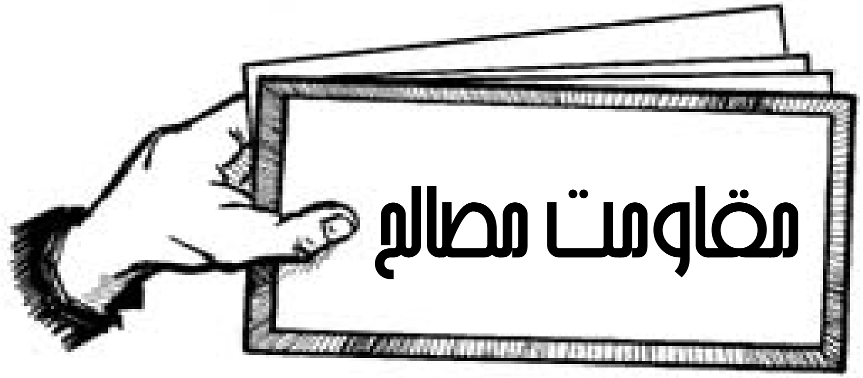
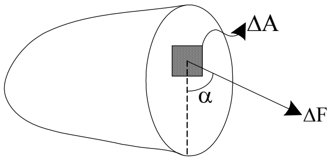


– تنش و کرنش:

– یادآوری تعاریف:

– تنش:

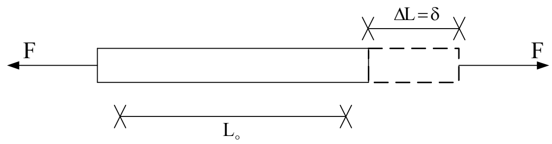


$$\begin{cases} \text{تنش برشی} \quad \tau = \dfrac{\Delta F.\cos\alpha}{\Delta A} \\ \text{(نرمال) تنش عمودی} \quad \sigma = \dfrac{\Delta F.\sin\alpha}{\Delta A} \end{cases}$$

– واحدها: واحدهای تنش همان واحدهای فشار می‌باشند. $(Pa, KPa, MPa, ...)$

$$۱Pa = \frac{۱N}{۱m^۲} \qquad ۱kgf/cm^۲ = \frac{۹/۸۱N}{۱۰^{-۴}m^۲} \simeq ۱۰^۵ Pa$$

– کرنش: عبارتست از نسبت تغییر طول به طول اولیه. (کمیت بی بعد)



$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_\circ} = \frac{\delta}{L_\circ}$$

– قانون هوک:

$$\sigma = E\varepsilon$$

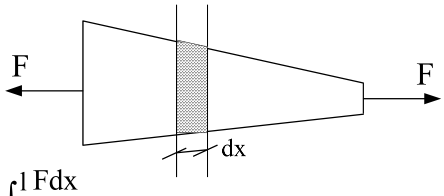
که در آن E مدول یانگ است و به عنوان مثال برای فولاد $\dfrac{۲/۱\times ۱۰^۶ kg/cm^۲}{\left(= ۲\times ۱۰^۵ MPa\right)}$ می‌باشد (هم واحد تنش)

– بیان دیگر قانون هوک:

(برای میله با مقطع ثابت و نیروی ثابت)

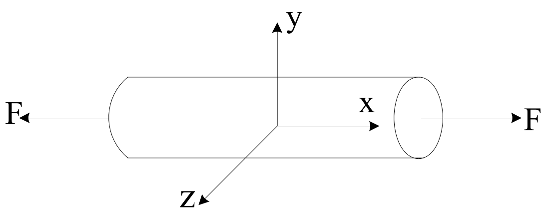
$$\begin{cases} \sigma = \dfrac{F}{A} \Rightarrow \delta = \dfrac{FL}{EA} \\ \sigma = E\varepsilon \end{cases}$$

و در حالت کلی داریم:



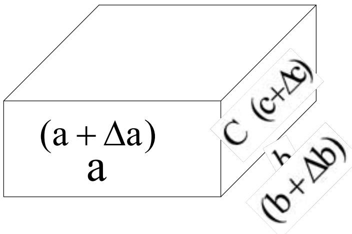
$$\delta = \int_\circ^l \frac{F dx}{EA}$$

– ضریب پواسون:



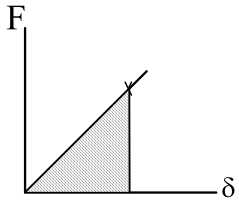
$$\text{(ضریب پواسون)} \quad \nu = \frac{-\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = \frac{-\varepsilon_z}{\varepsilon_x} \Rightarrow \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x$$

- در مورد کرنش حجمی داریم:



$$\varepsilon_V = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta c}{c} \Rightarrow \varepsilon_V = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$ کرنش حجمی

- انرژی کرنش:



$$U = \frac{F\delta}{۲} = \frac{F^۲L}{۲EA} \qquad \left(\delta = \frac{FL}{EA}\right)$$

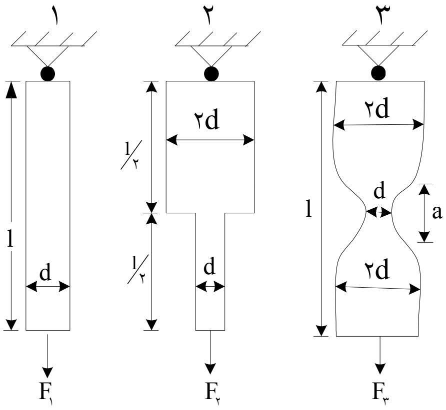
نکته: روش جمع اثرها در این جا صادق نیست، چون انرژی با مجذور F رابطه دارد و رابطه‌شان خطی نیست.

- انرژی کرنش واحد حجم:

$$u = \frac{U}{V} \qquad \Rightarrow u = \frac{F^۲}{۲EA^۲} = \frac{\sigma^۲}{۲E} = \frac{\varepsilon\sigma}{۲} = \frac{E\varepsilon^۲}{۲} \qquad (V = AL)$$

انرژی ← U ، حجم ← V

مثال: با فرض تنش مجاز یکسان برای هر ۳ میله، انرژی کرنش آنها را با هم مقایسه نمائید:



$$F_۱ = F_۲ = F_۳ = (\sigma_{all})\left(\pi\frac{d^۲}{۴}\right) = F \qquad U_۱ = \frac{F^۲l}{۲EA}$$

$$U_۲ = \frac{F^۲\left(\frac{l}{۲}\right)}{۲EA} + \frac{F^۲\left(\frac{l}{۲}\right)}{۲E \times ۴A} = \frac{۵F^۲l}{۱۶EA} = \frac{۵}{۸}U_۱ \qquad U_۳ \simeq \frac{F^۲l}{۲E \times ۴A} \simeq \frac{۱}{۴}U_۱$$

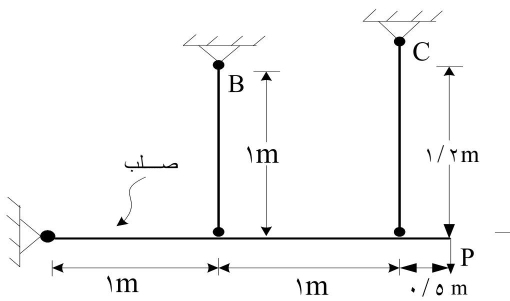
$$(a << l)$$

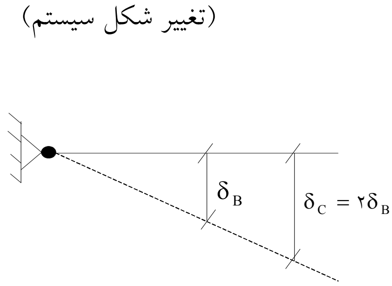
- مسائل هیپراستاتیکی (در نیروی محوری): در اینگونه مسائل مجهول اضافی را با حل معادلهٔ سازگاری تغییر شکل‌ها به دست می‌آوریم.

مثال: (کنکور ارشد ۷۵). برای سیستم نشان داده شده در نتیجه اعمال بار P کرنش در میلهٔ c برابر ۵×۱۰^{-۴} حاصل گردیده است.

میزان تنش ایجاد شده در میلهٔ B برابر چند $\frac{N}{mm^۲}$ است؟ $\left(E = ۲\times۱۰^۵ \frac{N}{mm^۲}\right)$

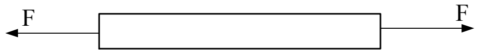
۱) ۶۰ ۲) ۱۰۰ ۳) ۱۲۰ ۴) ۲۴۰

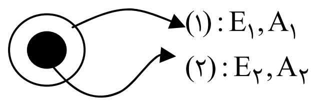




$$\delta_C = ۲\delta_B \quad , \quad \sigma_B = E\varepsilon_B = E\frac{\delta_B}{l_B} = E\frac{\frac{\delta_C}{۲}}{\frac{l_C}{۱/۲}} = ۰/۶E\frac{\delta_C}{l_C} = ۰/۶E\varepsilon_C = ۰/۶\times ۲\times ۱۰^{۵}\times ۵\times ۱۰^{-۴} = ۶۰\frac{N}{mm^۲}$$

- میله‌های ۲ یا چند جنس (از حالات دیگر مسائل هیبر استاتیکی):



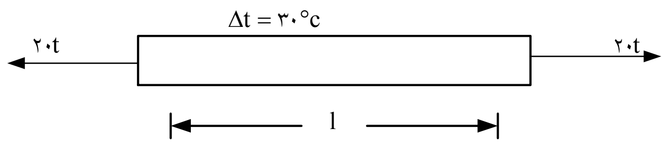


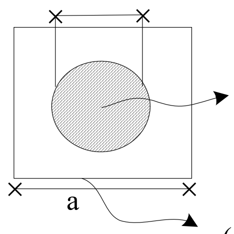
روی مرز بین دو جنس داریم: $\varepsilon_۱ = \varepsilon_۲$

$$\varepsilon_۱ = \varepsilon_۲ \Rightarrow \frac{\sigma_۱}{E_۱} = \frac{\sigma_۲}{E_۲}(*) \quad , \quad F = F_۱ + F_۲ = \sigma_۱ A_۱ + \sigma_۲ A_۲ (**)$$

$$(*)\ ,\ (**) \Rightarrow \sigma_۱ = \frac{F}{\underbrace{A_۲ + A_۱\frac{E_۲}{E_۱}}_{\text{مقطع معادل از جنس ۱}}} \quad , \quad \sigma_۲ = \frac{F}{\underbrace{A_۲ + A_۱\frac{E_۱}{E_۲}}_{\text{مقطع معادل از جنس ۲}}}$$

مثال: نیروی وارد بر فولاد و آلومینیوم را به دست آورید:





(S) فولاد $\begin{cases} d = ٤cm \\ E_s = ۲\times ۱۰^{٦} \\ \alpha_s = ۱۱\times ۱۰^{-٦} \end{cases}$

(a) آلومینیوم $\begin{cases} a = ٦m \\ E_a = ۰/۷\times ۱۰^{٦} \\ \alpha_a = ۲۳\times ۱۰^{-٦} \end{cases}$

حل

تغییر طول کل میله $\delta = \delta_a = \delta_s$ تغییر طول فولاد

تغییر طول آلومینیوم

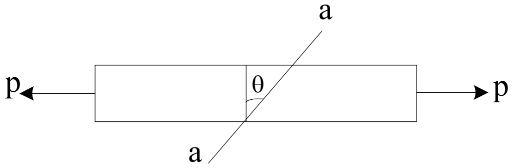
$$\Rightarrow \frac{F_a L}{E_a A_a} + \alpha_a L\Delta t = \frac{F_s L}{E_s A_s} + \alpha_s L\Delta t$$

$$\Rightarrow \frac{F_a \cancel{L}}{(۰/۷\times ۱۰^{۶})(۳۶-۴\pi)} + \cancel{L}\times ۲۳\times ۱۰^{-۶}\times ۳۰ = \frac{F_s \cancel{L}}{(۲\times ۱۰^{۶})(۴\pi)} + \cancel{L}\times ۱۱\times ۱۰^{-۶}\times ۳۰$$

$$\Rightarrow ۰/۰۳۹۸F_s - ۰/۰۶۰۹F_a = ۳۶۰ \quad (*) \quad , \quad F_a + F_s = ۲۰۰۰Kg \quad (**)$$

$$(*), (**) \Rightarrow F_s = ۱۵۶۷۰\ Kg \quad , \quad F_a = ۴۳۳۰\ Kg$$

- تنش وارد بر صفحه مایل در بارگذاری محوری:



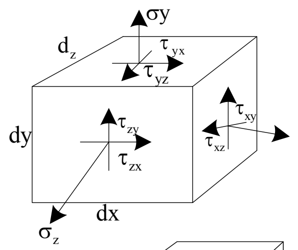
$$\sigma_{a-a} = \frac{P}{A}\cos^۲\theta$$

$$\tau_{a-a} = \frac{P}{۲A}\sin ۲\theta$$

(A: سطح مقطع عمود بر محور عضو)

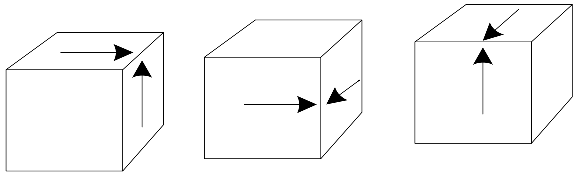
با توجه به روابط فوق σ وقتی ماکزیمم است که صفحه مقطع عمود بر محور عضو باشد $(\theta=0)$ و مقدار آن برابر $\frac{P}{A}$ می‌باشد و وقتی تنش برشی τ ماکزیمم است که صفحه مقطع با صفحه قائم زاویه 45° بسازد و مقدار آن $\frac{P}{2A}$ است (یعنی نصف مقدار ماکزیمم تنش قائم)

- تانسورهای تنش: به طور کلی هر المان از یک جسم که تحت اثر نیرو قرار دارد ۹ مؤلفه تنش دارد که ۳ تای آنها تنش‌های قائم و ٦تای آنها تنش‌های برشی هستند (که البته این تنش‌های برشی مستقل از هم نبوده و ۲ به ۲ با هم برابرند.)



$$|\tau_{xy}|=|\tau_{yx}|$$
$$|\tau_{yz}|=|\tau_{zy}|$$
$$|\tau_{xz}|=|\tau_{zx}|$$

- به هر کدام از حالات زیر یک برش خالص می‌گویند:



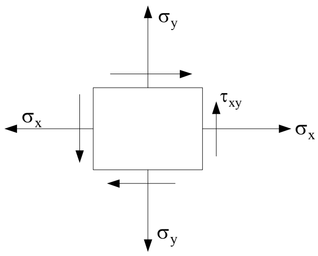
نکته: اگر المان تحت برش خالص را 45° بچرخانیم، تنش عمودی (σ) ماکزیمم و برش صفر خواهد شد.

نکته: برش خالص طول اضلاع را تغییر نمی‌دهد.

- کرنش برشی:

$$\gamma=\frac{T}{G} \quad , \quad G=\frac{E}{2(1+\upsilon)}$$

- روابط دایره مور:



$$\sigma_{max,min}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}$$

در حالتی که σ_x و σ_y هم علامت باشند:
$$\tau_{max}=\frac{1}{2}\max\left(|\sigma_{max}|,|\sigma_{min}|\right)$$

در حالتی که σ_x و σ_y مختلف‌العلامت باشند:
$$\tau_{max}=\frac{1}{2}\left(\sigma_{max}-\sigma_{min}\right)$$

برای کرنش‌ها نیز داریم:
$$\varepsilon_{max,min}=\frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(\varepsilon_x-\varepsilon_y\right)^2+\gamma_{xy}^2}$$

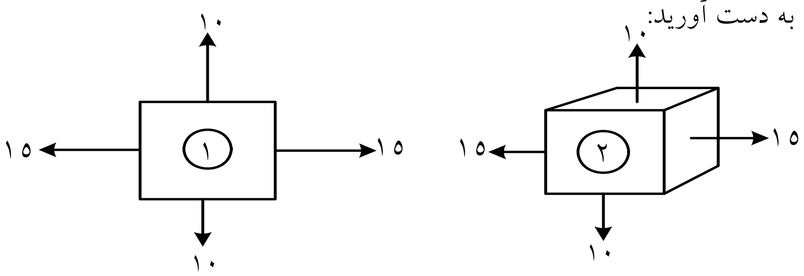
- انبساط حجمی: برای المانی که تحت تنش‌های σ_x و σ_y، σ_z است داریم:
$$\varepsilon_v=\frac{\Delta v}{v}=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z=\frac{1-2\nu}{E}\left(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z\right)$$

* در حالت خاص که جسم تحت اثر فشار هیدرواستاتیک P قرار گرفته باشد (یعنی $\sigma_x=\sigma_y=\sigma_z=-P$)

داریم:
$$\varepsilon_v=-\frac{3(1-2\nu)P}{E}=-\frac{P}{K} \quad , \quad K=\frac{E}{3(1-2\nu)}$$

(k مدول حجمی ماده است که با E هم دیمانسیون است)

مثال: مقدار تنش برش حداکثر در دو حالت زیر را به دست آورید:



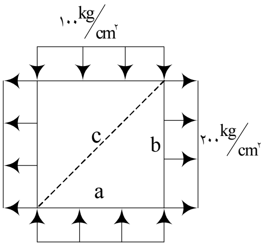
۱: المان دو بعدی است و چون تنش برشی نداریم، پس تنش‌های نشان داده شده تنش‌های حداکثر و حداقل (اصلی) هستند پس:

$$\tau_{max}=\frac{۱}{۲}(\sigma_{max}-\sigma_{min})=\frac{۱}{۲}(۱۵-۱۰)=۲/۵$$

۲: المان ۳ بعدی است و چون تنش برشی نداریم، تنش‌های نشان داده شده تنش‌های اصلی هستند، با این تفاوت که این بار تنش حداقل، تنش در بعد سوم، یعنی صفر است، پس:

$$\tau_{max}=\frac{۱}{۲}(\sigma_{max}-\sigma_{min})=\frac{۱}{۲}(۱۵-۰)=۷/۵$$

مثال: (کنکور ارشد ۸۳)- صفحه مربع شکل به اضلاع ۱۰ سانتی‌متر تحت تأثیر تنش‌های σ_x و σ_y مطابق شکل قرار دارد. تغییر طول قطر صفحه چقدر است؟ $(\nu=۰/۳\ ,\ \ E=۲\times۱۰^{۶}kg/cm^{۲})$



حل

$$\varepsilon_x=\frac{۱}{E}(\sigma_x-\nu\sigma_y)=\frac{۲۰۰+۰/۳\times۱۰۰}{E}=\frac{۲۳۰}{E}\qquad \varepsilon_y=\frac{۱}{E}(\sigma_y-\nu\sigma_x)=\frac{-۱۰۰-۰/۳\times۲۰۰}{E}=-\frac{۱۶۰}{E}$$

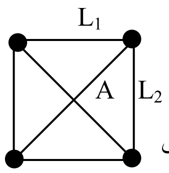
$$\Rightarrow \Delta a=a\varepsilon_x=۱۰\times\frac{۲۳۰}{E}\quad ,\quad \Delta b=b\varepsilon_y=-۱۰\times\frac{۱۶۰}{E}$$

نکته: از بسط رادیکال، $\sqrt{۱+\varepsilon}=۱+\frac{۱}{۲}\varepsilon$ ثابت می‌شود:

$$\text{قطر (تغییر طول قطر)}\ \Delta C=\frac{\Delta b\ (\text{تغییر طول ضلع بزرگ‌تر})+\Delta a\ (\text{تغییر طول ضلع کوچک})}{C\ (\text{طول اولیه قطر})}$$

$$\Rightarrow \Delta c=\frac{\frac{۲۳۰}{E}\times\cancel{۱۰}+\left(\frac{-۱۶۰}{E}\right)\times\cancel{۱۰}}{\cancel{۱۰}\sqrt{۲}}=\frac{۴۹/۴۹۷}{E}=۲/۴۷\times۱۰^{-۴}cm$$

مثال: (کنکور ارشد ۸۳): در شکل روبرو، جنس و سطح مقطع میله‌ها یکی است. دو میله مایل در A بهم اتصالی ندارند. در اثر افزایش درجه حرارت چه تنشی در میله‌ها به وجود می‌آید؟



۱) تنش ایجاد نمی‌شود
۲) در تمام میله‌ها تنش فشاری
۳) در میله‌های مایل کشش و در بقیه میله‌ها فشار
٤) در میله‌های مایل فشار و در بقیه میله‌ها کشش

حل از تحلیل سازه‌ها به خاطر داریم:

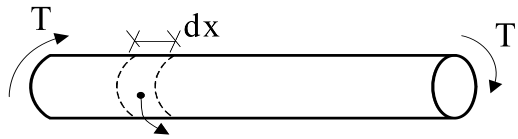
درجه نامعینی $n=m+r-2j$ (تعداد اعضا: m، قیدها: r، گره‌ها: j)

$$n=۶+۰-۲\times۴=-۲$$

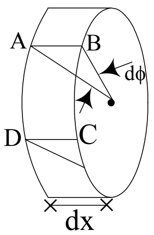
سازه فوق نامعین نیست. پس آزادانه تغییر شکل می‌دهد. گزینه ۱ درست است.

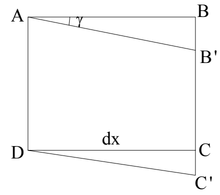
نکته: در سازه‌های معین، تغییرات درجه حرارت، نشست‌های تکیه‌گاهی و نقص ساخت اعضای سازه در سازه تنش ایجاد نمی‌کند.

- پیچش:



- یادآوری تعاریف:

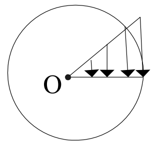




$$\overline{BB'}=\overline{CC'}=Rd\phi$$
$$\gamma=\frac{\overline{BB'}}{dx}=R\frac{d\phi}{dx}$$
$$\tau=G\gamma=GR\frac{d\phi}{dx}$$

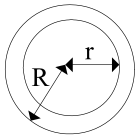
- تنش برش در مقطع تحت پیچش به صورت خطی تغییر می‌کند.

- در هر نقطه از مقطع دایروی داریم:

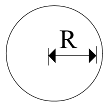


$$\tau=\frac{T\rho}{J}$$

و از استاتیک به خاطر داریم:
$J=\frac{\pi}{۲}\left(R^۴-r^۴\right)$



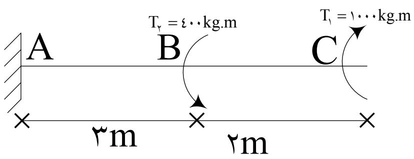
و
$J=\frac{\pi R^۴}{۲}$

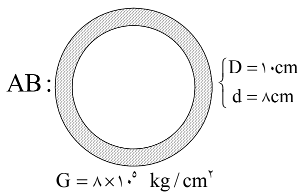


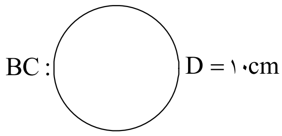
و میزان پیچش در هر نقطه از رابطه $\varphi=\int\frac{Tdx}{GJ}$ به دست می‌آید، که برای میله با سطح مقطع ثابت و لنگر ثابت داریم: $\varphi=\frac{TL}{GJ}$

- مقاومت دو مقطع تحت پیچش به نسبت عکس تنش‌هاست (با لنگرهای مساوی) و به نسبت لنگرهاست (با تنش‌های مساوی)

مثال: مطلوبست، محاسبه تنش برشی، ماکزیمم و دوران مقاطع B و C؟







حل از تعادل لنگرها داریم: $T_A=۶۰۰kgm$

$$\Rightarrow T_{AB}=۶۰۰kgm \quad , \quad T_{BC}=۱۰۰۰kgm$$

$$J_{AB}=\frac{\pi}{۲}\left(۵^۴-۴^۴\right)=۵۷۹/۶cm^۴ \qquad , \qquad J_{BC}=\frac{\pi}{۲}\times۵^۴=۹۸۱/۷cm^۴$$

$$\left.\begin{array}{l}\left(\tau_{max}\right)_{BC}=\frac{TR}{J}=\frac{۶۰۰\times۱۰۰\times۵}{۵۷۹/۶}=۵۱۷/۶kg/cm^۲\\ \left(\tau_{max}\right)_{BC}=\frac{TR}{J}=\frac{۱۰۰۰\times۱۰۰\times۵}{۹۸۱/۷}=۵۰۹/۳kg/cm^۲\end{array}\right\}\Rightarrow\tau_{max}=۵۱۷/۶kg/cm^۲$$

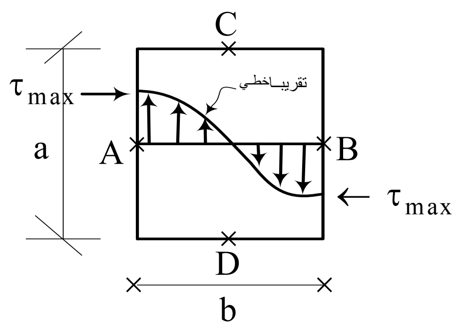
$$\phi_B=\phi_{AB}=\frac{T_{AB}L_{AB}}{GJ_{AB}}=\frac{۶۰۰\times۱۰۰\times۳۰۰}{۸\times۱۰^۵\times۵۷۹/۶}=۳۸۸\times۱۰^{-۴}(rad)$$

$$\phi_{B/C}=\frac{T_{BC}L_{BC}}{GJ_{BC}}=\frac{۱۰۰۰\times۱۰۰\times۲۰۰}{۸\times۱۰^۵\times۹۸۱/۷}=۲۵۵\times۱۰^{-۴}(rad)\Rightarrow\phi_C=\phi_B+\phi_{B/C}=\left(۳۸۸+۲۵۵\right)\times۱۰^{-۴}=۶۴۳\times۱۰^{-۴}(rad)$$

- **پیچش در مقطع مربع مستطیل:**

تنش‌های برش در وسط اضلاع بزرگ‌تر، بیشترین مقدار را دارند

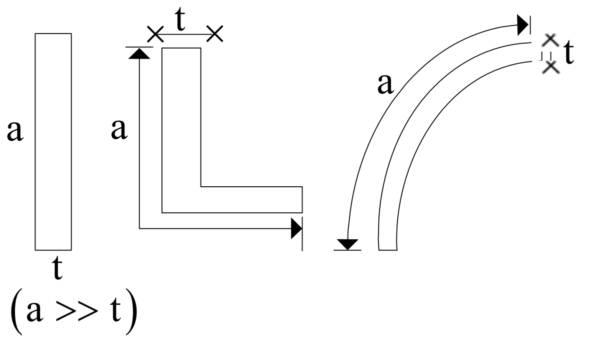
همچنین در ۵ نقطه مقطع (٤ گوشه و مرکز)، مقدار تنش، صفر است.



$$\left(\tau_{max}\right)_{A,B}=\frac{T}{\alpha ab^۲}$$

$$(a>b)$$

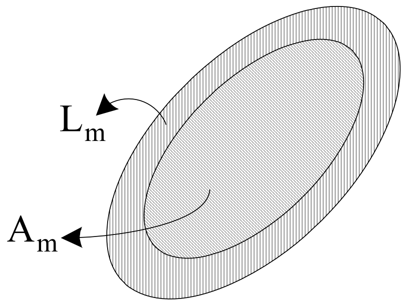
که α از جداول به دست می‌آید ولی مقدار آن به ازای مقادیر $\frac{a}{b}$ بزرگتر از ۱۰، ۱/۳ می»اشد. به عنوان مثال برای تمامی مقاطع روبرو داریم:



$$\tau_{max} = \frac{T}{\frac{1}{3}at^2} \quad , \quad J = \frac{1}{3}at^3$$

مقاطع روبرو، مقاطع جدار نازک باز محسوب می‌گردند.

- پیچش در مقاطع جدار نازک بسته:



$\tau = \frac{T}{2A_m.t}$ (t ضخامت مقطع)

و در هر نقطه از مقطع داریم: ثابت $= t \times T$

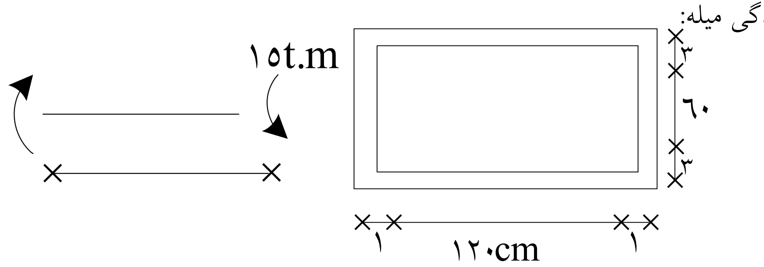
A_m: مساحت متوسط

L_m: محیط متوسط

پس با زیاد شدن ضخامت، تنش کاهش می‌یابد و بالعکس، در حالی که در مقاطع جدار نازک باز، با زیاد شدن ضخامت مقطع، تنش افزایش می‌یابد و بالعکس.

$J_t = \frac{4A_m^2}{\oint \frac{ds}{t}} \rightarrow t =$, $\phi = \int \frac{Tdx}{GJ_t}$ اگر ثابت $\rightarrow J_t = \frac{4A_m^2 t}{L_m}$

مثال: مطلوبست محاسبهٔ تنش در مقطع و زاویهٔ پیچیدگی میله:



$\left(G = 8 \times 10^5 kg/cm^2\right)$

حل

$$\tau = \frac{T}{2A_m t} \quad , \quad A_m = 121 \times 63 = 7623 cm^2$$

(جدار قائم) $\tau_1 = \frac{10 \times 10^5}{2 \times 7623 \times 1} = 65/60 kg/cm^2$

(جدار افقی) $\tau_2 = \frac{10 \times 10^5}{2 \times 7623 \times 3} = 21/86 kg/cm^2$

$$J_t = \frac{4A_m^2}{\oint \frac{ds}{t}} \quad , \quad \oint \frac{ds}{t} = 2\left(\oint_0^{121} \frac{ds}{3} + \oint_0^{63} \frac{ds}{1}\right) = 206/7 \Rightarrow J_t = \frac{4 \times 121^2 \times 63^2}{206/7} = 1012 \times 10^6$$

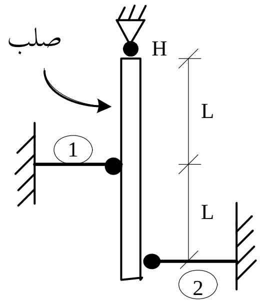
$$\Rightarrow \phi = \frac{TL}{GJ_t} = \frac{10^6 \times 300}{8 \times 10^5 \times 1012 \times 10^6} = 335 \times 10^{-6} (rad)$$

نکته: اگر سطح مقطع مدور باشد (دایره یا حلقه)، پس از پیچش هم مسطح باقی می‌ماند ولی در سایر مقاطع، پس از پیچش، تاب خوردگی یا طبله کردن (Warping) خواهیم داشت.

نکته: مقاطع جدار نازک بسته، در پیچش به مراتب قوی‌تر از مقاطع جدار نازک باز می‌باشند و کلاً بهینه‌ترین مقطع برای تحمل پیچش مقطع حلقوی است.

- ابتدا نکات و تست‌هایی از مباحث گذشته:

مثال (کنکور ارشد ۸۰): اگر جنس و طول هر دو میلهٔ ۱ و ۲ یکسان باشد و درجه حرارت میلـهٔ ۱ بـه انـدازهٔ $\Delta T+$ افـزایش یابـد، عکس‌العمل افقی H چقدر است؟



حل با نوشتن معادلهٔ تعادل حول نقط H به دست می‌آید: $F_۱ = ۲F_۲$

پس اگر در اثر تغییر درجه حرارت، در میلهٔ ۱، نیروی فشاری F ایجاد شود، در میلهٔ ۲ نیروی فشاری $\frac{F}{۲}$ خواهیم داشت.

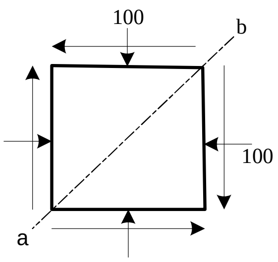
همچنین از سازگاری تغییر مکان‌ها به دست می‌آید: $\Delta_۲ = ۲\Delta_۱$

پس داریم:

$$\Delta_۱ = \alpha L\Delta T - \frac{FL}{EA} \qquad \Delta_۲ = \frac{\left(\frac{F}{۲}\right)L}{EA} \qquad \Delta_۲ = ۲\Delta_۱ \Rightarrow \alpha L\Delta T = \frac{FL}{EA}\left(۲+\frac{۱}{۲}\right) \Rightarrow F = ۰/۸AE\alpha\Delta T$$

$$\Rightarrow H_X = \frac{F_۱}{۲} = \frac{F}{۲} = ۰/۴AE\alpha\Delta T$$

- مثال (کنکور ارشد ۷۹): برای المان مربع شکل روبرو، هر دو تنش محوری و برشی روی صفحه قطری برابر صفر می‌باشـد. تـنش برشی چقدر است؟

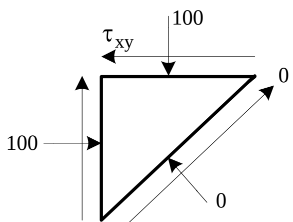


۱) صفر ۲) ۵۰

۳) ۷۵ ۴) ۱۰۰

حل مسأله بسیار ساده است و فقط کافی است تعادل نیروها در المان روبرو ارضا شود

$$\sum F_X = \sum F_y = ۰ \Rightarrow \tau_{xy} = ۱۰۰$$



نکته: یادمان باشد:

EI= صلبیت خمشی GJ= صلبیت پیچشی EA= صلبیت محوری

هر چه صلبیت بالاتر باشد، تغییر شکل متناظر با آن صلبیت کمتر می‌باشد.

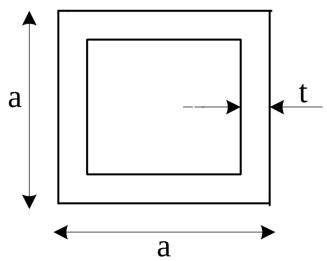
به عنوان مثال برای مقایسهٔ زاویه پیچیدگی دو مقطع تحت اثر لنگر پیچشی کافی است، عکس نسبت صلبیت آنها را به همدیگر به دست آوریم.

نکته: نسبت مقاومت پیچشی دو مقطع، برابر است با عکس نسبت تنش‌های برشی آن دو. (البته با لنگرهای مساوی)

مثال (کنکور ارشد ۸۰): دو مقطع جدار نازک بسته داریم که طول ضلع مقطع اول دو برابر ضلع دوم و ضخامت جدار مقطع اول نصف مقطع دوم می‌باشد. اگر $\alpha = \dfrac{\text{مقاومت پیچشی مقطع اول}}{\text{مقاومت پیچشی مقطع دوم}}$ و $\beta = \dfrac{\text{صلبیت پیچشی مقطع اول}}{\text{صلبیت پیچشی مقطع دوم}}$ باشد. α و β به ترتیب کدامند؟

۱) ۱ و ۱ ۲) ۲ و ۴ ۳) ۲ و ۲ ۴) ۲ و ۸

حل

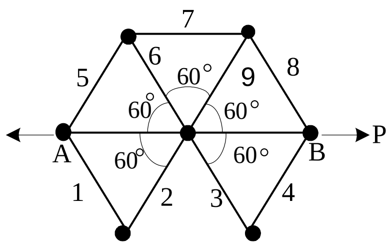


$$\alpha = \frac{\text{مقاومت پیچشی ۱}}{\text{مقاومت پیچشی ۲}} = \frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{\dfrac{\cancel{T}}{\cancel{2}A_{m2}t_2}}{\dfrac{\cancel{T}}{\cancel{2}A_{m1}t_1}} = \frac{A_{m1}t_1}{A_{m2}t_2} = \frac{2\times 2\cancel{A_{m2}}\times \frac{1}{2}\cancel{t_2}}{\cancel{A_{m2}}\times \cancel{t_2}} = 2$$

$$\beta = \frac{\text{صلبیت پیچشی ۱}}{\text{صلبیت پیچشی ۲}} = \frac{G_1J_1}{G_2J_2} = \frac{J_1}{J_2} = \frac{\dfrac{\cancel{4}A_{m1}^2}{\left(\oint \frac{ds}{t}\right)_1}}{\dfrac{\cancel{4}A_{m2}^2}{\left(\oint \frac{ds}{t}\right)_2}} = \frac{\dfrac{(2\times 2A_{m2})^2}{4\times \dfrac{2a}{\frac{1}{2}t_2}}}{\dfrac{A_{m2}^2}{4\times \dfrac{a}{t_2}}} = 4$$

گزینه ۲ درست است.

مثال (کنکور ارشد ۸۴): در شکل روبرو کلیه میله‌ها به طول L به سطح مقطع A و مدول ارتجاعی E می‌باشند. تغییر مکان نسبی A به B چقدر است؟



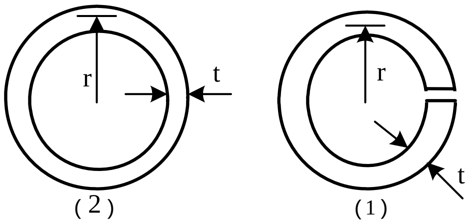
۱) $\dfrac{PL}{EA}$ ۲) $\dfrac{2PL}{EA}$

۳) $\dfrac{7PL}{EA}$ ($\dfrac{11PL}{EA}$

حل شکل در ابتدا کمی شلوغ به نظر می‌رسد ولی با کمی دقت می‌توان فهمید که بجز دو میلهٔ افقی که نیروی P به آنها وارد می‌شود بقیه میله‌ها صفر نیرویی‌اند. (برای راحتی تشخیص میله‌های صفر نیرویی، میله‌ها شماره گذاری شده‌اند از میلهٔ ۱ شروع کرده و پیش بروید). و در نتیجه، فقط این دو میله هستند که باعث دور شدن A و B از هم می‌گردند (طبق $\Delta = \dfrac{EL}{EA}$) پس داریم:

$$\Delta_{A\to B} = 2\times \frac{FL}{EA}\left(\ ,F = P\right) \Rightarrow \Delta = \frac{2PL}{EA}$$

گزینه ۲ صحیح است.



مثال: اگر در دو مقطع روبرو نسبت $\frac{r}{t}=10$ باشد مطلوبست تعیین $\frac{\phi_1}{\phi_2}$؟

حل: مقطع ۱ جدار نازک باز و مقطع ۲ جدار نازک بسته است.

و می‌دانیم که در مقاطع جدار نازک باز، شکل مقطع مهم نیست و فقط طول مقطع مهم می‌باشد که در اینجا طول مقطع ۱ برابر $2\pi r$ است و می‌دانیم که نسبت $\frac{\phi_1}{\phi_2}$ برابر است با نسبت $\frac{\text{صلبیت پیچشی ۲}}{\text{صلبیت پیچشی ۱}}$.

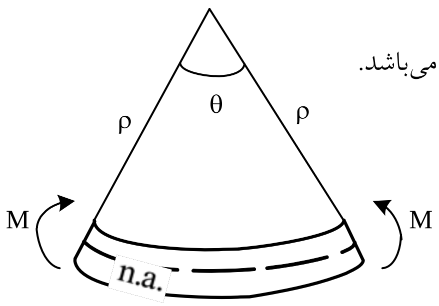
$$\frac{\phi_1}{\phi_2}=\frac{G_2J_2}{G_1J_1}=\frac{J_2}{J_1} \qquad J_1=\frac{1}{3}at^3=\frac{1}{3}(2\pi r)t^3=\frac{1}{3}(2\pi\times 10t)t^3=\frac{20\pi}{3}t^4$$

$$J_2=\frac{4A_m^2}{\oint\frac{ds}{t}}=\frac{4\times(\pi r^2)^2}{\frac{2\pi r}{t}}=\frac{4\pi^2r^4}{2\pi\times 10}=\frac{2\pi\times 10^4t^4}{10}=2\pi\times 10^3t^4 \Rightarrow \frac{\phi_1}{\phi_2}=\frac{2\pi\times 10^3t^4}{\frac{20\pi}{3}t^4}=300$$

ملاحظه می‌شود که تحت یک لنگر ثابت، یک مقطع جدار نازک باز ۳۰۰ برابر بیشتر از یک مقطع جدار نازک بسته با ابعاد و مساحت یکسان، پیچیده می‌شود. (با نسبت $\frac{r}{t}=10$)

خمش:

بدون تردید، خمش مهم‌ترین و پرسؤال‌ترین مبحث مقاومت مصالح کنکور کارشناسی ارشد عمران می‌باشد.



یادآوری: خمش خالص

فاصله از تار خنثی

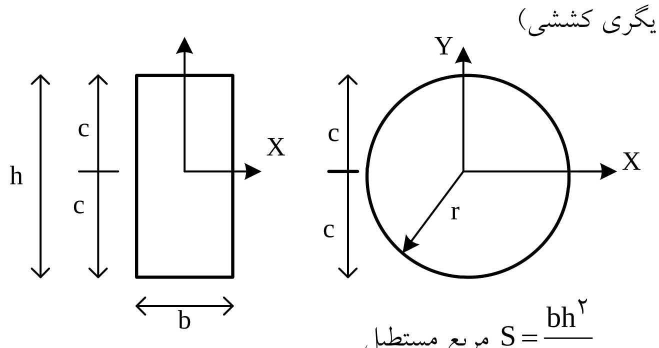
$$\varepsilon=-\frac{y}{\rho}$$ کرنش

شعاع انحناء

ثابت می‌شود: $\sigma=\frac{My}{I}$ که در این رابطه، M لنگر خمشی وارده به مقطع، y فاصلهٔ نقطه مورد محاسبه از تار خنثی و I ممان اینرسی می‌باشد.

بدیهی است طبق رابطه فوق هر چه y بیشتر باشد تنش خمشی بزرگ‌تر است.

پس σ_{max} در تارهای بالایی و پایینی مقطع اتفاق می‌افتد. (یکی فشاری و دیگری کششی)



$$\sigma_{max}=\pm\frac{MC}{I}=\pm\frac{M}{S} \quad , \quad S=\frac{I}{C}$$

– به خاطر داشته باشیم:

مربع مستطیل $S=\frac{bh^2}{6}$ دایره $S=\frac{\pi r^3}{4}$

– نسبت مقاومت خمشی دو مقطع برابر است با نسبت مستقیم S های آنها به هم.

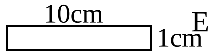
– شعاع انحناء:

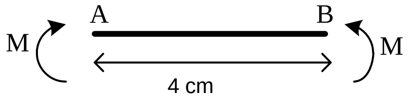
صلبیت خمشی

شعاع انحناء $\rho=\frac{EI}{M}$

لنگر خمشی

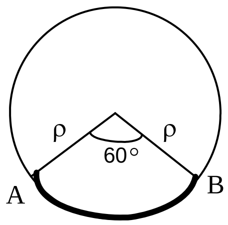
مثال: نوار فلزی به طول ٤ m مطابق شکل با لنگر خمشی M به صورت یک قوس 60° از یک دایره درآمده است. تنش خمشی حداکثر ایجاد شده در آن را حساب نمائید. $E = ۲\times۱۰^{۶}\,kg/cm^{۲}$





حل

شعاع انحناء $\rho =$ شعاع دایره $R = \dfrac{۶L}{۲\pi} = \dfrac{۶\times۴}{۲\pi} = ۳/۸۲m$

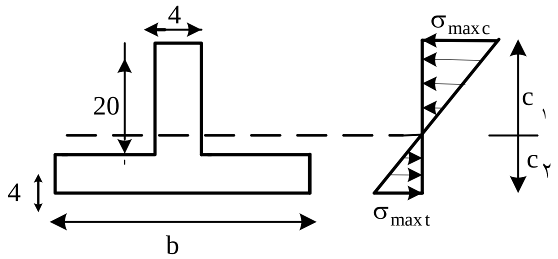


$$I = \frac{۱۰\times۱^{۳}}{۱۲} = ۰/۸۳۳cm^{۴}$$

$$\rho = R = \frac{EI}{M} \Rightarrow ۳/۸۲\times۱۰۰ = \frac{۲\times۱۰^{۶}\times۰/۸۳۳}{M} \Rightarrow M = ۴۳۶۳kg.cm$$

$$\sigma_{max} = \frac{M}{S} = \frac{M}{\frac{bh^{۲}}{۶}} = \frac{۶\times۴۳۶۳}{۱۰\times۱^{۲}} = ۲۶۱۸kg/cm^{۲}$$

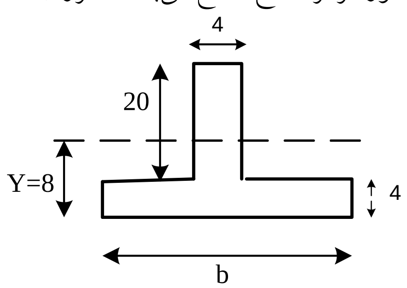
مثال: در شکل مقابل b را طوری تعیین کنید که اگر لنگر خمشی مثبت به تیر وارد شود تنش فشاری max دو برابر تنش کششی max شود.



حل با فرض کردن تار خنثی در یک تراز دلخواه، طبق شکل زیر داریم:

$$\frac{\sigma_{max\,c}}{\sigma_{max\,t}} = ۲ = \frac{c_1}{c_2} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{c_1}{c_2} = ۲ \\ c_1 + c_2 = ۲۰ + ۴ = ۲۴ \end{cases} \Rightarrow c_1 = ۱۶, c_2 = ۸$$

حال که مقادیر c_1 و c_2 به دست آمد، مقطع باید ابعادی داشته باشد که تار خنثی آن (که محور مرکز سطح مقطع می‌باشد) مرز جدا کنندهٔ c_1 و c_2 باشد.

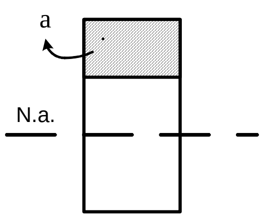


$$\bar{Y}\ \text{نسبت به کف} = \frac{(b\times۴)\times۲ + (۲۰\times۴)\left(\frac{۲۰}{۲}+۴\right)}{b\times۴ + ۲۰\times۴} = ۸ \Rightarrow b = ۲۰$$

نکته: به طور کلی اگر یک تیر ارتجاعی بر اثر یک بارگذاری دارای شعاع انحناء ρ_1 و در اثر بارگذاری دیگر شعاع انحناء ρ_2 باشد شعاع انحناء تیر از رابطهٔ زیر به دست می‌آید: (با فرض $\sigma = E\varepsilon^{n}$)

$$\left(\frac{۱}{\rho}\right)^{n} = \left(\frac{۱}{\rho_1}\right)^{n} + \left(\frac{۱}{\rho_2}\right)^{n}$$

و در صورتی که رابطه تنش-کرنش خطی باشد به رابطه $\dfrac{۱}{\rho} = \dfrac{۱}{\rho_1} + \dfrac{۱}{\rho_2}$ می‌رسیم.



نکته: در یک تیر تحت اثر خمش خالص نیروی وارد بر یک قسمت از مقطع برابر است با:

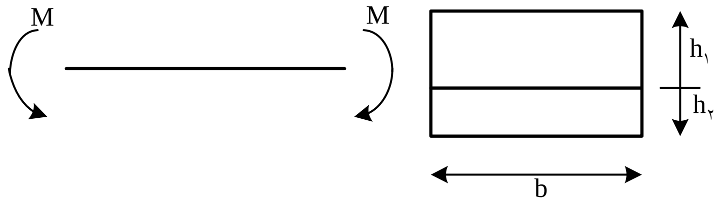
$F = \dfrac{MQ_a}{I}$ (نیروی وارد بر قسمت a از مقطع تیر)

M: ممان خمش وارده به تیر

Q_a: لنگر استاتیک اول قسمت a نسبت به تار خنثی

I: ممان اینرسی کل مقطع

مثال: تیری با مقطع روبرو تحت خمش قرار دارد.نسبت تنش خمشی ماکزیمم تسمه اول به تسمه دوم چقدر است؟



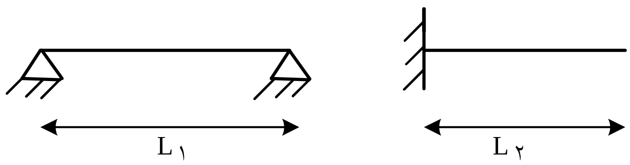
حل پس از خم شدن تیر، شعاع انحنای هر دو تسمه، تقریباً با هم برابر است پس در مورد لنگرهای هر کدام از تسمه‌ها می‌توان نوشت:

$$\frac{EI_1}{M_1}=\frac{EI_2}{M_2}\Rightarrow\frac{M_1}{M_2}=\frac{I_1}{I_2}=\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^3$$

در مورد نسبت تنش‌های خمشی داریم:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2}=\frac{\frac{M_1}{S_1}}{\frac{M_2}{S_2}}=\frac{\frac{M_1}{h_1^2}}{\frac{M_2}{h_2^2}}=\frac{M_1}{M_2}\times\frac{h_2^2}{h_1^2}=\frac{h_1^3}{h_2^3}\times\frac{h_2^2}{h_1^2}=\frac{h_1}{h_2}$$

مثال (کنکور ارشد ۷۸): دو تیر شکل روبرو از جنس یکسان و با مقطع یکسان می‌باشند. تنش خمشی آنها بـر اثـر وزن خـود یکـی می‌باشد. نسبت $\frac{L_1}{L_2}$ چقدر است؟



۱) $l_1=l_2$ ۲) $l_1=l_2\sqrt{2}$ ۳) $l_1=2l_2$ ٤) $l_1=2\sqrt{2}L_2$

حل ابتدا لنگر خمشی حداکثر را به دست می‌آوریم: $M_2=\frac{wl_2^2}{2}$, $M_1=\frac{wl_1^2}{8}$

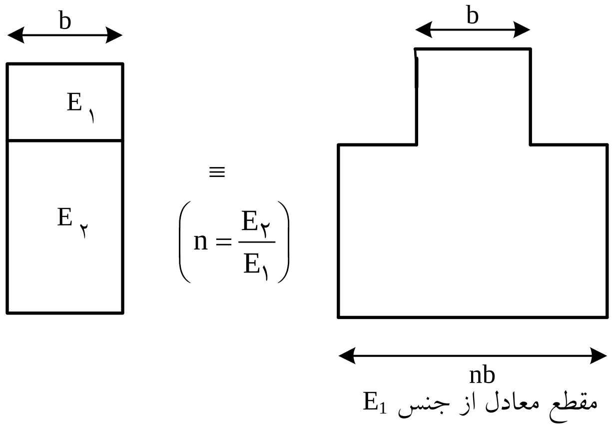
با توجه به برابر بودن S_1 و S_2 داریم:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2}=\frac{\frac{M_1}{S_1}}{\frac{M_2}{S_2}}=\frac{\frac{l_1^2}{8}}{\frac{l_2^2}{2}}=\frac{l_1^2}{4l_2^2}=1\Rightarrow l_1=2l_2$$

گزینه ۳ صحیح است.

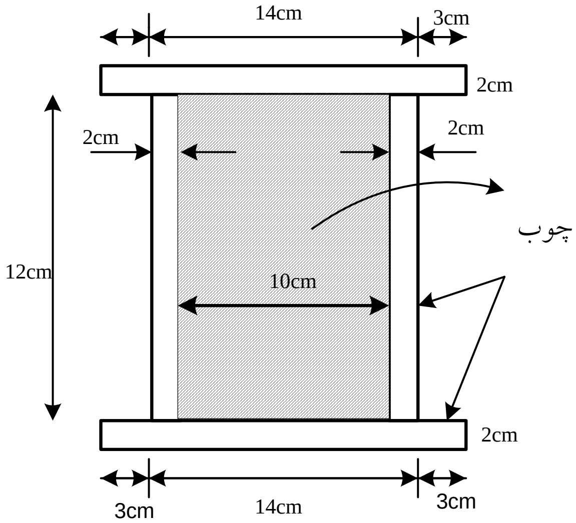
- خمش تیرهای دو جنسی:

اگر مقطع تیر از دو جنس با مدول یانگ E_1 و E_2 تشکیل شده باشد، می‌توان برای سادگی کار، مقطع را تبدیل کرد به مقطع معادل از جنس اول یا مقطع معادل از جنس دوم. و I و S و... را برای این مقطع جدید محاسبه نمود. فقط باید توجه نمود که، تنش محاسبه شده در قسمت‌های معادل شده مقطع باید در ضریب n (نسبت $\frac{E_2}{E_1}$ یا $\frac{E_1}{E_2}$) ضرب شود.



مثال (کنکور ارشد ۷٤): چنانچه مقطع تیری که از فولاد و چوب تشکیل شده است تحت تأثیر لنگر $M=۲۴۰KN.m$ قرار گیرد، مقدار نیرویی که بال فوقانی تحمل می‌کند، چقدر است؟

($E=۱\times۱۰^{۵}\frac{kg}{cm^{۲}}$ چوب و $E=۲\times۱۰^{۶}\frac{kg}{cm^{۲}}$ فولاد)



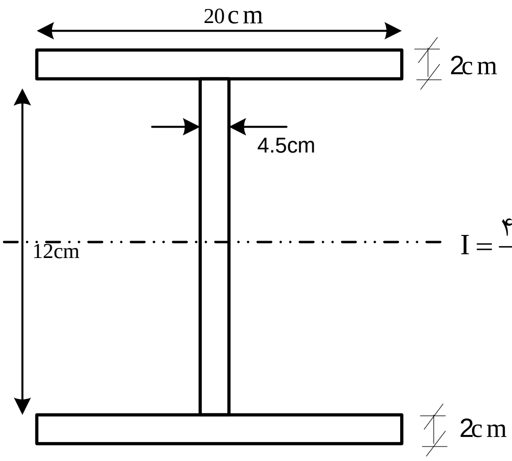
حل: ابتدا مقطع معادل از فولاد را تشکیل می‌دهیم:

$$n=\frac{E_{\text{چوب}}}{E_{\text{فولاد}}}=\frac{۱\times۱۰^{۵}}{۲\times۱۰^{۶}}=\frac{۱}{۲۰}$$

$$\Rightarrow \text{ضخامت جان چوب تبدیل یافته}=۱۰cm\times\frac{۱}{۲۰}=۰/۵cm$$

(۱۰cm چوب معادل ۰/۵ cm فولاد)

پس مقطع، به شکل روبرو تبدیل می‌شود:



$$I=\frac{۴/۵\times۱۲^{۳}}{۱۲}+۲\times\left[\frac{۲۰\times۲^{۳}}{۱۲}+۲\times۲۰\times۷^{۲}\right]=۴۵۹۵cm^{۴}$$

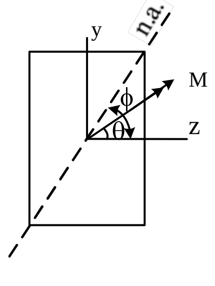
طبق نکته ذکر شده در صفحات قبل:

$$F_{\text{بال}}=\frac{MQ_{\text{بال}}}{I}$$

$$Q_{\text{بال}}=۲\times۲۰\times۷=۲۸۰cm^{۳}\Rightarrow F=\frac{MQ}{I}=\frac{(۲۴۰\times۱۰۰)(۲۸۰)}{۴۵۹۵}=۱۴۶۲KN$$

- خمش دوجانبه:

اگر لنگر M وارده به مقطع در راستای یکی از دو محور اصلی مقطع نباشد باید آن را به دو مؤلفه عمود بر هم تجزیه نمود در این حالت داریم:



$$\tan\phi=\frac{I_z}{I_y}.\tan\theta\Rightarrow\frac{y}{z}=\frac{I_z}{I_y}.\frac{M_y}{M_z}\quad \text{معادله خط محور خنثی}$$

(θ: زاویه لنگر با محور z مقطع)

(ϕ: زاویه تار خنثی با محور z مقطع)

- با توجه به رابطه فوق می‌توان نتیجه گرفت:

۱- همواره محور خنثی بین بردار لنگر خمشی M و محور اصلی متناظر با ممان اینرسی مینیمم قرار دارد.

۲- اگر در مقطعی $I_z=I_y$ (مثل مقطع مربع و دایره)، $\phi=\theta$ یا به عبارت دیگر در این گونه مقاطع، M در هر راستایی اعمال شود، تار خنثی منطبق بر راستای بردار M می‌باشد.

در حالت کلی بارگذاری روی مقطع که نیروی محوری P و لنگرهای خمشی M_y و M_z داریم، تنش برابر است با:

$$\sigma_x=\frac{P}{A}-\frac{M_z y}{I_z}+\frac{M_y z}{I_y}$$

– هسته مرکزی یک مقطع (kern): مکان هندسی نقاطی که اگر بار روی آنها اعمال شود، کل مقطع یا تحت فشار خواهد بود یا تحت کشش (بسته به فشاری یا کششی بودن بار)

– نکات:

۱– اگر نیرویی روی مرز هسته وارد شود، تنش تنها در یک رأس محیط مقطع صفر خواهد شد ولی اگر نیرو در یکی از رئوس هسته وارد شود تنش در یک ضلع محیط مقطع صفر خواهد شد.

۲– هر چه نیرو به مرکز مقطع نزدیک‌تر شد، تار خنثی از مقطع دورتر می‌شود و بالعکس. در دو حالت حدی داریم:

نیرو در بی‌نهایت← تار خنثی در مرکز مقطع (خمش محض) و نیرو در مرکز مقطع← تار خنثی در بی‌نهایت (تنش محوری خالص)

۳– هسته مرکزی یک n ضلعی محدب، همواره یک n ضلعی محدب می‌باشد.

٤– در چند ضلعی‌های مقعر کافی است که چند ضلعی محدب محیط بر مقطع را رسم کنیم. هسته مرکزی چند ضلعی محدب جدید به صورت شماتیک بیانگر هسته مقطع مقعر می‌باشد.

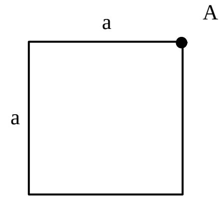
۵– هسته مقاطع زیر را به خاطر بسپارید:

– مستطیل به ابعاد b و h ← لوزی هم مرکز با آن به طول اقطار $\frac{b}{۳}$ و $\frac{h}{۳}$

– لوزی به اقطار b و h ← مستطیل هم مرکز با آن به طول اضلاع $\frac{b}{۶}$ و $\frac{h}{۶}$

– مقطع دایره به شعاع r ← دایره هم مرکز با آن به شعاع $\frac{r}{۴}$

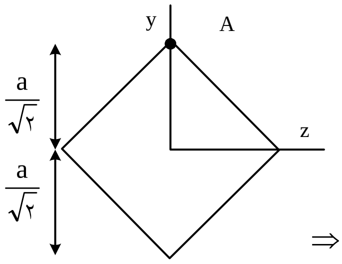
مثال (کنکور ارشد ۸۳): مقطع یک عضو سازه‌ای مربع مستطیل مطابق شکل می‌باشد. برآیند تنش‌ها در مقطع، یک نیروی عمودی فشاری در A می‌باشد. قدر مطلق تنش فشاری چند برابر تنش کششی است؟



۱) $\frac{۱۳}{۱۱}$ ۲) ۲/۲

۳) ۳ ٤) ۱/٤

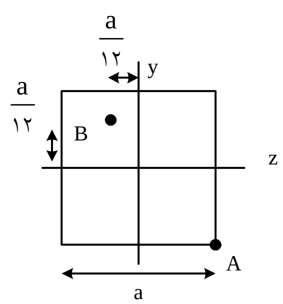
حل می‌توانیم مقطع را °٤۵ بچرخانیم. (و می‌دانیم که I مربع حول هر محوری $\frac{a^۴}{۱۲}$ است)



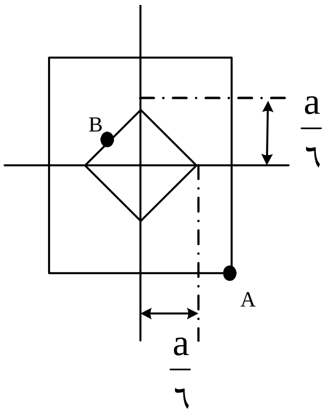
$$\sigma_{min}^{max}=\frac{p}{A}\pm\frac{Mc}{I}$$ (و $c=\frac{a}{\sqrt{۲}}$ و $M=\frac{pa}{\sqrt{۲}}$)

$$\Rightarrow\begin{cases}\sigma_{max}=\frac{p}{a^۲}+\left(\frac{pa}{\sqrt{۲}}\right).\left(\frac{a}{\sqrt{۲}}\right).\frac{۱}{\frac{a^۴}{۱۲}}=\frac{۷p}{a^۲}\\ \sigma_{min}=\frac{p}{a^۲}-\left(\frac{pa}{\sqrt{۲}}\right).\left(\frac{a}{\sqrt{۲}}\right).\frac{۱}{\frac{a^۴}{۱۲}}=-\frac{۵p}{a^۲}\end{cases}\Rightarrow\left|\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}}\right|=۱/۴\Rightarrow$$ گزینه ٤ صحیح است.

مثال (کنکور ارشد ۷٤): اگر محل اثر منتجه نیروی فشاری بر یک فونداسیون مربع شکل در نقطه‌ای به فاصلهٔ $\frac{۱}{۱۲}$ ضلع مربع از دو محور تقارن باشد، (B) تنش در کنج ربع مقابل (A) چقدر است؟

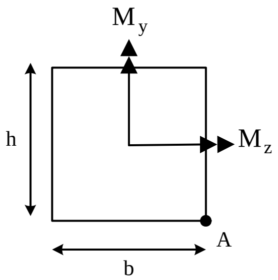


۱) $\frac{۲p}{a^۲}$ ۲) $\frac{p}{a^۲}$ ۳) صفر ٤) هیچ کدام



حل: می‌توان معادله تنش را نـوشت و مقـدار آن را به دسـت آورد.
اما با کمی دقت در شکل می‌تـوان فـهمیـد که نقطه اعمال بـار روی یکی از اضلاع هسته مرکزی مقطع قرار دارد. در نتیجه، مقدار تنـش در رأس ربـع مـقـابـل صـفـر اسـت. گـزینـه ۳ صحیـح می‌باشد.

مثال) در یـک مقطع مستطیل به ابـعاد $b=۱۰cm$ و $h=۱۵cm$، لنگرهای $M_z=۵t.m$ و $M_y=۲۰t.m$ اثر مـی‌کند. مـعادله محـور خنثی کدام است؟



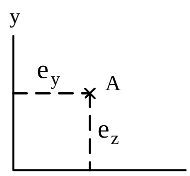
حل: از نکات قبلی داشتیم:

$$\frac{y}{z}=\frac{I_z}{I_y}.\frac{M_y}{M_z}$$ (معادله خط محور خنثی در حالت خمش دو محوره)

$$\Rightarrow \frac{y}{z}=\frac{bh^۳}{hb^۳}.\frac{M_y}{M_z}=\frac{۱۰\times ۱۵^۳}{۱۵\times ۱۰^۳}.\frac{۲۰}{۵}=۹\Rightarrow y=۹z$$

نکته: در بارگذاری کلی که علاوه بر خمش دوجانبه، نیرو هم داریم، معادله خط تار خنثی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$۱+\frac{e_y}{r_y^۲}z+\frac{e_z}{r_z^۲}Y=۰$$

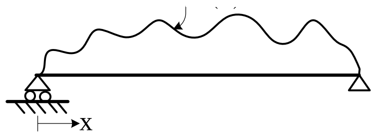


که در آن:

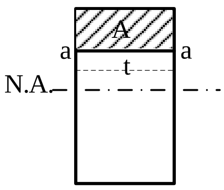
- e_z و e_y: خروج از محوریت بار به ترتیب نسبت به محورهای z و y می‌باشد.
- r_z و r_y: شعاع ژیراسیون‌های مقطع می‌باشند

$$\left(r_y=\sqrt{\frac{I_y}{A}}\quad , \quad r_z=\sqrt{\frac{I_z}{A}}\right)$$

بارگذاری عرضی:



بارگذاری عرضی در تیرها باعث ایجاد تنش برشی می‌شود که مقدار آن از رابطه زیر قابل محاسبه است:



$$\text{میانگین } (\tau)_{a-a} = \frac{VQ_A}{It}$$

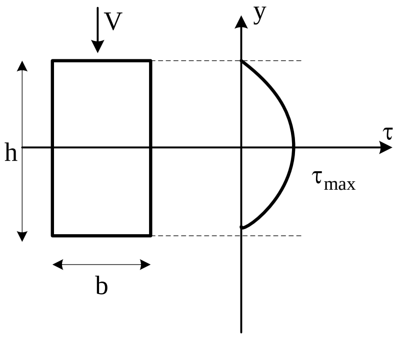
که در این رابطه: – V: برش در مقطع مورد نظر در طول تیر

Q_A: ممان استاتیک اول قسمت هاشور خورده (A)

I: ممان اینرسی مقطع حول محور خنثی

t: پهنای مقطع در محل محاسبه تنش برشی

در مقطع مستطیل داریم:



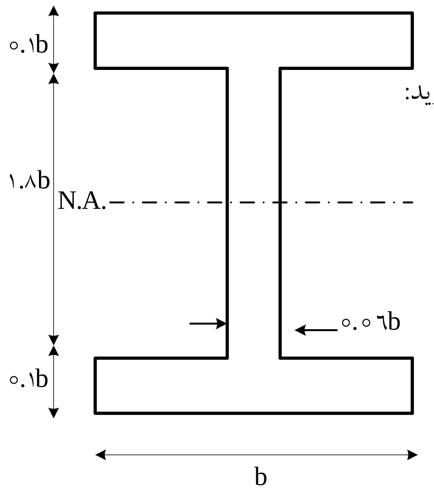
$$\tau = \frac{VQ}{It} = V.\frac{\frac{\cancel{b}}{۲}\left(\frac{h^۲}{۴} - y^۲\right)}{\frac{bh^۳}{۱۲}.\cancel{b}} = \frac{۶V}{bh^۳}.\left(\frac{h^۲}{۴} - y^۲\right)$$

$$\Rightarrow \quad \tau_{max} = \tau|_{y=۰} = \frac{\sigma v}{bh^۳}.\frac{h^۳}{۶} = \frac{۳}{۲}\frac{v}{bh}$$

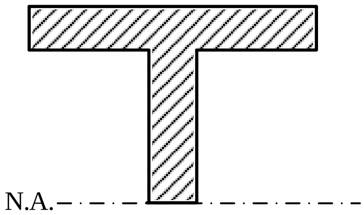
پس اگر $\tau_{ave} = \frac{V}{A} = \frac{V}{bh}$ باشد، ملاحظه می‌شود تنش برشی ماکزیمم در مقطع مستطیل ۱/۵ برابر تنش برشی میانگین می باشد. برخلاف خمش (ناشی از خمش خالص)، مقدار تنش برشی روی محور خنثی ماکزیمم و در تارهای بالاو پایین مقطع صفر می باشد.

در مقاطع I شکل سهم بال ها در تحمل برش بسیار ناچیز است و عملاً جان اکثر برش وارده به تیر را تحمل می کند. بهمین دلیل درمحاسبات عملی، فقط جان را در برابر برش در نظر می گیرند.

مثال) مقدار τ_{max} و مقدار نیروی قابل تحمل توسط جان را در مقطع روبرو به دست آورید:



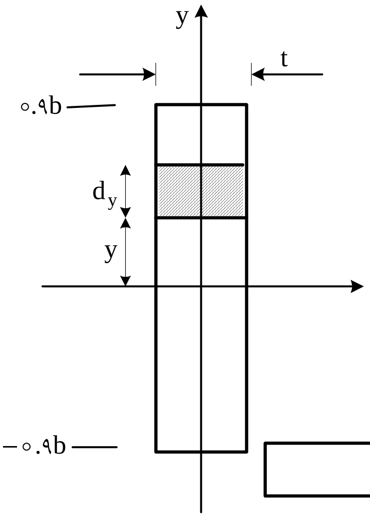
$$I = \frac{b(۲b)^۳}{۱۲} - \frac{(b - ۰/۰۶b)(۱/۸b)^۳}{۱۲} \simeq ۰/۲۱b^۴$$



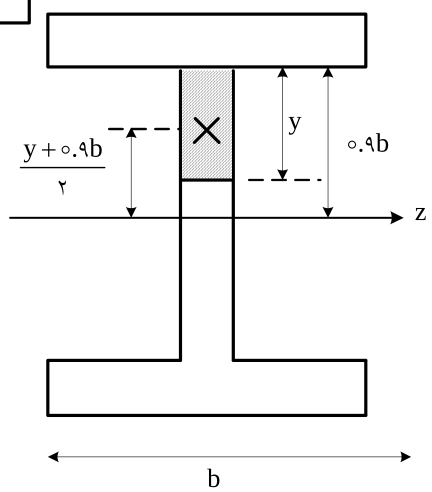
(هاشور خورده) $\tau_{max} = \tau\big|_{N.A.} = \dfrac{VQ}{It}$

$$\Rightarrow \tau_{max} = \frac{V}{(0.21b^4)}.[(b\times 0.1b)\times 0.95b + (0.9b)(0.06b)(0.45b)] \quad \Rightarrow \quad \tau_{max} = 9.47\frac{V}{b^2}$$

برای محاسبه نیروی قابل تحمل توسط جان (V_W) داریم:



$$V_W = \int_{Aw} \tau dA, dA = tdy \;\; , \tau = \frac{VQ}{It} \Rightarrow V_W = \int_{-0.9}^{0.9b} \frac{V.Q}{I\cancel{t}}.\cancel{t}dy = \frac{V}{I}\int_{-0.9b}^{0.9} Qdy$$

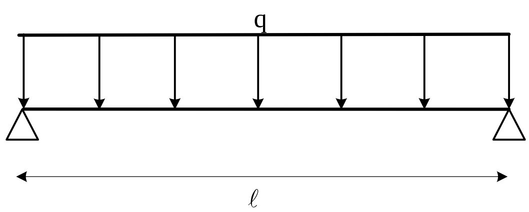


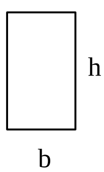
$$= \frac{V}{I}\int_{-0.9b}^{0.9b}\left[(0.095b^3) + 0.06b(0.9b - y)\left(\frac{y+0.9b}{2}\right)\right]d_y \Rightarrow$$

$$V_W = \frac{V}{I}\Big|0.338b^3y - 0.01by^3\Big|_{-0.9b}^{0.9b} = \frac{V}{0.21b^4}\times 0.20b^4 = 0.95V$$

همانطور که ملاحظه می شود ۹۵٪ نیروی برشی توسط جان مقطع I شکل تحمل می شود.

مثال) در شکل زیر l را چنان تعیین کنید که تنش های خمشی و برشی، هر دو با هم به مقدار مجاز خود برسند:



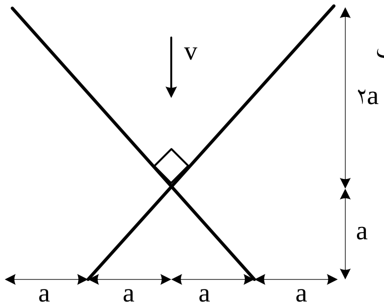


$$M_{max} = \frac{ql^2}{8} \Rightarrow \sigma_{max} = \frac{M}{S} = \frac{\frac{ql^2}{8}}{\frac{bh^2}{6}} = \frac{3}{4}\frac{ql^2}{bh^2}$$

$$V_{max} = \frac{ql}{2} \Rightarrow \tau_{max} = \frac{3}{2}\frac{V_{max}}{bh} = \frac{3}{2}\frac{ql}{2}.\frac{1}{bh} = \frac{3}{4}\frac{ql}{bh}$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_{max}}{\tau_{max}} = \frac{l}{h}$$

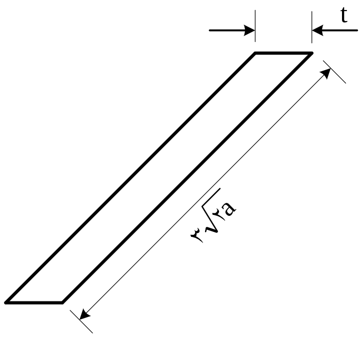
با توجه به رابطه به دست آمده مشاهده می شود که هر چه طول تیر در مقایسه با عمق مقطع آن افزایش یابد، تنش خمشی از تنش برشی بزرگتر خواهد شد و بالعکس.



مثال) (کنکور ارشد ۸۴): مقطع تیری فلزی از ورق با ضخامت نازک t ساخته شده است بر اثر برش V، حداکثر تنش در ورق ها چقدر است؟

۱) $\frac{V}{6at}$ ۲) $\frac{V}{4\sqrt{2}at}$ ۳) $\frac{V}{4at}$ ۴) $\frac{V}{3\sqrt{2}at}$

حل: گزینه ۲ صحیح است.

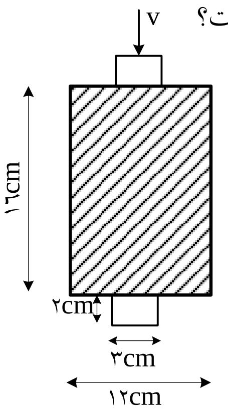


هر ورق نصف نیروی V را تحمل می‌کند. و می‌دانیم که برش ماکزیمم در وسط مقطع مستطیلی اتفاق می‌افتد پس:

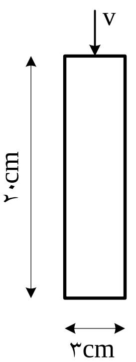
$$\tau_{max} = \frac{3}{2}\frac{V}{bh} = \frac{\cancel{3}}{2} \times \frac{\frac{V}{2}}{\cancel{3}\sqrt{2}a \times t} = \frac{V}{4\sqrt{2}at}$$

نکته: اگر مقطع تیر از دو ماده ساخته شده باشد می توان مثل حالت تحت خمش، مقطع را به مقطع معادل از یک جنس تبدیل نموده و برای این مقطع Q و I را به دست آورد. ولی به خاط داشته باشید که حتما برای پهنای تیر (t) از پهنای واقعی (و نه تبدیل یافته) باید استفاده نمود.

مثال) کنکور ارشد ۷۹): مقطع مختلط از چوب و فلز مطابق شکل مفروض است. اگر دو قطعه فلز $2\times3cm$ در بالا و پایین چوب توسط چسب در تمام طول تماس خود به چوب متصل شده باشند، تنش چسب ناشی از برش $V = 4ton$ چقدر است؟



۱) $36\frac{kg}{cm^2}$ ۲) $9\frac{kg}{cm^2}$ ۳) $2/25\, kg/cm^2$ ۴) 0



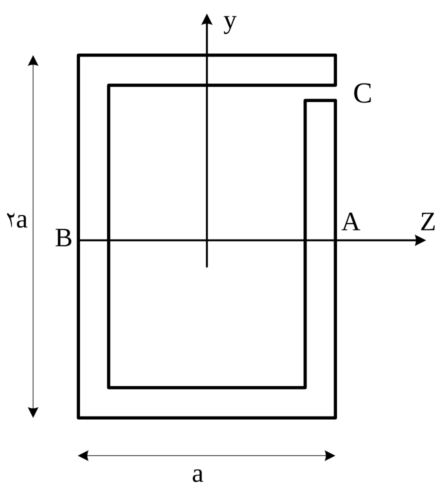
حل: مقطع را تبدیل می‌کنیم به مقطع معادل فلزی:

$$\Rightarrow \ I = \frac{3\times20^3}{12} = 2000\,cm^4$$

$$Q = 2\times3\times(8+1) = 54\,cm^3$$

$$\Rightarrow \ \tau = \frac{vQ}{It} = \frac{4000\times54}{2000\times3} = 36\,kg/cm^2$$

گزینه ۱ صحیح است.

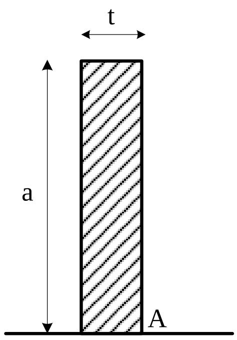


مثال) (کنکور ارشد ۷۹): مقطع جدار نازک شکل زیر در نقطه C باز می‌باشد. ضخامت جدار ثابت است. نیروی برش در امتداد محور y می‌باشد و از مرکز برش عبور می‌کند. نسبت تنش های برشی در نقاط A و B چقدر است؟ $\left(\frac{\tau_a}{\tau_B}\right)$

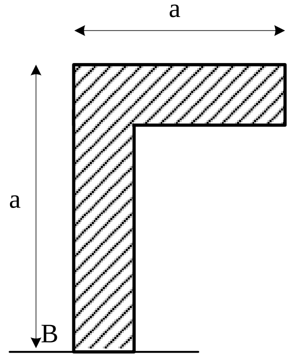
۱) -1 ۲) $-\frac{1}{3}$ ۳) 1 ۴) $\frac{1}{3}$

حل: کافی است که نسبت $\frac{VQ}{It}$ها را محاسبه کنیم ولی از آنجا که V و I و t ثابت می‌باشند

کافی است نسبت $\frac{Q_A}{Q_B}$ به دست آورده شود.

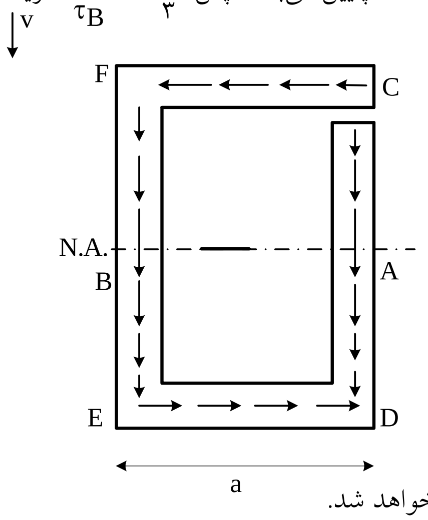


$$Q_A = a.t.\frac{a}{۲} = \frac{۱}{۲}a^۲t$$



$$Q_B = a.t.a + a.t.\frac{a}{۲} = \frac{۳}{۲}a^۲t$$

و اگر نیروی برش قائم به سمت پایین باشد، تنش برشی در A به سمت پایین و در B هم به سمت پایین می‌باشد پس $\frac{\tau_A}{\tau_B} = +\frac{۱}{۳}$ گزینه ٤ صحیح است.

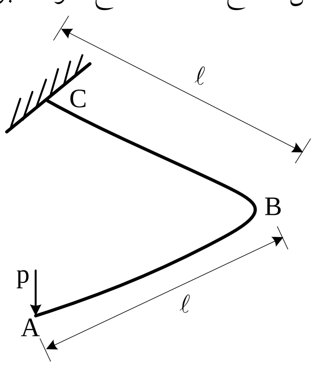


نکته: در مقطع مقابل ابتدا تنش از C به صورت سهمی تا A تغییر می‌کند (در A ماکزیمم است) سپس به صورت سهمی نزول پیدا می‌کند تا در D صفر می‌شود.
در شاخه دیگر مقطع هم تنش از C به صورت خطی افزایش می‌یابد تا به مقدار خود در F برسد سپس به صورت سهمی افزایش می‌یابد تا در B به مقدار ماکزیمم تنش برشی در مقطع برسیم. از B تا E هم به صورت خطی کاهش می‌یابد تا در D به صفر برسد.

مرکز برش:

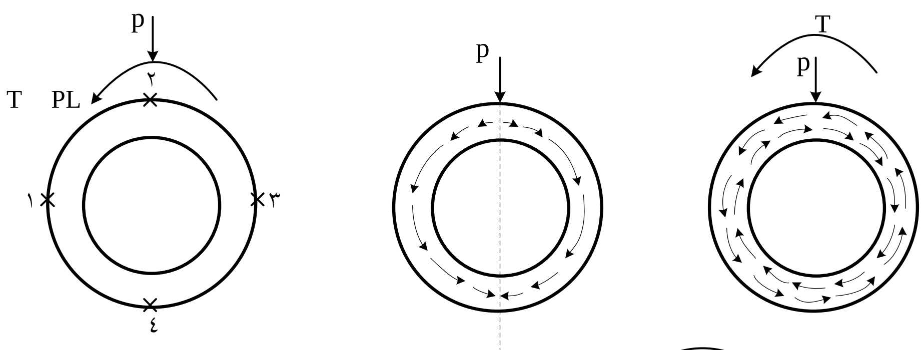
نقطه‌ای است در داخل یا خارج مقطع که اگر برش به آن نقطه وارد شود، مقطع دچار پیچش نخواهد شد.

نکته: – اگر جسم دارای دو محور تقارن باشد، مرکز برش همان مرکز تقارن خواهد بود.
– اگر جسم دارای یک محور تقارن باشد، مرکز برش بر روی آن محور و معمولا در محل تقاطع اعضاء مقاطع خواهد بود.
– برای تشخیص موقعیت مرکز برش، کافی است با توجه به روند کاهش یا افزایش Q جهت تنش‌ها روی اعضای مقطع مشخص شود.
سپس باید تعیین نمود که مرکز برش باید در سمت چپ یا راست و یا داخل مقطع باشد تا این نیروها بتوانند همدیگر را خنثی کنند.



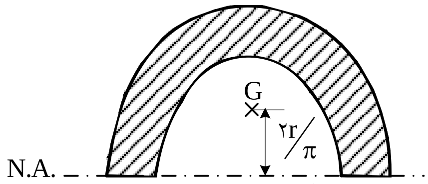
مثال) در سازه شکل روبه‌رو که در صفه xoy قرار دارد بار P در راستای Z در نقطه A به آن اعمال می‌شود اگر مقطع جسم لوله باشد، مشخص کنید مقدار ماکزیمم تنش برشی در مقطع چقدر است؟ (شعاع = r و ضخامت = t)

حل: مقدار ماکزیمم تنش برشی در C (تکیه‌گاه) رخ می‌دهد زیرا در آنجا هم برش و هم پیچش داریم:



همان‌طور که از اشکال بر می‌آید، تنش برشی حداکثر، در نقطه ۱ روی می‌دهد، زیـرا تـنش‌هـای برشـی ناشـی از V و T در نقطـه ۱ بـا هـم، هم‌جهت هستند. (تنش برشی ناشی از پیچش در کل مقطع یکسان و ثابت است ولی تنش برشی ناشی از V بـر روی محـور خنثـی مـاکزیمم است.)

$$\tau_V=\frac{VQ_{max}}{It'}=\frac{P\times\frac{1}{2}\times 2\pi rt\times\frac{2r}{\pi}}{\left(\pi r^3 t\right)\left(2t\right)}=\frac{P}{\pi rt}$$



$$\tau_T=\frac{T}{2A_m t}=\frac{PL}{2\pi r^2 t}$$

$$\Rightarrow\ \tau_{max}=\tau_V+\tau_T=\frac{P}{\pi rt}+\frac{PL}{2\pi r^2 t}$$

نکته: - در مقطع مستطیل داشتیم (تحت برش خالص):

$$\tau_{max}=\frac{3}{2}\frac{V}{bh}=\frac{3}{2}\tau_{ave}$$

- در مقطع حلقوی به دست آوردیم:

$$\tau_{max}=\frac{V}{\pi rt}=2\tau_{ave}$$

- در مقطع دایروی داریم: (به قطر r)

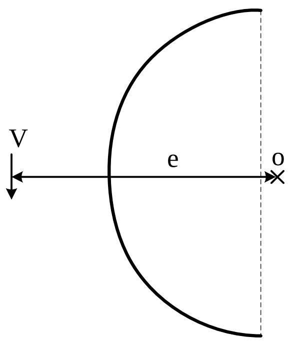
$$\tau_{max}=\frac{4V}{3\pi r^2}=\frac{4}{3}\tau_{ave}$$

- در مقطع قوطی (مربع) داریم (به ضلع a و ضخامت t)

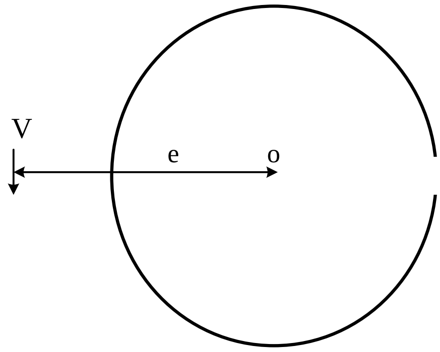
$$\tau_{max}=\frac{9V}{16at}=\frac{9}{4}\tau_{ave}$$

* بهتر است فرمول‌های فوق به خاطر سپرده شود*

نکته: موقعیت مرکز برش مقاطع زیر را به خاطر بسپارید:



$e=\frac{4r}{\pi}$



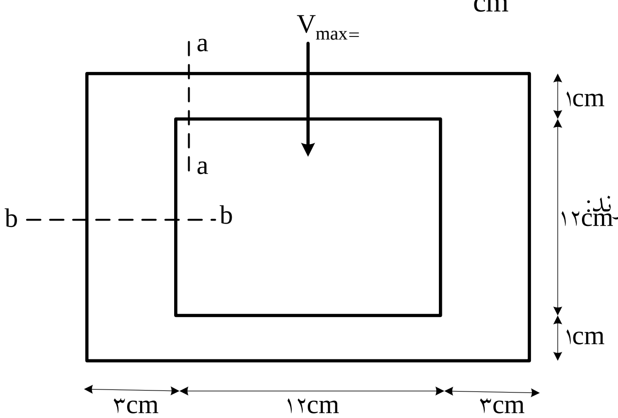
$e=2r$

نکته: تنش برش ماکزیمم در مقاطع مثلثی و لوزی روی محور خنثی اتفاق نمی‌افتد و باید رابطه $\frac{dQ}{dt}=0$ ارضـا شـود تـا موقعیـت محل بش ماکزیمم به دست بیاید.

مثال) (کنکور ارشد ۸۱): در مقطع شکل مقابل چنانچه تنش برش مجاز مصالح $960\frac{kg}{cm^2}$ باشد ظرفیت بـرش قـائم برحـسب ton کدام است؟

۱) ٤۸/۱ ۲) ۵۸/۸

۳) ٦۱/۵ ٤) ۱۱۸/۲

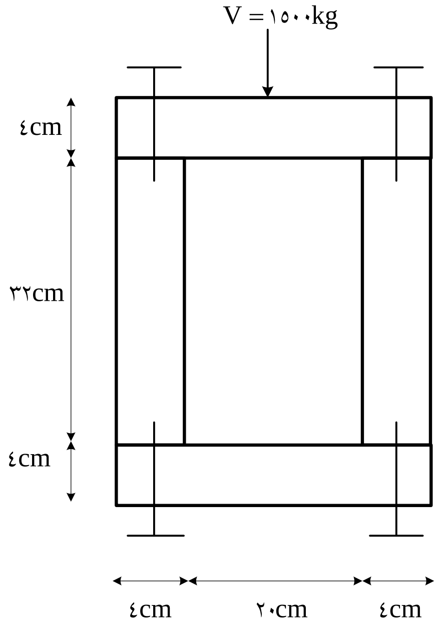


حل: از آنجا که ضخامت ثابت نیست باید دو مقطع برای تنش مجاز چک شوند: مقطع a-a (چون ضخامت کمتری دارد) و مقطع b-b (چون Q بیشتری دارد)

$$\left.\begin{array}{l}\left(\dfrac{Q}{t}\right)_{a-a}=\dfrac{۶\times۱\times۶/۵}{۱}=۳۹cm^{۲}\\ \left(\dfrac{Q}{I}\right)_{b-b}=\dfrac{۶\times۱\times۶/۵+۷\times۳\times۳/۵}{۳}=۳۷/۵cm^{۲}\end{array}\right\}\Rightarrow\left(\dfrac{Q}{t}\right)_{max}=۳۹cm^{۲}$$

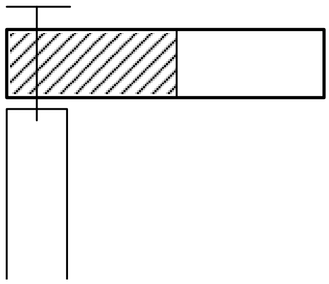
$$I=\frac{۱}{۱۲}\left(۱۸\times۱۴^{۳}-۱۲\times۱۲^{۳}\right)=۲۳۸۸cm^{۴}\Rightarrow\ \tau=\tau_{all}=۹۶۰=\frac{VQ}{It}=\frac{V\times۳۹}{۲۳۸۸}\ \Rightarrow\ V_{all}=۵۸/۸$$

* به ازای $\left(\dfrac{Q}{t}\right)_{max}$ مقدار V می‌نیمم خواهد شد.



مثال) در تیری با مقطع روبه‌رو، اگر نیروی برشی مجاز هر میخ 250kg باشد. حداکثر فاصله بین میخ‌ها چقدر می‌تواند باشد؟

حل در این‌گونه مسائل ابتدا باید تشخیص داد، هر میخ چه Qای را تحمل می‌کند سپس با محاسبه Q و از روی آن شاربرشی (q)، مقدار فاصله مجاز میخ (یا پیچ) به دست می‌آید: در این مسأله هر میخ باید نصف Q الوار بالایی (یا پایینی) را تحمل می‌کند.

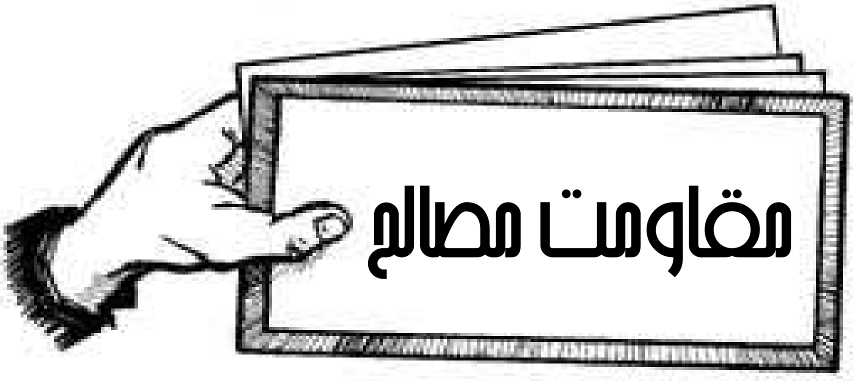


$$\Rightarrow\ Q=\left(۴+\frac{۲۰}{۲}\right)\times\left(\frac{۳۲}{۲}+\frac{۴}{۲}\right)=۲۵۲cm^{۳}$$

$$I=\frac{۱}{۲}\left(۲۸\times۴۰^{۳}-۲۰\times۳۲^{۳}\right)=۹۴۷۲۰cm^{۴}$$

$$\Rightarrow\ q=t\tau\frac{VQ}{I}=\frac{۱۵۰۰\times۲۵۲}{۹۴۷۲۰}=۴kg/cm$$

$$\Rightarrow\ q\times \text{فاصله مجاز میخ‌ها}=F_{all}\ \Rightarrow\ \text{فاصله مجاز میخ‌ها}=\frac{۲۵۰}{۴}=۶۲/۵cm$$

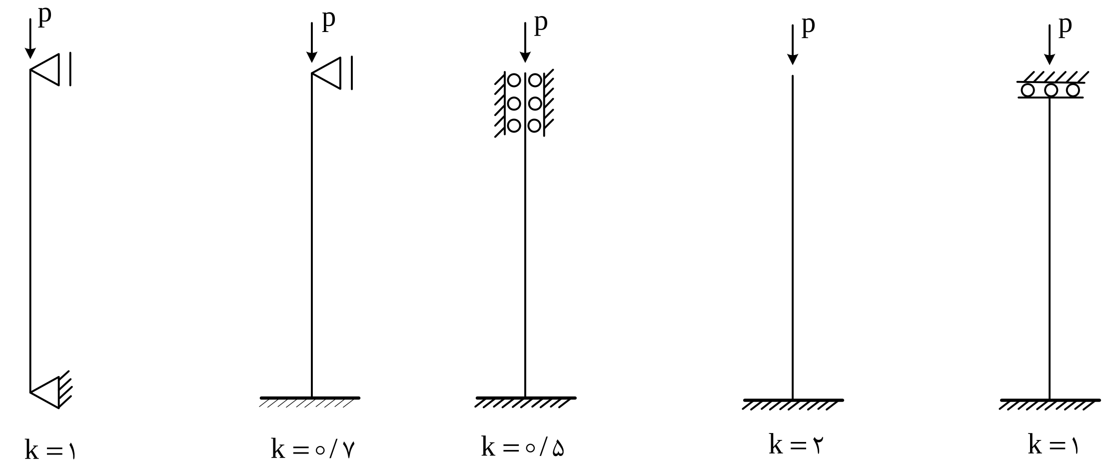


ناپایداری سازه‌ها- کمانش:

در اعضای فشاری (مثل ستون‌ها)، اگر بار از حدی بیشتر شود، عضو باربری خود را از دست داده و عملاً دیگر نمی‌تواند باری را تحمل کند به این بار حدی بار بحرانی یا P_{cr} می‌گویند.

بار بحرانی در ستون‌های ارتجاعی برابر است با:
$$P_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{(kl)^2}$$

که در این رابطه EI صلبیت خمشی، l طول عضو و k ضریب طول موثر است که تابعی است از شرایط تکیه‌گاهی دو سر عضو. اشکال زیر را حتماً به خاطر بسپارید: (همه میله‌ها دارای طول l و صلبیت EI می‌باشند)



با توجه به اشکال فهمیده می‌شود که، هر چه دو سر ستون نسبت به حرکت جانبی مقیدتر باشند، k عددی کوچکتر و در نتیجه بار بحرانی ستون عددی بزرگتر خواهد بود. در وضعیت‌های موجود، ستون طره کمترین و ستون دو سر گیردار بیشترین بار بحرانی را دارا می‌باشند.

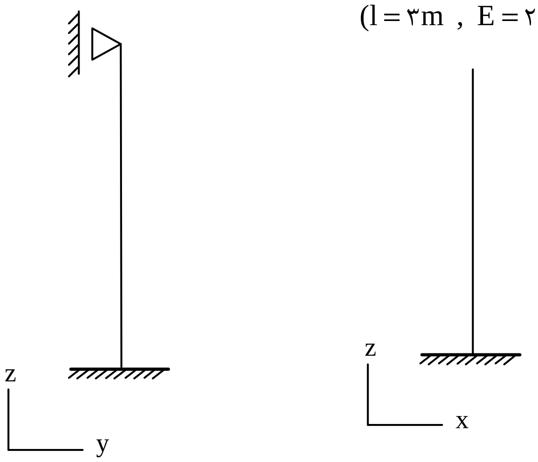
اگر نسبت $\left(\frac{kl}{r}\right)$ را ضریب لاغری عضو بنامیم، تنش متناظر بار بحرانی را به صورت زیر می‌توانیم نمایش دهیم:

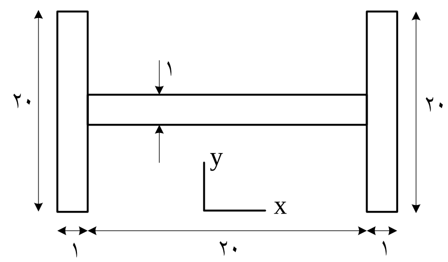
(r: شعاع ژیراسیون مقطع = $\sqrt{\frac{I}{A}}$)
$$\sigma_{cr}=\frac{P_{cr}}{A}=\frac{\pi^2 EI}{A(kl)^2}=\frac{\pi^2 E}{\left(\frac{kl}{r}\right)^2}$$

با توجه به موارد فوق می‌توان نتیجه گرفت که باربری یک عضو فشاری تابعی است از مشخصات مادی (E)، مشخصات هندسی مقطع و (r,I)، طول عضو (l) و شرایط تکیه گاهی دو سر عضو (k).

- هرچه مصالح مقطع، از مرکز مقطع دورتر چیده شوند، مقطع دارای شعاع ژیراسیون بالاتر و باربری بیشتری خواهد بود. به عنوان مثال مقاطع لوله و قوطی، مقاطع به مراتب پر بازده‌تری نسبت به مقاطع توپر مثل دایره و مستطیل، در ستون‌ها می‌باشند. (البته با مساحت‌های مساوی)

مثال) بار بحرانی ستون زیر را به دست آورید: $(l=3\text{m}\ ,\ E=2\times10^{6}\ \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2})$





حل) همان‌طور که در شکل دیده می‌شود شرایط انتهایی دو سر عضو در راستاهای x و y با هم متفاوت است:

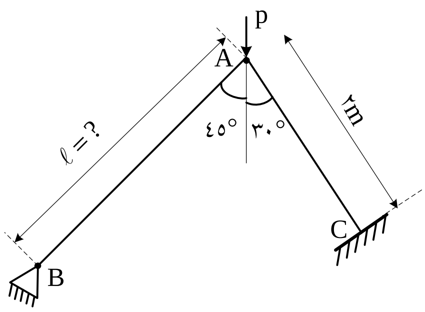
$k_y=2$ (خمش در راستای y) $\qquad\qquad$ $k_x=0/7$ (خمش در راستای محور x)

$$I_x=\frac{1}{12}\left(2\times1\times20^3+20\times1^3\right)=1335\ \text{cm}^4$$

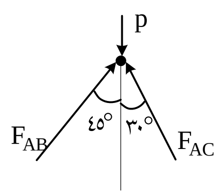
$$I_y=\frac{1}{12}(20\times22^3-19\times20^3)=5080\ \text{cm}^4$$

$$P_{cr}=\min\begin{cases}(P_{cr})_x=\dfrac{\pi^2EI_x}{(k_xl)^2}=\dfrac{\pi^2\times2\times10^6\times1335}{(0/7\times300)^2}=597/5\ \text{ton}\\[2ex](P_{cr})_y=\dfrac{\pi^2EI_y}{(k_yl)^2}=\dfrac{\pi^2\times2\times10^6\times5080}{(2\times300)^2}=278/5\ \text{ton}\end{cases}\Rightarrow P_{cr}=278/5\ \text{ton}$$

مثال) برای این که بار P ماکزیمم شود، طول l چقدر باید باشد: (EI ثابت است).



حل) از تعادل نیروها در گره A داریم:



$$\sum F_x=0\rightarrow\frac{\sqrt2}{2}F_{AB}=\frac{1}{2}F_{AC}\Rightarrow F_{AC}=\sqrt2F_{AB}$$

$$\sum F_y=0\rightarrow\frac{\sqrt2}{2}F_{AB}+\frac{\sqrt3}{2}F_{AC}=P\Rightarrow F_{AB}=0/52P\quad F_{AC}=0/73P$$

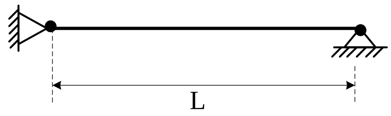
برای این که بار P ماکزیمم مقدار را بتواند اختیار کند باید بار کمانش هر دو میله یکسان باشد (با افزایش P هر دو با هم شروع به کمانش کنند)

$$\Rightarrow F_{AB}=(P_{cr})_{AB}\Rightarrow0/52P=\frac{\pi^2EI}{l^2}\rightarrow P=\frac{\pi^2EI}{(0/52)l^2}\qquad(1)$$

$$F_{AC}=(p_{cr})_{AC}\Rightarrow0/73p=\frac{\pi^2EI}{(0/7\times2)^2}\rightarrow P=\frac{\pi^2EI}{1/43}\qquad(2)$$

$$(1),(2)\Rightarrow\frac{\pi^2EI}{0/52l^2}=\frac{\pi^2EI}{1/43}\Rightarrow l=1/66\ \text{m}$$

مثال) (کنکور ارشد ۸۱): مقدار تغییر درجه حرارتی (ΔT) که قادر است ستون دو سر مفصلی به طول L و ضریب انبساط حرارتی α را به حد کمانش برساند کدام است؟



۱) $\frac{\pi^2 EI}{\alpha l^2}$ ۲) $\frac{2\pi^2 I}{A\alpha L^2}$ ۳) $\frac{\pi^2 I}{A\alpha L^2}$ ۴) $\frac{\pi^2 I}{2A\alpha L^2}$

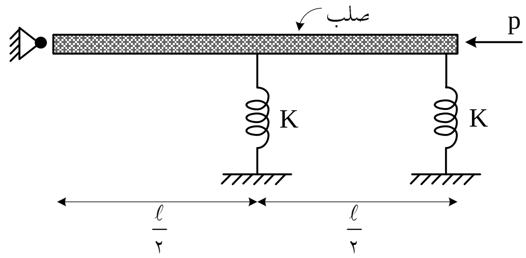
حل) سازه نامعین است و با افزایش درجه حرارت، در آن نیرو و تنش می‌افتد. با افزایش درجه حرارت به میزان ΔT داریم:

$\Delta l = \alpha l \Delta T \Rightarrow$ عکس‌العمل افقی تکیه گاه‌ها $R = AE\varepsilon = AE\frac{\Delta l}{l} = AE\frac{\alpha l \Delta T}{l} = AE\alpha\Delta T$

$R = R_{cr}:\ A\cancel{E}\alpha\Delta T = \frac{\pi^2 \cancel{E} I}{l^2} \rightarrow \Delta T = \frac{\pi^2 I}{A\alpha l^2}$

گزینه ۳ صحیح است.

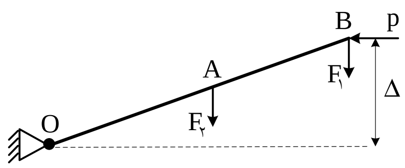
مثال) (کنکور ارشد ۷۴): بار بحرانی شکل مقابل چقدر است؟



۱) kl ۲) $\frac{5kl}{4}$

۳) $\frac{3kl}{4}$ ۴) ∞

حل) اگر مطابق شکل، فرض کنیم، نقطه B بر اثر اعمال بار P جابجایی جانبی Δ به سمت بالا (یا پایین) داشته باشد داریم:



$F_1 = 2F_2 = k\Delta$

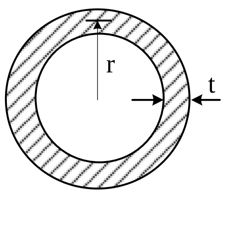
$\sum M_o = 0 \Rightarrow F_1(l) + F_2\left(\frac{l}{2}\right) = P.\Delta$

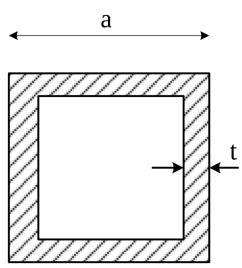
$\Rightarrow k\cancel{\Delta}l + k\frac{\cancel{\Delta}}{2}.\frac{l}{2} = p\cancel{\Delta} \Rightarrow p_{cr} = \frac{5kl}{4}$

یعنی اگر بار p کمتر از این مقدار باشد، سازه دارای تعادل پایدار بوده و پس از هر تغییر شکلی به حالت اول خود باز می‌گردد ولی اگر بار بیشتر از مقدار فوق باشد تعادل ناپایدار خواهد بود و سازه به حالت اول خود باز نخواهد گشت.

مثال) مطلوبست مقایسه دو مقطع لوله و قوطی در کمانش (با ضخامت و مساحت مساوی)

$A_{\text{لوله}} = A_{\text{قوطی}} \Rightarrow 2\pi rt = 4at \Rightarrow a = \frac{\pi r}{2}$





$\frac{(P_{cr})_{\text{لوله}}}{(P_{cr})_{\text{قوطی}}} = \frac{I_{\text{لوله}}}{I_{\text{قوطی}}} = \frac{\pi r^3 \cancel{t}}{\frac{2}{3}a^3\cancel{t}} = \frac{\pi r^3}{\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{\pi r}{2}\right)^3} = \frac{\pi \cancel{r^3}}{\frac{2}{3}\times\frac{\pi^3 \cancel{r^3}}{8}} =$ ۱/۲۲

روش‌های انرژی:

در حالت کلی، انرژی کرنش در واحد حجم برابر است با:

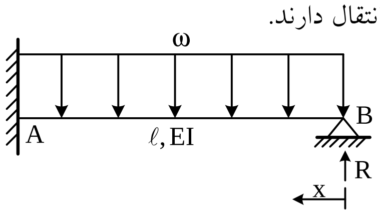
$$U=\frac{۱}{۲E}\left[\sigma_x^۲+\sigma_y^۲+\sigma_z^۲-۲\nu(\sigma_x\sigma_y+\sigma_x\sigma_z+\sigma_y\sigma_z)\right]+\frac{۱}{۲G}\left(\tau_{xy}^۲+\tau_{xz}^۲+\tau_{yz}^۲\right)$$

– انرژی، در سازه‌ای که n عضو دارد و تحت بار محوری N، لنگر خمشی M، نیروی برشی V و لنگر پیچشی T قرار دارد عبارتست از:

$$U=\sum_{i=۱}^{n}\left[\int_{li}\frac{N^۲dx}{۲EA}+\int_{li}\frac{M^۲dx}{۲EI}+\int_{li}\frac{f_sV_s^۲dx}{۲GA}+\int_{li}\frac{T^۲dx}{۲GJ}\right]$$

– **قضیه حداقل کار:** اگر انرژی سازه بر حسب یک مجهول (مثلاً یک قید تکیه‌گاهی، نوشته شود، مقدار آن مجهول از می‌نیمم کردن انرژی سازه به دست می‌آید. به عنوان مثال در سازه‌ای که فقط خمش داریم، مقدار X_i (مجهول مسأله) از رابطه: $\sum_{i=۱}^{n}\int_{li}\frac{M\left(\frac{\partial M}{\partial X_i}\right)dx}{EI}=\circ$ تعیین می‌شود.

– انرژی کرنش اجسام صلب صفر است، چون هیچ گونه تغییر شکل کرنشی ندارند و فقط دوران و انتقال دارند.



مثال) عکس‌العمل تکیه‌گاه B را به دست آورید:

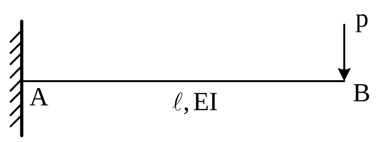
حل) اگر عکس‌العمل تیکه‌گاه B را R فرض کنیم ولنگر را بر حسب آن بنویسیم، خواهیم داشت:

$$M(x)=Rx-\frac{\omega x^۲}{۲}$$

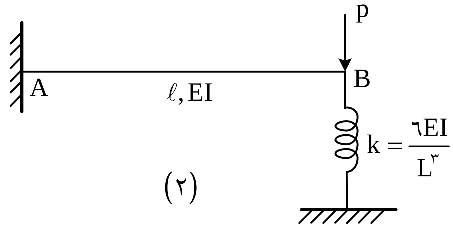
طبق قضیه حداقل کار:

$$\int_\circ^l\frac{M\left(\frac{\partial M}{\partial R}\right)dx}{EI}=\circ\rightarrow\int_\circ^l\frac{\left(Rx-\frac{\omega x^۲}{۲}\right)(x)dx}{EI}=\circ\Rightarrow\left(R\frac{l^۳}{۳}-\frac{\omega}{۲}\frac{l^۴}{۴}\right)=\circ\rightarrow R=\frac{۳}{۸}\omega l$$

مثال) انرژی کرنشی دو تیر زیر را با هم مقایسه نمائید:



(۱)



(۲)

حل) در تیر دوم نیروی P به نسبت سختی تیر (در نقطه B) و سختی فنر بینشان تقسیم می‌شود (P' سهم‌تیر و P" سهم فنر)

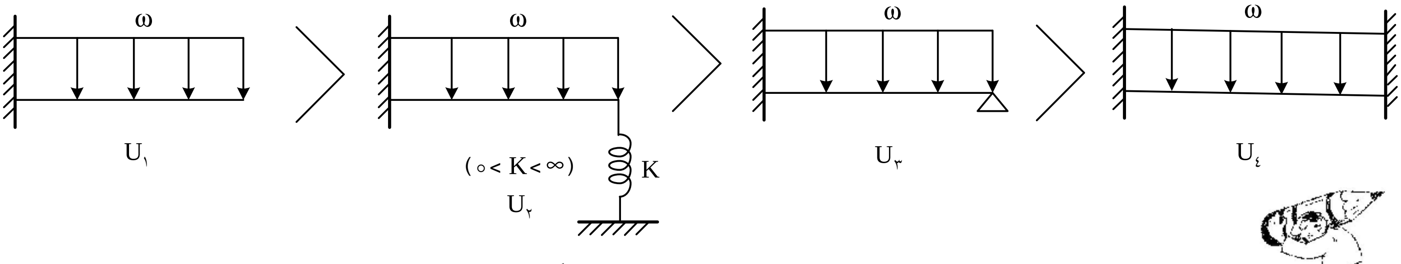
$$U_۱=\frac{۱}{۲}P\left(\Delta_B\right)^۲=\frac{۱}{۲}P.\frac{Pl^۳}{۳EI}=\frac{P^۲l^۳}{۶EI}$$

$$U_۲=\frac{۱}{۲}P'\left(\Delta_B\right)^۲+\frac{۱}{۲}P''(\Delta_{\text{فنر}})^2$$

$$P'=\frac{\text{سختی تیر (در نقطه B)}\times P}{\text{مجموع سختی تیر و سختی فنر}}=\frac{\frac{۳EI}{l^۳}}{\frac{۳EI}{l^۳}+k}\times P=\frac{۳EI}{۳EI+۶EI}\times P=\frac{P}{۳}\Rightarrow P''=\frac{۲P}{۳}$$

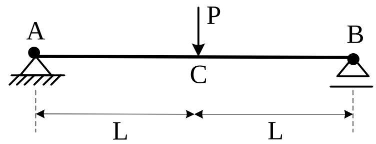
$$\Rightarrow U_۲=\frac{۱}{۲}\left(\frac{P}{۳}\right)\left(\frac{\left(\frac{p}{۳}\right)l^۳}{۳EI}\right)+\frac{۱}{۲}\left(\frac{۲P}{۳}\right)\left(\frac{\frac{۲P}{۳}}{\frac{۶EI}{l^۳}}\right)=\frac{p^۲l^۳}{۱۸EI}\Rightarrow\frac{U_۱}{U_۲}=۳$$

– همان‌طور که در مثال قبل هم مشاهده می‌شود، هرچه سازه مقیدتر باشد (عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی بیشتری داشته باشد) انرژی موجود در آن کمتر خواهد بود. به عنوان مثال ترتیب انرژی در تیرهای زیر را در نظر بگیرید (EI, l برای همه اعضاء یکسان است.)



مثال) (کنکور ارشد ۸۲): سطح مقطع و جنس تیرهای زیر یکسان می‌باشد. اگر انرژی کرنشی ذخیره شده در شکل (الف) مساوی U باشد انرژی کرنش شکل (ب) چقدر است؟

(الف)



(ب)

۱) U ۲) 2U ۳) $\frac{U}{2}$ ٤) 4U

حل

$$\text{(الف)}: \ U = \frac{1}{2}P(\Delta_B)^2 = \frac{1}{2}P\left(\frac{pl^3}{3EI}\right) = \frac{p^2l^3}{6EI}$$

$$\text{(ب)}: \ U = \frac{1}{2}P(\Delta_C)^2 = \frac{1}{2}P\left(\frac{p(2l)^3}{48EI}\right) = \frac{P^2l^3}{12EI}$$

$$\Rightarrow U_{\text{ب}} = \frac{1}{2}U$$

گزینه ۳ صحیح است.