

دینامیک



دکتر رضا انصاری

کتاب مرجع

Engineering mechanics, dynamics, 6th Edition (2006) J.L. Meriam and L.G. Kraige

سایر مراجع

Engineering mechanics, dynamics, J.H. Shames

Vector mechanics for engineers, dynamics, F.P. Beer and E.R. Johnstone

دینامیک برداری، دکتر منصور نیکخواه بهرامی

مباحث دینامیک

بخش اول : دینامیک ذرات

(۱) آشنایی با دینامیک

الف) نیرو، جرم و شتاب

(۲) سینماتیک ذرات

ب) کار و انرژی

(۳) سینتیک ذرات

ج) ضربه و مومنوم

د) کاربرد های ویژه

(۴) سینتیک مجموعه ذرات

بخش دوم : دینامیک اجسام صلب

الف (نیرو ، جرم و شتاب

۵) سینماتیک اجسام صلب در صفحه

ب (کار و انرژی

۶) سینتیک اجسام صلب در صفحه

ج (ضربه و ممنتوم

الف (سینماتیک

۷) آشنایی با دینامیک سه بعدی اجسام صلب

ب (سینتیک

مقدمه (آشنایی با دینامیک)

سه شاخه اصلی رشته مکانیک عبارتند از

۱. مکانیک کلاسیک

۲. مکانیک کوانتوم

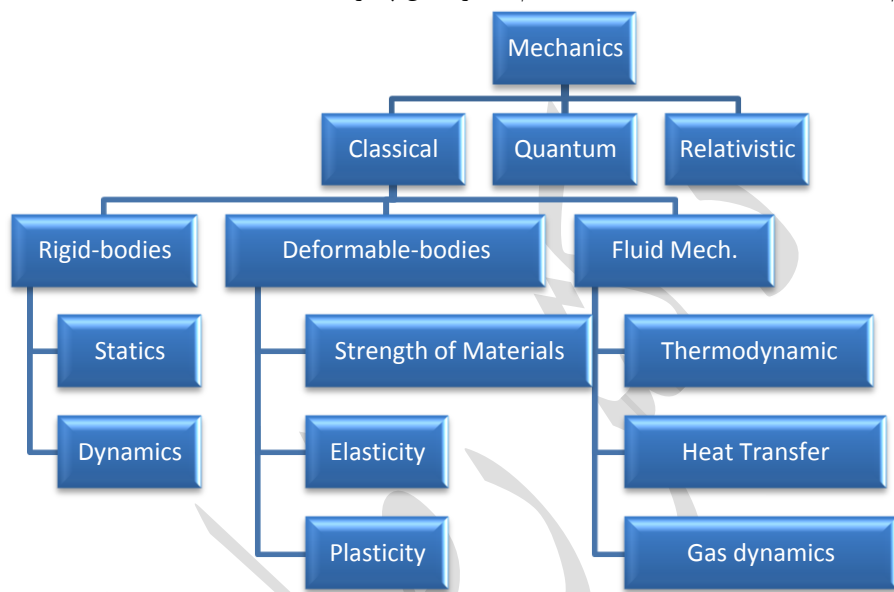
۳. مکانیک نسبیت

تقسیم بندی مکانیک کلاسیک

مکانیک سیالات

مکانیک اجسام تغییر شکل پذیر

مکانیک اجسام صلب



تعریف دینامیک

شاخه ای از علم مکانیک است که با حرکت اجسام صلب تحت نیرو و سر و کار دارد. تغییر در طبیعت اجتناب ناپذیر و مطالعه

تکامل اساس دینامیک را بنیان می نهد.

شاخه های دینامیک

سینماتیک

سینتیک

تاریخ های مهم در تکامل دینامیک

1687 → Principia by Newton

1717 → Principle of virtual work by Bernolli

1740 → Systems of particles by Euler

1743 → D'Alembert's principle

1765 → Rigid bodies by Euler

1775 → The Newton-Euler formulation for Force and moment balances

(They constitute the basis of Newtonian mechanics)

1780 → Lagrange's equations

1829 → Gauss's variational principle

1830 → Hamilton's equations and Hamilton's principle

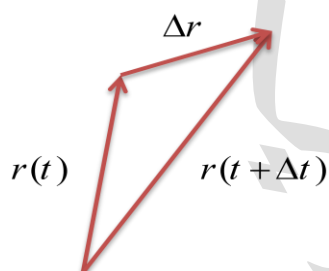
1829 → Jourdain's principle

1870-1910 → Gibbs – Appell's equations

1970 → Kane's equations

سینماتیک ذرات :

حرکت منحنی الخط در صفحه



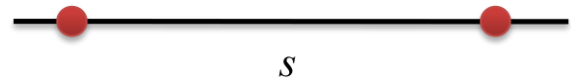
$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 r}{dt^2}$$

$$|\vec{r}| = b, \vec{r} \cdot \vec{r} = b^2 \quad b = \text{constant parameter} \quad \vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{r} = 0$$

$$\vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = 0 \quad \vec{r} \perp \dot{\vec{r}}$$



$$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \ddot{s}$$

$$v dv = a ds \rightarrow \dot{s} d\dot{s} = \ddot{s} ds$$

در نیروهای گرانشی و فنر : $a = a(s) \rightarrow v dv = a(s) ds$

$$\text{if } a = \text{constant} \rightarrow v^2 - v_0^2 = 2a(s - s_0)$$

$$\text{if } a = \text{variable} \rightarrow \frac{v dv}{a(v)} = ds$$

مثال : یک ذره در امتداد خط مستقیم حرکت می کند که جابجایی آن از رابطه $s = 2t^3 - 24t + 6$ تبعیت می کند . زمان لازم برای اینکه این ذره به سرعت $72 \frac{m}{s}$ برسد را بدست آورید. شتاب ذره وقتی سرعت آن $30 \frac{m}{s}$ است و جابجایی خالص ذره در بازه زمانی $[1, 4]$ را بدست آورید ؟

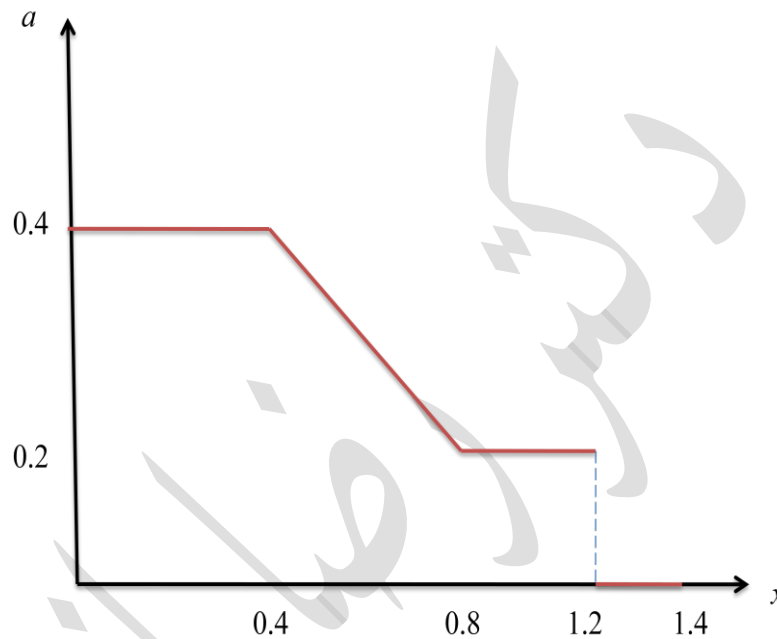
$$\dot{s} = v = 6t^2 - 24 = 72 \quad t = 4s$$

$$\ddot{s} = \dot{v} = a = 12t$$

$$\text{if } v = 30 \frac{m}{s} \rightarrow t = 3s \rightarrow a = 36 \frac{m}{s^2}$$

$$s|_{t=4s} - s|_{t=1s} = \Delta s = 54m$$

مثال : منحنی شتاب-تغییر مکان ذره ای که با سرعت اولیه $0.1 \frac{m}{s}$ شروع به حرکت می نماید به صورت زیر داده شده است . سرعت ذره را در $x=1.4 m$ بدست آورید ؟



$$\int v dv = \int a dx$$

$$\frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = \int a dx$$

$$v^2 - v_0^2 = 2 \int a dx = 2(\text{area}) \rightarrow v^2 - (0.1)^2 = 2(0.36) \rightarrow v = 0.85 \frac{m}{s}$$

مثال : با استفاده از یک چتر مقاومتی شتاب $a = -0.004v^2 \frac{m}{sec^2}$ به هواپیمایی در حال فرود وارد می شود. مدت زمان لازم برای اینکه سرعت این هواپیما از $80 \frac{m}{s}$ به $10 \frac{m}{s}$ برسد را تعیین کنید؟ مسافت طی شده در طی این مدت زمانی را بدست آورید؟

$$a = -0.004v^2 \rightarrow \frac{dv}{dt} = -0.004v^2$$

$$\int_{v_0=80}^{v=10} \frac{dv}{v^2} = -0.004 \int_{t_0=0}^t dt \quad t = 21.875s$$

$$-0.004v^2 ds = v dv$$

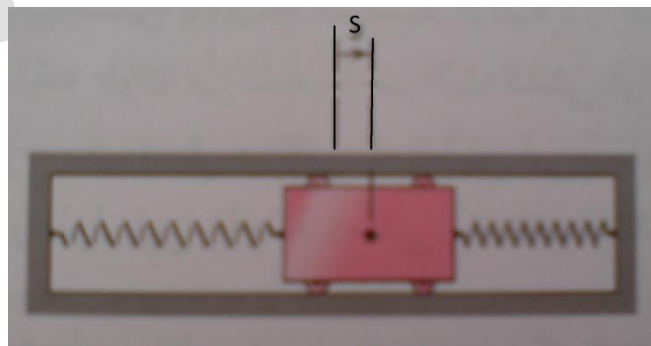
$$-0.004 \int_{s_0=0}^s ds = \int_{v_0=80}^{v=10} \frac{dv}{v} \rightarrow s = 519.86m$$

مثال : لغزنده ای بین دو فنر در شیار راهنمای افقی با اصطکاک ناچیز حرکت کرده و دارای سرعت

v_0 در امتداد s به هنگام عبور در نیمه راه

$t = 0$ و $s = 0$ می باشد. مجموعه دو فنر نیروی بازدارنده ای را بر حرکت لغزنده اعمال می نمایند که

به آن ، شتاب متناسب با جابجایی ولی در جهت خلاف حرکت یعنی برابر با $a = -k^2 s$ می دهد که در آن k ثابت است. جابجایی s و سرعت v رابطه صورت تابعی از زمان t بدست آورید.



$$a ds = v dv$$

$$-k^2 \int s ds = \int v dv \rightarrow \frac{-k^2 s^2}{2} + c_1 = \frac{1}{2} v^2$$

$$\text{if } s_0 = 0 \text{ \& } v = v_0 \rightarrow c_1 = \frac{1}{2} v_0^2$$

$$-\frac{k^2 s^2}{2} + \frac{v_0^2}{2} = \frac{1}{2} v^2 \rightarrow v = \sqrt{v_0^2 - k^2 s^2}$$

$$\int \frac{ds}{dt} = \int \sqrt{v_0^2 - k^2 s^2} \rightarrow \int_{s_0=0}^s \frac{ds}{\sqrt{v_0^2 - k^2 s^2}} = \int_{t_0=0}^t dt$$

$$\frac{1}{k} \arcsin\left(\frac{ks}{v_0}\right) = t$$

$$s = \frac{v_0}{k} \sin(kt) \rightarrow v = v_0 \cos(kt)$$

نکته :

$$\ddot{s} + k^2 s = 0$$

$$s = C e^{(\alpha t)}$$

این معادله s را باید در معادله اصلی جایگذاری کرد ، این معادله s به عنوان یک ریشه در نظر گرفته می شود.

$$\alpha^2 + k^2 = 0 \quad \alpha = \pm ki$$

$$s = c_1 e^{ikt} + c_2 e^{-ikt} \quad \text{or} \quad s = A \sin(kt) + B \cos(kt)$$

$$1) t = 0 \rightarrow s = 0 \rightarrow B = 0$$

$$2) t = 0 \rightarrow \dot{s} = v_0 \rightarrow A = \frac{v_0}{k} \rightarrow s = \frac{v_0}{k} \sin(kt)$$

مثال : یک سفینه فضایی در فاصله s_0 از مرکز زمین قرار دارد. سرعت به طرف بیرون v_0 برای آنکه به فاصله تعیین شده h از مرکز زمین منتقل شود را حساب کنید ؟

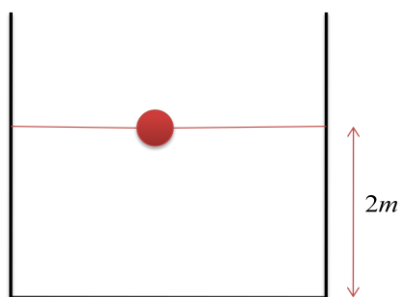
$$a = -g \frac{R_E^2}{s^2} \quad \text{at} \quad s = R_E \rightarrow a = g$$

$$v dv = a ds \rightarrow \int_{v_0}^0 v dv = -g R_E^2 \int_{s_0}^h \frac{ds}{s^2} \Rightarrow \frac{1}{2} v_0^2 = g R_E^2 \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{s_0} \right)$$

$$\rightarrow v_0 = \sqrt{\left(\frac{1}{h} - \frac{1}{s_0} \right) \times 2g R_E^2} \quad \text{if} \quad h \rightarrow \infty \quad v_0 = R_E \sqrt{\frac{2g}{s_0}}$$

تمرین : ثابت کنید که برای یک سیاره فرضی دویعدی سرعت فرار وجود ندارد ؟

مثال : یک گلوله فولادی از حالت سکون در داخل ظرفی که محتوی یک سیال مخصوص است از ارتفاع ۲ متری رها می شود. شتاب گلوله برابر $a = 0.9g - Cv$ است که در آن C ثابت می باشد. اگر مدت زمانی که گلوله به ته ظرف می رسد ۲ ثانیه باشد ، مقدار C را محاسبه کنید ؟



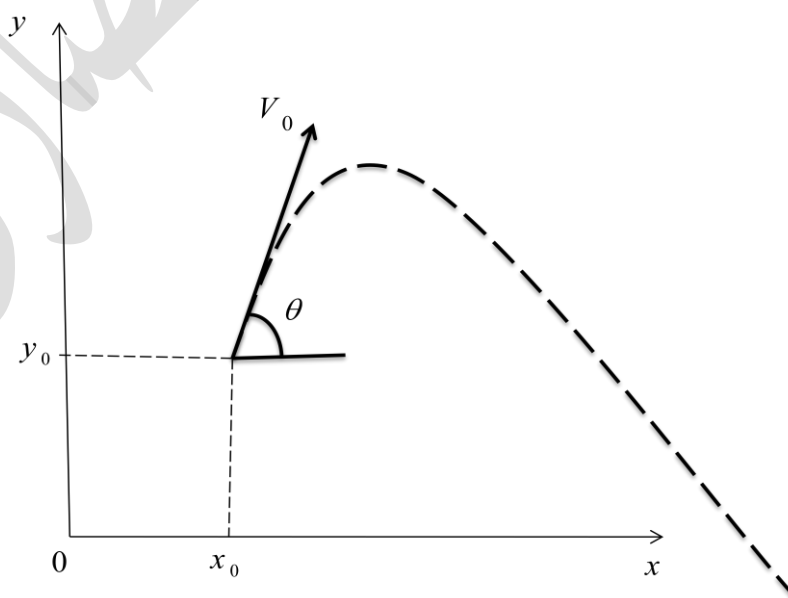
$$\frac{dv}{dt} = 0.9g - Cv \rightarrow \int_{v_0=0}^v \frac{dv}{0.9g - Cv} = \int_{t_0=0}^t dt$$

$$v = \frac{0.9g}{C} (1 - e^{-Ct})$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{0.9g}{C} (1 - e^{-Ct})$$

$$s = \frac{0.9g}{c^2} (Ct - 1 + e^{-Ct}) \rightarrow c = 8.3 \frac{1}{s}$$

حرکت پرتابی:



$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}$$

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j}$$

$$a_x = 0 \quad \text{and} \quad a_y = -g$$

$$a_x = \ddot{x} = 0 \rightarrow \dot{x} = v_0 \cos \theta$$

$$x = (v_0 t \cos \theta) + cte \rightarrow x = (v_0 t \cos \theta) + x_0$$

$$a_y = -g \rightarrow \ddot{y} = -g \rightarrow \dot{y} = -gt + cte = -gt + v_0 \sin \theta$$

$$\rightarrow y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin \theta + cte = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin \theta + y_0$$

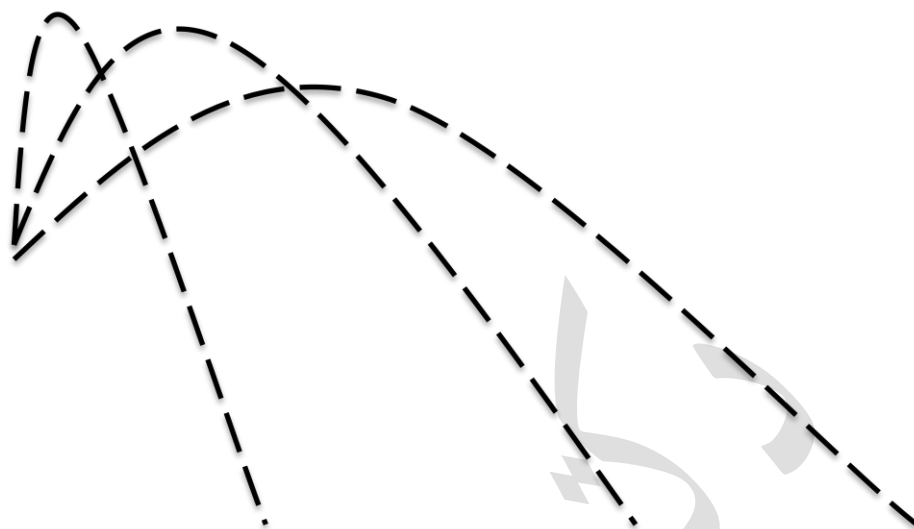
برای به دست آوردن معادله مسیر t را از معادله x حذف و در معادله y جاگذاری می کنیم .

$$t = \frac{x - x_0}{v_0 \cos \theta} \rightarrow y = -\frac{1}{2}g \left(\frac{x - x_0}{v_0 \cos \theta} \right)^2 + \tan \theta (x - x_0) + y_0$$

$$\text{if } x_0 \text{ and } y_0 = 0 \rightarrow t = \frac{v_0 \sin \theta}{g}, \quad R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{2g}$$

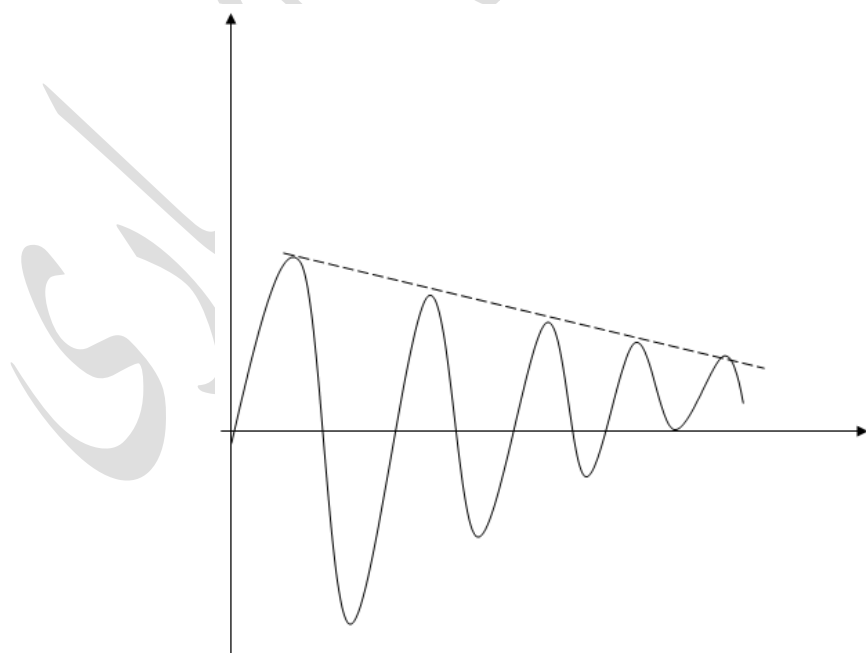
پوش منحنی های مسیر حرکت پرتابه به ازای زوایای مختلف پرتاب :

پوش (envelope) منحنی است که بر تمام منحنی های زیر مماس باشد .



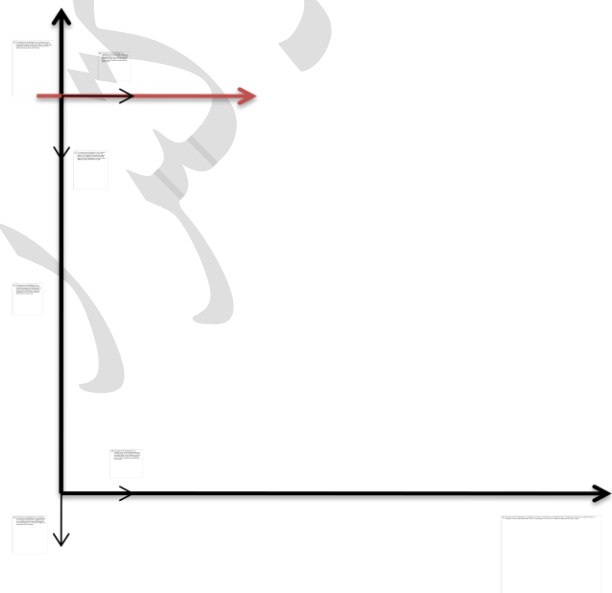
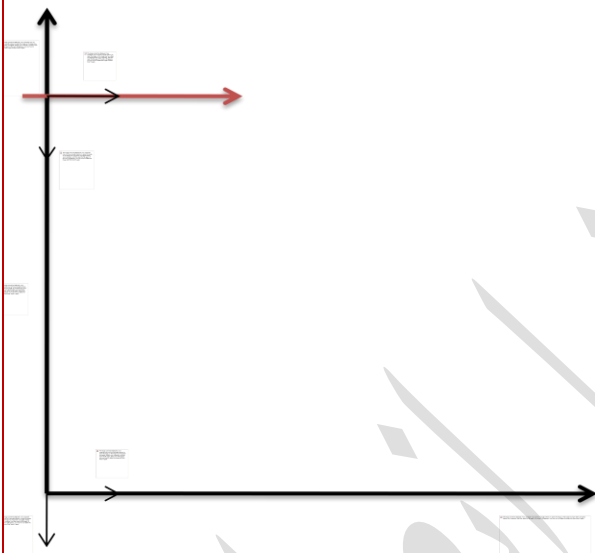
$$m = \tan \theta$$

$$y = -\frac{1}{2}g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \theta} + x \tan \theta$$



$$y = -\frac{1}{2}g \frac{x^2}{v_0^2} (1 + m^2) + mx$$

$$0 = \frac{-gx^2}{v_0^2} m + x \rightarrow m = \frac{v_0^2}{gx} \rightarrow y = \frac{-gx^2}{2v_0^2} + \frac{v_0^2}{2g}$$



$$a_x = 0 \rightarrow v_x = v_0 \rightarrow x = v_0 t$$

$$a_y = g \rightarrow v_y = gt \rightarrow y = \frac{1}{2}gt^2$$

$$y = h$$

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow t = \left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$s = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$\frac{s_M}{s_E} = \sqrt{\frac{g_E}{g_M}} = \sqrt{6}$$

$$a_x = 0 \rightarrow x = v_0 t$$

$$a_y = g \rightarrow \dot{y} = gt \rightarrow y = \frac{1}{2}gt^2 - h \rightarrow y = 0 \rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

تمرین) مسیر حرکت یک پرتابه را که با سرعت $24 \frac{m}{sec}$ با زاویه 30° بالای افق پرتاب می شود ، را با فرض $w = 9 N$ و ضریب مقاومت هوای $c = 0.58 \left(\frac{N.s}{m} \right)$ به دست آورید ؟ نیروی مقاومت هوا را متناسب با سرعت پرتابه در نظر بگیرید .

مثال) یک روتور جت با دور $10000 rpm$ در حال چرخش است که ناگهان سوخت آن قطع می گردد ، در صورتی که $\alpha = -0.02\omega$ باشد مدت زمان لازم برای آنکه دور موتور به $1000 rpm$ برسد را تعیین نمایید ؟ همچنین تعداد دورهایی که روتور در طول این مدت می چرخد را به دست آورید ؟

$$v = \dot{s} \quad \omega = \dot{\theta}$$

$$a = \dot{v} = \ddot{s} \quad \text{and} \quad \alpha = \dot{\omega} = \ddot{\theta}$$

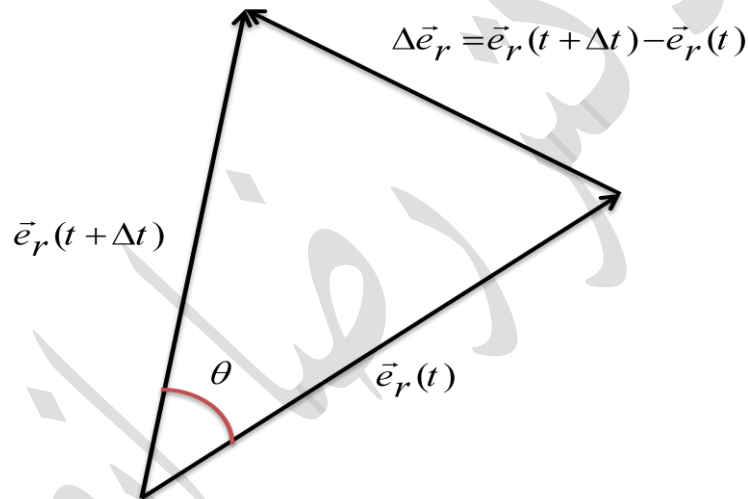
$$v dv = a ds \quad \omega d\omega = \alpha d\theta$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -0.02\omega \rightarrow \int_{10000 \times \frac{2\pi}{60}}^{1000 \times \frac{2\pi}{60}} \frac{d\omega}{\omega} = -0.02 \int_0^t dt \rightarrow t = 115.1$$

$$\omega d\omega = -0.02\omega d\theta \rightarrow \int_{10000 \times \frac{2\pi}{60}}^{1000 \times \frac{2\pi}{60}} d\omega = -0.02 \int_0^\theta d\theta$$

$$\theta = 15000\pi(\text{rad}) \rightarrow \theta = 7500(\text{rev})$$

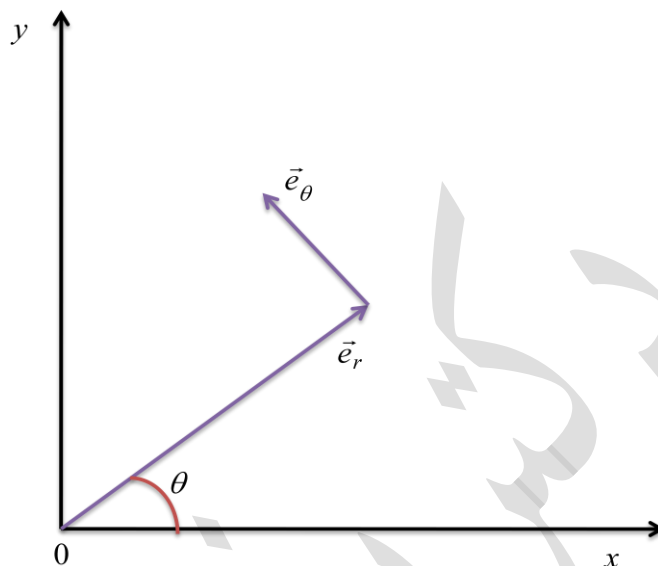
مشتق زمانی یک بردار:



$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{e}_r}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta \theta}{2} \vec{e}_\theta}{\Delta t}$$

$$\left(\text{if } \frac{\Delta \theta}{2} \leq 6^\circ \rightarrow \sin \frac{\Delta \theta}{2} \approx \frac{\Delta \theta}{2} \right) \rightarrow \frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

روش دیگر اثبات $(\dot{\theta})$:



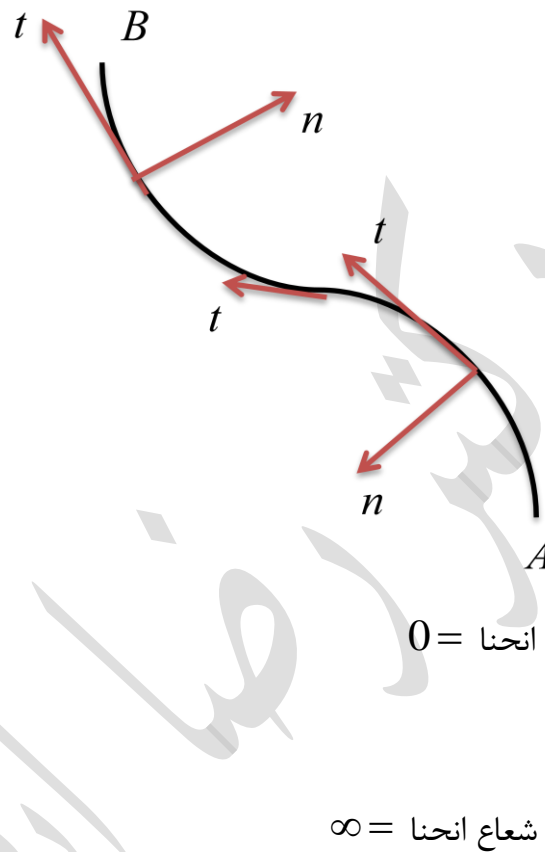
$$\vec{e}_r = \cos\theta \vec{i} + \sin\theta \vec{j}$$

$$\vec{e}_\theta = -\sin\theta \vec{i} + \cos\theta \vec{j}$$

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{d\vec{e}_r}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = \frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dt} = -\dot{\theta} \vec{e}_r$$

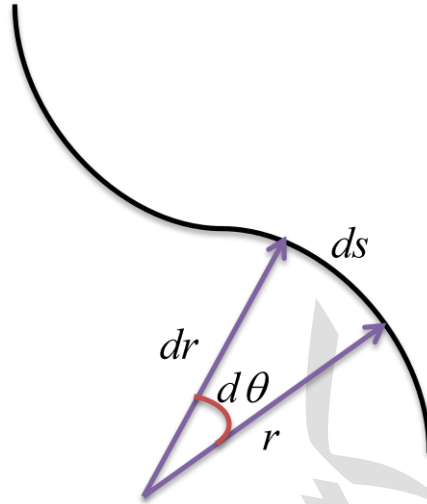
مختصات مسیر :



در نقطه عطف :

انحنا = 0
شعاع انحنا = ∞

✓ n همواره به طرف مرکز انحنا و t مماس بر مسیر می باشد .



$$d\vec{r} = \vec{e}_t ds \rightarrow \vec{e}_t = \frac{d\vec{r}}{ds}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \times \frac{ds}{dt} \rightarrow \vec{v} = \dot{s} \vec{e}_t$$

$$\vec{e}_t = \dot{\theta} \vec{e}_n \quad \text{and} \quad \vec{e}_n = -\dot{\theta} \vec{e}_t$$

$$ds = \rho d\theta \rightarrow \vec{v} = \rho \dot{\theta}$$

$$\vec{a} = \dot{v} \vec{e}_t + v \dot{\vec{e}}_t = \dot{v} \vec{e}_t + v \dot{\theta} \vec{e}_n$$

$$a_t = \dot{v}$$

$$a_n = v \dot{\theta} = \frac{v^2}{\rho} = \rho \dot{\theta}^2$$

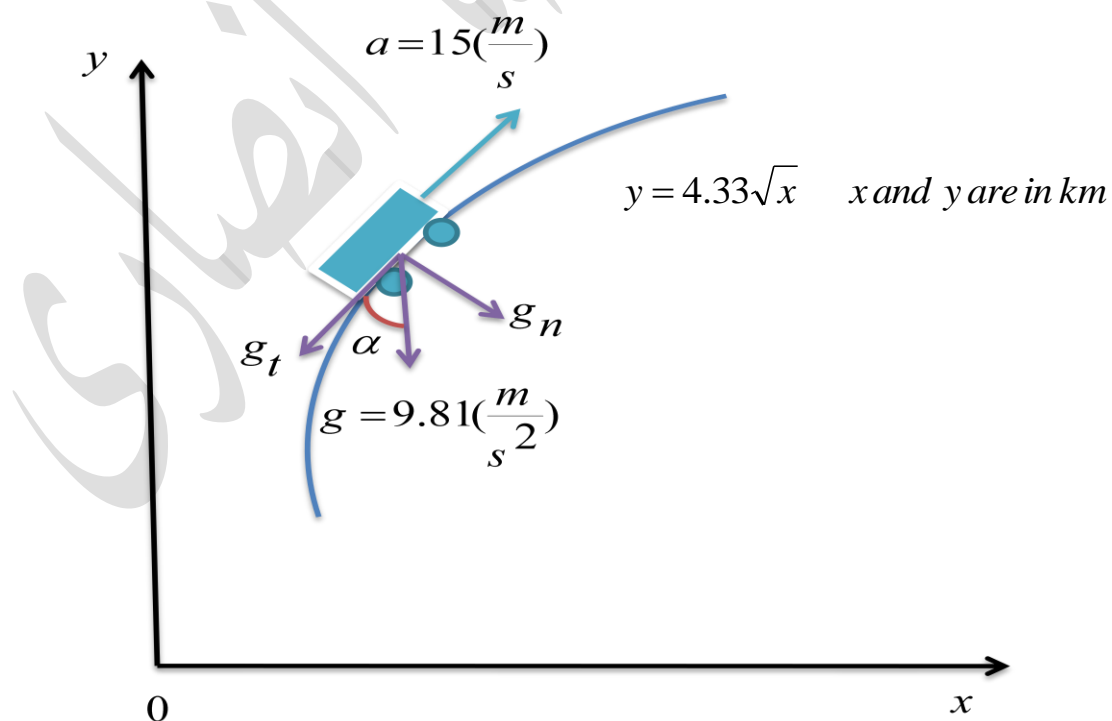
✓ برای حرکت دایره ای ρ مقدار ثابتی دارد $\rho = R$

$$a_n = v\omega = \frac{v^2}{R} = R\omega^2$$

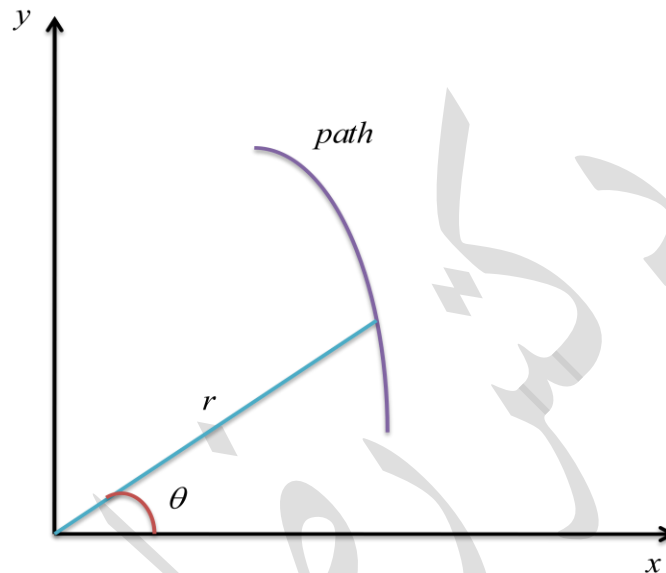
$$a_t = \dot{v} = R\alpha$$

$$\rho = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} \quad (\text{if } y = f(x) \rightarrow y' = \frac{dy}{dx})$$

مثال (سرعت و شتاب راکت نمایش داده شده در شکل زیر را در موقعیت $x = 3 \text{ (km)}$ به دست آورید ؟



مختصات قطبی :



$$\vec{r} = r\vec{e}_r$$

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vec{e}}_r \quad \text{and} \quad \dot{\vec{e}}_r = \dot{\theta}\vec{e}_\theta \quad \vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

$$v_r = \dot{r} \quad \text{and} \quad v_\theta = r\dot{\theta} \rightarrow v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2}$$

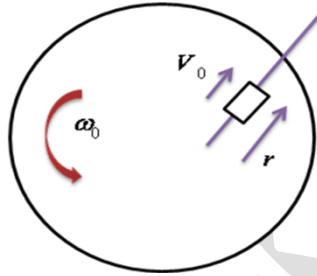
$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = (\ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\vec{e}}_r) + (\dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\vec{e}}_\theta)$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \quad \text{and} \quad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$

$$\rightarrow a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2}$$

تمرین (شخصی بر روی یک دیسک دوار در راستای شعاع آن که با سرعت زاویه ای ثابت ω_0 در حال دوران است به سمت بیرون با سرعت ثابت v_0 در حال حرکت است . سرعت و شتاب را به دست آورید ؟



$$\begin{cases} \dot{r} = v_0 \\ \ddot{r} = 0 \\ \dot{\theta} = \omega_0 \\ \ddot{\theta} = 0 \end{cases}$$

$$\vec{v} = v_0 \vec{e}_r + r\omega_0 \vec{e}_\theta \quad \text{and} \quad \vec{a} = -r\omega_0^2 \vec{e}_r + 2v_0\omega_0 \vec{e}_\theta$$

تمرین (

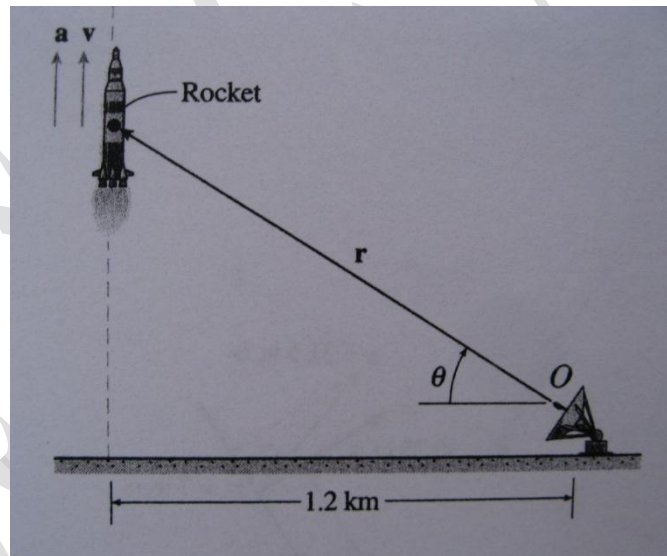
$$\begin{cases} \theta = 0.2t + 0.02t^3 \\ r = 0.2 + 0.04t^2 \end{cases}$$

$$\text{if } t = 3(s) \Rightarrow v \text{ and } a = ?$$

مثال) یک راکت به وسیله ی یک رادار در حال مانیتور شدن است اطلاعات ردیابی به صورت زیر است

$$\begin{cases} \dot{\theta} = 0.2 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \\ \ddot{\theta} = 0.1 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \end{cases}$$

وقتی که زاویه $\theta = 45^\circ$ است مطلوبست تعیین سرعت و شتاب راکت نشان داده شده در شکل زیر ؟



$$r = \frac{1}{2} \sec \theta \rightarrow r = 1697.06 \text{ m}$$

$$\dot{r} = 1200 \tan \theta \sec \theta \dot{\theta} \rightarrow \dot{r} = 339.4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\ddot{r} = 1200[(\sec^3 \theta + \tan^2 \theta \sec \theta) \dot{\theta}^2 + \tan \theta \sec \theta \ddot{\theta}] = 373.35 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$v = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

$$|v| = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} \rightarrow |v| = 480 \frac{m}{s}$$

$$a = (\ddot{r} - 2\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta$$

$$|a| = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2} \rightarrow |a| = 432 \frac{m}{s^2}$$

مثال) یک ذره روی مسیری که معادله ی آن به صورت $r = 2\theta$ حرکت می کند اگر θ به صورت t^2 مشخص شود $(\theta = t^2)$. سرعت و شتاب ذره را وقتی $\theta = 60$ درجه می باشد را بدست آورید؟

$$\text{if } \theta = t^2 \rightarrow \dot{\theta} = 2t \quad \text{and} \quad \ddot{\theta} = 2$$

$$\text{and if } \begin{cases} r = 2\theta \\ \theta = t \end{cases} \rightarrow r = 2t^2 \rightarrow \dot{r} = 4t \rightarrow \text{and} \rightarrow \ddot{r} = 4$$

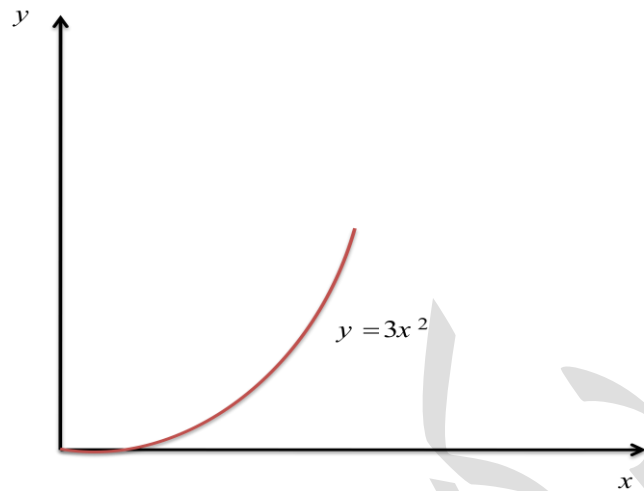
$$\frac{\pi}{3} = t^2 \rightarrow t = 1.023$$

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta \rightarrow \vec{v} = 4.09\vec{e}_r + 4.28\vec{e}_\theta \rightarrow |\vec{v}| = 5.92 \left(\frac{ft}{s}\right)$$

$$a = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta \Rightarrow a = -4.77\vec{e}_r + 20.94\vec{e}_\theta$$

$$|\vec{a}| = 21.5 \frac{ft}{sec^2}$$

مثال) ذره ای با سرعت $10 \frac{ft}{sec}$ روی منحنی $y = 3x^2$ در حال حرکت است. شتاب ذره را در $x = 5 ft$ را بدست آورید؟

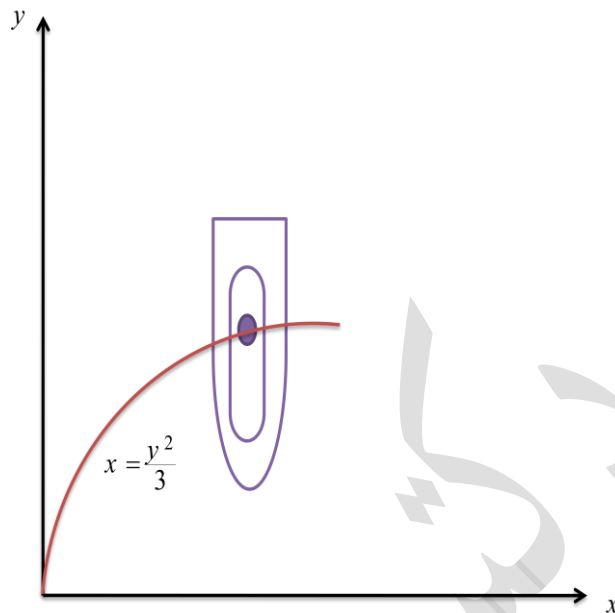


$$\begin{cases} v = 10 \frac{ft}{s} \\ x = 5 ft \end{cases}$$

$$\text{if } v_t = \text{const} \rightarrow a_t = 0 \rightarrow \vec{a} = a_n \vec{e}_n = \frac{v^2}{\rho} \vec{e}_n$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} \rightarrow \frac{6}{(1 + 36x^2)^{\frac{3}{2}}} \rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{6}{(901)^{\frac{3}{2}}} \rightarrow \vec{a} = \frac{100 \times 6}{(901)^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_n$$

مثال) ذره ای بر روی منحنی $x = \frac{y^2}{3}$ حرکت می نماید. سرعت و شتاب ذره را در $y = 2m$ تعیین نمایید؟



$$x = \frac{y^2}{3} \rightarrow \dot{x} = \frac{2y\dot{y}}{3}$$

$$\text{if } \begin{cases} \dot{x} = 2(\frac{m}{s}) \\ y = 2(m) \end{cases} \rightarrow \dot{y} = 1.5$$

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \quad |v| = 2.5(\frac{m}{s})$$

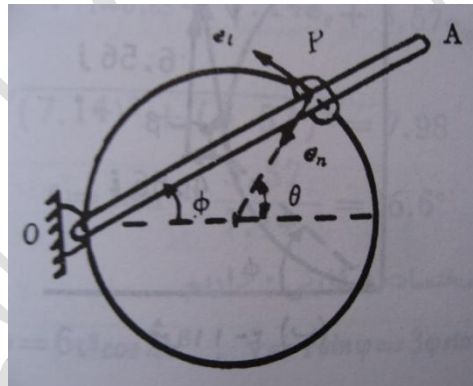
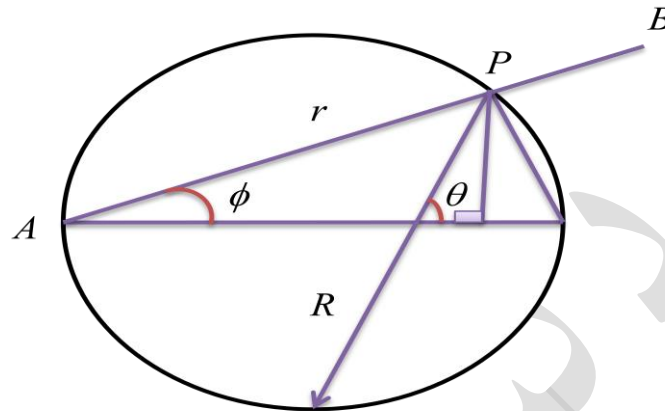
$$\text{if } v = \dot{x} = \text{const} \rightarrow \ddot{x} = \frac{2}{3} \dot{y}^2 + \frac{2}{3} y \ddot{y} \rightarrow \ddot{y} = -1.125(\frac{m}{s^2})$$

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} \rightarrow a = 1.125(\frac{m}{s^2})$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{3} \rightarrow y' = \frac{3}{2y} \quad \text{and} \quad y'' = -\frac{9}{4y^3} \rightarrow \rho = 6.94m$$

$$a_n = \frac{v^2}{p} \rightarrow a_n = 0.9(\frac{m}{s^2}) \rightarrow a_t = \sqrt{a^2 - a_n^2} \Rightarrow a_t = 675 \times 10^{-3}(\frac{m}{s^2})$$

مثال (میله ای AB با سرعت زاویه ای $\dot{\Phi}$ در حال دوران است مطلوبست سرعت و شتاب ذره ای P در شکل زیر ؟

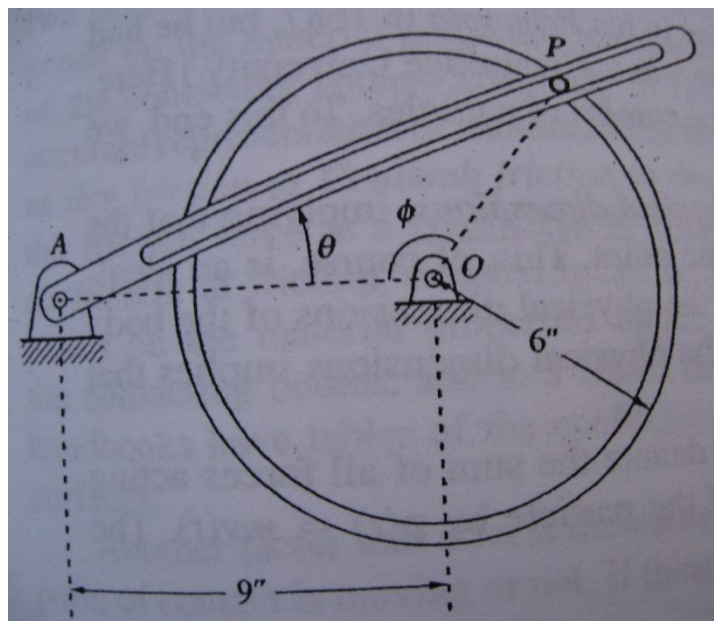


$$OP = R \quad \text{and} \quad \theta = 2\phi \rightarrow \dot{\theta} = 2\dot{\phi}$$

$$v = \dot{r}e_r + r\dot{\theta}e_\theta$$

$$\ddot{r} = 0 \rightarrow v = 2R\dot{\phi}e_\theta \quad \text{and} \quad a = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)e_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})e_\theta$$

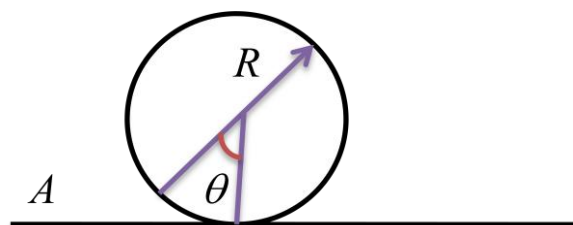
$$\ddot{r} = 0 \quad \text{and} \quad \dot{r} = 0 \quad \text{and} \quad \ddot{\theta} = 0 \rightarrow a = -4R\dot{\phi}^2 e_r$$



$$y = f(x) \quad \frac{1}{\rho} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$r = f(\theta) \quad \frac{1}{\rho} = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}} \quad r' = \frac{dr}{d\theta}$$

مثال (دیسکی مطابق شکل زیر بر روی سطحی صاف به شعاع R غلتی بدون لغزش انجام میدهد. سرعت و شتاب نقطه A را به دست آورید ؟



No Slip: $x = R\theta$

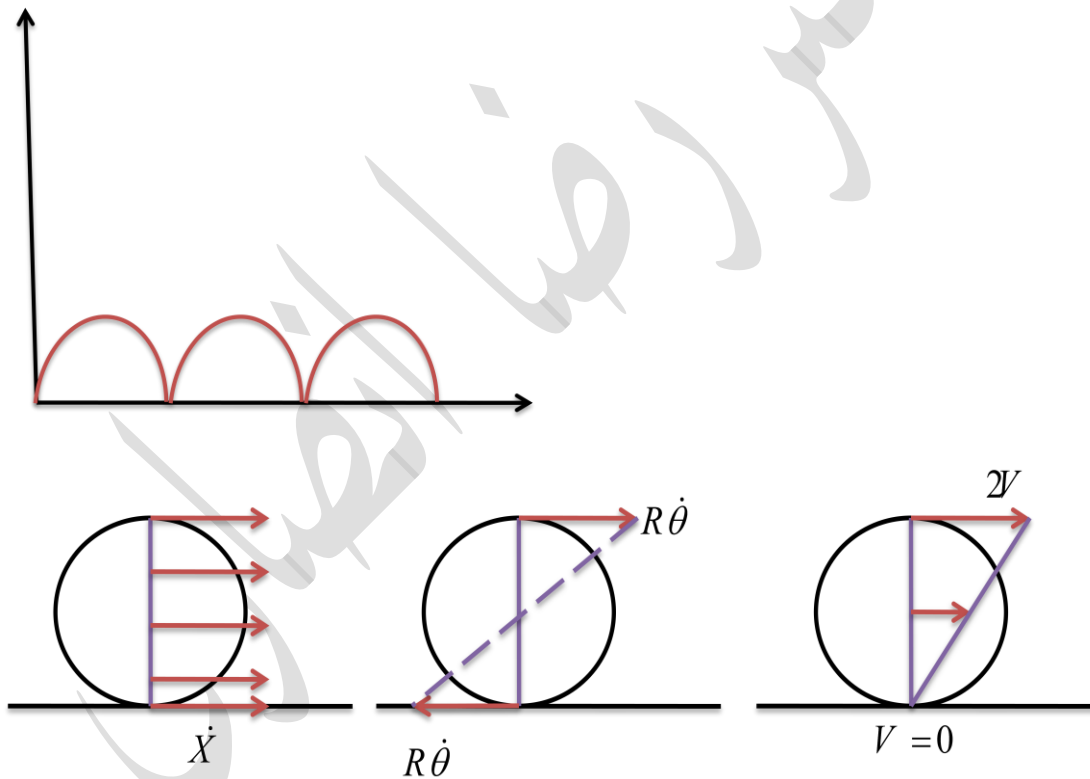
$$x_A = x - R\sin\theta = R(\theta - \sin\theta)$$

$$y_A = R(1 - \cos\theta)$$

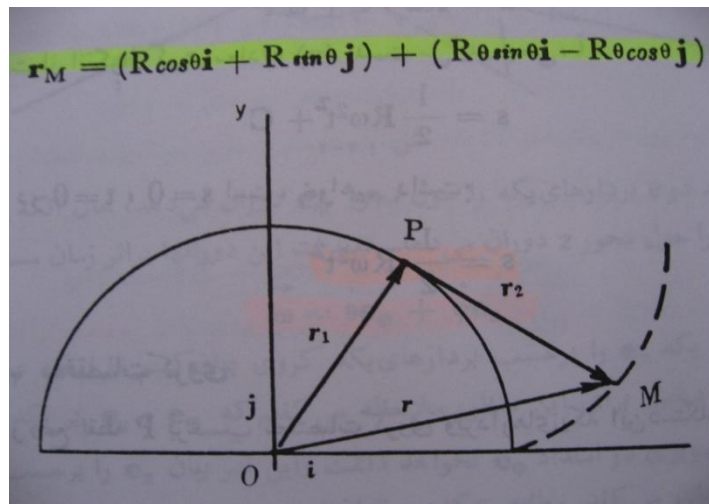
$$v_A = \dot{x}_A \vec{i} + \dot{y}_A \vec{j} \rightarrow v_A = R(\dot{\theta} - \dot{\theta}\cos\theta)\vec{i} + (R\dot{\theta}\sin\theta)\vec{j}$$

$$a_A = R(\ddot{\theta} + \dot{\theta}^2\sin\theta - \ddot{\theta}\cos\theta)\vec{i} + (R\ddot{\theta}\sin\theta + R\dot{\theta}^2\cos\theta)\vec{j}$$

$$\text{if } \theta = 0 \Rightarrow v_A = 0 \quad \text{and} \quad a_A = R\dot{\theta}^2\vec{j}$$



تمرین) در حالتی که انتهای یک نخ را که بر روی یک قرقره پیچیده شده است را باز نماییم (به اندازه ی مشخص) سرعت و شتاب انتهای آزاد نخ و طول نخ باز شده را بدست آورید؟



$$\begin{cases} x_p = R \cos \theta + R \theta \sin \theta \\ y_p = R \sin \theta - R \theta \cos \theta \end{cases}$$

$$\theta = \omega t$$

$$\vec{r}_p = x_p \vec{i} + y_p \vec{j}$$

$$\vec{r}_p = (R \cos \omega t + R \omega t \sin \omega t) \vec{i} + (R \sin \omega t - R \omega t \cos \omega t) \vec{j}$$

$$\vec{v}_p = \dot{\vec{r}}_p \rightarrow v_p = (-R \omega \sin \omega t + R \omega \sin \omega t + R \omega^2 t \cos \omega t) \vec{i}$$

$$+ (R \omega \cos \omega t - R \omega \cos \omega t + R \omega^2 t \sin \omega t) \vec{j}$$

$$\vec{v}_p = R \omega^2 t \cos \omega t \vec{i} + R \omega^2 t \sin \omega t \vec{j}$$

$$a = \dot{\vec{v}}_p$$

$$|\vec{v}_p| = R \omega^2 t = \frac{ds}{dt} \rightarrow s = \frac{1}{2} R \omega^2 t^2 + c$$

$$\text{if } t_0 = 0 \rightarrow s_0 = 0 \rightarrow c = 0 \rightarrow s = \frac{1}{2} R \omega^2 t^2$$

سینماتیک سه بعدی :

$$\begin{cases} \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \\ \vec{\dot{r}} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} \\ \vec{\ddot{r}} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{r} = r\vec{e}_r + z\vec{k} \\ \vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{k} \\ \vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{k} \end{cases}$$

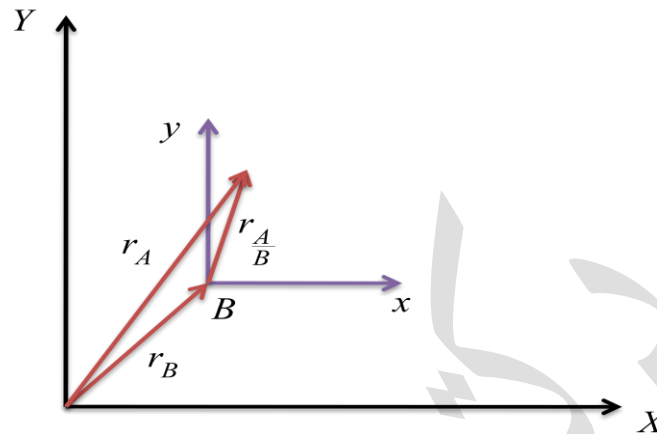
$$\vec{v} = v_r\vec{e}_r + v_\theta\vec{e}_\theta + v_\varphi\vec{e}_\varphi$$

$$\begin{cases} v_r = \dot{r} \\ v_\theta = r\dot{\theta} \cos \varphi \\ v_\varphi = r\dot{\varphi} \end{cases}$$

$$\vec{a} = a_r\vec{e}_r + a_\theta\vec{e}_\theta + a_\varphi\vec{e}_\varphi$$

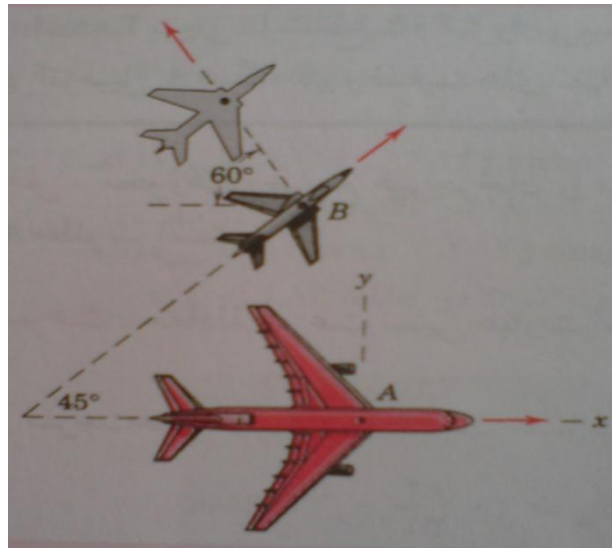
$$\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 - r\dot{\theta}^2 \cos^2 \varphi \\ a_\theta = \cos \frac{\varphi}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) - 2r\dot{\theta}\dot{\varphi} \sin \varphi \\ a_\varphi = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\varphi}) + r\dot{\theta}^2 \sin \varphi \cos \varphi \end{cases}$$

حرکت نسبی :



$$\begin{cases} r_A = r_B + r_{A/B} \\ v_A = v_B + v_{A/B} \\ a_A = a_B + a_{A/B} \end{cases}$$

مثال (سرنشینان هواپیمای جت A که با تندی $800 \frac{km}{h}$ به سمت شرق پرواز می کند هواپیمای جت دوم B را مشاهده می کنند که از زیر هواپیمایشان در خط افق پرواز کرده و می گذرد . اگرچه که دماغه هواپیمای B در راستای 45° شمال شرقی قرار دارد از نظر سرنشینان هواپیمای A چنین به نظر می رسد که B در حال دور شدن از آن ها تحت زاویه 60° مطابق شکل می باشد . سرعت واقعی B را تعیین کنید ؟



$$\text{solve 1: } \frac{v_B}{\sin 60} = \frac{v_A}{\sin 75} \quad v_B = 717 \left(\frac{m}{s} \right)$$

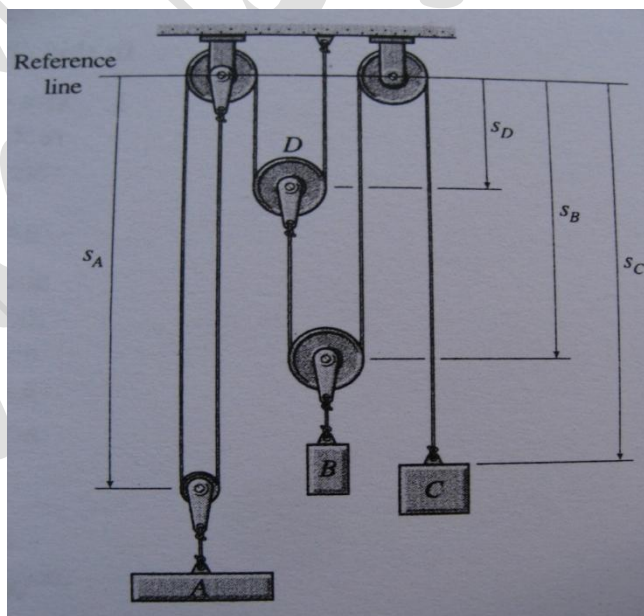
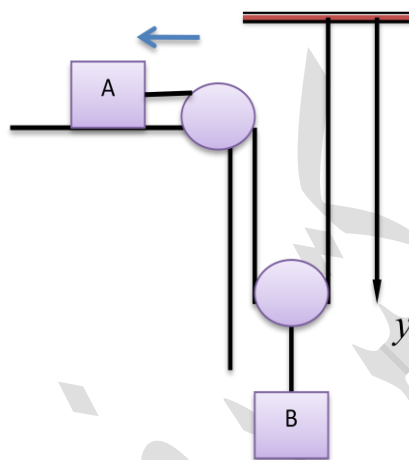
$$\text{solve 2: } v_B = v_A + v_{B/A}$$

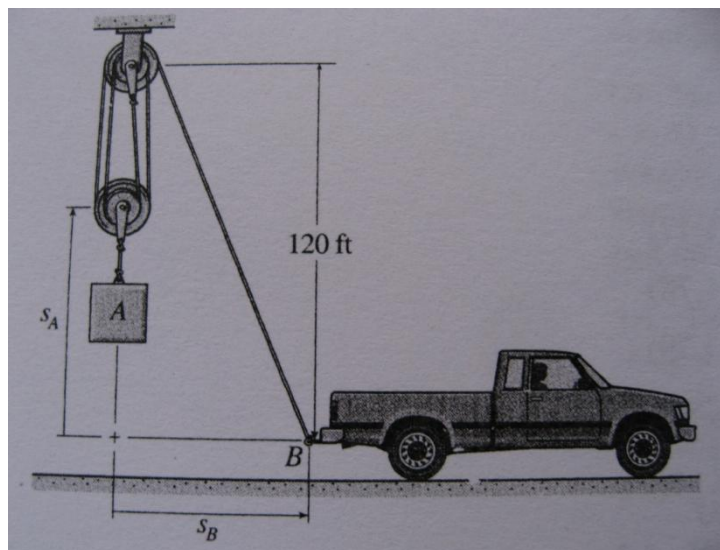
مثال (از منظر A ، قایق B با سرعت $30 \left(\frac{mil}{h} \right)$ عمود بر مسیر A از آن دور می شود. اگر سرعت مطلق A ، $40 \left(\frac{mil}{h} \right)$ باشد ، سرعت مطلق قایق B را تعیین نمایید؟

$$v_B^2 = 40^2 + 30^2 \quad \begin{cases} v_B = 50 \left(\frac{mil}{h} \right) \\ \theta = 36.87^\circ \end{cases}$$

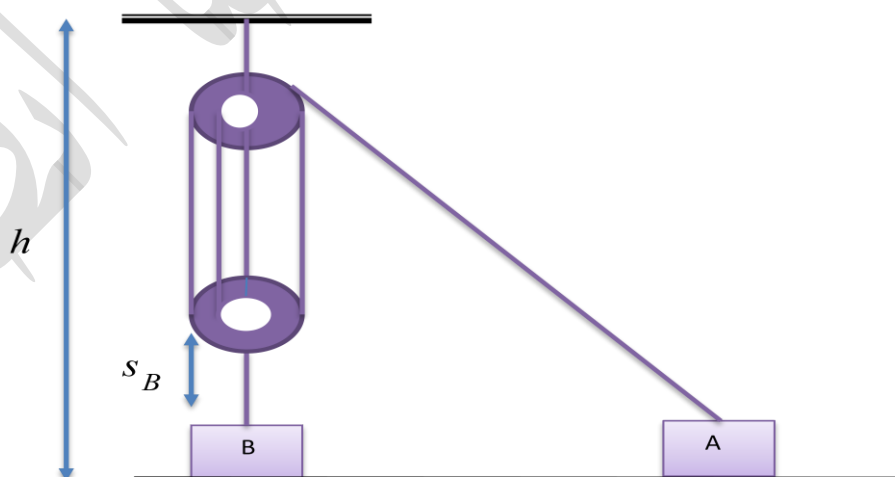
درجه آزادی :

تعریف درجه آزادی : تعداد مختصه های مستقل مورد نیاز برای تعیین موقعیت همه ی اجزای یک سیستم در هر لحظه از زمان آزادی آن سیستم نامیده می شود.





تمرین (تراکتور A با شتاب ثابت a_A از زیر قرقره شروع به حرکت می نماید سرعت بالا رفتن وزنه ی B بعد از زمان گذشت t (s) را بدست آورید؟



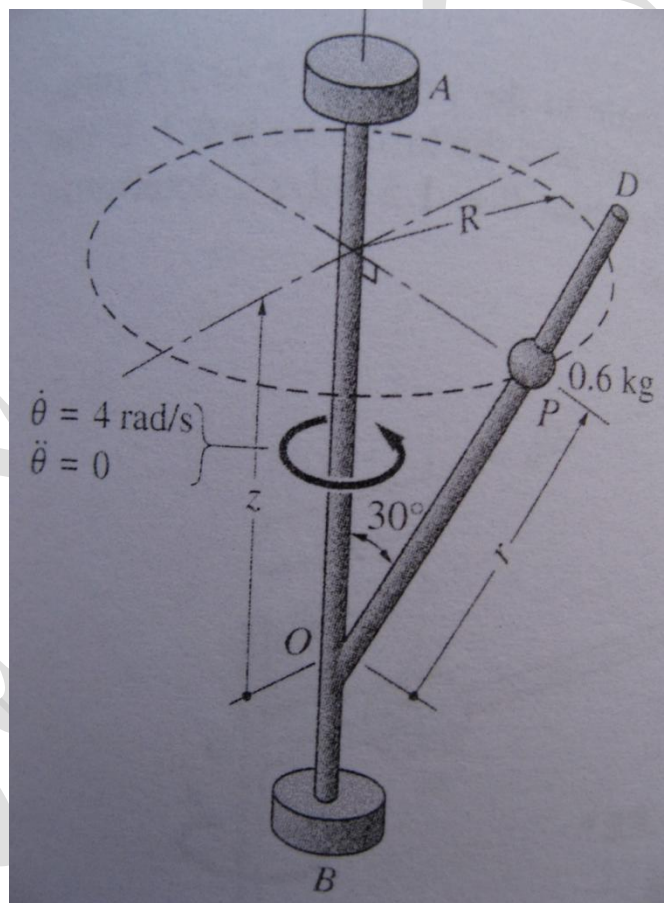
$$L = 4(h - s_B) + \sqrt{h^2 + s_A^2} + Constant$$

$$\dot{L} = 0 \quad -4v_B + \frac{2s_A v_A}{2\sqrt{h^2 + s_A^2}} = 0 \quad v = \frac{s_A v_A}{4\sqrt{h^2 + s_A^2}}$$

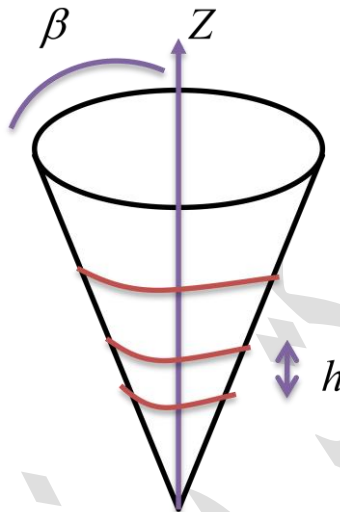
$$\ddot{s}_A = a_A \rightarrow \dot{s}_A = a_A t + c \text{ (if } t_0 = 0 \text{ and } \dot{s}_A|_{t=t_0} = 0) \rightarrow c = 0$$

$$\dot{s}_A = a_A \times t \rightarrow s_A = \frac{1}{2} a_A \times t^2 + C \text{ (if } t_0 = 0 \text{ and } s_A|_{t=t_0} = 0)$$

$$\rightarrow s_A = \frac{1}{2} a_A t^2$$



مثال (حرکت ذره ای روی سطح مخروطی قائم با روابط $r = ht \tan \beta$ ، $\theta = 2\pi t$ ، $z = ht$ تعریف می گردد مقادیر سرعت و شتاب ذره را در لحظه ی معین t بدست آورید؟



$$\text{if } r = ht \tan \beta \rightarrow \dot{r} = h \tan \beta \rightarrow \ddot{r} = 0$$

$$\text{if } \theta = 2\pi t \rightarrow \dot{\theta} = 2\pi \rightarrow \ddot{\theta} = 0$$

$$\text{if } z = ht \rightarrow \dot{z} = h \rightarrow \ddot{z} = 0$$

$$v = \dot{r}e_r + r\dot{\theta}e_\theta + \dot{z}k$$

$$v = h \tan \beta e_r + 2\pi h t \tan \beta e_\theta + h e_k$$

$$|v| = h \tan \beta \sqrt{1 + 4\pi^2 t^2 + \cot^2 \beta}$$

$$a = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)e_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})e_\theta + \ddot{z}k$$

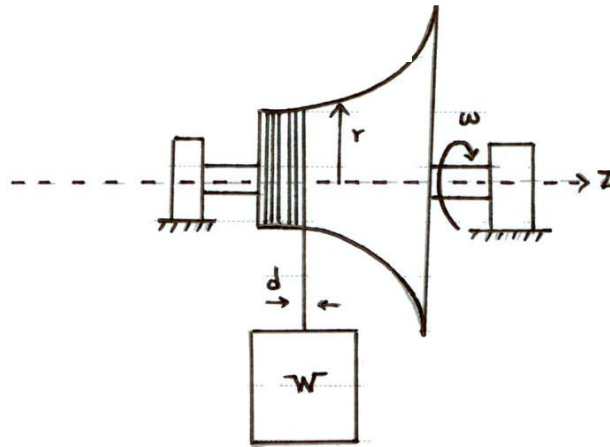
$$a = -4\pi^2 h t \tan \beta e_r + 2h \tan \beta 2\pi e_\theta + 0$$

$$|a| = 4\pi h \tan \beta \sqrt{1 + \pi^2 t^2}$$

مثال (در شکل زیر شعاع r قرقره را بر حسب z چنان تعیین نمایید که وزنه با سرعت

$$v = 0.4 + \frac{t^2}{8000} \quad \left(\frac{ft}{s}\right)$$

بالا کشیده می شود ؟



$$\begin{cases} \omega = 10 \text{ rpm} \\ d = 0.5 \text{ in} \\ t = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\dot{z} = \frac{d}{T} = \frac{d}{\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{\omega d}{2\pi}$$

$$\dot{z} = \frac{10 \frac{2\pi}{60} \left(\frac{0.5}{12}\right)}{2\pi} \rightarrow \dot{z} = 0.00694 \left(\frac{ft}{s}\right)$$

$$\frac{dz}{dt} = 0.00694 \quad t = 144z \quad (1)$$

در $z_0 = 0$ و $t_0 = 0$ ثابت انتگرال صفر می شود.

سرعت محیطی این قرقره:

$$r\omega = 0.4 + \frac{t^2}{8000} \quad r\left(\frac{2\pi}{60} 10\right) = 0.4 + \frac{t^2}{8000} \quad (2)$$

۱ را در ۲ جایگذاری می کنیم :

$$r = 0.382 + 2.482z^2$$