دینامیک

دکتر رضا انصاری

« درسنامه دینامیک»

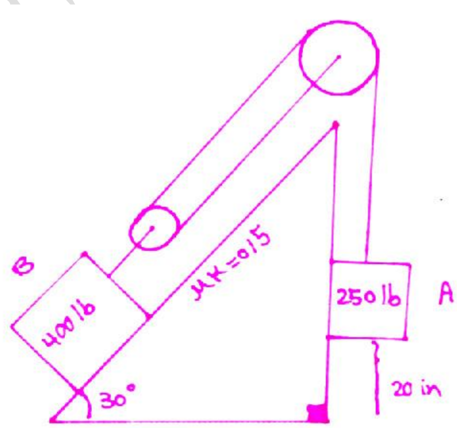
سینتیک ذرات :

مثال) آسانسوری با شتاب ثابت a به سمت بالا و یا پایین حرکت می کند شخصی که بر روی وزنه ایستاده وزن خود را چقدر قرائت می کند؟

$$T - mg = ma \ \rightarrow T = m(g + a)$$

$$mg - T = ma \ \rightarrow T = m(g - a)$$

مثال) درشکل زیر وزنه ی A از حالت سکون رها می گردد سرعت این وزنه در هنگام اصابت به زمین را بدست آورید؟



$$m_A g - T = m_A \times a_A$$

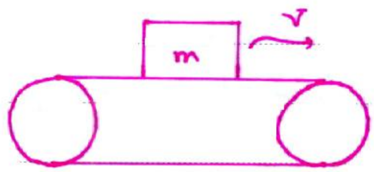
$$2T - m_B g \sin\theta - \mu_k N_B = m_B \frac{a_A}{2}$$

$N_B - m_B \cos\theta = 0$

با توجه به داده های فرضی $\rightarrow \begin{cases} a_A = 5.83\left(\dfrac{ft}{s^2}\right) \\ T = 205(lb) \\ N_B = 346(lb) \end{cases}$

$v_A = \sqrt{2a_A x} \rightarrow v_A = 15.27\left(\dfrac{ft}{s}\right)$

مثال) قرقره ای (تسمه ای) داریم که با سرعت خطی v حرکت می نماید. جرم M را بر روی آن رها می نماییم مدت زمان لغزش جسم بر روی تسمه را تعیین نمایید؟

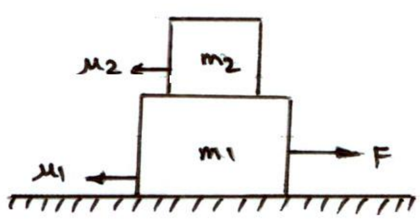


$N - mg = 0$

$\mu_k mg = ma \rightarrow a = \mu_k g$

$v = at + v_0 \rightarrow t = \dfrac{v}{\mu g}\ \ (if\ t_0 = 0 \rightarrow v_0 = 0)$

مثال) در شکل زیر حداکثر نیروی F برای اینکه جرم m_2 بر روی جرم m_1 حرکت نکند را بدست آورید؟



$N_2 - m_2 g = 0$

$f_2 = m_2 a \rightarrow \mu_2 m_2 g = m_2 a \rightarrow a = \mu_2 g$

$N_1-(m_1+m_2)g=0 \rightarrow N_1=(m_1+m_2)g$

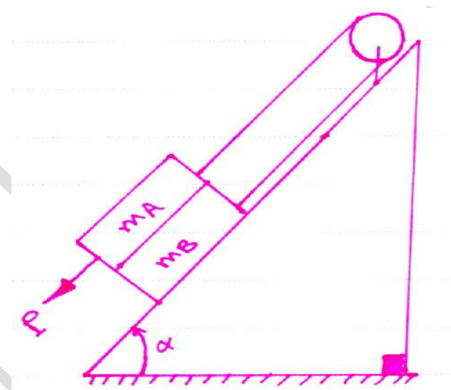
$F-f_2-f_1=m_1a$

$F=m_2\mu_2g+\mu_2m_1g+\mu_1(m_1+m_2)g$

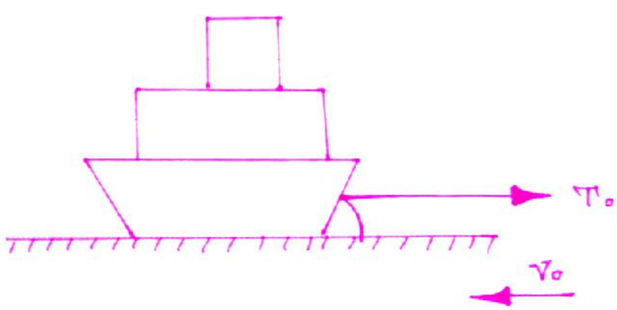
$F=\mu_2g(m_1+m_2)+\mu_1g(m_1+m_2)$

$F=(m_1+m_2)g(\mu_1+\mu_2)$

تمرین) با فرض آنکه ضریب اصطکاک بین همه ی سطوح μ_s and μ_k باشد وضعیت حرکت سیستم نشان داده شده در شکل زیر را تعیین کنید؟



مثال)کشتی به جرم m در رودخانه ای که آب آن با سرعت V_0 جریان دارد لنگرانداخته است اگر مولفه ی افقی زنجیر لنگره T باشد بعد از بریده شدن آن زمان لازم برای رسیدن سرعت کشتی به $\frac{V_0}{2}$ را بدست آورید؟ (مقاومت اصطکاکی آب کشتی ، با سرعت کشتی نسبت به آب متناسب است)

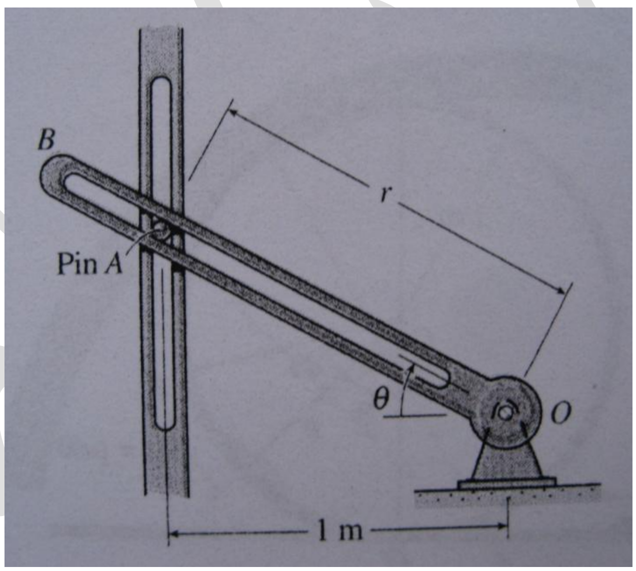


$$T_0 = Kv_0 \rightarrow K = \frac{T_0}{v_0}$$

$$K(v_0 - v) = m\dot{v} \rightarrow K(v_0 - v) = m\frac{dv}{dt}$$

$$\int_{v=0}^{\frac{v_0}{2}} \frac{dv}{v_0 - v} = \int_{t=0}^{t} \frac{T_0}{mv_0} dt \rightarrow t = \frac{mv_0}{T_0} ln2$$

مثال)حرکت پین A در جهت راهنمای شیار عمودی ثابت محدود شده است در حالی که بازوی OB حول نقطه ی O با مشخصات $\dot{\theta} = 1(\frac{rad}{s})$ و $\ddot{\theta} = -0.5(\frac{rad}{s^2})$ در وضعیت $\theta = 30°$ در حال دوران است نیرویی که بر روی پین مذکورعمال می شود را محاسبه نمایید.



$$r\cos\theta = 1 \rightarrow r = \frac{1}{\cos\theta} = 1.5(m)$$

$$\dot{r} = \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} = 0.67(\frac{m}{s})$$

$$r = \frac{1 + \sin^2\theta}{\cos^3\theta} = 1.59(\frac{m}{s^2})$$

$if \quad \theta = 30^o \quad and \quad \dot{\theta} = 1\left(\frac{rad}{s}\right) \quad and \quad \ddot{\theta} = -0.5\frac{rad}{s^2} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$

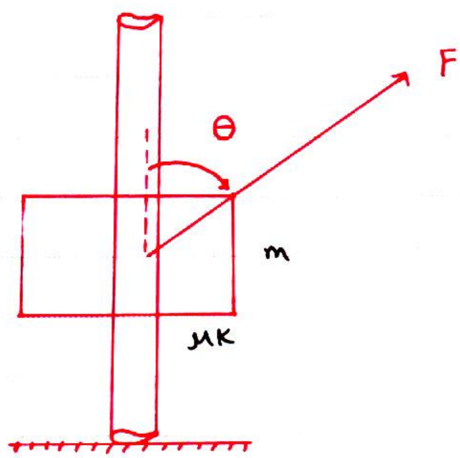
$a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$

$F_A \cos\theta - mg\sin\theta = ma_r \rightarrow F_A = \frac{ma_r + mg\sin\theta}{\cos\theta} = 4.94(N)$

$F_B - F_A\sin\theta - mg\cos\theta = ma_\theta$

$\rightarrow F_B = ma_\theta + mg\cos\theta + F_A\sin\theta = 9.88(N)$

مثال) نیروی ثابت F با جهت متغیر $\theta = kt$ به جرم M وارد می شود با فرض آنکه در شروع حرکت $\theta = 0^o$ باشد نیروی F را چنان بیابید که در $\theta = \frac{\pi}{2}$ جسم دوباره به حالت سکون دست یابد؟



$F\cos\theta - mg - \mu_k N = mg$

$N = F\sin\theta$

$\rightarrow F\cos kt - mg - \mu_k F\sin kt = m\frac{dv}{dt} \rightarrow$

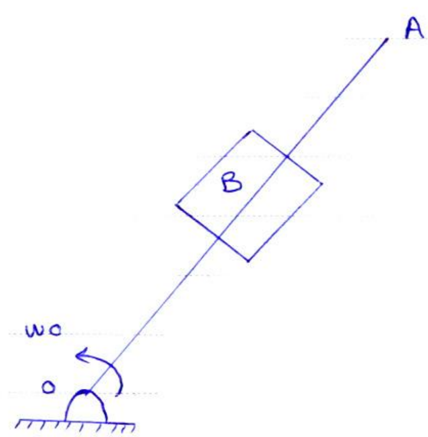
$(F\cos kt - mg - \mu_k F\sin kt)dt = mdv \rightarrow$

$$\int_0^t (F\cos kt - mg - \mu_k F\sin kt)dt = \int_0^v m dv \rightarrow$$

$$v = \frac{F}{mk}[\sin kt - \mu_k(\cos kt - 1)] - gt$$

$$if \quad \theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow t = \frac{\pi}{2k} \rightarrow \left(if \quad t = \frac{\pi}{2k}\right) \longrightarrow v = 0 \rightarrow F = \frac{mg\pi}{2(1-\mu_k)}$$

مثال) میله ی OA با سرعت زاویه ی ثابت ω_0 در حال چرخش است جرم B از فاصله ی r_0 رها می گردد نیروی اعمالی ازمیله ی OA به جرم رها شده را بر حسب فاصله ی آن بنویسید.



$$\sum F_r = 0 \rightarrow a_r = 0 \rightarrow \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 0$$

$$\sum F_\theta = ma_\theta \rightarrow N = ma_\theta = m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 2m\dot{r}\omega_0$$

$$\ddot{r} = r\omega_0^2 \rightarrow \dot{r}\frac{d\dot{r}}{dr} = r^2\omega_0^2 \rightarrow \frac{\dot{r}^2}{2} = \frac{r^2}{2}\omega_0^2 + c$$

$$\rightarrow \dot{r}^2 = \omega_0^2(r^2 - r_0^2) \rightarrow N = 2m\omega_0^2\sqrt{r^2 - r_0^2}$$

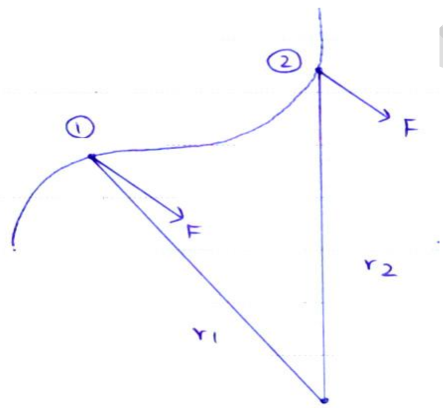
کار و انرژی :

تعریف کار : کار نیروی F از رابطه ی زیر بدست می آید :

$$U_{1-2} = \int \vec{F}.\overrightarrow{dr}$$

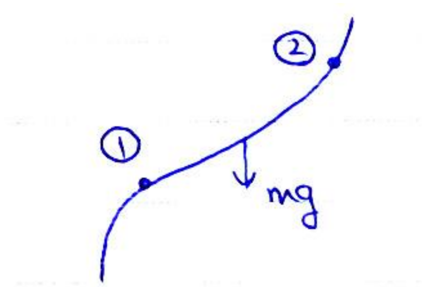
چند حالت مهم که باید بررسی شوند :

۱) کار انجام شده توسط یک نیروی ثابت :



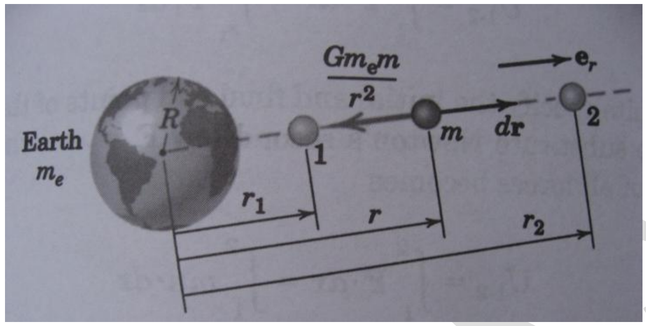
$$U_{1-2} = F\int_1^2 dr = F.(r_2 - r_1) = F_x(r_{2x} - r_{1x}) + F_y(r_{2y} - r_{1y}) + F_z(r_{2z} - r_{1z})$$

۲) کار انجام شده توسط نیروی وزن:



$$U_{1-2} = \int_1^2 F dr = (-mg\vec{k}).(dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\vec{k}) = \int_{z_1}^{z_2} -mg\, dz = -mg(z_2 - z_1)$$

۳) کار انجام شده در ارتفاعات بسیار زیاد:



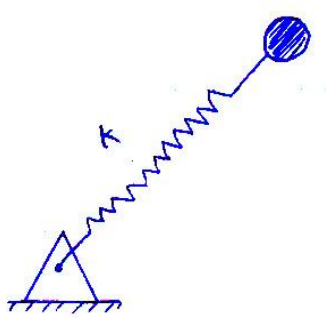
$$F = -\frac{mgR_E^2}{r^2}\overrightarrow{e_r}$$

$$\vec{F}.d\vec{r} = \left(-\frac{mgR_E^2}{r^2}\overrightarrow{e_r}\right).(d\vec{r}\overrightarrow{e_r} + rd\theta\overrightarrow{e_\theta})$$

$$F\ dr = -\ \frac{mgR_E^2}{r^2}dr \rightarrow U = \int_1^2 F\ .dr$$

$$\rightarrow U = \int_{r_1}^{r_2} -\ \frac{mgR_E^2}{r^2}dr \rightarrow\ U = mgR_E^2\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

۴) کار انجام شده توسط یک فنر:



$$F = -k(r - r_0)e_r$$

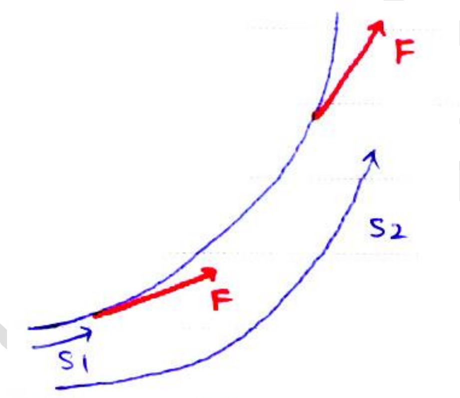
$$F.dr = [-k(r - r_0)\vec{e}_r].[dre_r + rd\theta\vec{e}_\theta] = -k(r - r_0)dr$$

$$s = r - r_0$$

$$Fdr = -ks\,ds$$

$$U_{1,2} = \int_{s_1}^{s_2} -ks\,ds = -\frac{1}{2}k(s_2^2 - s_1^2)$$

۵) کار انجام شده توسط یک نیروی مماسی ثابت:



$$\vec{F}.\overrightarrow{dr} = (F\,\vec{e}_t).(ds\,\vec{e}_t) = Fds$$

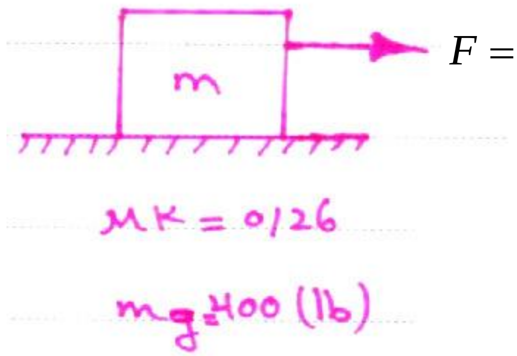
$$U_{1,2} = \int_1^2 F\,dr = F(s_2 - s_1)$$

رابطه کار و انرژی :

$$U_{1,2} = \int_1^2 \vec{F}\,.\overrightarrow{dr} = \int_1^2 m\vec{a}\,.\overrightarrow{dr} = \int_1^2 ma_t.ds = \int_1^2 mvdv = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

$$= \begin{cases} T_2 - T_1 = \Delta T \\ T = \frac{1}{2}mv^2 \end{cases} \rightarrow T_2 = T_1 + U_{1-2} \quad or \quad U_{1-2} = \Delta T$$

مثال) در شکل زیر سرعت جرم m را هنگامی که به موقعیت S=4 ft می رسد را بیابید؟



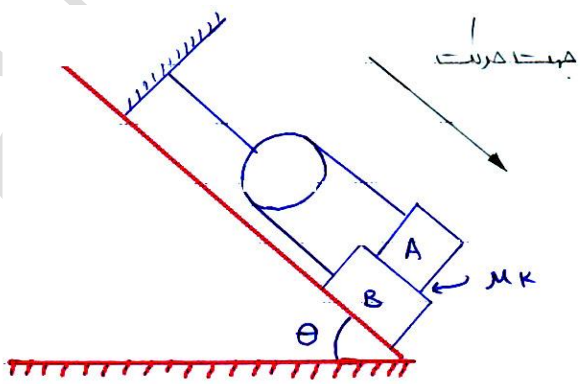
$F = 160 - 10s\ lb$

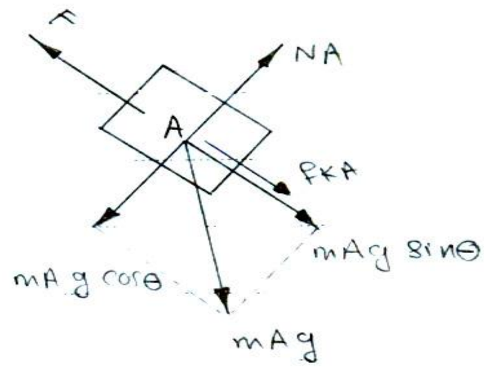
$U_{1-2} = \Delta T$

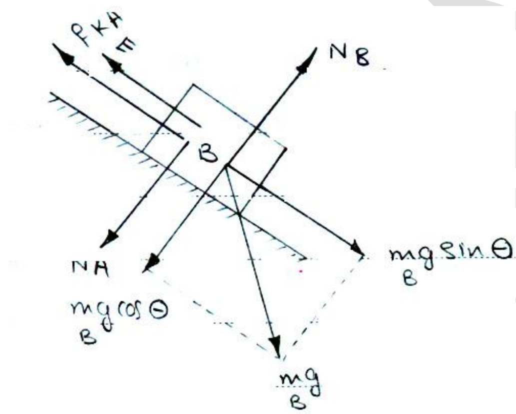
$$\int_{s_1}^{s_2} (F - \mu_k N).ds = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\rightarrow \int_{s=0}^{s=4} [(160 - 10s) - \mu_k mg].ds = \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow v = 4.81\frac{ft}{s}$$

مثال) در شکل زیر با فرض اینکه ضریب اصطکاک بین دو جسم μ_k باشد سرعت مجموعه را وقتی که به اندازه ی s حرکت می نماید بدست آورید؟







$$N_B = N_A + m_B g \cos\theta$$

$$m_B g \sin\theta - T - f_{k_A} = m_B \times a$$

$$N_A = m_A g \cos\theta$$

$$T - f_{k_A} - m_A g \sin\theta = m_A a$$

$$f_{k_A} = \mu_k m_A g \cos\theta$$

$$\begin{cases} m_B g \sin\theta - T - \mu_K m_A g \cos\theta = m_B \times a \\ T - \mu_k m_A g \cos\theta - m_A g \sin\theta = m_A \times a \end{cases} +$$

$$(m_B - m_A) g \sin\theta - 2\mu_k m_A g \cos\theta = (m_A + m_B) \times a$$

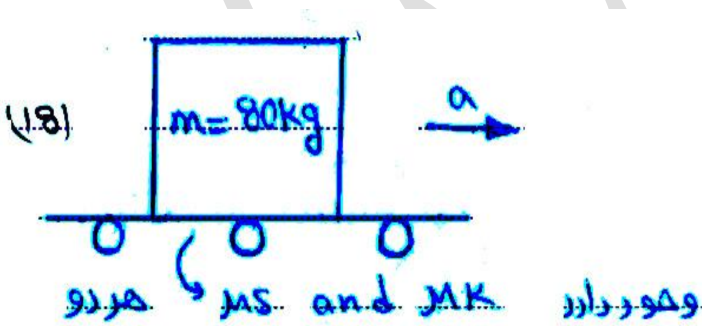
$$\rightarrow a = \frac{(m_B - m_A) g \sin\theta - 2\mu_k m_A g \cos\theta}{m_A + m_B}$$

$$\rightarrow U_{1-2} = \int m\,a\,ds = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$(m_A + m_B) \times \frac{(m_B - m_A)g\sin\theta - 2\mu_k m_A g\cos\theta}{m_A + m_B} S = \frac{1}{2}(m_A + m_B) \times v^2$$

$$v = \left[\frac{2s[(m_B - m_A)g\sin\theta - 2\mu_k m_a g\cos\theta]}{m_A + m_B}\right]^{\frac{1}{2}}$$

مثال) کامیونی از حالت سکون شروع به حرکت می نماید و پس از پیمودن 75 m سرعت آن به 72 km/h می رسد با فرض شتاب ثابت کار انجام شده توسط نیروی اصطکاک بر روی وزنه ی m را بیابید؟



۱) $\mu_s = 0.28$ and $\mu_k = 0.28$

۲) $\mu_s = 0.25$ and $\mu_k = 0.2$

$$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2s} \rightarrow a = \frac{400-0}{2\times 75} \rightarrow a = 2.67\frac{m}{s^2}$$

الف)

$$a_{max} = \mu_s \times g \rightarrow a_{max} = 2.94 \rightarrow a_{max} > a \rightarrow No\ slip$$

$$\rightarrow F_f = m\,a \rightarrow F_f = 80 \times 2.67 \rightarrow F_s = 213\ N$$

کار انجام شده $\rightarrow W_f = F_f.s = 213 \times 75 \rightarrow W_f = 16\ kj$

√کار نیروی اصطکاک همواره منفی نمی باشد

ب)

$$F_f = \mu_k mg \rightarrow F_f = 157\ N$$

$$a_m = \mu_k g \rightarrow a_m = 1.962(\frac{m}{s^2})$$

$$W_f = F_f \times S_m \rightarrow W_f = 157 \times \left(\frac{a_m}{a_s}.s\right) \rightarrow W_f = 8.66\ kj$$

مثال) در شکل زیر یک وسیله ی آهنگری مشاهده می گردد. با فرض آنکه چکش دستگاه از حالت سکون رها شود سرعت آن را در هنگام برخورد آن به قطعه ی کار را تعیین نمایید؟ توان متوسط در۰.۰۲ ثانیه را تعیین کنید؟ (در وضعیتی که چکش روی قطعه ی کار قرار گرفته است کشش هر فنر ۱۵۰ نیوتون می باشد.)

K=1500 N/m

m=40 kg

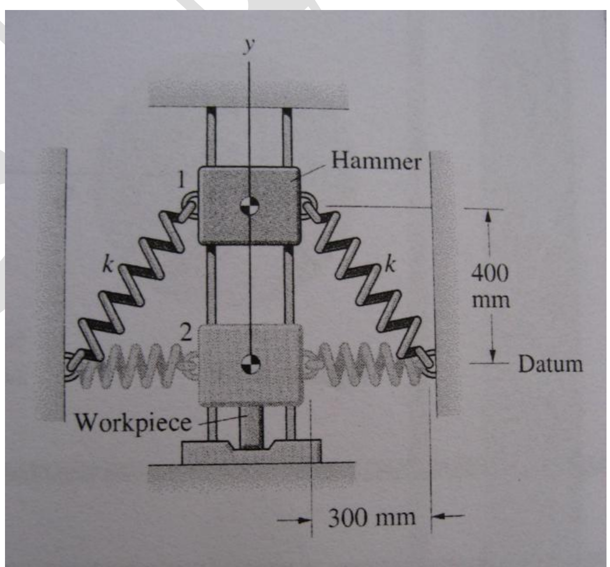


Figure 4.17
(a) Measuring the height of the hammer relative to position 2.

Forging device

$$F = K\Delta s$$

$$150(N) = 1500\left(\frac{N}{m}\right) \times \left((0.3 - s_0)(m)\right) \rightarrow s_0 = 0.2$$

$$(U_{1-2})_{springs} = 2\left[-\frac{1}{2}K(s_2^2 - s_2^2)\right] = 120\, j$$

$$s_2 = 0.3 - 0.2 = 0.1$$

$$s_3 = 0.5 - 0.2 = 0.3$$

$$U_{mg} = mg\Delta z = 40 \times 9.81 \times 0.4 = 156.96\, j$$

$$U_{1-2} = \Delta T \rightarrow U_{spring} + U_{mg} = \Delta T = \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow v = 3.72\frac{m}{s}$$

$$P_{ave} = \frac{U_{1-2}}{t} = \frac{\frac{1}{2}mv^2}{t} = 13.8\, Kw$$

میدان های نیروی پایستار و انرژی پتانسیل :

$$dU = F\,.\,dr = -dV$$

$$U_{1-2} = V_1 - V_2$$

$$Weight \rightarrow V = mgy$$

$$V = -\frac{mgR^2}{r}(R = R_E)$$

$$Spring \rightarrow V = \frac{1}{2}Ks^2$$

$$dU = -dV = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz\right) = -(\nabla V.\,dr)$$

$$\rightarrow F = -\nabla V = -grad(V)$$

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad , \qquad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad and \quad F_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$curl(grad\ V) = 0 \ \rightarrow \nabla \times F = 0$$

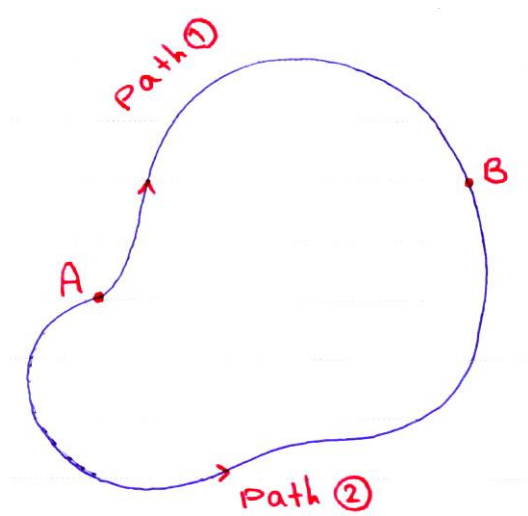
√شرط لازم و کافی برای اینکه نیرو پایستار باشد (انتگرال خط مستقل از مسیر باشد)

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

مختصات قطبی :

$$\nabla \times F = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} e_r & e_\theta & e_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_r & rF_\theta & F_z \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}$$
$$\frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z}$$
$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$$



$$\oint F.dr = \int_s (\nabla \times F).n\ ds$$

(S = هر سطحی که به وسیله مسیر بسته C محدود شده باشد)

برای نیروی پایستار $\oint F.dr = 0$ است :

$$\int_{A_{pat\,h1}}^{B} F\,.\,dr \;+ \int_{B_{pat\,h2}}^{A} F\,.\,dr = 0 \;\;\rightarrow\;\; \int_{A_{pat\,h1}}^{B} F\,.\,dr \;= -\int_{B_{pat\,h2}}^{A} F\,.\,dr$$

$$\rightarrow\;\; \int_{A_{pat\,h1}}^{B} F\,.\,dr \;= \int_{A_{pat\,h2}}^{B} F\,.\,dr$$

مثال) نشان دهید که نیروی $\vec{F} = xy\vec{\imath} + \frac{x^2}{2}\vec{\jmath} + 4\vec{k}$ پایستار است سپس تابع پتانسیل میدان نیرو را تعیین کنید؟

$$\frac{\partial F_y}{\partial z} = 0 = \frac{\partial F_z}{\partial y} = 0\,, \qquad \frac{\partial F_z}{\partial x} = 0 = \frac{\partial F_x}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial F_x}{\partial y} = x = \frac{\partial F_y}{\partial x} = x$$

$\nabla \times F = 0 \;\; \Longrightarrow$ نیرو پایستار است

$$F = -\nabla V$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -xy \;\; and \;\; \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{x^2}{2} \;and\; \quad \frac{\partial V}{\partial z} = -4$$

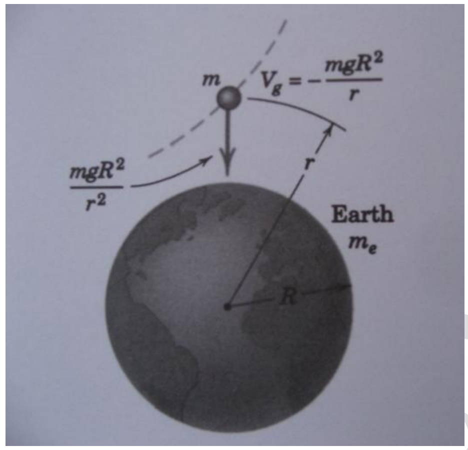
$$\rightarrow \frac{-x^2 y}{2} + f(y,z) = V$$

$$-\frac{x^2}{2} + \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x^2}{2} \;\rightarrow\; \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \;\rightarrow f(y\,,z) = f(z)$$

$$0 + \frac{\partial f(z)}{\partial z} = -4 \;\rightarrow f(z) = -4z + constant$$

$$V = \frac{-x^2 y}{2} - 4z + constant$$

مثال) ثابت کنید که نیروی حاصل از میدان پتانسیل گرانشی ، پایستار است؟



$$V = -\frac{mgR_E^2}{r}$$

$$F = -\nabla V = \frac{mgR_E^2}{r^2} e_r + 0 + 0$$

$$\nabla \times F = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} e_r & e_\theta & e_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_r & rF_\theta & F_z \end{vmatrix} = 0$$

یادآوری : $\begin{cases} U_{1-2} = \Delta T \\ T_1 + U_{1-2} = T_2 \end{cases}$

کار تمام نیروهایی خارجی اعمال شده بر جسم:

$$U_{1-2} = \acute{U}_{1-2} + \left(-\Delta v_g\right) + (-\Delta v_e)$$

$$T_1 + V_1 + \acute{U}_{1-2} = T_2 + V_2$$

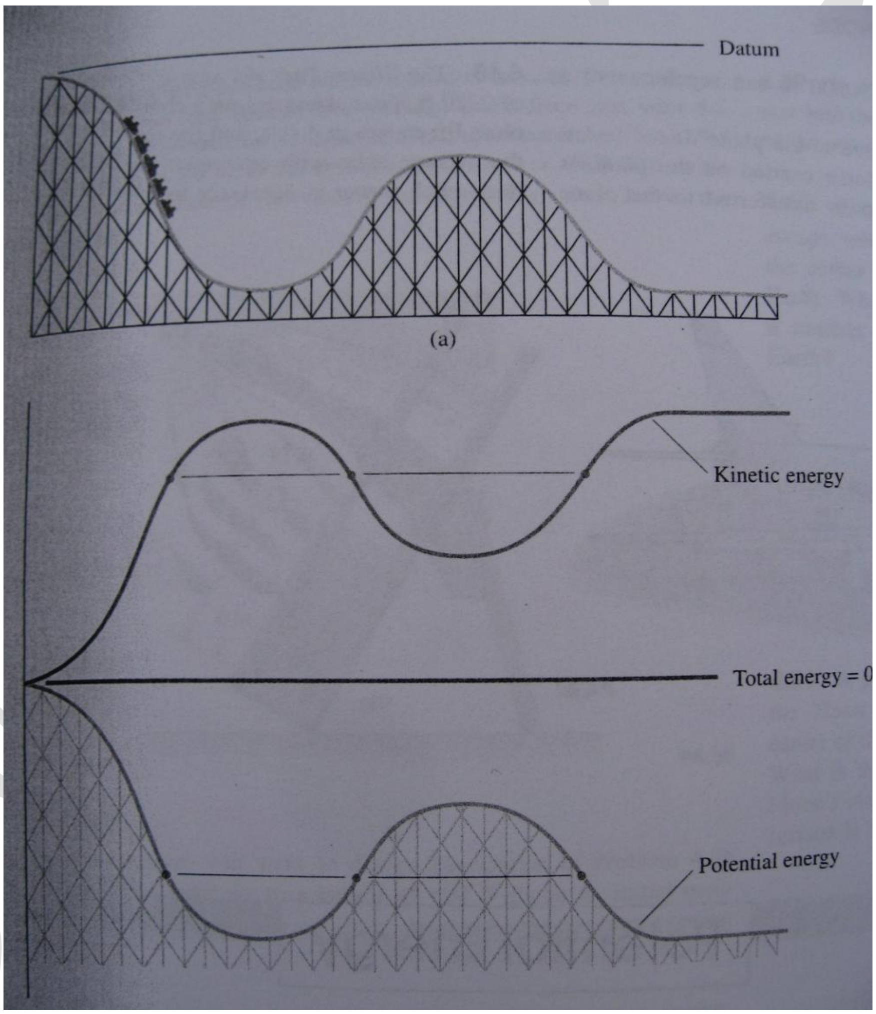
$$V = V_g + V_e$$

توضیح: برای مسائلی که فقط شامل نیروهای گرانشی و الاستیک هستند (نیروهای قیدی که کار انجام نمی دهند) معادله فوق به صورت زیر ساده می شود :

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

$$\rightarrow E_1 = E_2$$

$$E = T + V$$



مثال) مطلوبست حل مسأله ی دستگاه آهنگری (Forging- device) با استفاده از قانون بقای انرژی؟

$$E_1 = E_2$$

$$(V_g)_1 + (V_e)_1 + \frac{1}{2}mv_1^2 = (V_g)_2 + (V_e)_2 + \frac{1}{2}mv_2^2$$

$$\rightarrow 2\left(\frac{1}{2}ks_1^2\right) + mgy_1 + 0 = 2\left(\frac{1}{2}ks_2^2\right) + 0 + \frac{1}{2}mv_2^2$$

$$\rightarrow (1500 \times 0.3^2) + (40 \times 9.81 \times 0.4) + 0 = (1500 \times 0.1^2) + 0 + \frac{1}{2} \times 40 \times v_2^2$$

$$\rightarrow v_2 = 3.72\frac{m}{s}$$

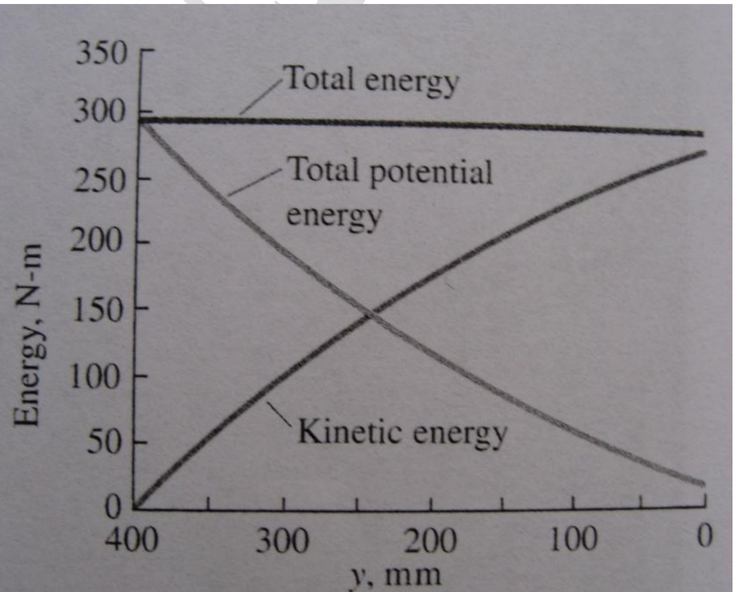
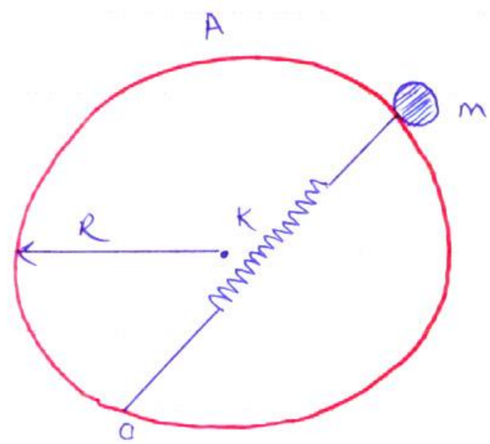


Figure 4.18
The potential and kinetic energies as functions of the y coordinate of the hammer.

مثال) جرم m از نقطه ی A رها می شود با فرض آنکه طول آزاد فنر صفر باشد سرعت جرم مذکور را هنگامی که به نقطه ی صفر می رسد محاسبه نمایید؟

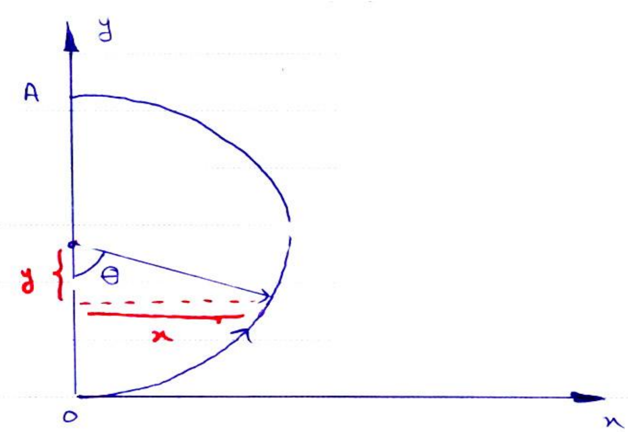


$$E_1 = E_2$$

$$T_1 + (V_g)_1 + (V_e)_1 = T_2 + (V_g)_2 + (V_e)_2$$

$$0 + 2mgR + \frac{1}{2}K(2R)^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + 0 + 0 \rightarrow v_2 = 2\sqrt{Rg + \frac{kR^2}{m}}$$

مثال) مطلوبست محاسبه ی مقدار کار انجام شده توسط نیروی $F = A(x^3\vec{i} + xy^2\vec{j})$ در امتداد مسیر نیم دایره ای نشان داده شده در شکل زیر از نقطه ی o تا نقطه ی A. سپس در صورتی که نیروی F به صورت مماس بر مسیر وارد گردد مقدار کار انجام شده را محاسبه نمایید؟



$$if\ x = R\sin\theta\ \rightarrow dx = R\cos\theta\ d\theta$$

$$if\ y = R(1-\cos\theta)\ \rightarrow dy = R\sin\theta\ d\theta$$

$$U_{0-A} = \int F.dr = \int [A(x^3\vec{i} + xy^2\ \vec{j}).(dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j})]$$

$$U_{0-A} = \int A\,x^3dx + Axy^2dy$$

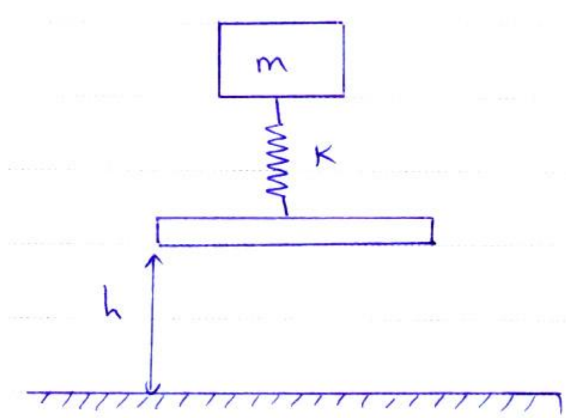
$$U_{0-A} = R^4\,A\int_0^{\pi} [\sin^3\theta\ \cos\theta + \sin^2\theta\,(1-\cos\theta)^2]\,d\theta$$

در حالت دوم داریم :

$$\vec{F} = F_0\vec{e}_\theta$$

$$U_{0-A} = \int_0^A F.dr = \int_0^A (F_0\vec{e}_\theta).(dr\vec{e}_r + Rd\theta\,\vec{e}_\theta) = \int_0^{\pi} F_0Rd\theta = \pi F_0R$$

مثال) سیستم جرم و فنر نشان داده شده در شکل زیر از ارتفاع h رها می شود . پس از برخورد پایه به زمین به آن می چسبد سرعت جرم m در موقعیتی که فنر به اندازه ی نصف فشردگی max یا بیشینه فشرده شده است با فرض $k = \frac{4mg}{h}$ را بدست آورید؟



$$E_1 = E_2$$

$$mg(h + \delta_{max}) = \frac{1}{2} k \delta_{max}^2$$

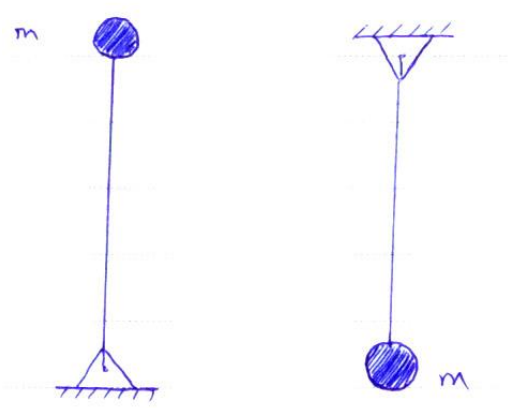
$$2\delta_{max}^2 - \delta_{max} h - h^2 = 0 \rightarrow \delta_{max} = h$$

$$E_1 = E_2$$

$$mg\left(h + \frac{h}{2}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{4mg}{h} \times (\frac{h}{2})^2 + \frac{1}{2} m v^2 \rightarrow v = \sqrt{2gh}$$

پایداری :

شرط تعادل : $\frac{dv}{dx} = o$



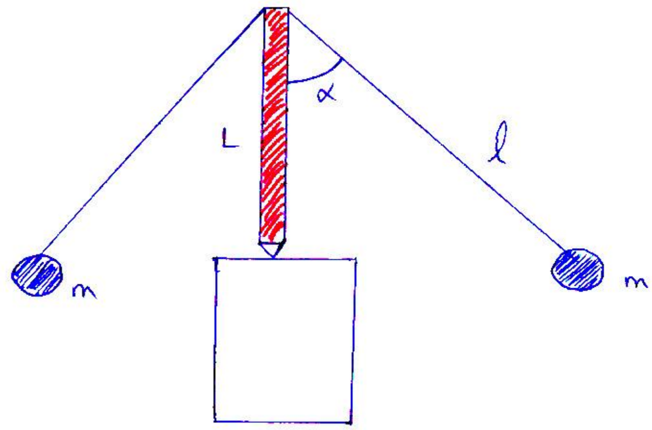
$$if \;\; v = mgl(1 - \cos\theta) \rightarrow \frac{dv}{d\theta} = mgl \sin\theta$$

$$if \;\; mg \;\sin\theta = 0 \;\rightarrow \begin{cases} \theta = 0 \\ \theta = \pi \end{cases}$$

$$if \;\; \theta = 0 \;\rightarrow \frac{d^2 v}{d\theta^2} = mgl \cos\theta > 0$$

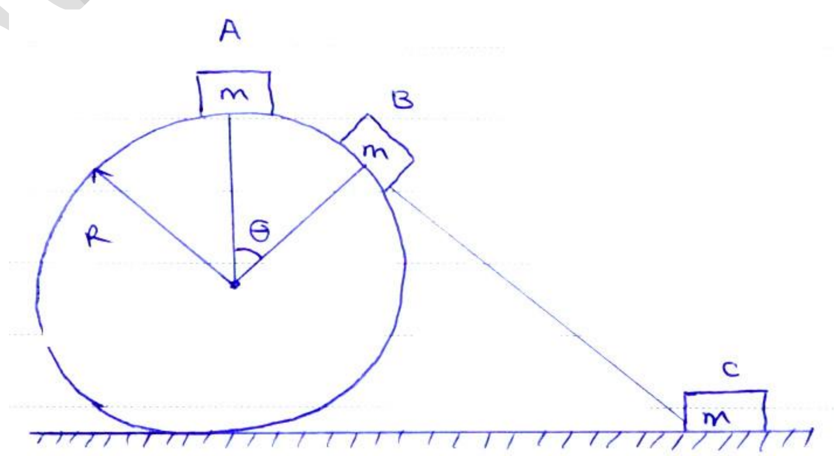
$$if \;\; \theta = \pi \;\rightarrow \frac{d^2 v}{d\theta^2} = mgl \cos\theta < 0$$

مثال) می خواهیم شرط پایداری را برای وسیله ی بازی نشان داده شده در شکل زیر بدست آوریم .



$$v(\theta) = mg[L\cos\theta - l\cos(\alpha+\theta)]$$
$$+ mg[L\,cos\,\theta - l\,cos(\alpha-\theta)] = 2mg\,cos\,\theta(L - l\cos\theta)$$
$$\to \frac{dv}{d\theta} = 0 \to \ -2mg\,sin\,\theta(L - l\,cos\,\alpha) = 0 \ \to \left.\frac{d^2v}{d\theta^2}\right|\theta$$
$$= -2mg(L - l\,cos\,\alpha) > 0 \ \to L < l\,cos\,\alpha$$

مثال) ضریبی به جرم m از بالاترین سطح کروی بدون اصکاک به شعاع R از حال سکون شروع به حرکت می نماید نقطه ی جدایش آن از سطح ، سرعت ذره در آن لحظه (لحظه ی جدایش) و نیز سرعت برخورد ذره به زمین را بدست آورید؟



$$v_B^2 - v_A^2 = 2gR(1-\cos\theta) \rightarrow v_B = \sqrt{2gR(1-\cos\theta)}$$

شرط جدایش :

$$N = 0$$

$$mg\cos\theta - N = \frac{mv_B^2}{R} \rightarrow N = 0$$

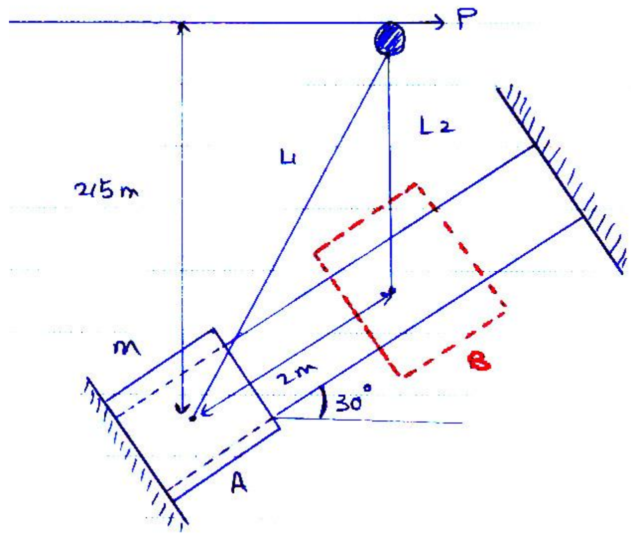
$$mg\cos\theta = 2mg(1-\cos\theta) \rightarrow \cos\theta = 2 - 2\cos\theta \rightarrow \cos\theta = \frac{2}{3}$$

سرعت برخورد در لحظه ی رسیدن به زمین :

$$v_C^2 - v_A^2 = 2g \times 2R \rightarrow v_c = 2\sqrt{Rg}$$

$$if\ \cos\theta = \frac{2}{3} \rightarrow v_B = \sqrt{\frac{2gR}{3}}$$

مثال) جرم [m= 1/8 kg] در نقطه ی A بر روی یک میله ی بدون اصطکاک رها می شود نخست سرعت آن را در موقعیت B برای نیروی P=20N محاسبه نمایید ؟ سپس کمترین مقدار نیروی P را چنان بیابید که جسم مذکور به موقعیت B برسد؟



$$U_{A-B} = T_B - T_A$$

$$-mgh + P(L_1 - L_2) = \frac{1}{2}mv_B^2 - 0$$

$$h = 2\,sin\,30 = 1$$

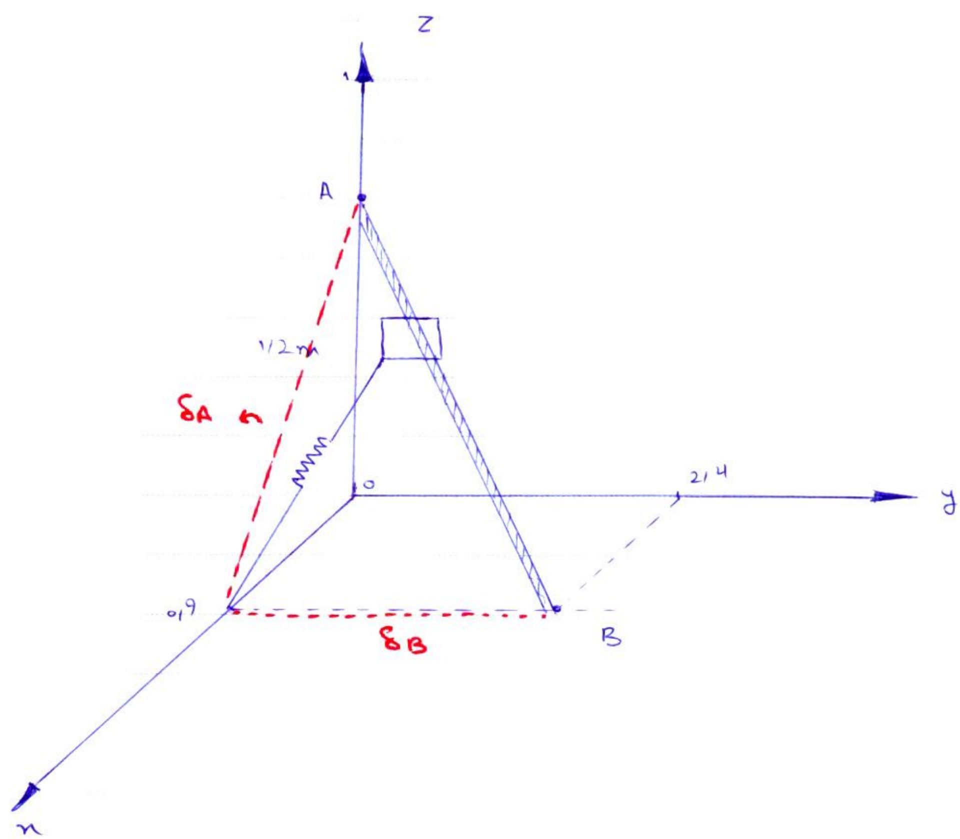
$$L_1 = ((2\,cos\,30)^2 + (2.5)^2)^{\frac{1}{2}} \rightarrow L_1 = 3.041$$

$$L_2 = 2.5 - 2\,sin\,30 = 1.5 \rightarrow v_B = 3.82\,\frac{m}{s}$$

$$-mgh + P_{min}\,(L_1 - L_2) = 0$$

$$P_{min} = \frac{mgh}{L_1 - L_2} = 11.46$$

مثال) در شکل زیر طول آزاد فنر 1.8 m و سختی آن $120\frac{N}{m}$ می باشد جرم m=0.9 kg با سرعت $3.6\frac{m}{s}$ از نقطه ی A بر روی یک میله ی بدون اصطکاک به سمت پایین می لغزد سرعت آن را در نقطه ی B محاسبه کنید؟



$U_{A-B} = T_B - T_A$

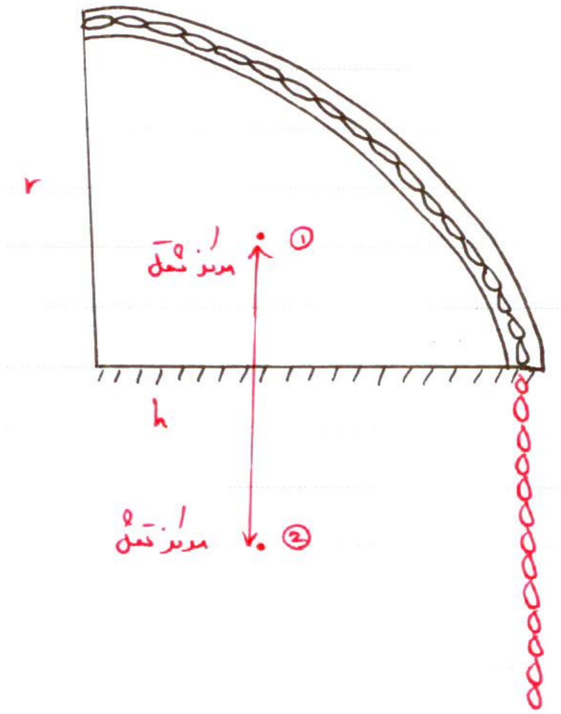
$$-mg(Z_B - Z_A) - \frac{1}{2}k(\delta_B^2 - \delta_A^2) = \frac{1}{2}m(v_B^2 - v_A^2)$$

$Z_B - Z_A = -1.2m$

$\delta_A = \sqrt{1.2^2 + 0.9^2} - 1.8 = 0.3$

$\delta_B = 2.4 - 1.8 = 0.6$

مثال) زنجیری مطابق شکل زیر رها می شود سرعت آن را در هنگام ترک آخرین حلقه ی آن از مسیر ربع دایره با فرض اصکاک ناچیز محاسبه نمایید؟

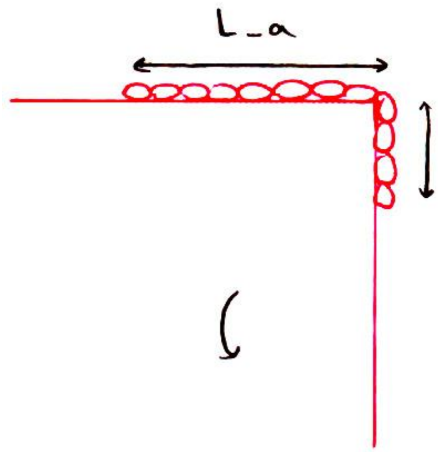


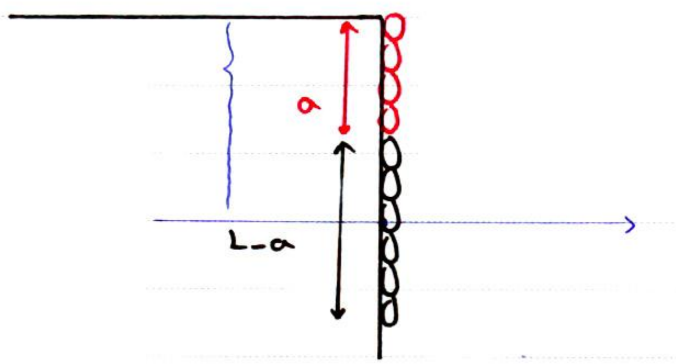
$$mg\left(\frac{2r}{\pi}+\frac{\pi r}{4}\right)=\frac{1}{2}mv^2$$

$$v=\sqrt{gr(\frac{4}{\pi}+\frac{\pi}{2})}$$

مثال) ذره ای به جرم m به طول L بر روی میز بدون اصطکاکی مطابق شکل زیر از وضعیت سکون رها می شود سرعت آن را در هنگام ترک آخرین حلقه ی آن از روی میز محاسبه کنید ؟

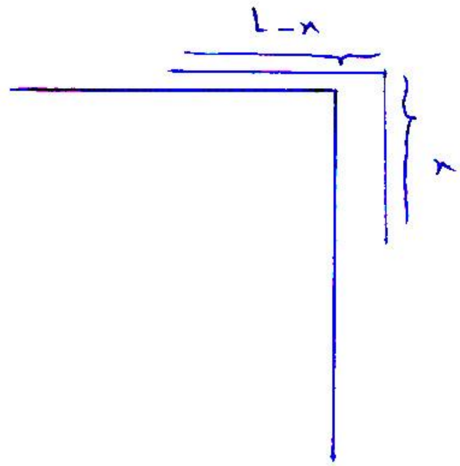
۱) روش کار و انرژی :





$$\left(\frac{L-a}{L}\right)g\left(\frac{L+a}{2}\right)=\frac{1}{2}mv^2 \;\rightarrow v=\left(\frac{g}{L}(L^2-a^2)\right)^{\frac{1}{2}}$$

۲) روش دینامیکی :



$$\left(\frac{x}{L}m\right)g = m\frac{vdv}{dx} \rightarrow \int vdv = \int \frac{g}{L}xdx$$

ضربه و ممنتوم :

$$\sum F = ma \rightarrow \sum F = m\frac{dv}{dt} \rightarrow \sum F = \frac{d}{dt}(mv)$$

$$G = mv \rightarrow \sum F = \dot{G}$$

$$\sum F_x = \dot{G}_x$$

$$\sum F_y = \dot{G}_y$$

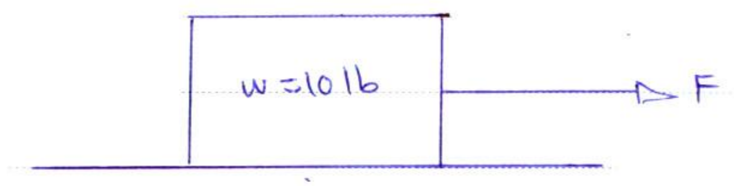
$$\sum F_z = \dot{G}_z$$

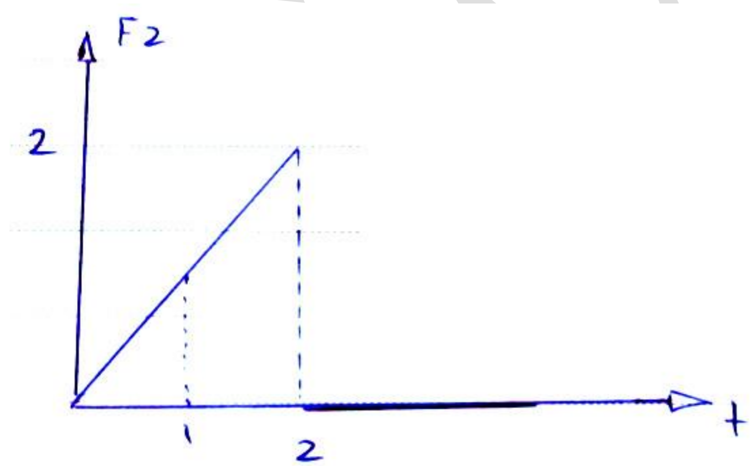
$$\int_{t_1}^{t_2} F.dt = G_2 - G_1 = \Delta G \rightarrow G_1 + \int_{t_1}^{t_2} \sum F.dt = G_2$$

$$if \sum F = 0 \rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \sum F.dt = \Delta G = 0 \rightarrow G_2 - G_1 = 0 \rightarrow G_1 = G_2$$

√اگر برآیند نیروهای وارد بر یک ذره در یک دوره زمانی صفر باشد اندازه ی خطی آن ثابت خواهد ماند که به آن اصل پایستگی اندازه ی خطی گفته می شود.

مثال) قطعه ای به وزن 10lb روی سطحی به ضریب اصطکاک 0.1 تحت نیروی F با منحنی نمایش تغییرات زیر قرار گرفته است ، سرعت ذره را پس از زمان (S) 2 بدست آورید؟





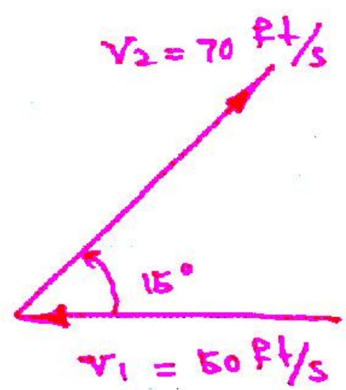
$$F = F_f = \mu.W$$

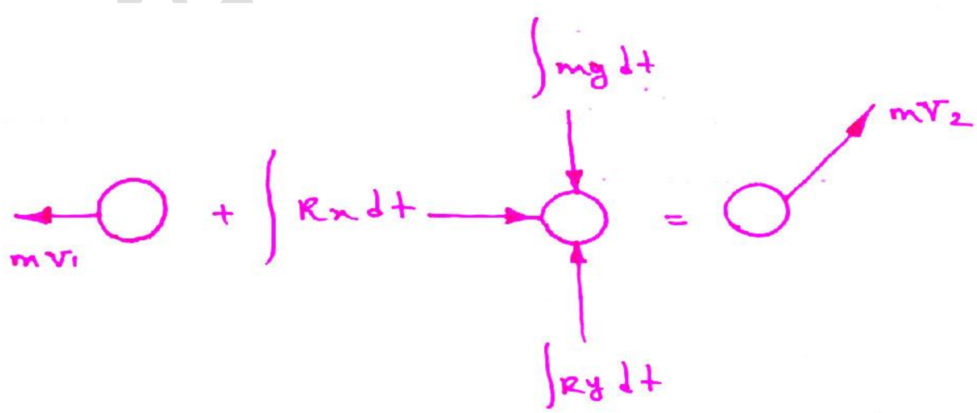
$$t = \mu.W = 1(s)$$

$$\rightarrow \int_1^2 (F - F_f)dt = mv - mv_0 = mv$$

$$\int_{1}^{t}(t-0.1\times 10)dt = mv \rightarrow v = 1.61\ \frac{ft}{s}$$

مثال) یک بازیکن تنیس توپی را که با سرعت افقی با سرعت $50\frac{ft}{s}$ دریافت می نماید با سرعت $70\frac{ft}{s}$ در زاویه ی 15° بالای افق می زند در صورتیکه وزن توپ4(OZ) باشد و مدت زمان تماس توپ و راکت 02.0 ثانیه باشد مقدار و جهت نیروی متوسط اعمال شده توسط راکت بر روی توپ را محاسبه کنید ؟





$$m(v_x)_1 + \int_{t_1}^{t_2}\sum F_x\, dt = m(v_x)_2$$

$$m(v_y)_1 + \int_{t_1}^{t_2} \sum F_y \, dt = m(v_y)_2$$

$$\longrightarrow \begin{cases} -\dfrac{4/16}{32.2}(50) + R_x(0.02) = \dfrac{4/16}{32.2}(70\cos 15^o) \\ 0 + R_y(0.02) - \left(\dfrac{4}{16}\right) \times 0.02 = \dfrac{4/16}{32.2}(70\sin 15^o) \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} R_x = 45.7 \ \ 1b \\ R_y = 7.28 \ \ 1b \end{cases}$$

$$\longrightarrow R = 46.28 \angle 9.06^o$$

مثال) یک گلوله ی 50 gr با سرعت $600\dfrac{m}{s}$ به یک بلوک 4 kg برخورد می کند و در آن می نشیند که در صفحه ی افقی با سرعت $12\dfrac{m}{s}$ زاویه ی ۳۰ بالای افق شروع به لغزش می نماید در نهایت سرعت مجموعه را بدست آورید ؟

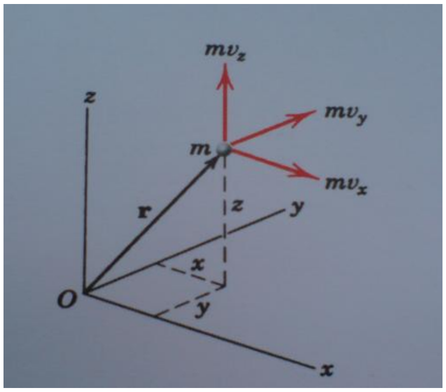
$$G_1 = G_2$$

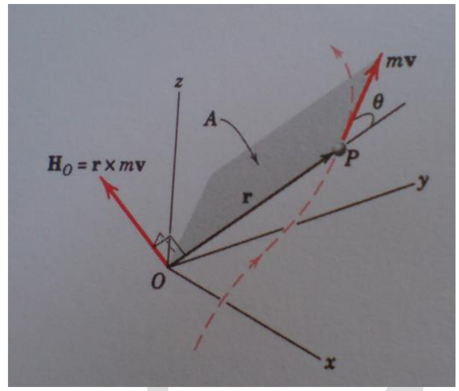
$$(0.05 \times 600\vec{j}) + [4 \times (12\cos 30\vec{i} + 12\sin 30\vec{j})] = (0.05 + 4) \times v_f$$

$$\vec{v}_f = 10.26\vec{i} + 13.33\vec{j}$$

$$|\vec{V_f}| = 16.53 \angle 52.4^o$$

ضربه و اندازه حرکت زاویه ی :





$$H_o = r \times mv$$

$$H_o = m\begin{bmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ v_x & v_y & v_z \end{bmatrix}$$

$$\sum M_o = r \times \sum F = r \times ma = r \times m\dot{v} \ \ (1)$$

$$\dot{H}_o = \dot{r} \times mv + r \times m\dot{v} \ \rightarrow \ \dot{H}_o = r \times m\dot{v} \xrightarrow{(1)} \dot{H}_o = \sum M_o$$

$$\left(\sum M_o\right)_x = (\dot{H}_o)_x$$

$$\left(\sum M_o\right)_y = (\dot{H}_o)_y$$

$$\left(\sum M_o\right)_z = (\dot{H}_o)_z$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum M_o dt = (H_0)_2 - (H_o)_1 = \Delta H_o$$

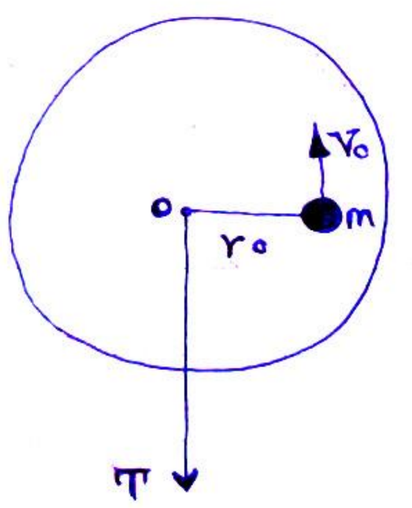
$$(H_o)_1 + \int_{t_1}^{t_2} \sum M_o dt = (H_0)_2$$

$$if \sum M_o = 0 \rightarrow \dot{H}_o = 0 \rightarrow H_o = constant\ t \rightarrow H_{o_1} = H_{o_2}$$

اندازه حرکت زاویه ای ثابت می ماند $\longrightarrow$

√در صورتیکه براینده گشتاورها حول نقطه ی ثابت o صفر باشد مومنتوم زاویه ی حول آن نقطه ثابت باقی خواهد ماند.

مثال) یک نقطه ی مادی به جرم m با سرعت مماسی V_0 در فاصله ی r_0 در حال دوران است. کار نیروی کشش نخ را هنگامی که فاصله ی جسم مذکور به r کاهش یابد را محاسبه نمایید ؟



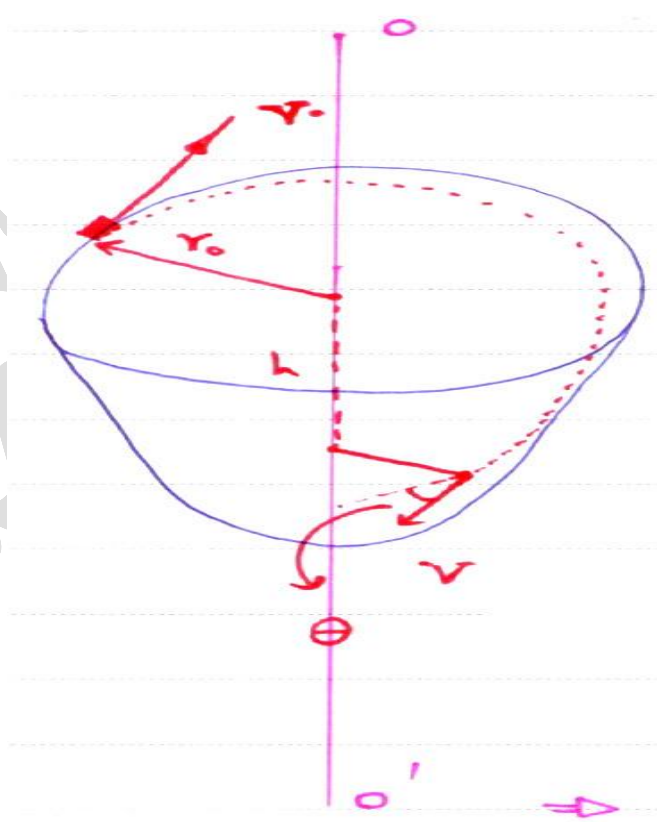
$$\int T.dr = \frac{1}{2} m(v^2 - {v_o}^2)$$

$$(H_0)_2 = (H_o)_1$$

$$(mv_o r_o) = (mvr) \rightarrow v = \frac{r_o}{r} v_o$$

$$\int T.dr = \frac{1}{2} m v_o^2 \left[\left(\frac{r_o}{r} \right)^2 - 1 \right]$$

مثال) به یک ذره با جرمی کوچک سرعت اولیه v_0 مماس بر لبه افقی یک ظرف صیقلی به شکل نیمکره در شعاع r_0 از محور تقارن قائم در نقطه A مطابق شکل داده می شود . در لحظه ای که ذره از نقطه B می گذرد که به اندازه h پایین تر از A بوده و در شعاع r از محور تقارن قائم قرار دارد ، سرعت v ذره ، زاویه θ را با خط افقی مماس بر ظرف در نقطه B می سازد . زاویه θ را تعیین کنید ؟



$$(H_0)_2 = (H_o)_1$$

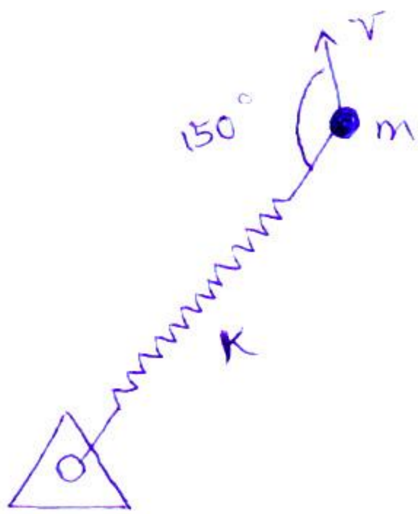
$$mv_o r_o = mv \cos\theta . r$$

از طرفی : $r = \sqrt{{r_o}^2 - h^2}$

$$\frac{1}{2}mv_o^2 = \frac{1}{2}mv^2 - mgh \rightarrow v = \sqrt{{v_o}^2 + 2gh}$$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2gh}{v_o^2}}\sqrt{1-\frac{h^2}{r_o^2}}}$$

مثال) جرم m بر روی یک میز گرد بدون اصکاک با سرعت v از طول آزاد فنر مطابق شکل زیر پرتاپ می شود مقدار v را چنان بیابید که حداکثر طول فنر به مقدار ۳ برابر طول اولیه اش برسد.



$$H_o = constant$$

$$(H_0)_2 = (H_o)_1$$

$$mv\cos 60 \times L_o = mv_f\, 3L_o$$

$$v_f = \frac{v}{6}$$

$$v = v_\theta$$

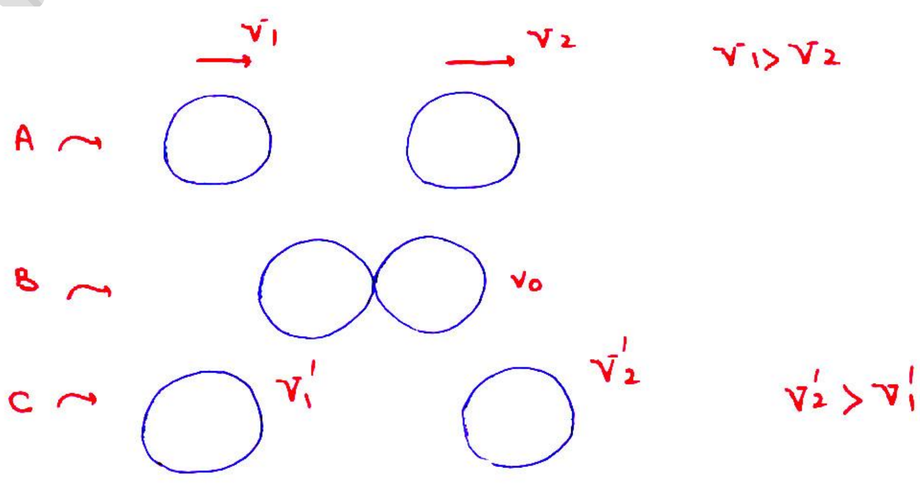
$$\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}mv_f^2+\frac{1}{2}k[(3L_o-L_o)^2-(L_0-L_0)^2]$$

$$v=12L_0\sqrt{\frac{k}{35m}}$$

برخورد :

۱) برخورد مرکزی
- الف) برخورد مستقیم
- ب) برخورد مایل

۲) برخورد غیر مرکزی



$$\begin{cases} m_1 v_1 - \int_0^{t_o} F_d\,dt = m_1 v_0 \\ m_2 v_2 - \int_0^{t_o} F_d\,dt = m_2 v_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 v_o - \int_0^{t_o} F_d\,dt = m_1 v'_1 \\ m_2 v_o - \int_0^{t_o} F_d\,dt = m_2 v'_2 \end{cases}$$

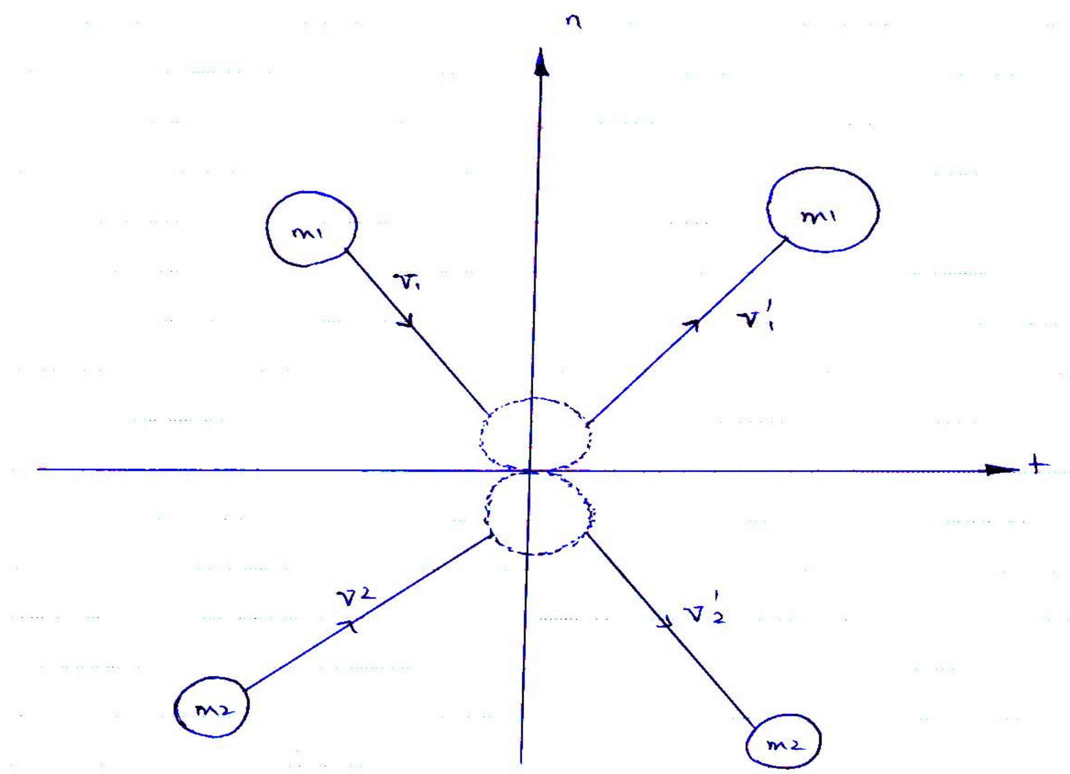
$$e = \frac{\int_{t_0}^{t} F_r\,dt}{\int_0^{t_o} F_d\,dt} = \frac{v_0 - v'_1}{v_1 - v_0} = \frac{v_0 - v'_2}{v_2 - v_0}$$

$$e = \frac{v'_2 - v'_1}{v'_1 - v'_2}$$

$$0 \le e \le 1$$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2$$

برخورد مایل :

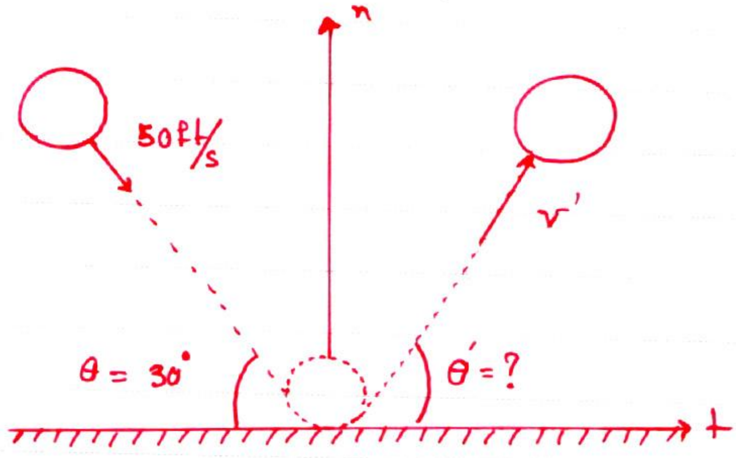


$$m_1(v_1)_n + m_2(v_2)_n = m_1(v_1')_n + m_2(v_2')_n$$

$$e = \frac{(v_2')_n - (v_1')_n}{(v_1)_n - (v_2)_n}$$

$$\begin{cases} m_1(v_1)_t = m_2(v_1')_t \\ m_2(v_2)_t = m_2(v_2')_t \end{cases}$$

مثال) توپی با سرعت $50\frac{ft}{s}$ و با زاویه ی $30°$ به سمت صفحه ای پرتاب می شود در صورتیکه ضریب برخورد۰.۵ باشد سرعت و زاویه ی توپ را بعد از برخورد محاسبه نمایید؟



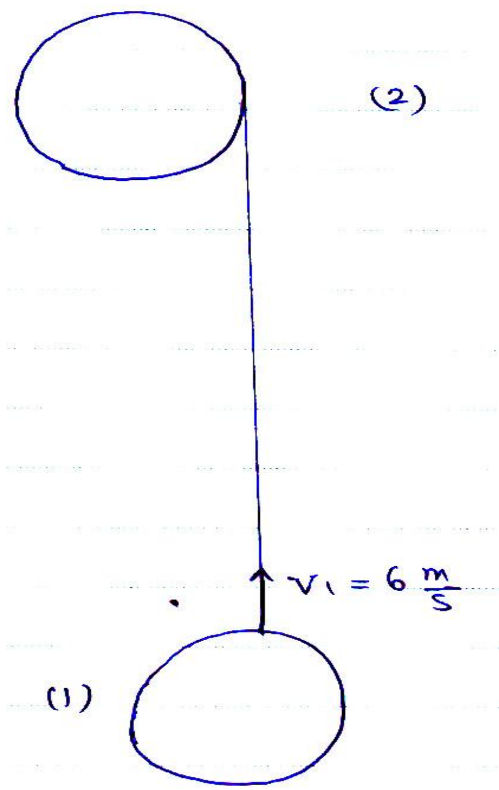
$$e = \frac{0 - (\acute{v}_1)_2}{-50\sin 30 - 0} \rightarrow (\acute{v}_1)_n = 12.5\ \frac{ft}{s}$$

$$(\acute{v}_1)_t = (v_1)_t \rightarrow (\acute{v}_1)_t = 50\cos 30 = 43.3\frac{ft}{s}$$

$$\acute{v} = \left[{(\acute{v}_1)_n}^2 + {(\acute{v}_1)_t}^2\right]^{\frac{1}{2}} = 45.1\frac{ft}{s}$$

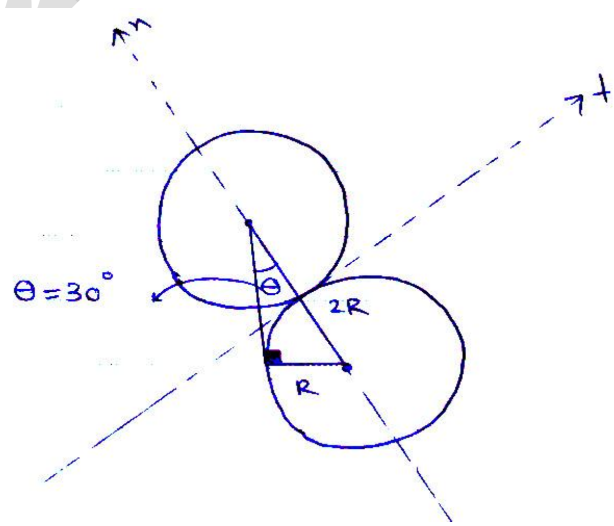
$$\theta = arc\tan\frac{(\acute{v}_1)_n}{(\acute{v}_1)_t} = 16.1^o$$

مثال) ذره ی کروی (۱) با سرعت $v_1 = 6\frac{m}{s}$ در جهت نشان داده شده با کره ی (۲) با جرم و قطر برابر که در حال سکون قرار گرفته است برخورد می نماید اگر ضریب برخورد۰.۶ باشد حرکت حاصله ی هر کره را بعد از برخورد بدست آورید ؟ همچنین میزان افت انرژی ناشی از برخورد را محاسبه نمایید؟



$$m_1(v_1)_n + m_2(v_2)_n = m_1(\acute{v}_1)_n + m_2(\acute{v}_2)_n$$

$$\rightarrow 5.2 + 0 = (\acute{v}_1)_n + (\acute{v}_2)_n$$



$$e=\frac{(\acute{v}_2)_n-(\acute{v}_1)_n}{(v_1)_n-(v_2)_n}\rightarrow 0.6=\frac{(\acute{v}_2)_n-(\acute{v}_1)_n}{5.2-0}$$

$$\begin{cases}(\acute{v}_1)_t=(v_1)_t=3\,\frac{m}{s}\\(\acute{v}_2)_t=(v_2)_t=0\,\frac{m}{s}\end{cases}$$

$$(\acute{v}_1)_n=1.039\frac{m}{s}\ \ and\ \ (\acute{v}_2)_n=4.16\frac{m}{s}$$

$$\acute{v}_1=3.17\frac{m}{s}\ \ and\ \ \acute{v}_2=4.16\frac{m}{s}$$

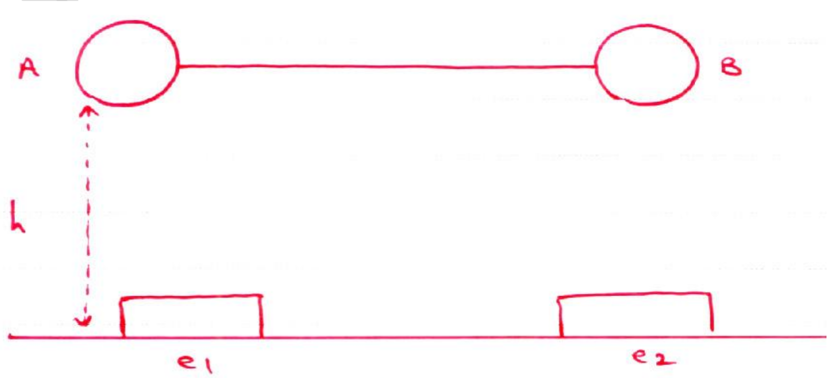
چون e <1 است بنابراین ما حتماً افت انرژی خواهیم داشت

$$T=\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2=18\text{ m}$$

$$\acute{T}=\frac{1}{2}m_1(\acute{v}_1)^2+\frac{1}{2}m_2(\acute{v}_2)^2=13.68\text{ m}$$

$$\text{افت انرژی}=\frac{\Delta T}{T}\times 100=\text{درصد اتلاف}=24\%$$

مثال) در شکل زیر میله ی AB بر روی سطحی با ضرایب استرداد مختلف رها می شود سرعت زاویه ی میله را بعد از برخورد بدست آورید؟

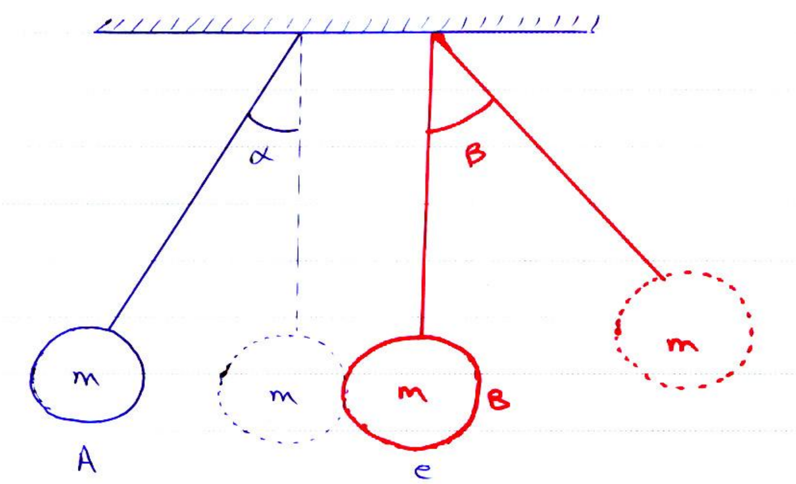


قبل از برخورد : $v_A=v_B=\sqrt{2gh}$

$$\acute{v}_A = e_1 v_A \; and \; \acute{v}_B = e_2 v_B$$

$$\omega = \frac{\acute{v}_B - \acute{v}_A}{L} \rightarrow \omega = \frac{(e_2 - e_1)\sqrt{2gh}}{L}$$

مثال) آونگ A از زاویه ی α رها می شود به آونگ B که در حال سکون است برخورد می نماید در صورتیکه ضریب استرداد e باشد پاندول B با چه زاویه ی بالا خواهد رفت؟



$$v_A = \sqrt{2gl(1 - \cos\alpha)}$$

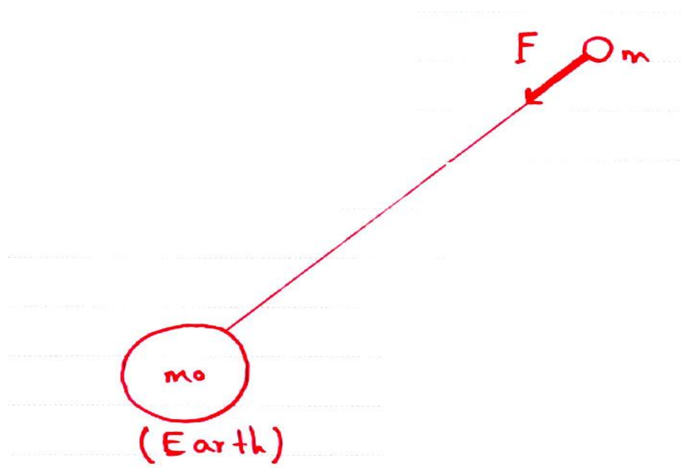
$$mv_A + 0 = m\acute{v}_A + m\acute{v}_B$$

$$e = \frac{\acute{v}_B - \acute{v}_A}{v_A} \rightarrow \acute{v}_B - \acute{v}_A = ev_A \rightarrow$$

$$\acute{v}_B = \frac{1+e}{2} v_A \quad and \quad v_B = \sqrt{2gl(1 - \cos\beta)}$$

$$\beta = \cos^{-1}\left[1 - \left(\frac{1+e}{2}\right)^2 (1 - \cos\alpha)\right]$$

حرکت تحت نیروی مرکزی :



$$F(r) = F = G\frac{mm_o}{r^2}$$

$$\begin{cases} m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) = F(r) \\ \\ m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 0 \end{cases} \rightarrow \dot{H}_o = 0 \rightarrow \dot{H}_o = mr^2\dot{\theta} = \text{constant}$$

$$\rightarrow r^2\dot{\theta} = constant = h$$

$$\left(u = \frac{1}{r}\right) \rightarrow \dot{\theta} = hu^2$$

$$\dot{r} = \dot{\theta}\frac{dr}{d\theta} = hu^2\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{u}\right) = -h\frac{du}{d\theta}$$

$$hu^2\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{u}\right) = -h\frac{du}{d\theta}$$

$$\ddot{r} = \dot{\theta}\frac{d}{d\theta}\left(-h\frac{du}{d\theta}\right) = -h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{F\left(\frac{1}{u}\right)}{mh^2u^2}$$

مسیر تحت نیروی جاذبه ی عمومی :

$$\begin{cases} F(r) = -\dfrac{k}{r^2}e_r \\ \dfrac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\dfrac{F\left(\frac{1}{u}\right)}{mh^2u^2} \end{cases} \rightarrow \frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{k}{mh^2}$$

$$r(\theta) = \frac{\dfrac{mh^2}{k}}{\dfrac{mh^2}{k}A\cos(\theta - \theta_0) + 1} = \frac{a}{1 + \varepsilon\cos\theta}$$

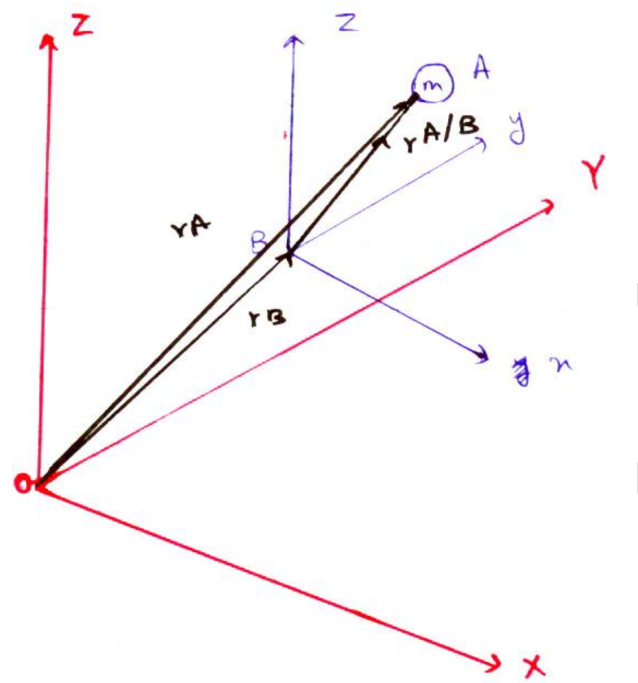
$\varepsilon<1$ if انتهای مسیر یک بیضی را طی می کند.

$\varepsilon=1$ if انتهای مسیر یک سهمی را طی می کند .

$\varepsilon>1$ if انتهای مسیر یک هندسی را طی می کند.

$\varepsilon=0$ if انتهای مسیر یک دایره را طی می کند.

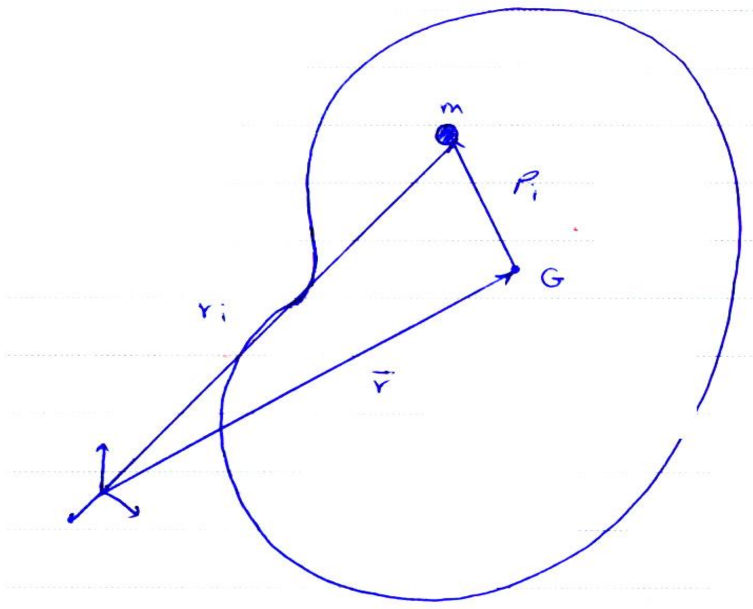
حرکت نسبی:



$$a_A = a_B + a_{A/B}(a_{rel})$$

$$if\;\; a_B = 0 \;\rightarrow\; \sum F = \mathrm{m}a_{rel}$$

$$if\;\; a_B \neq 0 \;\rightarrow\; \sum F = \mathrm{m}(a_B + a_{rel}) \rightarrow \sum F \neq \mathrm{m}a_{rel}$$



$$\bar{\mathrm{r}} = \frac{\sum m_i r_i}{\mathrm{m}}$$

$$\mathrm{F_i} + \sum_{j=1}^{n} \mathrm{F_{ij}} = \frac{d}{dt}(m_i v_i)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{F_i} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathrm{f_{ij}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}(m_i v_i) \quad ,(\mathrm{f_{ij}} = -\mathrm{f_{ji}})$$

$$\sum F = \frac{d}{dt}(m\bar{v}) = \dot{\mathrm{G}}$$

$$\mathrm{G} = \sum m_i v_i = m\bar{v}$$

$$\dot{\mathrm{G}} = m\bar{a}$$

$$\mathrm{G_1} + \int_{\mathrm{t_1}}^{\mathrm{t_2}} \sum \mathrm{F\,dt} = \mathrm{G_2}$$

$$G_1 = G_2$$

$$r_i(\mathrm{F_i} + \sum_{j=1}^{n} \mathrm{F_{ij}} = \frac{d}{dt}(m_i v_i))$$

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{r_i} \times \mathrm{F_i} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathrm{r_i} \times \mathrm{F_{ij}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}(\mathrm{r_i} \times m_i v_i)$$

$$\sum M_o = \dot{\mathrm{H}}_o \rightarrow \mathrm{H_o} = \sum_{i=1}^{n}(\mathrm{r_i} \times m_i v_i)$$

$$\dot{\mathrm{H}}_o = \sum_{i=1}^{n}[(\mathrm{v_i} \times m_i v_i) + (\mathrm{r_i} \times m_i v_i)] = \sum \mathrm{r_i} \times m_i a_i$$

$$(\mathrm{H_o})_1 + \int_{t_1}^{t_2} \sum M_o\, dt = (\mathrm{H_o})_2 \quad , \quad (\mathrm{H_o})_1 = (\mathrm{H_o})_2$$

$$\mathrm{H_G} = (\mathrm{H_G})_{\mathrm{abs}} = (\mathrm{H_G})_{rel}$$

$$(\mathrm{H_G})_{rel} = \sum \rho_i \times m_i \dot{\rho}_i$$

$$(\mathrm{H_G})_{\mathrm{abs}} = \sum \rho_i \times m_i\left(\overline{(\dot{r})} + \dot{\rho}_i\right) = \sum \rho_i \times m_i \dot{\rho}_i = (\mathrm{H_G})_{rel}$$

طبق تعریف مرکز ثقل $\rightarrow \sum m_i \rho_i = 0$

اثبات می شود که : $(\mathrm{H_G})_{\mathrm{abs}} = (\mathrm{H_G})_{rel}$

$$(\dot{\mathrm{H}}_G)_{rel} = \sum_{i=1}^{n} \dot{\rho}_i \times m_i \dot{\rho}_i + \sum_{i=1}^{n} \rho_i \times m_i \ddot{\rho}_i$$

$$\rightarrow (\dot{\mathrm{H}}_G)_{rel} = \sum_{i=1}^{n} \rho_i \times m_i \ddot{\rho}_i = \sum M_G$$

$$\rightarrow (\dot{\mathrm{H}}_{\mathrm{G}})_{abs} = \sum \rho_{\mathrm{i}} \times m_i\big(\overline{(\dot{r})} + \dot{\rho}_{\mathrm{i}}\big) + \sum \rho_{\mathrm{i}} \times m_i\,(\ddot{r}_i)$$

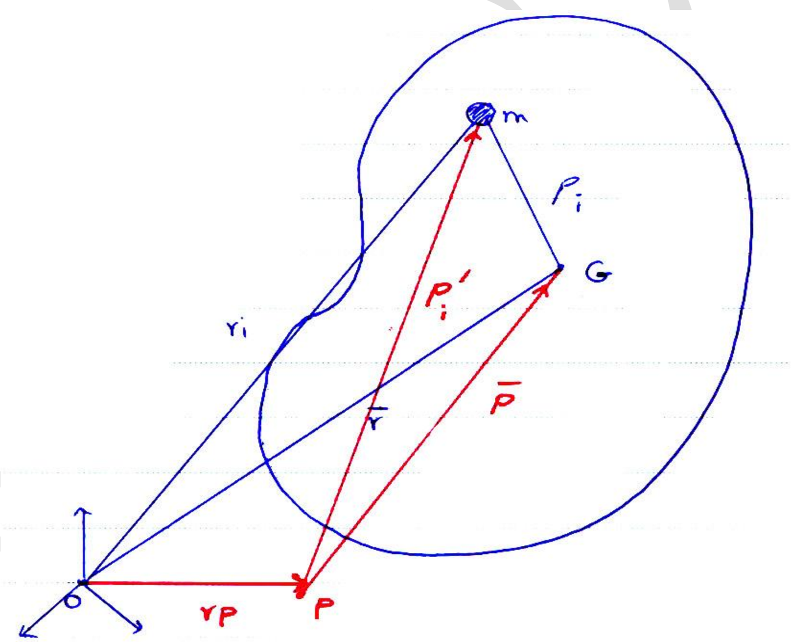
$$(\dot{\mathrm{H}}_{\mathrm{G}})_{abs} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \dot{\rho}_{\mathrm{i}} \times m_i \mathrm{r}_{\mathrm{i}} + \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \dot{\rho}_{\mathrm{i}} \times m_i \ddot{\mathrm{r}}_{\mathrm{i}} = \sum \rho_i \times F_i = \sum M_G$$

$$\sum m_i \rho_i = 0 \rightarrow \sum m_i \dot{\rho}_i = 0$$

$$\sum \dot{\rho}_i \times m_i \dot{\rho}_i = 0$$

ما اثبات کردیم : $(\dot{\mathrm{H}}_{\mathrm{G}})_{\mathrm{abs}} = (\dot{\mathrm{H}}_{\mathrm{G}})_{rel} = \sum M_G = \dot{\mathrm{H}}_{\mathrm{G}}$

$$(\mathrm{H}_{\mathrm{G}})_1 = (\mathrm{H}_{\mathrm{G}})_2$$



$$\mathrm{H}_{\mathrm{P}} = (\mathrm{H}_{\mathrm{P}})_{\mathrm{abs}} = \sum \acute{\rho}_{\mathrm{i}} \times m_i \dot{\mathrm{r}}_{\mathrm{i}}$$

$$(\mathrm{H}_{\mathrm{P}})_{\mathrm{rel}} = \sum \rho'_{\mathrm{i}} \times m_i \dot{\rho}'_{\mathrm{i}}$$

$$\mathrm{H}_{\mathrm{P}} = \sum (\bar{\rho} + \rho_i) \times m_i \dot{\mathrm{r}}_{\mathrm{i}} = \mathrm{H}_{\mathrm{G}} + \bar{\rho} \times \mathrm{m}\bar{\mathrm{v}} \rightarrow \mathrm{H}_{\mathrm{P}} = \mathrm{H}_{\mathrm{G}} + \bar{\rho} \times \mathrm{m}\bar{\mathrm{v}}$$

We know from the statics that $\sum \mathrm{M_P} = \sum \mathrm{M}_G + \bar{\rho} \times \sum F$

$$\sum \mathrm{M_P} = \dot{\mathrm{H}}_\mathrm{G} + \bar{\rho} \times m\bar{a}$$

$$(\mathrm{H_P})_\mathrm{rel} = \sum (\bar{\rho} + \rho_i) \times m_i\left(\overline{(\dot{\rho})} + \dot{\rho}_i\right)$$

$$\sum \bar{\rho} \times \mathrm{m_i}\,\bar{\dot{\rho}} + \sum \bar{\rho} \times \mathrm{m_i}\,\dot{\rho}_i + \sum \rho_\mathrm{i} \times \mathrm{m_i}\,\bar{\dot{\rho}} + \sum \rho_\mathrm{i} \times \mathrm{m_i}\,\dot{\rho}_i = \sum \bar{\rho} \times \mathrm{m_i}\,\bar{\dot{\rho}} +$$

$$+ \sum \rho_\mathrm{i} \times \mathrm{m_i}\,\dot{\rho}_i$$

$$(\mathrm{H_P})_\mathrm{rel} = (\mathrm{H}_G)_\mathrm{rel} + \bar{\rho} \times m\bar{v}_{rel}$$

مشتق می گیریم : $(\dot{\mathrm{H}}_\mathrm{P})_\mathrm{rel} = \sum \acute{\rho}_i \times m_i \ddot{\rho}'_i = \sum \rho'_i \times m_i(\ddot{r}_i - \ddot{r}_p)$

$$= \sum M_P + a_P \times m\bar{\rho}$$

$$\sum M_P = (\dot{\mathrm{H}}_\mathrm{P})_\mathrm{rel} - a_P \times m\bar{\rho}$$

$$F_\mathrm{i} + \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{f_{ij}} = \mathrm{m_i}\frac{\mathrm{v_i dv_i}}{\mathrm{dr_i}}$$

$$F_\mathrm{i}\mathrm{dr_i} + \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{f_{ij}}\,\mathrm{dr_i} = \mathrm{m_i v_i dv_i}$$

$$\mathrm{U_{i(1-2)}} + 0 = (\mathrm{T_i})_2 - (\mathrm{T_i})_1 = \Delta\mathrm{T}_i$$

$$(\mathrm{T_i})_1 + \mathrm{U_{i(1-2)}} = (\mathrm{T_i})_2$$

رابطه ی بالا را برای تمام ذرات تعمیم می دهیم

$$\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} (\mathrm{T_i})_1 + \mathrm{U_{i(1-2)}} = (\mathrm{T_i})_2$$

$$T_1 + U_{1-2} = T_2$$

کار تمام نیروهای خارجی وارد بر سیستم ذرات : $U_{1-2} = \int_1^2 F_{\mathrm{i}} \mathrm{d}\mathrm{r}_{\mathrm{i}} = 0$

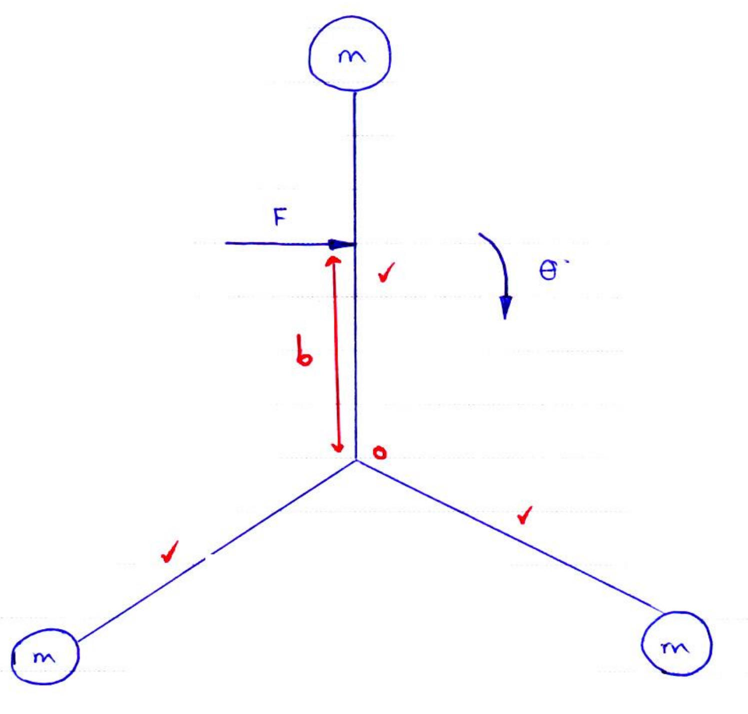
$$\mathrm{T} = \sum \mathrm{T}_i = \frac{1}{2}\sum \mathrm{m_i v_i^2} = \frac{1}{2}\mathrm{m_i}(\vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{i}}.\vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{i}})$$

$$\vec{v}_{\mathrm{i}} = \vec{\bar{\mathrm{v}}} + \vec{\dot{\rho}}_{\mathrm{i}} \quad \rightarrow$$

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}\sum \mathrm{m_i}\bar{\mathrm{v}}^2 + \frac{1}{2}\sum \mathrm{m_i}\dot{\rho}_{\mathrm{i}}^2 + \sum \mathrm{m_i}\,(\bar{\mathrm{v}} \times \vec{\dot{\rho}}_{\mathrm{i}})$$

$$\rightarrow \mathrm{T} = \frac{1}{2}\sum \mathrm{m_i}\bar{\mathrm{v}}^2 + \frac{1}{2}\sum \mathrm{m_i}\dot{\rho}_{\mathrm{i}}^2$$

مثال) مطابق شکل زیر نیروی F به مجموعه ی نشان داده شده وارد می شود این مجموعه بر روی سطح افقی بدون اصکاک قرار دارد شتاب نقطه ی جوش داده شده و شتاب زاویه ای قاب را بدست آورید؟

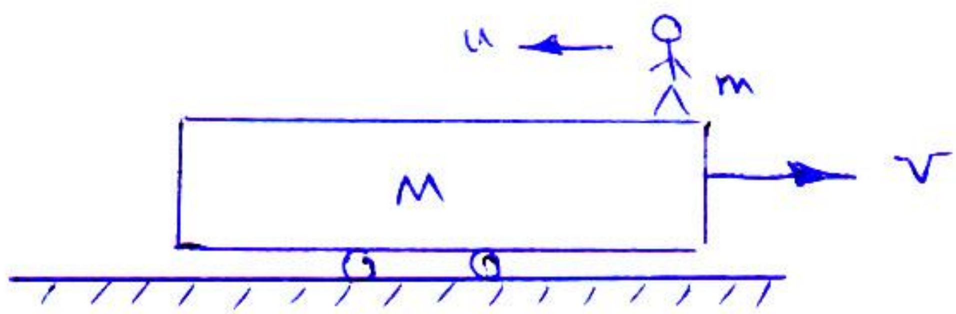


تمام جرم را روی مرکز ثقل می آوریم $\rightarrow F\vec{i} = 3m\bar{a} \rightarrow \bar{a} = a_0 = \dfrac{F}{3m}\vec{i}$

$$\sum \mathrm{M_G} = \dot{\mathrm{H}}_\mathrm{G}\ , \qquad \mathrm{H_G} = 3\mathrm{m r}\dot{\theta} \times \mathrm{r} = 3\mathrm{mr}^2\dot{\theta}$$

$$F_\mathrm{b} = 3\mathrm{mr}^2\ddot{\theta} \rightarrow \ddot{\theta} = \frac{F_\mathrm{b}}{3\mathrm{mr}^2}$$

مثال) در شکل زیر شخص و ارابه با سرعت ثابت **v** در حال حرکت هستند حال اگر شخص با سرعت ثابت **v** نسبت به ارابه در جهت مخالف شروع به حرکت نماید سرعت ارابه را تعیین نمایید ؟ از اصطکاک بین ارابه و زمین صرفنظر نمایید ؟



$$\sum F = \dot{\mathrm{G}}$$

$$\dot{\mathrm{G}} = 0$$

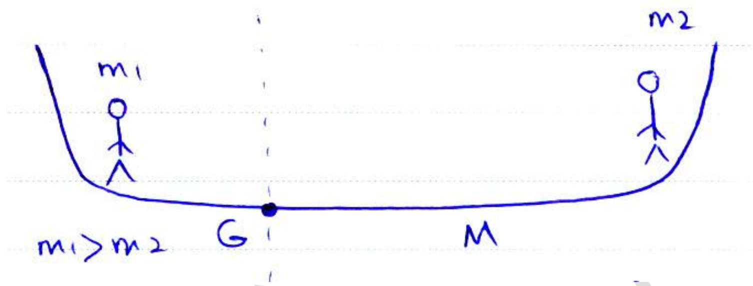
$$\mathrm{G_1} = \mathrm{G_2}$$

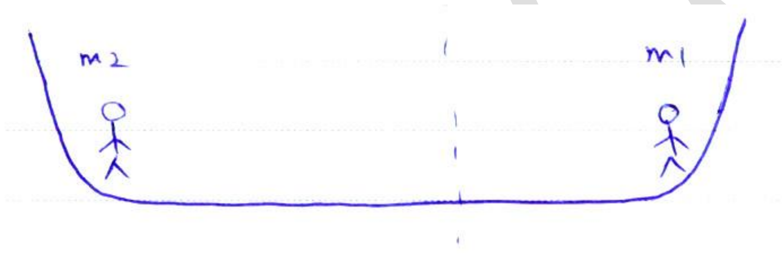
$$\mathrm{G} = \sum \mathrm{m_i v_i}$$

$$(\mathrm{m} + \mathrm{M})\mathrm{v} = \mathrm{M}\acute{\mathrm{v}} + \mathrm{m}(\acute{\mathrm{v}} - \mathrm{u})$$

$$\acute{v} = v + \frac{m}{m+M}u$$

مثال) قایقی به جرم m به طول L بر روی دریاچه ای ساکن قرار دارد در صورتیکه دو نفر به جرم های m_1 و m_2 که دردوانتهای قایق ایستاده اند جایشان را عوض کنند قایق چه اندازه و در چه جهتی جابجا می شود ؟





$$\sum F = \dot{G} \rightarrow \dot{G} = 0 \rightarrow G = constant = 0$$

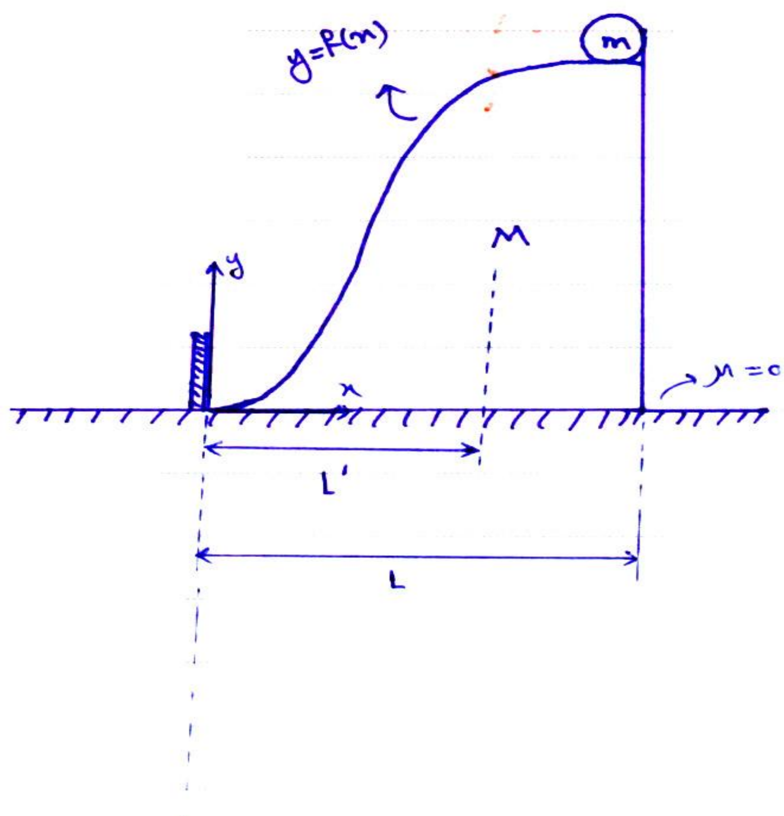
$$\sum m_i v_i = 0 \rightarrow m\acute{v} = 0 \rightarrow \overline{X} = constant$$

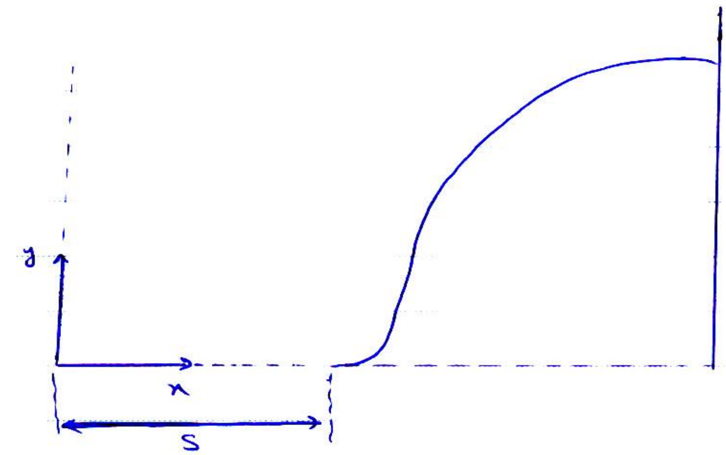
$$\overline{X_1} = \frac{m_1 \times 0 + M \times \frac{L}{2} + m_2 \times L}{m_1 + m_2 + M}$$

$$\overline{X_2} = \frac{m_2 \times 0 + M \times \frac{L}{2} + m_1 \times L}{m_1 + m_2 + M}$$

جابجایی قایق را با S نمایش می دهیم $= (\overline{X_2}) - (\overline{X_1}) = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + M} \mathrm{L}$

مثال) ذره ای به جرم M از بالای سطح شیب داری با منحنی دلخواه $y = f(x)$ رها می شود جابجایی سطح شیب دار قبل از برخورد ذره مذکور به مانعی که در انتهای آن قرار دارد و سرعت آن را بعد از برخورد و چسبیدن به مانع بدست آورید ؟





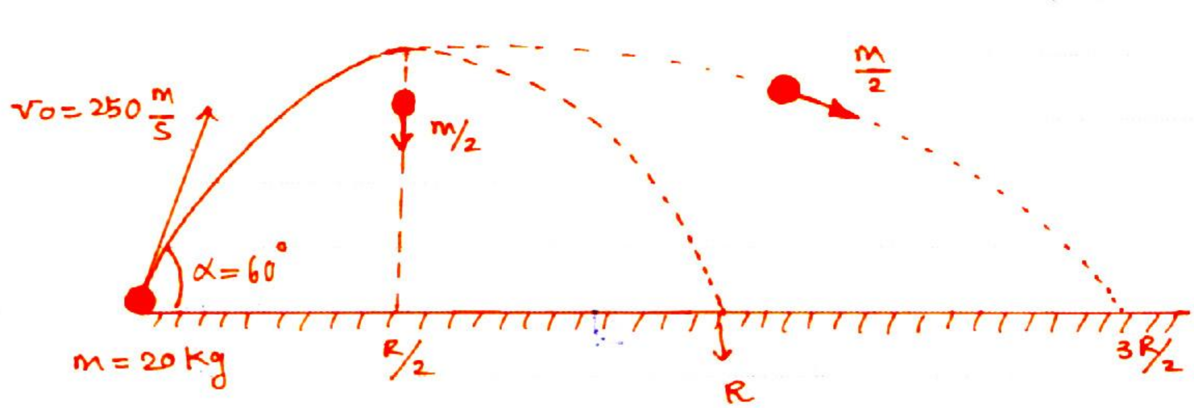
$$\sum F = 0 \rightarrow \dot{G} = 0 \rightarrow G = constant$$

$$\sum \mathrm{m_i v_i} = constant = 0 \rightarrow \sum \mathrm{m_i v_i} = constant$$

$$mL + M\acute{L} = ms + M\left(s + \acute{L}\right) \rightarrow s = \frac{m}{m+M}L$$

$$\rightarrow (\mathrm{m} + \mathrm{M})\mathrm{v} = 0 \rightarrow \mathrm{v} = 0$$

مثال) پرتابه ای به جرم $m = 20$ در امتداد زاویه ی $\alpha=60$ با سرعت اولیه ی $V_0 = 250$ پرتاب می شود با انفجار پرتابه در نقطه ی اوج به دو قسمت مساوی ، بخشی از آن بدون سرعت اولیه در امتداد قائم سقوط آزاد می نماید محل پرتاپ بخش دوم و انرژی آزاد شده در هنگام انفجار را بدست آورید ؟



$$\sum F = 0 \rightarrow \dot{G} = 0 \rightarrow G = \text{constant}$$

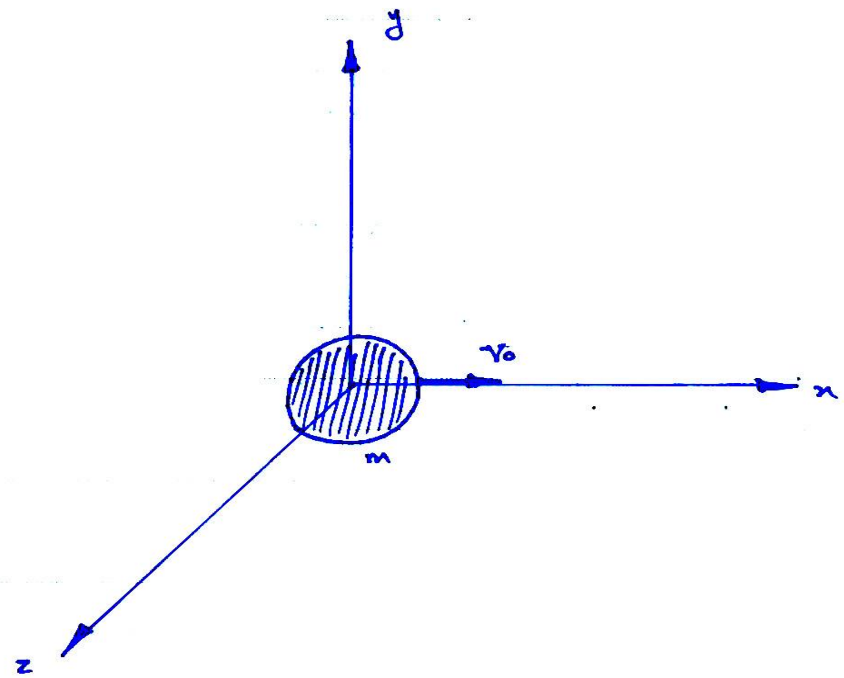
$$(mR) = \left(\frac{m}{2} \times \frac{R}{2}\right) + \left(\frac{m}{2} \times x\right) \rightarrow x = \frac{3R}{2}$$

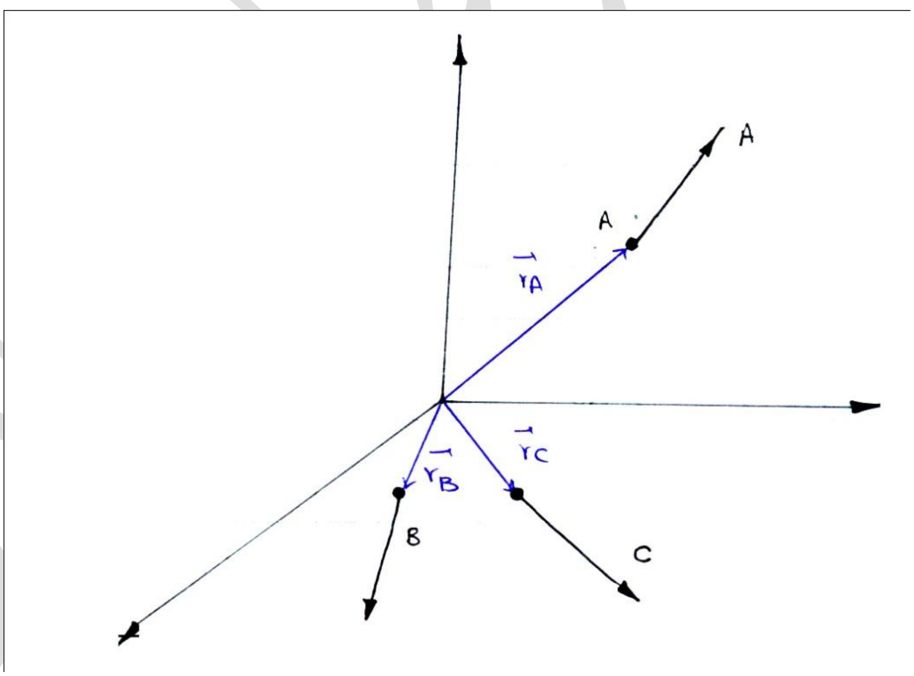
$$\rightarrow m v_0 \cos\alpha = \frac{m}{2} \acute{v} \rightarrow \acute{v} = 2v_0 \cos\alpha$$

$$\text{if } \alpha = 60^o \rightarrow \acute{v} = v_0 = 250 \frac{m}{s}$$

$$k = \Delta T = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}\right) \acute{v}^2 = 156\, KJ$$

مثال) پرتابه ای به جرم200kg بعد از انفجار به سه تکه به جرم های $m_A=100$ ، $m_B=60$، $m_c=40$ تقسیم می شود در لحظه ی که ذرات مذکور در موقعیت های $A = \begin{vmatrix} 555 \\ -180 \\ 240 \end{vmatrix}$ و $B = \begin{vmatrix} 255 \\ 0 \\ -120 \end{vmatrix}$ و $C = \begin{vmatrix} 105 \\ 450 \\ -420 \end{vmatrix}$ (آحاد بر حسب m است) قرار گیرند و سرعت ذره ی $v_A = 270\vec{i} - 120\vec{j} + 160\vec{k}$ و نیز سرعت ذره ی V_B موازی صفحه ی XZ باشد ، سرعت ذره ی C را بدست آورید ؟





$G_1 = G_2$

$m\vec{v}_0 = m_A\overrightarrow{v_A} + m_B\overrightarrow{v_B} + m_c\overrightarrow{v_c}$

به علت اینکه گشتاور نیز به جسم اعمال نمی شود نتیجه خواهیم گرفت که بقای مومنتوم زاویه ای نیز خواهیم داشت

$$200\times 150\vec{i} = 100\left(270\vec{i} - 120\vec{j} + 160\vec{k}\right) + 60\left(v_{Bx}\vec{i} + v_{Bz}\vec{k}\right) + 40\left(v_{Cx}\vec{i} + v_{Cy}\vec{j} + v_{Cz}\vec{k}\right)$$

$$(H_o)_1 = (H_o)_2 \ \rightarrow 0 = r_A \times m_A v_A + r_B \times m_B v_B + r_C \times m_C v_C$$

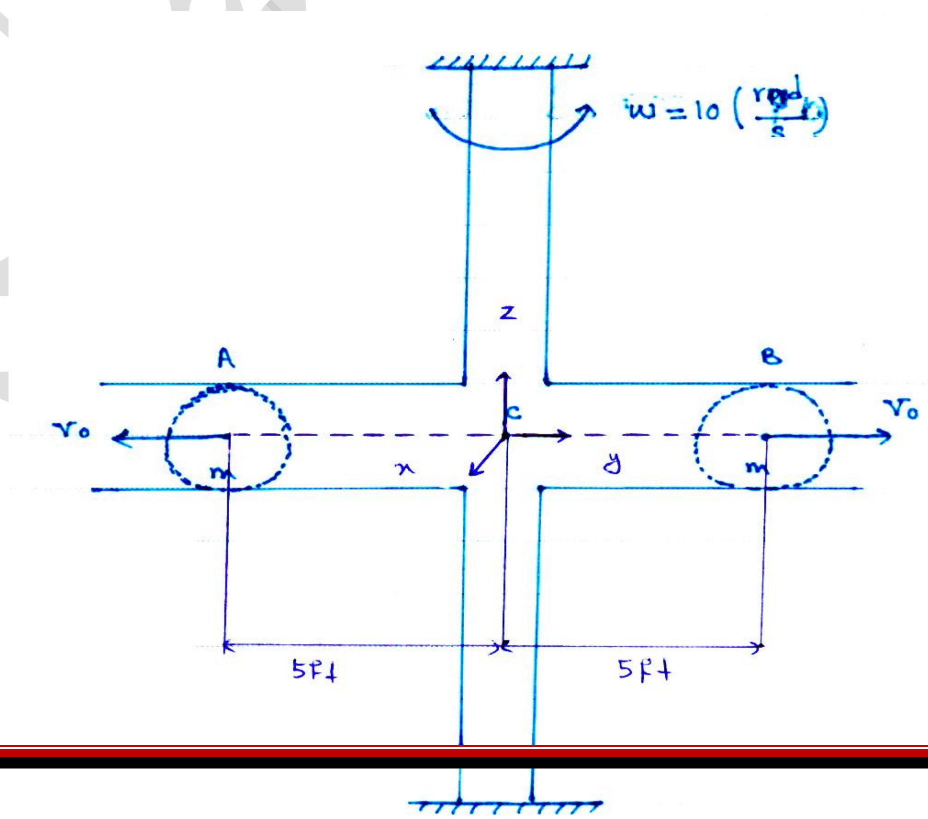
$$= 100\begin{vmatrix} i & j & k \\ 555 & -180 & 240 \\ 270 & -120 & 160 \end{vmatrix} + 60\begin{vmatrix} i & j & k \\ 255 & 0 & -120 \\ v_{Bx} & 0 & v_{Bz} \end{vmatrix} + 40\begin{vmatrix} i & j & k \\ 105 & 450 & -420 \\ v_{Cx} & v_{Cy} & v_{Cz} \end{vmatrix}$$

$$\rightarrow v_{Cx=-30}\ ,v_{Cy=300}\ \ ,v_{Cz=-280}$$

$$v_c = -30\,\vec{i} + 300\vec{j} - 280\,\vec{k}$$

$$|\vec{v_c}| = 411.46\ \left(\frac{m}{s}\right)$$

مثال) دو ذره به جرم های مساوی m=5(lb) می باشد با سرعت ثابت 5 = V_0 در حال حرکت هستند در صورتیکه سیستم بتواند آزادانه دوران نماید شتاب زاویه ای آن را در این لحظه محاسبه نمایید .



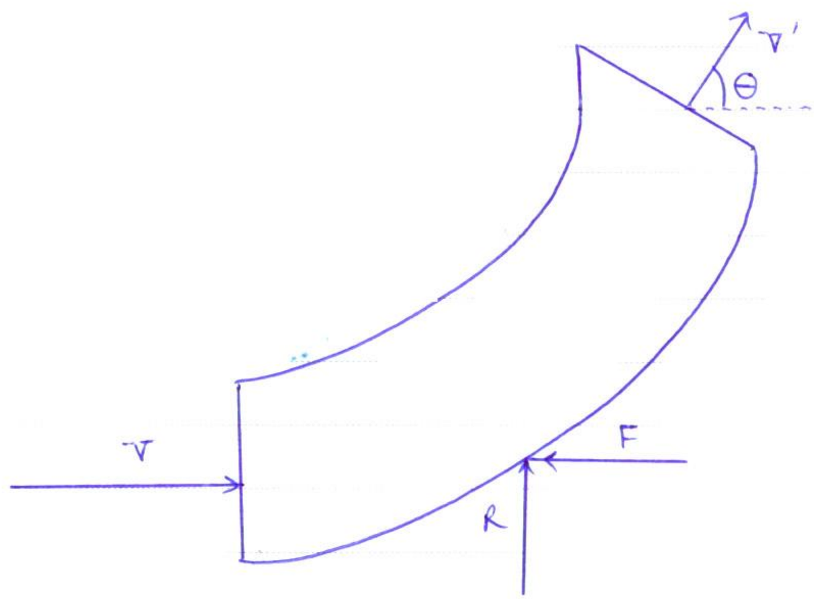
$$\sum \mathrm{M_C} = \dot{\mathrm{H}}_\mathrm{C} \ , \dot{\mathrm{H}}_\mathrm{C} = 0 \ \rightarrow \ \mathrm{H_C} = \sum r_i \times m_i v_i$$

$$\mathrm{H_C} = (\mathrm{r}\,\vec{\mathrm{j}}) \times \mathrm{m}(\mathrm{v_0}\vec{\mathrm{j}} - \mathrm{r}\omega\,\vec{\mathrm{i}}) + \ (-\mathrm{r}\vec{\mathrm{j}}) \times \mathrm{m}(-\mathrm{v_0}\,\vec{\mathrm{j}} + \mathrm{r}\omega\,\vec{\mathrm{i}}) = 2mr^2\omega\vec{k}$$

$$\mathrm{H_C} = 2mr^2\omega$$

$$\dot{\mathrm{H}}_\mathrm{C} = 2m(2rv_0)\omega + 2mr^2\dot{\omega} \xrightarrow{,\dot{\mathrm{H}}_\mathrm{C}=0} \dot{\omega} \ = \ \frac{-2\omega v_0}{r} \rightarrow \ \dot{\omega} \ = \ -20 \ \frac{rad}{s}$$

جریان جرم در نرخ تغییرات جریان :



$$m' = \rho A v$$

$$m' = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathrm{m}}{\Delta \mathrm{t}} = \frac{\mathrm{dm}}{\mathrm{dt}}$$

$$\sum \mathrm{F} = m'\Delta v$$

$\rho A v = \rho' A' v$

$if\ A = constant\ \rightarrow v' = v$

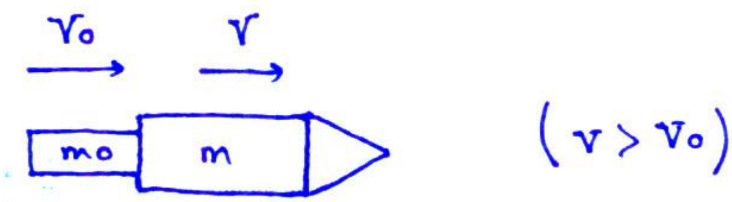
$\Delta v_x = v' \cos\theta - v = v(\cos\theta - 1)$

$\Delta v_y = v' \sin\theta - 0 = v \sin\theta$

$-\mathrm{F} = \rho A v(v(-1 + \cos\theta)) \rightarrow F = \rho A v^2(1 - \cos\theta)$

$\mathrm{R} = \rho A v(v \sin\theta) \rightarrow R = \rho A v^2 \sin\theta$

سیستم ها ی با جرم متغیر :



$\sum F = \dot{\mathrm{G}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(mv) \rightarrow \sum F = m\dot{v} + \dot{m}v$

$\dot{\mathrm{m}} \neq 0$