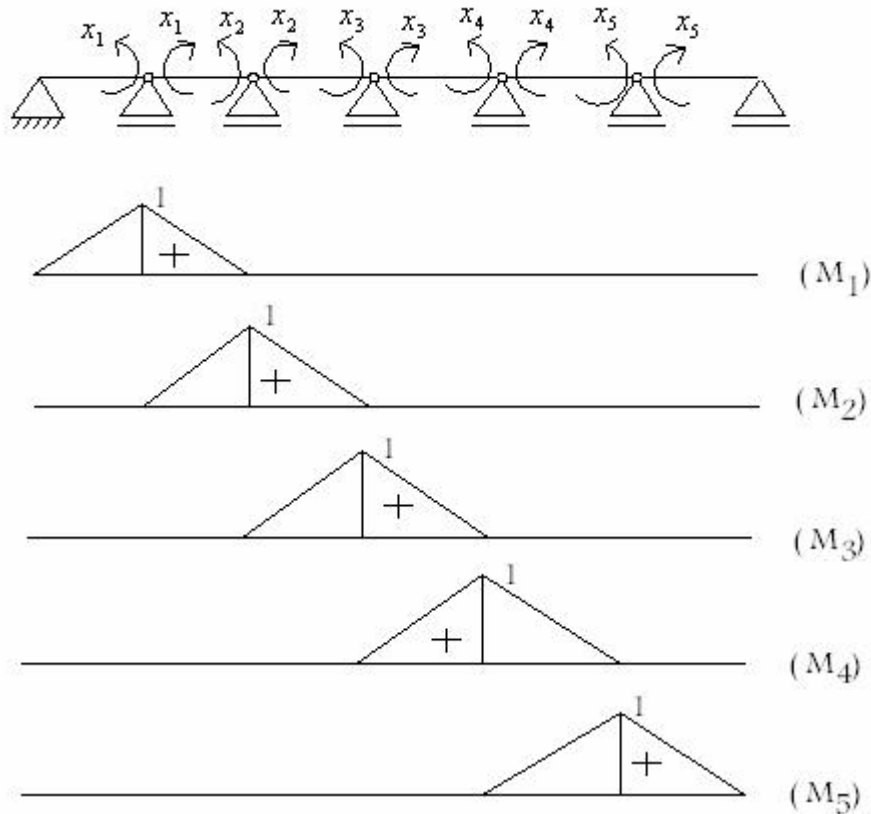
### قضیه سه لنگر ( ساده سازی روش نیرو برای تیرهای سراسری )

این روش همان روش نیرو است که برای سادگی و سهولت کاربرد معادلات آن به صورت خاصی در آمده است سازه مبنای این روش که معمولا برای حل تیرهای سرتاسری غیر مفصلی بکار می رود از طریق اعمال مکانیزم لنگر خمشی ( مفصل ) در تکیه گاه های میانی تیر سرتاسری به وجود می آید در هر معادله از معادلات سه لنگر حداکثر سه جمله موجود می باشد .  
 برای تیرهای منحنی قضیه سه لنگر بکار نمی رود در این روش ارتفاع تمام تکیه گاه ها یکسانند یعنی تمام تکیه گاه ها در یک تراز قرار دارند ممان اینرسی در طول یک دهانه بایستی ثابت باشد ولی می تواند در دهانه های مختلف فرق کند .  
 مجهولات روش سه لنگر خمشی ، تکیه گاه های میانی تیرهای سرتاسری و گاهی هم لنگر تکیه گاه گیردار انتهایی می باشد .  
 مثال هایی از سازه هایی که می توانند با روش سه لنگر حل شوند :



بدست آوردن معادلات سه لنگر از روش نیرو :





طرف راست را نمی توانیم بصورت یک رابطه در آوریم بلکه بصورت یک رابطه و جدول در می آوریم چون برای طرف راست بارگذاری لازم است و بارگذاری ها نیز متفاوت می باشند .

برای تیری که فقط دارای بار خارجی باشد چپ و راست معادلات سه لنگر برابر است با :

$$M_{i-1}l'_i + 2M_i(l'_i + l'_{i+1}) + M_{i+1}l'_{i+1} = -(R_i l'_i + L_{i+1} l'_{i+1})$$

جدول  $R, L$  برای انواع بارگذاری ها در پیوست آخر کتاب

### معادلات سه لنگر در حالت نشست تکیه گاهی

$$M_{i-1}l'_i + 2M_i(l'_i + l'_{i+1}) + M_{i+1}l'_{i+1} = 6EI_c \left( -c_{i-1} \frac{1}{l_i} + c_i \left( \frac{1}{l_i} + \frac{1}{l_{i+1}} \right) - c_{i+1} \frac{1}{l_{i+1}} \right)$$

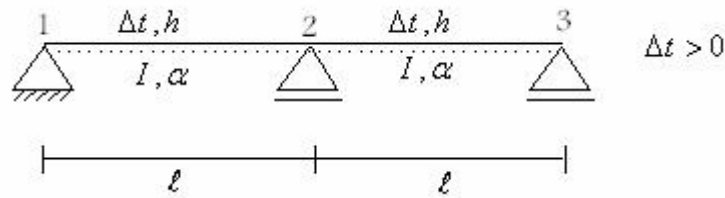
توجه : نشست به طرف پایین مثبت می باشد ( در فرمول بالا ) و اگر نشست رو به بالا باشد تغییر علامت می دهیم .

توجه : در صورتی که به همراه بارگذاری نشست هم داشته باشیم طرف راست معادلات شامل طرف راست مربوط به بارگذاری و طرف راست مربوط به نشست خواهد بود .

### معادلات سه لنگر در حالت وجود $\Delta t$

$$M_{i-1}\ell'_i + 2M_i(\ell'_i + \ell'_{i+1}) + M_{i+1}\ell'_{i+1} = -3EI_c\alpha\left(\frac{\Delta t_i\ell_i}{h_i} + \frac{\Delta t_{i+1}\ell_{i+1}}{h_{i+1}}\right)$$

مثال : مطلوبست محاسبه  $M_2$  و رسم دیاگرام خمشی تیر در اثر  $\Delta t$  با استفاده از معادلات سه لنگری .



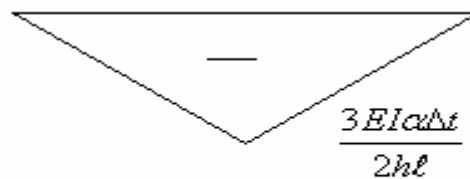
$$\overbrace{M_1}^0\ell + 2M_2(\ell + \ell) + \overbrace{M_3}^0\ell = -3EI\alpha\left(\frac{\Delta t\ell}{h} + \frac{\Delta t\ell}{h}\right)$$

$$\Rightarrow M_2 = \frac{-3EI\alpha\Delta t\ell}{2h}$$

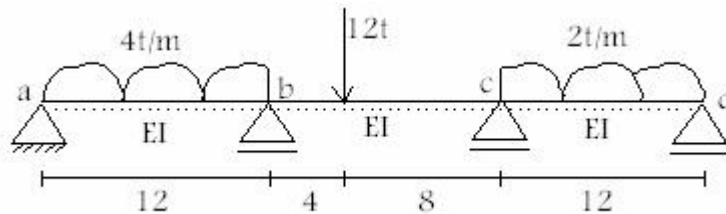
$$R_1 = R_3 = \frac{M}{\ell}$$

از معادلات تعادل :

$$\Rightarrow R_1 = R_3 = \frac{3EI\alpha\Delta t}{2h\ell}$$



مثال : لنگر خمشی در مقاطع b و c را به روش سه لنگری محاسبه کنید .



حل :  $I_c = I \Rightarrow \ell' = \ell$

$$\overbrace{M_a}^0\ell'_{ab} + 2M_b(\ell'_{ab} + \ell'_{bc}) + M_c\ell'_{bc} = -(R_{ab}\ell'_{ab} + L_{bc}\ell'_{bc})$$

$$\text{I معادله : } \Rightarrow 2M_b(12 + 12) + M_c(12) = -\left[\frac{1}{4}(4)(12)^2(12) + \frac{12 \cdot 8 \cdot 4}{12^2}(8 + 12)(12)\right]$$

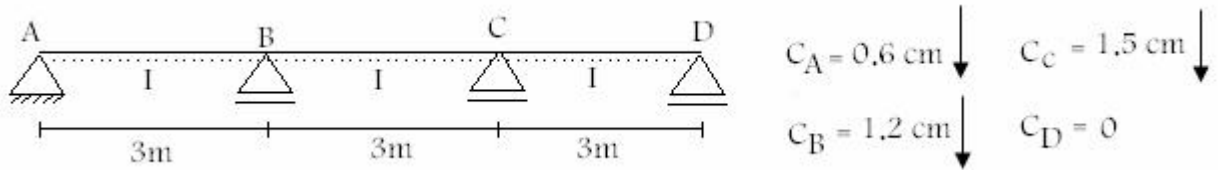
$$\Rightarrow 48M_b + 12M_c = -2368 \quad (\text{I})$$

$$\text{(II) معادله : } M_b\ell'_{bc} + 2M_c(\ell'_{bc} + \ell'_{cd}) + \overbrace{M_d}^0\ell'_{cd} = -(R_{bc}\ell'_{bc} + L_{cd}\ell'_{cd})$$

$$\Rightarrow 12M_b + 3M_c = -13.76 \quad (\text{II})$$

با حل دو معادله (I) و (II)،  $M_b$  و  $M_c$  بدست می آید.

**مثال:** مطلوبست محاسبه لنگر تکیه گاه های B و C در اثر نشست های داده شده (به روش سه لنگری).



حل:

$$\overbrace{M_A \ell'_{AB}}^0 + 2M_B(\ell'_{AB} + \ell'_{BC}) + M_C \ell'_{BC} = 6EI \left[ -C_A \frac{1}{\ell_{AB}} + C_B \left( \frac{1}{\ell_{AB}} + \frac{1}{\ell_{BC}} \right) - C_C \frac{1}{\ell_{BC}} \right]$$

$$\Rightarrow 12M_B + 3M_C = 0.006EI \quad (I)$$

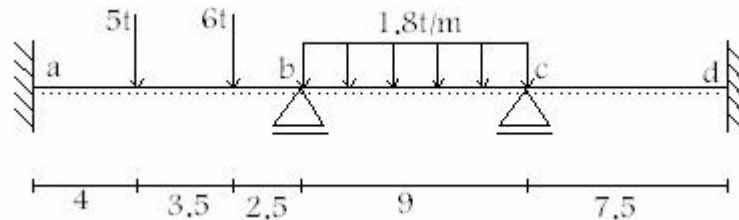
$$M_B \ell'_{BC} + 2M_C(\ell'_{BC} + \ell'_{CD}) + \overbrace{M_D \ell'_{CD}}^0 = 6EI \left[ -\frac{C_B}{\ell_{BC}} + C_C \left( \frac{1}{\ell_{BC}} + \frac{1}{\ell_{CD}} \right) - \frac{C_D}{\ell_{CD}} \right]$$

$$\Rightarrow 3M_B + 13.2M_C = 0.0312EI \quad (II)$$

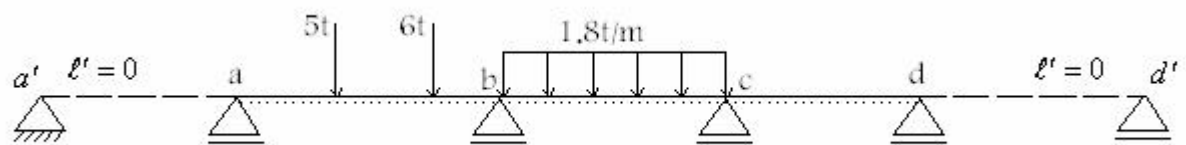
$$\begin{cases} 12M_B + 3M_C = 0.006EI \\ 3M_B + 13.2M_C = 0.0312EI \end{cases} \Rightarrow M_B = -9.6385 \cdot 10^{-5} EI, \quad M_C = 2.385 \cdot 10^{-3} EI$$

**تمرین:** مثال قبل را به روش نیرو حل کرده و جواب های بدست آمده را مقایسه کنید.

**مثال:** مقادیر لنگر نقاط a, b, c, d را به روش سه لنگری محاسبه کنید.



حل:



$I_C = I \Rightarrow \ell' = \ell$  : ممان اینرسی همه دهانه ها یکسان است.

$$\overbrace{M_a}'_{aa'} + 2M_a(\overbrace{\ell'_{aa'}}^0 + \ell'_{ab}) + M_b \ell'_{ab} = -(R_{aa'} \overbrace{\ell'_{aa'}}^0 + L_{ab} \ell'_{ab})$$

$$\Rightarrow 20M_a + 10M_b = -\left[ \frac{5 \cdot 6 \cdot 4}{10^2} (6+10) + \frac{6 \cdot 7.5 \cdot 2.5}{10^2} (7.5+10) \right] * 10$$

$$\Rightarrow 20M_a + 10M_b = -332.6 \quad (I)$$

$$M_a \ell'_{ab} + 2M_b(\ell'_{ab} + \ell'_{bc}) + M_c \ell'_{bc} = -(R_{ab} \ell'_{ab} + L_{bc} \ell'_{bc})$$

$$\Rightarrow 10M_a + 2M_b(10+9) + 9M_c = \left[ \frac{5 \cdot 6 \cdot 4}{10^2} (4+10) + \frac{6 \cdot 7.5 \cdot 2.5}{10^2} (7.5+10) \right] * 10 + \frac{1}{4} * 1.8 * 9^2 * 9$$

$$\Rightarrow 10M_a + 2M_b(10+9) + 9M_c = -692.83 \quad (II)$$

$$M_b \ell'_{bc} + 2M_c(\ell'_{bc} + \ell'_{cd}) + M_d \ell'_{cd} = -(R_{bc} \ell'_{bc} + L_{cd} \ell'_{cd})$$

$$\Rightarrow 9M_b + 2M_c(9+7.5) + 7.5M_d = -\left(\frac{1}{4} * 1.8 * 9^2 * 9 + 0\right)$$

$$\Rightarrow 9M_b + 33M_c + 7.5M_d = -328.05 \quad (III)$$

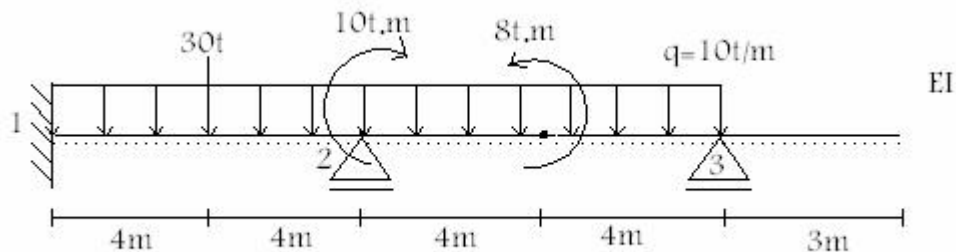
$$M_c \ell'_{cd} + 2M_d(\ell'_{cd} + \ell'_{dd}) + M_d \ell'_{dd} = 0$$

$$\Rightarrow 7.5M_c + 15M_d = 0 \quad (IV)$$

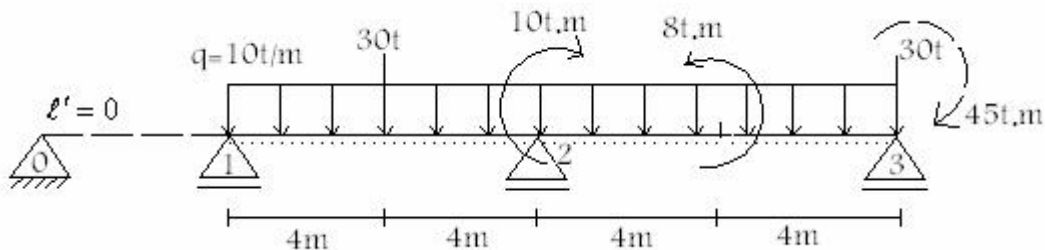
با حل معادلات چهار مجهولی :

$$\begin{cases} M_a = -9.58 \text{ t.m} & M_c = -6.87 \text{ t.m} \\ M_b = -14.1 \text{ t.m} & M_d = +3.44 \text{ t.m} \end{cases}$$

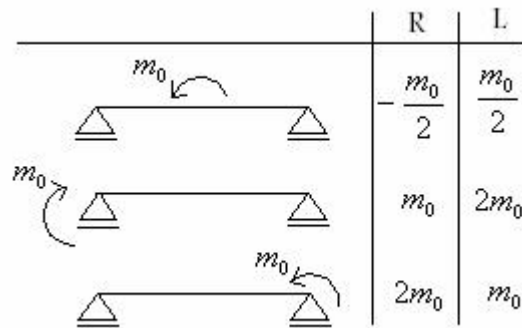
کاربرد روش سه لنگری در حالت وجود لنگر متمرکز گرهی در تیرهای سرتاسری



حل: حذف طره و حذف اثر آن



لنگر 45 t.m فقط در طرف چپ به عنوان m معلوم وارد معادله می گردد (در طرف راست یعنی R, L نقشی ندارد)  
لنگر خارجی روی تکیه گاه 2 را می توان به دهانه ی چپ یا دهانه راست داد ما آن را به دهانه راست داده ایم.



$$m_0(\ell' = 0) + 2m_1(0 + 8) + m_2(8) = - \left[ (0 + 0 + \frac{3}{8}(30 * 8) * 8) + 10 * \frac{8^2}{4} * 8 \right]$$

$$16m_1 + 8m_2 = -720 - 1280 = -2000 \quad (I)$$

$$m_1(8) + 2m_2(8 + 8) + m_3(8) = - \left[ \underbrace{\left( \frac{3}{8} * 30 * 8 * 8 * 8 + 10 * \frac{8^2}{4} * 8 + (2 + 10) * 8 + \frac{8}{2} * 8 \right)}_{\frac{3}{8}PL} + \frac{10 * 8^2}{4} * 8 \right]$$

$$8m_1 + 32m_2 = -3112 \quad (II)$$

$$\begin{cases} 2m_1 + m_2 = -250 \\ m_1 + 4m_2 = -389 \end{cases} \Rightarrow m_1 = -88t.m, \quad m_2 = -74.6t.m$$

## روش لنگر سطح

### قضیه اول لنگر سطح

اختلاف شیب مماس های رسم شده بر منحنی الاستیک تیر ( منحنی ارتجاعی تیر یا منحنی خیز تیر یا منحنی تغییر مکان تیر ) در دو

نقطه A و B برابر است با مساحت زیر دیاگرام  $\frac{M}{EI}$  در بازه A تا B .

به شرط اینکه در بازه A تا B مفصل یا عوامل دیگر ناپیوستگی وجود نداشته باشد :

$$\Delta\theta = \theta_B - \theta_A = \int_{x_A}^{x_B} \frac{M}{EI} dx$$

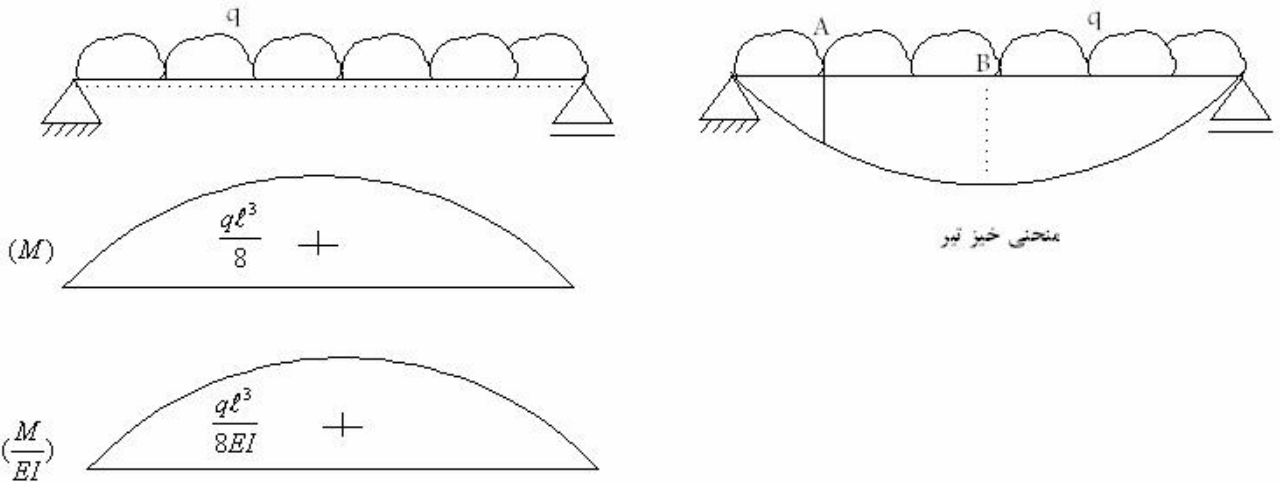
مساحت زیر دیاگرام  $\frac{M}{EI}$  در بازه A تا B

لازم به تذکر است که زاویه  $\theta_{B/A}$  و مساحت زیر دیاگرام  $\frac{M}{EI}$  دارای علامت یکسانی هستند به عبارت دیگر یک سطح مثبت ( سطحی که

در بالای محور X ها قرار دارد ) دلالت بر این دارد که وقتی از A به B حرکت می کنیم مماس مرسوم بر منحنی خیز تیر در خلاف جهت عقربه های ساعت دوران می کند . و یک سطح منفی نشان دهنده دوران در جهت حرکت عقربه های ساعت است .

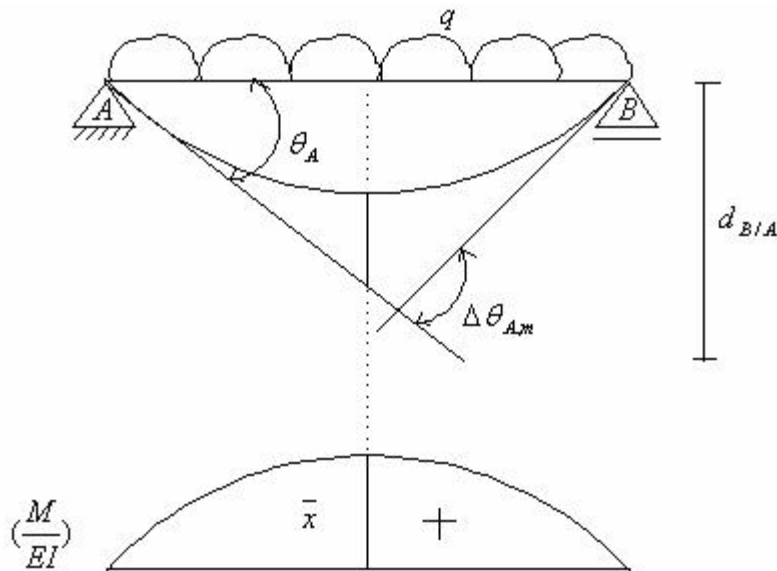
زاویه ای است که باید مماس در نقطه A بچرخد تا بر مماس در نقطه B منطبق گردد .





### قضیه دوم لنگر سطح

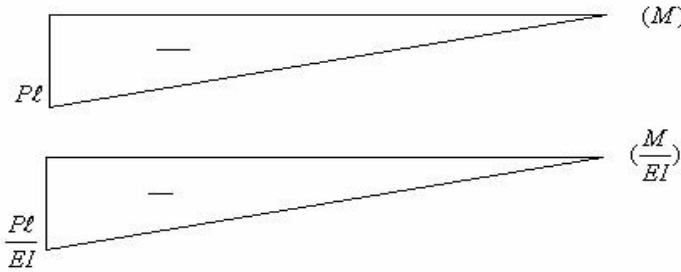
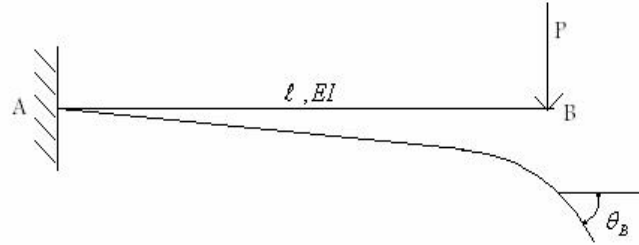
انحراف نقطه B از خط یا منحنی الاستیک تیر نسبت به مماس رسم شده در A (که با  $d_{B/A}$  نشان می دهند) برابر است با ممان استاتیک زیر نمودار  $\frac{M}{EI}$  در بازه A تا B نسبت به محوری که در B مستقر است به شرط اینکه بین A و B عوامل ناپیوستگی مانند مفصل موجود نباشد.



$$d_{B/A} = \bar{x} \cdot \int_A^B \frac{M}{EI} dx = \int x dA \quad d_{m/A} = \bar{x}_1 \cdot \int_A^m \frac{M}{EI} dx = \int x dA$$

$$mZ = Am \cdot \theta, \quad \delta_m = mZ - d_{m/A} \quad \Rightarrow \quad \delta_m = Am \cdot \theta - \int_A^m \frac{M}{EI} dx \cdot \bar{x}_1$$

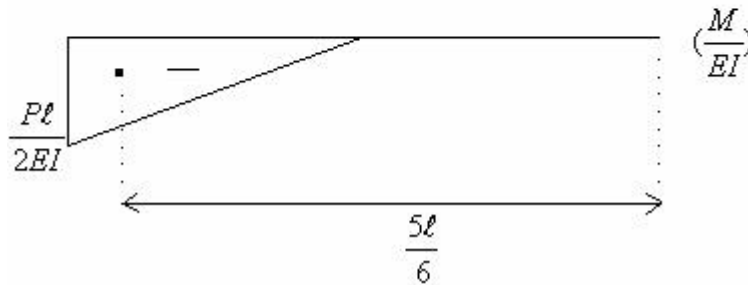
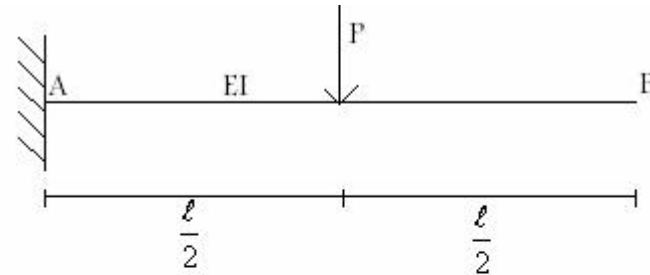
**مثال:** مطلوبست محاسبه  $\theta_B$  در تیر طره ای زیر با استفاده از روش لنگر سطح.



حل: علامت دیاگرام  $\frac{M}{EI}$  منفی است بنابراین  $\theta_B$  بزرگتر است:

$$\theta_B = \overset{0}{\theta_A} + \Delta\theta_{A,B} \Rightarrow \theta_B = \Delta\theta_{A,B} = \frac{1}{2}(\ell)\left(\frac{P\ell}{EI}\right) = \frac{P\ell^2}{2EI}$$

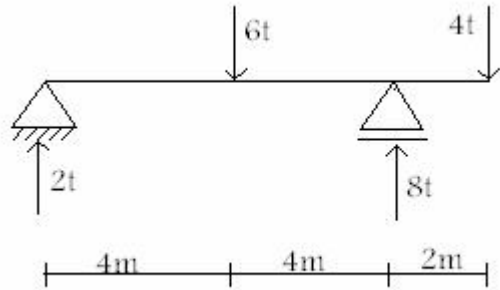
مثال: تغییر مکان قائم نقطه B را در تیر زیر با روش لنگر سطح محاسبه کنید.



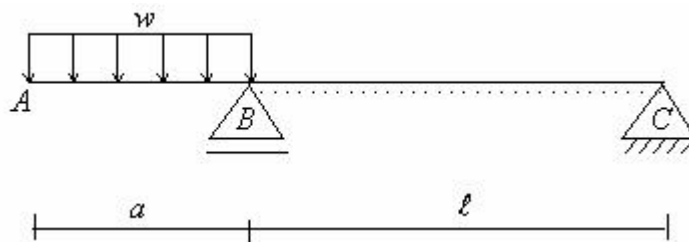
حل:

$$\delta_B = d_{B/A} = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{P\ell}{2EI}\right)\left(\frac{\ell}{2}\right)\left(\frac{5\ell}{6}\right) \Rightarrow \delta_B = \frac{5P\ell^3}{48EI}$$

تمرین: تغییر مکان قائم نقطه C و شیب نقطه C را بروش لنگر سطح محاسبه نمایید.

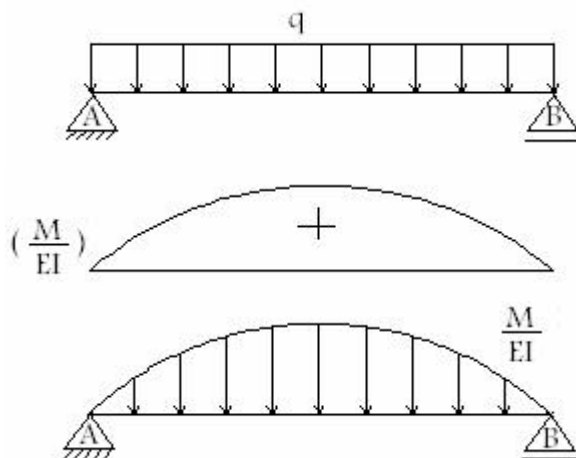


تمرین : خیز نقطه A را بر روش لنگر سطح محاسبه نمایید .



### روش بار الاستیک ( محاسبه تغییر مکان تیر ساده )

- در این روش که برای تیرهای ساده به کار می رود نمودار  $\frac{M}{EI}$  را رسم کرده و با توجه به علامت آن ( $\frac{M}{EI}$  مثبت را با فلش رو به پایین و  $\frac{M}{EI}$  منفی را با فلش رو به بالا) در روی تیر فرضی قرار می دهیم تیر فرضی با بار الاستیک خاصیت های مهم زیر را شامل می شود:
- 1- شیب در هر نقطه از تیر اصلی برابر است با نیروی برشی تیر فرضی در همان نقطه از تیر فرضی وقتی که تحت اثر بار الاستیک ( $\frac{M}{EI}$ ) قرار دارد
  - 2- خیز در هر نقطه از تیر اصلی برابر است با لنگر خمشی تیر فرضی در همان نقطه وقتی که تحت اثر بار الاستیک قرار دارد
- باید دقت کنیم که تکیه گاه ها در تیر فرضی همان تکیه گاه ها در تیر اصلی است ولی نیروهای عکس العمل تکیه گاهی در تیر فرضی باید دوباره محاسبه شود .



$$\sum M_B = 0 \Rightarrow R_A \ell - \int_A^B \frac{M}{EI} dx \cdot s' = 0$$

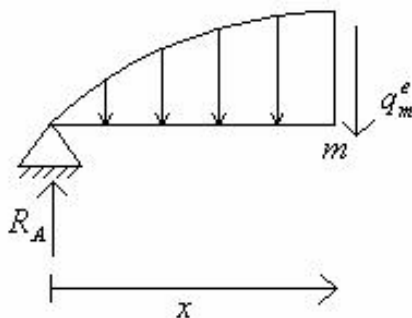
$$\Rightarrow R_A = \frac{1}{\ell} \int_A^B \frac{M}{EI} s' dx = \frac{1}{\ell} d_{B/A} = \theta_A$$

$s'$ : فاصله مرکز سطح تا نقطه B

$$\Rightarrow R_A^e = \theta_A$$

جهت بار الاستیک رو به پایین است زیرا علامت  $\frac{M}{EI}$  مثبت است.

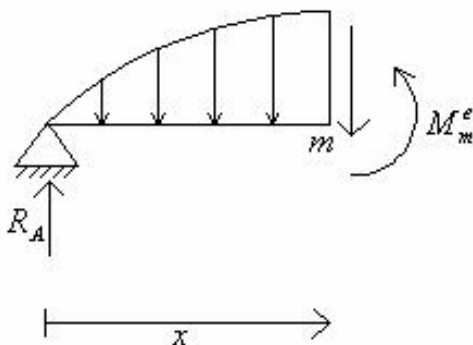
محاسبه نیروی برشی در تیر فرضی در فاصله  $x$  از سمت چپ:



$$q_m^e = R_A - \int_A^m \frac{M}{EI} dx = \theta_A - \Delta \theta_{A,m} = \theta_m$$

$$\Rightarrow q_m^e = \theta_m$$

محاسبه لنگر خمشی در تیر فرضی در فاصله  $x$  از سمت چپ:



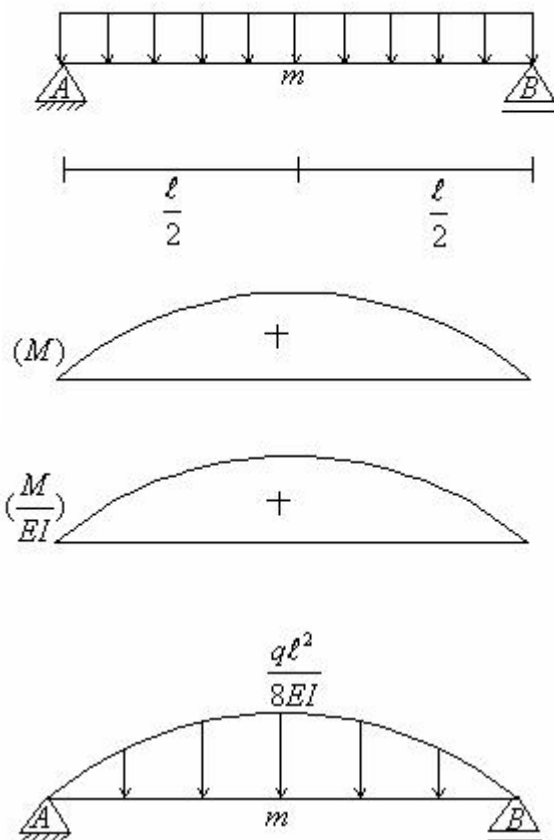
$$M_m^e = R_A x - \int_A^m \frac{M}{EI} dx \cdot s' = \theta_A x - d_{m/A} = \delta_m$$

$M_m^e$ : لنگر الاستیک نقطه m

$$\Rightarrow M_m^e = \delta_m$$

یعنی خیز در هر نقطه از تیر مانند نقطه m برابر است با لنگر خمشی تیر فرضی در همان نقطه وقتی که تحت اثر بار الاستیک قرار دارد.

مثال: با استفاده از روش بار الاستیک  $\theta_B, \theta_A, \delta_m$  را محاسبه کنید.



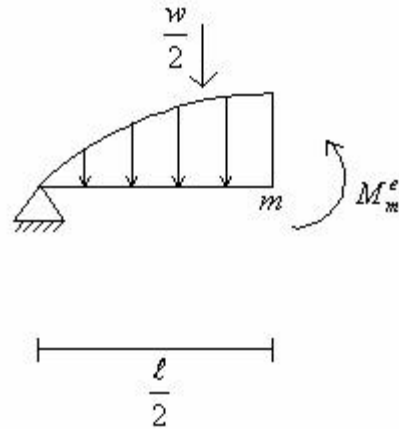
حل : (1) محاسبه  $\theta_A$  : روش اول :  $\theta_A = R_A^e = \frac{1}{2} \left( \frac{2}{3} * \frac{q\ell^2}{8EI} * \ell \right) = \frac{q\ell^3}{24EI}$

روش دوم :  $\sum M_B = 0 \Rightarrow R_A^e * \ell - \frac{q\ell}{2} = 0 \Rightarrow R_A^e = \frac{1}{\ell} * \frac{w\ell}{2} = \frac{w}{2} = \frac{q\ell^3}{24EI}$

$W = \frac{2}{3} \ell * \frac{q\ell^2}{8EI} = \frac{q\ell^3}{12EI}$  : کل بار می باشد که برابر مساحت زیر نمودار بار گذاری در تیر فرضی است :

(2) محاسبه  $\theta_B$  :  $\theta_B = q_B^e = R_A^e - w = \frac{q\ell^3}{24EI} - \frac{q\ell^3}{12EI} = -\frac{q\ell^3}{24EI}$

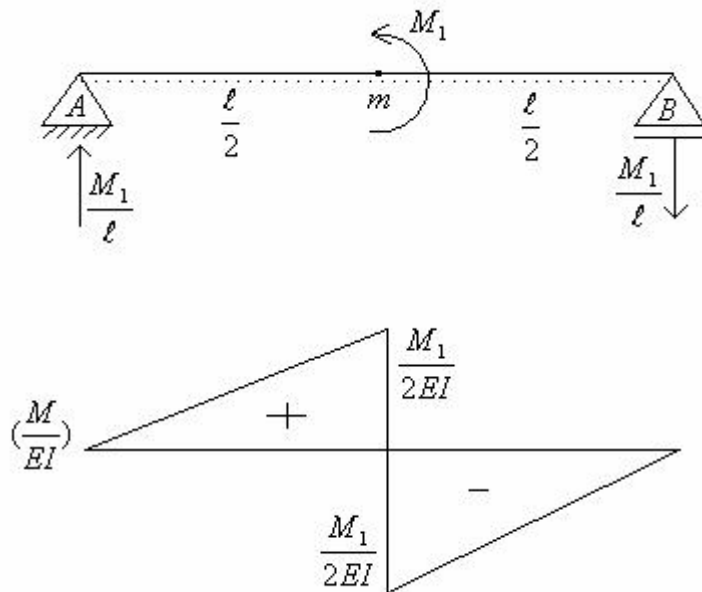
(3) محاسبه  $\delta_m$  :

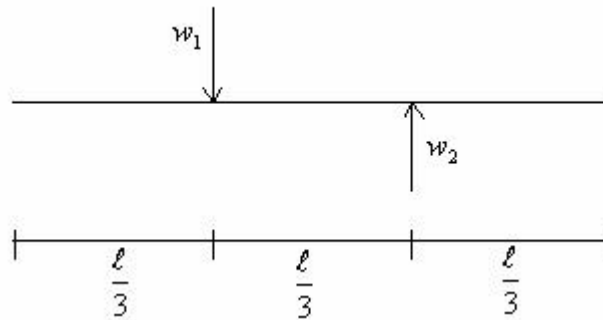
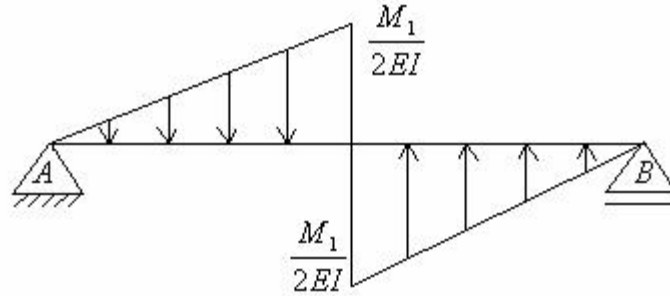


$$\delta_m = M_m^e = R_A^e * \frac{l}{2} - \frac{w}{2} \left( \frac{3}{16} l \right) = \frac{4l^3}{24EI} * \frac{l}{2} - \frac{1}{2} \left( \frac{ql^3}{12EI} \right) \left( \frac{3}{16} ql \right)$$

$$\Rightarrow \delta_m = \frac{5ql^4}{384EI}$$

مثال : مطلوبست محاسبه  $\delta_m$  ,  $\theta_m$  در محل اثر لنگر متمرکز با روش بار الاستیک .





حل :

$$w_1 = w_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{l}{2} \right) \left( \frac{M_1}{2EI} \right) = \frac{M_1 l}{8EI}$$

$$\theta_A = R_A^e = q_A^e = \frac{1}{l} \left( \frac{M_1 l}{3EI} * \frac{2}{3} l - \frac{M_1 l}{8EI} * \frac{1}{3} l \right)$$

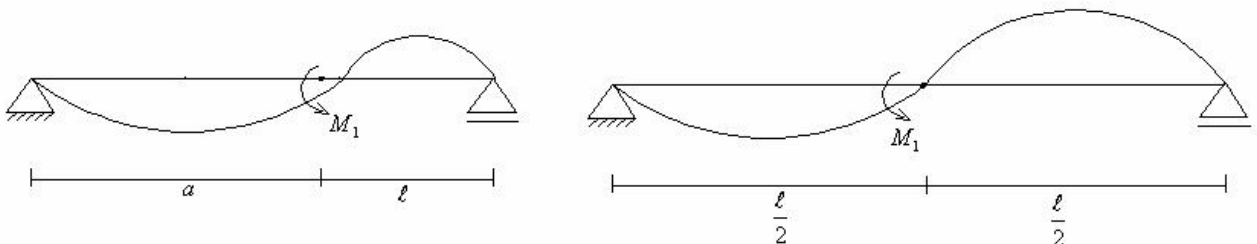
$$\Rightarrow \theta_A = \frac{M_1 l}{24EI}$$

$$\theta_B = R_B^e = q_B^e = R_A^e + w_1 - w_2 = \frac{M_1 l}{24EI}$$

$$\delta_m = M_m^e = \frac{M_1 l}{24EI} * \frac{l}{2} - \frac{M_1 l}{8EI} * \frac{l}{6} = 0 \Rightarrow \delta_m = 0$$

$$\theta_m = q_m^e = R_A^e - w_1 = \frac{M_1 l}{24EI} - \frac{M_1 l}{8EI} = -\frac{M_1 l}{12EI}$$

نکته : تغییر مکان زیر لنگر متمرکز  $M_1$  وقتی که لنگر  $M_1$  در وسط دهانه تیر واقع می شود برابر صفر است و اگر  $M_1$  در وسط دهانه نباشد تغییر مکان زیر لنگر  $M_1$  مخالف صفر خواهد بود .

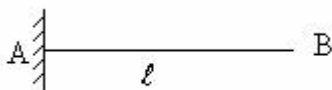




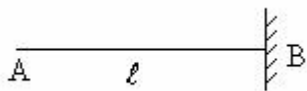
### روش تیر مزدوج یا تیر فرضی

تیر فرضی باید تیری باشد که از نظر شرایط مرزی وقتی که تحت بار الاستیک قرار می گیرد با تیر اصلی مطابقت ویژه داشته باشد طبق روش بار الاستیک می دانیم که اگر در تیر فرضی در یک نقطه تحت بار الاستیک برش وجود داشته باشد در تیر اصلی در همان نقطه شیب وجود خواهد داشت و اگر در تیر فرضی در یک نقطه تحت بار الاستیک لنگر وجود داشته باشد در تیر اصلی در همان نقطه خیز وجود خواهد داشت پس در هنگام انتخاب تیر فرضی باید شرایط مرزی تیر اصلی را در نظر بگیریم مثلا اگر در تیر اصلی در نقطه ای شیب و خیز وجود داشته باشد باید در تیر فرضی در همان نقطه برش و خمش وجود نداشته باشد.

**مثال:** تیر مزدوج تیر طره ای مقابل را تعیین کنید.



حل: در نقطه A خیز و شیب وجود ندارد پس باید در تیر فرضی در نقطه A لنگر و برش وجود نداشته باشد چنین شرایطی فقط در نوک آزاد رخ می دهد. در نقطه B خیز و شیب وجود دارد پس برای تامین چنین شرایطی باید در تیر فرضی در نقطه B لنگر و برش وجود داشته باشد در نتیجه تیر فرضی به صورت زیر خواهد شد.



نمونه هایی از تیر مزدوج برای انواع تیرها در زیر آمده است.

تیر حقیقی



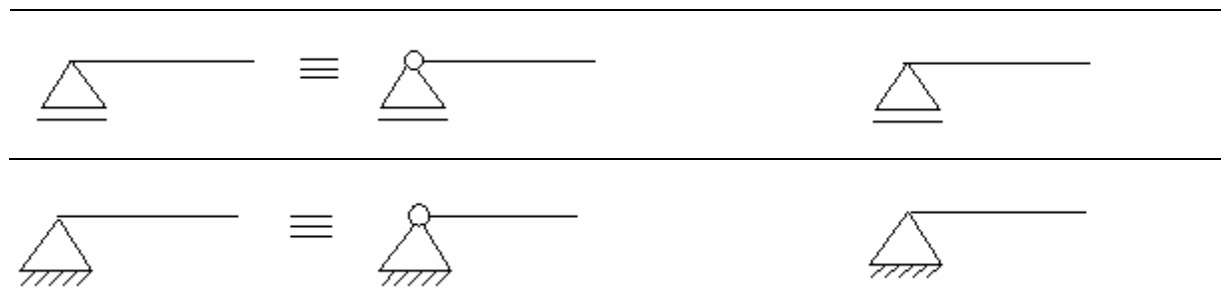
تیر فرضی (مزدوج)

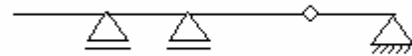
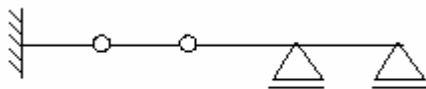
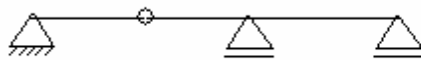
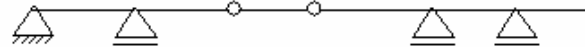
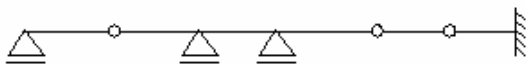
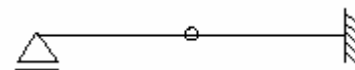
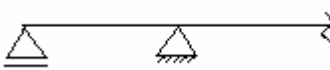
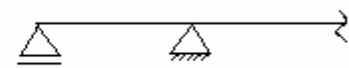
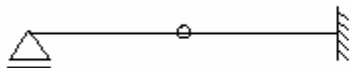
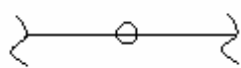
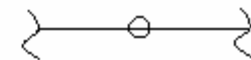
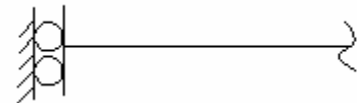
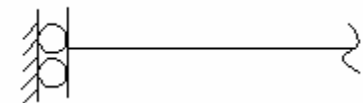
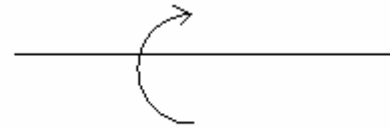
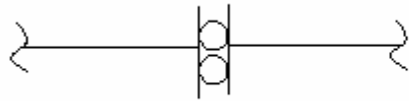
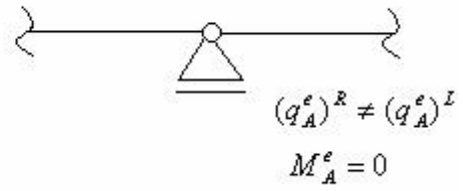
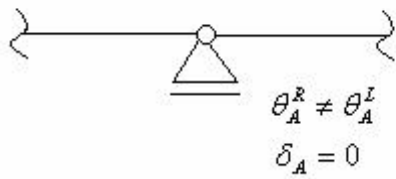
$$q_A^e = 0$$

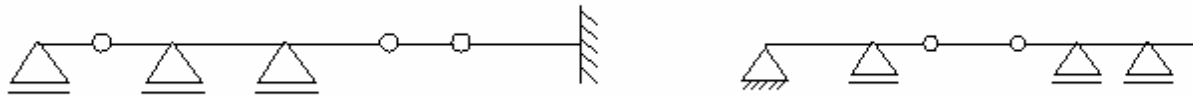
$$M_A^e = 0$$

$$q_B^e \neq 0$$

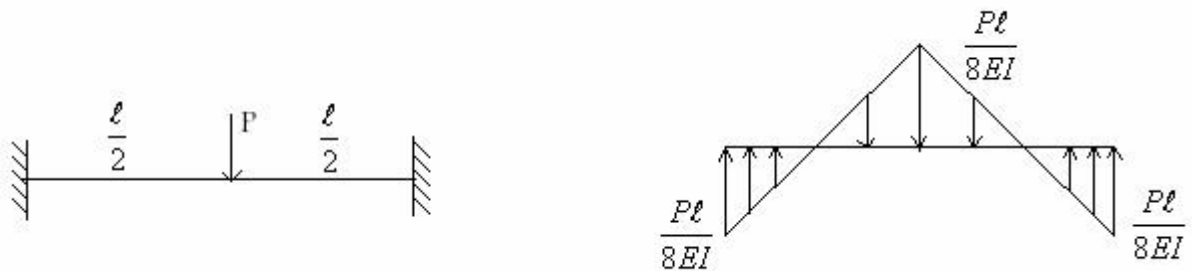
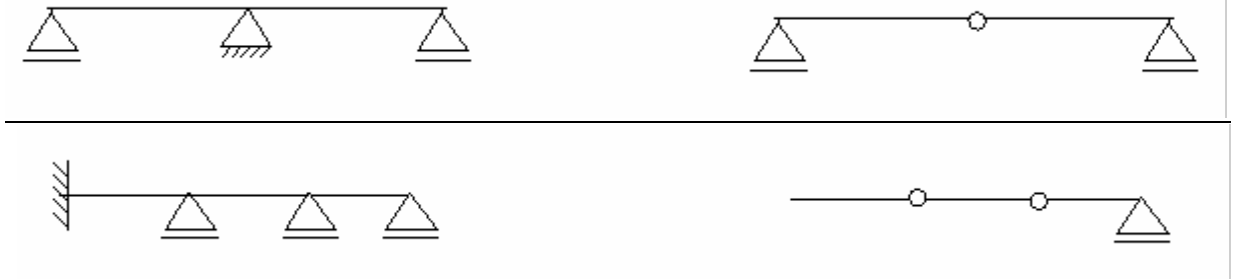
$$M_B^e \neq 0$$





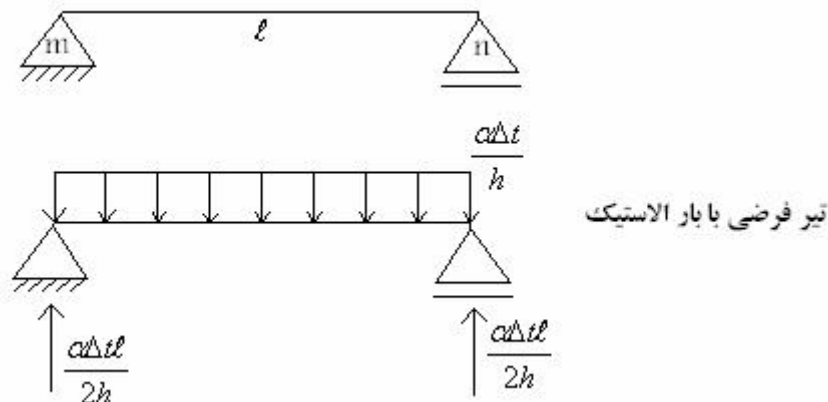


نمونه ای از تیرهای نامعین



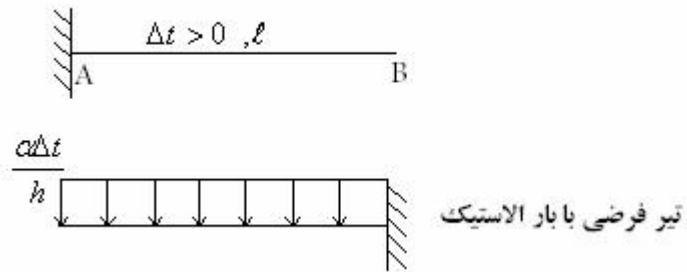
استفاده از روش تیر فرضی وقتی سازه معین دارای تغییر حرارت ( $\Delta t$ ) باشد

می دانیم  $\frac{\alpha \Delta t}{h} = \frac{M}{EI}$  ، با توجه به این نکته بار الاستیک در هنگامی که سازه تحت اثر حرارت  $\Delta t$  تغییر شکل می دهد و ما می خواهیم تغییر شکل های آن را محاسبه نماییم . اگر بخواهیم از روش تیر فرضی این تغییر شکل ها را محاسبه کنیم در این صورت بار الاستیک قرار گرفته بر روی تیر فرضی ، همان دیاگرام  $\frac{\alpha \Delta t}{h}$  می باشد و بقیه مراحل همان مراحل محاسبه شیب و خیز در هنگام بارگذاری می باشد .  
**مثال :** مطلوبست محاسبه  $\theta_n$  ,  $\theta_m$  در سازه زیر در اثر  $\Delta t > 0$  باروش بار الاستیک .



$$\theta_m = R_m^e = \frac{\alpha \Delta t \ell}{2h} \quad , \quad \theta_n = R_n^e = \frac{\alpha \Delta t \ell}{2h}$$

**مثال:** خیز و شیب انتهای تیر طره ای را در اثر  $\Delta t > 0$  به روش بار الاستیک محاسبه نمایید.



$$\delta_B = M_B^e = \left(\frac{\alpha \Delta t}{h}\right)(\ell)\left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{\alpha \Delta t \ell^3}{2h}$$

$$\theta_B = q_B^e = \left(\frac{\alpha \Delta t}{h}\right)(\ell) = \frac{\alpha \Delta t \ell}{h}$$