جزوه

تحلیل تیر

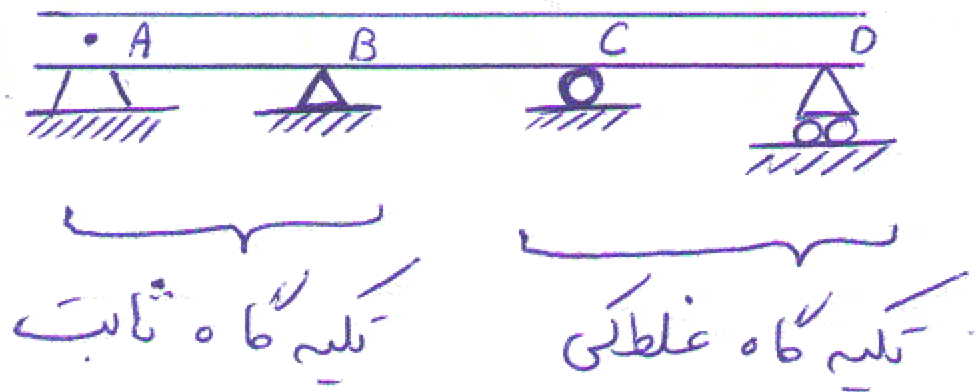
استاتیک

نویسنده

روح الله افشارپور

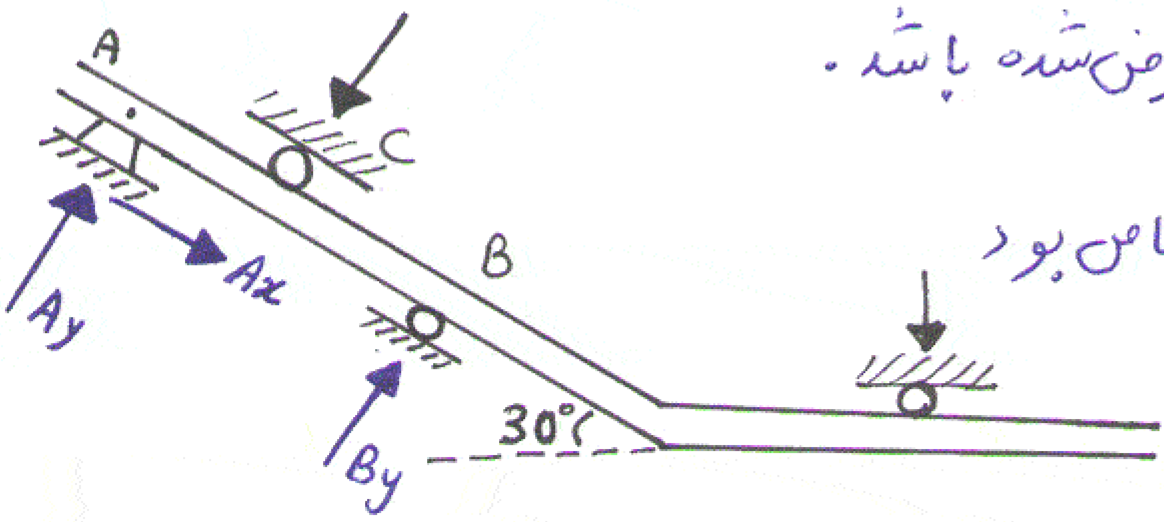
WWW.AFSHARPOUR.IR

انواع تکیه گاه ها :



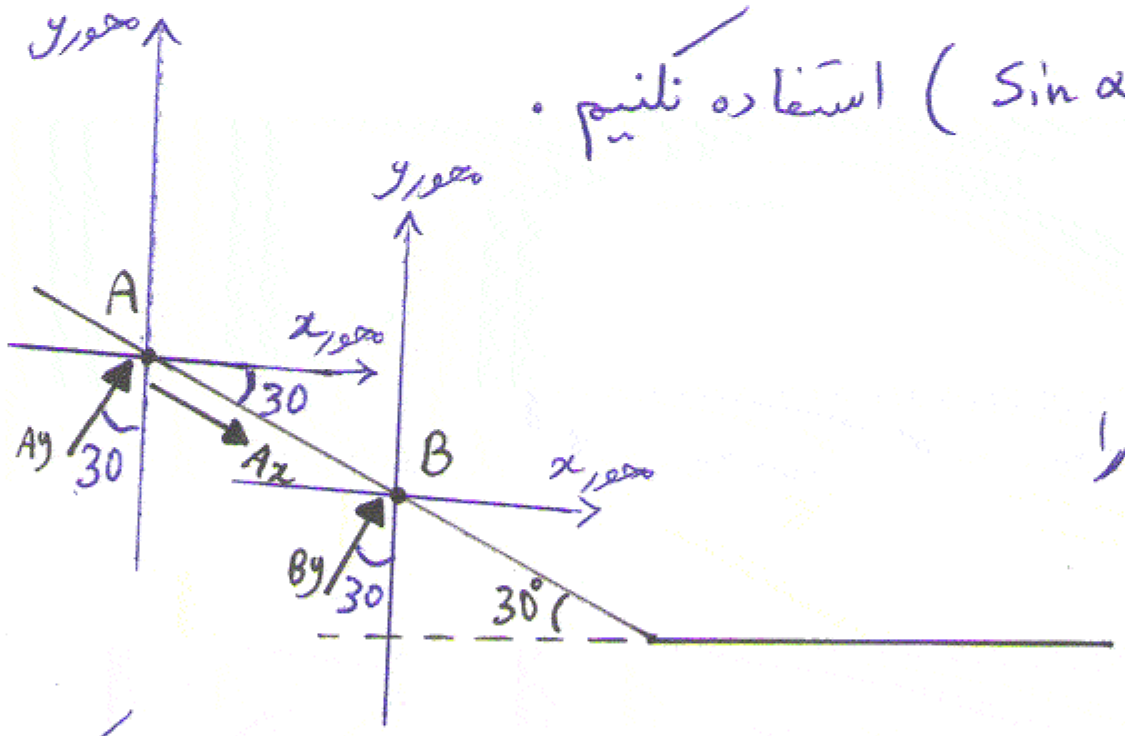
تکیه گاه های غلطکی یک نیروی مجهول دارند که عمود بر سطح قاعده تکیه گاه است و تکیه گاه های ثابت دو نیروی مجهول دارند که عمود و در امتداد سطح قاعده آنهاست

* نکته: جهت نیروهای مجهول به شرایط مسئله بستگی دارد و ما می توانیم به هر جهتی آن را لحاظ کنیم ولی بعد از بدست آوردن مقدار مجهول اگر مقدار منفی شد جهت را برعکس می کنیم و اگر مثبت بدست آمد یعنی جهت فرض شده در ابتدا درست بوده حتی اگر به سمت چپ یا پایین فرض شده باشد.



* نکته * اگر تکیه گاه در مکانی با زاویه خاص بود می بایست عکس العمل ها را بررسی محورهای x و y (x, y) تجزیه کنیم، تا بتوانیم در مجموع نیروهای عمودی $\sum F_y$ و

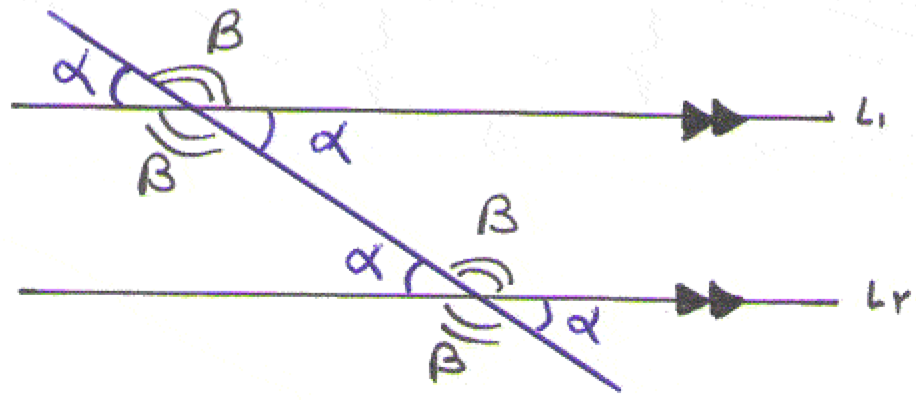
مجموع نیروهای افقی $\sum Fx$ به کار ببریم. و در مجموعه گشتاور $\sum M$ حول یک نقطه‌ی خاص دیگر از زاویه ($\sin\alpha$) استفاده نکنیم.



در این مثال می بایست عکس العمل ها را به روی محورهای افقی x و عمودی y بیاوریم، به همین دلیل با استفاده از قوانین زیر زوایا را تشخیص می دهیم و تجزیه می کنیم:

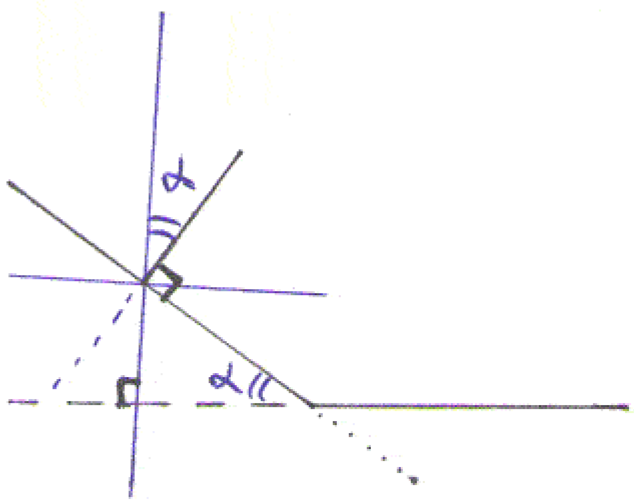
قانون اول: خط مورب گذرنده از خطوط موازی، زاویه های مساوی ایجاد می کند؛

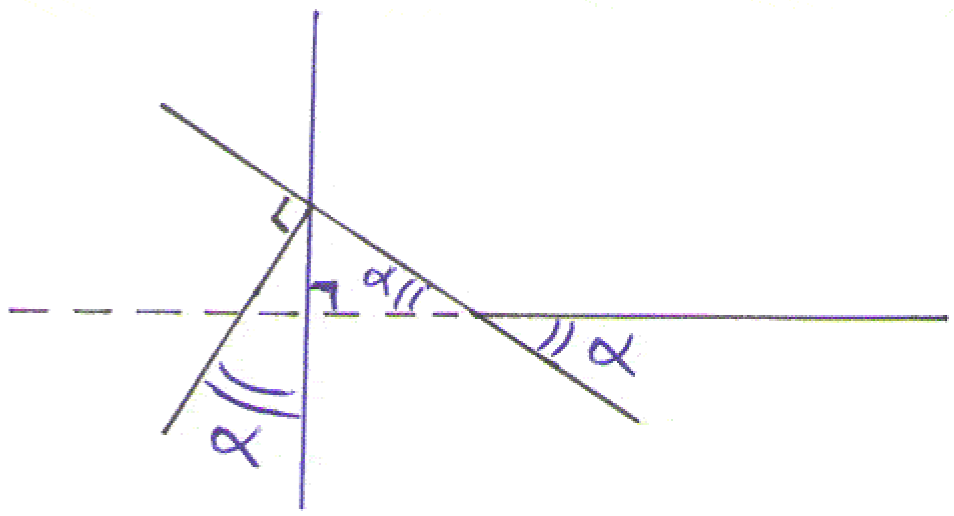
L_1 و L_2 موازی اند



همچنین و زاویه‌ی متقابل به رأس نیز همیشه با هم برابرند مثل β و β — α و α.

قانون دوم: اگر دو خط عمود بر هم با دو خط عمود بر هم دیگر همچون شکل زیر به هم برسند زاویه ای مساوی می سازند؛

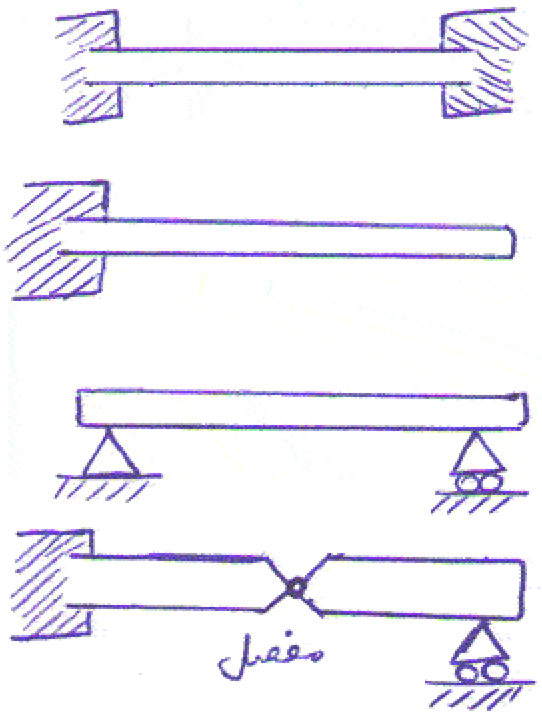




انواع تیرها :

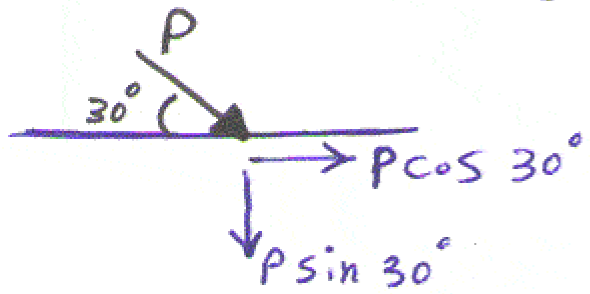
چند نمونه از تیرهای مختلف :

- تیر دو سر گیردار ←
- تیر طره ای ←
- تیر ساده ←
- تیر مرکب ←



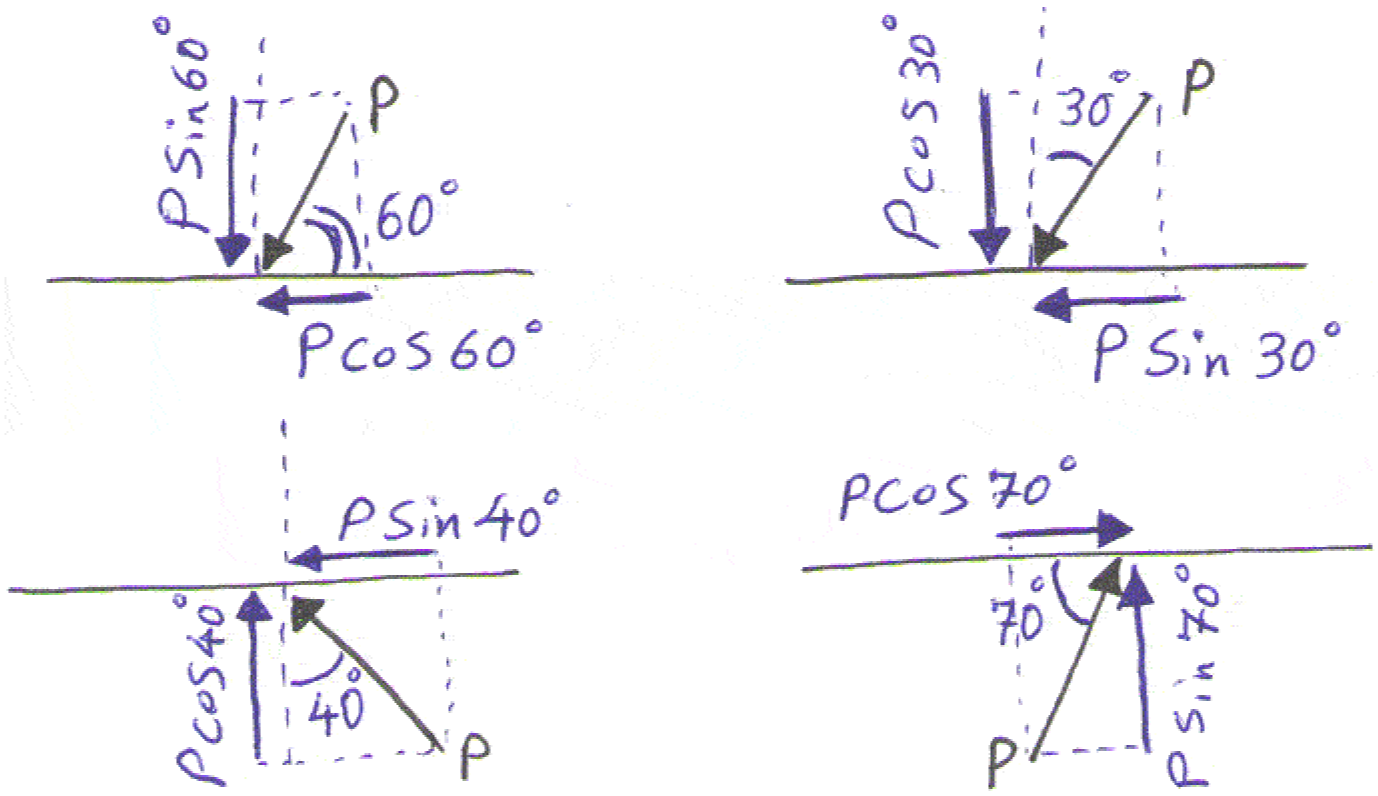
* انواع بارگذاری :

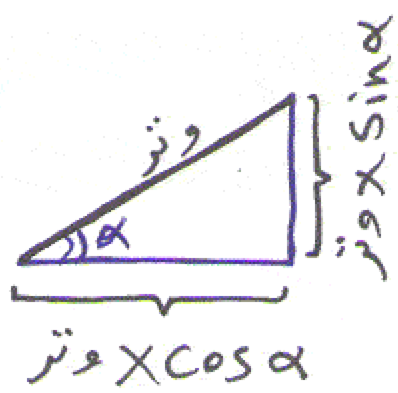
در تیرهای مختلف بارها یا بصورت متمرکز داده می شوند یا گسترده. تنها نکته درباره ی این است که اگر یک بار متمرکز بصورت مورب بر تیر وارد شد می بایست آنرا بروی تیر تجزیه کرد. به طور مثال نیروی مورب روبرو به سادگی درجهت افق و عمود تجزیه می شود



*نکته در تجزیه *

همیشه در یک مثلث ضلع مجاور به زاویه (α) $\underline{Cos(\alpha)}$ دارد و ضلع مقابل (غیر مجاور) همیشه $\underline{Sin(\alpha)}$ دارد؛ مثال :

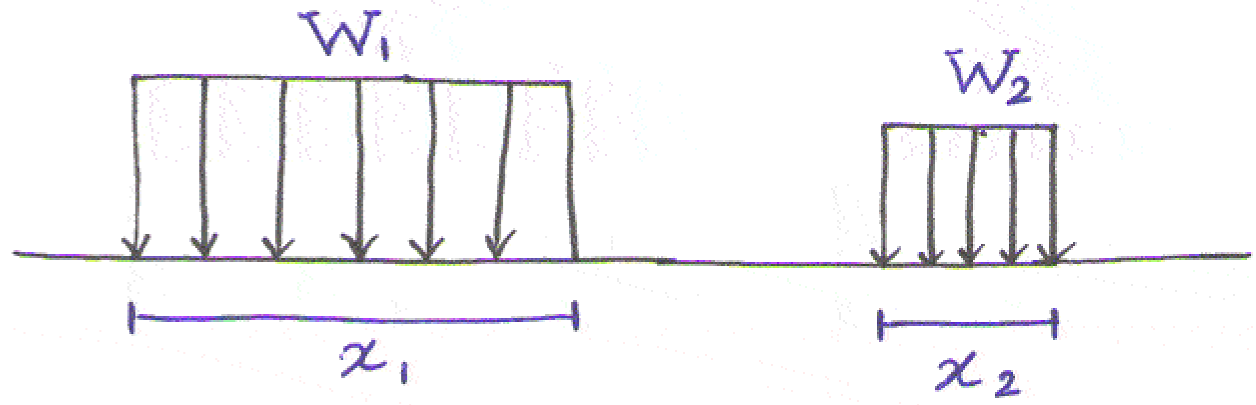




بارهای گسترده : بیشترین شکل های به چشم خورده در بارهای گسترده بشکل مربع - مستطیل - مثلث - مثلث ترکیبی - ذوزنقه - منحنی - منحنی ترکیبی بوده است، لذا به توضیح این گونه بارها اکتفا می کنیم :

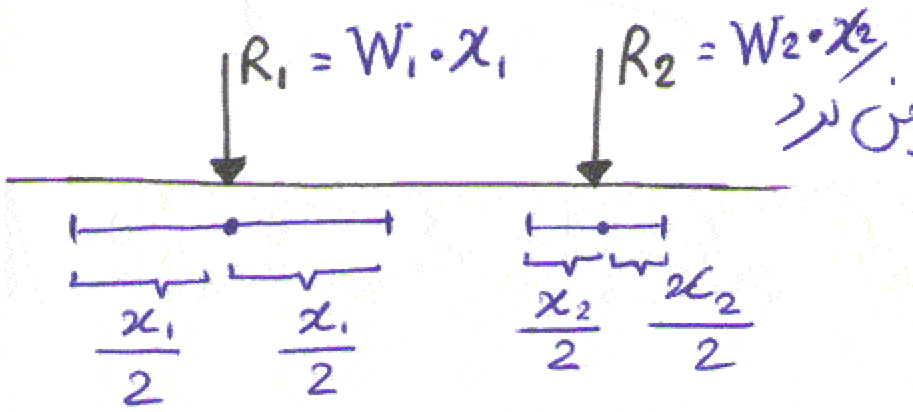
۱- بار گسترده مربع یا مستطیل :

نکته : در هر شکلی که بار گسترده وجود داشته باشد، **مساحت** بار گسترده برابر با **بار معادل** است.



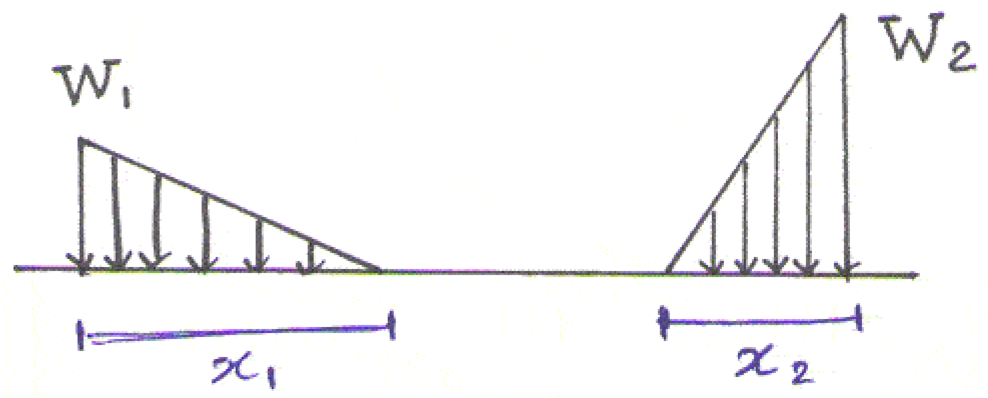
بارهای گسترده دارای دو مؤلفه هستند، یکی فاصله یا همان طول تیر تحت تاثیر بار گسترده (x) و دیگری شدت بار گسترده است (W) (که بصورت ظاهری برابر ارتفاع شکل است)

در بار گسترده مستطیلی یا مربعی بار معادل (R) از مساحت شکل $(W.x)$ بدست می آید. پس تیر را به شکل مقابل می توان فرض کرد



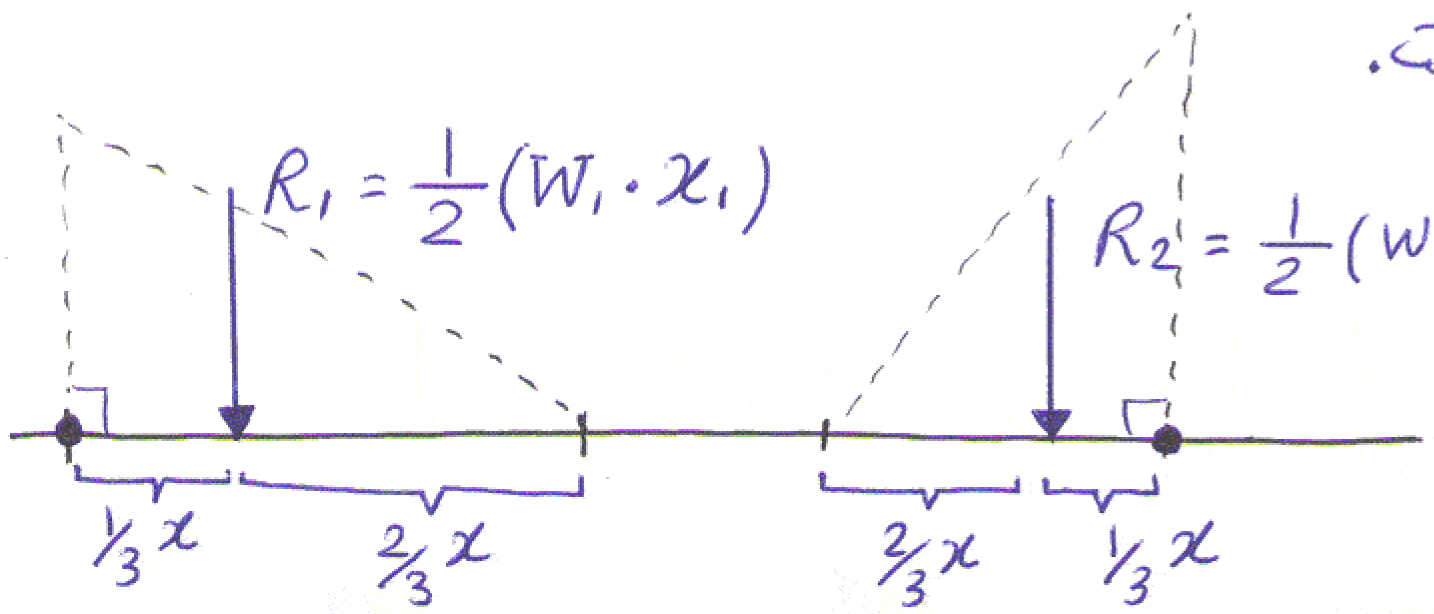
- محل اثر بار متمرکز معادل دقیقا وسط پاره خط طول تاثیر (x) است.

۲- بارگسترده مثلث :



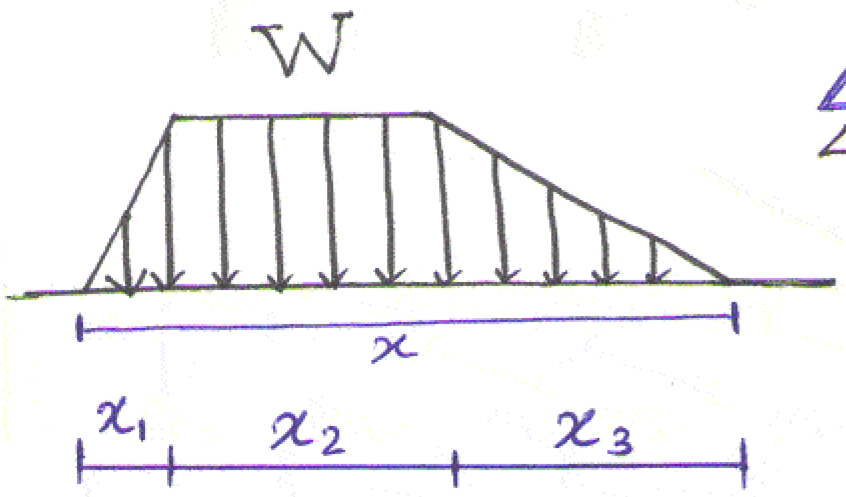
بار متمرکز معادل نصف حاصل ضرب شدت بار (W) در طول محل تاثیر (x) بدست می آید و محل اثر آن بفاصله ($\frac{1}{3}$) از زاویه قائمه آن است.

بار معادل $R = \frac{1}{2}(W \cdot x)$

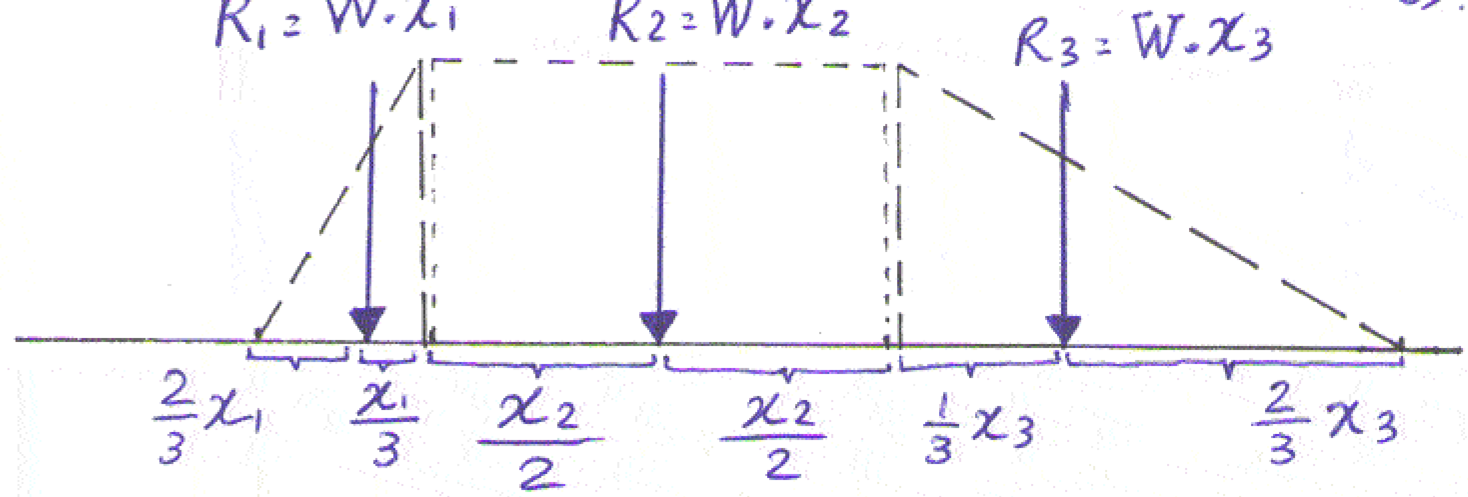


* نکته : دقت کنید که (W) ارتفاع مثلث و (x) قاعده ی مثلث است.

۳- بارگسترده ذوزنقه :



تنها نکته در شکل ذوزنقه این است که می بایست آن را به شکل های مستطیل و مثلث تقسیم کنیم و برای هر شکل یک بار و یک محل تاثیر می نداریم؛



۴- بارگسترده منحنی : به زبان ساده باز هم بار معادل از یک بارگسترده منحنی شکل مساحت زیر منحنی است به این گونه که محور x ها همان تیر و محور y ها (w) یا شدت بار است.

نکته : مساحت زیر نمودار منحنی = انتگرال تابع آن منحنی نسبت به x و این مساحت به ما مقدار بار متمرکز یا همان R را می دهد. پس :

$$\boxed{R = \int W \, dx}$$

حدود انتگرال گیری از نقطه شروع منحنی تا پایان آنست

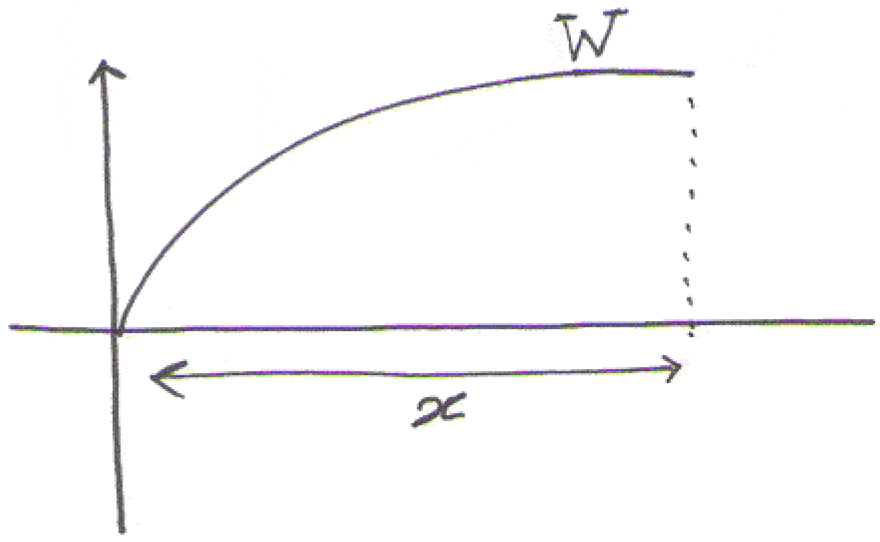
* نکته : انتگرال گیری از تابع چند جمله ای از فرمول زیر محاسبه می شود :

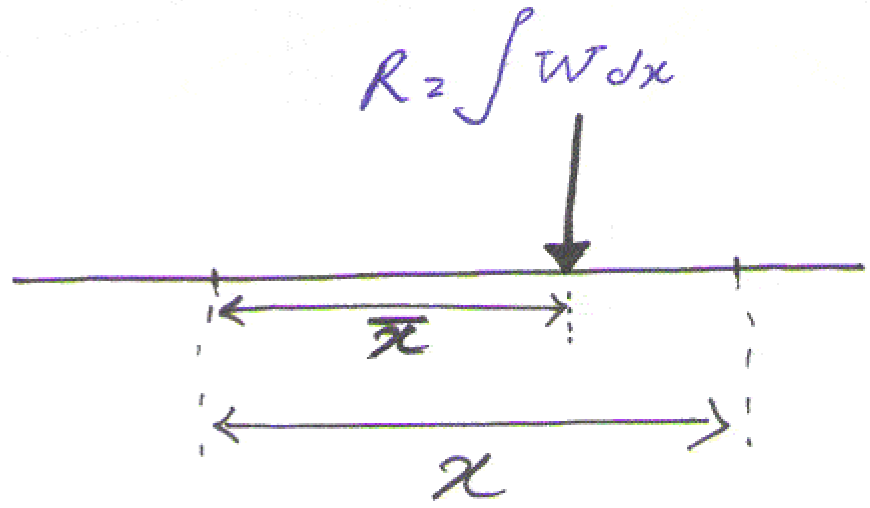
$$\int a x^n = \frac{a x^{n+1}}{n+1}$$

مثال : $\int 3x^4 + \frac{x^2}{3} + 7 = \frac{3x^5}{5} + \frac{x^3}{9} + 7x$

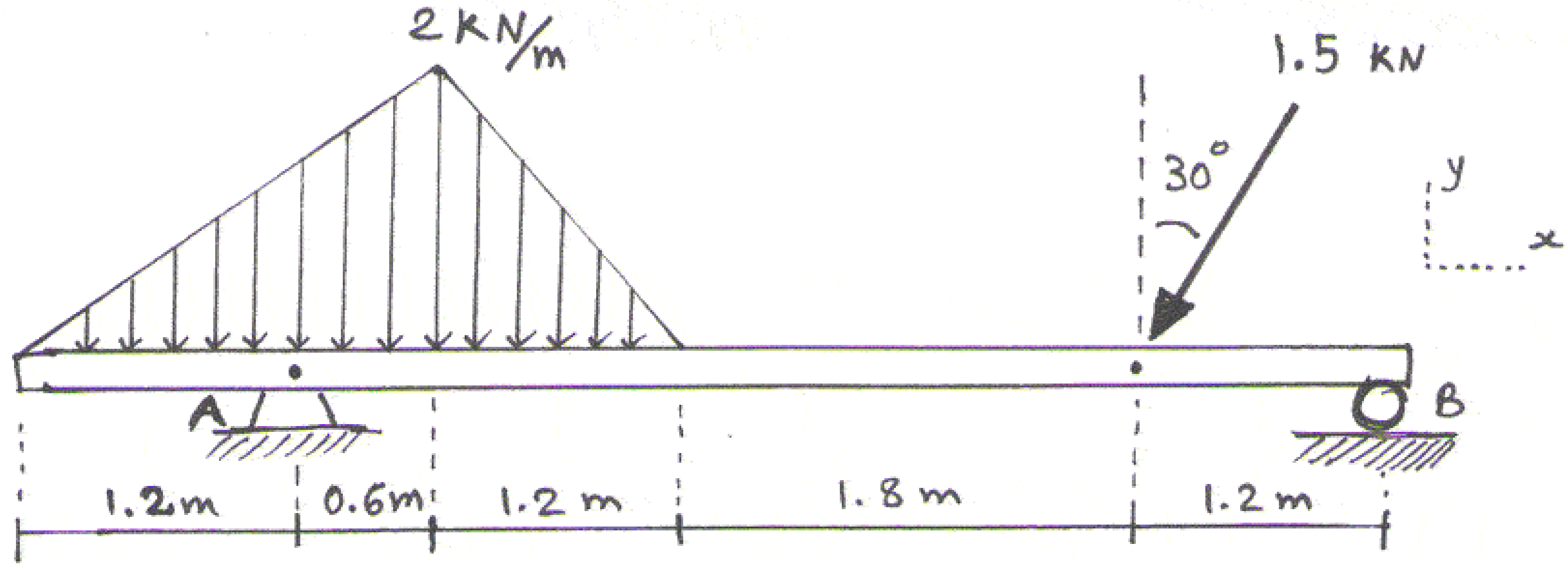
همچنین محل اثر بار معادل از رابطه ی روبرو بدست می آید ⇐

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\int x \, W \, dx}{R}}$$

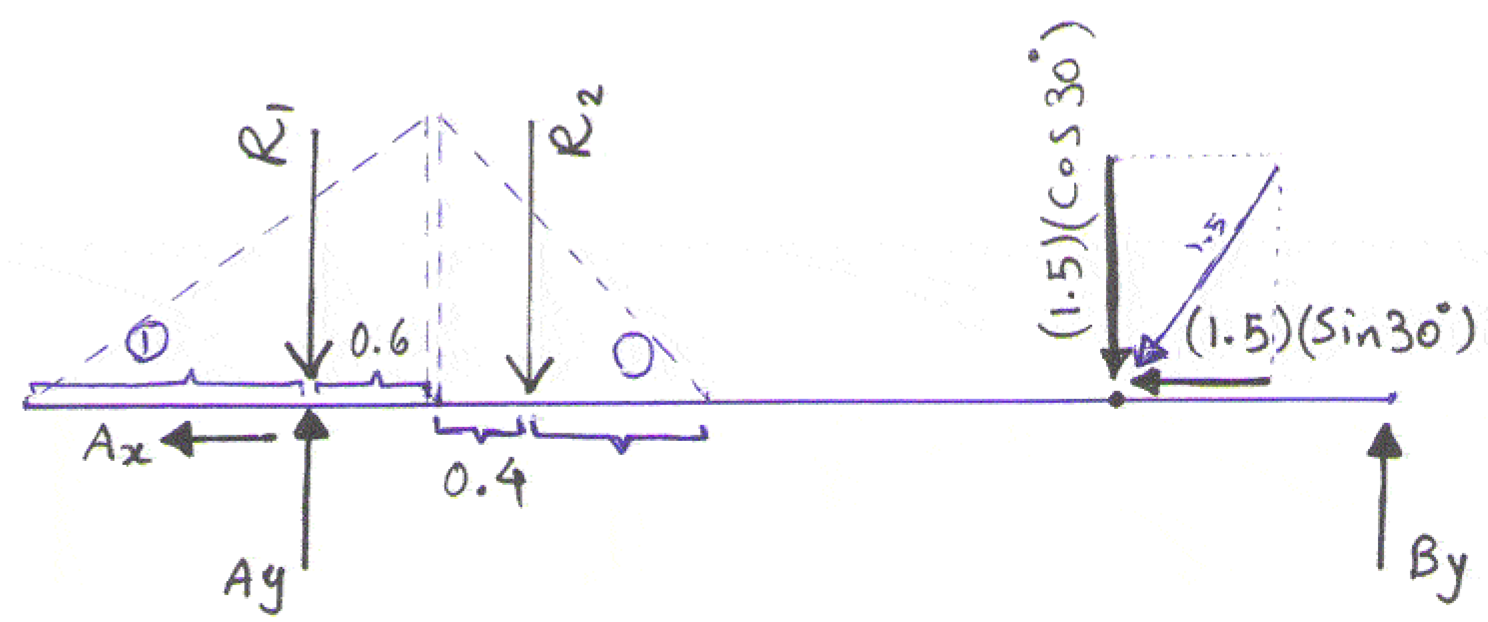




مثال تیر شکل زیر در معرض مجموعه‌ای از بارهای گسترده و متمرکز قرار دارد، عکس العمل های تکیه گاهی A و B را به دست آورید: (تمرین ۵-۹۸ مریام)



پاسخ:



چون تکیه گاه B غلطکی است، یک عکس العمل تکیه گاهی عمود بر قاعده ی آن داریم، بصورت فرضی این نیروی مجهول را رو به بالا فرض کردیم و آن By ما است.

به دلیل این که تکیه گاه A ثابت است، دو عکس العمل تکیه گاهی داریم، Ay با جهت فرضی رو به بالا و Ax با جهت فرضی رو به چپ که فرض ها کاملاً اختیاری هستند.

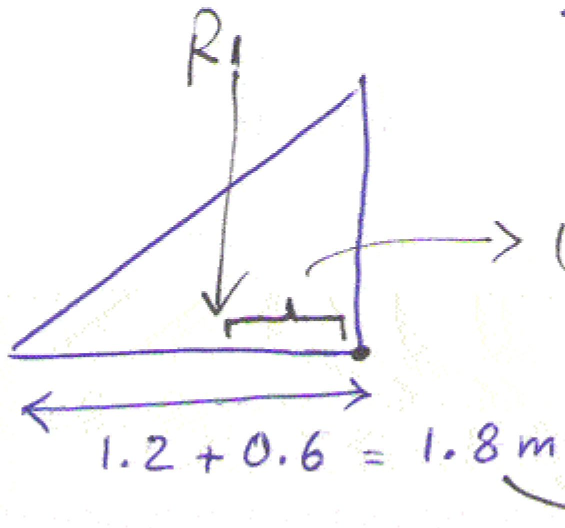
نیروی (بار متمرکز) مورب 1.5 کیلونیوتونی را بروی محورهای x و y تجزیه کردیم و آن ها را جایگزین نیروی مورب نمودیم. پس یک نیروی افقی در راستای چپ محور x ها $\left((1.5)(\sin 30^\circ)\right)$ داریم و یک نیروی عمودی در جهت محور y ها و رو به پایین $\left((1.5)(\cos 30^\circ)\right)$ داریم.

بار گسترده ی موجود را به دو بار مثلث قائم الزاویه شکل تقسیم کردیم که مقدار هر یک برابر است با نصف حاصلضرب شدت بار (ارتفاع مثلث $= W$) در قاعده (طول تحت تاثیر $= x$)

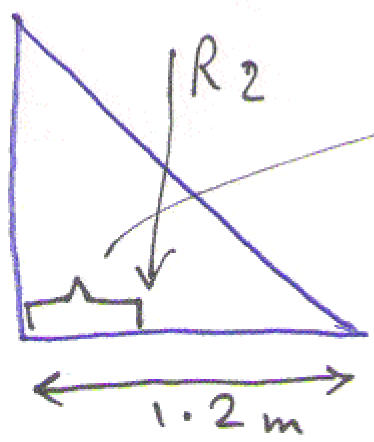
$$R_1 = \frac{(2\ kN/m)(1.2+0.6)m}{2} = 1.8\ kN = 1800\ N$$

$$R_2 = \frac{(2\ kN/m)(1.2)m}{2} = 1.2\ kN = 1200\ N$$

محل اثر بارها نیز در فاصله $\left(\frac{1}{3}\right)$ از راس قائمه بدست می آید.



$\left(\frac{1}{3}\right)$ (قاعده) $= \left(\frac{1}{3}\right)(1.8) = 0.6\ m$ فاصله از راس قائمه



$\left(\frac{1}{3}\right)$(قاعده)$= \left(\frac{1}{3}\right)(1.2) = 0.4\ m$ فاصله از راس قائمه

هم اکنون می توانیم معادلات سه گانه تعادل را برای تیر بنویسیم

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \longrightarrow \\ \sum F_y = 0 \longrightarrow \\ \sum M = 0 \longrightarrow \end{cases}$$

یعنی مجموع نیروهای افقی در تیر صفر است

یعنی مجموع نیروهای عمودی در تیر صفر است

یعنی مجموع گشتاورها (شرح) نسبت به فلان نقطه مورد نظر ما صفر است

* نکته * درهنگام نوشتن معادلات سه گانه باید قراردادی را اعلام کنیم و بگوییم ما در این معادله نیروهای در جهت راست را مثبت می گیریم و اگر عکس العمل تکیه گاهی ما مقداری مثبت بدست آمد یعنی فرض ما درست است و اگر مقدار آن منفی شد یعنی فرض اولیه ی ما در انتخاب جهت عکس العمل تکیه گاهی غلط بوده و خلاف آن درست است ، بطور مثال اگر فرض اولیه A_x ما به سمت راست باشد و مقدار ما مثبت شد یعنی جهت انتخابی ما درست است ولی اگر منفی شد یعنی جهت انتخابی غلط است و بالعکس اگر جهت فرض شده ما به سمت چپ بود $(\overleftarrow{A_x})$ و مقدار آن مثبت بدست آمد یعنی فرض درست بوده و جهت A_x به سمت چپ است ، ولی اگر مقدار منفی شد یعنی جهت را غلط فرض کردیم و می بایست آن را به سمت راست بگیریم . و حتما بعد از دانستن فرض غلط باید جهت صحیح را برای معادلات آینده بکار ببریم ، این موضوع در بقیه جاها یکسان است

ما فرض می‌کنیم بعنوان قرارداد نیروهای در جهت راست مثبت و در جهت چپ منفی اند.

$$\xrightarrow{+} \sum F_x = 0 \rightarrow -A_x - (1.5)(\sin 30°) = 0$$

$$\rightarrow A_x = -0.75\ KN = -750\ N$$

در اینجا مقدار عکس العمل تکیه گاهی A_x منفی شد، پس متوجه می‌شویم A_x به سمت راست است و باید در شکل تصحیح کنیم.

$$\rightarrow A_x = 750\ N \xrightarrow{A_x}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \rightarrow +A_y - R_1 - R_2 - (1.5)(\cos 30) + B_y = 0$$

$$\rightarrow A_y - 1.8 - 1.2 - 1.3 + B_y = 0 \rightarrow \boxed{A_y + B_y = 4.3\ KN}$$

چون دو مجهول داریم باید یکی را از طریق لنگرگیری (گشتاور) بدست آوریم و در معادله بالا قرار دهیم.

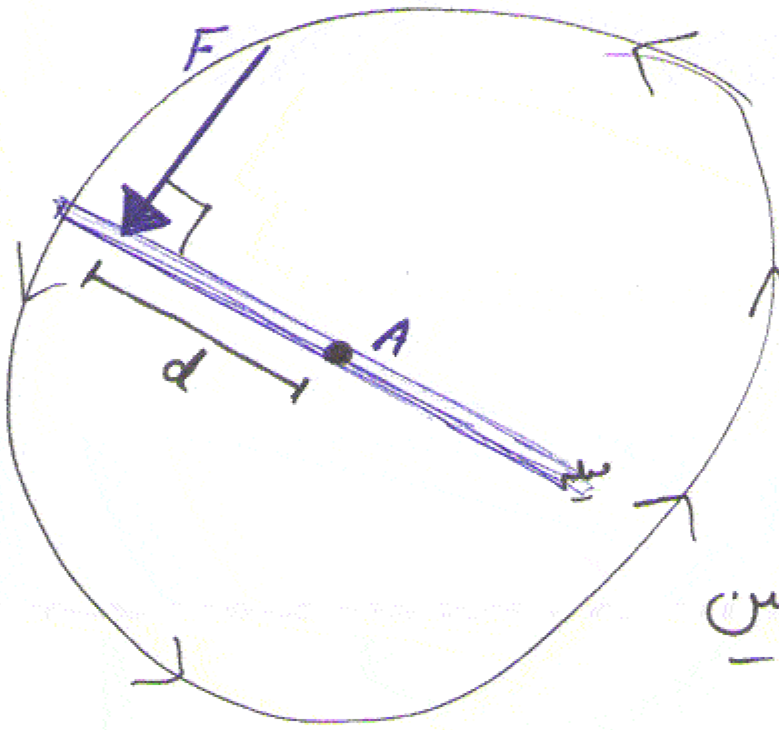
مفهوم گشتاور (لنگر)

$$M = F.d.\sin(\alpha)$$

گشتاور یک نیرو حول یک نقطه دلخواه از فرمول بالا بدست می‌آید. اما چون ما همه‌ی نیروها را تجزیه می‌کنیم تمام زوایای ما (F به d) زاویه‌ی قائم می‌شوند و فرمول به شکل مقابل در می‌آید: $M = F.d.\underbrace{\sin(90)}_{1} = F.d$

که برابر است با نیرو در فاصله و علامت آن به شرح صفحه‌ی بعد مشخص می‌شود

اگر گشتاور بصورت ساعتگرد بچرخد منفی می‌شود و اگر پادساعتگرد بچرخد مقدار آن مثبت می‌شود

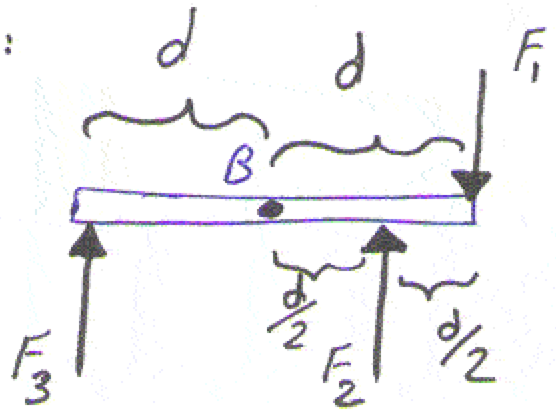


$$M_A = +F \cdot d$$

اگر نقطه‌ی A را ثابت فرض کنیم، نیروی F باعث می‌شود که میله در جهت پادساعتگرد بچرخد، به همین دلیل مقدار M_A (لنگر یا گشتاور A) مثبت است.

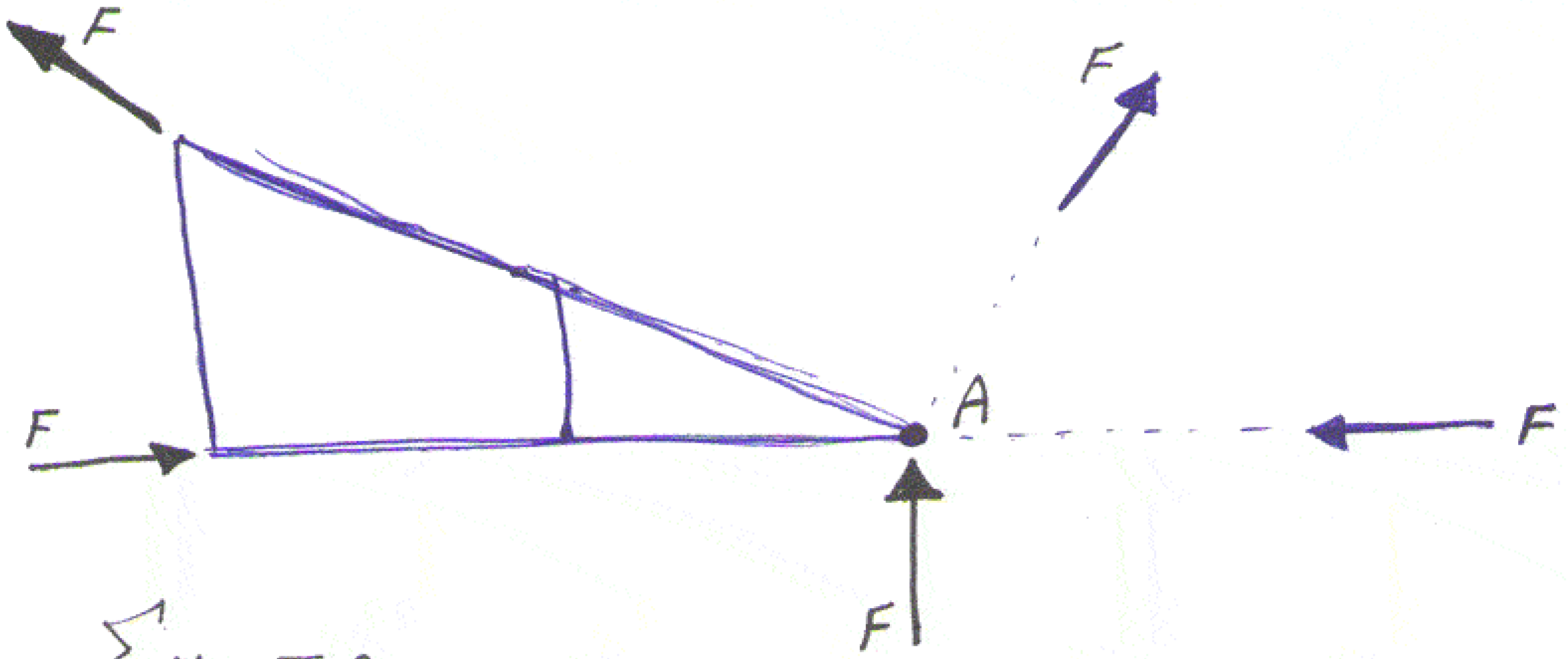
d فاصله = همیشه فاصله‌ی نیرو تا نقطه‌ی لنگرگیری، به صورت عمود

مثال:



$$M_B = -F_1 \cdot d + F_2 \cdot \frac{d}{2} - F_3 \cdot d$$

نکته بسیار مهم: گشتاور نیرویی که در راستای نقطه‌ی لنگرگیری باشد **صفر** است.

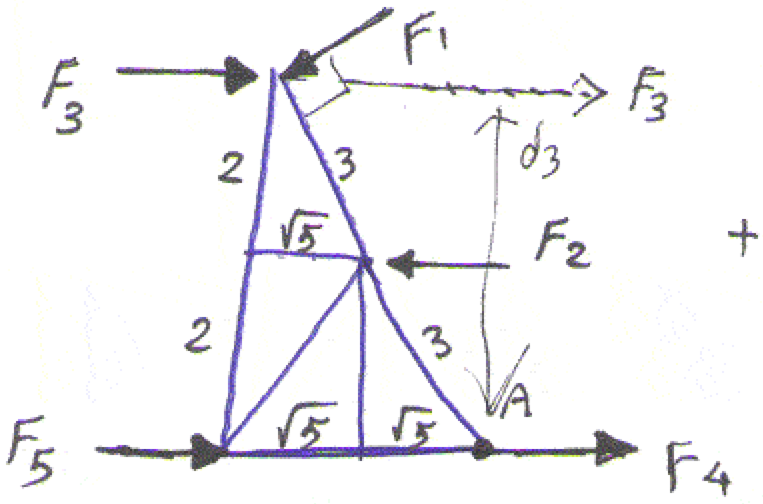


$$\sum M_A = 0$$

گشتاور تمام نیروهای فوق حول A صفر است. چون همگی در راستای A هستند

درواقع دلیل صفرشدن گشتاور این نیروها آن است که اگر بردار نیرو را در همان راستا و اندازه و جهت ادامه دهیم به فاصله ی صفر از نقطه لنگرگیری می رسیم.

مثال :



$$+\circlearrowleft \sum M_A = +F_1(9) - F_3(4) + F_2(2) + \underbrace{F_4(0) + F_5(0)}_{0}$$

که نیازی به نوشتن لنگر نیروهای در راستای نقطه لنگرگیری نیست .

واما ادامه مسئله : برای بدست آوردن یکی از عکس العمل های تکیه گاهی (A_y) یا (B_y) باید حول یکی از نقاط (A) یا (B) لنگر بگیریم ؛ همچنین اینجا نیز قرار دادی را درنظر میگیریم که لنگرهای پادساعتگرد مثبت هستند .

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \rightarrow -R_2(1) - (1.5)(\cos 30°)(3.6) + (B_y)(4.8) = 0$$

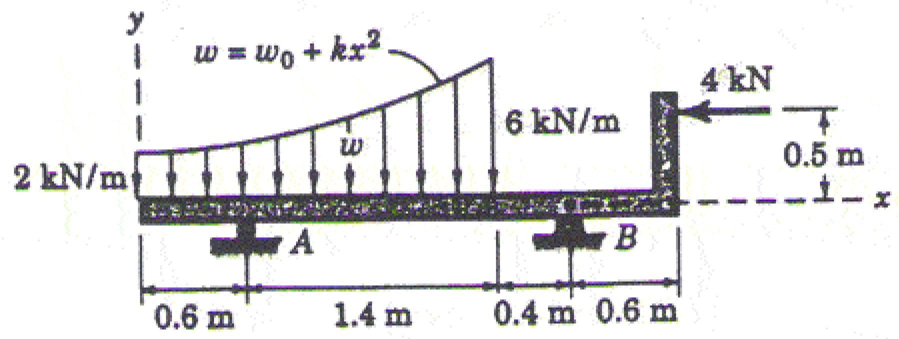
$$\rightarrow B_y = \frac{1.2 + 1.3(3.6)}{4.8} = \frac{5.88}{4.8} = \boxed{1.225_{KN}}$$

لنگر نیروهای A_x و A_y و $(1.5)(\sin 30)$ و R_1 در نقطه ی A صفر می شدند.

$$\Rightarrow A_y + 1.225 = 4.3\,KN \rightarrow \boxed{A_y = 3.075\,KN}$$

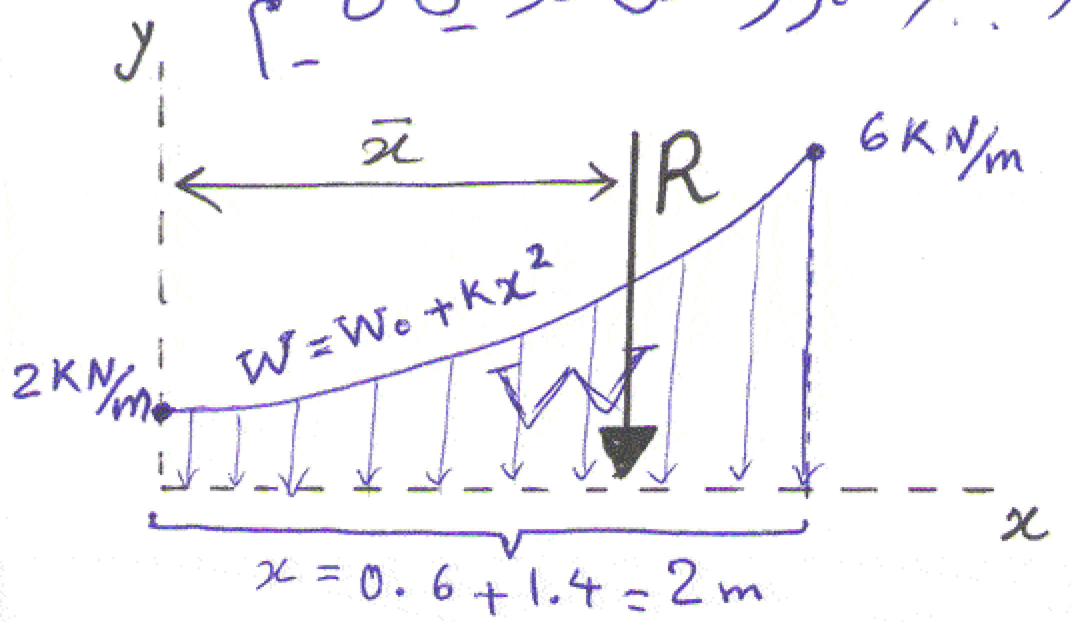
و چون مقادیر مثبت بدست آمد به این نتیجه رسیدیم که جهت های فرض شده برای A_y و B_y درست بوده اند.

مثال: برای تیر شکل مقابل، عکس العمل ها در A و B را بدست آورید.



(تمرین ۵ـ۱۰۸ مریام)

پاسخ: ابتدا بار گسترده منحنی شکل را با بار متمرکز معادل تعویض می کنیم:



بار معادل (R) که برابر مساحت زیر نمودار منحنی است از طریق انتگرال گیری محاسبه می شود.

$$W = W_0 + Kx^2$$

$$(\text{مقدار تابع در نقطه } x) = (\text{مقدار اولیه تابع}) + (\text{ضریب ثابت}) + (\text{فاصله از مبدأ} : x)^2$$

$$\xrightarrow{x = 2\,m} \quad 6 = 2 + K(2)^2 \rightarrow 4 = K(4) \rightarrow \boxed{K = 1 \ \ KN/m^3}$$

پس فرمول تابع به شکل مقابل در می آید: $W = 2 + (1)x^2 = 2 + x^2$

بار معادل $R = \int W\,dx = \int_0^2 2 + x^2 \, dx = \left(2x + \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2$

$$= \left(2(2) + \frac{(2)^3}{3}\right) - \left(\cancel{2(0) + \frac{(0)^3}{3}}\right) = 4 + \frac{8}{3} = \frac{12+8}{3} = \frac{20}{3}$$

$$\rightarrow R = \frac{20}{3} \ KN \simeq \boxed{6.67 \ KN}$$

وهم اکنون می بایست محل اثر بار معادل را پیدا کنیم ($\bar{x}$) که از فرمول زیر محاسبه می شود :

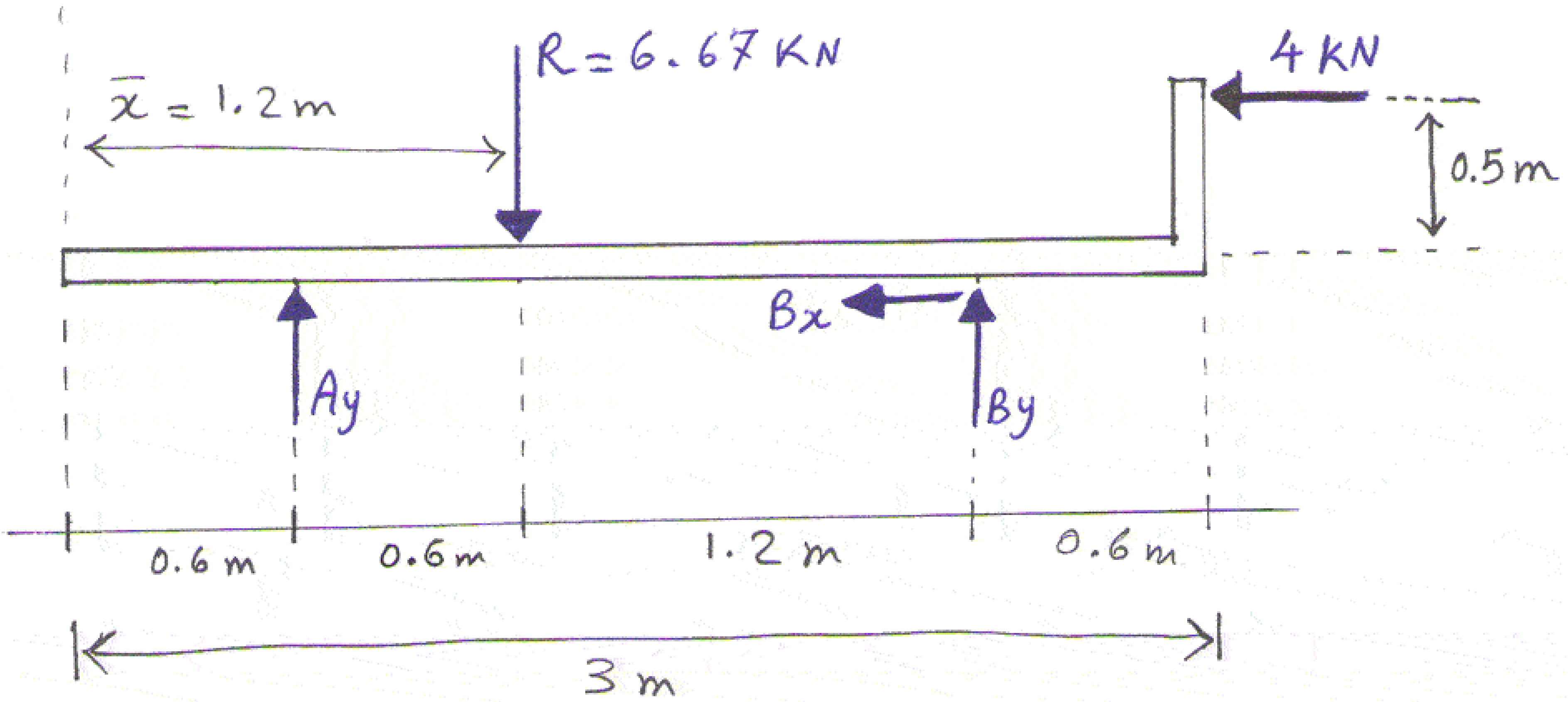
$$\bar{x} = \frac{\int x.W\,dx}{R} = \frac{\int_0^2 x(2+x^2)\,dx}{R}$$

$$= \frac{\int_0^2 2x + x^3\,dx}{R} = \frac{\left(\frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}} + \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^2}{R}$$

$$= \frac{\left((2)^2 + \left(\frac{(2)^4}{4}\right)\right) - \left((0)^2 + \frac{(0)^4}{4}\right)}{6.67} = \frac{4 + \frac{16}{4}}{6.67} = \frac{4+4}{6.67} = 1.2m$$

$\boxed{\bar{x} = 1.2m}$

یعنی بار معادل $[R = 6.67\,KN]$ در فاصله ی $[\bar{x} = 1.2m]$ اثر می کند.



برای بدست آوردن عکس العمل ها در A و B معادلات سه گانه تعادلی را می نویسیم :

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \longrightarrow -B_x - 4 = 0 \rightarrow \underbrace{B_x = -4\,kN}$$

چون مقدار منفی شد متوجه می‌شویم جهت فرض شده برای B_x اشتباه بوده است.

$$\xrightarrow{\text{پس}} \quad B_x = 4\,kN \quad \xrightarrow{B_x}$$

$$+\uparrow\sum F_y = 0 \longrightarrow A_y - R + B_y = 0 \longrightarrow \boxed{A_y + B_y = R = 6.67\,kN} \;\star$$

برای بدست آوردن یکی از مجهولات (B_y) یا (A_y) باید حول یکی از آن نقاط (B یا A) لنگر بگیریم

$$+\circlearrowleft\sum M_A = 0 \rightarrow -R\,(0.6) + B_y\,(1.8) + 4\,(5) = 0$$

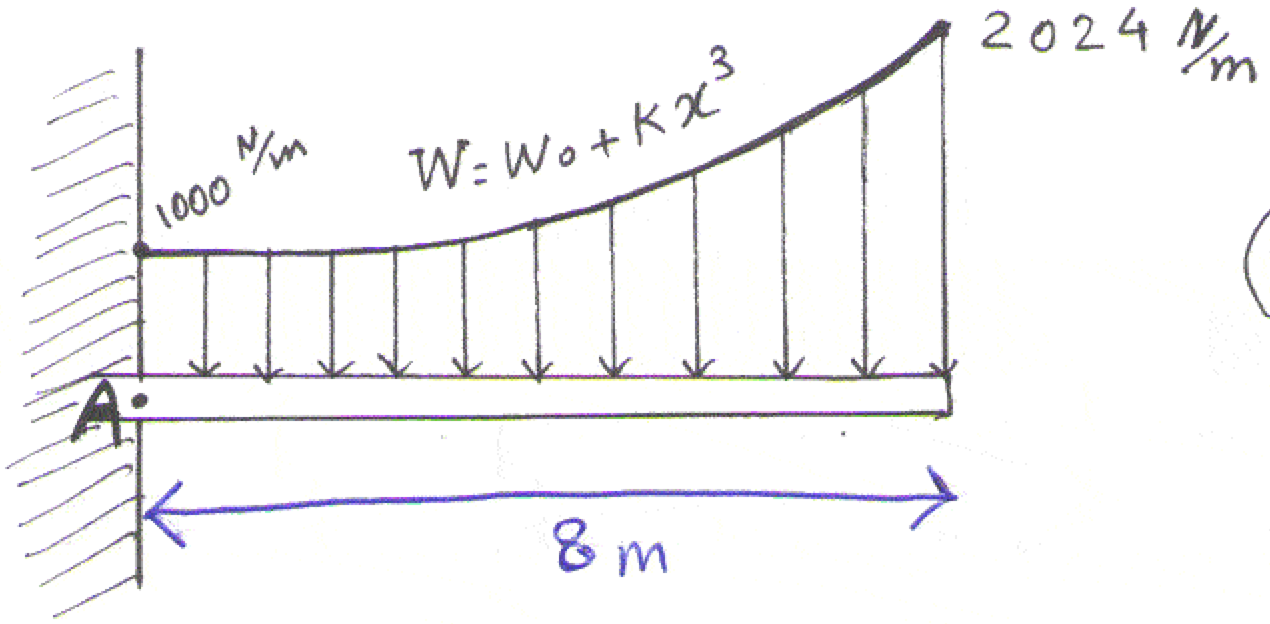
$$\longrightarrow B_y = \frac{(6.67)(0.6) - 4(5)}{1.8} \simeq \frac{2}{1.8} = \boxed{1.11\,kN}$$

مقدار بدست آمده را در معادله ($\star$) قرار می‌دهیم تا دیگر مجهول ها بدست آید:

$$\star\; A_y + B_y = 6.67 \rightarrow A_y + 1.11 = 6.67 \rightarrow \boxed{A_y = 5.56\,kN}$$

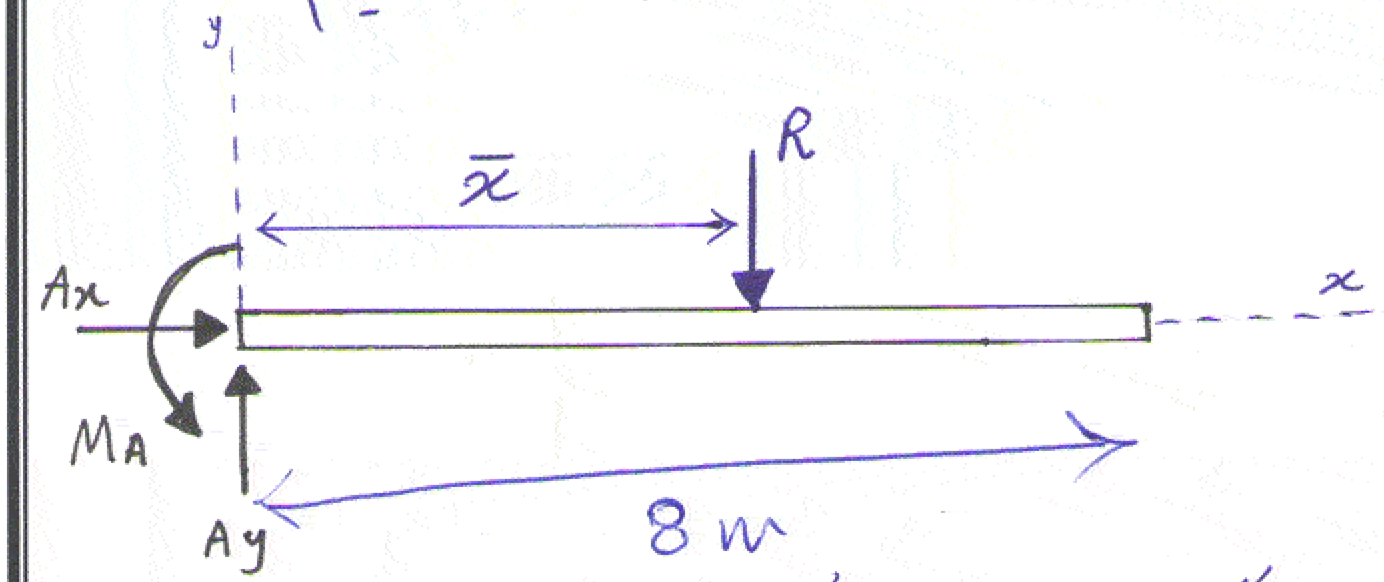
مثال در تیر کنسولی یا طره ای شکل مقابل، بار گسترده‌ای وارد شده است، عکس العمل تکیه‌گاهی را محاسبه کنید:

(مثال ۵ - ۱۰ مریام و تمرین جزوه)



نکته : تکیه گاه تیر طره ای دارای ۳ عکس العمل می باشد. یکی در جهت افقی (Ax)
یکی در جهت عمودی (Ay) و دیگری گشتاور حول آن تکیه گاه است.

همچنین می بایست بار گسترده را با بار متمرکز در محل اثر معمول جابجا کنیم:



ابتدا مقادیر ثابت معادله ی توزیع بار گسترده را بدست می آوریم،

$W = W_0 + Kx^3$ در نقطه ($x = 8m$) مقدار ($W = 2024$) است

و مقدار اولیه تابع ($W_0 = 1000$) می باشد:

$$2024 = 1000 + K(8)^3 \rightarrow K = \frac{2024 - 1000}{8^3} = \frac{1024}{512} = 2 \ \frac{N}{m^4}$$

$$\xrightarrow{\text{پس شکل کلی تابع}} \underline{W = 1000 + 2x^3}$$

برای بدست آوردن بار معادل (R) و محل اثر آن ($\bar{x}$) از فرمول های انتگرال گیری استفاده می کنیم:

$$R = \int W \, dx = \int_0^8 1000 + 2x^3 \, dx$$

$$= \left(1000x + \frac{2x^4}{4}\right)\Big|_0^8 = \left(1000(8) + \frac{2(8)^4}{4}\right) - \left(1000(0) + \frac{2(0)^4}{4}\right)$$

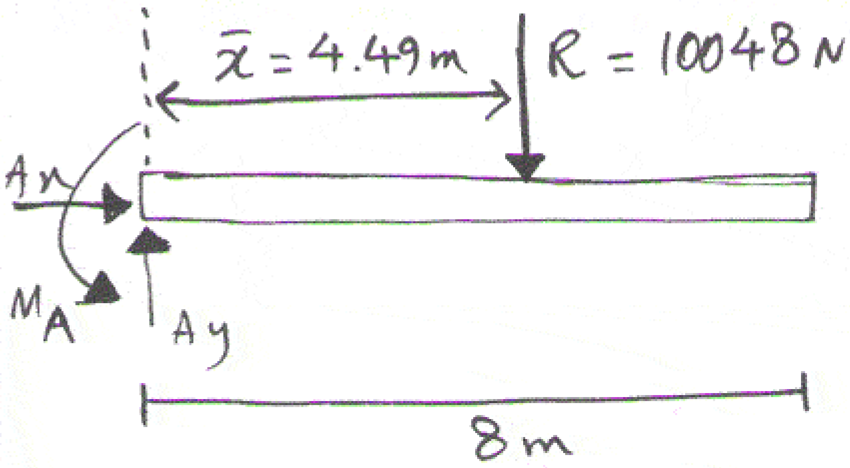
مقدار بار معادل: $= 8000 + 2048 = \boxed{10048 \ N}$

$$\bar{x} = \frac{\int x . w \, dx}{R} = \frac{\int_0^8 x(1000 + 2x^3) \, dx}{R}$$

$$= \frac{\int_0^8 (1000x + 2x^4) \, dx}{R} = \frac{\left(\frac{1000x^2}{2} + \frac{2x^5}{5}\right)\Big|_0^8}{R}$$

$$= \frac{\left(\frac{1000(8)^2}{2} + \frac{2(8)^5}{5}\right) - \cancel{\left(\frac{1000(0)^2}{2} + \frac{2(0)^5}{5}\right)}^{0}}{10048} = \frac{32000 + 13107.2}{10048}$$

$$= \frac{45107.2}{10048} \simeq 4.49 \text{ m} \rightarrow \boxed{\bar{x} = 4.49 \text{ m}}$$ محل اثر بار معادل (R)



با توجه به دیاگرام آزاد تیر معادلات تعادل را می نویسیم :

$$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0 \rightarrow A_x = 0$$

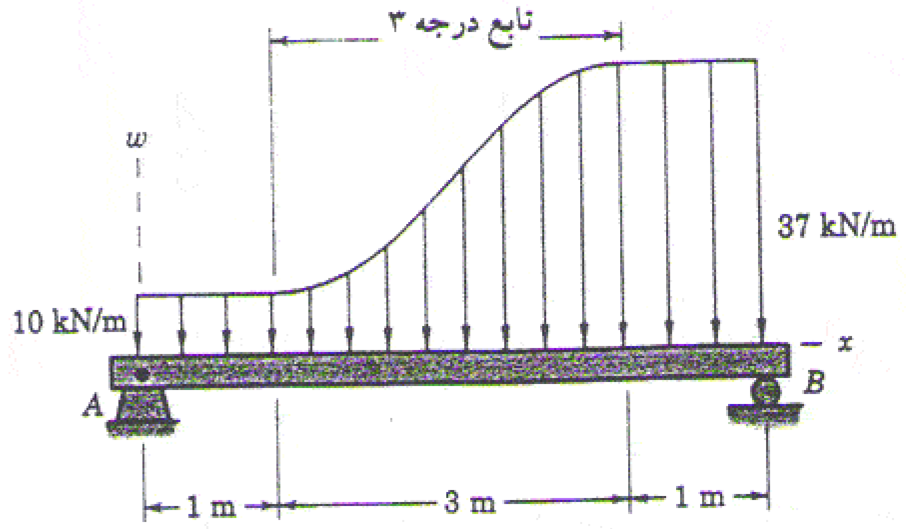
$$+\uparrow \sum F_y = 0 \rightarrow A_y - R = 0 \rightarrow A_y = R \rightarrow \boxed{A_y = 10048 \text{ N}} \uparrow$$

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \rightarrow M_A - \underbrace{R(\bar{x})} = 0 \rightarrow M_A = (10048)(4.49) =$$

* لنگر حاصل از نیروی بار معادل به فاصله $\bar{x}$ (که ساعتگرد می چرخاند) ⊖

$$\rightarrow \boxed{M_A = 45100 \, (\text{N.m})}$$

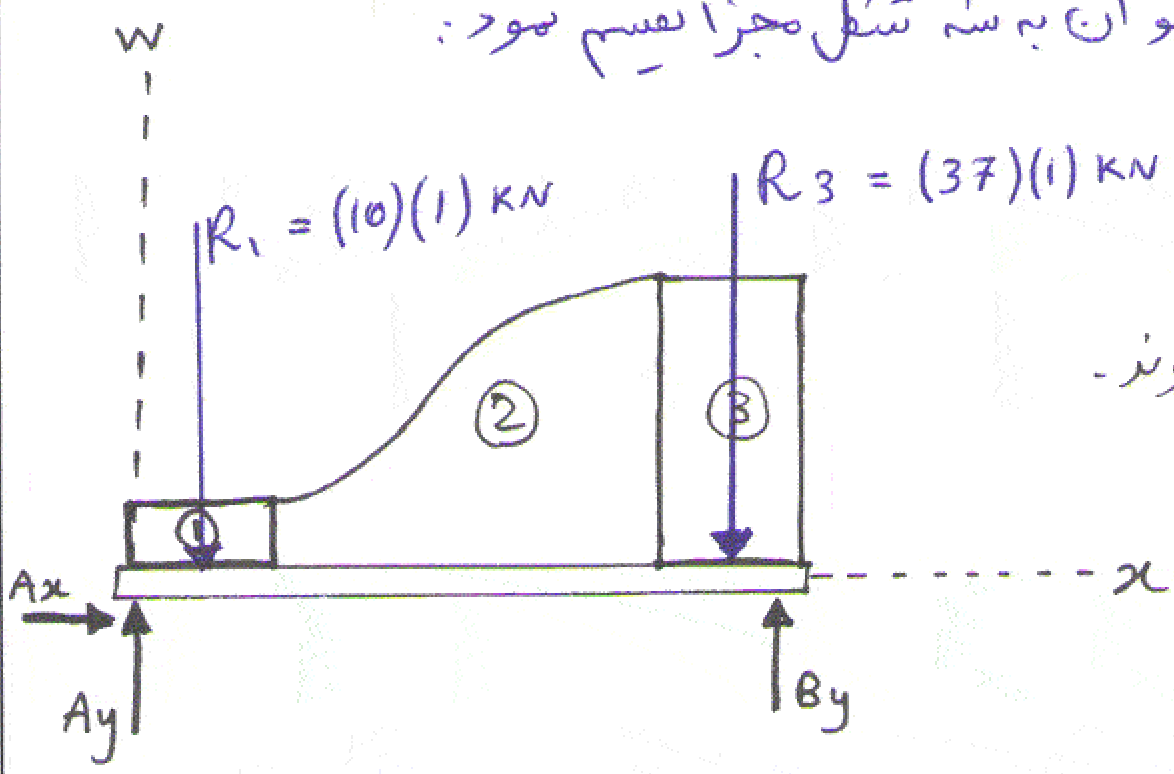
مثال دو سر تیر شکل مقابل در معرض بارهای گسترده یکنواخت قرار دارد. توزیع بار در ناحیه میانی را می‌توان بصورت تابع درجه ۳ $W = W_0 + K_1 x + K_2 x^2 + K_3 x^3$ نشان داد.



که شیب آن در نقاط $x = 1\,m$ و $x = 4\,m$ برابر صفر است، عکس العمل‌ها در A و B را بیابید؟

(تمرین برای متول جزوه و تمرین ۵ - ۱۱۲ مریام)

پاسخ: بارهای گسترده تیر بالا را می‌توان به ۳ شکل مجزا تقسیم نمود:



که شکل ① و ③ مستطیل هستند و به راحتی با بار متمرکز معادل تعویض می‌شوند.

اما شکل دوم که نمودار یک تابع درجه ۳ است را می‌بایست از طریق انتگرال گیری به مقدار بار معادل (R) و فاصله محل اثر ($\bar{x}$) بدست آوریم. که برای این کار به معادله تابع نیاز داریم و می‌بایست مقادیر ثابت W_0 و K_1 و K_2 و K_3 را پیدا کنیم.

* نکته * در نقطه‌ای که شیب منحنی صفر باشد مقدار مشتق نیز صفر است.

هم چنین می‌توان مقادیر $x = 1$ و $x = 4$ را در تابع درجه ۳ قرار داد.

$x = 1\,m \longrightarrow \quad 10 = W_0 + K_1(1) + K_2(1)^2 + K_3(1)^3 \Rightarrow \boxed{W_0 + K_1 + K_2 + K_3 = 10}$

① معادله‌ی اول

$$x=4m \longrightarrow 37 = W_0 + K_1(4) + K_2(4)^2 + K_3(4)^3$$

$$\rightarrow \boxed{W_0 + 4K_1 + 16K_2 + 64K_3 = 37} \leftarrow$$ معادله دوم (2)

چون شیب منحنی در $x=1m$ و $x=4m$ صفراست مشتق تابع نیز در این نقاط صفراست

$$\frac{dw}{dx} = w' = K_1 + 2K_2x + 3K_3x^2 \leftarrow$$ مشتق تابع

$$x=1m \longrightarrow 0 = K_1 + 2K_2(1) + 3K_3(1)^2 \rightarrow \boxed{K_1 + 2K_2 + 3K_3 = 0}$$

معادله ی سوم (3)

$$x=4m \longrightarrow 0 = K_1 + 2K_2(4) + 3K_3(4)^2 \rightarrow \boxed{K_1 + 8K_2 + 48K_3 = 0}$$

معادله ی چهارم (4)

با توجه به معادلات بدست آمده چهار مجهول K_1 و K_2 و K_3 و W_0 را بدست می آوریم.

$$(3),(4) - \begin{cases} K_1 + 2K_2 + 3K_3 = 0 \\ K_1 + 8K_2 + 48K_3 = 0 \end{cases}$$

ازهم کم می کنیم

$$\cancel{K_1} + 2K_2 + 3K_3 - \cancel{K_1} - 8K_2 - 48K_3 = 0 - 0 = 0$$

$$\rightarrow -6K_2 - 45K_3 = 0 \longrightarrow -6K_2 = 45K_3 \rightarrow K_2 = \frac{-45}{6}K_3$$

$$\rightarrow \boxed{K_2 = -7.5K_3} \xrightarrow{\text{در معادله (3) می گذاریم}} K_1 + 2(-7.5K_3) + 3K_3 = 0$$

$$\rightarrow K_1 - 15K_3 + 3K_3 = 0 \rightarrow \boxed{K_1 = 12K_3}$$

حال مقادیر K_1 و K_2 بدست آمده را (برحسب K_3) در معادله ی (1) می گذاریم و همین کار را برای معادله ی (2) انجام می دهیم تا دو معادله با دو مجهول (W_0 و K_3) داشته باشیم:

① معادله : $W_0 + K_1 + K_2 + K_3 = 10 \xrightarrow{K_1 = 12K_3 \text{ و } K_2 = -7.5K_3}$

$\longrightarrow W_0 + 12K_3 - 7.5K_3 + K_3 = 10 \rightarrow \boxed{W_0 + 5.5K_3 = 10}$ معادله‌ی الف

② معادله : $W_0 + 4K_1 + 16K_2 + 64K_3 = 37 \xrightarrow{K_1 = 12K_3 , K_2 = -7.5K_3}$

$\longrightarrow W_0 + 4(12K_3) + 16(-7.5K_3) + 64K_3 = 37$

$\longrightarrow W_0 + 48K_3 - 120K_3 + 64K_3 = 37 \rightarrow \boxed{W_0 - 8K_3 = 37}$ معادله‌ی ب

معادلات (الف و ب) : $-\begin{cases} W_0 + 5.5K_3 = 10 \\ W_0 - 8K_3 = 37 \end{cases}$ از هم کم می‌کنیم

$\cancel{W_0} - \cancel{W_0} + 5.5K_3 - (-8K_3) = 10 - 37 \rightarrow 13.5K_3 = -27$

$\longrightarrow K_3 = \dfrac{-27}{13.5} = -2 \longrightarrow \boxed{K_3 = -2}$

$W_0 + 5.5(-2) = 10 \rightarrow \boxed{W_0 = 21}$

$K_1 = 12K_3 \rightarrow K_1 = 12(-2) = -24 \rightarrow \boxed{K_1 = -24}$

$K_2 = -7.5(K_3) = -7.5(-2) = 15 \rightarrow \boxed{K_2 = 15}$

فرمول تابع شدت : $W = W_0 + K_1x + K_2x^2 + K_3x^3$

$$\longrightarrow \boxed{W = 21 - 24x + 15x^2 - 2x^3}$$

هم اکنون می‌توانیم با انتگرال گیری از این تابع مساحتش (R) یا همان بار معادل را بیابیم؟

بار معادل بارگسترده (منحنی) شکل ۲ از طریق فرمول انتگرال گیری به دست می‌آید:

$$R_2 = \int W\,dx = \int_1^4 21 - 24x + 15x^2 - 2x^3 \,dx$$

$$\rightarrow R_2 = \left(21x - \frac{24x^2}{2} + \frac{15x^3}{3} - \frac{2x^4}{4}\right)\Bigg|_1^4$$

$$= \left(21x - 12x^2 + 5x^3 - \frac{x^4}{2}\right)\Bigg|_1^4 = \left(21(4) - 12(4)^2 + 5(4)^3 - \frac{(4)^4}{2}\right)$$

$$- \left(21(1) - 12(1)^2 + 5(1)^3 - \frac{(1)^4}{2}\right) = (84 - 192 + 320 - 128)$$

$$-\left(21 - 12 + 5 - \frac{1}{2}\right) = 84 - 13.5 = 70.5 \quad kN$$

$$\longrightarrow \boxed{R = 70.5 \; kN}$$

و سپس محل اثر بار معادل شکل ۲ منحنی

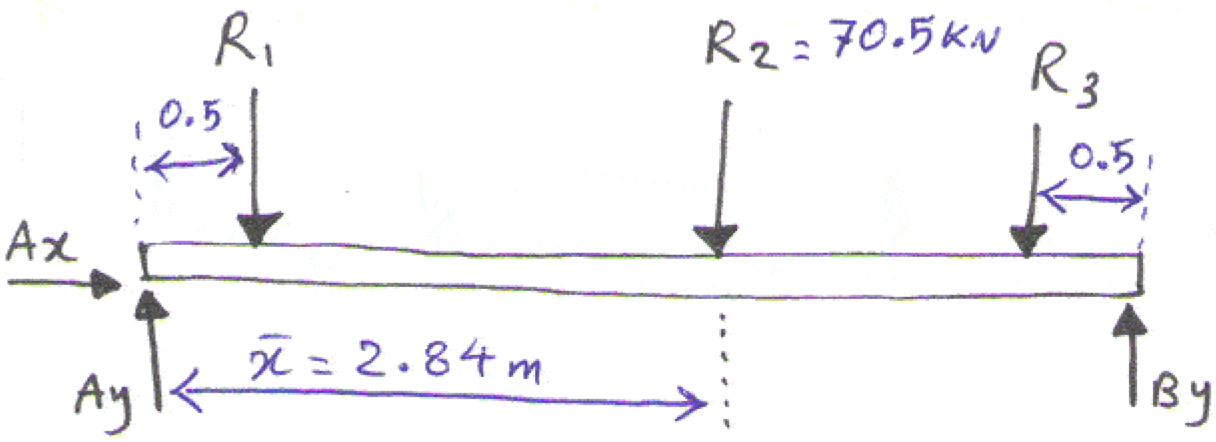
$$\bar{x} = \frac{\int x \cdot W dx}{R} = \frac{\int_1^4 x\left(21 - 24x + 15x^2 - 2x^3\right) dx}{R}$$

$$= \left(\frac{1}{R}\right)\left(\int_1^4 21x - 24x^2 + 15x^3 - 2x^4 \, dx\right)$$

$$= \left(\frac{1}{70.5}\right)\left(\frac{21x^2}{2} - \frac{24x^3}{3} + \frac{15x^4}{4} - \frac{2x^5}{5}\right)\Bigg|_1^4 = \frac{206.4 - 5.85}{70.5}$$

$$= \frac{200.55}{70.5} = 2.84 \;\; m \qquad \longrightarrow \boxed{\bar{x} = 2.84 \; m}$$

از مبدأ تیر



دیاگرام آزاد تیر به شکل مقابل تبدیل می‌شود:

حال با استفاده از معادلات تعادل عکس العمل ها را بدست می آوریم :

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \rightarrow \boxed{A_x = 0}$$

$$+\uparrow\sum F_y = 0 \rightarrow A_y - R_1 - R_2 - R_3 + B_y = 0$$

$$+\circlearrowleft\sum M_A = 0 \rightarrow -R_1(0.5) - R_2(2.84) - R_3(\overset{4.5}{\cancel{5-0.5}}) + B_y(5) = 0$$

$$\rightarrow -10(0.5) - 70.5(2.84) - 37(4.5) + B_y(5) = 0$$

$$\rightarrow B_y = \frac{5 + 200.22 + 166.5}{5} = \frac{371.72}{5} = 74.344 \text{ KN}$$

$$\rightarrow \boxed{B_y = 74.344 \text{ KN}} \uparrow$$

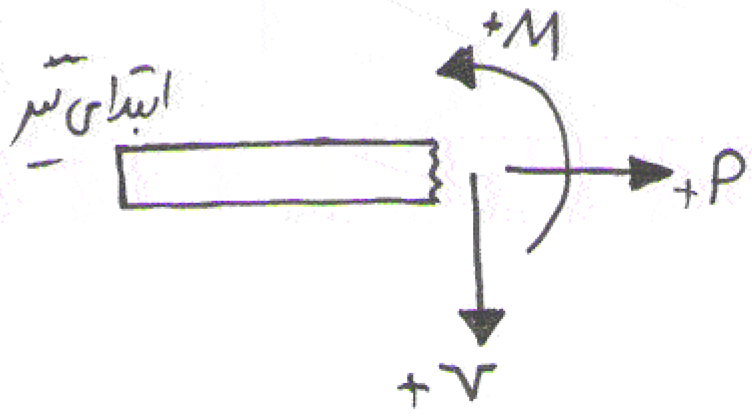
حال مقدار B_y را در معادله $+\uparrow\sum F_y$ می گذاریم :

$$A_y - 10 - 70.5 - 37 + 74.344 = 0$$

$$\rightarrow \boxed{A_y = 43.15 \text{ KN} \uparrow}$$

رسم دیاگرام های نیرو های محوری (P)، و نیروهای برشی (V) و لنگر خمشی (M)

برای رسم دیاگرام های فوق می بایست در برخی نقاط برش زد و در آن نقطه $\sum M$ و در آن قطعه برش خورده $\sum F_x$ و $\sum F_y$ را نوشت و برابر صفر قرار داد. تا معادله ی P و V و M بدست آیند. ما همچون روش معمول تیرها را از چپ به راست برش می زنیم و در برشمان نیرو ها را به شکل روبرو مثبت خواهیم داشت:



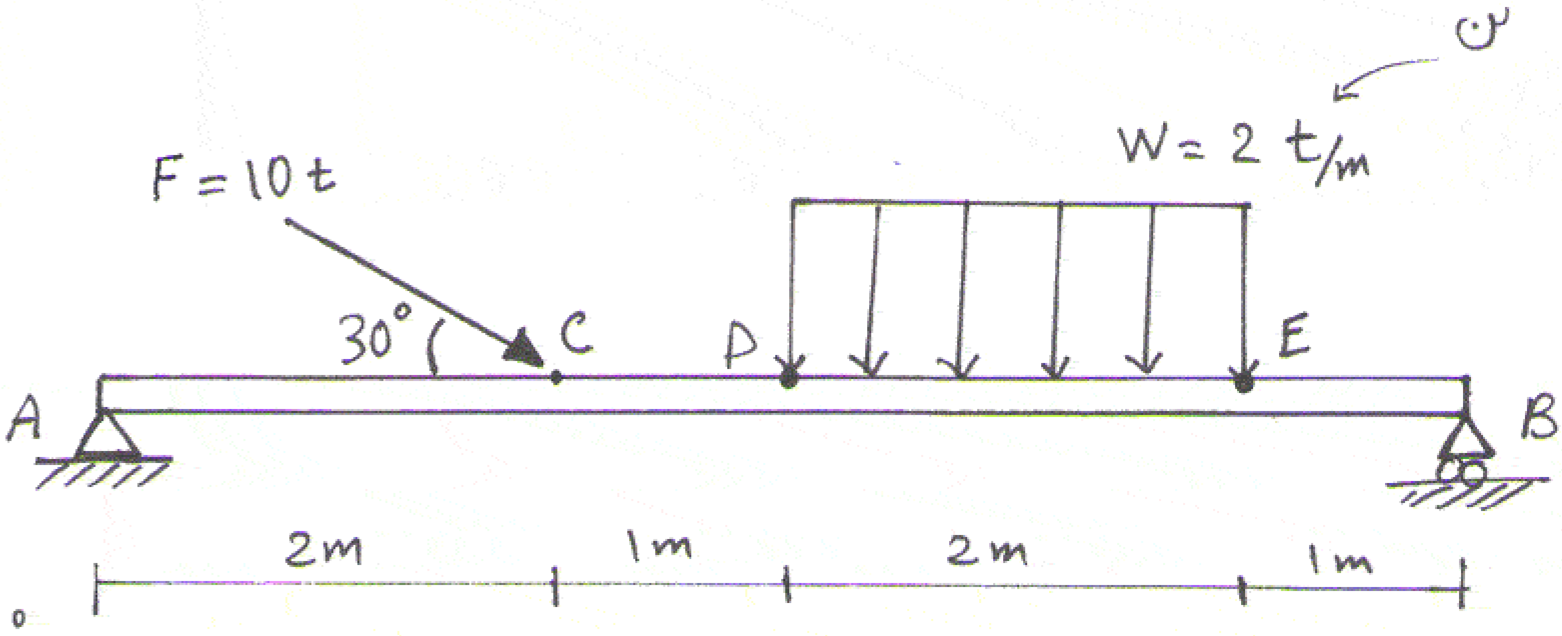
«محل برش زدن» برش را بین دو تغییر غیر پیوسته ی نیرو می زنیم.
مثلا قبل و بعد از تکیه گاه - قبل و بعد از بار متمرکز - قبل و بعد از یک لنگر مجزا و در میان یک بار گسترده. و بعد از برش زدن هر قطعه ی ایجاد شده را یک به یک با معادلات تعادل پوشش می دهیم.

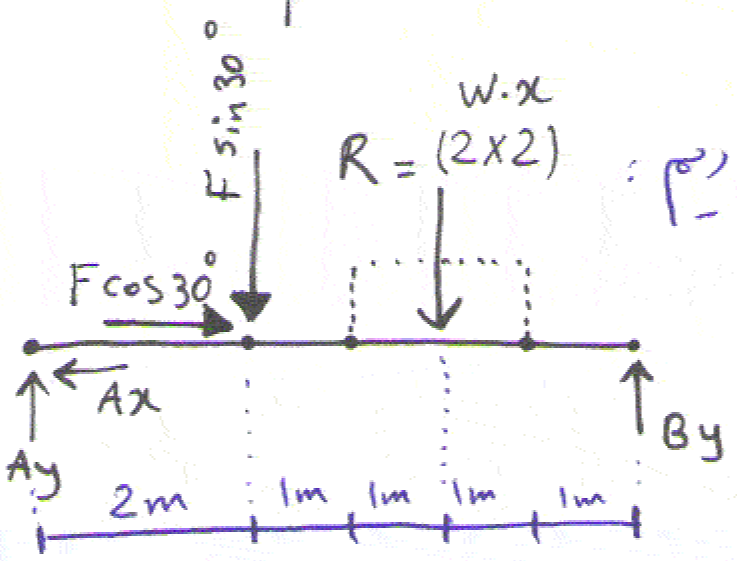
نکته: لنگر را حول نقطه برش خورده می گیریم.

نکته: کلیه ی فواصل از ابتدای تیر تا نقطه برش خورده را x می گیریم و بقیه فواصل در آن تکه ی تیر را براساس آن x می نویسیم.

بقیه ی نکات با حل مثال ها توضیح داده خواهند شد.

مثال | دیاگرام نیروهای محوری ، برشی و لنگر خمشی را بدست آورید : (سوال مهم جزوه)





پاسخ : ابتدا عکس العمل های تکیه گاهی را بدست می آوریم :

بارگسترده مستطیلی را به بار متمرکز (R) تبدیل می کنیم

و نیروی (F) که باری متمرکز و مورب است را تجزیه می کنیم

معادلات تعادل را برای کل تیر می نویسیم و عکس العمل ها را محاسبه می کنیم :

$$\xrightarrow{+} \sum F_x = 0 \rightarrow -A_x + F\cos 30^\circ = 0 \rightarrow A_x = (10t)(\cos 30^\circ) = 8.66\ \text{ton}$$

$$\rightarrow \boxed{A_x = 8.66\ \text{ton}}$$

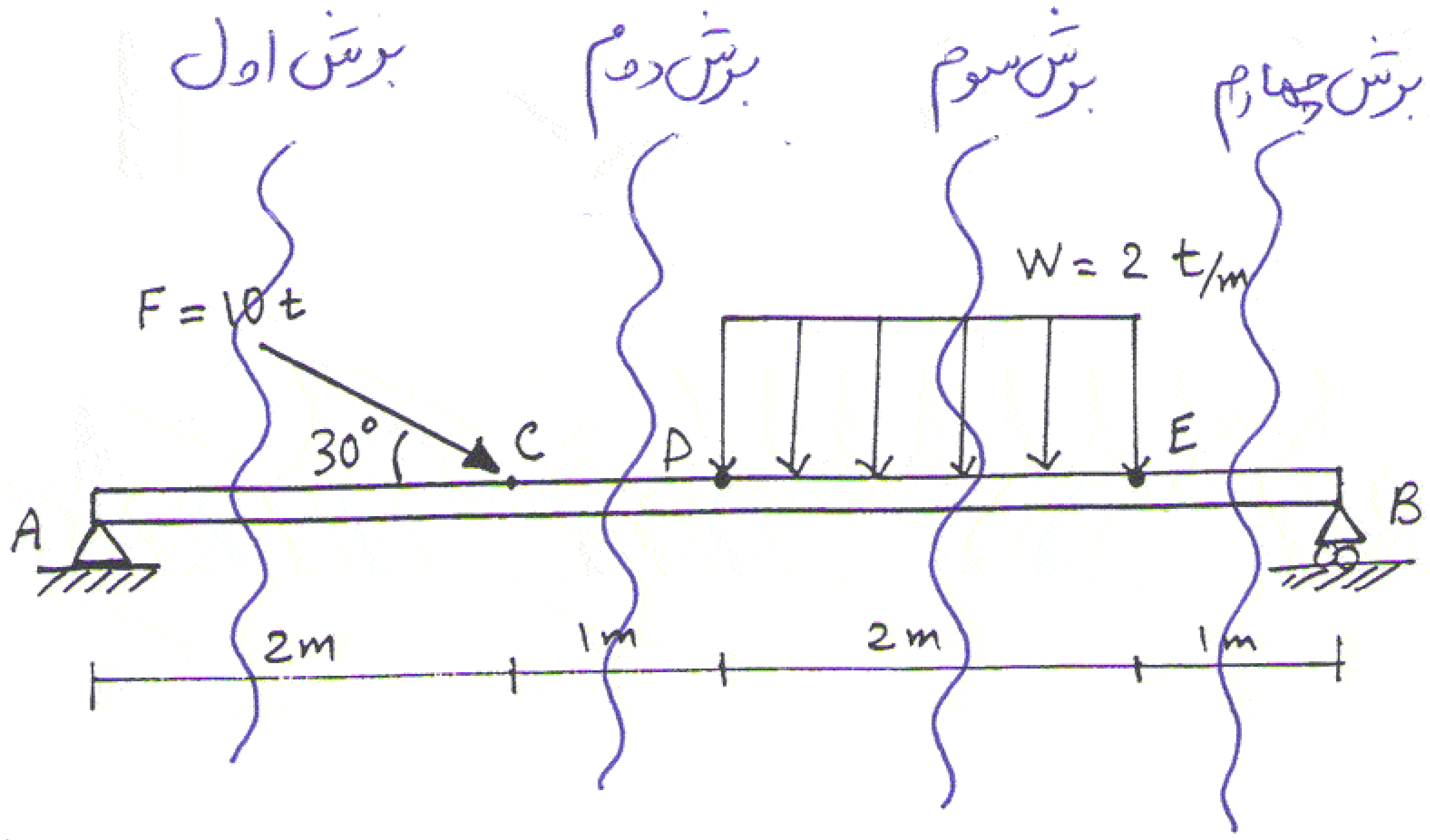
$$+\uparrow \sum F_y = 0 \rightarrow A_y - F(\sin 30^\circ) - R + B_y = 0$$

$$\rightarrow A_y - (10)\left(\frac{1}{2}\right) - (2\times 2) + B_y = 0 \rightarrow \boxed{A_y + B_y = 9} \bigstar$$

$$+\circlearrowright \sum M_A = 0 \rightarrow -F(\sin 30^\circ)(2) - R(4) + B_y(6) = 0$$

$$\rightarrow -10 - 16 + B_y(6) = 0 \rightarrow \boxed{B_y = 4.33\ \text{ton}} \text{ و } \xrightarrow{\bigstar} A_y = 9 - 4.33 = 4.67\ \text{ton}$$

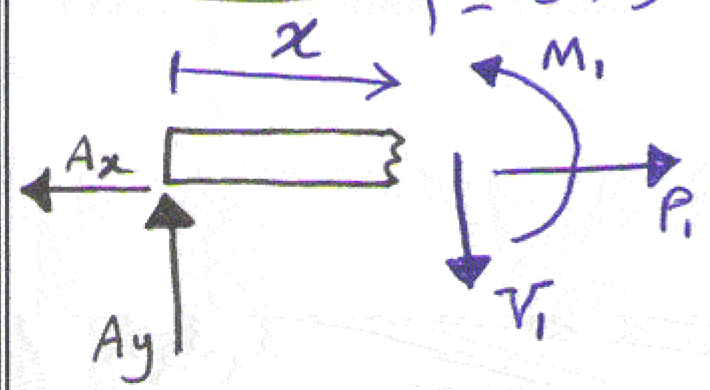
تیر داده شده را در فواصل مناسب برش می زنیم :



بازه ی برش اول

$0 < x < 2$

برش اول که بین نقاط (A و C) قرار دارد را مورد بررسی قرار می دهیم :



قطعه ی برش زده می تواند به اندازه ای از کمی بزرگتر از صفر

تا اندازه ای کمی کمتر از 2 باشد :

برای این قطعه معادلات تعادل را می نویسیم :

$$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0 \rightarrow -A_x + P_1 = 0$$

$$\rightarrow P_1 = A_x \Rightarrow \boxed{P_1 = 8.66 \text{ ton}}$$

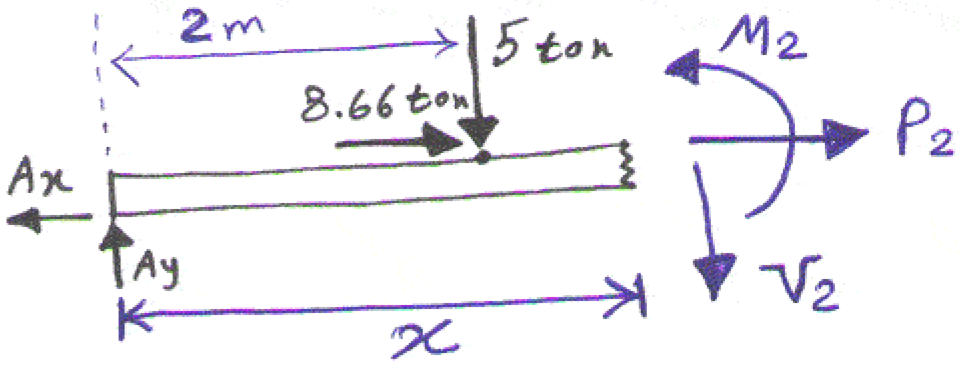
$$+\uparrow \sum F_y = 0 \rightarrow A_y - V_1 = 0 \rightarrow V_1 = A_y \rightarrow \boxed{V_1 = 4.67 \text{ ton}}$$

$$+\circlearrowleft \sum M = 0 \rightarrow M_1 - A_y(x) = 0 \rightarrow M_1 = 4.67(x) \rightarrow \boxed{M_1 = 4.67x}$$

نکته : لنگر را حول نقطه ی برش خورده می گیریم .

نکته : اگر از معادله ی M مشتق بگیریم معادله V و اگر از V انتگرال بگیریم معادله M بدست می اید .

برش دوم در بازه‌ی $2<x<3$ قرار می‌گیرد و قطعه‌ی زیر را می‌سازد



برای این قطعه نیز معادلات تعادل را می‌نویسیم.

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \rightarrow -A_x + 8.66 + P_2 = 0 \rightarrow -\cancel{8.66}+\cancel{8.66}+P_2=0 \rightarrow \boxed{P_2=0}$$

F نیروی تجزیه شده $= F\sin 30^\circ$

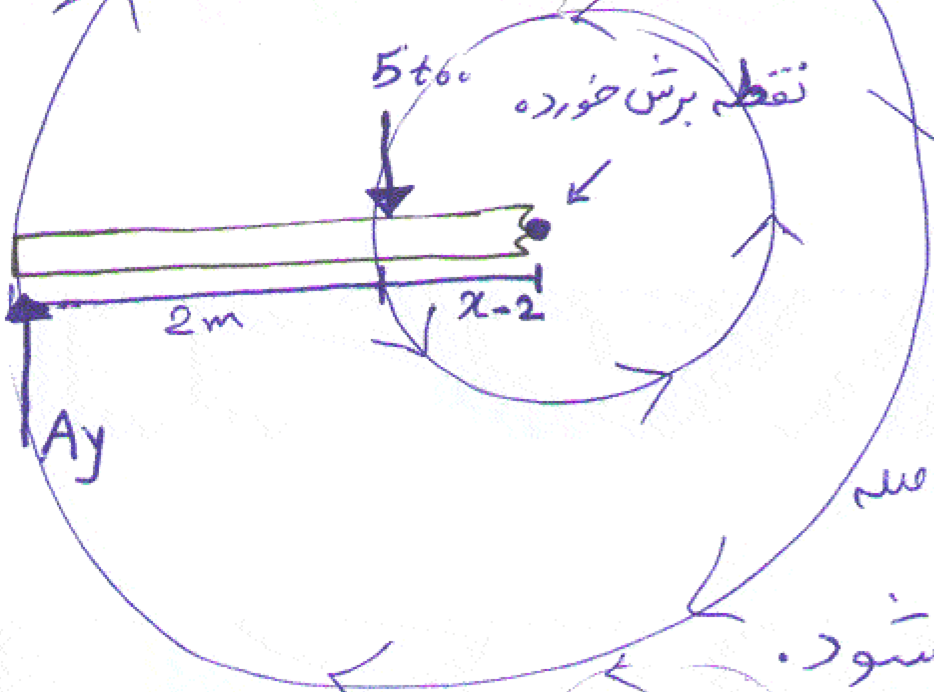
$$+\uparrow\sum F_y = 0 \rightarrow A_y - 5 - V_2 = 0 \rightarrow 4.67-5=V_2 \rightarrow \boxed{V_2=-0.33}$$

$$+\circlearrowright\sum M = 0 \rightarrow -A_y(x) + 5(x-2) + M_2 = 0$$

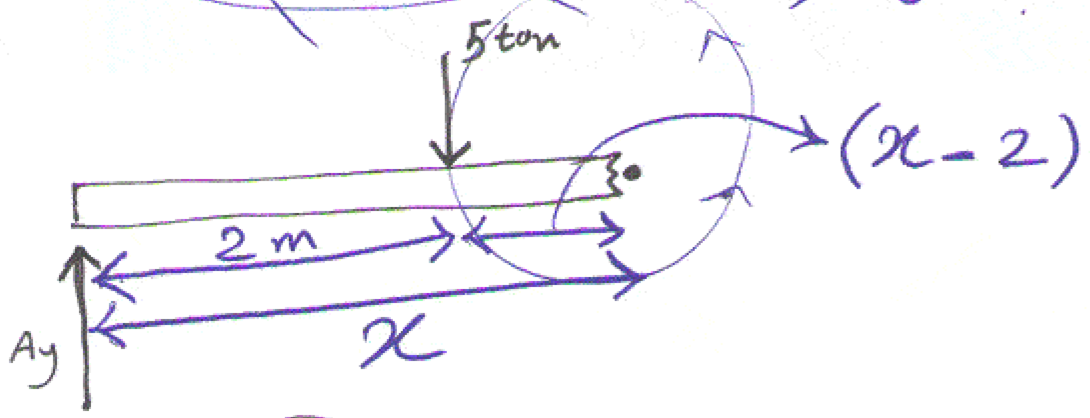
$$\rightarrow -4.67(x)+5x-(5)(2)+M_2=0 \rightarrow \boxed{M_2=-0.33x+10}$$

توضیح گشتاورگیری: گشتاورها در نقطه‌ی برش خورده از دو نیروی (Ay و $F\sin 30^\circ = 5$ ton) در

فاصله‌های‌شان ایجاد می‌شود:



در شکل مقابل گشتاور حاصل از Ay چون ساعتگرد است منفی می‌شود و گشتاور 5 ton در فاصله $(x-2)$ چون پادساعتگرد است مثبت می‌شود.

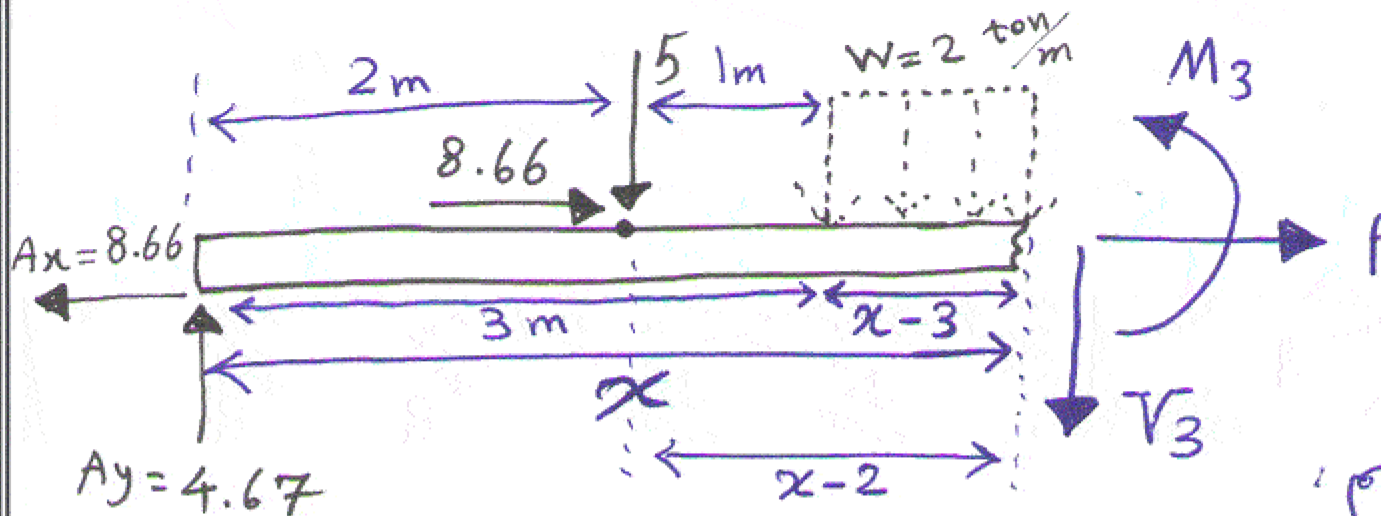


فاصله نیز به شکل روبرو بدست می‌آید.

نکته: اگر از M_2 مشتق بگیریم V_2 بدست می‌آید:

$$\boxed{\frac{dM}{dx} = V}$$

برش سوم در بازه‌ی $3 < x < 5$ در دل بارگسترده زده می‌شود:



معادلات تعادل را برای این قطعه می‌نویسیم:

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \rightarrow \cancel{-8.66} + \cancel{8.66} + P_3 = 0 \rightarrow \boxed{P_3 = 0}$$

$$+\uparrow\sum F_y = 0 \rightarrow \underbrace{4.67}_{Ay} - \underbrace{5}_{F\sin} - \underbrace{\left(2(x-3)\right)}_{\text{بار معادل بارگسترده}} - \underbrace{V_3}_{\text{نیروی برشی}} = 0$$

$$\rightarrow 4.67 - 5 - 2x + 6 = V_3 \rightarrow \boxed{V_3 = -2x + 5.67}$$

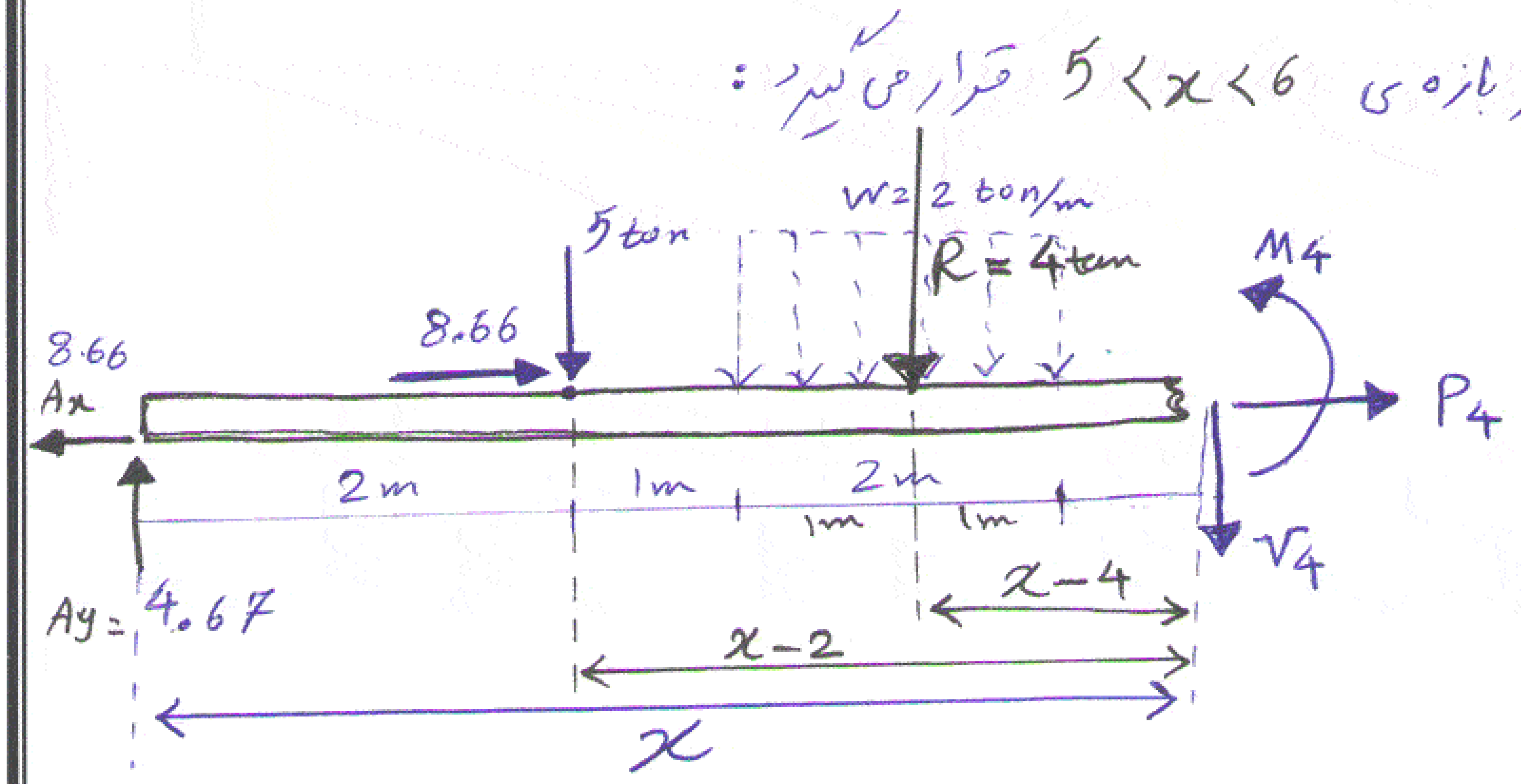
$$+\circlearrowleft\sum M = 0 \rightarrow -A_y(x) + 5\underbrace{(x-2)}_{\text{فاصله از نقطه برش}} + \underbrace{\left(\cancel{2}(x-3)\right)}_{\text{نیروی معادل بارگسترده}}\underbrace{\left(\frac{x-3}{\cancel{2}}\right)}_{\text{فاصله بار معادل از نقطه‌ی برش}} + M_3 = 0$$

$$\rightarrow -4.67(x) + \overbrace{5(x-2)}^{5x-10} + \overbrace{(x-3).(x-3)}^{x^2+9-6x} + M_3 = 0$$

$$\rightarrow M_3 = 4.67x - 5x + 10 - x^2 - 9 + 6x \rightarrow \boxed{M_3 = -x^2 + 5.67x + 1}$$

* در این قطعه نیز فاصله نیروی 5 تن از محل برش $(x-2)$ است و بار متمرکز معادل گسترده برابر است با $(W.x) = ((2\,ton).(x-3))$ و طول آن قسمت زیر بارگسترده $(x-3)$ است که محل اثر بار معادل آن نصف آن است یعنی $\left(\frac{x-3}{2}\right)$ و مشتق M_3 نسبت به x معادله‌ی V_3 را به ما می‌دهد که صحت کارها را نشان می‌دهد.

برش چهارم نیز در بازه ی $5<x<6$ قرار می گیرد :



$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x=0 \rightarrow -\cancel{8.66}+\cancel{8.66}+P_4=0 \rightarrow \boxed{P_4=0}$$

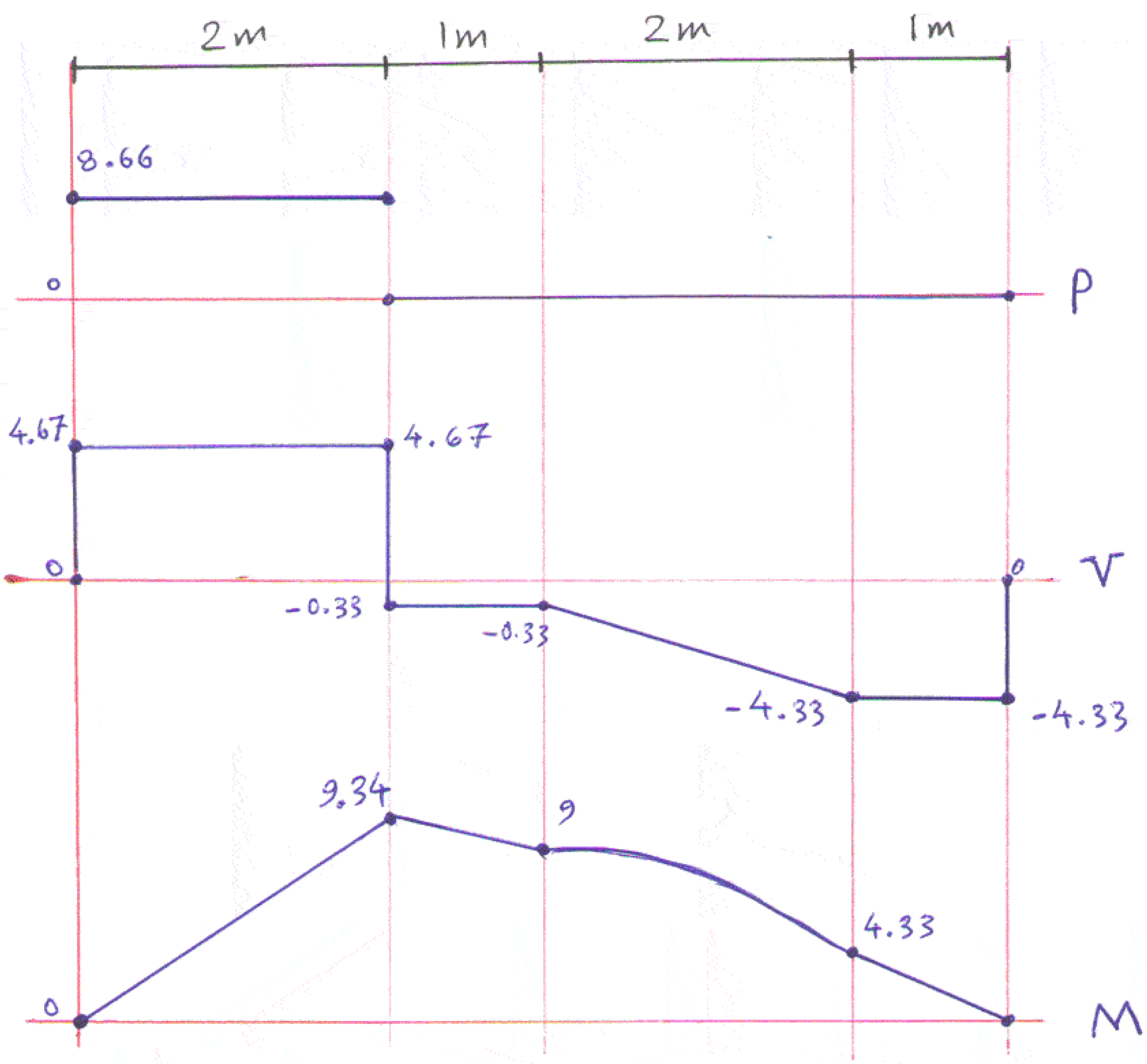
$$+\uparrow\sum F_y=0 \rightarrow A_y-5-R-V_4=0 \rightarrow V_4=4.67-5-4 \rightarrow \boxed{V_4=-4.33}$$

$$+\circlearrowleft\sum M=0 \rightarrow -A_y(x)+5(x-2)+R(x-4)+M_4=0$$

$$\rightarrow M_4=4.67x-5x+10-4x+16 \longrightarrow \boxed{M_4=-4.33x+26}$$

می توانیم اطلاعات بدست آمده برای هر چهار بازه را در جدول زیر بنویسیم :

$0<x<2$	$2<x<3$	$3<x<5$	$5<x<6$
$P_1=8.66t$	$P_2=0$	$P_3=0$	$P_4=0$
$V_1=4.67$	$V_2=-0.33$	$V_3=-2x+5.67$	$V_4=-4.33$
$M_1=4.67x$	$M_2=-0.33x+10$	$M_3=-x^2+5.67x+1$	$M_4=-4.33x+26$



* برای V_3 که معادله ی یک خط است از روش نقطه دهی خط را رسم می کنیم :

$$V_3 = -2x + 5.67$$

x	3	5
V_3	-0.33	-4.33

* برای رسم منحنی درجه ۲، باید جهت تقعر را بدانیم جهت تقعر با علامت مقدار مشتق دوم تابع برابر است. اگر مثبت بود به این شکل و اگر منفی بود یعنی نقطه ی max داریم. ماگزیمم لنگر خمشی در فاصله ای اتفاق می افتد که نمودار نیروی برشی محور ها را

قطع کند . مثلا در همین مثال نمودار نیروی برشی در نقطه $x=2m$ محور افقی را قطع کرده و در واقع مقدار V را صفر نموده است .

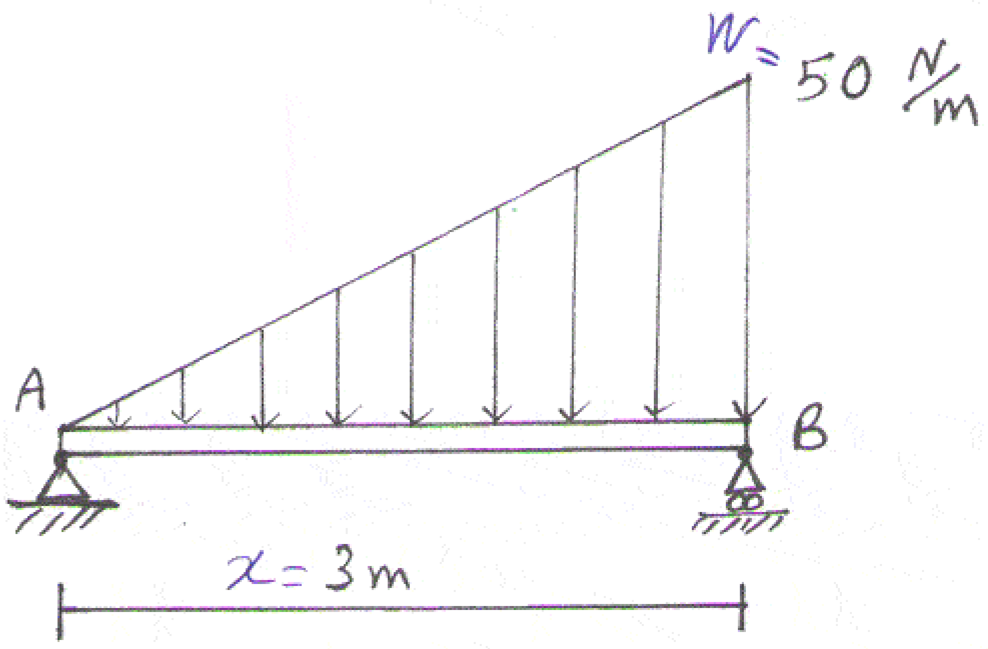
که در همان نقطه لنگر خمشی ماکزیمم می شود　　$V=0 \rightarrow$ ماکزیمم لنگر خمشی

و مقدارش برابر است با　$\xrightarrow{x=2m} M_1 = 4.67(2) = 9.34\ (ton.m)$

پس این تیر باید برای ماکزیمم لنگر خمشی 9.34 تن متر ساخته شود.

همچنین مساحت زیر نمودار V به ما ماکزیمم لنگر خمشی را می دهد در آن بازه.

$\boxed{\text{مثال}}$ دیاگرام نیرو های برشی و لنگر خمشی را برای تیر زیر رسم کنید:

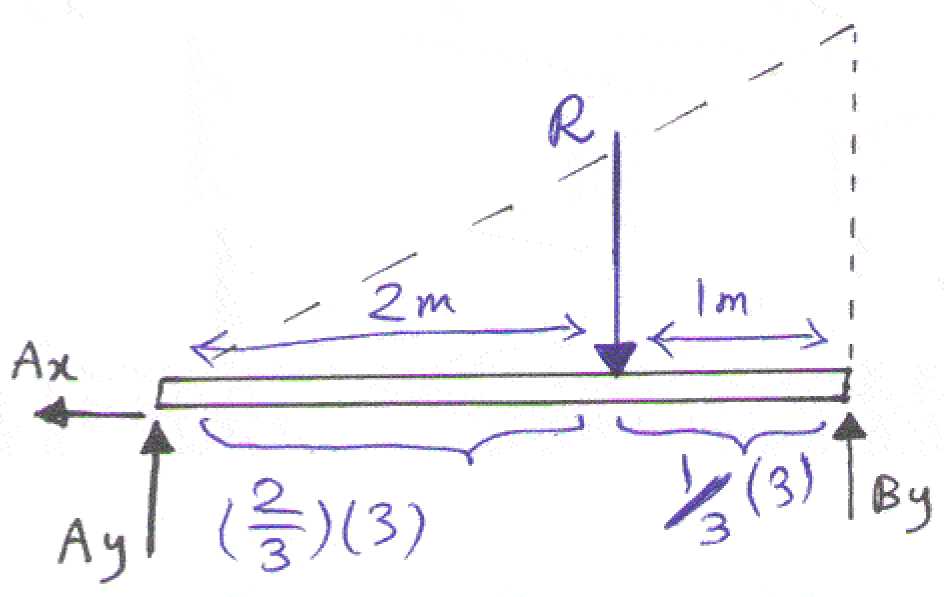


* دیاگرام نیروها را برای تیر زیر رسم می کنیم تا عکس العمل های تکیه گاهی را به دست آوریم:

بار معادل بار گسترده مثلثی و برابر است با نصف حاصلضرب شدت بار (W) در قاعده (x)

$$R = \left(\frac{1}{2}\right)(50)(3) = 75\ N$$

و محل اثرش فاصله $\frac{1}{3}$ از رأس زاویه قائمه است



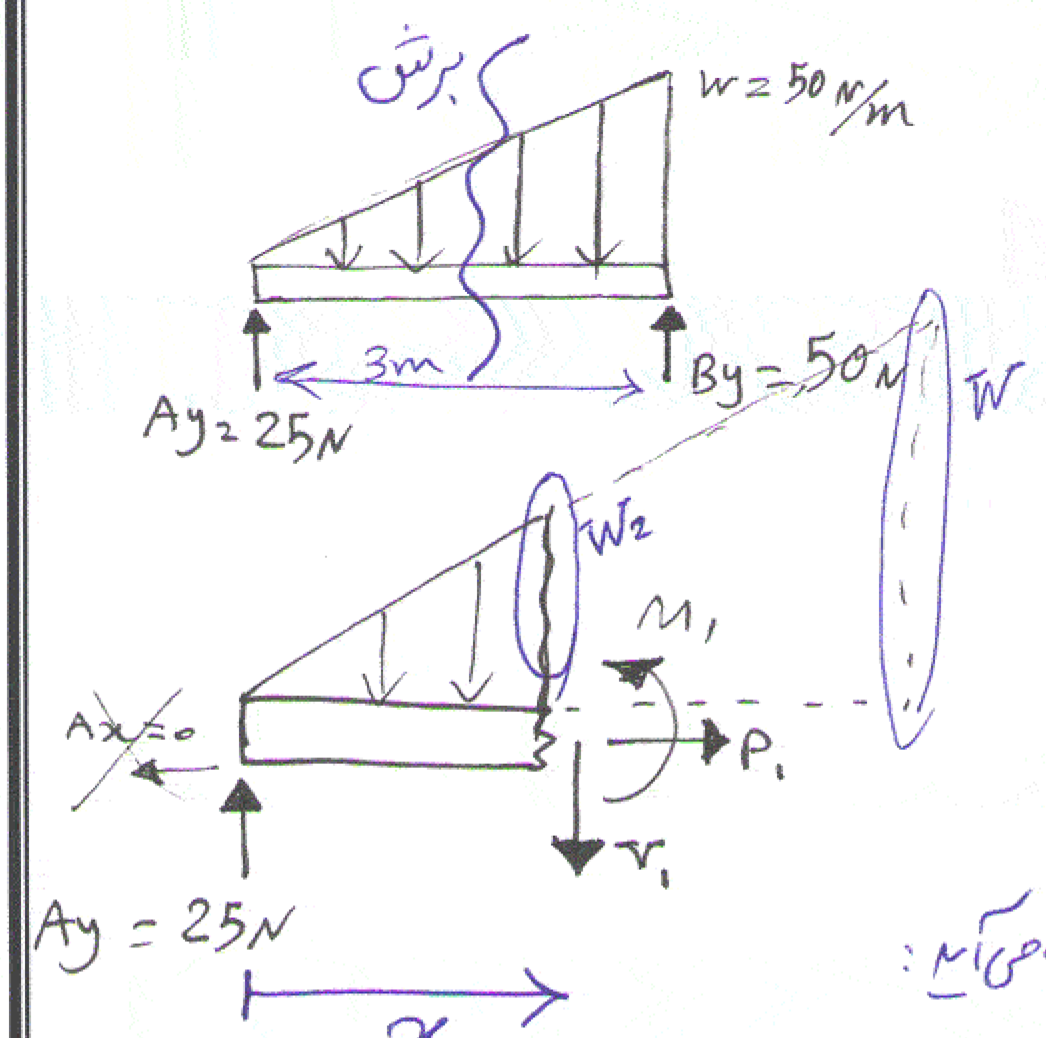
معادلات تعادل را برای تیر می نویسیم:

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x=0 \rightarrow \boxed{A_x=0}$$

$$+\circlearrowright \sum M_A=0 \rightarrow -R(2)+B_y(3)=0 \rightarrow B_y=\frac{(2)(75)}{3}=\boxed{50\,N}$$

$$+\uparrow\sum F_y=0 \rightarrow A_y-R+B_y=0 \rightarrow A_y-75+50=0 \rightarrow \boxed{A_y=25\,N}$$

باتوجه به این شدت بار یکنواخت است یک برش میان دو تکیه گاه کفایت می کند.



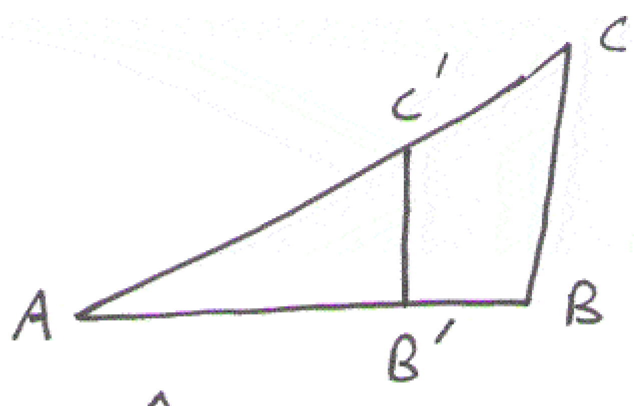
شدت بار برای این بار گسترده ارتفاع مثلث است و اگر برش ایجاد کنیم در قطعه ی کوچکتر شده (مثلث مشابه کوچکتر) می بایست ارتفاع را بدست آوریم.

W_2 یا ارتفاع مثلث حاصل شده در قطعه ی برش خورده از طریق مثلث های مشابه به دست می آید:

$$\frac{x}{W_2}=\frac{3}{50} \rightarrow \boxed{W_2=\frac{50x}{3}}$$

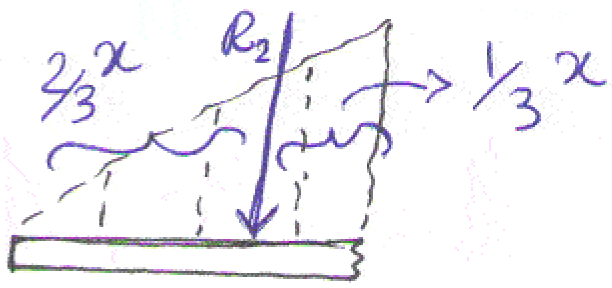
پس شدت بار در نقطه ی برش خورده برای بار گسترده مثلثی که با ارتفاع آن $\frac{50x}{3}$ برابر است می شود

نکته مثلث های مشابه:



$$\overset{\triangle}{AB'C'} \sim \overset{\triangle}{ABC} \rightarrow \frac{AB'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}$$

و یا $\frac{AB'}{B'C'}=\frac{AB}{BC}$ یا $\frac{AB'}{AC'}=\frac{AB}{AC}$



معادلات تعادل برای این قطعه در بازه ی $0<x<3$:

$$R_2 = \frac{W_2 \cdot x}{2} = \left(\frac{50x}{2\times3}\right)(x) = \frac{50x^2}{6}$$

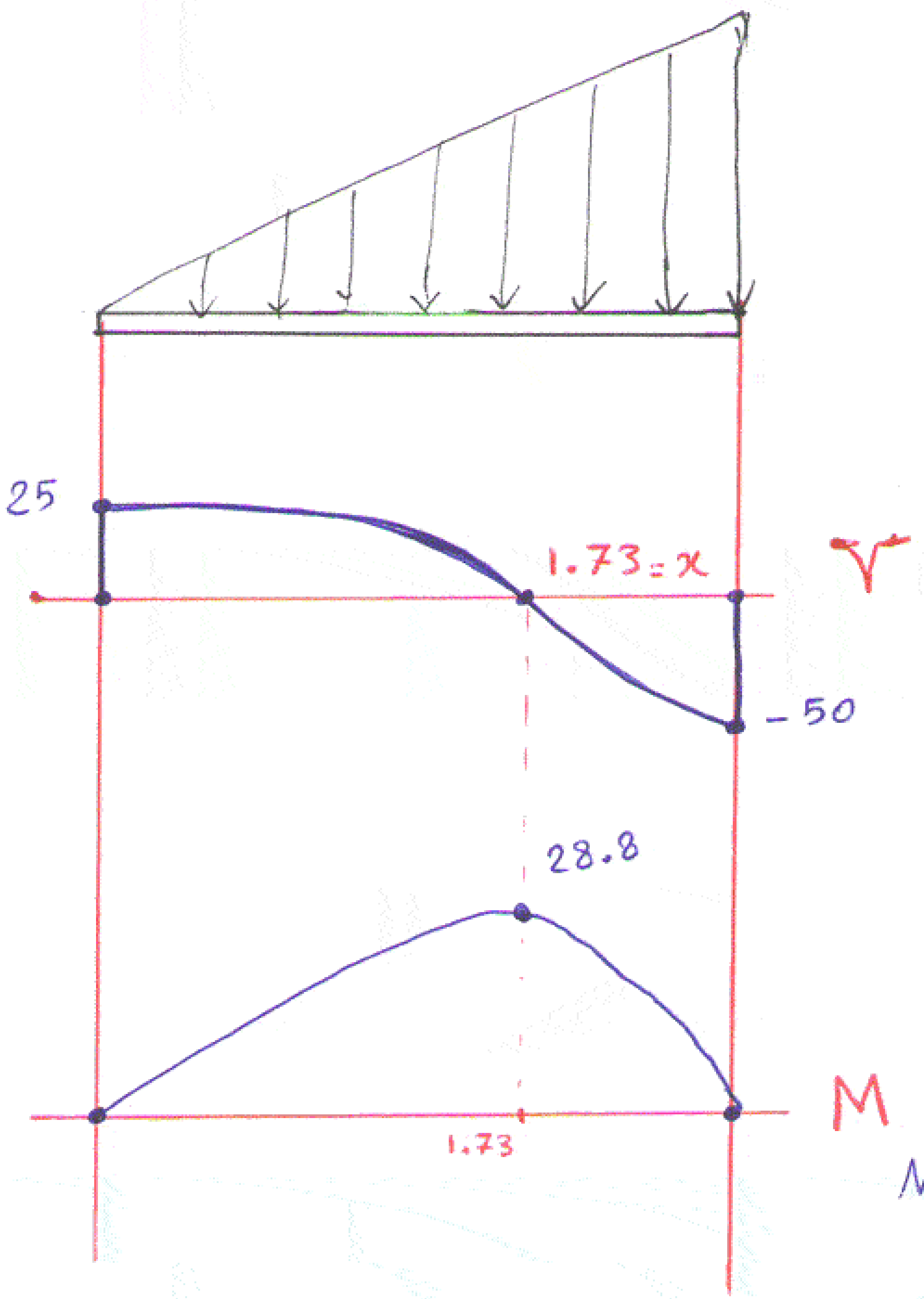
$$\xrightarrow{+} \sum F_x = 0 \rightarrow P_1 = 0$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \rightarrow A_y - R_2 - V_1 = 0 \rightarrow \boxed{V_1 = 25 - \frac{50x^2}{6}}$$

$$+\circlearrowleft \sum M = 0 \rightarrow -A_y(x) + R_2\left(\frac{1}{3}x\right) + M_1 = 0$$

$$\rightarrow M_1 = +25x - \left(\frac{50x^2}{6}\right)\left(\frac{1}{3}x\right) \Rightarrow$$

$$\rightarrow M_1 = \boxed{\frac{-50x^3}{18} + 25x}$$



برای پیدا کردن محل ماکزیمم لنگر خمشی

باید x را بر صفر شدن V پیدا کنیم

تا محل برخورد نمودار نیروی برشی با محور x

را بیابیم ⇐ $V_1 = 0 \rightarrow x = ?$

$$25 - \frac{50x^2}{6} = 0 \rightarrow x = 1.73$$

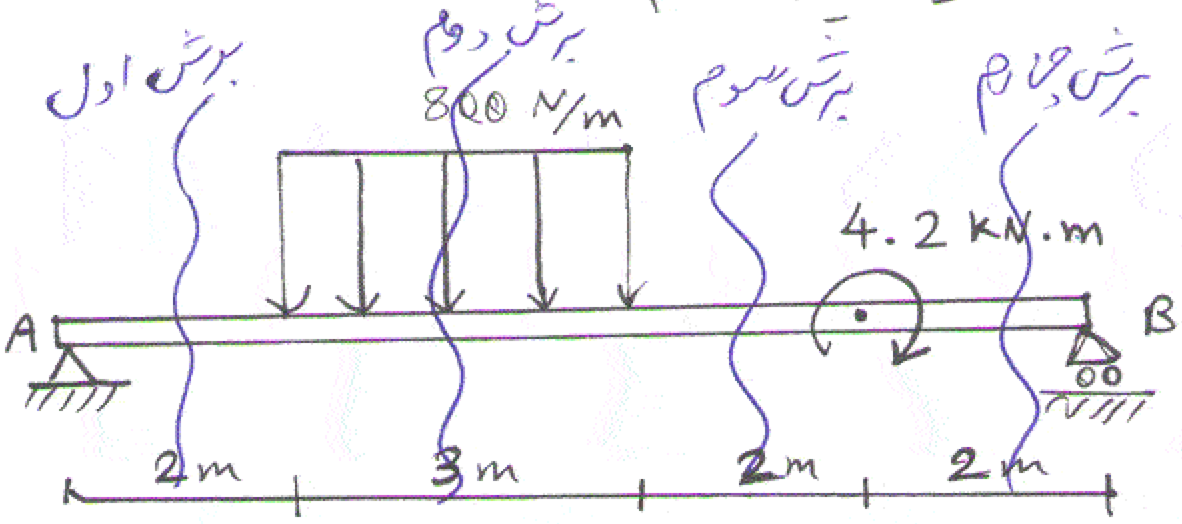
پس در $x = 1.73$ لنگر خمشی ماکزیمم

می‌شود

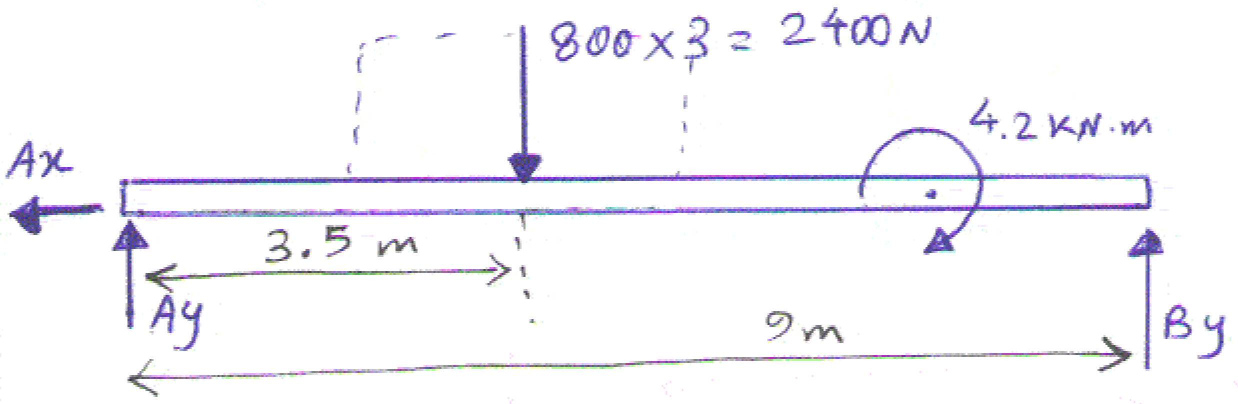
$$M = \frac{-50(1.73)^3}{18} + 25(1.73) = 28.8$$

تیر باید برای این لنگر طراحی شود

مثال دیاگرام نیروهای برشی و لنگر خمشی تیر زیر را رسم کنید؛ (تمرین جزوه و ص - ۱۴۰ مریام)



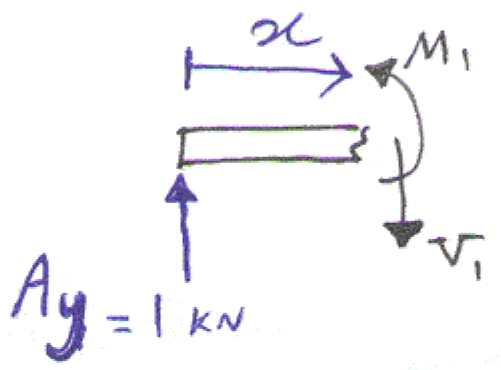
تنها نکته در این مسئله این است که کوپل 4.2 کیلو نیوتن متری فقط در معادلات لنگر شرکت می کند و چون کوپل ما ساعتگرد است پس در معادلات منفی می آید.



$$\xrightarrow{+} \sum F_x = 0 \rightarrow \boxed{A_x = 0}$$

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \rightarrow -\frac{2400}{1000}(3.5) + B_y(9) - 4.2 = 0 \rightarrow B_y = 1.4\,kN$$

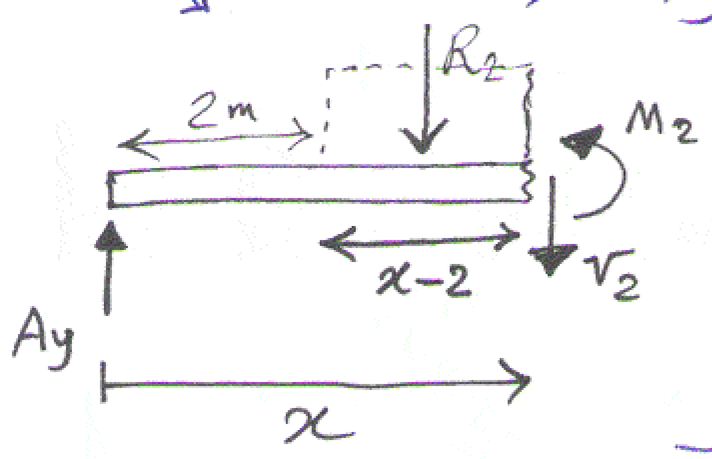
$$+\uparrow \sum F_y = 0 \rightarrow A_y - 2.4 + B_y = 0 \rightarrow A_y = 2.4 - 1.4 = 1\,kN$$



برش اول : $0 < x < 2$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \rightarrow A_y - V_1 = 0 \rightarrow \boxed{V_1 = 1\,kN}$$

$$+\circlearrowleft \sum M = 0 \rightarrow -A_y(x) + M_1 = 0 \rightarrow \boxed{M_1 = 1x}$$



برش دوم : $2 < x < 5$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \rightarrow A_y - V_2 - R_2 = 0 \rightarrow V_2 = A_y - R_2$$

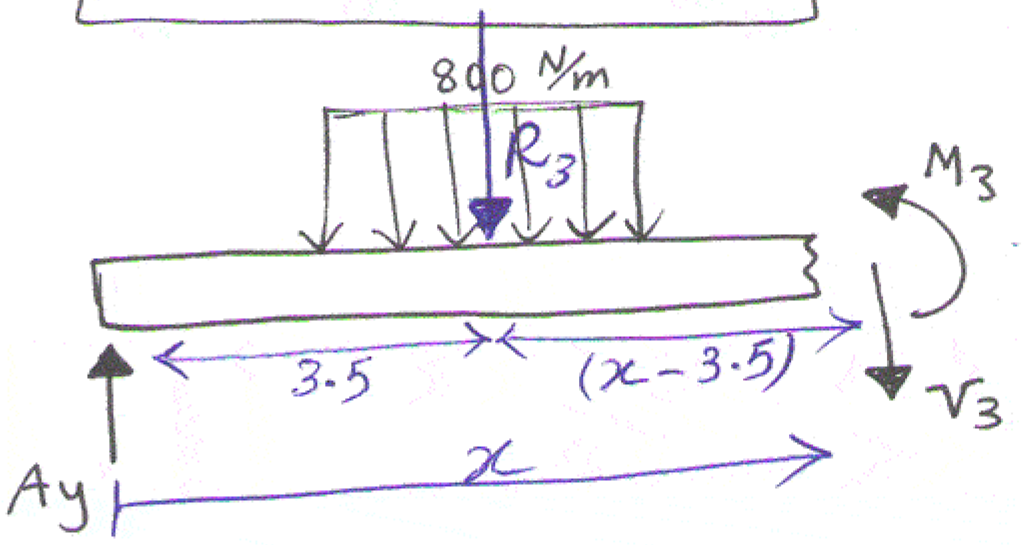
$$\rightarrow V_2 = 1 - (x-2)\left(\frac{800}{1000}\right) = 1 - 0.8x + 1.6$$

$$\boxed{V_2 = -0.8x + 2.6}$$

$$\circlearrowleft \sum M = 0 \to -A_y(x) + (0.8)(x-2)\left(\frac{x-2}{2}\right) + M_2 = 0$$

$$\to \boxed{M_2 = -0.4x^2 + 2.6x - 1.6}$$

برش سوم $5 < x < 7$

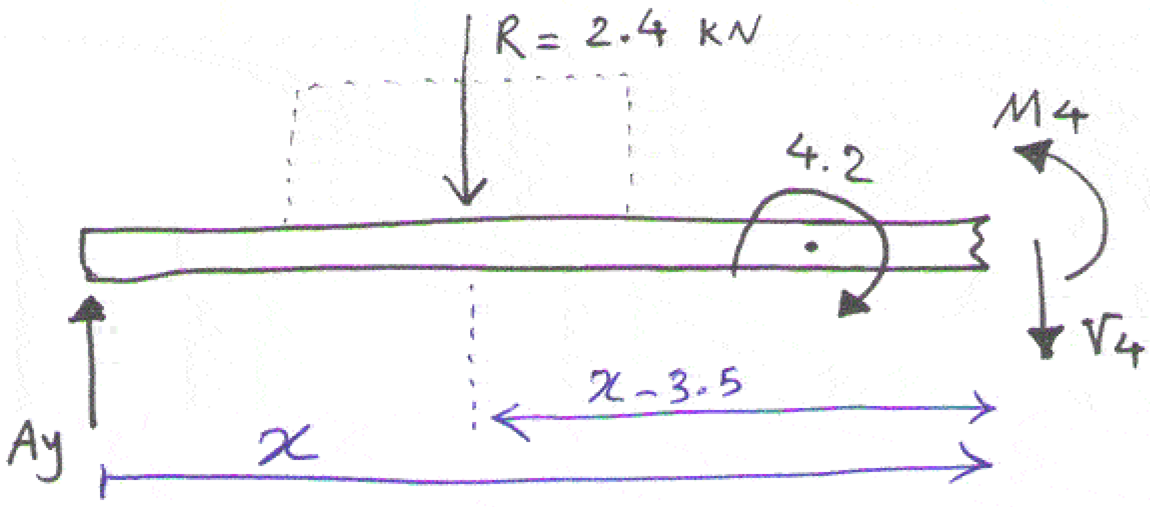


$$+\uparrow \sum F_y = 0 \to A_y - \left(\frac{800}{1000}\right)(3) - V_3 = 0 \to V_3 = +1 - 2.4 \to \boxed{V_3 = -1.4}$$

$$+\circlearrowleft \sum M = 0 \to -A_y(x) + R_3(x-3.5) + M_3 = 0$$

$$\to M_3 = 1(x) - ((0.8)\cdot(3))(x-3.5) \to \boxed{M_3 = -1.4x + 8.4}$$

برش چهارم : $7 < x < 9$

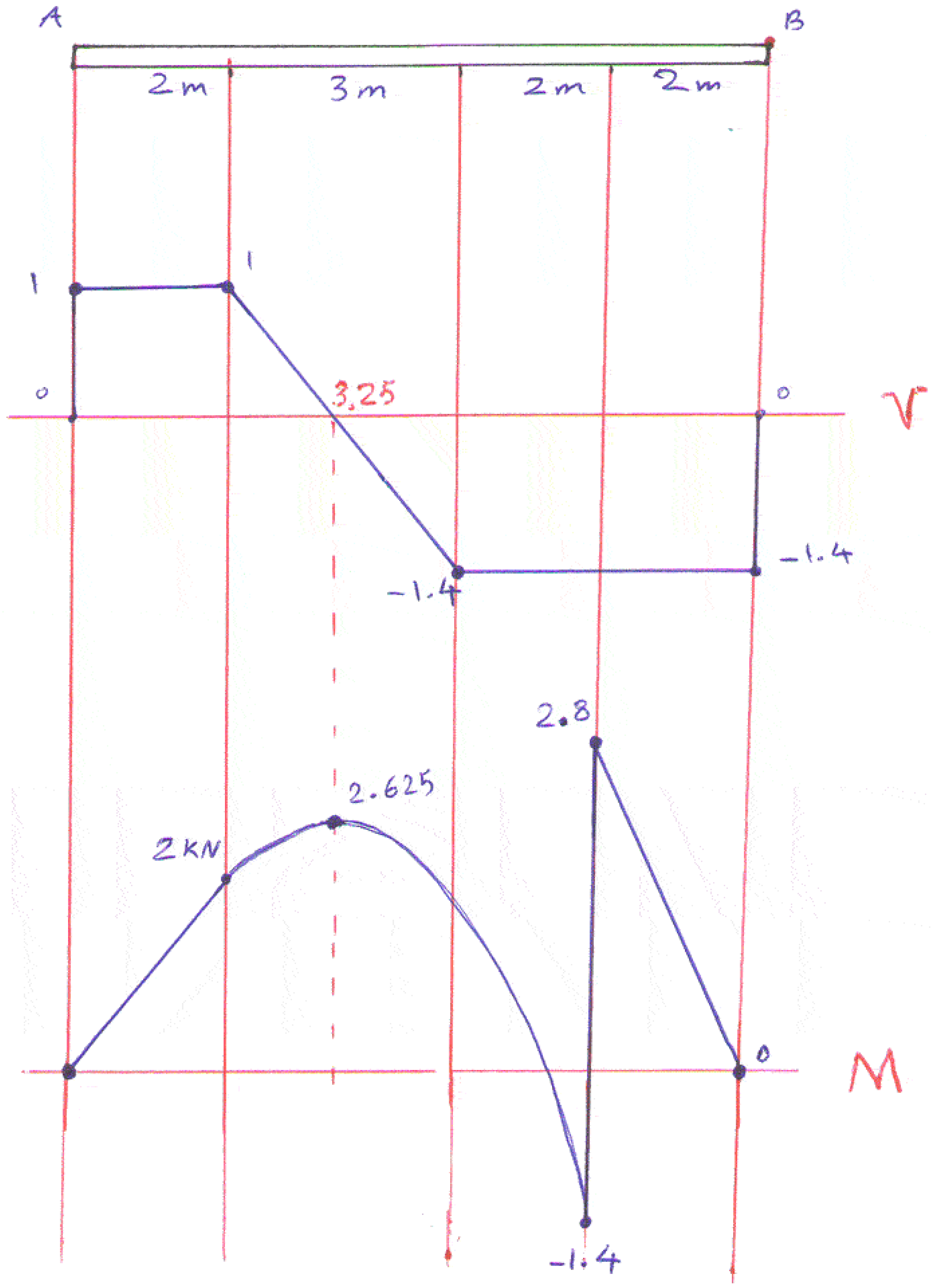


$$+\uparrow \sum F_y = 0 \to A_y - 2.4 - V_4 = 0 \to \boxed{V_4 = -1.4}$$

$$+\circlearrowleft \sum M = 0 \to -A_y(x) + (2.4)(x-3.5) + (-4.2) + M_4 = 0$$

$$\to M_4 = +x - 2.4x + 8.4 + 4.2 \to \boxed{M_4 = -1.4x + 12.6}$$

نکته : در بارهای گسترده مستطیلی نمودار بصورت خطی و در بارهای گسترده مثلثی نمودار بصورت منحنی در می آید؛



$$\begin{cases} V_1 = 1\,kN \\ V_2 = -0.8x + 2.6 \\ V_3 = -1.4 \\ V_4 = -1.4 \end{cases}$$

$\boxed{V_2 = 0 \rightarrow x = 3.25\,m}$

پیدا کردن محل ماکزیمم لنگر خمشی در این بازه

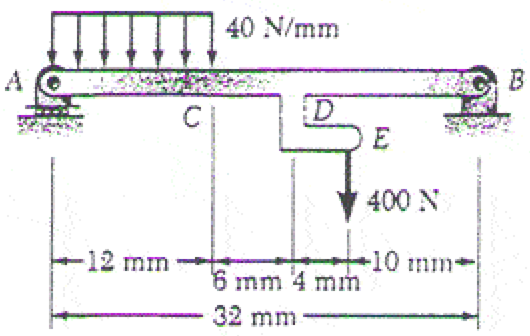
$$\begin{cases} M_1 = x \\ M_2 = -0.4x^2 + 2.6x - 1.6 \\ M_3 = -1.4x + 8.4 \\ M_4 = -1.4x + 12.6 \end{cases}$$

$x = 3.25 \rightarrow M_2 = 2.625$

ماکزیمم لنگر خمشی در طول تیر $2.8\,kN$ است پس تیر باید برای این لنگر طراحی شود.

مسئلهٔ نمونهٔ ۳.۷

نمودارهای برش و گشتاور خمشی را برای تیر AB رسم کنید. بار گستردهٔ ۴۰ N/mm بر ۱۲ mm از تیر، از A تا C و بار ۴۰۰ N به نقطهٔ E وارد می‌شود.



● حل:

جسم آزاد: کل تیر. عکس‌العملها را با در نظر گرفتن کل تیر به عنوان جسم آزاد تعیین می‌کنیم:

$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = ۰ :$$

$$B_y(۳۲\,\text{mm}) - (۴۸۰\,\text{N})(۶\,\text{mm}) - (۴۰۰\,\text{N})(۲۲\,\text{mm}) = ۰$$

$$B_y = +۳۶۵\,\text{N} \qquad B_y = ۳۶۵\,\text{N}\uparrow$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = ۰ :$$

$$(۴۸۰\,\text{N})(۲۶\,\text{mm}) + (۴۰۰\,\text{N})(۱۰\,\text{mm}) - A(۳۲\,\text{mm}) = ۰$$

$$A = +۵۱۵\,\text{N} \qquad A = ۵۱۵\,\text{N}\uparrow$$

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = ۰ : \quad B_x = ۰ \qquad B_x = ۰$$

حالا به جای بار ۴۰۰ نیوتونی سیستم کوپل ـ نیروی معادل وارد بر تیر در نقطهٔ D را قرار می‌دهیم.

برش و گشتاور خمشی. از A تا C. نیروهای داخلی در فاصلهٔ x از نقطهٔ A را با در نظر گرفتن بخشی از تیر واقع در طرف چپ مقطع ۱ تعیین می‌کنیم. به جای بخشی از بار گسترده که به این جسم آزاد وارد می‌شود برایند آن را می‌گذاریم و می‌نویسیم

$$+\uparrow \Sigma F_y = ۰ : \; ۵۱۵ - ۴۰x - V = ۰ \qquad V = ۵۱۵ - ۴۰x$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_۱ = ۰ : \qquad -۵۱۵x - ۴۰x\left(\frac{۱}{۲}x\right) + M = ۰$$

$$M = ۵۱۵x - ۲۰x^۲$$

چون نمودار جسم آزاد نشان داده شده را برای همهٔ مقادیر x کوچکتر از ۱۲ mm می‌توانیم به کار ببریم، عبارتهای به‌دست آمده برای V و M در ناحیهٔ $۰ < x < ۱۲\,\text{mm}$ معتبرند.

از C تا D. حالا اگر بخش واقع در طرف چپ مقطع ۲ را در نظر بگیریم و به جای بار گسترده برایندش را قرار بدهیم خواهیم داشت

$$+\uparrow \Sigma F_y = ۰ : \quad ۵۱۵ - ۴۸۰ - V = ۰ \qquad V = ۳۵\,\text{N}$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_۲ = ۰ : \; -۵۱۵x + ۴۸۰(x-۶) + M = ۰$$

$$M = (۲۸۸۰ + ۳۵x)\,\text{mN.m}$$

این عبارتها در ناحیهٔ $۱۲\,\text{mm} < x < ۱۸\,\text{mm}$ معتبرند.

از D تا B. با استفاده از بخشی از تیر که در طرف چپ مقطع ۳ قرار دارد، برای ناحیهٔ $۱۸\,\text{mm} < x < ۳۲\,\text{mm}$ داریم

$$+\uparrow \Sigma F_y = ۰ :$$

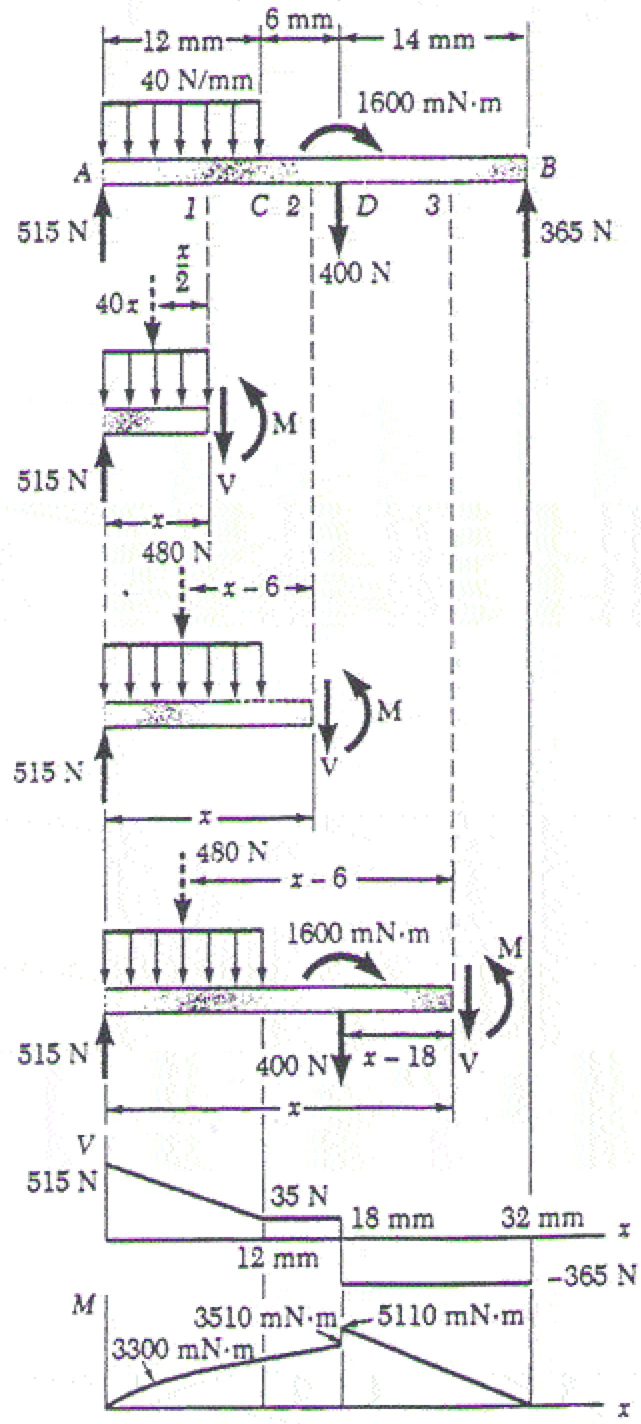
$$۵۱۵ - ۴۸۰ - ۴۰۰ - V = ۰ \qquad V = -۳۶۵\,\text{N}$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_۳ = ۰ :$$

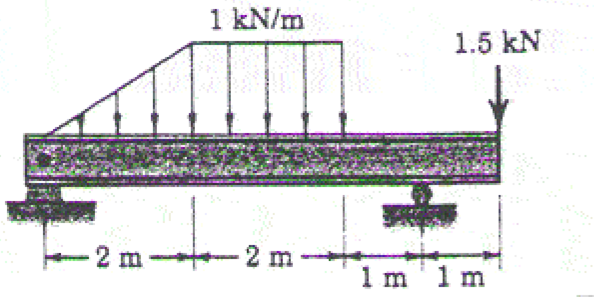
$$-۵۱۵x + ۴۸۰(x-۶) - ۱۶۰۰ + ۴۰۰(x-۱۸) + M = ۰$$

$$M = (۱۱۶۸۰ - ۳۶۵x)\,\text{mN.m}$$

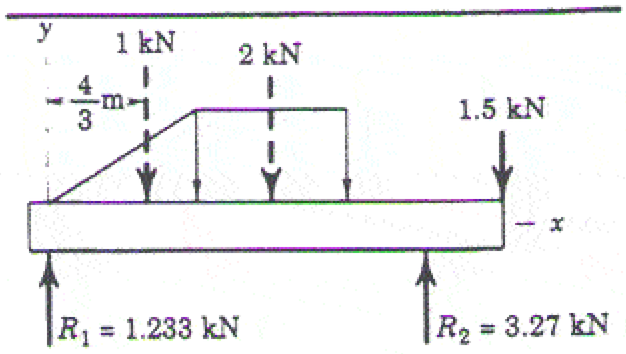
نمودارهای برش و گشتاور خمشی. حالا می‌توانیم نمودارهای برش و گشتاور خمشی برای کل تیر را رسم کنیم. می‌بینیم که کوپل با گشتاور ۱۶۰۰ mN.m وارد بر نقطهٔ D موجب ناپیوستگی در نمودار گشتاور خمشی می‌شود.



مثال ۵ـ۱۳. نمودارهای نیروی برشی و گشتاور خمشی را برای تیر بارگذاری شدهٔ شکل مقابل رسم کنید. ماکزیمم گشتاور خمشی را به‌دست آورید و محل آن را نسبت به انتهای چپ تیر تعیین کنید.



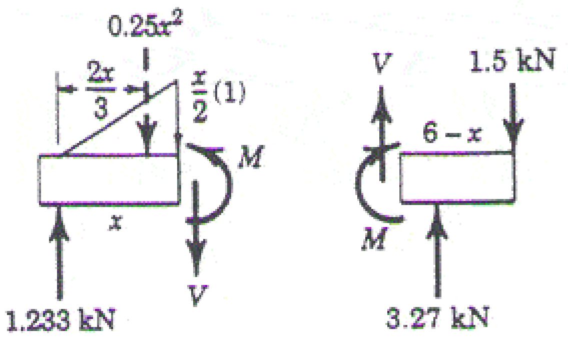
حل. دیاگرام آزادکل تیر را رسم می‌کنیم و در آن به‌جای بارهای گسترده، نیروهای متمرکز معادلشان را قرار می‌دهیم. عکس‌العمل تکیه‌گاهها را به‌دست می‌آوریم. تیر را در ناحیه $0 < x < 2\text{ m}$ برش می‌زنیم. دیاگرام آزاد سمت چپ مقطع برش را رسم می‌کنیم. معادلهٔ تعادل نیروها را در جهت قائم و معادلهٔ تعادل گشتاورها را حول مقطع برش می‌نویسیم، و به‌دست می‌آوریم:



$$[\Sigma F_y = 0] \qquad V = 1.233 - 0.25x^2$$

$$[\Sigma M = 0] \quad M + (0.25x^2)\frac{x}{3} - 1.233x = 0 \quad M = 1.233x - 0.0833x^3$$

روابط فوق را برای محدودهٔ $0 < x < 2\text{ m}$ روی نمودارهای نیروی برشی و گشتاور خمشی رسم می‌کنیم.

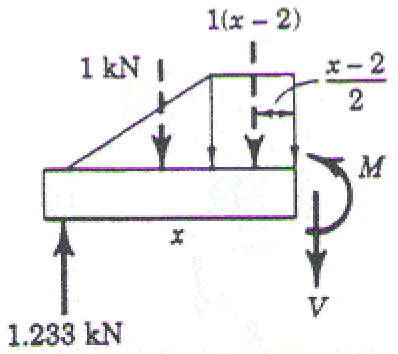


سپس در فاصلهٔ $2 < x < 4\text{ m}$ تیر را برش می‌زنیم. دیاگرام آزاد را رسم می‌کنیم، معادلهٔ تعادل نیروها را در جهت قائم و تعادل گشتاورها را حول مقطع برش می‌نویسیم، و به‌دست می‌آوریم:

$$[\Sigma F_y = 0] \quad V + 1(x-2) + 1 - 1.233 = 0 \qquad V = 2.23 - x$$

$$[\Sigma M = 0] \quad M + 1(x-2)\frac{x-2}{2} + 1[x - \tfrac{2}{3}(2)] - 1.233x = 0$$

$$M = -0.667 + 2.23x - 0.50x^2$$



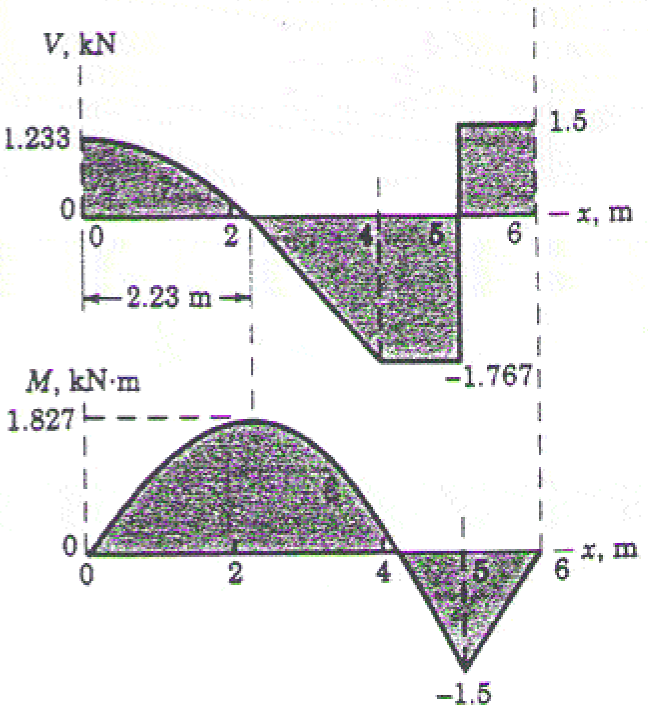
این نتایج را برای بازهٔ $2 < x < 4\text{ m}$ روی نمودارهای نیروی برشی و گشتاور خمشی رسم می‌کنیم.

مقطع برش بعدی در ناحیه $4 < x < 5\text{ m}$ است. برای تحلیل این مقطع، دیاگرام آزاد قسمت راست تیر را رسم می‌کنیم. توجه کنید که V و M را در جهات مثبت خود نشان داده‌ایم. از معادلات تعادل به‌دست می‌آوریم:

$$V = -1.767\text{ kN} \quad \text{و} \quad M = 7.33 - 1.76x$$

این نتایج را برای بازهٔ مورد نظر در نمودارهای نیروی برشی و گشتاور خمشی رسم می‌کنیم.

• قسمت آخر تیر را می‌توان به‌طور شهودی تحلیل کرد. در این ناحیه مقدار نیروی برشی ثابت و برابر $+1.5\text{ kN}$ است، و گشتاور خمشی به‌طور خطی کاهش می‌یابد تا در انتهای سمت راست تیر به صفر برسد.



ماکزیمم گشتاور در نقطهٔ $x = 2.23\text{ m}$، که نمودار نیروی برشی محور را قطع می‌کند، ایجاد می‌شود. این مقدار x را در رابطهٔ M برای ناحیه دوم قرار می‌دهیم و مقدار گشتاور ماکزیمم را برابر

$$M = 1.827\text{ kN.m}$$ □

به‌دست می‌آوریم.

توجه کنید که گشتاور خمشی در هر مقطع برابر است با مساحت سطح زیر نمودار نیروی برشی تا آن مقطع. برای مثال به‌ازای $x < 2\text{ m}$ داریم:

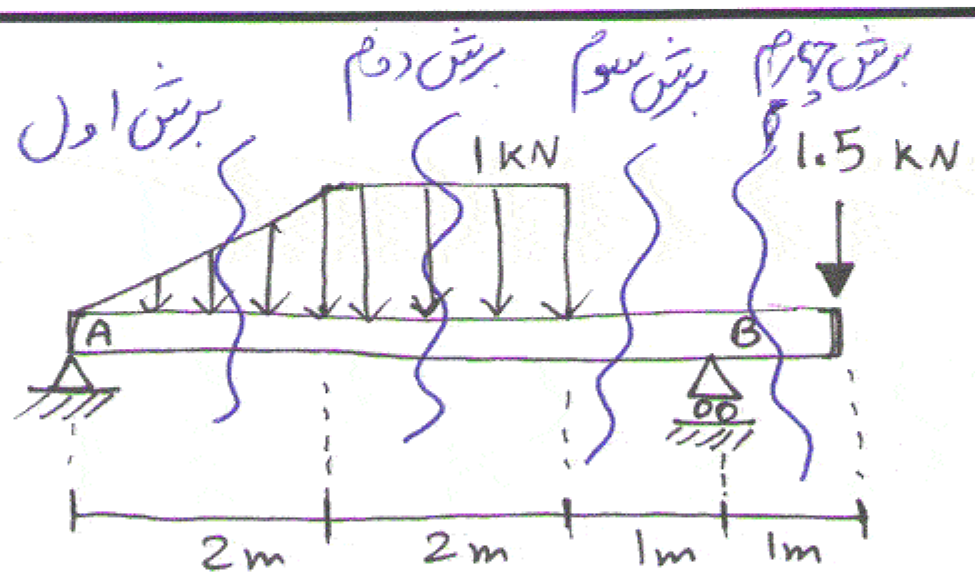
$$[\Delta M = \int V\,dx] \qquad M - 0 = \int_0^x (1.233 - 0.25x^2)\,dx$$

و مانند قبل

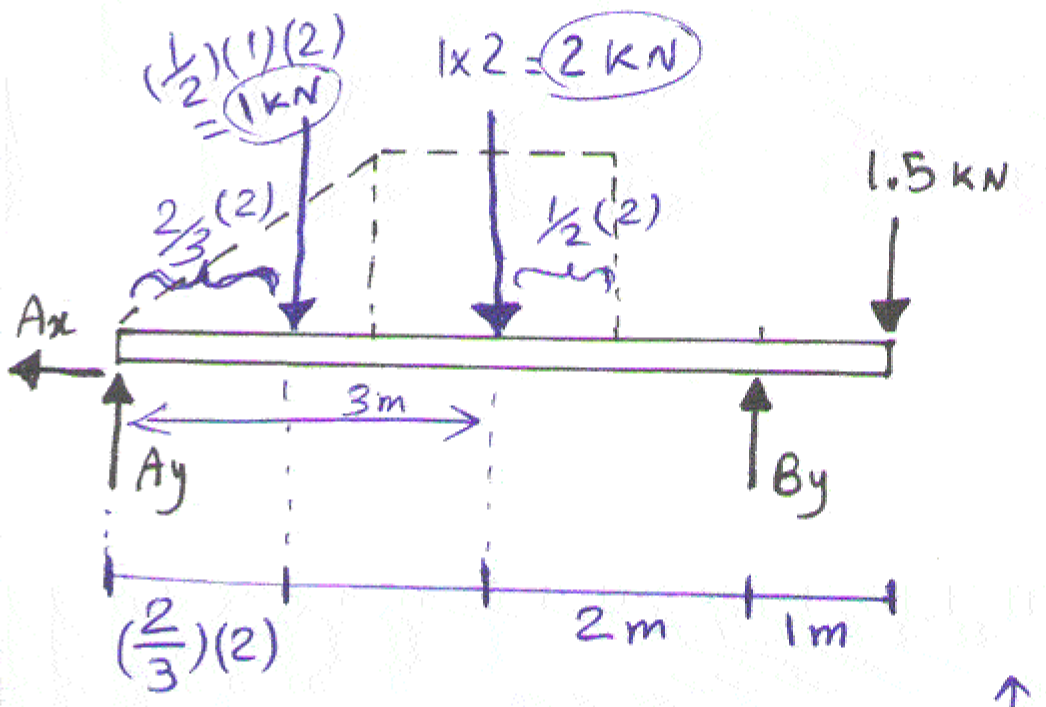
$$M = 1.233x - 0.0833x^3$$

* مراحل برش زنی این مثال در صفحه‌ی بعدی توضیح داده می‌شود:

مثال دیاگرام نیروهای برشی و لنگر خمشی تیر مقابل را ترسیم کنید:



با رسم دیاگرام آزاد تیر عکس العمل تکیه گاهی را در A و B محاسبه می کنیم:



$$\xrightarrow{+}\sum F_x = 0 \rightarrow \boxed{A_x = 0}$$

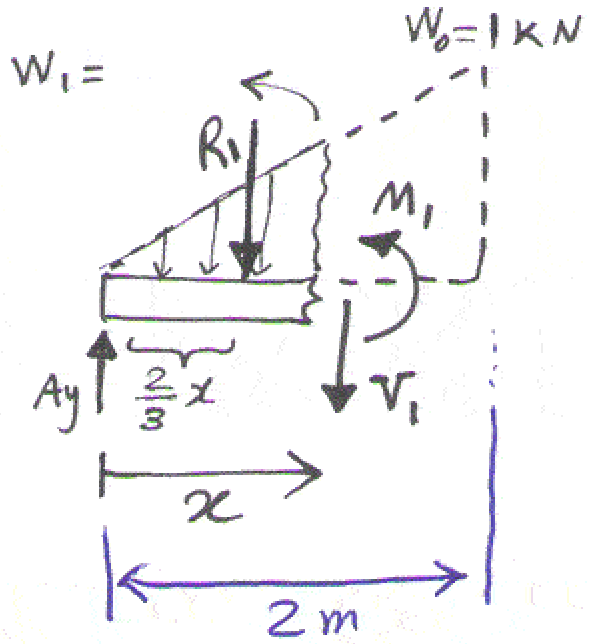
$$+\circlearrowleft\sum M_A = 0 \rightarrow (-1)(\frac{4}{3}) + (-2)(3) + B_y(5) - (1.5)(6) = 0$$

$$\rightarrow \boxed{B_y = 3.27 \text{ kN}}$$

$$+\uparrow\sum F_y = 0 \rightarrow A_y - 1 - 2 + 3.27 - 1.5 = 0$$

$$\rightarrow \boxed{A_y = 1.23 \text{ kN}}$$

برش اول: $0 < x < 2$



از طریق مثلث های متشابه: $\frac{x}{W_1} = \frac{2}{W_0}$

شدت بار: $\frac{x}{W_1} = \frac{2}{1} \rightarrow \boxed{W_1 = \frac{x}{2}}$

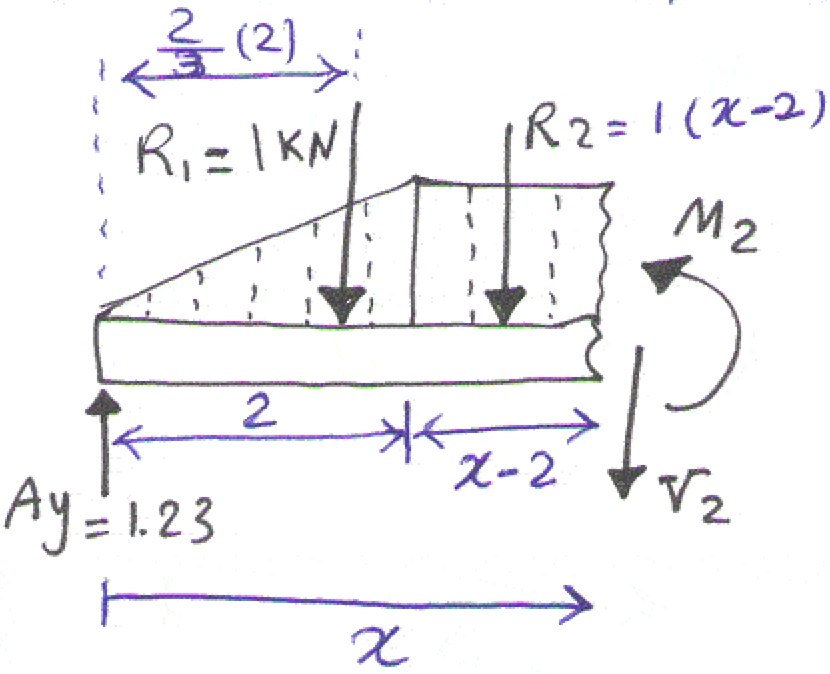
* بار معادل: $R_1 = \frac{W_1 \cdot x}{2} = \frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2} = \boxed{\frac{x^2}{4}}$

مکان قرارگیری بار معادل (R_1) نسبت به ابتدای x ⟵ $\frac{2}{3}x$

$$+\uparrow\sum F_y = 0 \rightarrow A_y - R_1 - V_1 = 0 \rightarrow \boxed{V_1 = 1.23 - \frac{x^2}{4}}$$

$$+\circlearrowleft \sum M = 0 \rightarrow -A_y(x) + R_1\left(\frac{x}{3}\right) + M_1 = 0$$

$$\rightarrow M_1 = 1.23x - \left(\frac{x^2}{4}\right)\left(\frac{x}{3}\right) \rightarrow \boxed{M_1 = \frac{-x^3}{12} + 1.23x}$$



برش دوم : $2 < x < 4$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \rightarrow A_y - 1 - R_2 - V_2 = 0$$

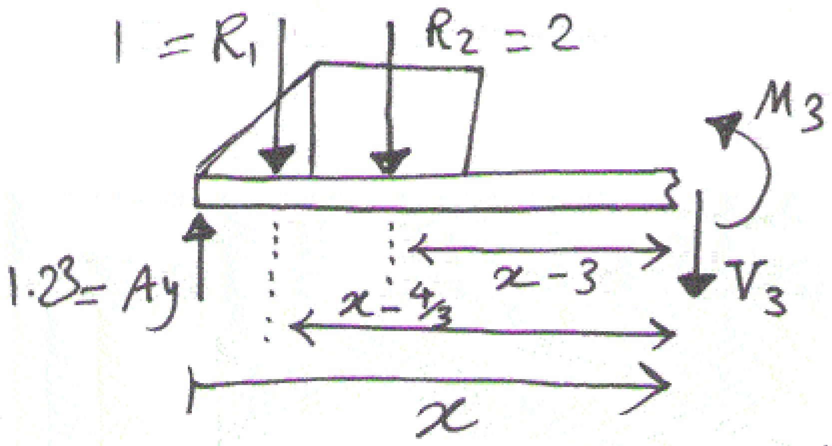
$$\rightarrow V_2 = 1.23 - 1 - 1(x-2)$$

$$\rightarrow \boxed{V_2 = -x + 2.23}$$

$$+\circlearrowleft \sum M = 0 \rightarrow -A_y(x) + R_1\left(\left(\frac{2}{3}\right)(2)\right) + R_2\left(\frac{x-2}{2}\right) + M_2 = 0$$

$$\rightarrow M_2 = 1.23x - 1\left(\quad\right)\left(\frac{4}{3}\right) - (x-2)\left(\frac{x-2}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{M_2 = \frac{-x^2}{2} + 2.23x - \frac{2}{3}}$$



برش سوم : $4 < x < 5$

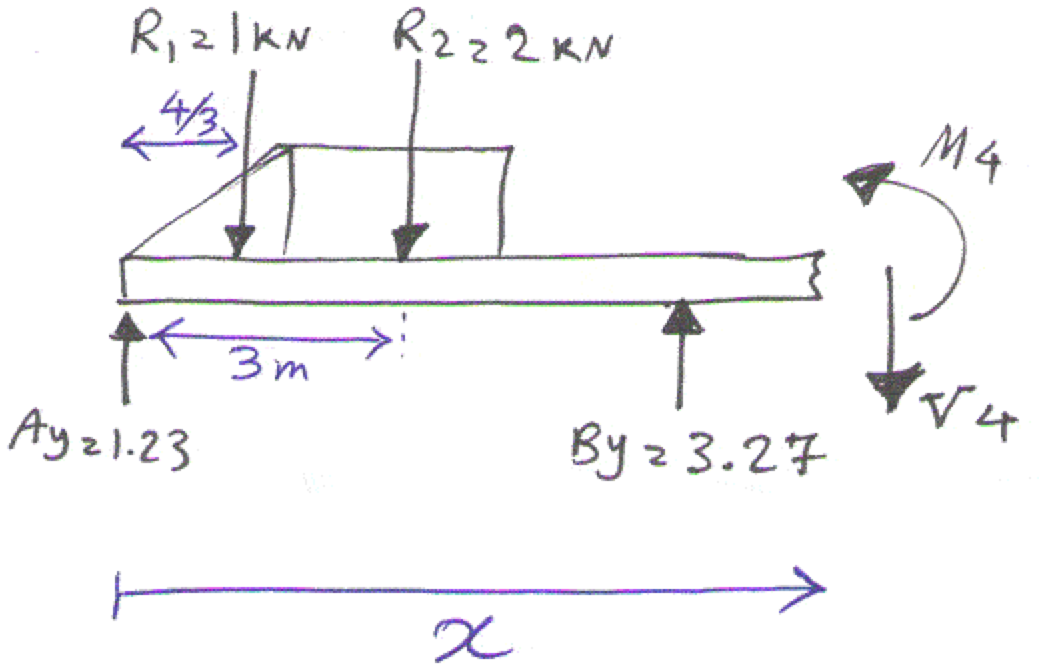
$$+\uparrow \sum F_y = 0 \rightarrow A_y - R_1 - R_2 - V_3 = 0$$

$$\rightarrow V_3 = 1.23 - 1 - 2 \rightarrow \boxed{V_3 = -1.77}$$

$$+\circlearrowleft \sum M = 0 \rightarrow -A_y(x) + (\overset{1}{R_1})\left(x - \frac{4}{3}\right) + \overset{2}{R_2}(x-3) + M_3 = 0$$

$$\rightarrow M_3 = 1.23x - x + \frac{4}{3} - 2x + 6 \rightarrow \boxed{M_3 = -1.77x + 7.34}$$

برش چهارم: $5 < x < 6$



$+\uparrow \sum F_y = 0 \rightarrow A_y - R_1 - R_2 + B_y - V_4 = 0$

$\rightarrow V_4 = 1.23 - 1 - 2 + 3.27 \rightarrow \boxed{V_4 = 1.5}$

$+\circlearrowleft \sum M = 0 \rightarrow -A_y(x) + R_1\left(x - \frac{4}{3}\right) + R_2(x-3) - B_y(x-5) + M_4 = 0 \rightarrow M_4 = 1.23x - x + \frac{4}{3} - 2x + 6 + 3.27x - 5(3.27)$

$\rightarrow \boxed{M_4 = 1.5x - 9}$

محل قطع شدن محورها در نمودار V:

$V_2 = -x + 2.23$

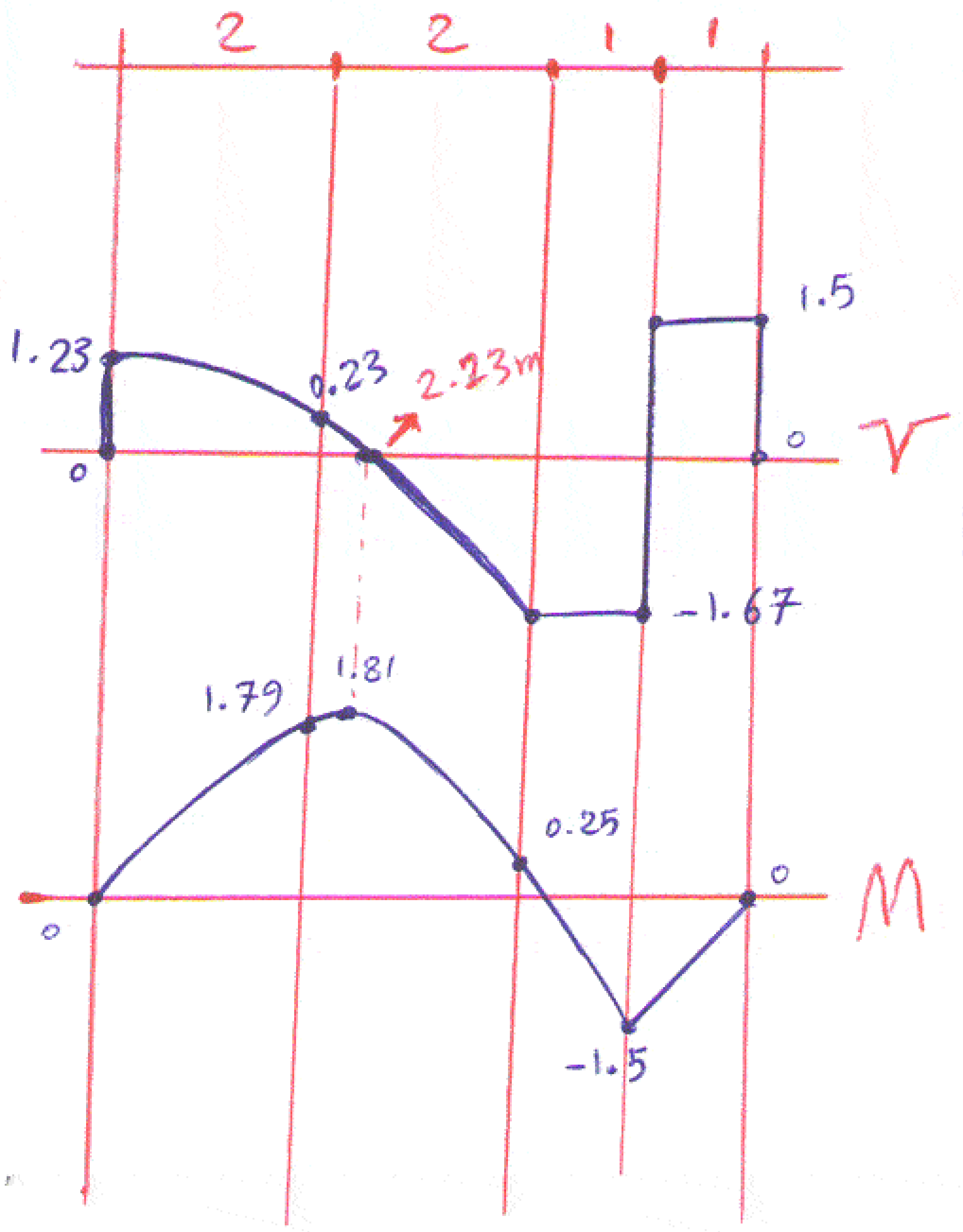
$V_2 = 0 \rightarrow x = 2.23\,m$

که در این نقطه ماکزیمم لنگر خمش دارم

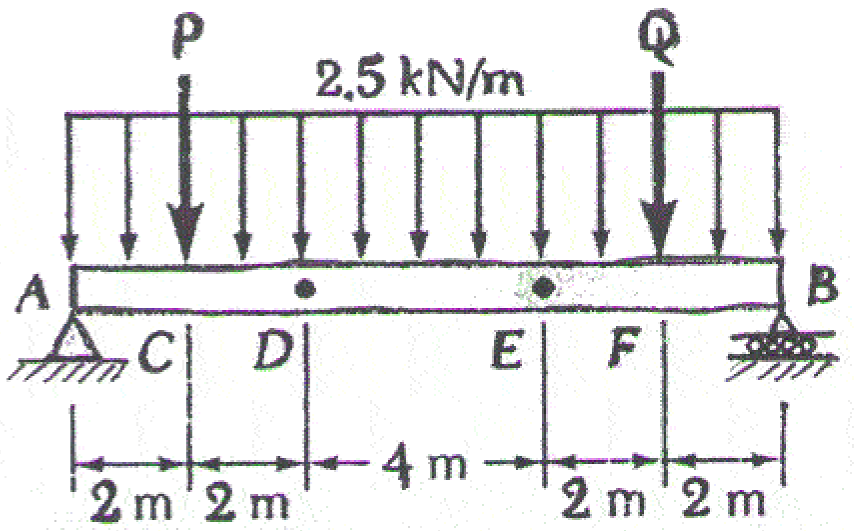
$M_2 = \dots$

$x = 2.3 \rightarrow M_2 = 1.81\ KN.m$

پس تیر باید برای این مقدار لنگر طراحی شود

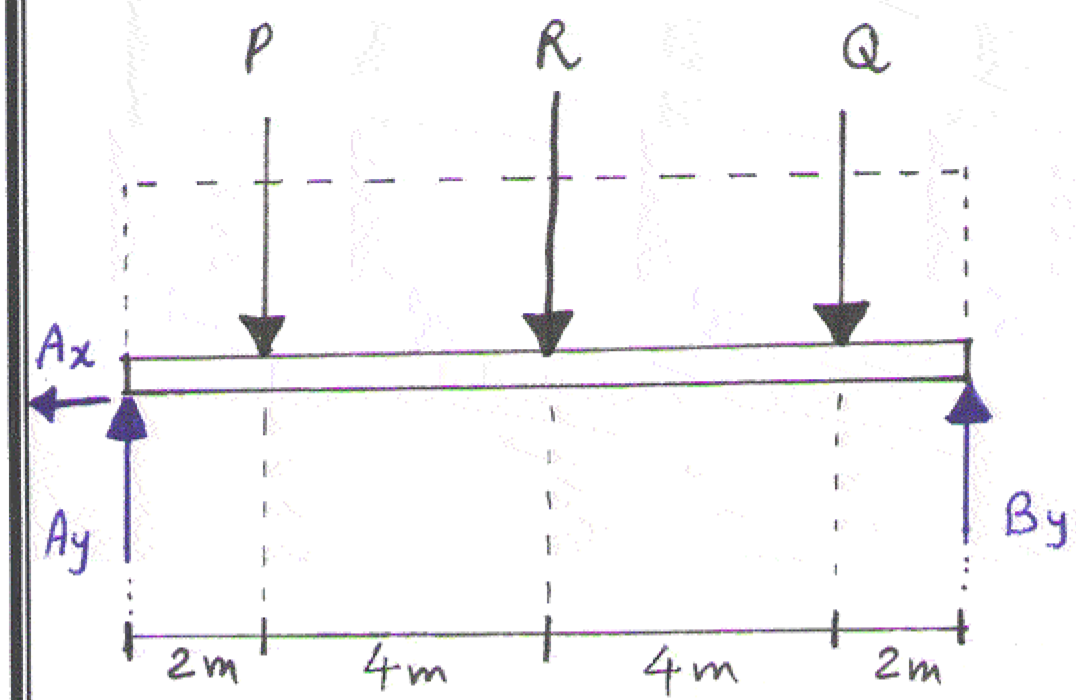


مثال تیر AB مطابق شکل تحت تأثیر بار گستردهٔ یکنواخت و دو نیروی مجهول P و Q قرار گرفته است. به‌طور تجربی معلوم شده است که گشتاور خمشی در نقطهٔ D برابر با $+61\ kN.m$ و در نقطهٔ E برابر با $+55\ kN.m$ است (الف) P و Q را پیدا کنید. (ب) نمودارهای برش و گشتاور خمشی تیر را رسم کنید.



پاسخ: ابتدا دیاگرام آزاد تیر را رسم می‌کنیم، هم‌چنین می‌بایست بار گسترده مستطیلی با شدت بار $W = 2.5\ kN/m$ را با بار معادل R در محل اثر وسط مستطیل جایگزین کنیم.

و با استفاده از معادلات تعادل ($\sum F_x$، $\sum F_y$ و $\sum M$) عکس‌العمل‌های (A و B) را به دست آوریم. و سپس در نقاط مورد نظر برش بزنیم:



$$R = W.x = (2.5)(12) =$$

$$\rightarrow \boxed{R = 30\ kN}$$

$$\xrightarrow{+} \sum F_x = 0 \longrightarrow \boxed{A_x = 0}$$

$$+\circlearrowright \sum M_A = 0 \longrightarrow -P(2) - R(6) - Q(10) + B_y(12) = 0$$

$$\rightarrow -2P - 30(6) - 10Q + 12B_y = 0 \longrightarrow \boxed{B_y = \frac{2P + 10Q + 180}{12}}$$

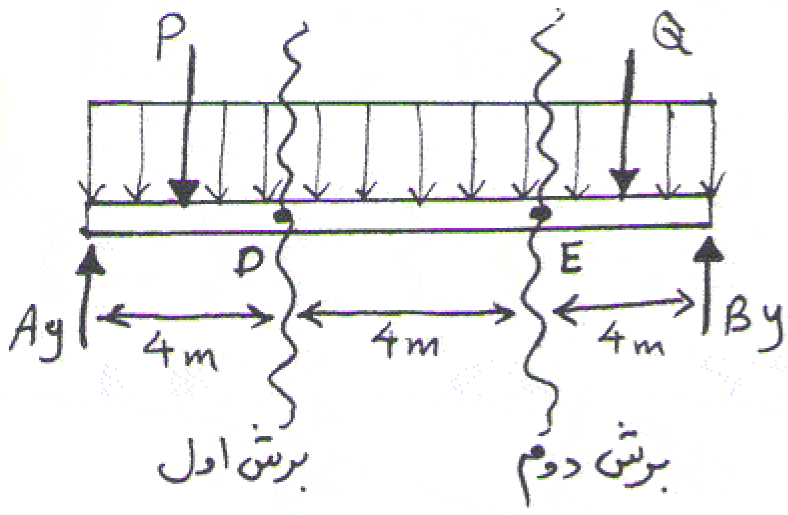
$$+\uparrow \sum F_y = 0 \longrightarrow A_y - P - R - Q + B_y = 0 \longrightarrow A_y = P + R + Q - B_y \longrightarrow$$

$$\rightarrow A_y = P + 30 + Q - \left(\frac{2P+10Q+180}{12}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow A_y = P+30+Q-\frac{2P}{12}-\frac{10Q}{12}-\frac{180}{12} \Rightarrow \boxed{\frac{5P}{6}+\frac{Q}{6}+15 = A_y}$$

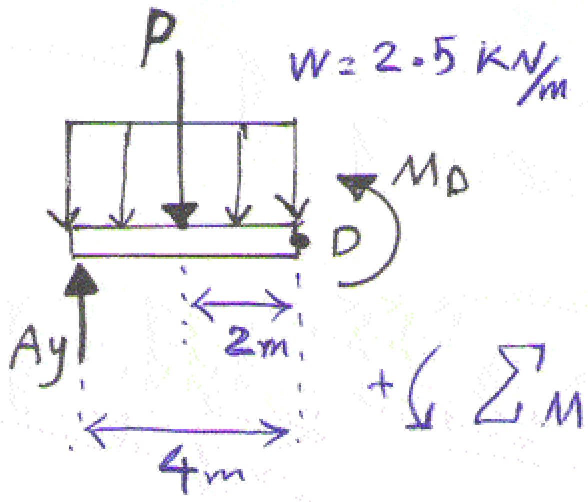
به این شکل تمامی مجهولات ما برحسب P و Q خواهند بود. با توجه به اینکه در مسئله ذکر شده گشتاور خمشی در نقطه D ← 61 kN.m و نقطه E ← 55 kN.m است

پس تیر را یکبار در نقطه‌ی D و یکبار در نقطه‌ی E برش می‌زنیم و معادله تعادل $\sum M = 0$ (+↺) در نقطه‌ی برش زده را می‌نویسیم تا مجهولات P و Q را بدست آوریم:



بعد از برش زدن، هر قطعه را بصورت جداگانه می‌کشیم و معادله $\sum M$ در نقطه برش خورده را می‌نویسیم تا گشتاور خمشی را در آن نقطه محاسبه کنیم.

برش اول را در نقطه‌ی D می‌زنیم:



و گشتاور خمشی M_D را از معادله $\sum M_D = 0$ (+↺) بدست می‌آوریم:

$$+\circlearrowleft \sum M_D = 0 \rightarrow -A_y(4) + P(2) + \overbrace{\underbrace{((2.5)(4))}_{\text{نیروی معادل } W\cdot x}}^{\text{بار گسترده مستطیلی}}\underbrace{(2)}_{\text{فاصله موثر}} + M_D = 0$$

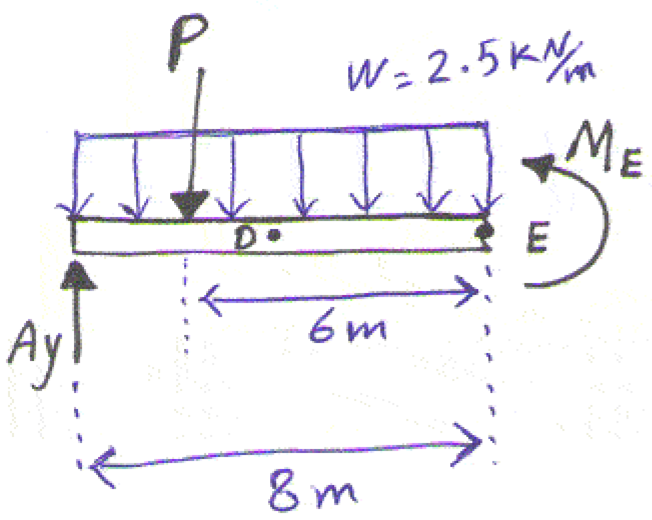
$$\rightarrow M_D = 4(A_y) - 2P - 10 \rightarrow M_D = 4\left(\frac{5P}{6}+\frac{Q}{6}+15\right) - 2P - 20$$

$$\rightarrow M_D = \frac{10P}{3}+\frac{2Q}{3}+60-2P-20 \Rightarrow \boxed{M_D = \frac{4P}{3}+\frac{2Q}{3}+40}$$

با توجه به اینکه در صورت مسئله ذکر شده $M_D = 61$ kN.m است، پس مقدار M_D را با رابطه‌ای که به دست آوردیم برابر قرار می‌دهیم تا معادله‌ای دو مجهولی بر حسب P و Q داشته باشیم.

$$M_D = \frac{4P}{3} + \frac{2Q}{3} + 40 = 61$$

$$\to \boxed{\frac{4P}{3} + \frac{2Q}{3} = 21} \ * \quad \text{معادله } ① \ \checkmark$$



برش دوم را در نقطه‌ی E ایجاد می‌کنیم و روند قسمت قبلی را برای این برش نیز تکرار می‌کنیم :

بار معادل مستطیلی   فاصله

$$+\circlearrowleft \sum M_E = 0 \to -A_y(8) + P(6) + \overbrace{((2.5)(8))}^{w \cdot x}(4)$$

$$+M_E = 0 \to M_E = 8A_y - 6P - 80 \Rightarrow$$

$$\to M_E = 8\left(\frac{5P}{6} + \frac{Q}{6} + 15\right) - 6P - 80 \Rightarrow M_E = \frac{40P}{6} + \frac{8Q}{6} + 120$$

$$-6P - 80 \Rightarrow M_E = \frac{2P}{3} + \frac{4Q}{3} + 40 = 55$$ ← مقدار لنگر خمشی که صورت مسئله داده

$$\to \boxed{\frac{2P}{3} + \frac{4Q}{3} = 15} \ * \quad \text{معادله } ② \ \checkmark$$

معادله ① و ②، دو معادله و دو مجهول P و Q :

$$\begin{cases} \frac{4P}{3} + \frac{2Q}{3} = 21 \xrightarrow{\text{ضرب در } (-2)} \\ \frac{2P}{3} + \frac{4Q}{3} = 15 \end{cases} \to \begin{cases} -\frac{8P}{3} - \cancel{\frac{4Q}{3}} = -42 \\ \frac{2P}{3} + \cancel{\frac{4Q}{3}} = +15 \end{cases}$$ جمع می‌کنیم

$$\sqrt{\ \frac{-8P}{3} + \frac{2P}{3} = -27}$$

$$\to \frac{-6P}{3} = -27 \to 2P = 27 \to P = \frac{27}{2} = 13.5 \text{ KN} \quad \boxed{P = 13.5 \text{ KN}}$$

مقدار $P = 13.5$ را در یکی از معادلات ① یا ② گذاشته و Q را بدست می آوریم:

$$\xrightarrow[①]{P=13.5} \frac{4(13.5)}{3} + \frac{2Q}{3} = 21 \rightarrow 18 + \frac{2Q}{3} = 21 \rightarrow \frac{2Q}{3} = 3$$

$$\rightarrow Q = \frac{3\times 3}{2} = 4.5 \longrightarrow \boxed{Q = 4.5\ kN}$$

مقدار عکس العمل های تکیه گاهی A_y و B_y را نیز با گذاشتن مقدار P و Q می یابیم:

$$A_y = \frac{5P}{6} + \frac{Q}{6} + 15 \rightarrow A_y = \frac{5(13.5)}{6} + \frac{4.5}{6} + 15 = 27$$

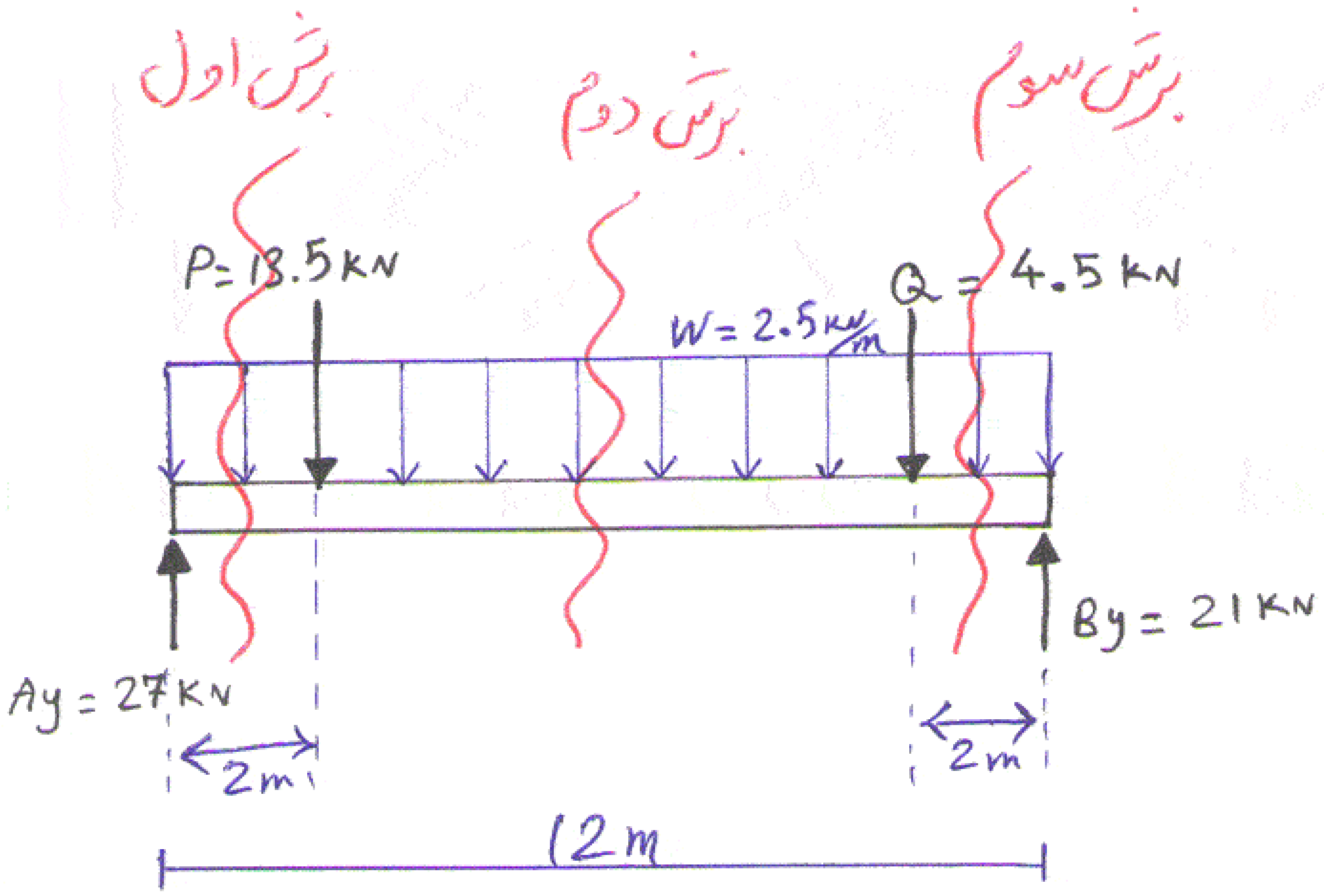
$$\rightarrow \boxed{A_y = 27\ kN}$$

$$B_y = \frac{2P + 10Q + 180}{12} \rightarrow B_y = \frac{2(13.5) + 10(4.5) + 180}{12} = 21$$

$$\rightarrow \boxed{B_y = 21\ kN}$$

هم اکنون با رسم دیاگرام آزاد تیر و محل برش ها

به ترسیم دیاگرام نیروهای برشی و لنگر خمشی می پردازیم:

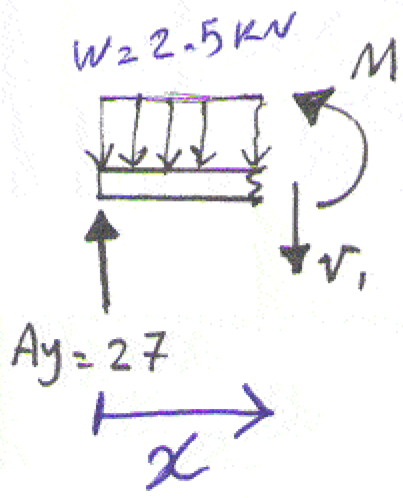


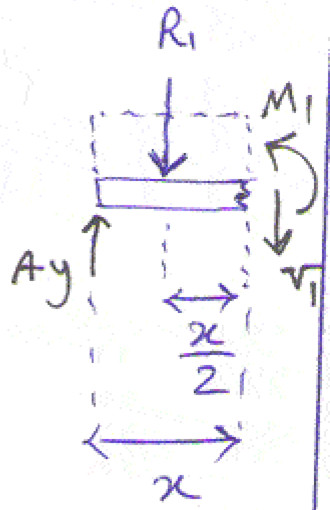
همیشه بین تغییرات نیروها برش می زنیم. جایی که عکس العمل بوده و سپس نیروی دیگر در واقع میان دو تغییر نیرو برش می زنیم.

برش اول : بین دو نیروی عکس‌العمل تکیه‌گاه A (A_y) و نیروی (P) قرار می‌گیرد

پس محل برش بین شروع ($x=0$) و نیروی P ← ($x=2$) است و بازه ما

می‌شود : $0<x<2$





نکته : نیروی معادل بارگسترده مستطیلی را می‌توان بصورت بار معادل متمرکز زیر نوشت :

$$R_1 = W.x = (2.5)(x)$$

و محل اثر آن نصف فاصله یعنی $\frac{x}{2}$ است.

معادلات تعادل را برای این قطعه برش خورده می‌نویسیم ؛ چون از ما دیاگرام نیروهای محوری (P) را نمی‌خواهد پس $\sum F_x$ را نمی‌نویسیم :

$$+\uparrow\sum F_y = 0 \rightarrow A_y - (2.5x) - V_1 = 0 \rightarrow \boxed{V_1 = -2.5x + 27}$$

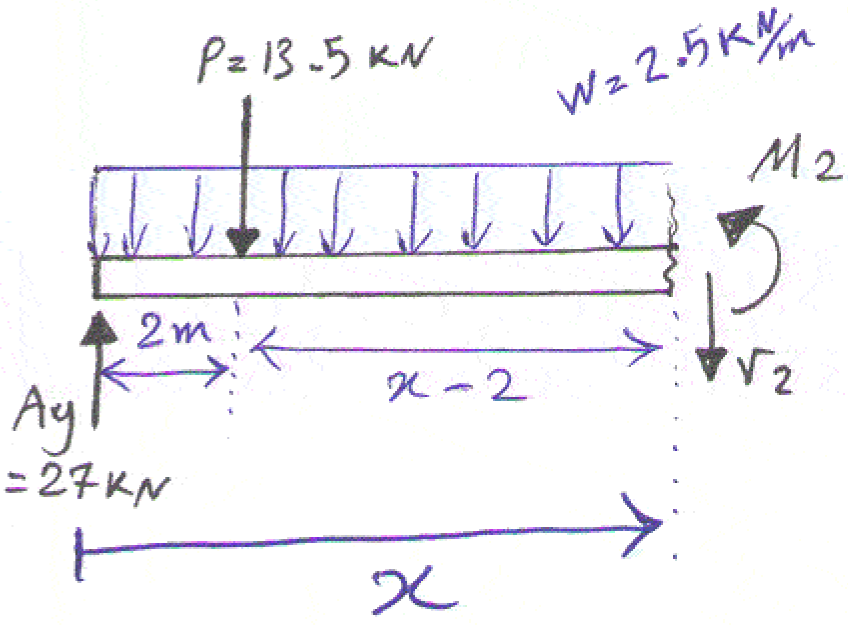
$$+\circlearrowleft\sum M = 0 \rightarrow -A_y(x) + (2.5x)\underbrace{\left(\frac{x}{2}\right)}_{\text{فاصله‌ی بار معادل بارگسترده مستطیلی تا محل برش (نقطه‌ی لنگرگیری)}} + M_1 = 0$$

$$\rightarrow \boxed{M_1 = \frac{-2.5x^2}{2} + 27x}$$

همانطور که می‌بینید برای تشخیص درستی کار می‌توان از معادله‌ی M_1 نسبت به x مشتق گرفت و اگر این مشتق با V_1 برابر بود یعنی کارمان درست بوده است.

$$\frac{dM}{dx} = M_1' = \cancel{2}\left(\frac{-2.5}{\cancel{2}}x^1\right) + 27 = -2.5x + 27 = V_1 \checkmark$$

برش دوم : بین نیروهای P و Q یعنی بین $(x=2m)$ و $(x=10m)$: $2<x<10$



$$+\uparrow \sum F_y = 0 \rightarrow A_y - P - R_2 - V_2 = 0$$

$$\rightarrow 27 - 13.5 - (2.5x) = V_2$$

$$\rightarrow \boxed{V_2 = -2.5x + 13.5}$$

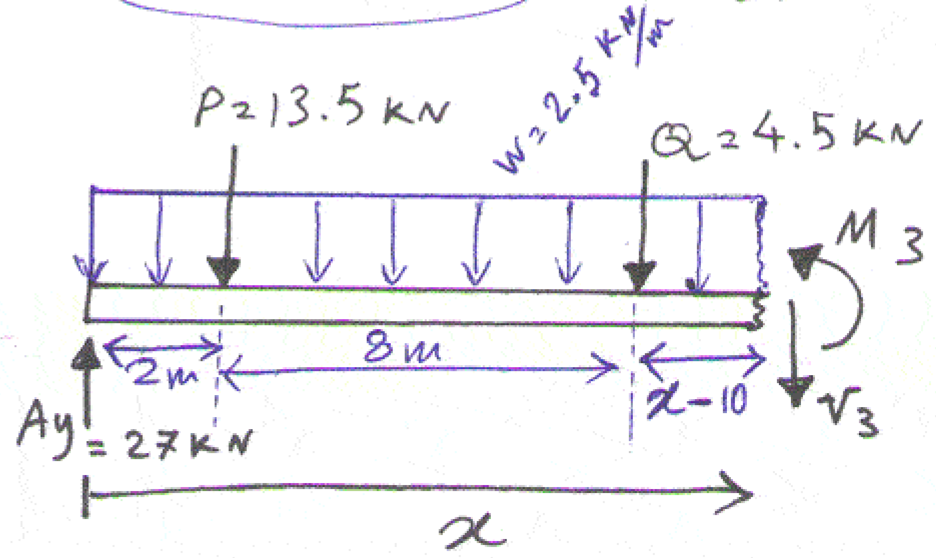
$$+\circlearrowleft \sum M = 0 \rightarrow -A_y(x) + P(x-2) + R_2\left(\frac{x}{2}\right) + M_2 = 0$$

$$\rightarrow M_2 = 27x - 13.5(x-2) - (2.5x)\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\rightarrow M_2 = 27x - 13.5x + 27 - \frac{2.5x^2}{2}$$

$$\rightarrow \boxed{M_2 = \frac{-2.5x^2}{2} + 13.5x + 27}$$

برش سوم : درمیان نیروی Q و نیروی عکس العمل B (B_y) : $10<x<12$



$$+\uparrow \sum F_y = 0 \rightarrow A_y - P - Q - R_3 - V_3 = 0$$

$$\rightarrow V_3 = 27 - 13.5 - 4.5 - (2.5x)$$

$$\rightarrow \boxed{V_3 = -2.5x + 9}$$

$$+\circlearrowleft \sum M = 0 \rightarrow -A_y(x) + 13.5(x-2) + 4.5(x-10) + (2.5x)\left(\frac{x}{2}\right) + M_3 = 0$$

$$\rightarrow M_3 = 27x - 13.5x + 27 - 4.5x + 45 - \frac{2.5x^2}{2}$$

$$\rightarrow \boxed{M_3 = -\frac{2.5}{2}x^2 + 9x + 72}$$

معادلات و بازه‌هاشان را می‌نویسیم و در ابتدا و انتهای هر بازه x را به معادلات می‌دهیم تا مقدار ارتفاع دیاگرام که برحسب V (نیروی برشی) یا برحسب M (لنگر خمشی) است به دست آید:

بازه اول: $0 < x < 2$

$$V_1 = -2.5x + 27$$

V_1	27 kN	22 kN
x	0 m	2 m

$$M_1 = \frac{-2.5}{2}x^2 + 27x$$

M_1	0 kN.m	49 kN.m
x	0 m	2 m

بازه دوم: $2 < x < 10$

$$V_2 = -2.5x + 13.5$$

V_2	8.5 kN	-11.5 kN
x	2 m	10 m

$$M_2 = \frac{-2.5}{2}x^2 + 13.5x + 27$$

M_2	49 kN.m	37 kN.m
x	2 m	10 m

بازه سوم: $10 < x < 12$

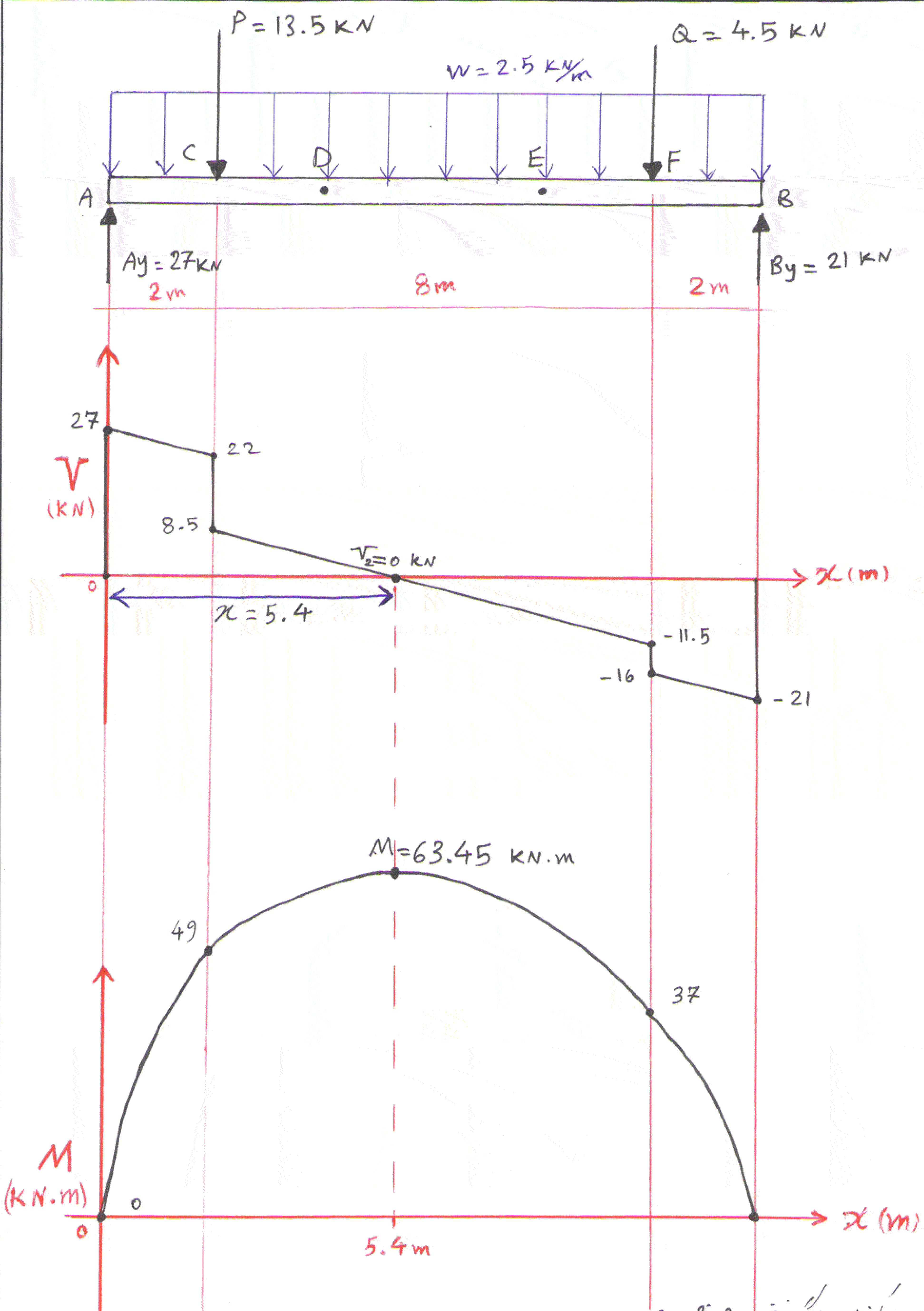
$$V_3 = -2.5x + 9$$

V_3	-16 kN	-21 kN
x	10 m	12 m

$$M_3 = \frac{-2.5}{2}x^2 + 9x + 72$$

M_3	37 kN.m	0 kN.m
x	10 m	12 m

نکته: علامت منفی ضریب x در معادله درجه یک یعنی شیب منفی و خط رو به پایین و در x^2 یعنی تقعر رو به پایین



نکته : ماکزیمم لنگر خمشی در صفحه‌ی بعدی : ...

نکته : برای پیدا کردن ماکزیمم لنگر خمشی در یک بازه x نقطه ای نمودار برشی محور x را قطع کرده را پیدا می کنیم. در آن نقطه نیروی برشی صفر می شود و لنگر خمشی ماکزیمم می شود و تیر را باید برای تحمل این لنگر خمشی M_{Max} طراحی کرد.

در بازه ی دوم :

$$V_2 = -2.5x + 13.5$$

$$V_2 = 0 \longrightarrow -2.5x + 13.5 = 0 \rightarrow x = \frac{-13.5}{-2.5} = 5.4\,m$$

یعنی در فاصله ی $(x = 5.4m)$ در تیر لنگر خمشی ماکزیمم می شود ⟵

$$\xrightarrow{x=5.4m} M_2 = \frac{-2.5x^2}{2} + 13.5x + 27$$

$$M_2 \overset{x=5.4}{=\!=} \frac{-2.5}{2}(5.4)^2 + 13.5(5.4) + 27 = 63.45\,KN.m$$

پس ماکزیمم لنگر خمشی در نمودار لنگر خمشی $63.45\,KN.m$ است.