فصل دوم: کلیات

تعریف استاتیک: بررسی نیرو ها روی اجسام ساکن بدون در نظر گرفتن آثار نیرو ها

تعریف مقاومت مصالح: بررسی نیرو ها روی اجسام با در نظر گرفتن آثار نیرو ها

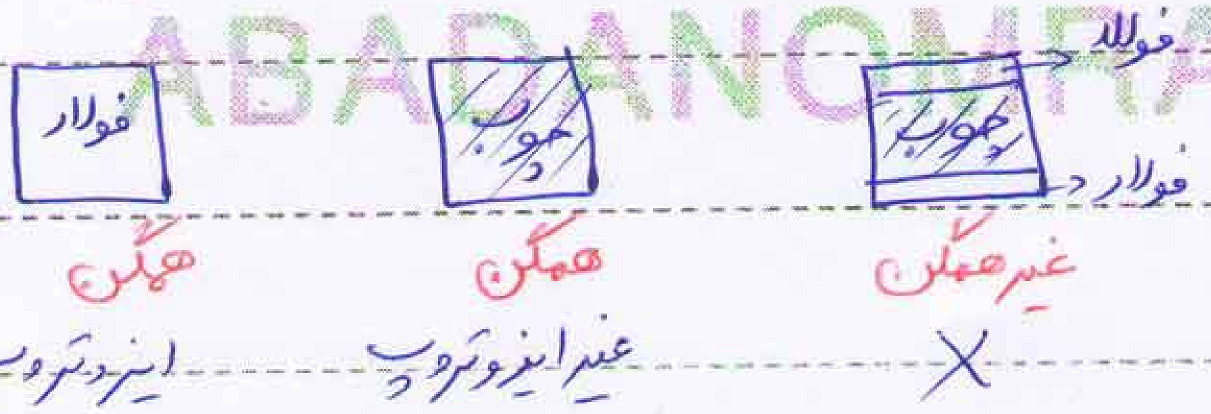
تعریف جسم صلب: جسمی است که ذرات آن نسبت به هم قادر به جابجایی نسبت به هم نباشند

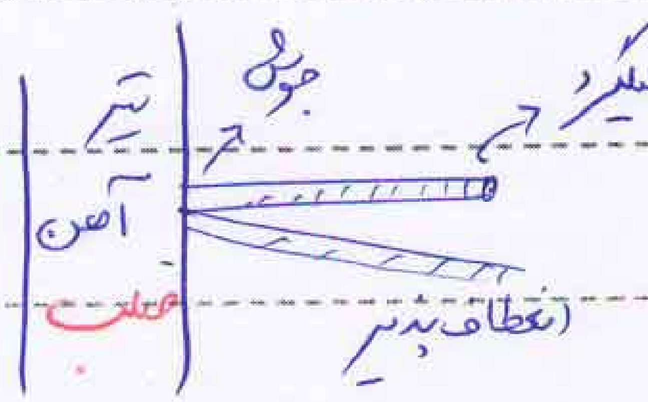
تعریف جسم انعطاف پذیر: جسمی است که ذرات آن نسبت به هم قادر به جابجا شدن باشند

* صلبیت اجسام نسبت به هم نسبی می باشد. یعنی می توان یک جسم را نسبت به جسم دیگر صلب یا انعطاف پذیر در نظر گرفت)

تعریف جسم همگن: جسمی که خواص آن در تمام نقاط ماده یکسان باشد

تعریف جسم ایزوتروپ: جسمی است که خواص آن در یک نقطه در جهات مختلف یکسان باشد





*تعریف رفتار الاستیک : (رفتار ارتجاعی - رفتار کشسانی)

- رفتاری است که در آن جسم پس از باربرداری به شکل اولیه‌ی خود باز می‌گردد.

*تعریف رفتار پلاستیک : (رفتار غیرارتجاعی - رفتار خمیری)

- رفتاری است که در آن جسم پس از باربرداری به شکل اولیه‌ی خود برنمی‌گردد.

- «نکته» - اگر به مصالح نیروهای بزرگی وارد کنیم وارد پلاستیک می‌شوند ولی به ازای نیروی کوچک رفتار الاستیک دارند.

- فرضیات اولیه در مقاومت مصالح

- روابطی که ما در مقاومت مصالح به دست می‌آوریم زمانی صادق اند که فرضیات زیر برقرار باشد:

۱- اجسام همگن و ایزوتروپ می‌باشند.

۲- مصالح رفتار الاستیک دارند.

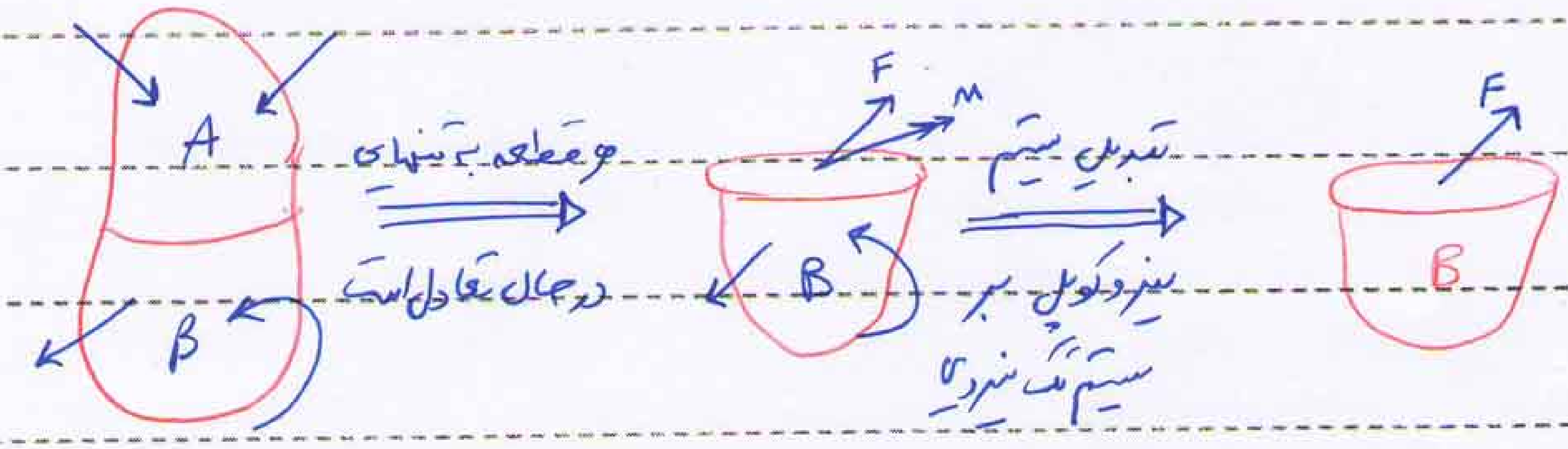
۳- تغییر شکل‌ها کوچک می‌باشند.

۴- رابطه‌ی بین نیرو و تغییر شکل خطی است.

$F = K\Delta$ ← نیرو

عدد ثابت — تغییر شکل

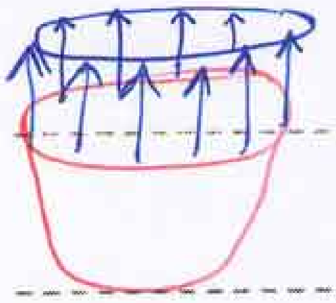
*فصل سوم: آشنایی با مفهوم تنش: «stress»



*تعریف تنش: شدت نیروی داخلی در نقاط مختلف یک سطح تنش نامیده می‌شود.

«نکته»: تنش کمیتی است که برای یک نقطه تعریف می‌گردد.

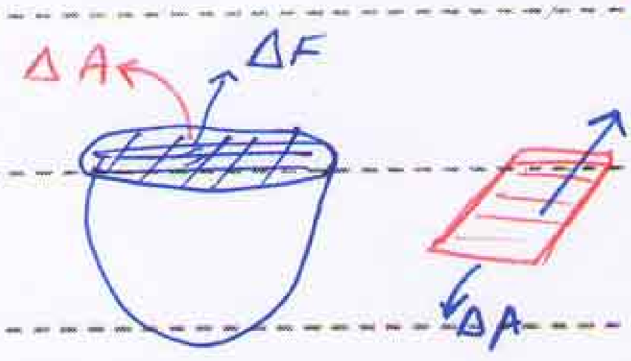
تنش متوسط



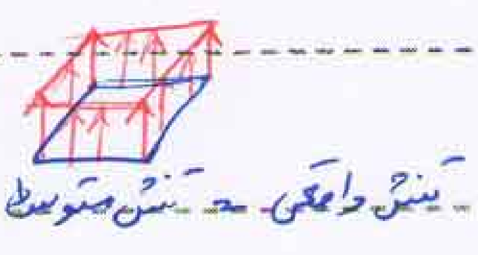
*تعریف تنش متوسط: اگر نیروی F را بطور یکنواخت روی کل سطح پخش کنیم تنش متوسط بدست می‌آید، به عبارت دیگر تنش متوسط نیرو بخش بر سطح مقطع می‌باشد.

$$\text{فرمول تنش متوسط} = \frac{\text{نیرو}}{\text{سطح مقطع}} = \frac{F}{A}$$

*محاسبه‌ی تنش در یک نقطه‌ی دلخواه از سطح مقطع:



$$\text{تنش متوسط} = \frac{\Delta F}{\Delta A}$$



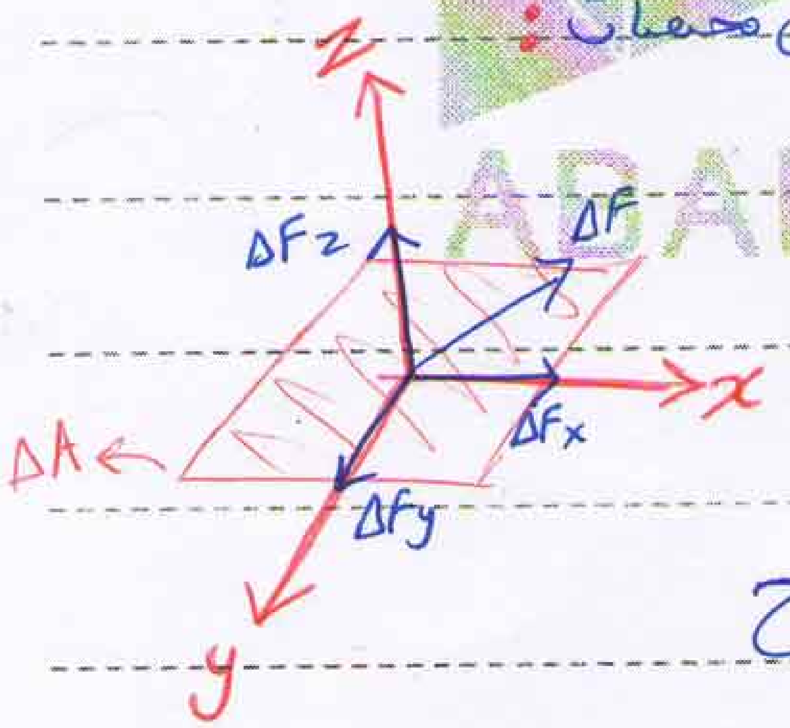
اگر سطح ΔA خیلی کوچک باشد، توزیع تنش واقعی روی آن یکنواخت فرض می‌گردد

بنابراین تنش واقعی و تنش متوسط روی ΔA با هم برابرند.

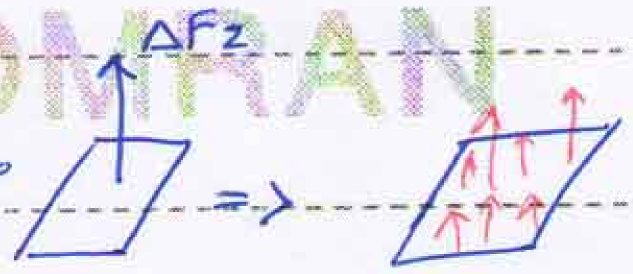
تنش در یک نقطه $\sigma = \lim\limits_{\Delta A \to 0} \dfrac{\Delta F}{\Delta A} = \dfrac{dF}{dA}$ ← نیروی داخلی

نکته: با توجه به مطالب فوق این نتیجه حاصل شد که اولاً تنش برای یک نقطه تعریف می‌گردد، ضمناً تنش در اثر نیروهای داخلی بوجود می‌آید. در فصل‌های آینده هدف بر آن است که تنش ناشی از هر کدام از نیروهای داخلی (محوری، خمشی، برشی و پیچشی) را محاسبه کنیم.

* بدست آوردن مؤلفه‌های تنش در جهت محورهای مختصات:



مؤلفه‌ی تنش در راستای محور z

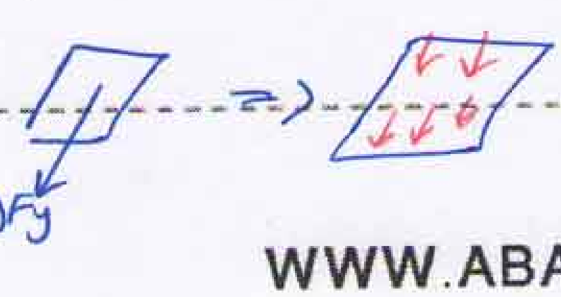


$$\sigma_{zz} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_z}{\Delta A} = \frac{dF_z}{dA}$$

مؤلفه‌ی تنش در راستای محور x

$$\sigma_{zx} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_x}{\Delta A} = \frac{dF_x}{dA}$$

مؤلفه تنش در راستای y



$$\sigma_{zy} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_y}{\Delta A} = \frac{dF_y}{dA}$$

* نحوه ی نمایش تنش :

تاو τ_{zx}

z: نشان دهنده ی بردار نرمال صفحه ای است که تنش بر آن وارد می شود.

x: جهت تنش را نمایش می دهد

* واحد تنش : پاسکال می باشد

$1\ Pa = 1\ \frac{N}{m^2}$

$\frac{kg}{cm^2}$ ، $\frac{N}{mm^2}$ و ...

* دیمانسیون تنش : $\frac{F}{L^2}$ ← واحد نیرو ، ← $(\text{واحد طول})^2$

* انواع تنش : بر دو قسم می باشند:

۱- تنش های برشی : تنش هایی که مماس بر سطح مقطع باشند

مثل τ_{zx} و τ_{zy}

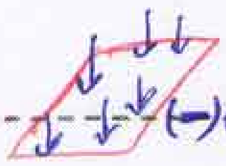
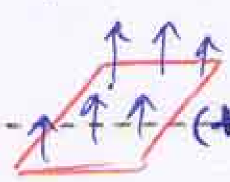
۲- تنش های قائم : (تنش نرمال - تنش عمودی) : تنش هایی که عمود بر سطح مقطع می باشند.

مثل τ_{zz}

① قرارداد : τ (تاو) با حرف یونانی سیگما σ نمایش می دهیم :

$\tau_{zz} = \sigma_z$

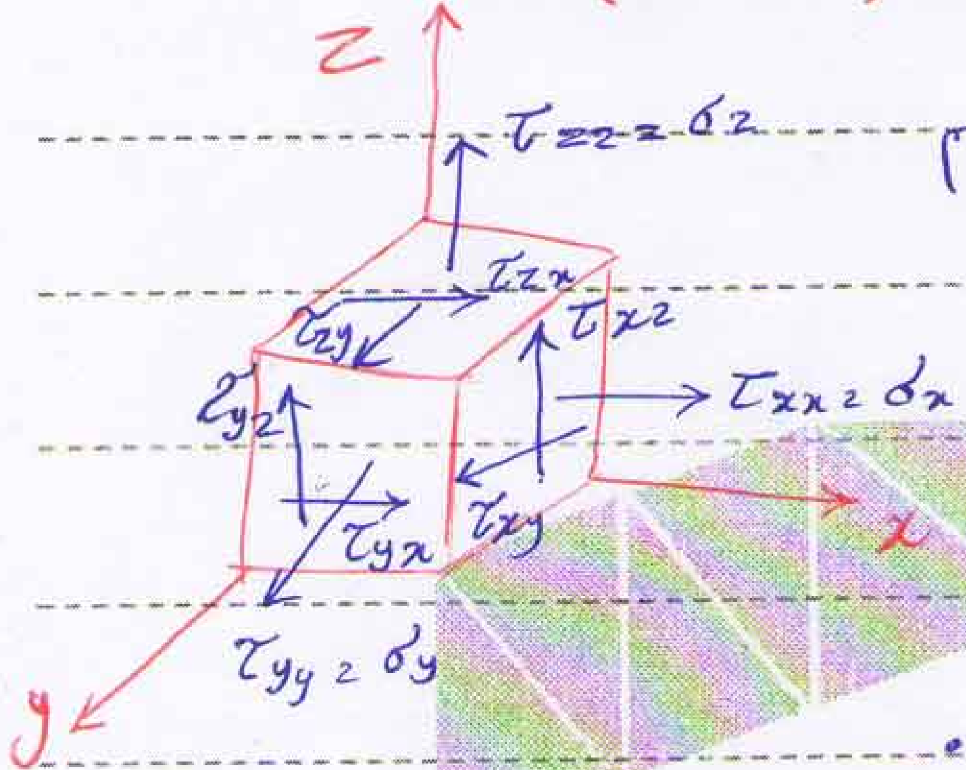
② قرارداد : تنش های قائم می توانند بصورت کششی یا فشاری باشند.

 تنش قائم فشاری (−)  تنش قائم کششی (+)

* تنش‌های کششی رو به خارج و فشاری رو به داخل هستند.

نکته مهم: نیروهای داخلی (محوری، برشی، لنگر خمشی و لنگر پیچشی) دو نوع تنش ایجاد می‌کند تنش قائم و تنش برشی.

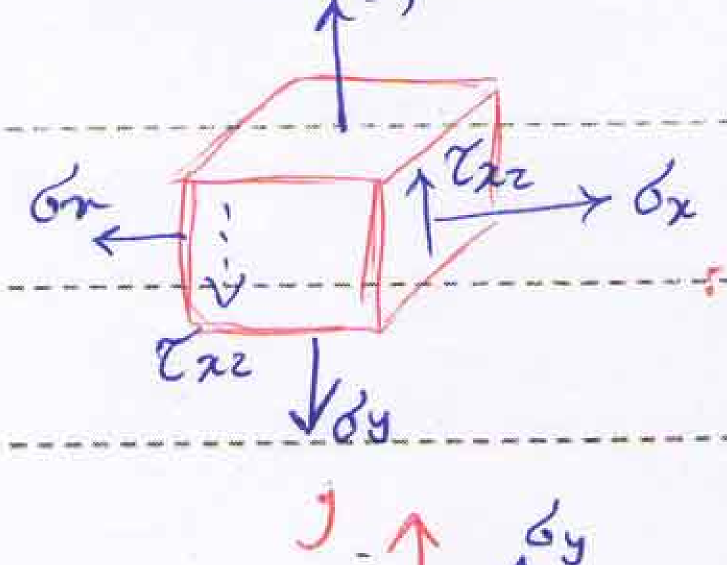
* مؤلفه‌های تنش در یک نقطه در حالت سه بعدی (حالت کلی).



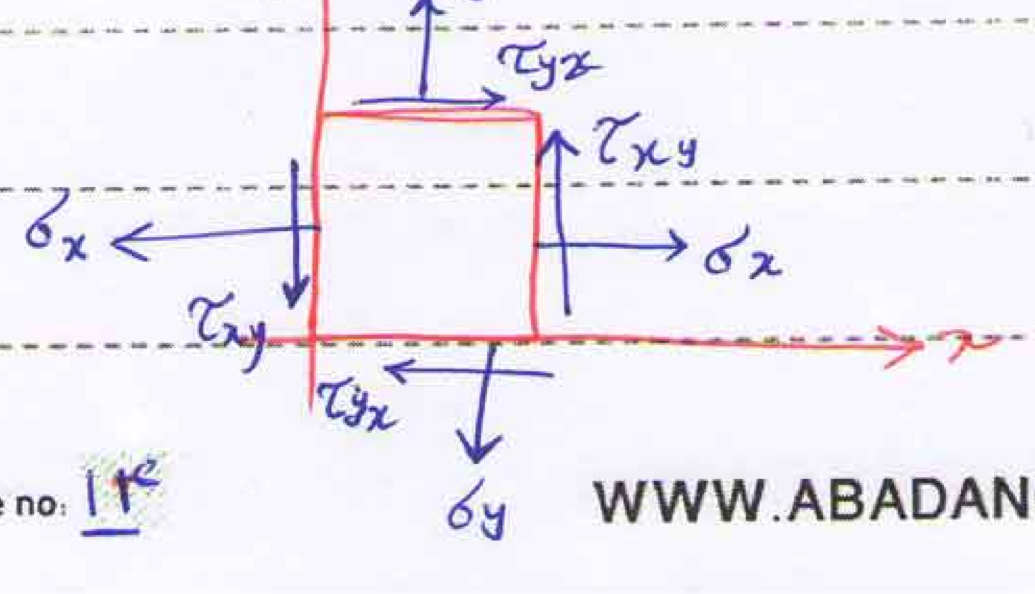
می‌دانیم تنش کمیتی است که برای یک نقطه از جسم تعریف می‌گردد که در حالت سه بعدی یک نقطه از فضا را بصورت المان مکعبی بی‌نهایت کوچک نشان می‌دهند. در مهندسی فرض می‌شود که تنش‌ها در وجوه روبروی هم با یکدیگر برابرند.

بنابراین در حالت سه بعدی تنش در یک نقطه دارای ۹ مؤلفه می‌باشد

تنش‌ها در وجوه مقابل هم با یکدیگر برابرند.



مؤلفه‌های تنش را در یک نقطه در حالت دوبعدی (صفحه‌ای):
یک نقطه از صفحه را با المان مربعی نمایش می‌دهیم.



در حالت دوبعدی تنش دارای ۴ مؤلفه می‌باشد

مفهوم تانسور تنش :

* کمیت اسکالر : کمیتی است که فقط دارای مقدار می باشد مثل : جرم ، دما ، زمان و ...

در ریاضیات کمیت اسکالر با یک ماتریس 1×1 نمایش داده می شود.

$$[m]_{1\times1}$$

کمیت برداری : کمیتی که علاوه بر مقدار دارای جهت نیز می باشد. مثل نیرو، سرعت

در ریاضیات مولفه های یک کمیت برداری با ماتریس 1×3 نمایش داده می شود.

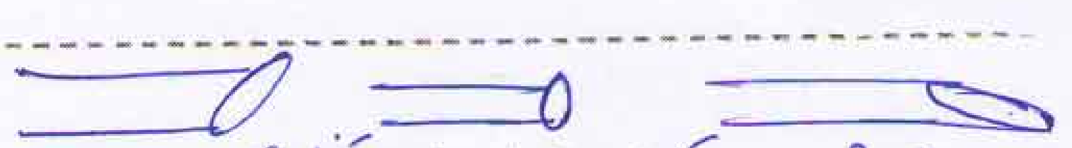
$$[F_x , F_y , F_z]$$

کمیت تانسوری : کمیاتی مانند تنش که علاوه بر مقدار و جهت به صفحه مورد مطالعه نیز بستگی دارند کمیت تانسوری نامیده می شوند و مولفه های آن ها با ماتریس 3×3 در ریاضیات نمایش داده می شود. (با تانسور مرتبه دوم) نمایش داده می شود.

قطر اصلی

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}_{3\times3}$$

مولفه های تنش در یک نقطه



نیرو در مقاطع فوق یکسان است ولی تنش در هر یک از مقاطع فوق متفاوت است.

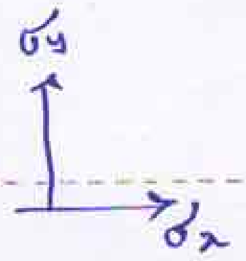
* نتیجه گیری : برای نیروها می توان عملیات برداری انجام داد ولی برای تنش ها نمی توان عملیات برداری انجام داد زیرا تنش برداری نیست.

F_y, F_x, $F=\sqrt{F_x^2+F_y^2}$

Subject: مقاومت مصالح

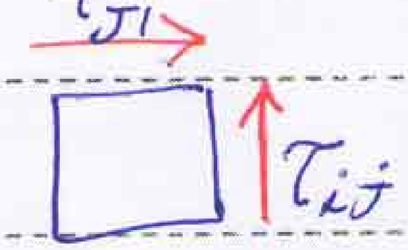
Year: ۸۹ Month. ۱۲ Date. ۱۹

$\cancel{\sigma = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}}$

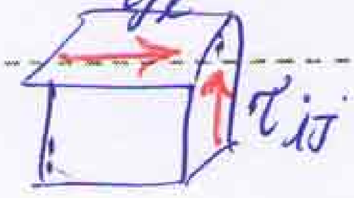


چند نکته مهم: ۱- تانسور تنش نسبت به قطر اصلی متقارن می باشد

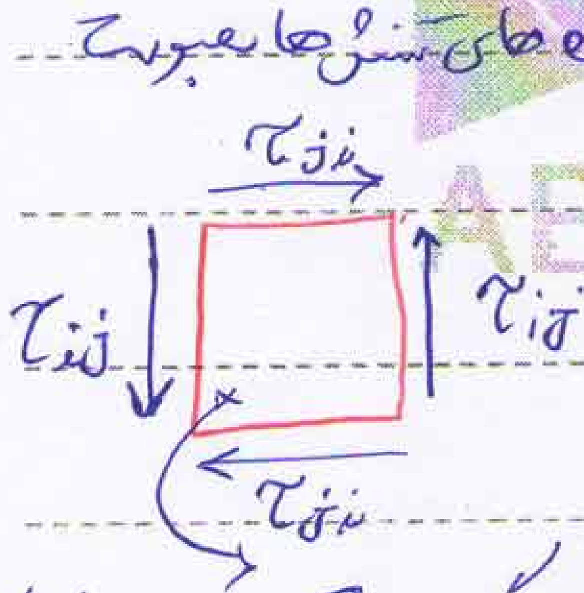
۲- اگر روی یک وجه المان در حال تعادل تنش برشی داشته باشیم روی وجه عمود بر آن هم مؤلفه تنش مربوط خواهد بود

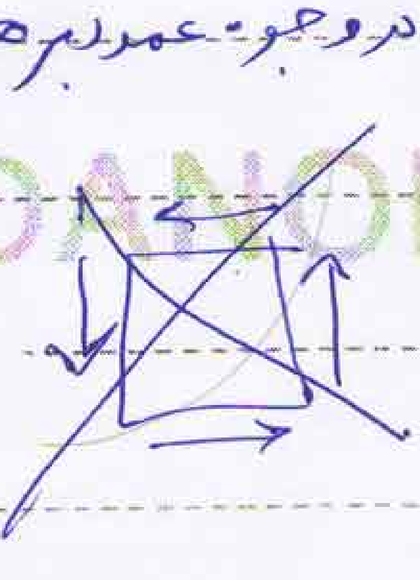


$\tau_{ij} = \tau_{ji}$



۳- به صورت کلی امکان تعادل یک جزء بی نهایت کوچک وجود دارد: که اگر روی یک وجه آن تنش برشی موجود باشد در سایر وجوه عمود بر هم آن تنش برشی وجود خواهد داشت. ضمناً در وجوه عمود بر هم مؤلفه های تنش ها بصورت همگرا یا واگرا می باشد.





اگر $\sum M = 0$ برای نیروهای سطح بنویسیم نتیجه $\tau_{ij} = \tau_{ji}$

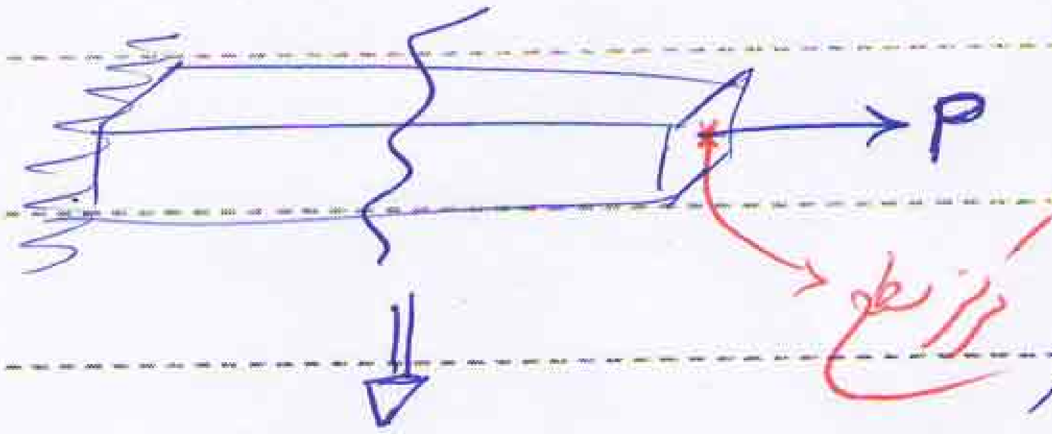
* تنش های ناشی از نیروهای محوری:

سوال ①: در اثر نیروی محوری داخلی چه نوع تنشی ایجاد می شود؟

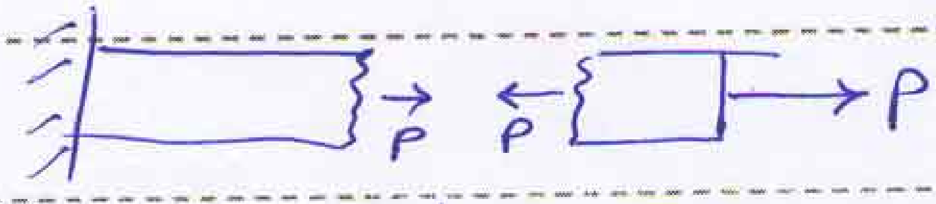
سوال ②: تنش های ناشی از نیروی محوری چگونه حساب می شود؟

جسم با خصوصیات زیر را در نظر می گیریم:

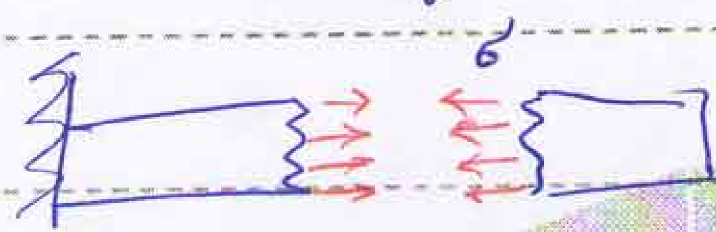
۱- جسم تحت بار محوری خالص است ۲- برآیند نیروی خارجی P از مرکز سطح می گذرد:

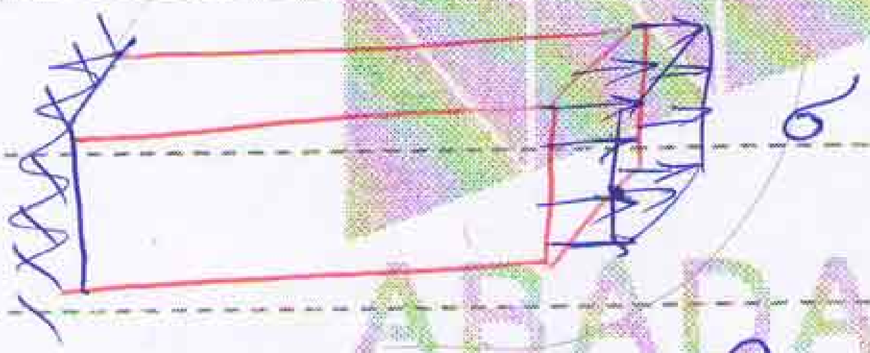


ج ① چون نیروی محوری داخلی P عمود بر سطح مقطع می‌باشد، تنش کششی تمام سطح را ایجاد می‌کند.



ج ② از آنجایی که شکل توزیع تنش نامشخص است از بارگذاری محوری یکنواخت می‌باشد لذا
بنابراین تنش واقعی با تنش متوسط با هم برابرند



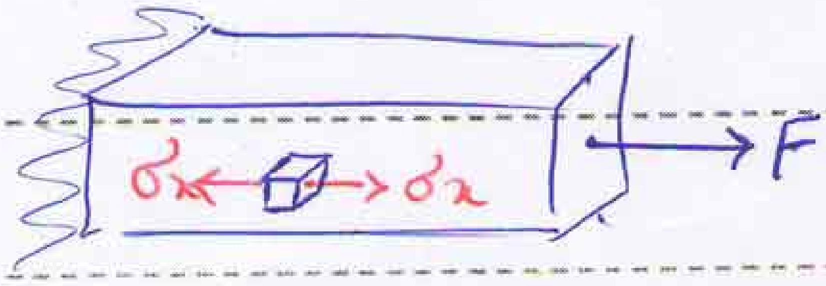


$$\sigma = \frac{P}{A}$$ تنش واقعی با بارگذاری محوری داخلی

* برآیند تنش‌ها می‌شود نیرو *

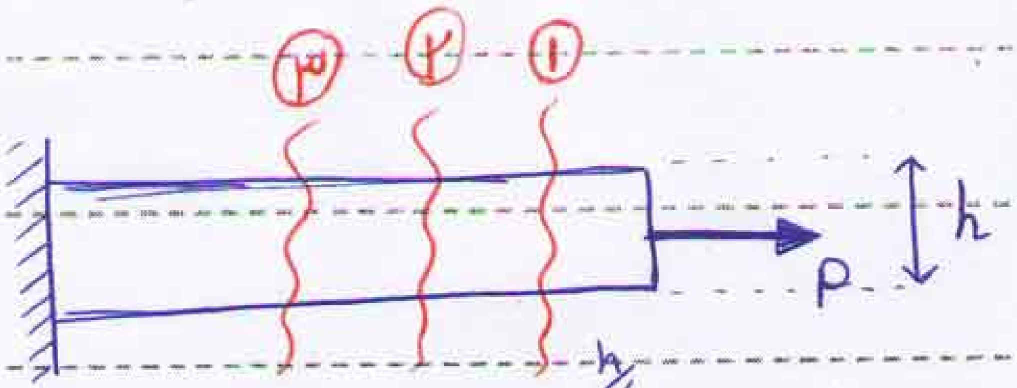
* تانسور تنش در یک نقطه از جسم تحت نیروی محوری خالص

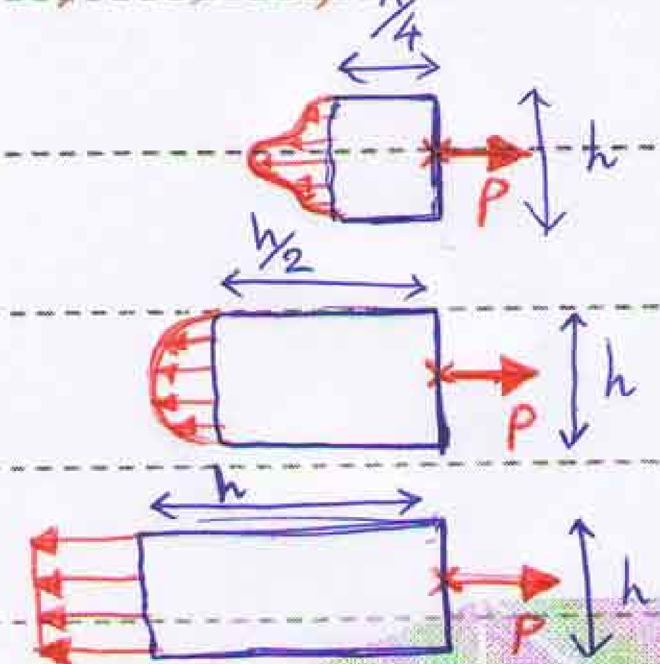
شکل تانسور تنش در یک نقطه ←



$$\begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

«مفهوم تمرکز تنش»

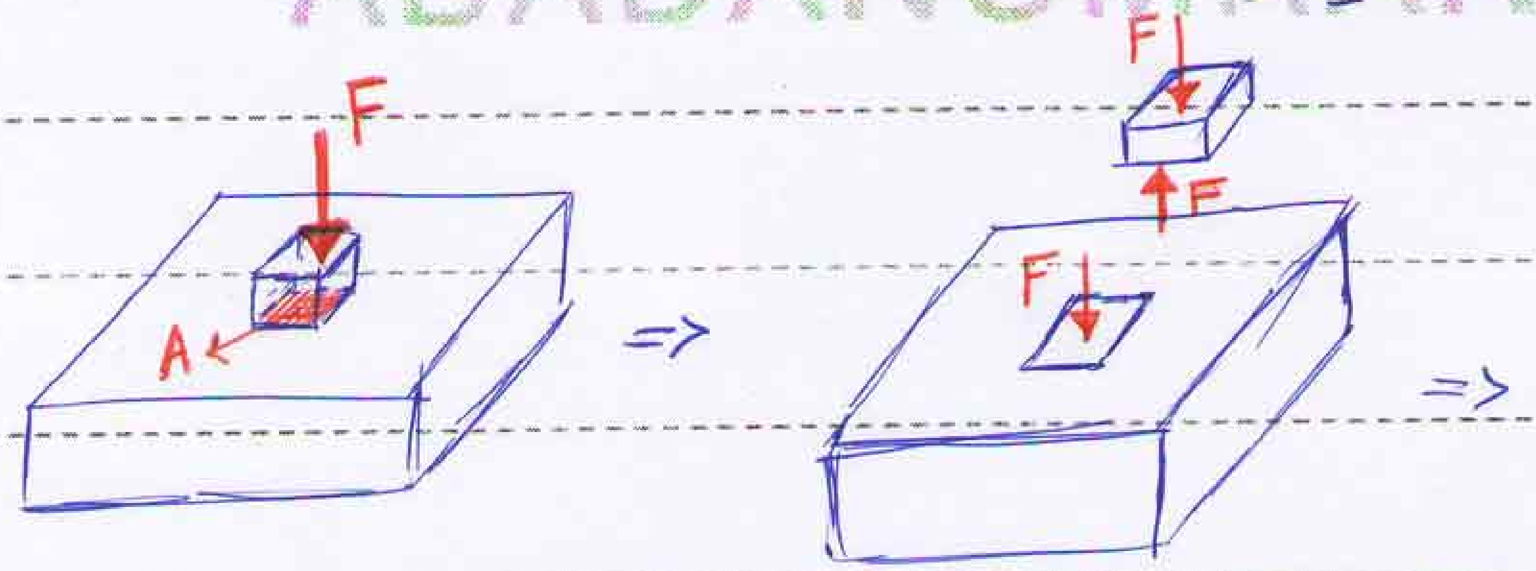


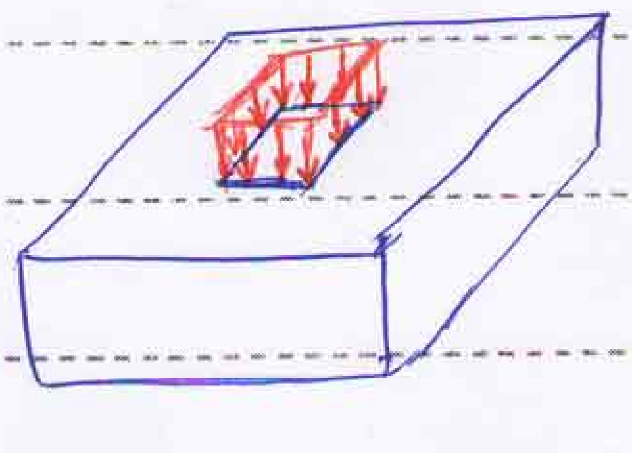


با توجه به شکل های مقابل اگر مقطعی نزدیک به نقطه اثر بار متمرکز خارجی در نظر بگیریم ، توزیع تنش های قائم غیر یکنواخت می باشد به این پدیده اصطلاحاً تمرکز تنش می گویند.

مطابق شکل وقتی به اندازه ی کافی از محل اثر بار متمرکز دور می شویم اثر تمرکز تنش از بین خواهد رفت. در درس مقاومت مصالح ما اثر تمرکز تنش را نادیده می گیریم.

«مفهوم تنش لهیدگی»

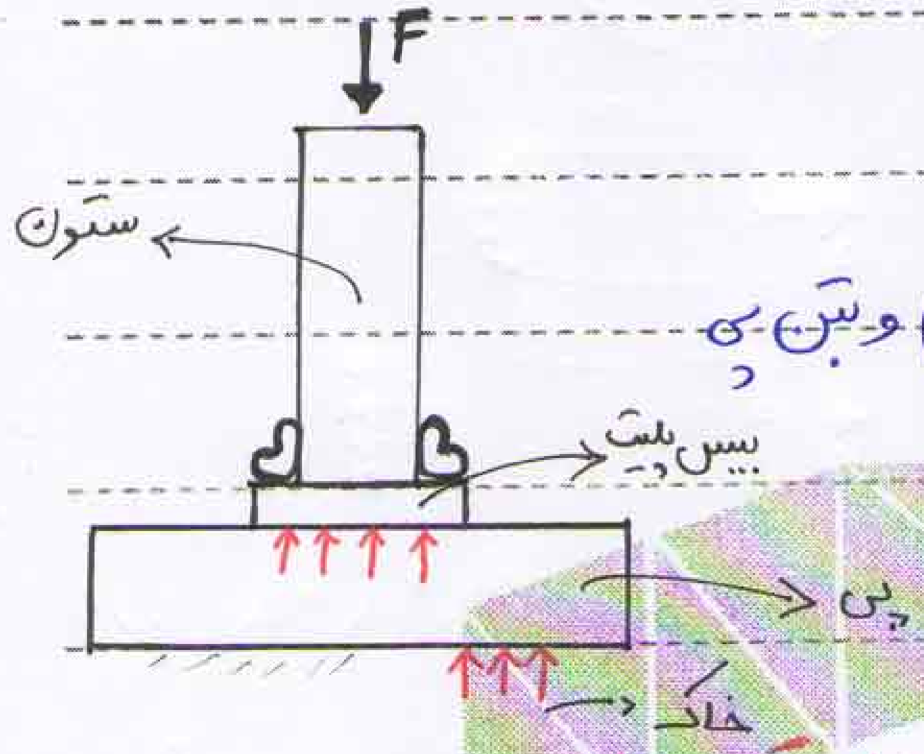




تنش لهیدگی σ_t

هنگامی که دو جسم مطابق شکل به همدیگر فشار وارد کنند در سطح تماس مشترک دو جسم تنش های قائمی ایجاد می شود که به آن **تنش لهیدگی** می گویند.

فرمول تنش لهیدگی متوسط = $\sigma_t = \dfrac{\text{نیروی فشاری بین دو جسم}}{\text{سطح مشترک تماس دو جسم}} = \dfrac{F}{A}$

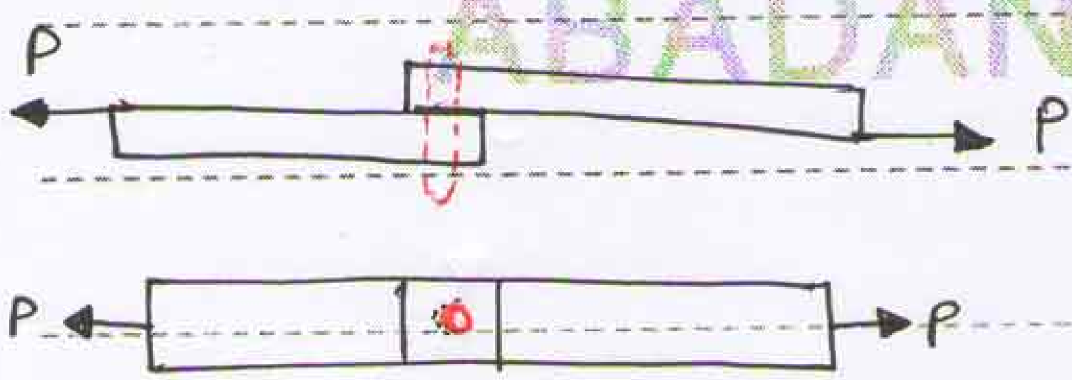


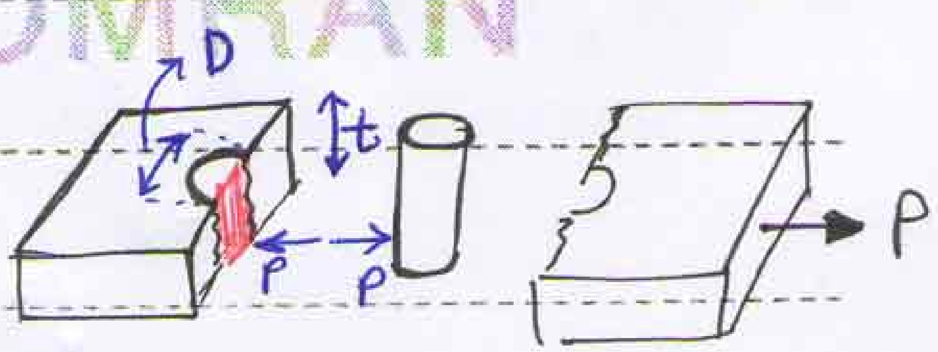
* نمونه متداول تنش لهیدگی در ساختمان:

① تنش لهیدگی بین بیس پلیت (صفحه ستون) و بتن پی

② تنش لهیدگی بین پی و خاک زیرین

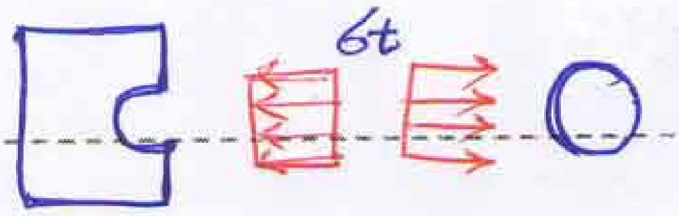
* محاسبه ی تنش لهیدگی متوسط در بین بدنه پیچ ها و تسمه ها:





تنش لهیدگی متوسط بین بدنه پیچ و تسمه $\quad \sigma_t = \dfrac{P}{t \times D}$

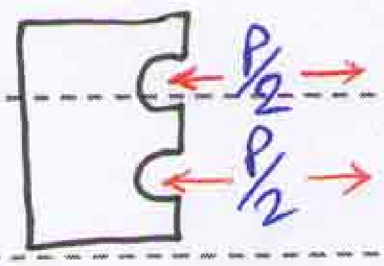
شکل تنش بوجود آمده:



تنش لهیدگی در محل تماس بدنه پیچ و بدنه تسمه ایجاد می شود.

مثال در شکل زیر تنش لهیدگی بوجود آمده بین پیچ و تسمه چقدر است؟ ضخامت ورق t و قطر هر پیچ D است.

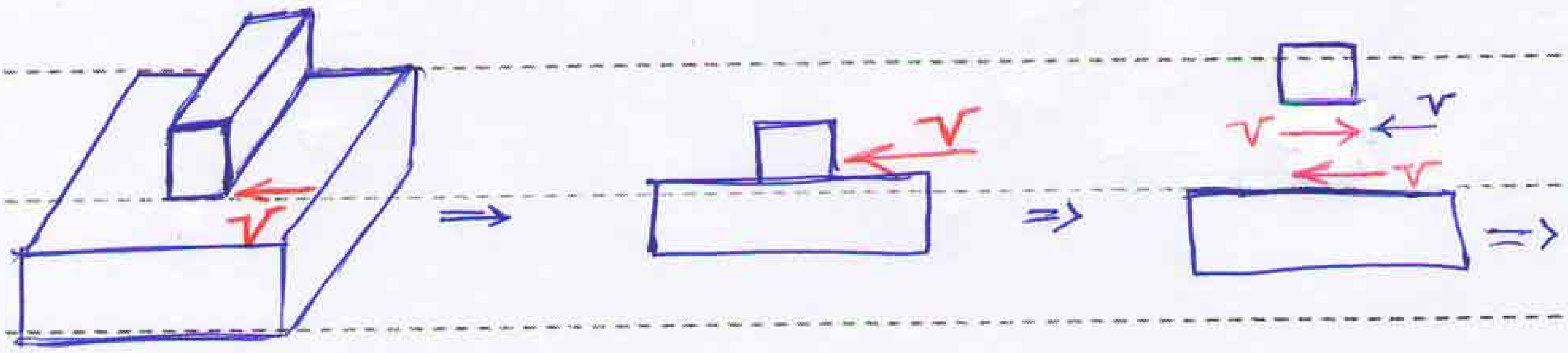
نیرویی که به هر پیچ وارد می‌شود $\frac{P}{2}$ خواهد بود.

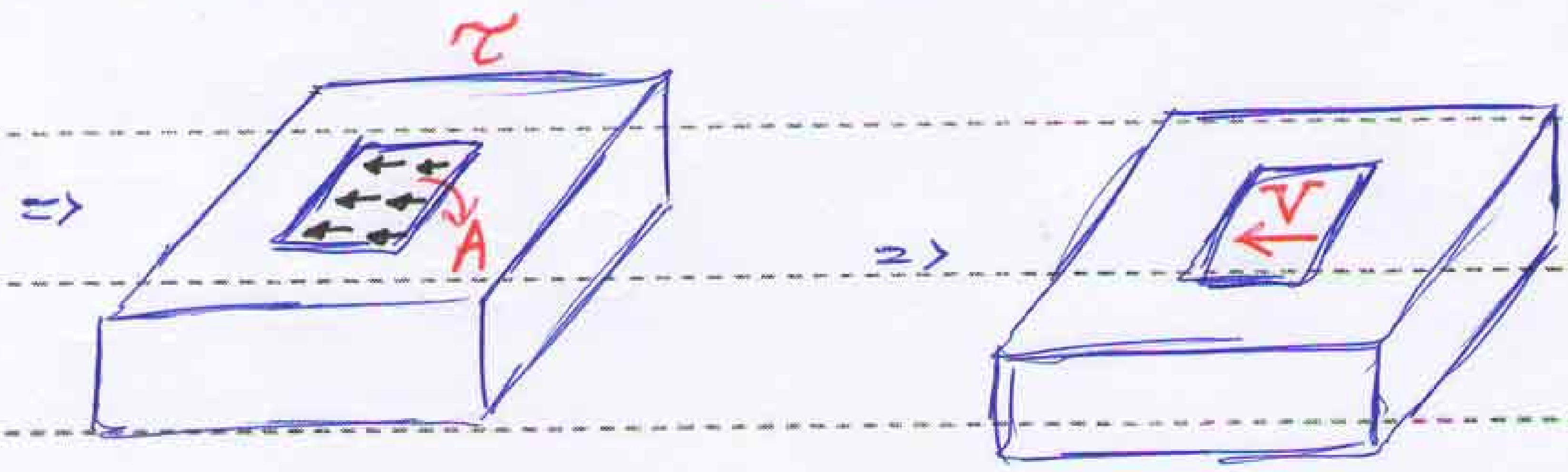


پس ← تنش لهیدگی متوسط هر پیچ $= \dfrac{P/2}{t \times D} = \boxed{\dfrac{P}{2Dt}}$

شکل توزیع تنش:

«مفهوم تنش برشی متوسط»





وقتی مطابق شکل به سطحی نیروی برشی V وارد می‌شود این نیرو تولید تنش‌های برشی می‌نماید، توزیع تنش‌های بوجود آمده غیریکنواخت بوده و محاسبه‌ی آن پیچیده می‌باشد که در فصل تنش‌های برشی در تیرها به آن خواهیم پرداخت، در این جا هدف محاسبه‌ی تنش برشی متوسط است.

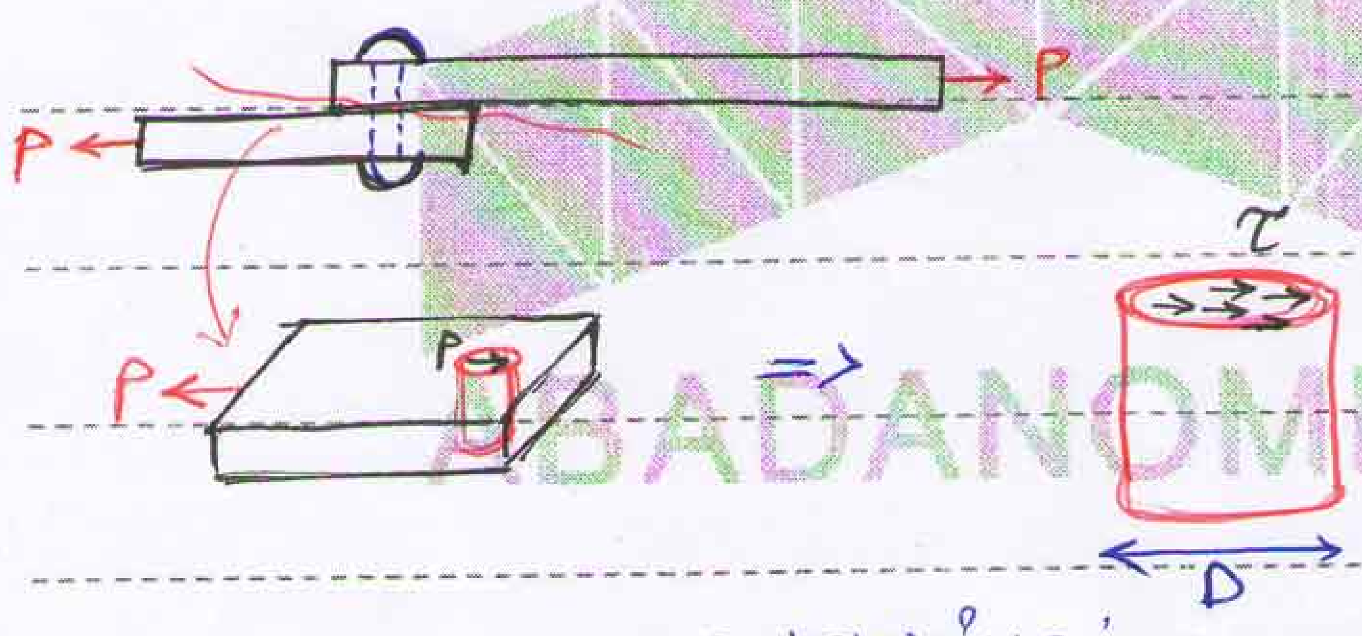
تنش برشی متوسط در اتصالات پیچی:

تنش برشی متوسط

$$\tau = \frac{V}{A}$$

V: نیروی برشی در سطح مقطع

A: سطح مقطع



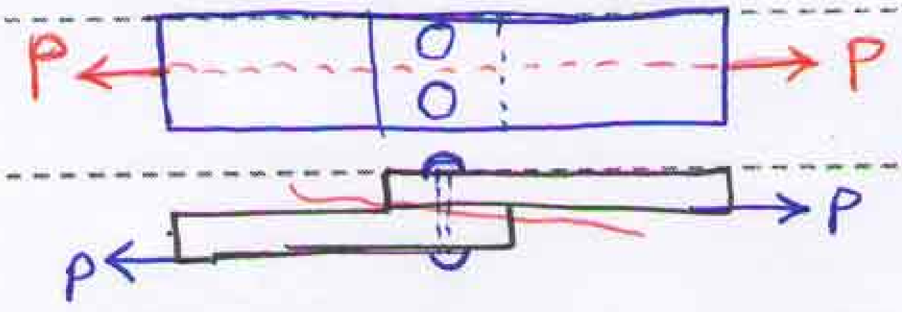
$$\text{تنش برشی در سطح مقطع پیچ} = \frac{\text{نیروی برشی درون پیچ}}{\text{سطح مقطع پیچ}}$$

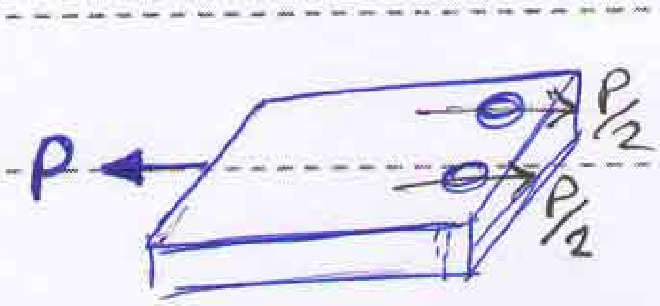
$$\tau = \frac{P}{A} = \frac{P}{\frac{D^2}{4}} = \boxed{\frac{4P}{\pi D^2}}$$

هنگامی که دو تسمه مطابق شکل توسط پیچ بهمدیگر متصل هستند در حد فاصل تماس دو تسمه احتمال بریدن پیچ وجود دارد. از آنجایی که سطح مقطع پیچ خیلی کوچک می‌باشد می‌توان تنش برشی متوسط را در سطح مقطع برش خورده پیچ محاسبه نمود.

* تنش برشی متوسط در محل سطح مقطع پیچ و تسمه انجام می‌شود. *

مثال در شکل زیر اگر قطر هر پیچ D فرض شود تنش برشی متوسط در هر یک از پیچ‌ها چقدر است؟

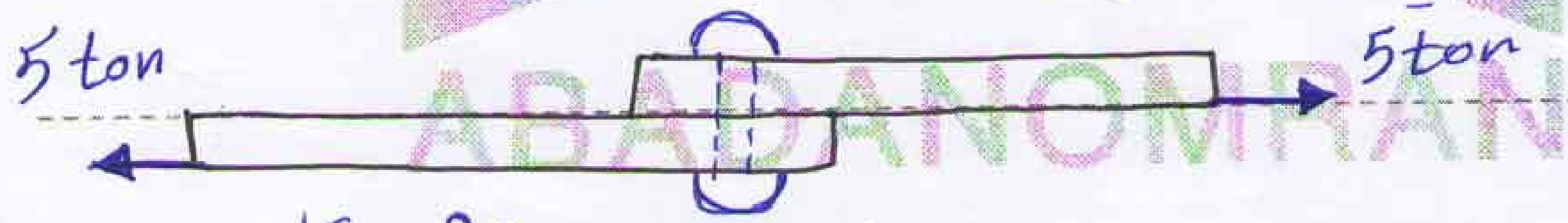




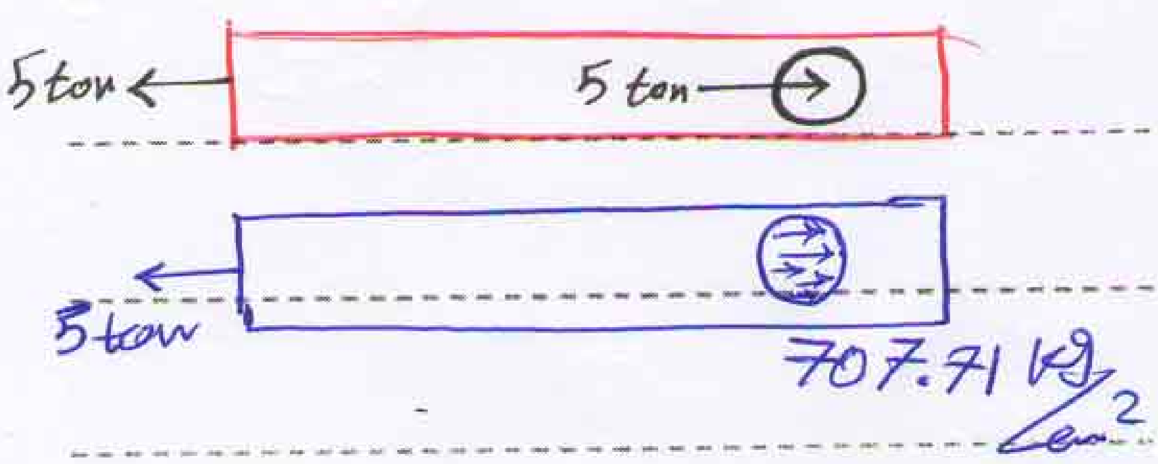
تنش متوسط برشی در هر پیچ :

$$\tau = \frac{P/2}{\frac{\pi D^2}{4}} = \boxed{\frac{2P}{\pi D^2}}$$

مثال دو تسمه مطابق شکل بهم پیچ و مهره شده اند. تنش برشی متوسط بوجود آمده در حد فاصل بین دو صفحه چقدر است؟

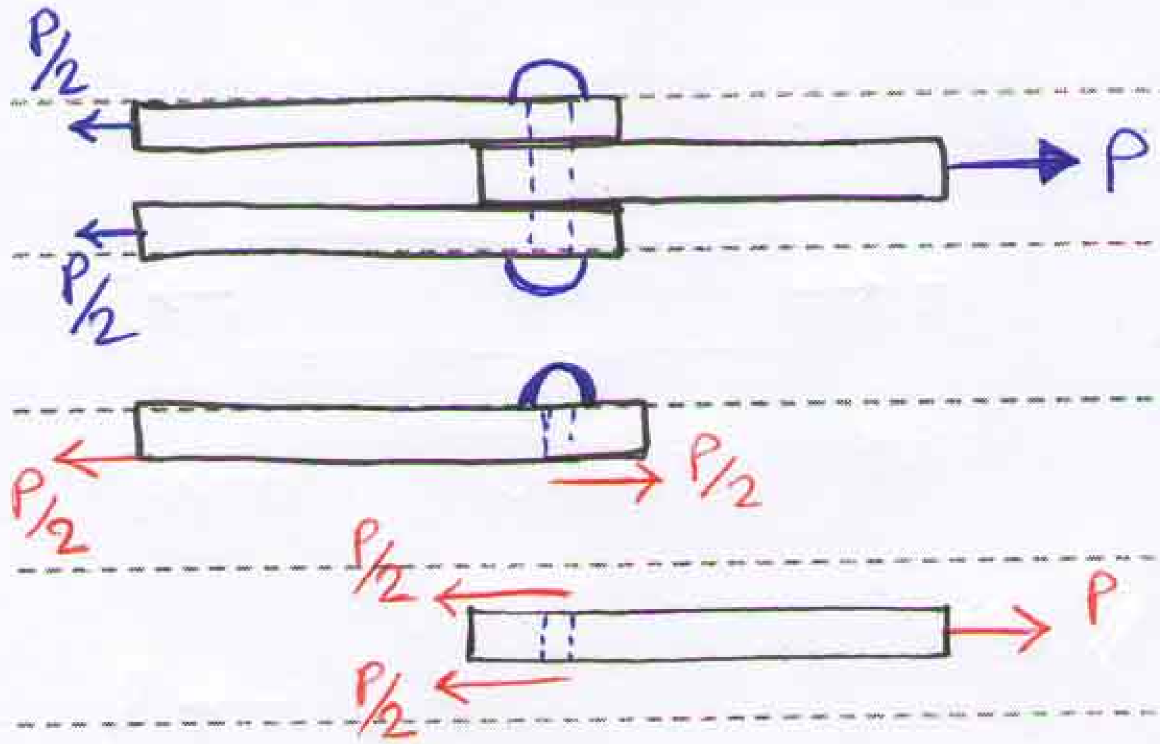


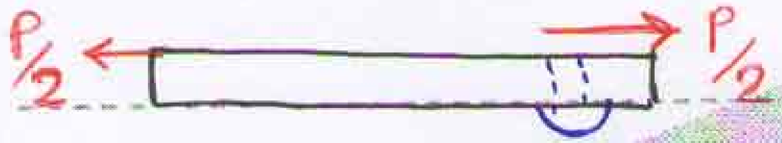
قطر پیچ = 3 cm



$$\tau = \frac{5\times10^3}{\frac{\pi(3)^2}{4}} = 707.71 \ \mathrm{kg/cm^2}$$

* پیچ های تحت برش مضاعف (پیچ های دوبرشه):





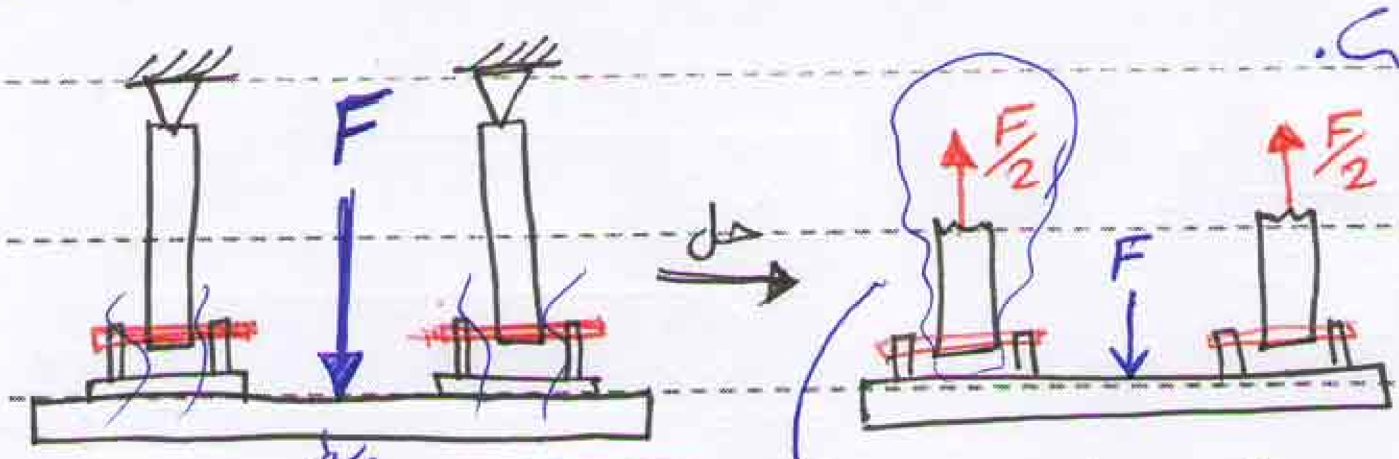
$$\tau = \frac{P/2}{A} = \frac{P}{2A}$$

τ: تنش برشی متوسط در پیچ

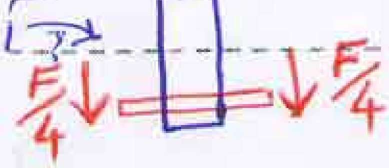
A: سطح مقطع پیچ

اگر پیچی در اتصالاتی به کار رفته باشد که احتمال برش خوردن آن از چند جا محتمل باشد، اصطلاحاً می‌گوییم پیچ تحت برش مضاعف است (بصورت دوبرشه عمل می‌کند)

مثال در شکل مقابل تنش برشی متوسط را در پیچ های اتصال حساب کنید. سطح مقطع تمام پیچ ها برابر با A است.



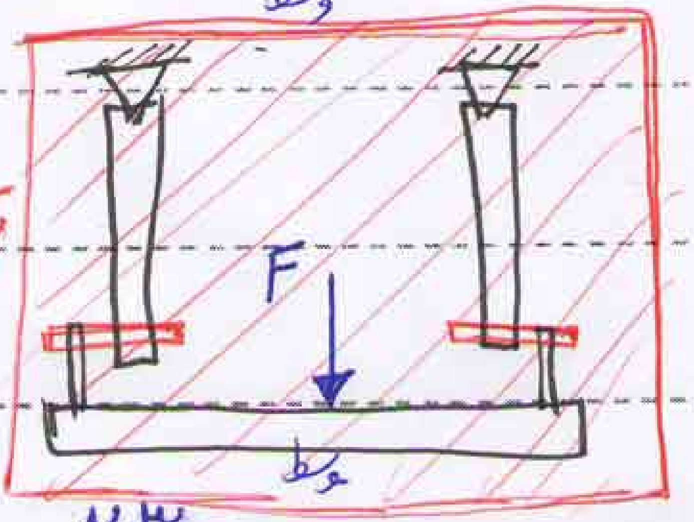
آنالیز می‌شود



تنش متوسط برشی

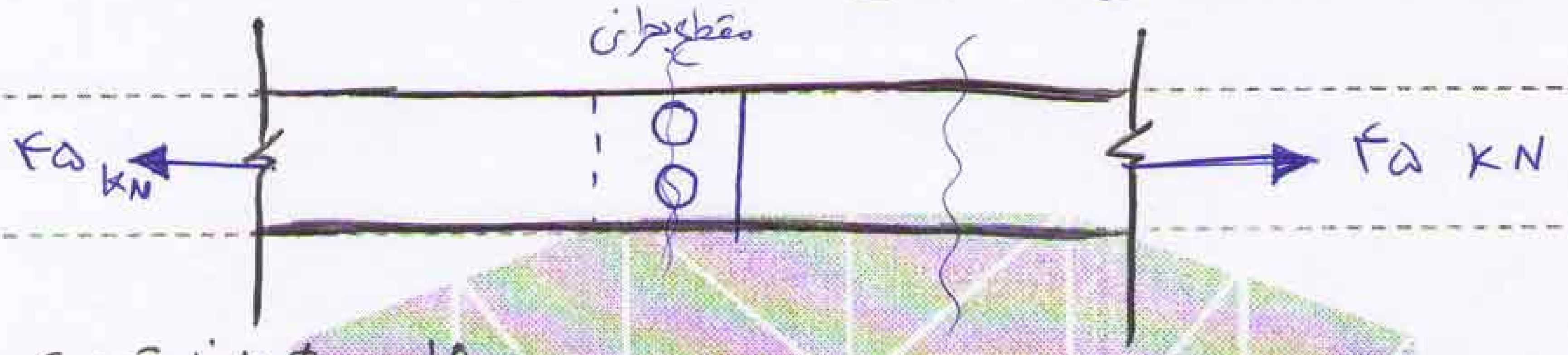
$$\tau = \frac{F/4}{A} = \boxed{\frac{F}{4A}}$$

تمرین



$\tau = \frac{F}{2A}$ تمرین منزل

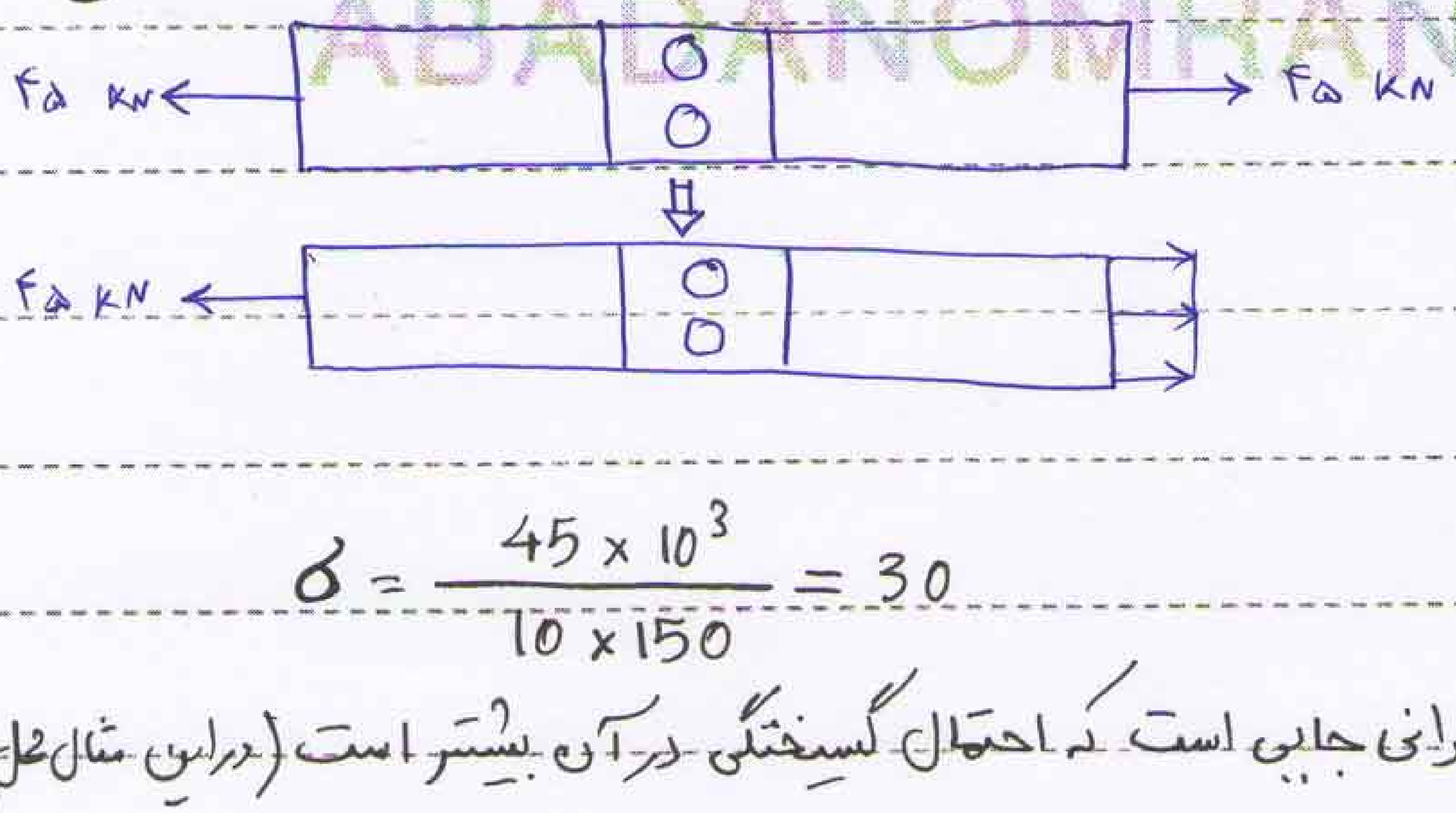
مثال: ۲ تسمه فولادی به ضخامت ۱۰ میلی متر و پهنای ۱۵۰ میلی متر توسط ۲ پیچ به قطر ۲۰ میلی متر متصل شده اند اگر این اتصال یک نیروی کشش معادل ۴۵ کیلونیوتن را انتقال دهد مطلوب است: الف) تنش متوسط قائم در مقطعی از ورق که هیچ سوراخ ندارد؟ ب) تنش متوسط قائم در مقطع بحرانی؟ ج) تنش برشی متوسط در پیچ ها؟ د) تنش لهیدگی متوسط بین بدنه پیچ و ورق؟



ضخامت ورق $t = 10$ mm

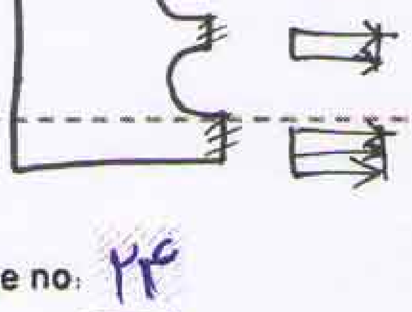
پهنای ورق $b = 150$ mm

قطر پیچ ها $D = 20$ mm

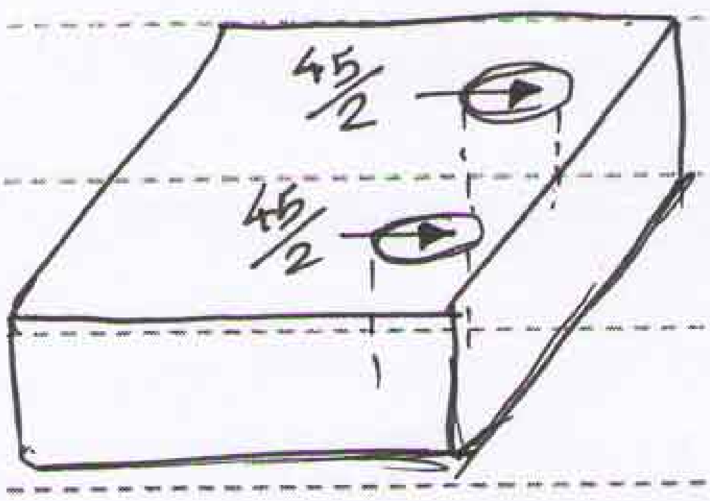


$$\sigma = \frac{45 \times 10^3}{10 \times 150} = 30$$

ب) مقطع بحرانی جایی است که احتمال گسیختگی در آن بیشتر است (در این مثال محل پیچ)

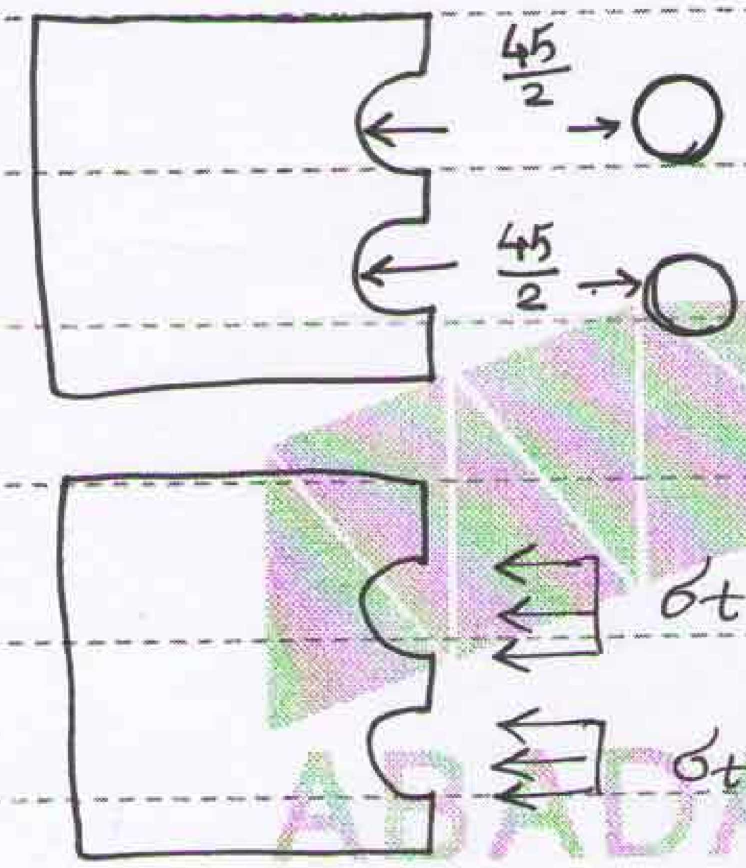


$$\sigma_{\text{تنش متوسط}} = \frac{45 \times 10^3}{(150 - 2 \times 20) \times 10} = 40.9 \ \frac{N}{mm^2}$$

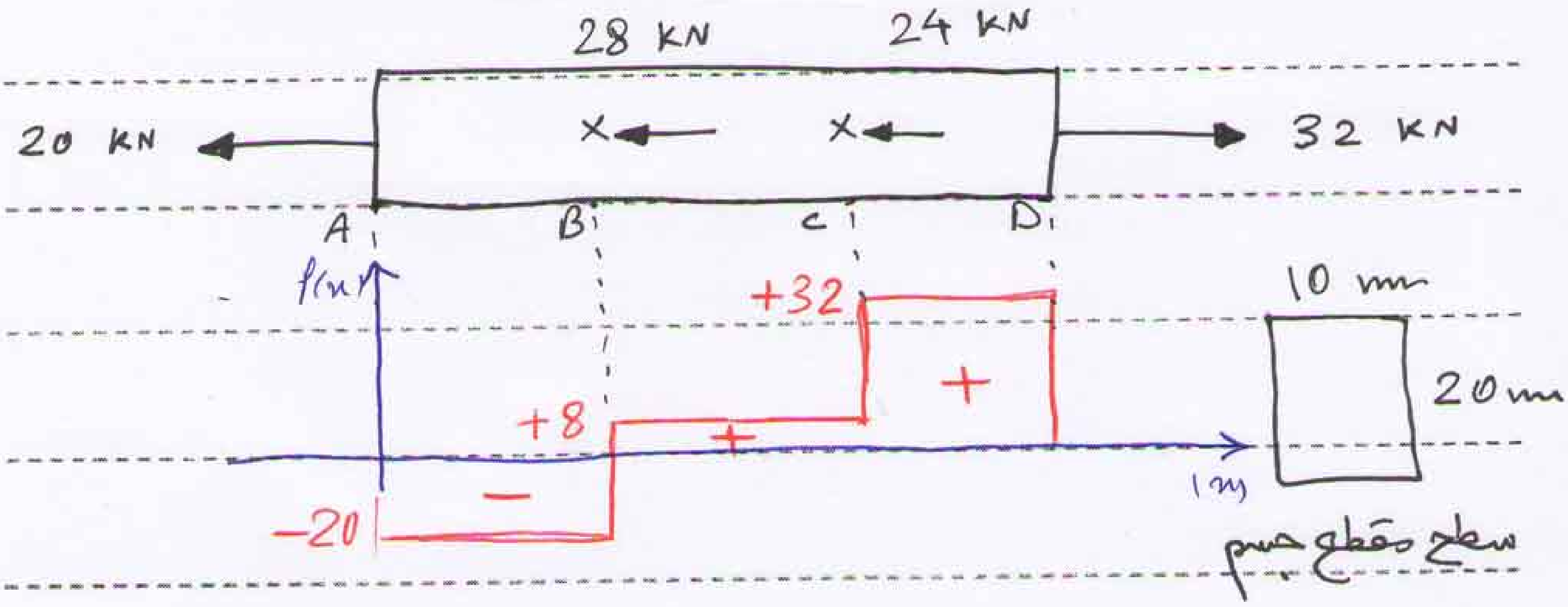


ج) $$\tau_{\text{مهره پیچ}} = \frac{\text{نیروی پیچ}}{\text{سطح مقطع پیچ}} = \frac{\frac{45}{2}\times 10^3}{\frac{\pi\,(20)^2}{4}} = 71.62 \ \frac{N}{mm^2}$$

د) $$\sigma_t = \frac{\frac{45}{2}\times 10^3}{20\times 10} \Rightarrow \sigma_t = 112.5 \ \frac{N}{mm^2}$$



مثال جسمی تحت تاثیر ۴ نیرو قرار دارد. تنش قائم در نقاط مختلف جسم را بدست آورید و سپس بصورت نموداری آن را در طول جسم رسم نمائید:



— در بازه‌ی AB تنش ثابت است، لذا:

$$\sigma_{AB} = \frac{-20\times10^3}{10\times20} = -100 \ \frac{N}{mm^2}$$

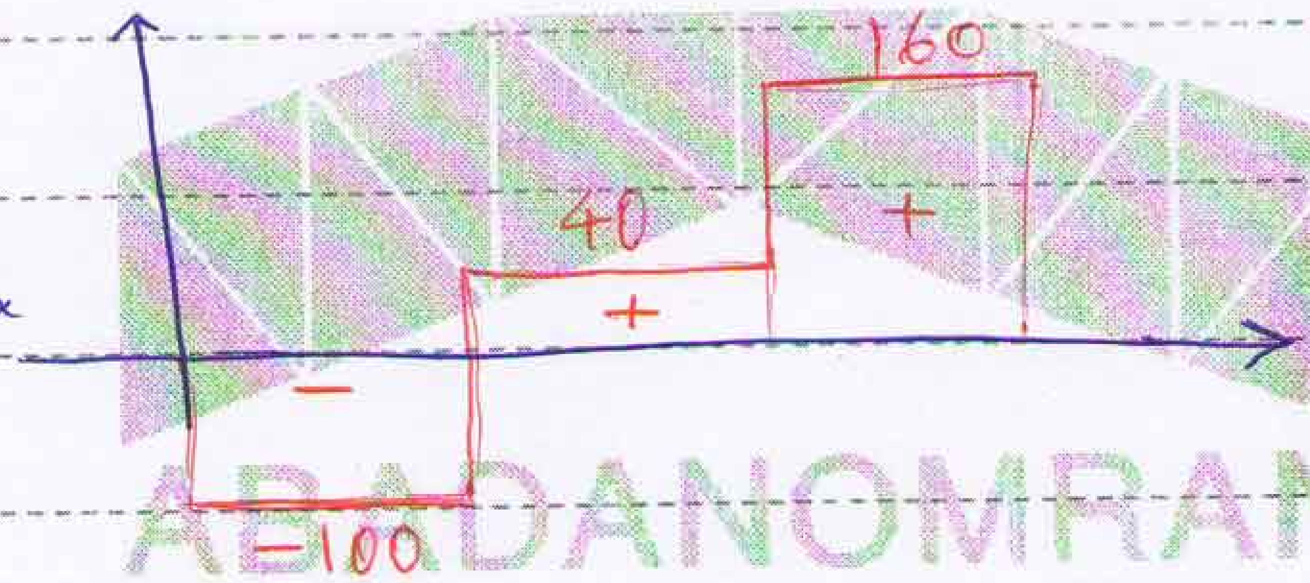
— در بازه‌ی BC تنش ثابت است، لذا:

$$\sigma_{BC} = \frac{8\times10^3}{10\times20} = 40 \ \frac{N}{mm^2}$$

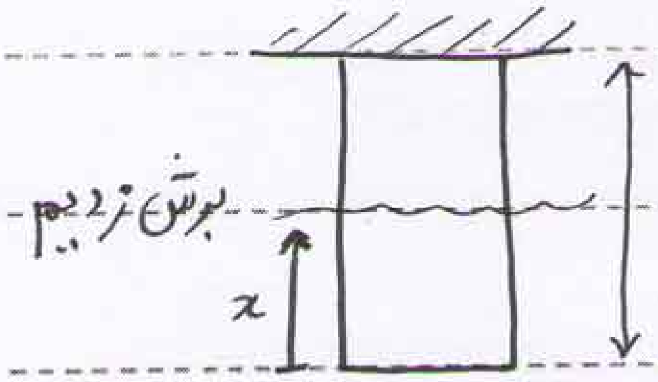
— برای بازه‌ی CD:

$$\sigma_{CD} = \frac{32\times10^3}{10\times20} = 160 \ \frac{N}{mm^2}$$

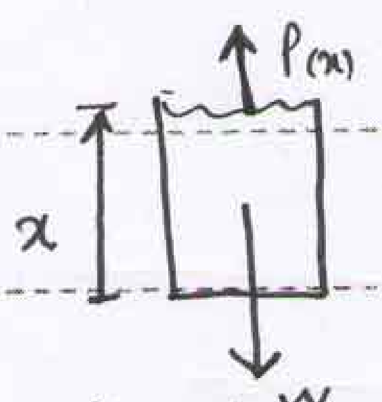
نمودار توزیع تنش در طول جسم:



مثال: جسمی به طول L و سطح مقطع A و وزن مخصوص γ از سقف آویزان است، نمودار توزیع تمام تنش متوسط را بیابید؟



L، A، γ



$+\uparrow \sum F_x = 0 \qquad P(x) = W$

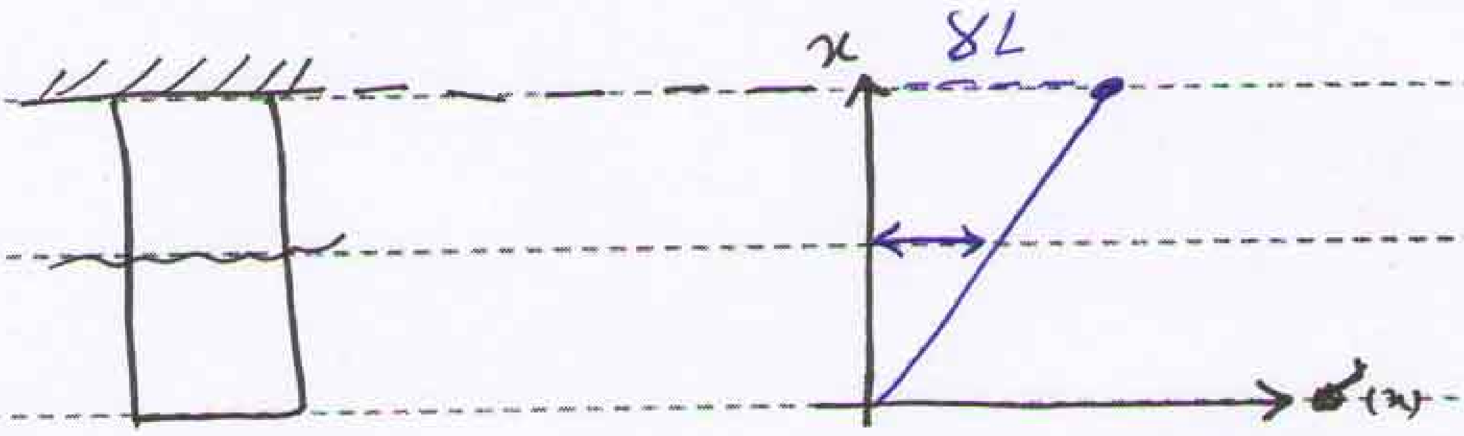
$P(x) =$ وزن واحد حجم × حجم جسم (طول × سطح مقطع)

معادله نیروی داخلی در هر نقطه $\rightarrow \boxed{P(x) = \gamma A x} \rightarrow \sigma(x) = \frac{\gamma A x}{A} \rightarrow \boxed{\sigma_x = \gamma x}$

معادله تنش در هر نقطه از طول جسم

$$x = 0 \rightarrow \sigma_{(x)} = \gamma \times 0 = 0$$

$$x = L \rightarrow \sigma_{(x)} = \gamma \times L = \gamma L$$



نمودار توزیع تنش در طول جسم

«آشنایی با مسائل طراحی»

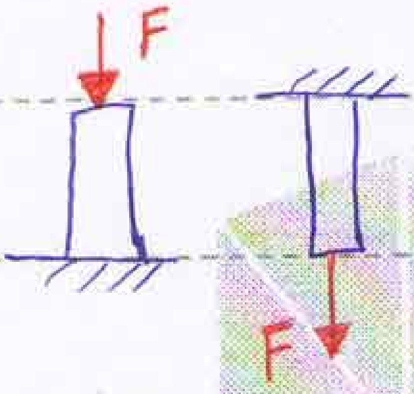
منظور از طراحی یک عضو سازه‌ای تعیین سطح مقطع آن به گونه‌ای که شرایط زیر برقرار باشد:

① عضو مورد نظر قادر به تحمل بارهای وارده باشد.

② تغییر شکل های بوجود آمده کوچک باشد.

③ طرح اقتصادی باشد.

«تعاریف اولیه در بحث طراحی»



* بار نهایی: (F_u):

مقدار نیرویی که به ازای آن جسم گسسته یا لهیده شود.

این کمیت در آزمایشگاه مقاومت مصالح تعیین می‌گردد.

* تنش نهایی: (σ_u): از تقسیم بار نهایی بر سطح مقطع عضو بدست می‌آید.

$$\boxed{\sigma_u = \frac{F_u}{A}}$$

* تنش مجاز (σ_a): تنشی است که کوچکتر از تنش نهایی بوده و محاسبات طراحی براساس آن انجام می‌شود.

مثال: $\sigma_a = 2000 \ kg/cm^2 \xleftrightarrow{\text{فاصله اطمینان}} \sigma_u = 3500 \ kg/cm^2$

در آیین نامه ساختمانی = تنش مجاز مشخص شده است

در آزمایشگاه تعیین می‌شود = تنش نهایی

سوال: چرا طراحی را براساس تنش نهایی σ_u انجام نمی‌دهند و حتما باید یک حاشیه اطمینان در نظر گرفت؟ بارهای وارده بر ساختمان، مقدارشان بطور دقیق معلوم

...نیک و هم چنین ممکن است مصالح کیفیتی را که ما در محاسبات برای آن‌ها فرض کرده‌ایم دارا نباشند (مثلاً همگن نباشند). به دلیل وجود این عدم قطعیت‌ها همیشه باید یک حاشیه اطمینان در محاسبات طراحی در نظر گرفت.

* ضریب اطمینان (F.S): پارامتری است که فاصله اطمینان هر طراحی را به صورت درصدی نمایش می‌دهد.

$$F.S = \frac{\text{تنش نهایی}}{\text{تنش مجاز}} = \frac{\sigma_u}{\sigma_a}$$

مثال: برای مصالح فولادی داریم:

$\sigma_u = ۲۴۰۰ \ \frac{kg}{cm^2}$

مجاز $\sigma_a = ۱۴۴۰ \ \frac{kg}{cm^2} \longrightarrow F.S = \frac{۲۴۰۰}{۱۴۴۰} = \boxed{۱٫۶۷}$

منظور از رقم بدست آمده‌ی فوق این است که وقتی یک عضو فولادی را طراحی می‌کنیم تنش‌ها ۶۷ درصد می‌توانند افزایش پیدا کنند بدون آن که گسیختگی در سازه اتفاق بیفتد. تعیین ضریب اطمینان یک مسئله‌ی بسیار حساس است زیرا اگر خیلی بزرگ در نظر گرفته شود طرح غیر اقتصادی خواهد بود و در صورتی که خیلی کوچک فرض گردد احتمال خرابی سازه زیاد می‌شود.

((فرمول طراحی به روش تنش مجاز)) در این روش سطح مقطع عضو سازه‌ای را به گونه‌ای تعیین می‌کنیم که تنش‌های ماکزیمم بوجود آمده در عضو سازه‌ای حداکثر برابر با تنش مجاز می‌شود.

ماکزیمم تنش بوجود آمده در سازه $\sigma_{max} \leq \sigma_a$ تنش مجاز

مثال-۱ اگر تنش مجاز فولاد $1440 \frac{kg}{cm^2}$ باشد، برای تحمل نیروی 4500 kg از میلگرد با چه شماره ای استفاده کنیم.

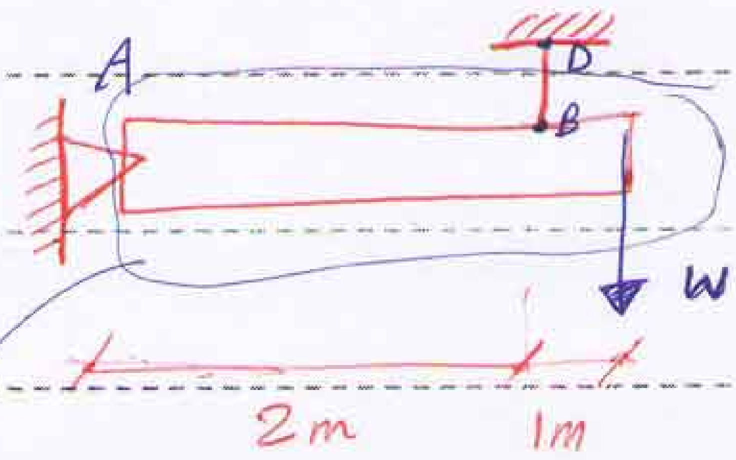
$\sigma_{max} \leq \sigma_a$

$$\frac{4500}{\frac{\pi D^2}{4}} \leq 1440 \longrightarrow D \geq 1.999\ cm \rightarrow D \geq 19.99\ mm$$

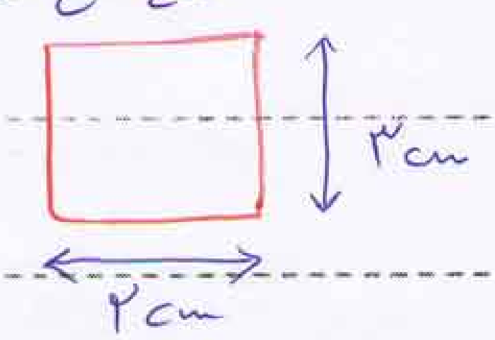
میلگرد $\varphi 20$ باید استفاده گردد ۱۴ ۱۶ ۱۸ ۲۰ ۲۲ ۲۴ ...

قطر میلگرد mm

مثال-۲ اگر تنش مجاز فولاد $1400 \frac{kg}{cm^2}$ فرض گردد، بیش‌ترین بار مجاز W برای سازه‌ی مقابل چقدر است؟ مسئله را با در نظر گرفتن عضو BD حل کنید.



سطح مقطع عضو BD



دیاگرام آزاد

$$\sum M_A = 0 \rightarrow F_{BD} \times 2 = W \times 3 \rightarrow \boxed{F_{BD} = 1.5W}$$

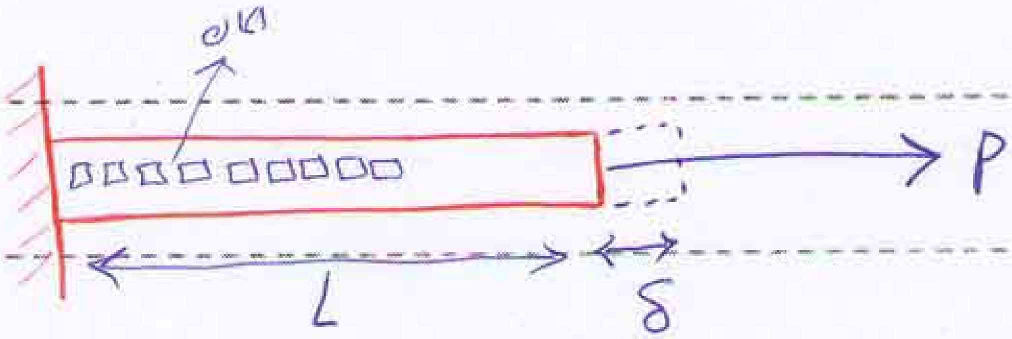
$\sigma_{max} \leq \sigma_a$

$$\hookrightarrow \frac{1.5W}{3 \times 2} \leq 1400 \longrightarrow \boxed{W \leq 5600\ kg}$$ جواب

شماره تکالیف مربوط به فصل تنش و بارهای محوری

۴ ـ ۱۱ ـ ۱۶ ـ ۱۵ ـ ۱۸ ـ ۲۵ ـ ۳۳ ـ ۳۴

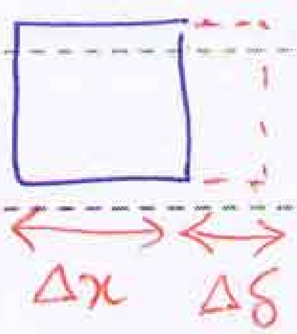
فصل سوم کرنش «Strain»



* کرنش متوسط: تیر روبرو در اثر نیروی محوری P تغییر طول δ داده است.
این δ ناشی از تغییر طول تک تک ذرات می‌باشد. اگر δ را به طور مساوی و یکنواخت بین تک تک ذرات تیر تقسیم کنیم، مقدار بدست آمده کرنش متوسط نامیده می‌شود.

$$\text{کرنش متوسط} = \frac{\text{تغییر طول}}{\text{طول اولیه}} = \frac{\delta}{L}$$

کرنش واقعی:



$$\text{کرنش متوسط المان} = \text{کرنش واقعی المان} = \frac{\Delta\delta}{\Delta x}$$

$$\text{کرنش واقعی در یک نقطه} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\delta}{\Delta x} = \frac{d\delta}{dx}$$

واحد کرنش: کرنش یک کمیت بدون بعد می باشد ((واحد ندارد))

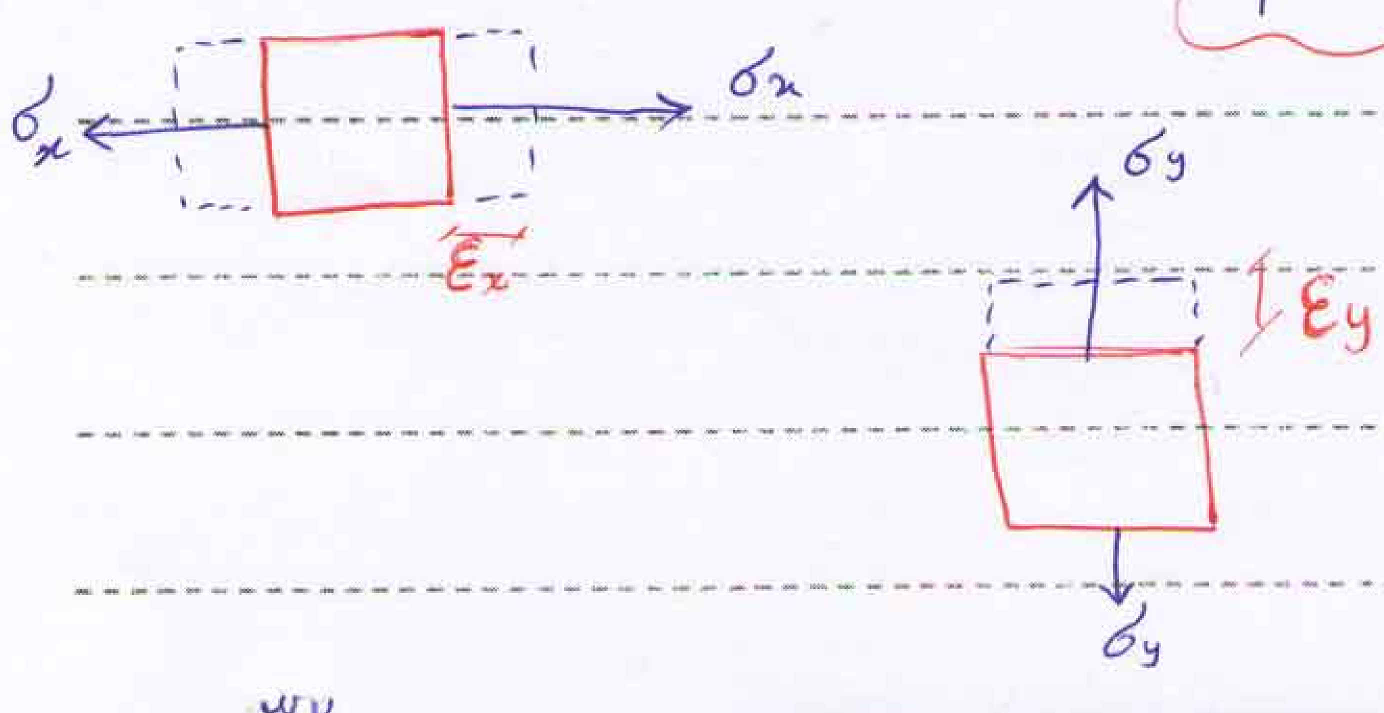
انواع نیروهای داخلی	انواع تنش	انواع کرنش
محوری P	تنش قائم σ →	کرنش طولی ε
برشی V	تنش برشی τ (تاو) →	کرنش برشی γ
لنگر خمشی M		
لنگر پیچشی T		

✓ تنش قائم σ ← تنش قائم ایجاد کرنش قائم (کرنش طولی) می کند که با حرف یونانی ε اپسیلون نمایش داده می شود.

✓ تنش برشی τ ← تنش برشی ایجاد کرنش برشی می کند که با حرف یونانی γ گاما نمایش داده می شوند.

((تنش و کرنش کمیاتی هستند که برای یک نقطه تعریف می گردند))

نحوه ی نمایش کرنش های قائم



Subject: مقاومت مصالح

Year: 90 Month. 1 Date. 18

ABADANOMRAN

سؤال چه موقع در یک قسمت از تیر کرنش متوسط با کرنش واقعی باهم برابرند؟

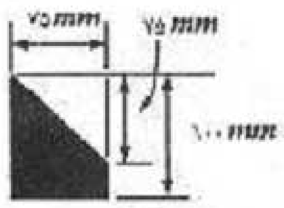
پاسخ:
الف) زمانی که در بازه‌ی A تا B نیروی (طولی) یکنواخت باشد
ب) زمانی که در بازه A تا B سطح مقطع ثابت باشد

دوست عزیز پاسخ های زیر از کتاب حل مسائل مقامت مصالح پوپوف ارائه شده و با توجه به کوتاه بودن جواب ها

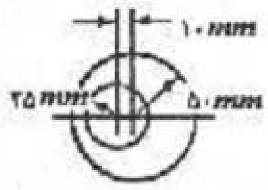
لطفا کپی نکنید !!

این پاسخ ها فقط جهت تصحیح جواب های نهایی و راه حل های شماست

۳-۳ و ۳-۴. در عضو کوتاه چدنی دارای سطح مقطعی مطابق شکل می‌باشند. اگر این دو عضو تحت تأثیر نیروی محوری فشاری معادل ۴۵ کیلونیوتن قرار گیرند، اولاً محل تأثیر نیروها را طوری تعیین کنید که هیچگونه لنگر خمشی در مقطع عضو ایجاد نگردد، ثانیاً مقدار تنشهای قائم را تعیین کنید. تمام ابعاد نشان داده شده برحسب میلی‌متر می‌باشند.



شکل (۳-۴)



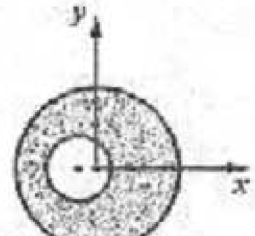
شکل (۳-۳)

نیرو باید به مرکز سطح وارد شود تا ایجاد لنگر خمشی نکند.
مبدأ مختصات را منطبق بر مرکز دایره بزرگ در نظر می‌گیریم.

$$\bar{x} = \frac{\sum Ax}{\sum A} = \frac{\pi(۵۰)^۲(۰) - \pi(۲۵)^۲(-۱۰)}{\pi(۵۰)^۲ - \pi(۲۵)^۲} \Rightarrow \bar{x} = ۳/۳۳\,mm$$

بعلت تقارن مقطع نسبت به محور x مرکز سطح روی محور x واقع می‌باشد یعنی $\bar{y} = ۰$ پس محل اثر نیرو باید بفاصله $۳/۳۳\,mm$ سمت راست مرکز دایره بزرگ باشد.

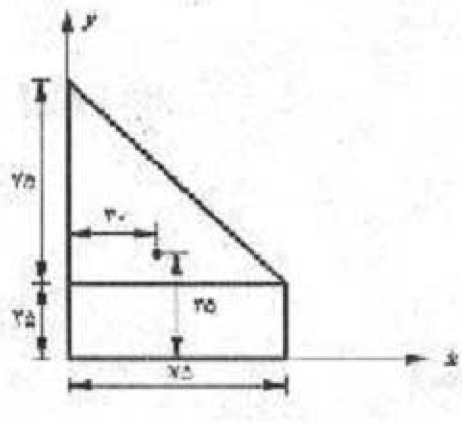
$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{۴۵۰۰۰}{\pi(۵۰)^۲ - \pi(۲۵)^۲} = ۷/۶۴\,MPa$$



$$\bar{y} = \frac{\sum Ay}{\sum A} = \frac{۲۵ \times ۷۵ \times \frac{۲۵}{۲} + \frac{۱}{۲} \times ۷۵ \times ۷۵ \times \left(۲۵ + \frac{۷۵}{۳}\right)}{۲۵ \times ۷۵ + \frac{۷۵ \times ۷۵}{۲}} \Rightarrow \bar{y} = ۳۵\,mm$$

$$\bar{x} = \frac{\sum Ax}{\sum A} = \frac{۲۵ \times ۷۵ \times \frac{۷۵}{۲} + \frac{۱}{۲} \times ۷۵ \times ۷۵ \times \frac{۷۵}{۲}}{۲۵ \times ۷۵ + \frac{۱}{۲} \times ۷۵ \times ۷۵} \Rightarrow \bar{x} = ۳۰\,mm$$

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{۴۵۰۰۰}{۴۶۸۷/۵} = ۹/۶\,MPa$$



۳-۱۱. یک میلهٔ فولادی به قطر ۲۰ میلی‌متر به‌صورت دو برشه تا لحظهٔ خرابی بارگذاری می‌شود. بار نهایی معادل ۴۵۰ کیلونیوتن اندازه‌گیری شده است. اگر تنش مجاز بر مبنای ضریب اطمینان ۴ قرار داشته باشد، قطر یک خار فولادی که برای تحمل بار مجازی معادل ۲۵ کیلونیوتن به صورت یک برشه به کار می‌رود، چقدر است.

$$\tau_{ult} = \frac{V}{A} = \frac{450000}{2 \times (\pi \times 10^2)} = 716/2\, MPa$$

$$\tau_{All} = \frac{\tau_{ult}}{F.S} = \frac{716/2}{4} = 179\, MPa$$

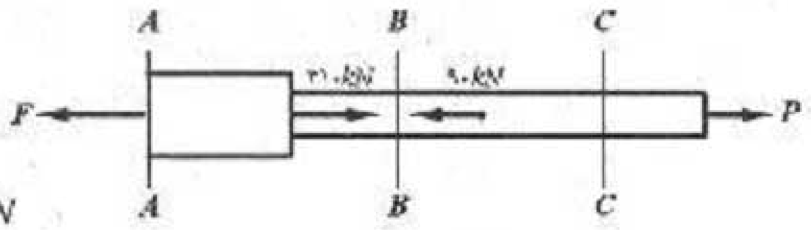
$$A = \frac{V'}{\tau_{All}} = \frac{25000}{179} = 139/6\, mm^2 \qquad d = \sqrt{\frac{4 \times 139/6}{\pi}} = 13/3\, mm$$

۳-۱۵. مثال قبل را با فرض اینکه مقدار نیروی انتهایی به جای ۱۸۰ کیلونیوتن، طوری باشد که تنش قائم حداکثر یکسانی در دو قطر میله ایجاد گردد، مجدداً حل نمایید. نیروهای محوری ۹۰ کیلونیوتنی و ۳۱۰ کیلونیوتنی دست نخورده باقی می‌مانند و حداکثر تنش قایم در ناحیهٔ نازکتر میله، هم می‌تواند بین دو نیرو و هم می‌تواند در نزدیکی انتهای آزاد باشد. هر دو حالت را بررسی کنید.

$$F = P + 310 - 90 = P + 220$$

$$\sigma_a = \frac{P + 220}{0/0025},\ \sigma_b = \frac{P - 90}{0/0012},\ \sigma_c = \frac{P}{0/0012}$$

حالت اوّل: $\sigma_{max} = \sigma_a = \sigma_b$



$$\frac{P + 220}{0/0025} = \frac{P - 90}{0/0012} \Rightarrow P = 376\, kN$$

$$\sigma_{max} = \sigma_a = \frac{(376 + 220) \times 10^3\ (N)}{2500\ (mm^2)} = 238/4\, MPa$$

$$\sigma_c = \frac{P}{0/0012} = \frac{376 \times 10^3}{1200} = 313/3\, MP$$

همانگونه که ملاحظه می‌شود مقدار σ_c از σ_{max} بیشتر شده پس این حالت صحیح نمی‌باشد.

حالت دوّم: $\sigma_{max} = \sigma_a = \sigma_c$

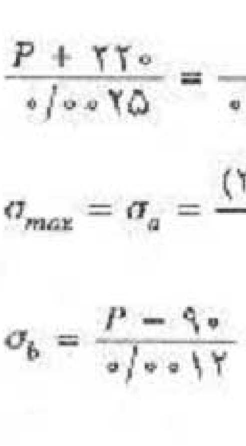
$$\frac{P + 220}{0/0025} = \frac{P}{0/0012} \Rightarrow P = 203\, kN$$

$$\sigma_{max} = \sigma_a = \frac{(203 + 220) \times 10^3\ (N)}{2500\ (mm^2)} = 169/2\, MPa$$

$$\sigma_b = \frac{P - 90}{0/0012} = 94/2\, MPa < \sigma_{max}$$

این حالت قابل قبول است پس مقدار P برابر $203kN$ صحیح می‌باشد

۳-۱۶. یک ستون کوتاه از دو لولهٔ فولادی که مطابق شکل در روی یکدیگر قرار دارند، ساخته شده است. اگر تنش مجاز فشاری، ۱۰۰ نیوتن بر میلی‌مترمربع باشد، مطلوب است: (الف) نیروی محوری مجاز P_1 اگر نیروی محوری P_2 مساوی ۲۰۰ کیلونیوتن باشد. (ب)، نیروی محوری مجاز P_1 اگر $P_2 = 80$ کیلونیوتن باشد. از وزن لوله‌ها صرف‌نظر کنید.



مسأله ۳-۱۶

الف) $P_1 = A_1 \sigma_{all} = 1500 \times 100 = 150\, kN$

$$P_1 + 200 \times 10^3 = A_2\, \sigma_{all}$$

$$P_1 + 2 \times 10^5 = 2600 \times 100 \Rightarrow P_1 = 60\, kN$$

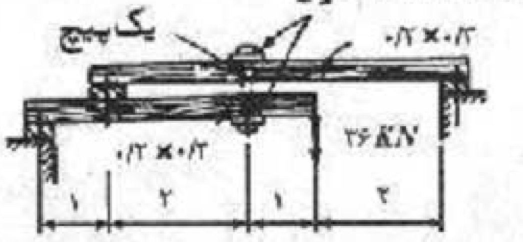
پس ۶۰ kN قابل قبول است زیرا اگر P_1 از ۶۰ kN بیشتر باشد تنش در لوله پایینی از حد مجاز فراتر خواهد رفت.

ب) $P_1 = A_1\, \sigma_{all} = 150\, kN$

$$P_1 + 80000 = 2600 \times 100 \Rightarrow P_1 = 180\, kN$$

در این حالت مقدار ۱۵۰ kN قابل قبول می‌باشد زیرا با گذشتن از مرز ۱۵۰ kN تنش در لوله بالایی از تنش مجاز فراتر می‌رود.

۳-۱۸. مطلوب است تعیین اندازهٔ پیچ و سطح صفحات فشاری برای سازهٔ نشان داده شده در شکل، در صورتی که تنش مجاز کششی ۱۲۵ نیوتن بر میلی‌مترمربع و تنش مجاز لهیدگی ۳/۵ نیوتن بر میلی‌مترمربع باشد از وزن تیرها صرف‌نظر کنید.

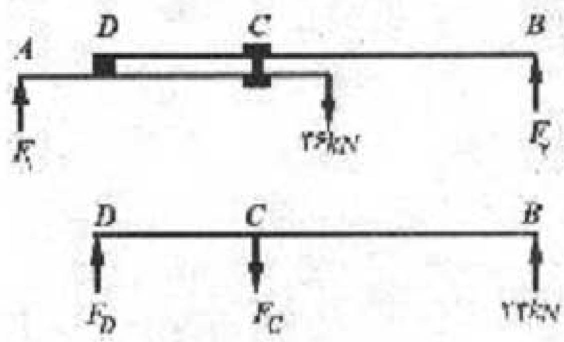


(تمام ابعاد برحسب متر) مسئله ۳-۱۸

$$\sum M_B:\quad F_1 \times 6 = 36 \times 2 \Rightarrow F_1 = 12\, kN$$

$$\sum F_A:\quad F_2 \times 6 = 36 \times 4 \Rightarrow F_2 = 24\, kN$$

$$\sum M_D:\quad 24 \times 5 = F_c \times 2 \Rightarrow F_c = 60\, kN$$



$$\sigma = \frac{F_c}{A} \rightarrow A = \frac{F_c}{\sigma} = \frac{60000}{125} = 480\, mm^2$$

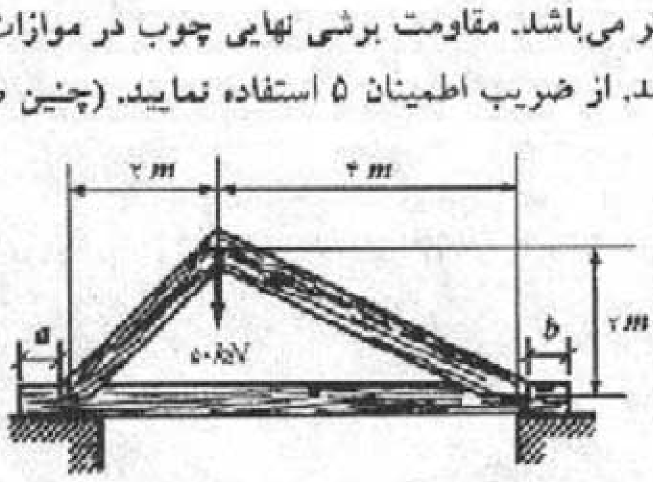
$$A = \frac{\pi d^2}{4} \rightarrow d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = 24.7$$

اگر بخواهیم از پیچهای متریک استاندارد استفاده کنیم قطرهای ۲۴ و ۲۷ میلی‌متر موجود می‌باشند که باید قطر ۲۷ میلی‌متر را بکار ببریم و یا می‌توانیم از پیچ با قطر ۱ اینچ که معادل ۲۵/۴ میلی‌متر می‌باشد استفاده کنیم

سطح صفحات فشاری:

$$A = \frac{F_c}{\sigma_{br}} = \frac{60000}{3.5} = 17142.8\, mm^2$$

۳-۲۵. مطلوب است تعیین فواصل لازم a و b در خرپای نشان داده شده در شکل. ابعاد سطح مقطع تمام اعضا، ۰/۲ × ۰/۲ متر می‌باشد. مقاومت برشی نهایی چوب در موازات الیاف آن ۳/۵ نیوتن بر میلی متر مربع می‌باشد. از ضریب اطمینان ۵ استفاده نمایید. (چنین طرحی هیچ‌وقت توصیه نمی‌شود.)

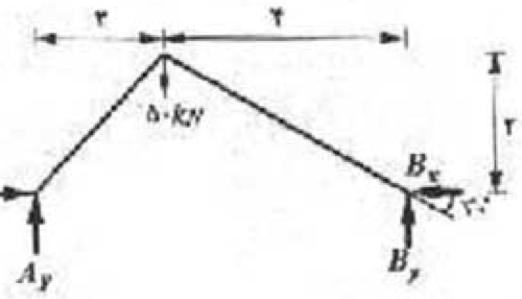


مسئله ۳-۲۵

$$+\sum M_A = 0: 50 \times 2 - B_y \times 6 = 0 \Rightarrow B_y = \frac{50}{3}\, kN$$

$$B_x = \frac{B_y}{\tan 30} = 1.73 B_y = 28.87$$

$$\sum F_x = ۰ : A_x - ۲۸/۸۷ = ۰ \Rightarrow A_x = ۲۸/۸۷ kN$$

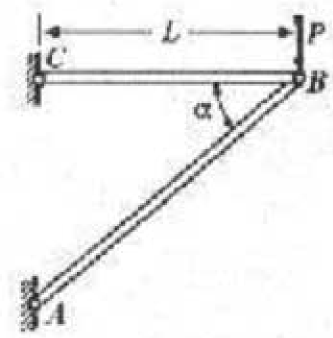


$$\tau_{all} = \frac{A_x}{a.t} \Rightarrow a = \frac{A_x}{\tau.t} = \frac{۲۸۸۷۰ (N)}{\frac{۳/۵}{۵} (N/mm^۲) \times ۲۰۰ (mm)} = ۲۰۶/۲ mm$$

$$\tau_{all} = \frac{B_x}{b.t}$$

با توجه به یکسان بودن همه مقادیر برای طرف دیگر تیر مقدار b لازم نیز ۲۰۶ mm خواهد بود

۳-۳۳. یک قاب مفصلی که نیروی P را در گرهٔ B حمل می‌کند، در شکل نشان داده شده است. تنش قائم σ باید در هر دو عضو AB و BC یکسان باشد. مطلوب است تعیین زاویه α به طوری که وزن این سازه حداقل باشد. اعضای AB و BC دارای سطح مقطع ثابتی می‌باشند.



مسأله ۳-۳۳

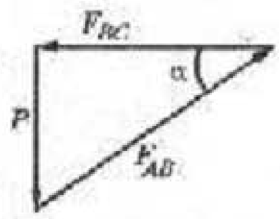
$$F_{BC} = P\, Cotg\alpha \qquad A_{BC} = \frac{F_{BC}}{\sigma} = \frac{P}{\sigma} Cotg\alpha$$

$$F_{AB} = \frac{P}{Sin\alpha} \qquad A_{AB} = \frac{F_{AB}}{\sigma} = \frac{P}{\sigma}\frac{۱}{Sin\alpha}$$

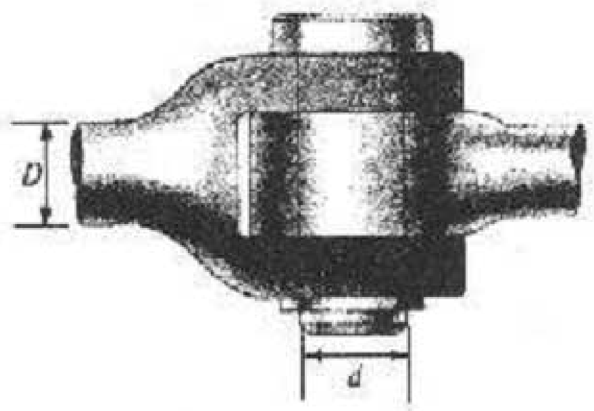
$$(\text{حجم})\ V = A_{BC}\, L + A_{AB}\, L_{AB} \ \text{و}\ L_{AB} = \frac{L}{Cos\alpha}$$

$$V = \frac{PL}{\sigma}\left(Cotg\alpha + \frac{۱}{Sin\alpha\ cos\alpha}\right)$$

$$\frac{dV}{d\alpha} = ۰ \rightarrow Cos^۲\alpha = \frac{۱}{۳} \rightarrow \alpha = ۵۵°$$



۳-۳۴. اتصال مفصلی نشان داده شده در شکل برای حمل یک نیروی کششی به کار گرفته می‌شود. اگر قطر میله D باشد، قطر d خار را تعیین کنید. تنش برشی مجاز خار نصف تنش کششی مجاز میله می‌باشد.



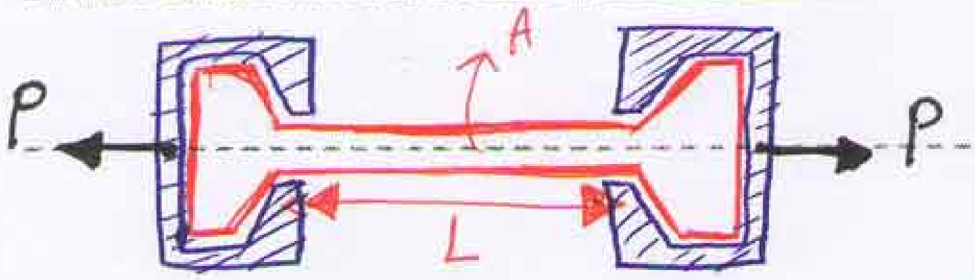
مسأله ۳-۳۴

$$\sigma = \frac{P}{\left(\frac{\pi D^۲}{۴}\right)} = P\frac{۴}{\pi D^۲} \quad \text{و} \quad \tau = \frac{P/۲}{\left(\frac{\pi d^۲}{۴}\right)} = \frac{P}{۲}\cdot\frac{۴}{\pi d^۲}$$

بنابر فرض مسأله $\tau = \frac{\sigma}{۲}$ بنابراین:

$$\frac{P}{۲}\cdot\frac{۴}{\pi d^۲} = \frac{۱}{۲}\left(P\cdot\frac{۴}{\pi D^۲}\right) \Rightarrow d = D$$

دیاگرام تنش - کرنش ($\sigma - \varepsilon$) :



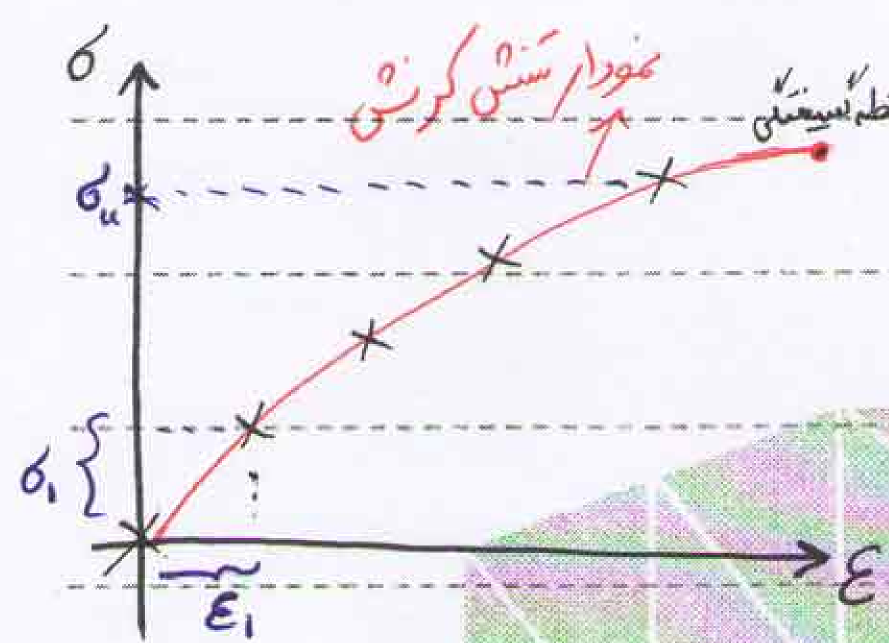
جدول ①

δ	P
δ_1	P_1
δ_2	P_2
δ_3	P_3
⋮	⋮

گسیختگی

جدول ②

$\varepsilon = \frac{\delta}{L}$	$\sigma = \frac{P}{A}$
ε_1	σ_1
ε_2	σ_2
ε_3	σ_3
⋮	⋮



در آزمایشگاه مقاومت مصالح، یک نمونه از مصالح را به طول L و سطح مقطع A مطابق شکل تحت بارگذاری قرار می‌دهند و به ازای نیروهای مختلف P تغییر طول نمونه را (δ) اندازه‌گیری می‌نمایند. به این ترتیب جدول ① تکمیل می‌شود، سپس با استفاده از داده‌های این جدول، جدول شماره ② را محاسبه می‌کنند. نقاط بدست آمده در جدول شماره ② را در دستگاه مختصات نشان داده شده مشخص کرده و از وصل کردن این نقاط به هم دیاگرامی ترسیم می‌شود که به نمودار تنش - کرنش معروف است.

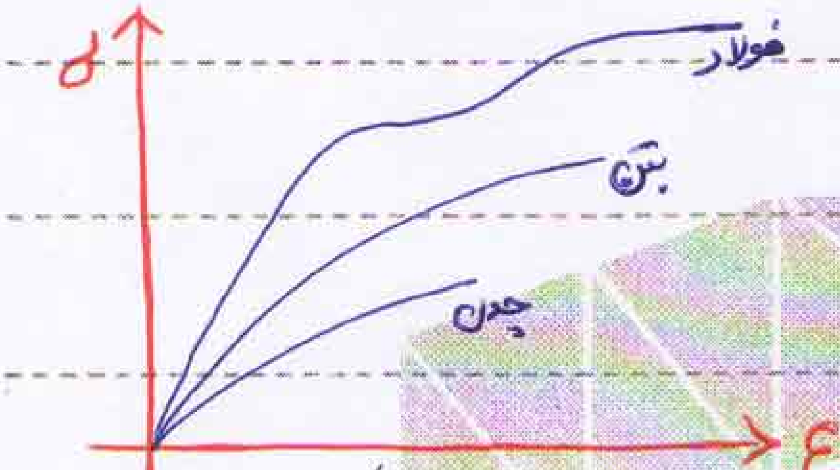
* خصوصیات دیاگرام تنش - کرنش

① برای هر نوع مصالحی این دیاگرام منحصر به فرد است به عبارت دیگر هر مصالحی دیاگرام خاص خودش را دارد و حتی اگر ابعاد نمونه‌ی آزمایشی را تغییر دهیم برای یک مصالح

مشخص باز هم همان نمودار قبلی بدست می‌آید.

۲) به کمک این نمودار می‌توان خصوصیات مکانیکی مصالح را استخراج کرد. بعنوان مثال از روی این نمودار می‌توان تعیین نمود که تنش نهایی برای هر مصالح خاصی چقدر است.

۳) از روی نمودار $(\sigma-\varepsilon)$ تنش کرنش، می‌توان رفتار مصالح را پیش‌بینی کرد و هم چنین مصالح مختلف را با یکدیگر مقایسه نمود.



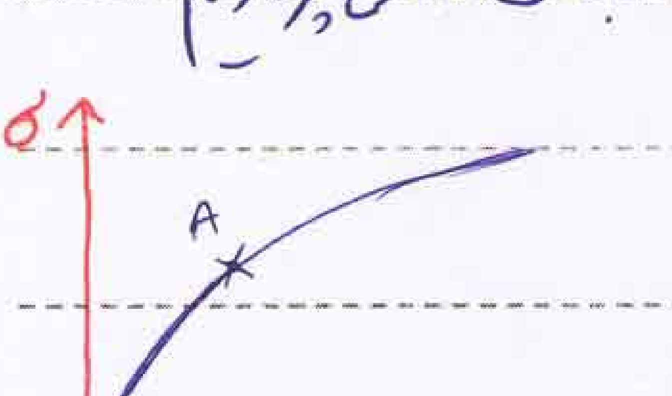
۱- فولاد جزء مصالح شکل پذیر است ولی چدن و بتن شکل پذیر نیستند زیرا کرنش بزرگ نمی‌توانند تحمل کنند.

۲- مقاومت فولاد از چدن و بتن بیشتر است، زیرا تنش نهایی (σ_u) آن از دو نوع مصالح دیگر بیشتر است.

* برخی مشخصات نمودار تنش و کرنش:

روی نمودار تنش و کرنش یک سری نقاط مهم وجود دارد که به آن‌ها می‌پردازیم.

الف) حد تناسب (حد خطی): (نقطه A)

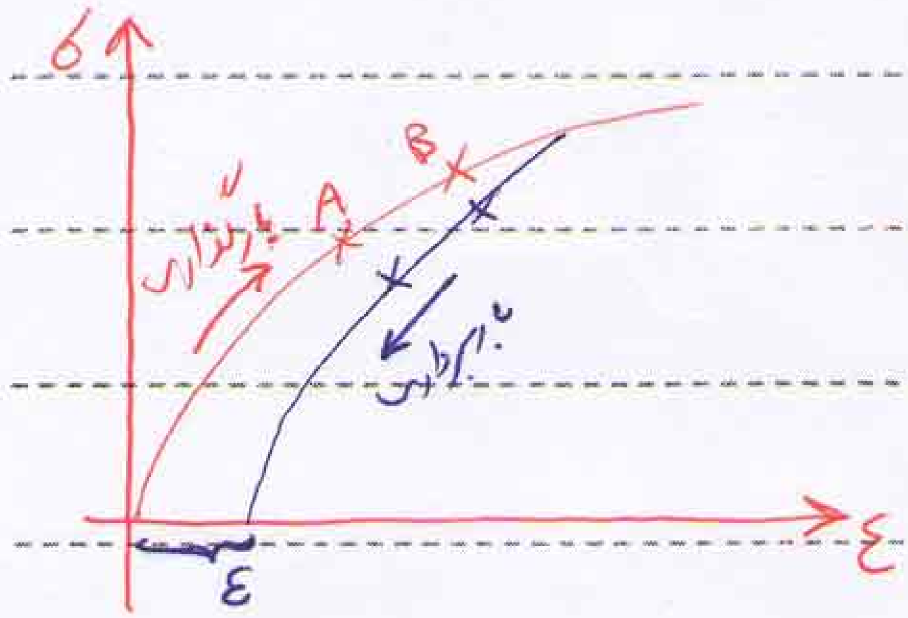


نمودار تنش و کرنش اکثر مصالح تا جایی مثل نقطه A خطی می‌باشد و از آن نقطه به بعد تبدیل به منحنی می‌شود. نقطه‌ای را که از آن به بعد دیاگرام $(\sigma-\varepsilon)$ از خط مستقیم تبدیل به منحنی می‌گردد حد تناسب یا حد خطی می‌نامند.

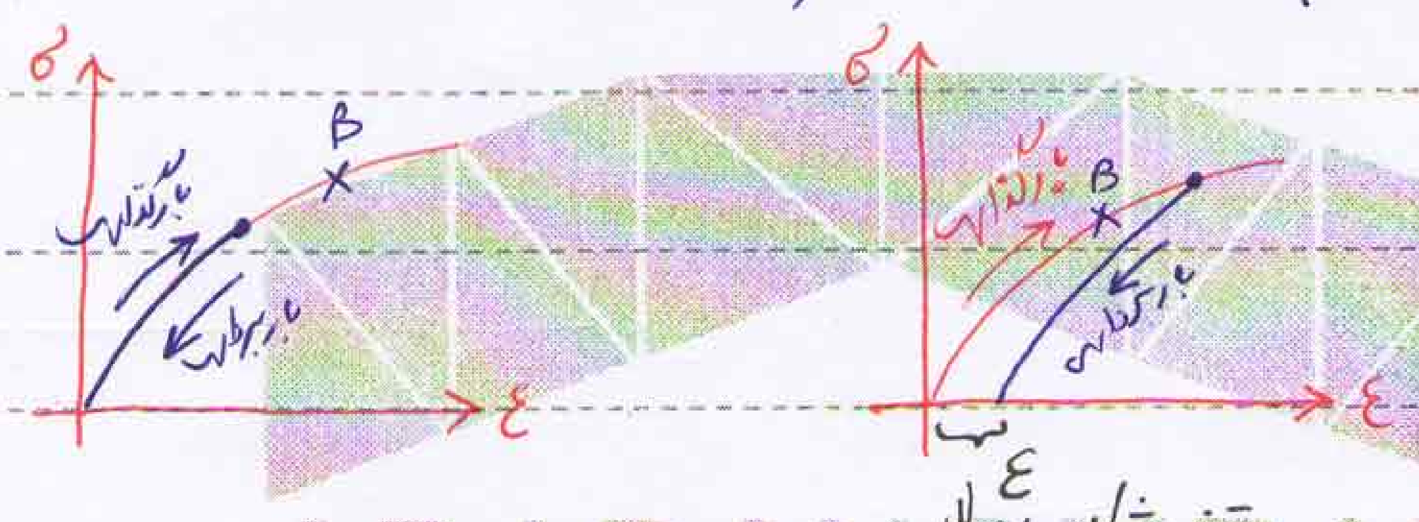
ب) حد الاستیک (حد ارتجاعی): (نقطه B)

نقطه‌ای مانند B روی دیاگرام تنش و کرنش وجود دارد که اگر بارگذاری پایین‌تر از این نقطه

انجام شود مصالح رفتار الاستیک خواهند داشت و نمودار بارگذاری و باربرداری

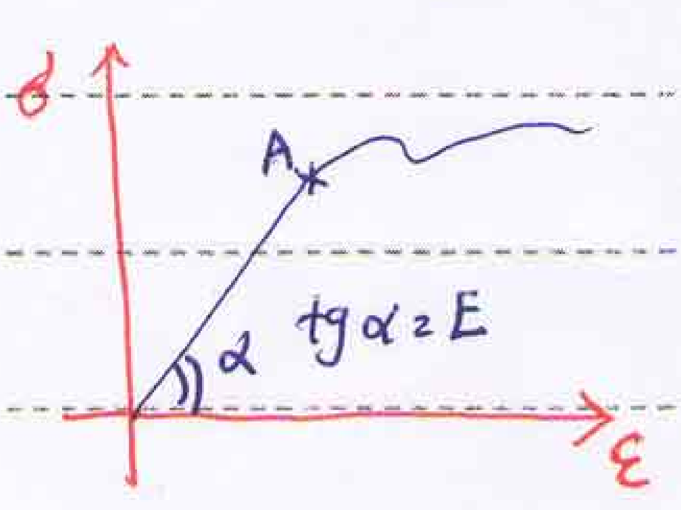


برهم منطبق خواهند بود و در صورتی که نیروهایی فراتر از نقطه‌ی B به مصالح وارد شود رفتار مصالح پلاستیک خواهد بود و نمودار بارگذاری و باربرداری برهم منطبق نخواهد بود و در جسم تغییر شکل ماندگار ایجاد می‌شود. این نقطه را حد ارتجاعی می‌نامند.



* قانون هوک :

گفتیم مصالح همیشه تا جایی مثل نقطه‌ی A رفتار خطی دارند، در این بازه تنش و کرنش با هم متناسب می‌باشند، بنابراین می‌توان نوشت:



$$\sigma \propto \varepsilon$$

$$\sigma = (tg\,\alpha)\,\varepsilon$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma = E\,\varepsilon}$$ قانون هوک

رابطه‌ی بدست آمده قانون هوک نامیده می‌شود.

Subject: مقاومت مصالح

Year: ۹۰ Month. ۱ Date. ۲

E: ضریب الاستیسیته (مدول الاستیسیته)

ضریب یانگ (مدول یانگ)

ضریب ارتجاعی (مدول ارتجاعی)

E جزو خواص مکانیکی مصالح به شمار می رود و برای هر مصالحی مقدار منحصر بفردی دارد. مثلاً فولاد مقدار E مشخصی دارد همینطور برای بتن و ...

فولاد $\Rightarrow E = 2\times10^{6} \ \frac{kg}{cm^2}$

بتن $\Rightarrow E = 2\times10^{5} \ \frac{kg}{cm^2}$

نکته: در مقاومت مصالح فرض می کنیم که قانون هوک همیشه برقرار است و روابط ارائه شده با فرض برقراری این فرمول استفاده می شوند.

* واحد ضریب الاستیسیته برابر واحد تنش است.

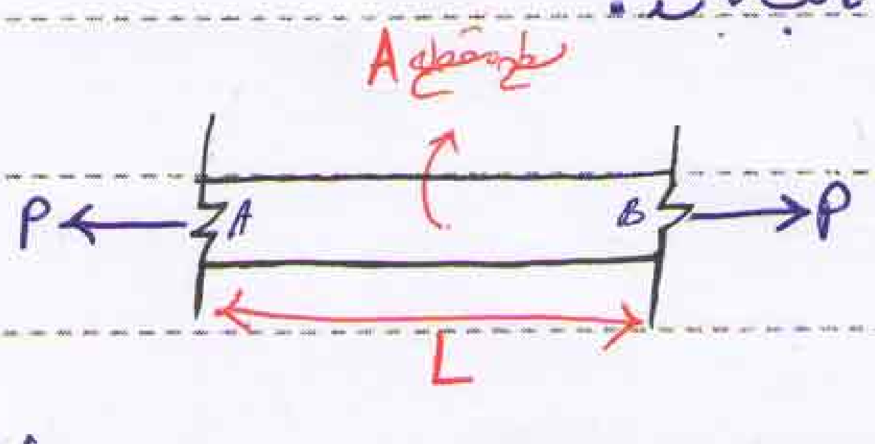
* محاسبه تغییر شکل اعضاء تحت بار محوری:

یک عضو در نظر می گیریم که دارای شرایط زیر باشد:

۱- تحت بار محوری خالص باشد.

۲- نیروی داخلی در بازه ی A تا B ثابت باشد.

۳- سطح مقطع از بازه ی A تا B ثابت باشد.



$$\left.\begin{array}{l} \sigma = \frac{P}{A} \ \text{تنش} \\ \varepsilon = \frac{\delta}{L} \ \text{کرنش} \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{هوک}} \sigma = E\varepsilon$$

$$\Rightarrow \frac{P}{A} = E\,\frac{\delta}{L}$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta = \frac{PL}{EA}}$$

تغییر طول محوری بوجود آمده در عضو؛

$$\Rightarrow \boxed{\delta_{AB} = \frac{P_{AB}\,L_{AB}}{E\,A_{AB}}}$$

در خصوص روبرو:

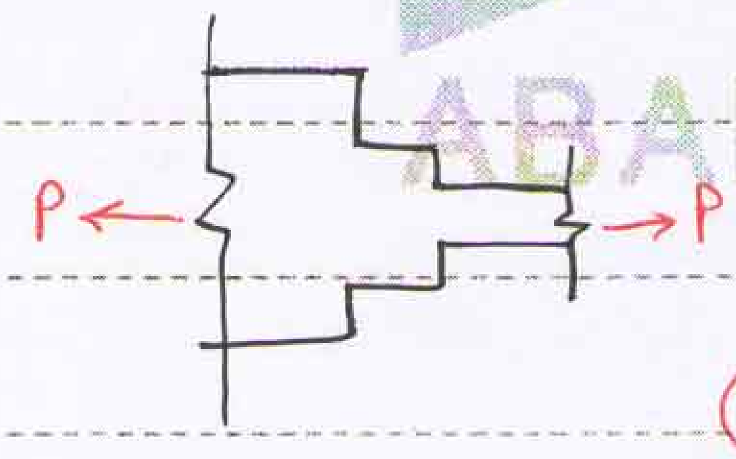
δ_{AB}: یعنی جابجایی نقطه A نسبت به B

P_{AB}: نیروی محوری داخلی در بازه A تا B

L_{AB}: فاصله ی اولیه نقطه A تا B

A_{AB}: سطح مقطع عضو (مساحت)

E: ضریب الاستیسیته مصالح

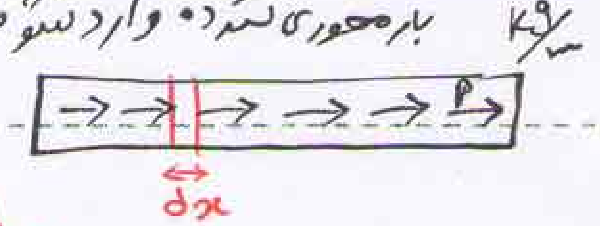


* تعمیم رابطه ی فوق:

حالت اول

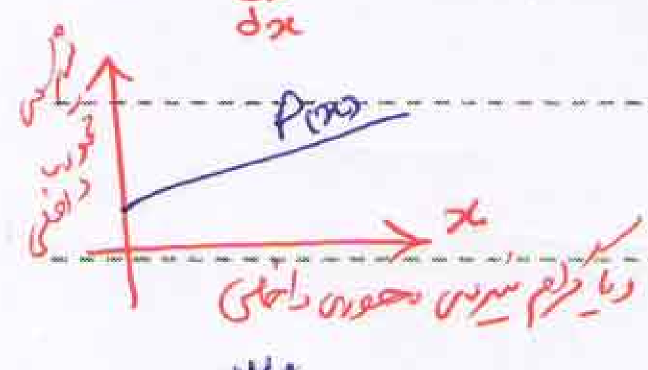
$$\delta = \sum \frac{P_i\,L_i}{E_i\,A_i}$$

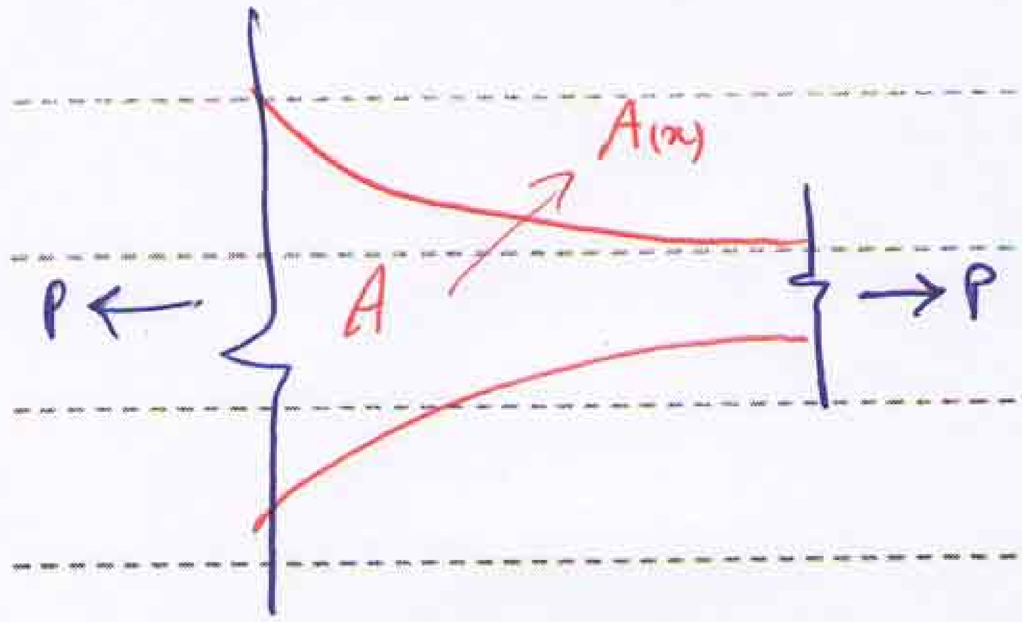
برای حالتی که تغییرات نیروی داخلی یا سطح مقطع پله ای باشد (یعنی می توانیم جسم را به چند تکه که در هر تکه آن P و A ثابت است تغییر دهیم:



حالت دوم

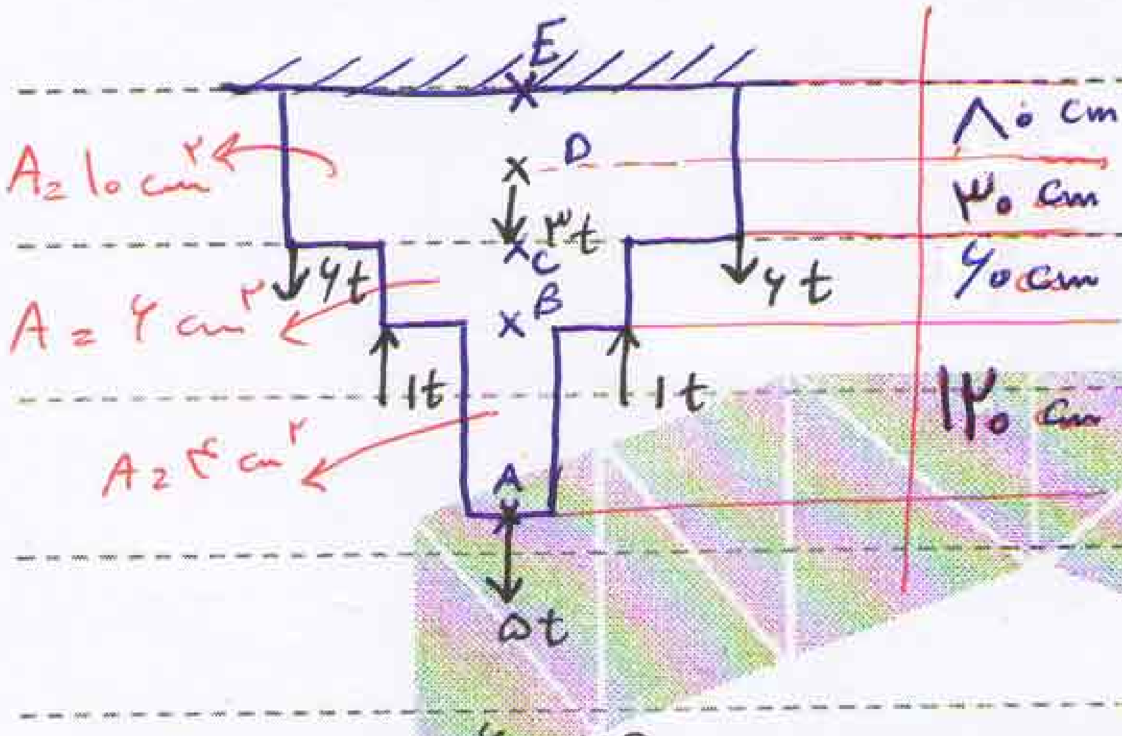
اگر تغییرات P یا A پیوسته باشد (یعنی تابعی از x باشند)





$$\delta = \int_A^B \frac{P(x)}{E\,A(x)}\,dx$$

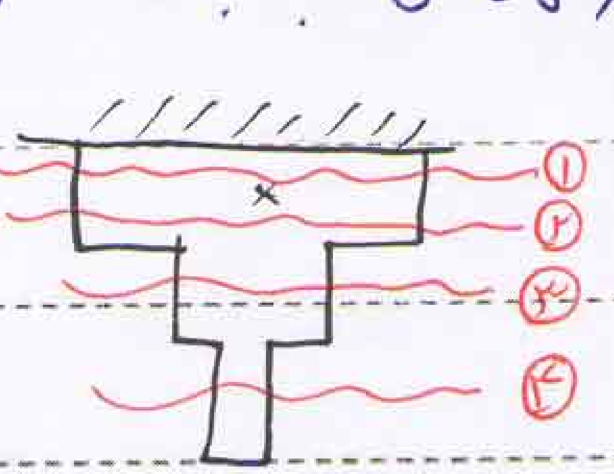
مثال: جسمی با سطح مقطع متغیر مطابق شکل تحت اثر نیروهایی از سقف آویزان است، از وزن جسم صرف نظر می‌شود. تغییر طول کل جسم را بدست آورید؛ و شکل توزیع تنش را در طول جسم ترسیم نمایید.



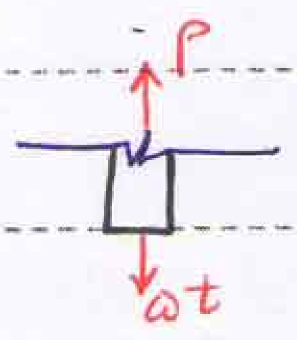
$E = ۲ \times ۱۰^{۶}\ \frac{kg}{cm^{۲}}$

جواب) جسم را به بازه هایی تبدیل می کنیم که هم سطح مقطع و هم نیروی داخلی ثابت باشد.

برش های زیر را می زنیم:



برش شماره ی ۴ بازه ی (A-B):



$\sum F_y = 0 \rightarrow P = ۵t$

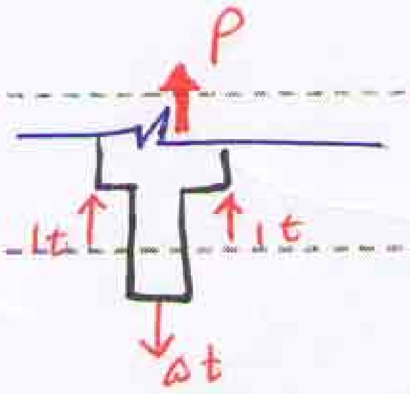
$$\delta_{AB} = \frac{P_{AB}\,L_{AB}}{E\,A_{AB}} = \frac{(۵\times۱۰^{۳})\times(۱۲۰)}{(۲\times۱۰^{۶})\times(۴)} = \boxed{۰/۰۷۵\ cm}$$

$$\sigma = \frac{P_{AB}}{A} = \frac{۵\times۱۰^{۳}}{۴} = ۱۲۵۰\ \frac{kg}{cm^{۲}}$$

Subject : مقاومت مصالح

Year: ۹۰ Month. ۲ Date. ۱

برش شماره ۳ (بازه B-C) :

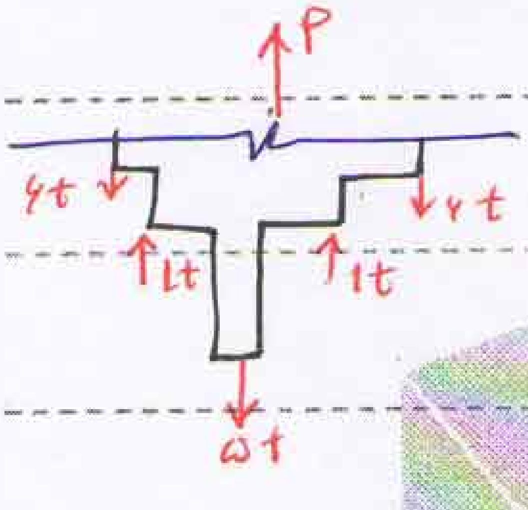


$$\sum F_y = 0 \rightarrow P = 3\ ton$$

$$\delta_{BC} = \frac{P_{BC} L_{BC}}{E A_{BC}} = \frac{(3\times10^3)\times(60)}{(2\times10^6)\times(6)} = \boxed{0.015\ cm}$$

$$\sigma_{BC} = \frac{P_{BC}}{A} = \frac{3\times10^3}{6} = 500\ \frac{kg}{cm^2}$$

برش شماره ۲ (بازه C-D) :

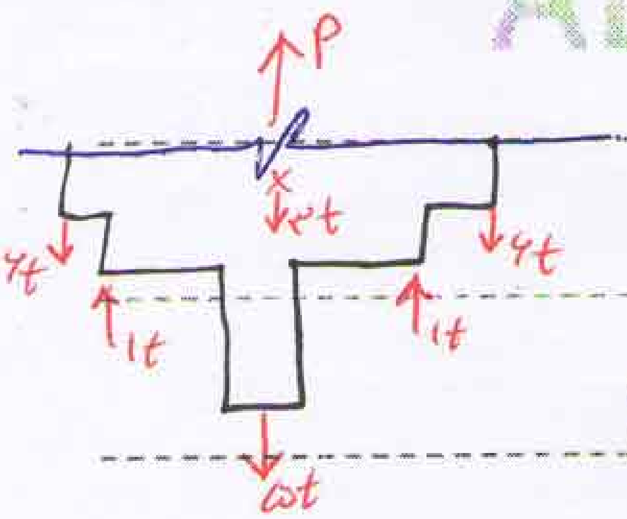


$$\sum F_y = 0 \rightarrow P-6-6+1+1-5=0 \rightarrow P = 15\ ton$$

$$\delta_{CD} = \frac{P_{CD} L_{CD}}{E A_{CD}} = \frac{15\times10^3\times30}{2\times10^6\times10} = \boxed{0.0225\ cm}$$

$$\sigma_{CD} = \frac{P_{CD}}{A} = \frac{15\times10^3}{10} = 1500\ \frac{kg}{cm^2}$$

برش شماره ۱ بازه (DE) :



$$\sum F_y = 0 \rightarrow P-3-6-6+1+1-5=0 \rightarrow P = 18\ ton$$

$$\delta_{DE} = \frac{P_{DE} L_{DE}}{E A_{DE}} = \frac{18\times10^3\times80}{2\times10^6\times10} = \boxed{0.072\ cm}$$

$$\sigma_{DE} = \frac{P_{DE}}{A} = \frac{18\times10^3}{10} = 1800\ \frac{kg}{cm^2}$$

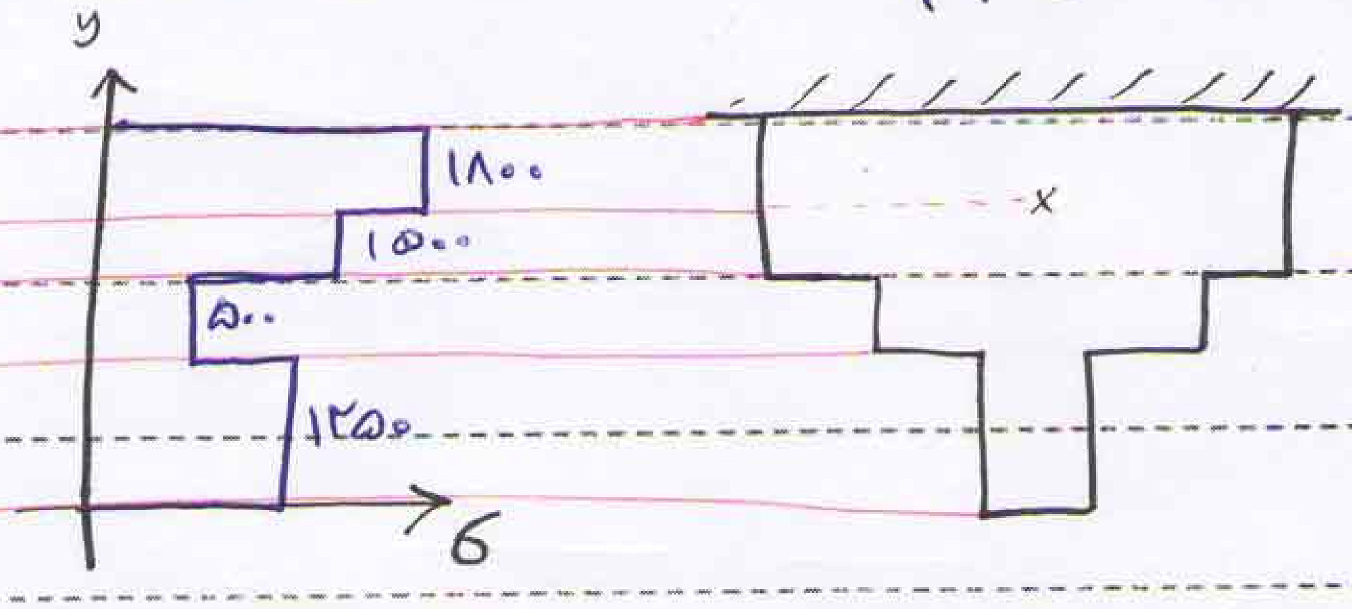
$$\text{کل}\ \delta = \delta_{EA} = \delta_{AB} + \delta_{BC} + \delta_{CD} + \delta_{DE} = \boxed{0.1845\ cm}$$

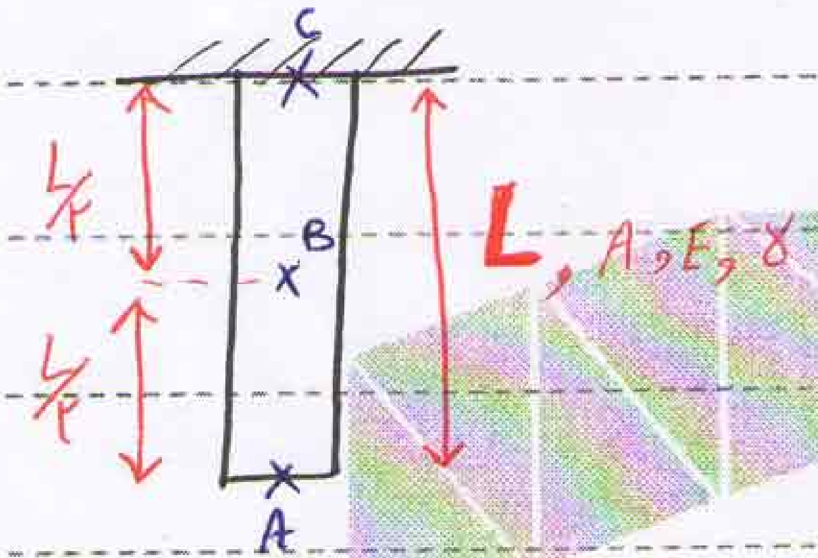
Subject : مقاومت مصالح

Year: ۹۰ Month. ۲ Date. ۱

ABADANOMRAN

شکل تغییرات تنش در طول جسم :

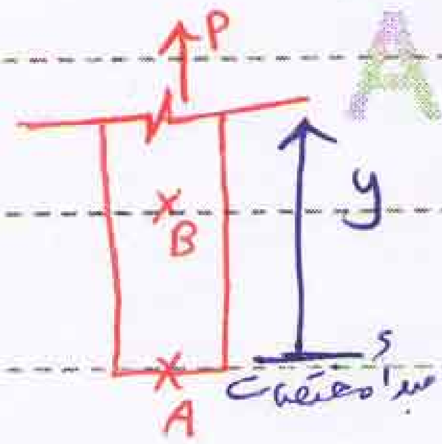




مثال: جسمی مطابق مشخصات نشان داده شده تحت اثر وزن خود از سقف آویزان است، جابجایی نقطه‌ی B را نسبت به سقف بدست آورید:

$\delta_{BC} = ?$

ابتدا باید نیروی داخلی در بازه‌ی BC را محاسبه کنیم:



$+\uparrow \sum F_y = 0 \rightarrow P = W$

$W =$ وزن واحد × حجم

$P = Ay \times \gamma$

$\boxed{P_{(y)} = A\gamma y}$ نیروی داخلی

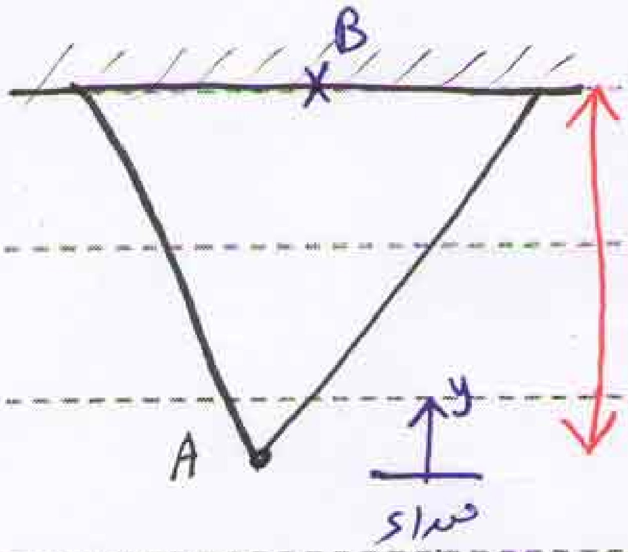
$$\delta_{BC} = \int \frac{P_{(y)}}{EA}\,dy = \frac{\gamma}{E}\int_{\frac{L}{2}}^{L} y\,dy = \frac{\gamma}{E}\left[\frac{y^2}{2}\right]_{\frac{L}{2}}^{L}$$

$$= \frac{\gamma}{E}\left[\frac{L^2}{2} - \frac{\left(\frac{L}{2}\right)^2}{2}\right] \Rightarrow \delta_{BC} = \frac{3\gamma L^2}{16E}$$

Subject :

Year: ۹۰ Month. ۲ Date. ۱

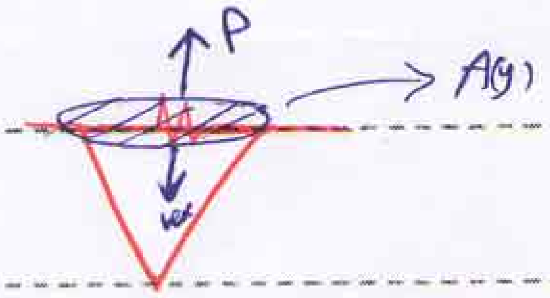
ABADANOMRAN



مثال: جابجایی نقطه‌ی A را نسبت به سقف بیابید.

جسم مخروطی شکل تحت اثر وزن خودش از سقف آویزان می‌باشد.

$\delta_{AB} = ?$



$\sum F_y = 0 \to P = W$

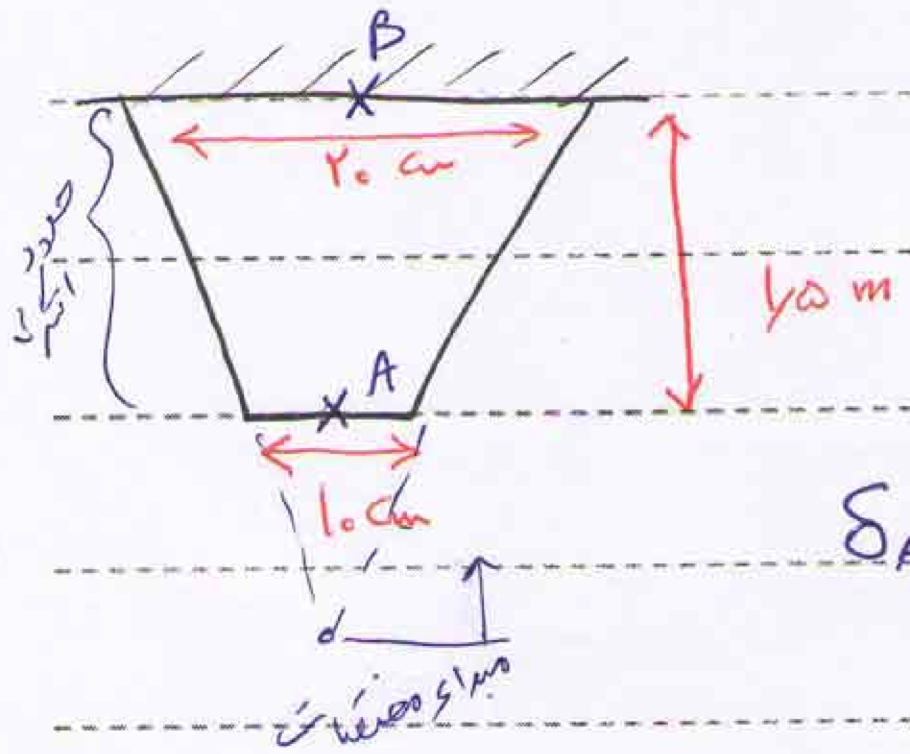
$$W = \underbrace{\text{حجم مخروط}} \times \text{وزن واحد حجم}$$

$$P = \left(\tfrac{1}{3} A(y) \times y\right) \times \gamma$$

$$\delta_{AB} = \int \frac{P(y)}{E\,A(y)}\,dy = \int \frac{\frac{1}{3} A(y) \times y \times \gamma}{E\,A(y)}\,dy$$

$$\to \delta_{AB} = \frac{\gamma}{3E}\int_0^L y\,dy = \frac{\gamma}{3E}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^L = \frac{\gamma L^2}{6E}$$

تمرین: تغییر طول کل جسم را حساب کنید.

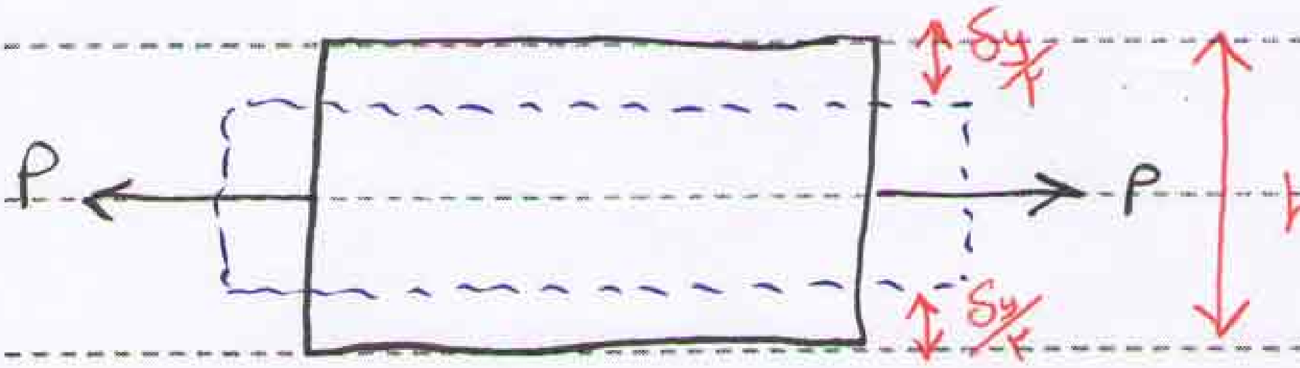


$E = 2 \times 10^6 \ \mathrm{kg/cm^2}$

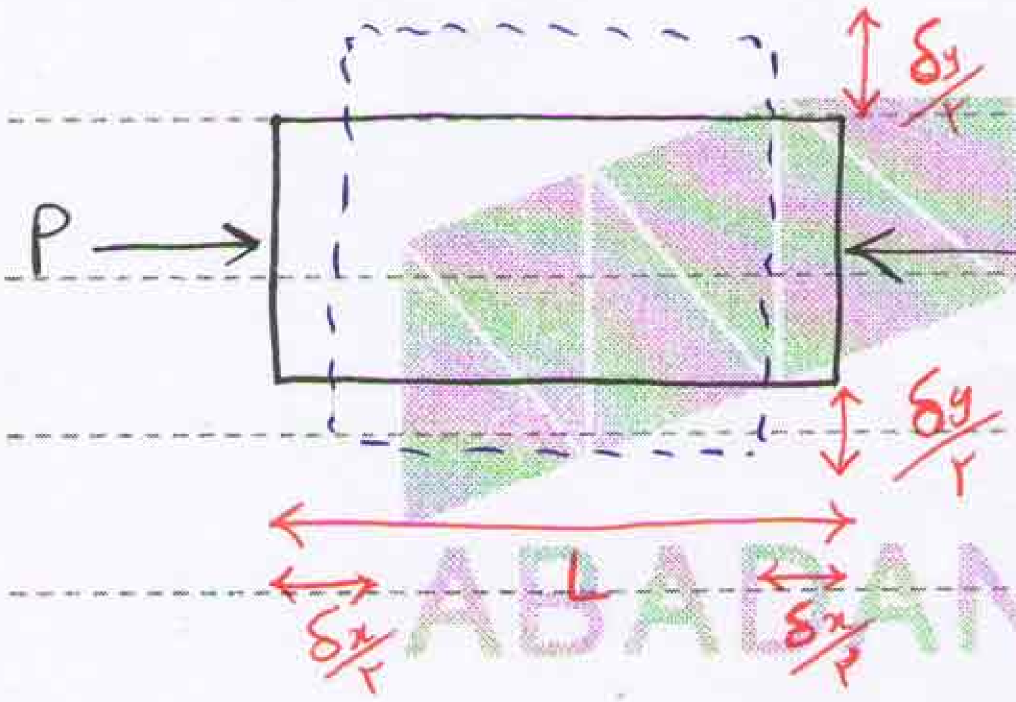
$\gamma = 10 \ \mathrm{kg/cm^3}$

$\delta_{AB} = ?$

اثر پواسون :



* وقتی عضوی تحت اثر بار محوری P قرار می‌گیرد علاوه بر تغییر طولی که در راستای نیرو برای آن اتفاق می‌افتد در جهت عمود بر نیرو نیز انبساط یا انقباض خواهد داشت که به این پدیده اثر پواسون می‌گویند.



* با توجه به شکل های فوق در اثر نیروی محوری P دو نوع کرنش بوجود می‌آید:

۱- کرنش طولی $\varepsilon_x = \dfrac{\delta x}{L}$ (کرنش در جهت نیرو)

۲- کرنش جانبی $\varepsilon_y = \dfrac{\delta y}{h}$ (کرنش در جهت عمود بر نیرو)

* ضریب پواسون :

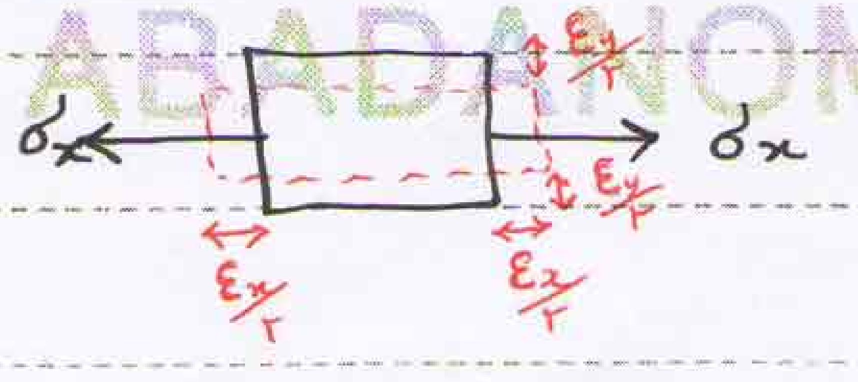
$$\underset{\text{مو}}{\mu} = \frac{\text{کرنش جانبی}}{\text{کرنش طولی}} = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = \left|\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x}\right|$$

در برخی مراجع ضریب پواسون با حرف یونانی ν (نو) نمایش داده می‌شود.

نکته ①: کرنش طولی و کرنش جانبی همیشه علامتی مخالف جهت هم دارند، یعنی اگر یکی از آن‌ها بصورت افزایش طول باشد، دیگری به شکل کاهش طول ظاهر می‌گردد و بالعکس.

نکته ②: ضریب پواسون برای هر نوع مصالحی دارای مقداری منحصر به فرد است و جزء خواص مکانیکی مصالح به شمار می‌آید. حداکثر مقدار ضریب پواسون برابر ۰/۵ بوده و برای مصالح فولاد و بتن مقدار آن حدود ۰/۲۵ تا ۰/۳ می‌باشد.

نکته ③: متذکر می‌شود که هر دو کرنش طولی (ε_x) و کرنش جانبی (ε_y) در اثر تنش σ_x بوجود آمده‌اند.



مثال: یک میله فولادی به قطر ۱۰ سانتی‌متر تحت اثر نیروی کششی قرار دارد، تغییر قطر میله را بعد از اعمال نیرو بدست آورید.

$E = 2\times10^6 \ \frac{kg}{cm^2}$

$\mu = 0.29$

$$\sigma_x = \frac{P}{A} = \frac{90\times10^3}{\pi(5^2)} = 1146 \ \frac{kg}{cm^2}$$

$$\sigma_x = E\varepsilon_x \Longrightarrow 1146 = 2\times10^6\ \varepsilon_x \rightarrow \varepsilon_x = 0.000573$$

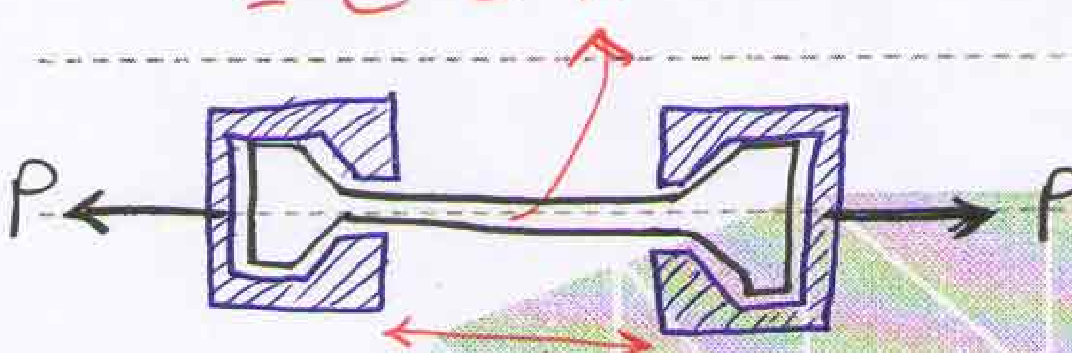
سطح مقطع

$$\mu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} \Rightarrow 0/29 = -\frac{\varepsilon_y}{0/000573} \Rightarrow \varepsilon_y = -0/000166$$ کرنش جانبی

$$\varepsilon_y = \frac{\text{تغییر قطر}}{\text{قطر اولیه}} \Rightarrow -0/000166 = \frac{\text{تغییر قطر}}{10} \Rightarrow \text{تغییر قطر} = \boxed{-0/00166\,cm}$$

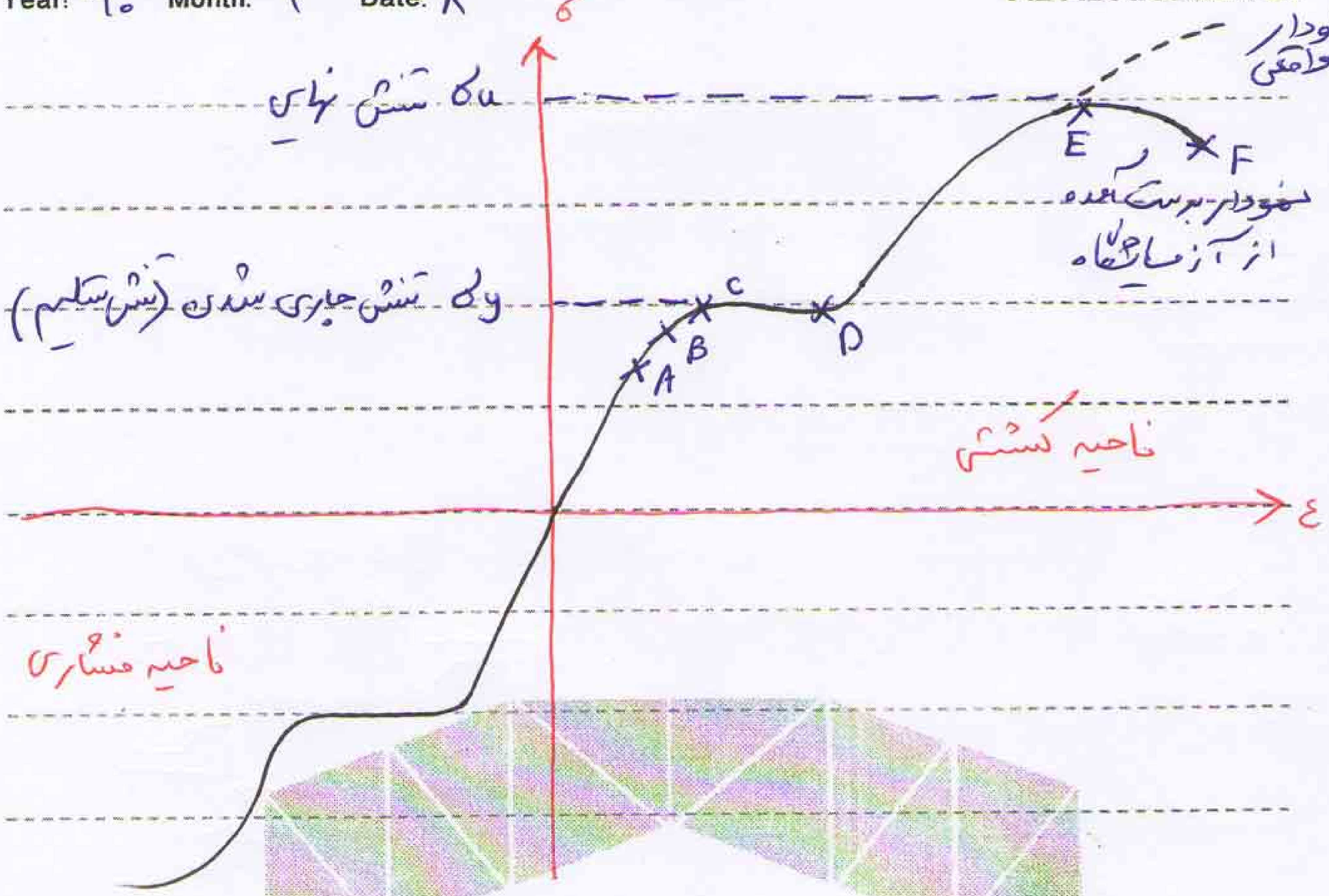
علامت منفی نشانگر کاهش قطر می باشد.

* آشنایی با نمودار تنش - کرنش مصالح فولادی:



* نکته ①: با توجه به توضیحاتی که در رابطه با اثر پواسون گفته شده و متی نمونه‌ای را تحت کشش قرار می دهیم، سطح مقطع مرتباً کاهش می یابد، هم چنین طول آن مرتباً افزایش پیدا می کند، اگر بخواهیم نمودار دقیق تر رسم کنیم در مراحل مختلف بارگذاری برای محاسبه σ و ε می بایست از سطح مقطع و طول تغییر یافته استفاده کنیم، این در حالی است که در دستگاه‌ها به ازای تمام بارهای وارده تنش و کرنش را برحسب طول و سطح مقطع اولیه محاسبه می کنند (A_0 و L_0)، این امر باعث ایجاد خطای ناچیزی می شود که بصورت

نیرو P	تغییر طول δ	تنش $\sigma = \frac{P_i}{A_0}$	کرنش $\varepsilon = \frac{\delta_i}{L_0}$
P_1	δ_1	σ_1	ε_1
P_2	δ_2	σ_2	ε_2
P_3	δ_3	σ_3	ε_3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
P_u	δ_u	σ_u	ε_u



با این اختلاف در انتهای نمودار تنش-کرنش ظاهر می‌گردد.

* نکته ۲: باتوجه به شکل نمودار تنش-کرنش فولاد نتیجه می‌شود که رفتار این مصالح در کشش و فشار یکسان است.

* برخی نقاط مهم روی نمودار تنش کرنش فولاد:

نقطه A ← حد خطی (حد تناسب)

نقطه B ← حد الاستیسیته (حد ارتجاعی)

نقطه C ← حد جاری شدن (حد تسلیم)

نقطه D ← نقطه سخت شدگی مجدد

نقطه E ← حد مقاومت

نقطه F ← حد گسیختگی

✓ توضیح نقطه (C) (حد جاری شدن) : در نمودار تنش - کرنش فولاد نقطه‌ای وجود دارد که از آن نقطه به بعد بدون این که بتوانیم نیروی بزرگتری به فولاد وارد کنیم در آن تغییر شکل بزرگ بوجود می‌آید. در این مرحله اصطلاحاً گفته می‌شود که فولاد جاری شده است (تسلیم شده است). تنش متناسب با نقطه C را تنش جاری شدن یا تنش تسلیم می‌نامند که با σ_y نمایش می‌دهند.

✓ توضیح نقطه (D) (سخت شدگی مجدد) : فولاد پس از جاری شدن به نقطه D که رسید دوباره مقاومت خود را باز می‌یابد و ما می‌توانیم تنش های بزرگتری را به آن اعمال کنیم که این مرحله را اصطلاحاً سخت شدگی مجدد می‌نامند.

✓ توضیح نقطه (E) (حد مقاومت) : بالاترین نقطه در دیاگرام تنش - کرنش فولاد حد نهایی یا حد مقاومت نامیده می‌شود. σ_u بزرگترین تنشی است که فولاد می‌تواند تحمل کند.

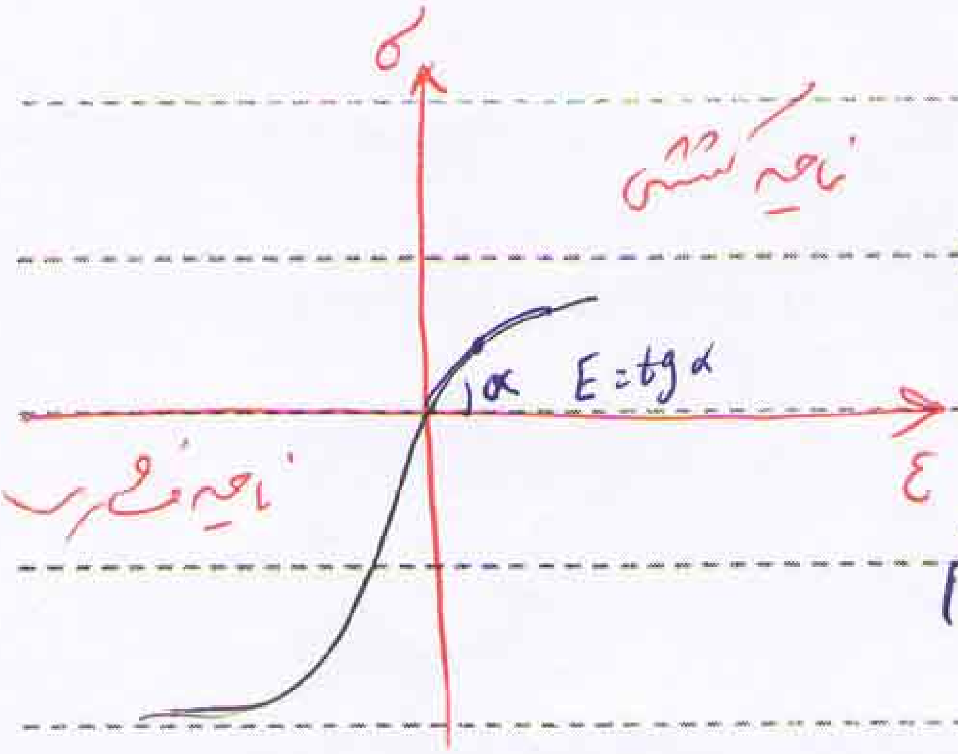
✓ توضیح نقطه (F) (حد گسیختگی) : نقطه‌ای که فولاد در آن گسیخته می‌شود.

*نکته: در نمودار تنش - کرنش فولاد نقاط B و A بسیار نزدیک به هم هستند و معمولاً آن ها را یکی در نظر می‌گیرند.

* نمودار تنش کرنش بتن :

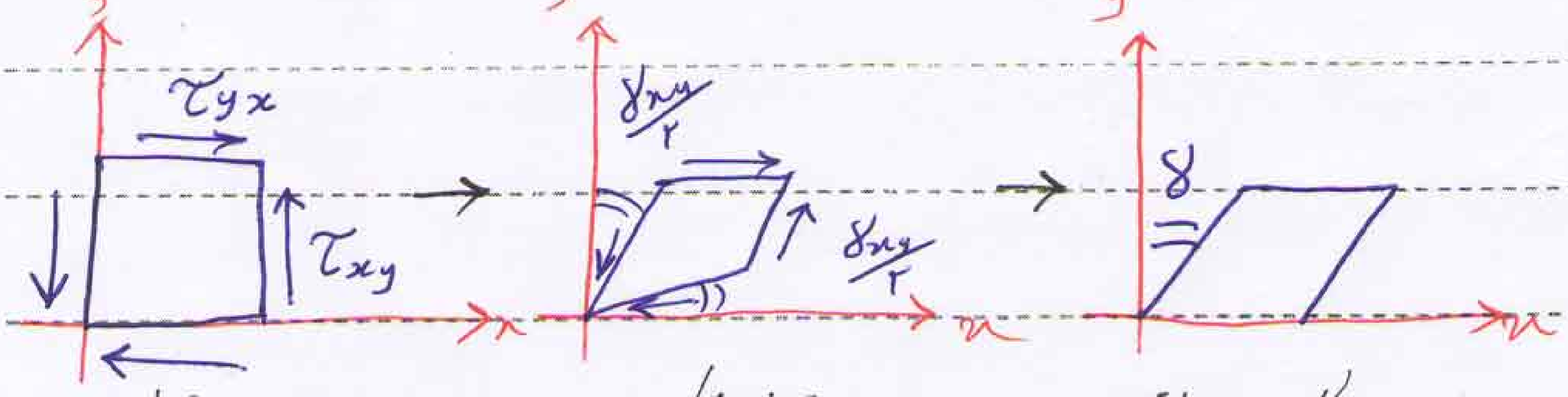
با توجه به نمودار نتیجه می‌گیریم که رفتار بتن در فشار و کشش یکسان نیست یعنی مقاومت کششی بتن خیلی کم است و فقط فشار تحمل می‌کند.

در نمودار ε - σ بتن قسمت خطی به طور واضح وجود ندارد و برای بدست آوردن برخی کمیات مکانیکی مانند E از روش های تقریبی بهره می گیرند. (مثلا نمودار را با چند خط مستقیم تقریب می زنند)



* آشنایی با کرنش برشی :

$$\text{انواع تنش}\begin{cases} \text{قائم } \sigma \Longrightarrow \varepsilon \text{ کرنش طولی} \\ \text{برشی } \tau \Longrightarrow \gamma \text{ کرنش برشی (گاما)} \end{cases}$$



قبل از تغییر شکل — بعد از تغییر شکل — به منظور سادگی محاسبات

هم این صورت نمایش می دهند.

* کرنش های برشی بصورت تغییر زاویه در المان خود نشان می دهند. کرنش برشی را با γ نمایش می دهند و واحد آن برحسب رادیان می باشد.

* تمامی مطالبی که برای تنش و کرنش محوری (σ و ε) گفته شد برای تنش و کرنش برشی (γ و τ) نیز برقرار است.

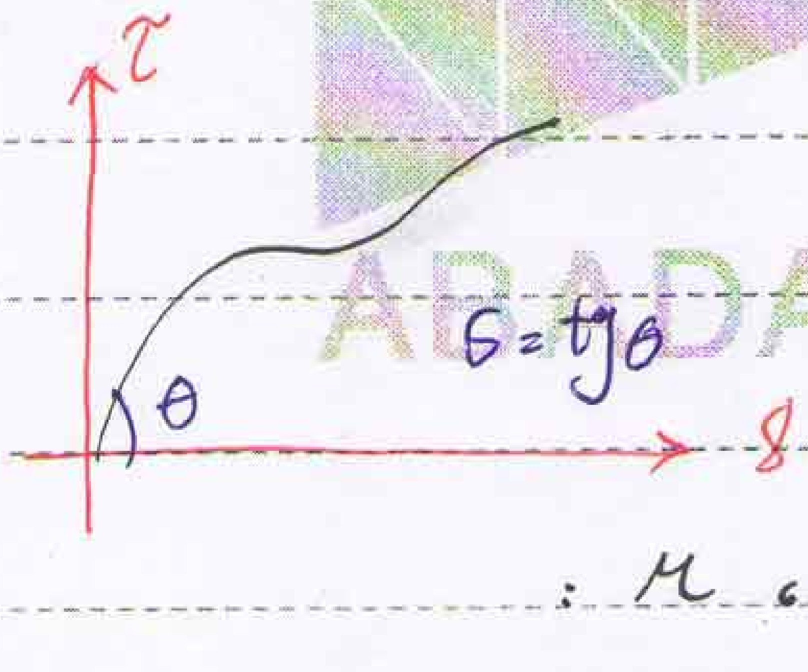
قانون هوک در برش:

ضریب الاستیسیته برشی

$$\tau = G\,\gamma$$

تنش برشی — کرنش برشی

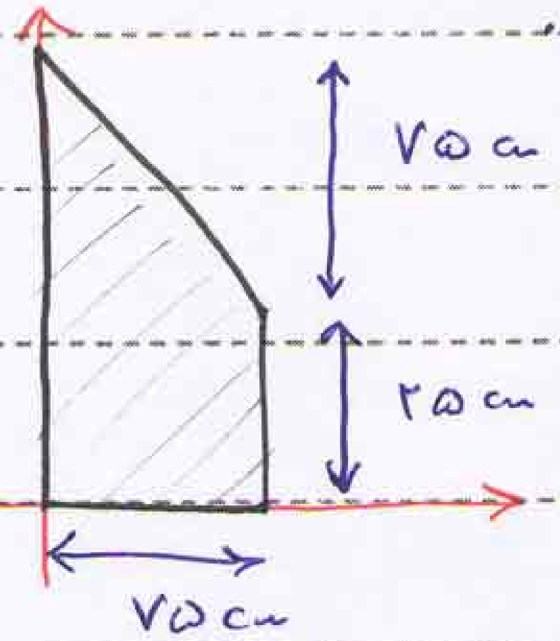
* نمودار تنش-کرنش برشی برای فولاد:



* رابطه بین خواص مکانیکی مصالح G، E، μ:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

مثال: در سطح مقطع زیر محل اثر برآیند بار محوری در چه نقطه ای باشد تا تنش بوجود آمده در سطح مقطع یکنواخت باشد.



اولاً برای این که تنش بوجود آمده از بار محوری یکنواخت باشد، نیروی محوری P باید از مرکز سطح بگذرد.

ثانیاً - برای به دست آوردن مرکز سطح مرکب آنها را به چند شکل منتظم هندسی تقسیم می کنیم. و یک مبدا مختصات کلی در نظر می گیریم و محاسبات را بدین گونه انجام می دهیم:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i A_i}{\sum A_i} = \frac{x_1 A_1 + x_2 A_2}{A_1 + A_2}$$

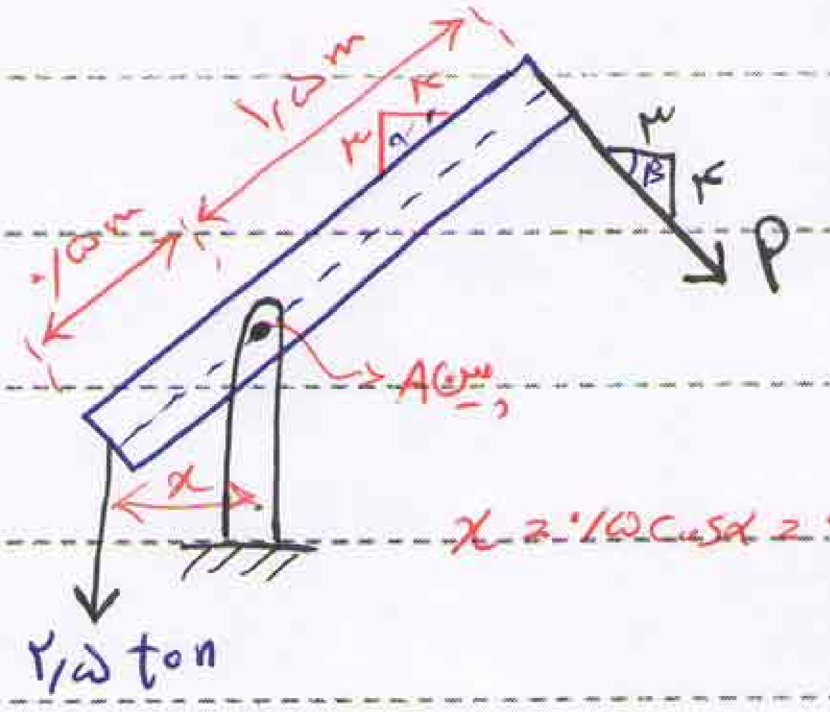
$$= \frac{\left(\frac{۷۵}{۳}\right) \times \left(\frac{۷۵ \times ۷۵}{۲}\right) + \left(\frac{۷۵}{۲}\right) \times (۲۵ \times ۷۵)}{\frac{۷۵ \times ۷۵}{۲} + ۲۵ \times ۷۵} = ۳۰ \text{ cm}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i} = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2}{A_1 + A_2}$$

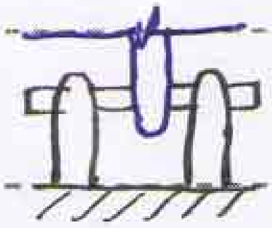
$$= \frac{\left(۲۵ + \frac{۷۵}{۳}\right) \times \left(\frac{۷۵ \times ۷۵}{۲}\right) + \left(\frac{۲۵}{۲}\right) \times (۷۵ \times ۲۵)}{\frac{۷۵ \times ۷۵}{۲} + ۷۵ \times ۲۵} = ۳۵ \text{ cm}$$

مثال) اگر سازه‌ی روبرو در حال تعادل باشد، تنش برشی بوجود آمده در پین A چقدر است؟

قطر پین 10 mm است.

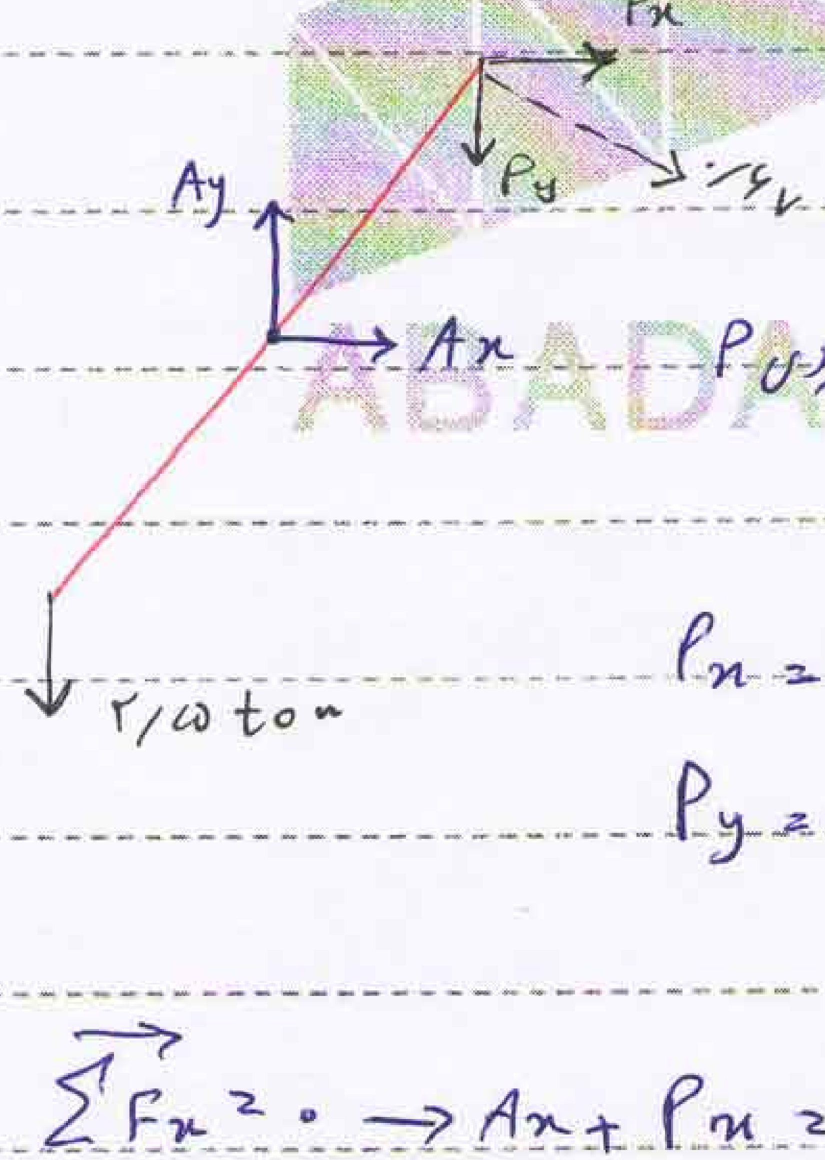


$x = 0.5\cos\alpha = 0.4\ m$



حل) ابتدا باید نیروی P را محاسبه کنید. حول نقطه A لنگرگیری می‌کنیم.

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \to -2.5\times 0.4 + P\times 1.5 = 0 \to P = 0.67\ ton$$



برای بدست آوردن Ax و Ay ابتدا باید نیروی P را در راستای x و y تجزیه کرد.

$$P_x = 0.67\cos\beta = 0.67\times\frac{3}{5}$$

$$P_y = 0.67\sin\beta = 0.67\times\frac{4}{5}$$

$$\sum \vec{F_x} = 0 \to A_x + P_x = 0 \to A_x = -0.67\times\frac{3}{5} = -0.4\ ton$$

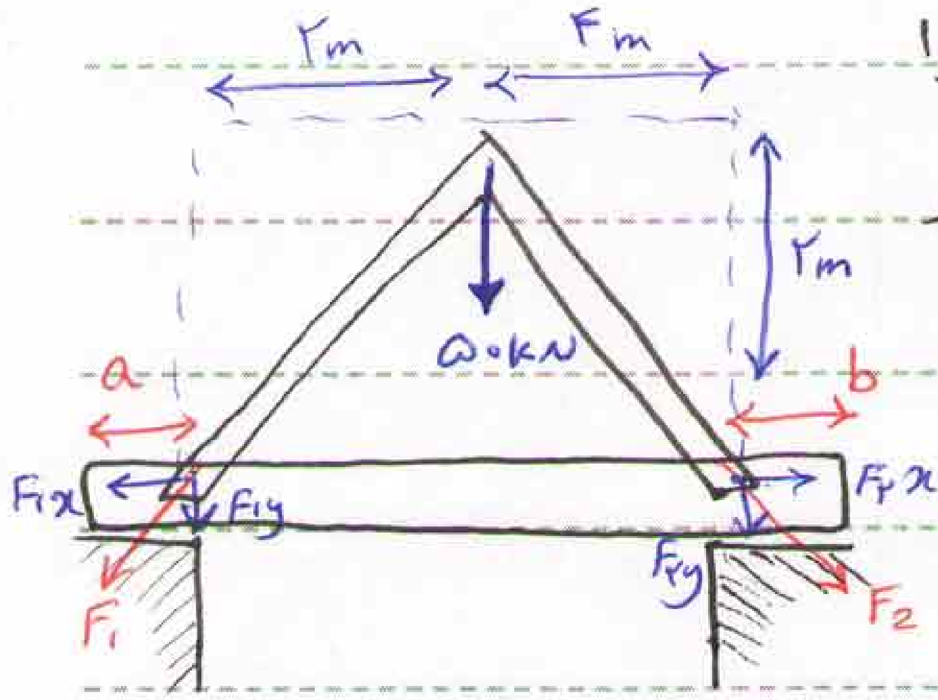
جهت Ax برعکس می‌شود.

$$\to A_x = 0.4\ ton \leftarrow$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \to -2.5 + A_y - 0.67\times\frac{4}{5} = 0 \to \boxed{A_y \simeq 3\ ton}\uparrow$$

$\rightarrow R_A = \sqrt{(A_x)^۲ + (A_y)^۲} = \sqrt{۹/۱۴} \simeq ۳/۰۲ \text{ ton}$

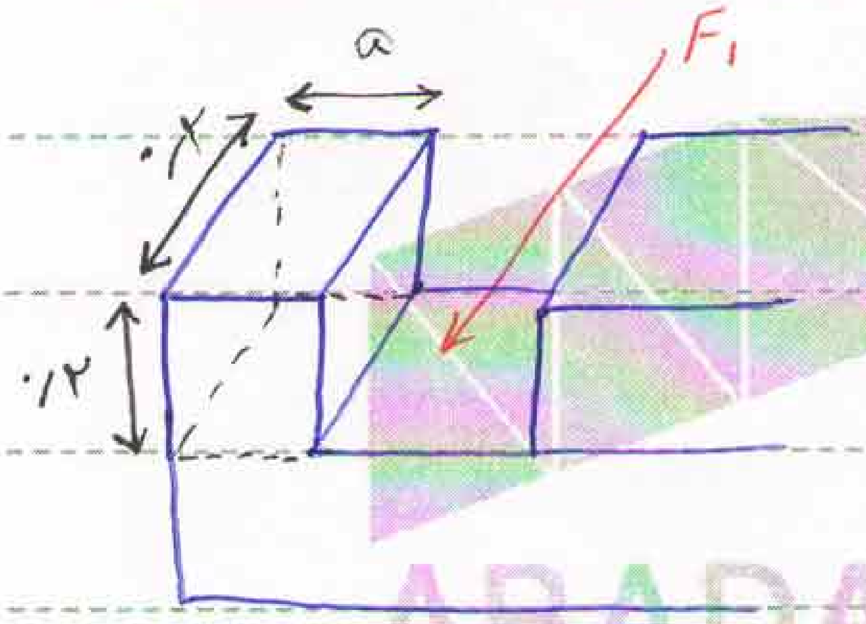
$\rightarrow \tau = \frac{R_A}{۲A} = \frac{۳/۰۲ \times ۱۰^۳}{۲ \times \frac{\pi}{۴} \times ۱۰^۲} \simeq ۱۹/۲ \frac{kg}{cm^2}$



مثال: در سازه‌ی خرپایی مقابل مقادیر A و B را به نحوی تعیین کنید که در سازه گسیختگی بوجود نیاید. ابعاد سطح مقطع اعضا ۰/۲ × ۰/۲ متر می‌باشد.

$\tau_u = 3.5 \frac{N}{mm^2}$ تنش برشی نهایی چوب

$F.S = 5$ ضریب اطمینان

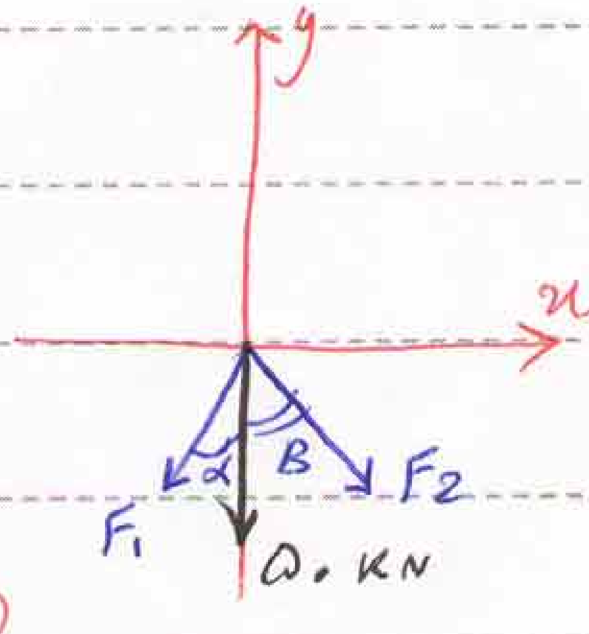


$$\underset{\text{مجاز}}{\tau_{max} \leq \tau_a} = \frac{\tau_u \ \text{نهایی}}{\text{ضریب اطمینان} \ F.S}$$

$$\frac{F_{1x}}{0.2 \times a} \leq \frac{3.5}{5}$$

$$\alpha = tg^{-1}\left(\frac{2}{2}\right) = 45^\circ$$

$$\beta = tg^{-1}\left(\frac{4}{2}\right) = 63.43^\circ$$



$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \rightarrow F_1 \sin\alpha = F_2 \sin\beta$$

$$\rightarrow F_1 = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} F_2 \Rightarrow \boxed{F_1 = 1.26 F_2} \ (1)$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \rightarrow -F_1 \cos\alpha - 50 - F_2 \cos\beta = 0$$

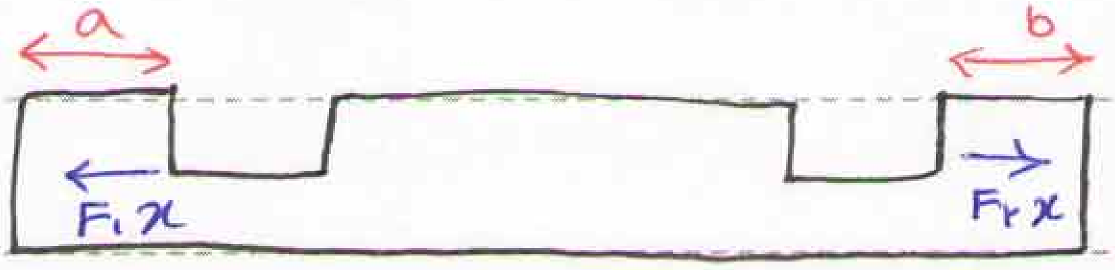
$$(1.26 F_2) \cos\alpha + 50 + F_2 \cos\beta = 0$$

$\Rightarrow F_2 = 37{,}36\ kN$ و $F_1 = 1{,}26\,F_2 = 1{,}26 \times 37{,}36$

$\Rightarrow \boxed{F_1 = 47{,}08\ kN}$

برش در قسمت a : $F_{1x} = F_1 \sin\alpha = 33{,}3\ kN$

برش در قسمت b : $F_{2x} = F_2 \sin\beta = 34{,}41\ kN$



برای بدست آوردن طول a می بایست ماکزیمم تنش بوجود آمده کمتر از تنش مجاز باشد.

$$a = ? \Rightarrow \tau_{max} \leq \tau_a = \frac{\tau_u}{F.S}$$

$$\frac{F_{1x}}{a \times 0{,}2} \leq \tau_a \rightarrow \frac{33{,}3 \times 10^3}{a \times 0{,}2 \times 10^3} \leq \frac{3{,}5}{5} \rightarrow a \geq 237{,}85\ mm$$

$$b = ? \Rightarrow \tau_{max} \leq \tau_a \Rightarrow \frac{F_{2x}}{b \times 0{,}2} \leq \frac{\tau_u}{F.S}$$

$$\frac{33{,}41 \times 10^3}{b \times 0{,}2 \times 10^3} \leq \frac{3{,}5}{5} \rightarrow b \geq 238{,}64\ mm$$

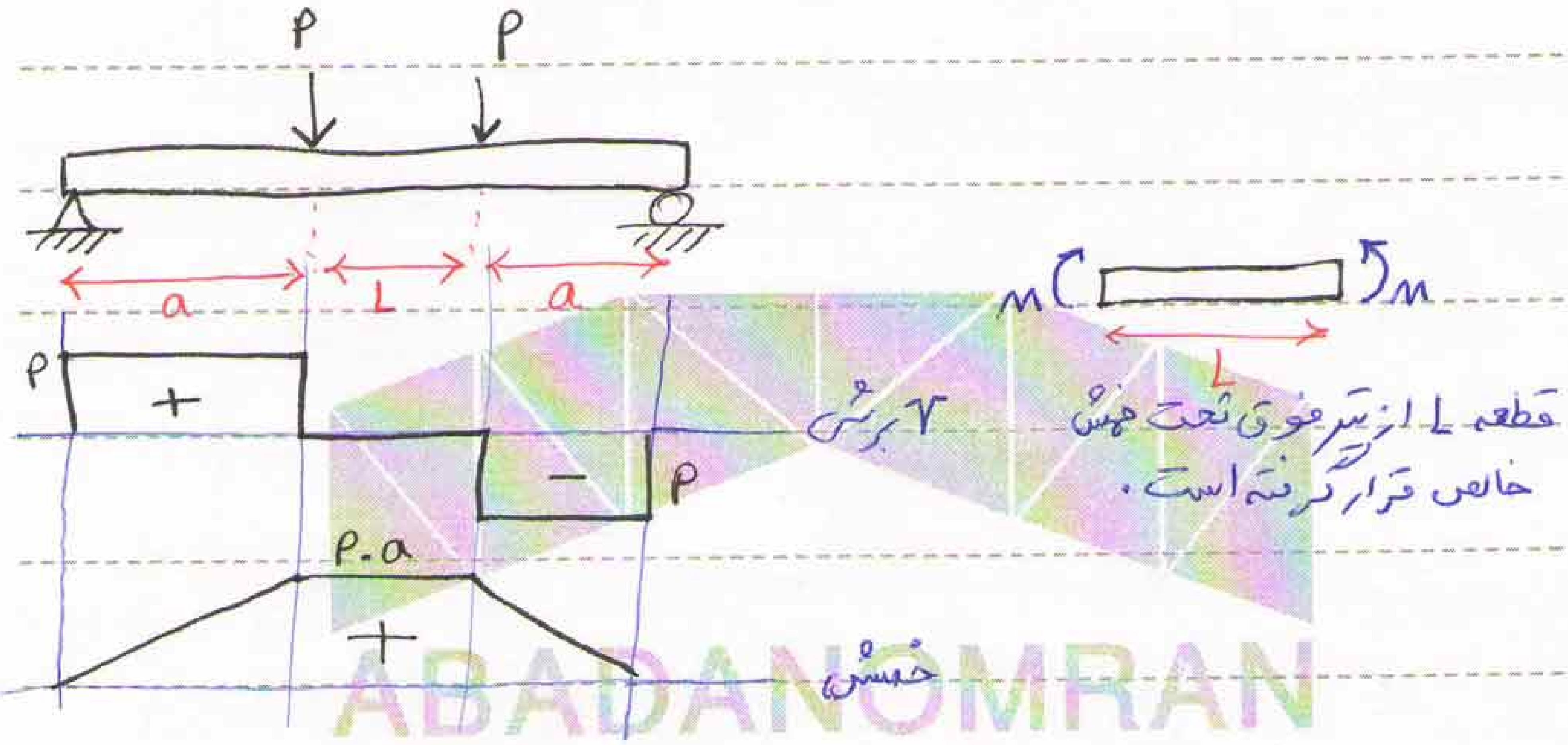
حل تکالیف فصل برش محوری

۲۱_۲۰_۱۸_۱۶_۳

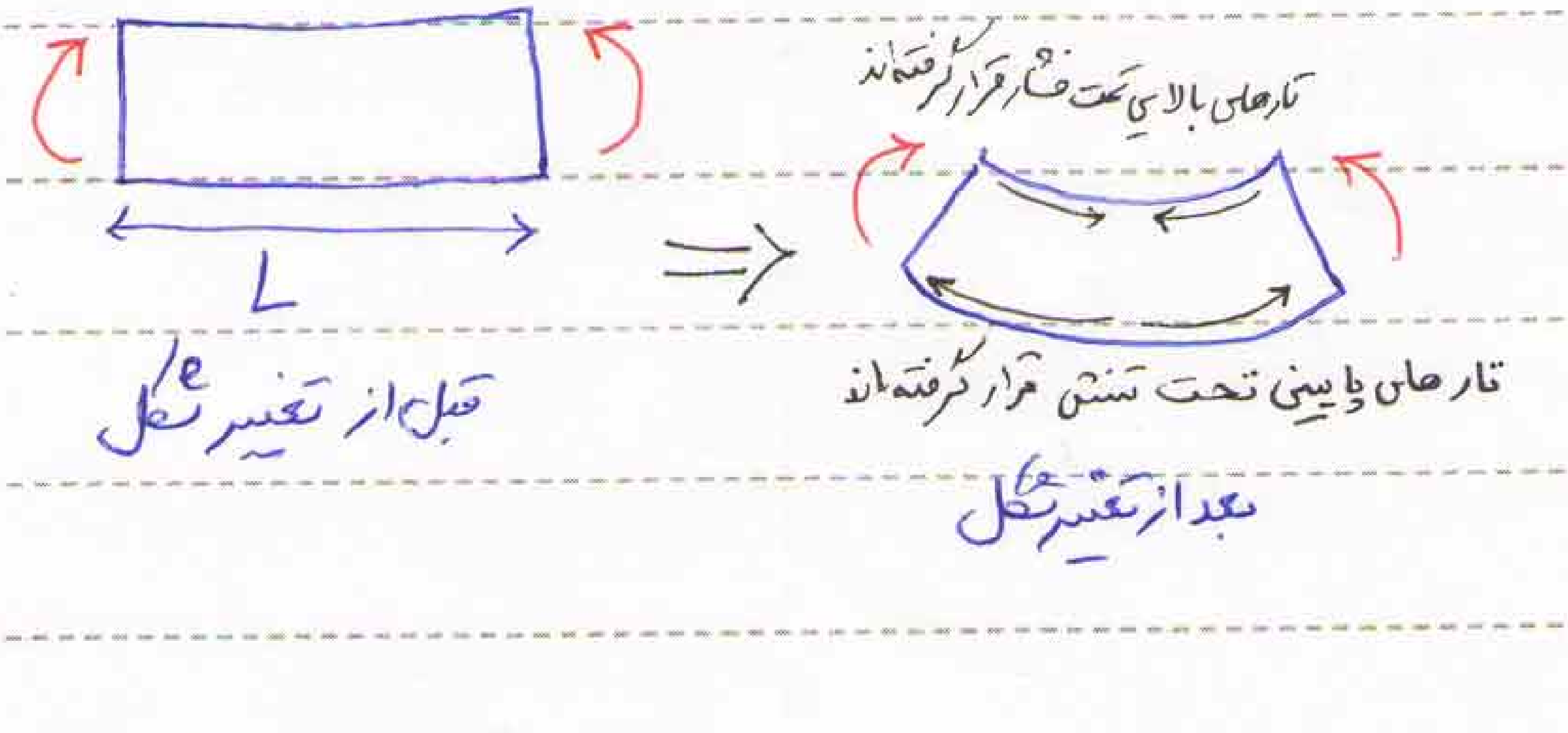
فصل چهارم - تنش ناشی از لنگر خمشی

تنش‌های خمشی «Bending Stresses»

خمش خالص: تیری در نظر می‌گیریم که تحت اثر خمش خالص باشد، یعنی هر کجای آن که برش بزنیم تنها نیروی داخلی که وجود دارد لنگر خمشی می‌باشد.



سؤال می‌خواهیم ببینیم که در اثر لنگر خمشی چه نوع تنش‌هایی در این قطعه ایجاد می‌شود؟



تغییر شکل تقریبی تیر قبل بصورت زیر است :

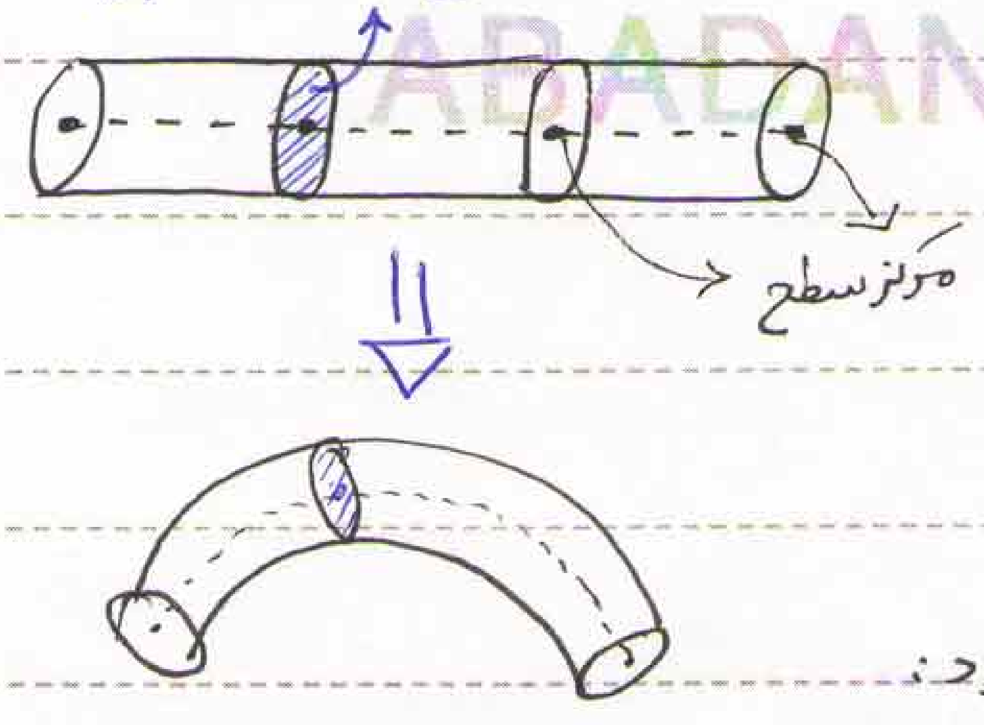
از آن جایی که تارهای تیر افزایش طول یا کاهش طول پیدا کرده اند، نتیجه می گیریم که در اثر لنگر خمشی در یک تیر کرنش طولی ε و در نتیجه تنش قائم σ بوجود می آید.

* محاسبه ی تنش های قائم ناشی از خمش :

با استفاده از فرض زیر می توان تنش قائم ناشی از خمش را بدست آورد :

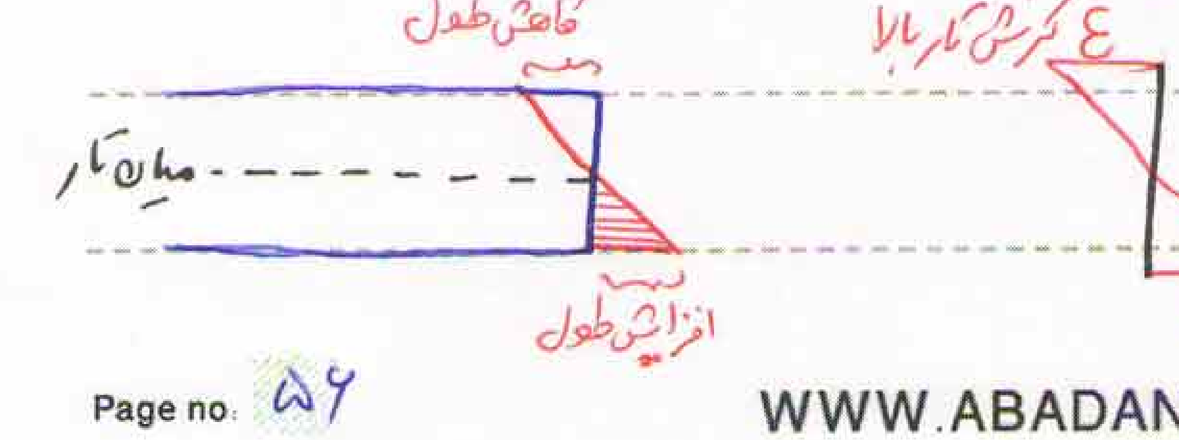
* فرض اساسی خمش : مقاطع صفحه ای عمود بر میان تار بعد از تغییر شکل بصورت صفحه ای باقی می مانند. «سؤال امتحانی ترم قبل»

اگر نقاط مرکز سطح مقاطع ها را به هم وصل کنیم میان تار بوجود می آید :



* از فرض اساسی خمش نتایج زیر حاصل می شود :

الف) کرنش ها در طول یک سطح مقطع بصورت خطی تغییر می کند.



نمودار تغییرات کرنش

Subject : مقاومت مصالح

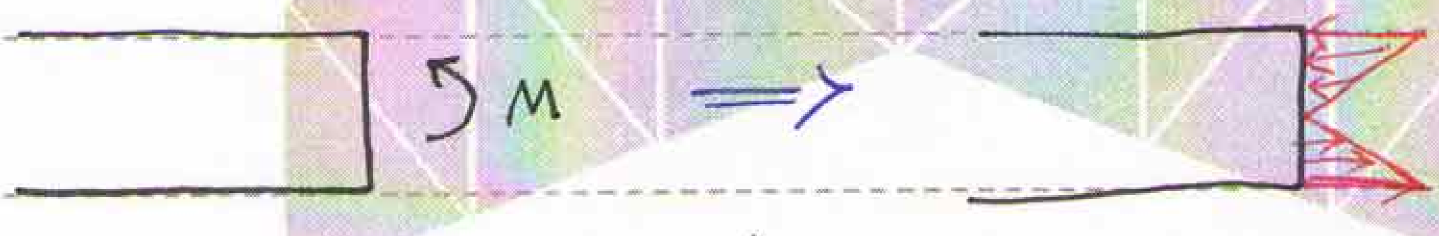
Year: 90 Month. 2 Date. 22

ABADANOMRAN

ب) چون طبق قانون هوک $\sigma = E\varepsilon$ تنش با کرنش متناسب است، بنابراین از
بند (الف) نتیجه می‌شود که تنش‌ها نیز بصورت خطی تغییر می‌کند

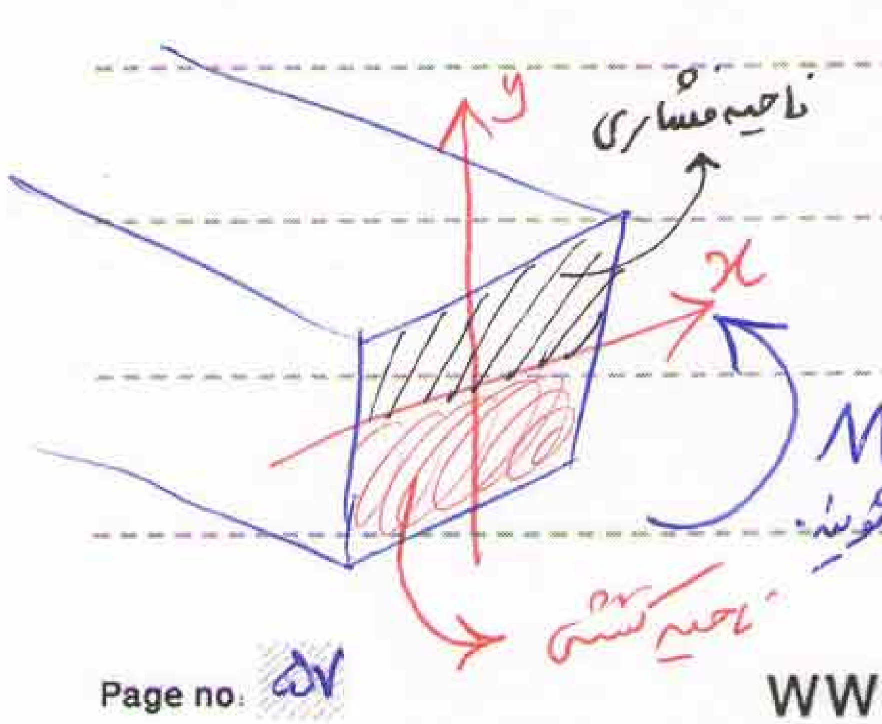
شکل تغییرات تنش ناشی از خمش

مقایسه توزیع تنش قائم ناشی از بار محوری P و لنگر خمشی M



تعریف تار خنثی: در شکل‌هایی که تحت اثر لنگر خمشی قرار داشتند تاری وجود داشت
که همیشه کرنش و تنش آن صفر می‌باشد که به آن تار خنثی می‌گویند.

* تار خنثی منطبق بر میانتار می‌باشد.

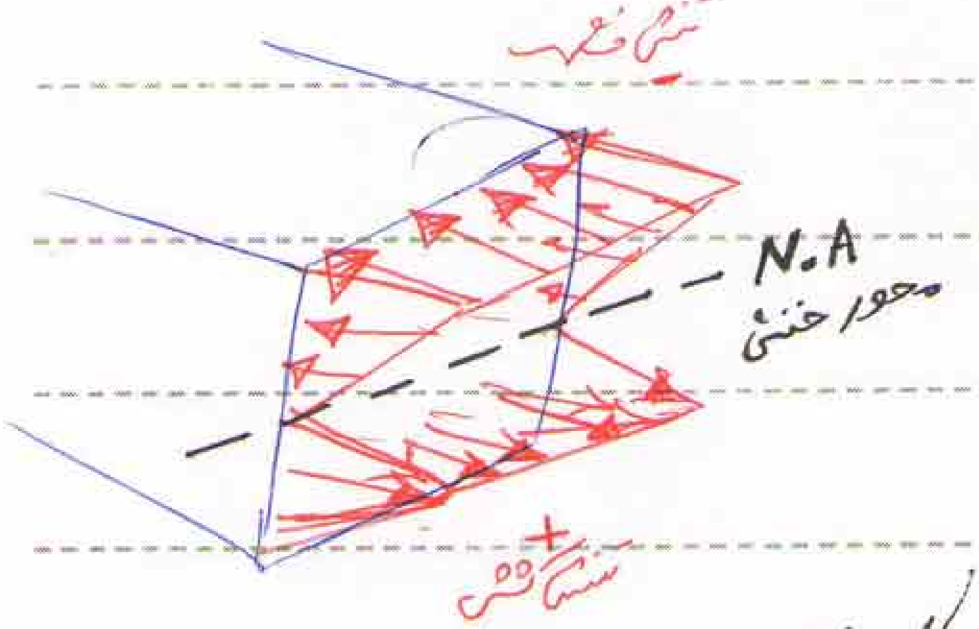


تعریف محور خنثی: (N.A)

در شکل روبرو محور x از مرکز سطح می‌گذرد
و تنش نقاط روی آن برابر صفر می‌باشد که به این محور خنثی گویند.

* محور خنثی از مرکز سطح می گذرد

* به محور خنثی خط تنش های صفر نیز می گویند.



* رابطه ی محاسبه ی تنش های ناشی از لنگر خمشی:

$$\sigma = \frac{M}{I} y$$

در این رابطه:

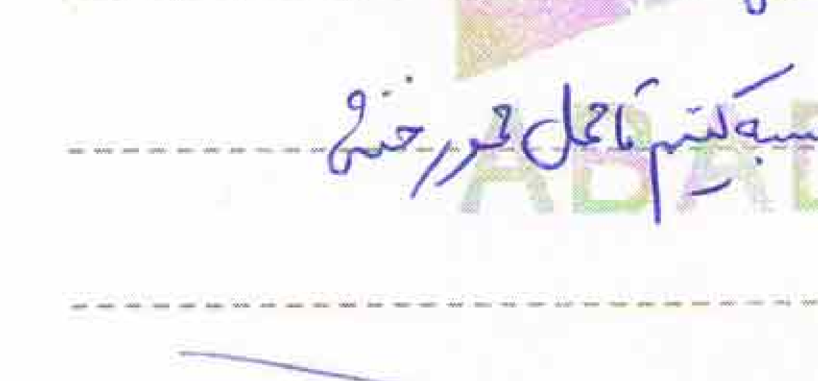
M: لنگر داخلی (لنگر خمشی) در سطح مقطع مورد نظر می باشد که از دیاگرام نیروهای داخلی بدست می آید.

I: ممان اینرسی سطح مقطع نسبت به محور خنثی

y: فاصله نقطه ای که می خواهیم تنش آن را محاسبه کنیم تا محل محور خنثی

تعیین علامت تنش ناشی از لنگر خمشی:

ابتدا M، I و y را مثبت در فرمول $\sigma = \frac{M}{I} y$ قرار می دهیم سپس با توجه به جهت لنگر M علامت تنش ها را تعیین می نمائیم.

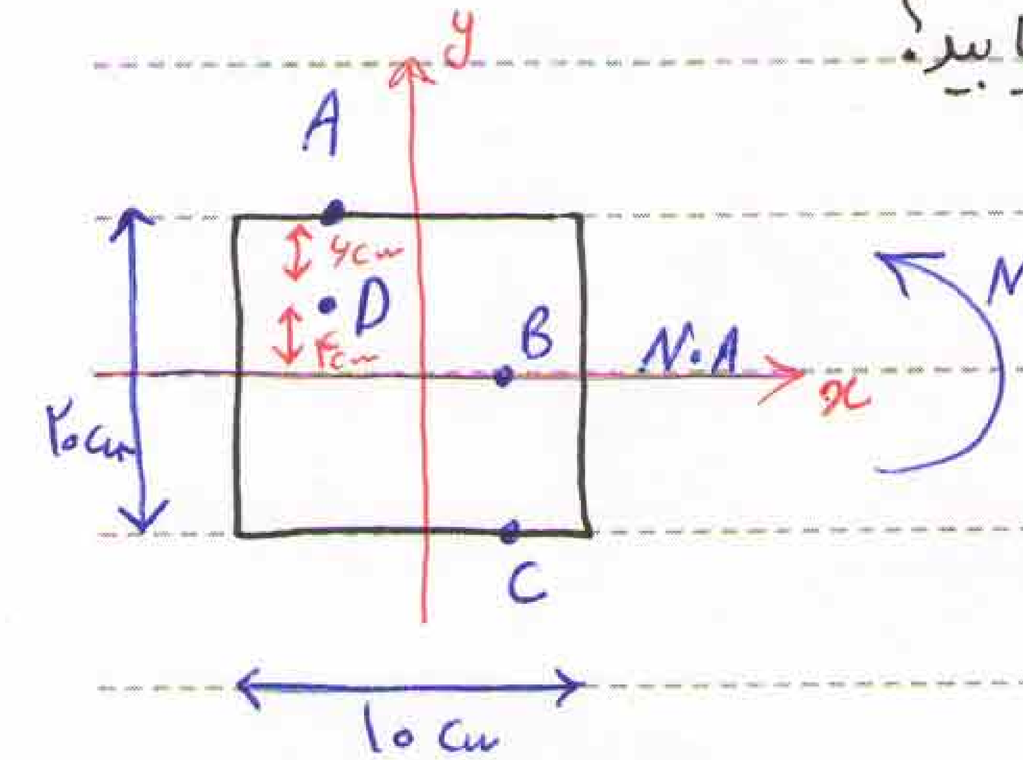


در شکل فوق با توجه به جهت M

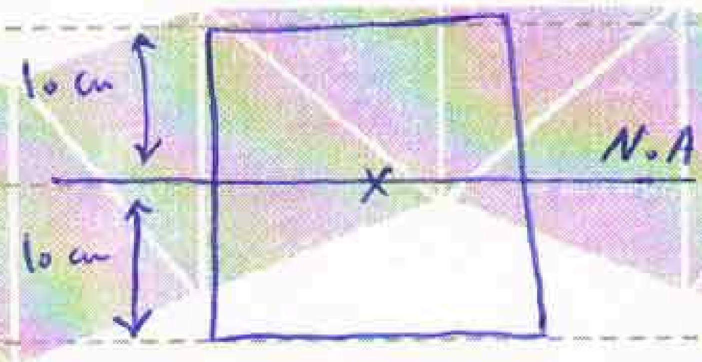
$\sigma_A < 0$ فشاری

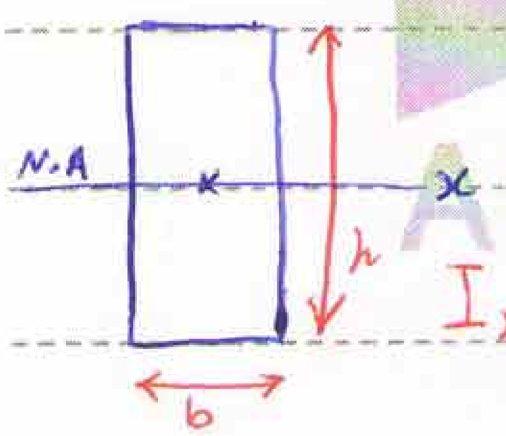
$\sigma_B > 0$ کششی

مثال) به سطح مقطع روبرو لنگر خمشی $M = 100\ KN.m$ موثر است.
تنش های قائم در نقاط A و B و C و D را بیابید؟



حل) گام اول - محاسبه ی مرکز سطح
به خاطر این که مبدا مختصات را روی مرکز سطح قرار دهیم و محور خنثی نیز از مرکز سطح می گذرد.





گام دوم - ممان اینرسی حول سطح مقطع نسبت به محور خنثی تعیین می کنیم

$$I_x = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_{N.A} = \frac{10 \times (20)^3}{12} = 6666,67\ cm^4$$

$$\sigma_A = \frac{M}{I} y = \frac{100 \times 10^5}{6666,67} (10) = -15000\ \frac{N}{cm^2}$$ فشاری

$$\sigma_B = \frac{M}{I} y = \frac{100 \times 10^5}{6666,67} (0) = 0$$

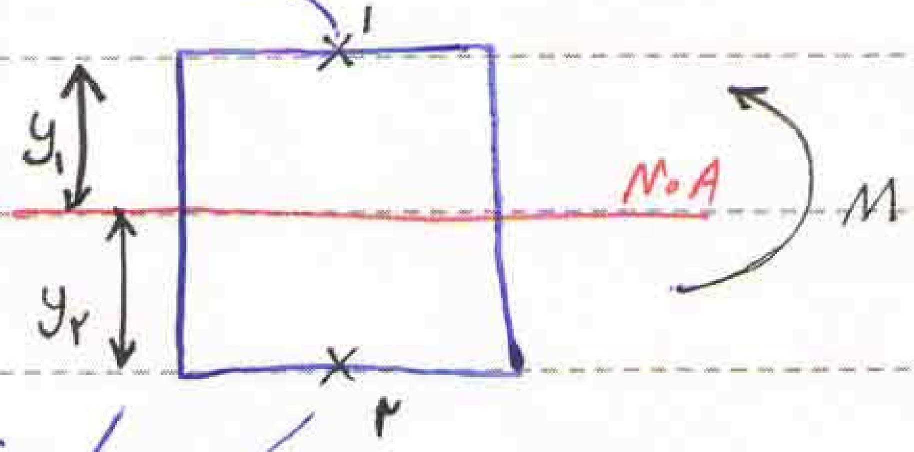
$$\sigma_C = \frac{M}{I} y = \frac{100 \times 10^5}{6666,67} (10) = +15000\ \frac{N}{cm^2}$$ کششی

$$\sigma_D = \frac{M}{I} y = \frac{100 \times 10^5}{6666,67} (4) = -6000\ \frac{N}{cm^2}$$ فشاری

* ماکزیمم تنش های ناشی از خمش در دورترین تارها نسبت به محور خنثی اتفاق می افتند.

ماکزیمم تنش فشاری

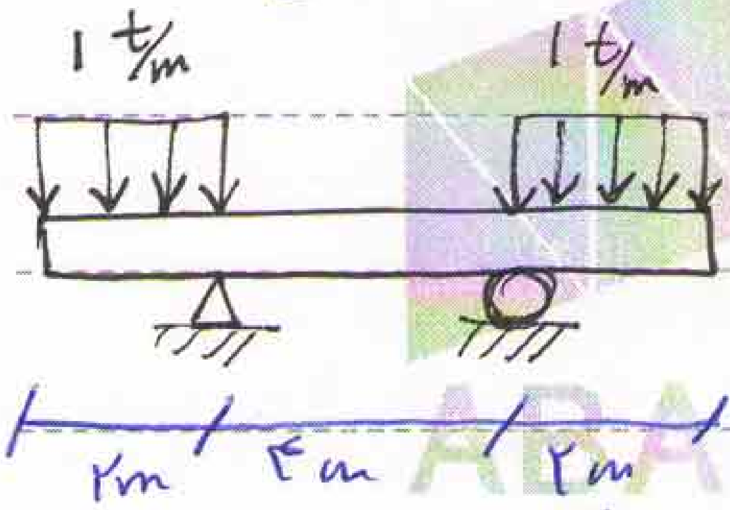
$\sigma_1 = \frac{M}{I} y_1$

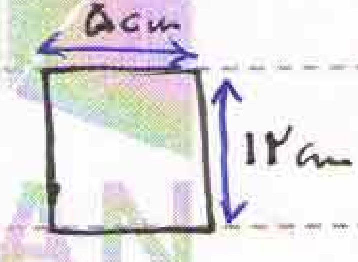


ماکزیمم تنش کششی

$\sigma_2 = \frac{M}{I} y_2$

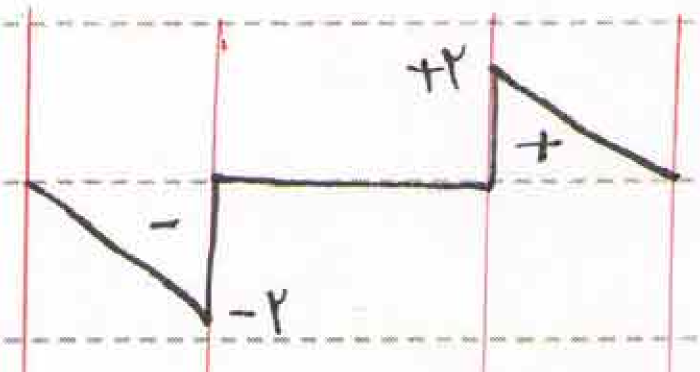
مثال: ماکزیمم تنش خمشی در تیر روبرو چقدر است؟





$\sigma_{max} = \frac{M}{I} y$

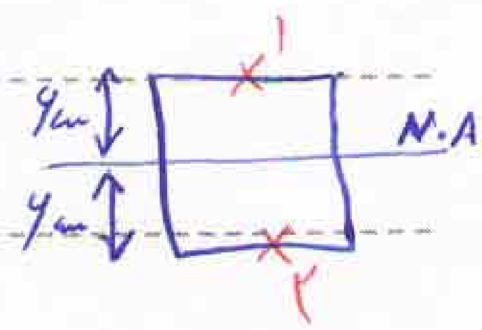
حل) مقدار σ_{max} در مقطعی اتفاق می افتد که لنگر داخلی ماکزیمم باشد بنابراین ابتدا می بایست دیاگرام نیروهای داخلی را ترسیم می کنیم.



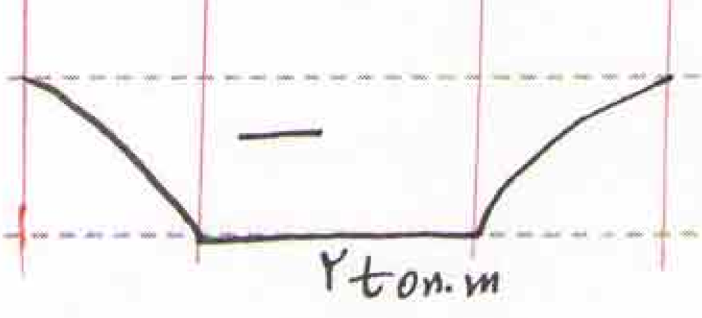
با توجه به نمودار M ملاحظه می شود که

$M_{max} = 2 \ ton.m$

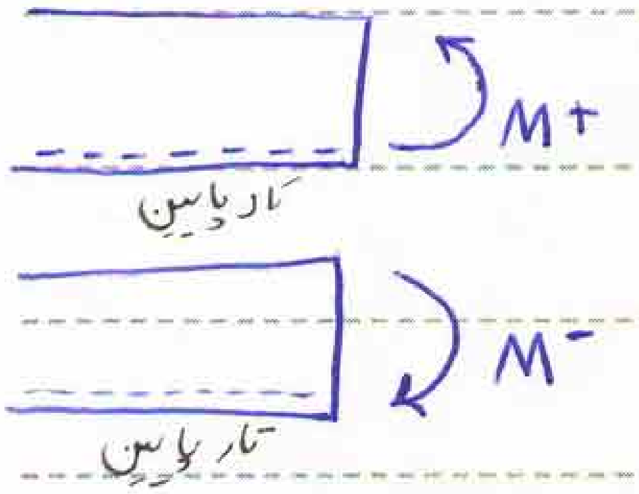
$I = \frac{5 \times 12^3}{12}$



$I = 720 \ cm^4$



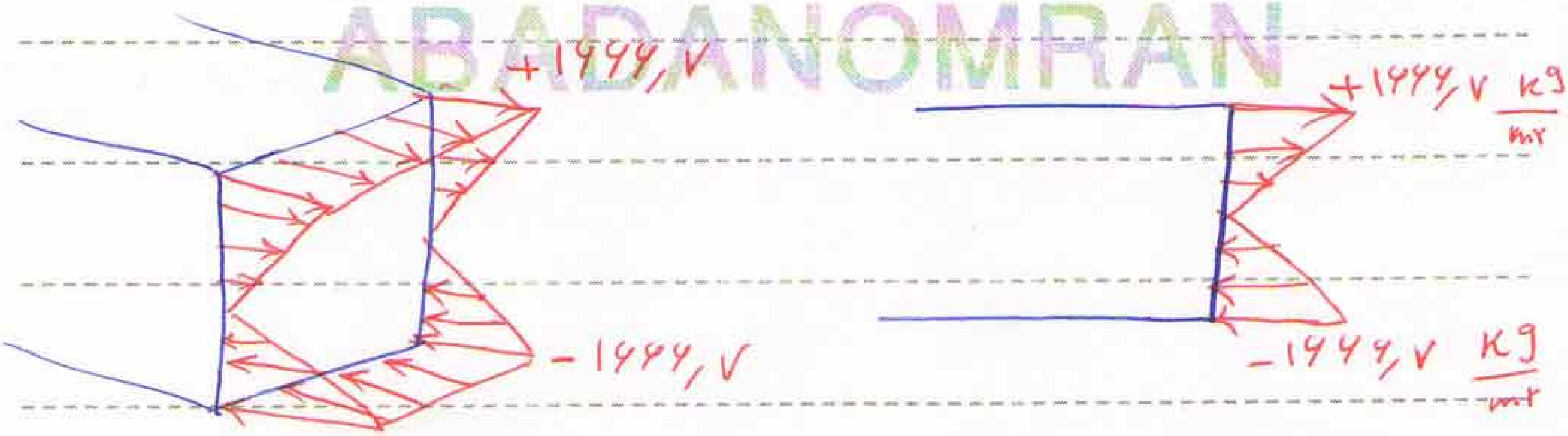
- یادآوری قرارداد نیروهای داخلی:



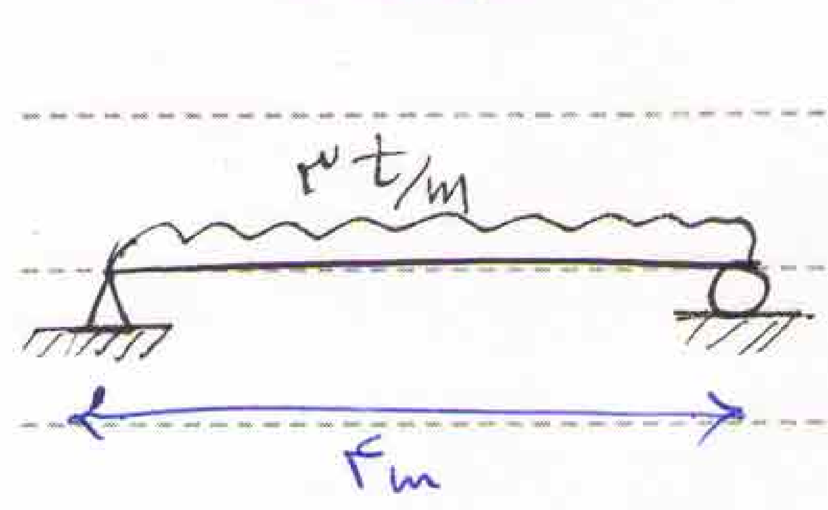
چون $M_{max} = -2\ ton.m$ است لذا ماکزیمم فشار در نقطه ① و چون در نقطه ۲ مقدار M مثبت دارد لذا ماکزیمم کشش را دارد.

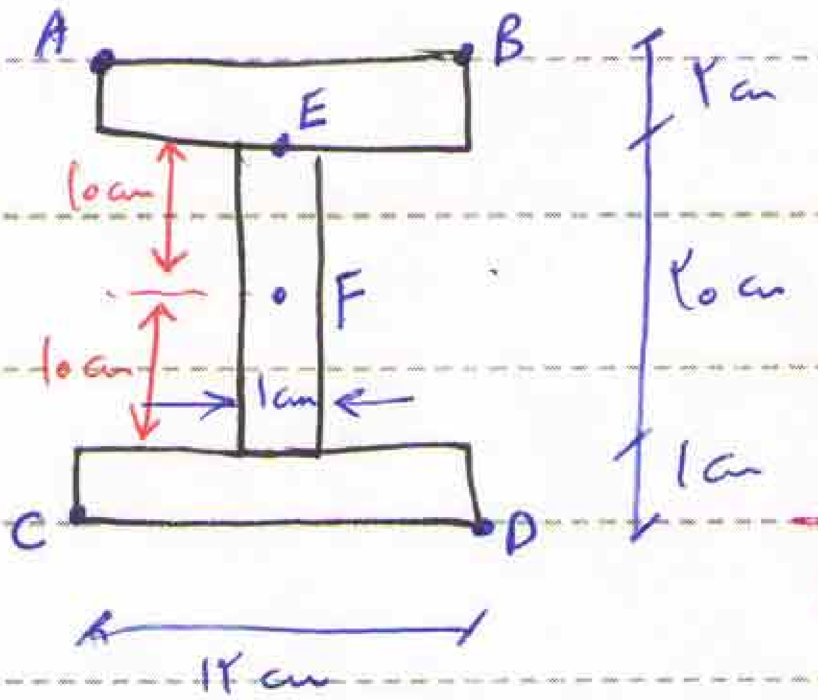
$$\sigma_{max\ \text{کششی}} = \frac{M}{I} y_1 = \frac{2\times10^5}{720}(6) = +1666.7\ \frac{kg}{cm^2}$$

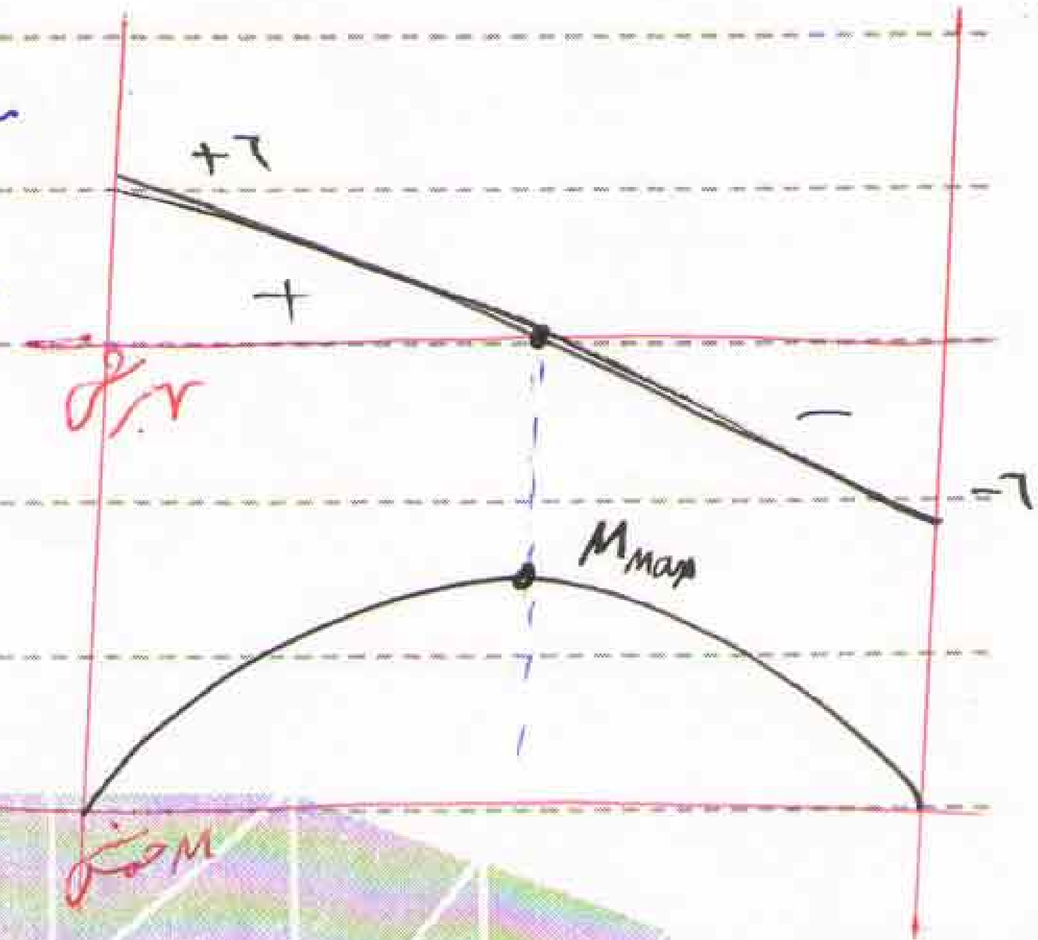
$$\sigma_{max\ \text{فشاری}} = \frac{M}{I} y_2 = \frac{2\times10^5}{720}(6) = -1666.7\ \frac{kg}{cm^2}$$



مثال: مقطع تیر روبرو به شکل I می‌باشد، برای مقطعی در وسط تیر تنش‌های قائم خمشی را در نقاط نشان داده شده محاسبه کنید:







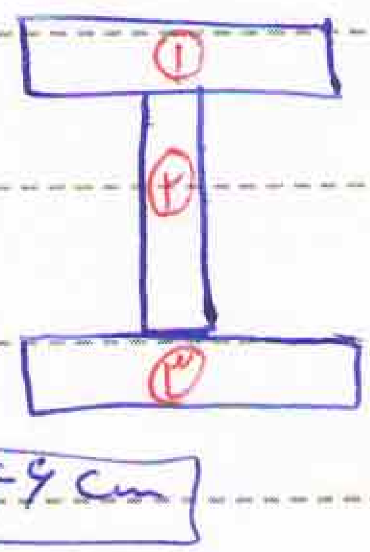
فقط برای تیر دو سر ساده
با بار یکنواخت q
صادق است.

$$M_{max} = \frac{qL^2}{8} = \frac{3\times4^2}{8} = 6\ t.m$$

گام اول) محاسبه‌ی لنگر خمشی در وسط دهانه که با رسم دیاگرام نیروهای داخلی بدست می‌آید

گام دوم) تعیین محل محور خنثی (همان مرکز سطح):

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i} = \frac{y_1A_1+y_2A_2+y_3A_3}{A_1+A_2+A_3}$$



$$\bar{y} = \frac{22\times2\times12 + 11\times1\times20 + 0.5\times1\times12}{2\times12+1\times20+1\times12}$$

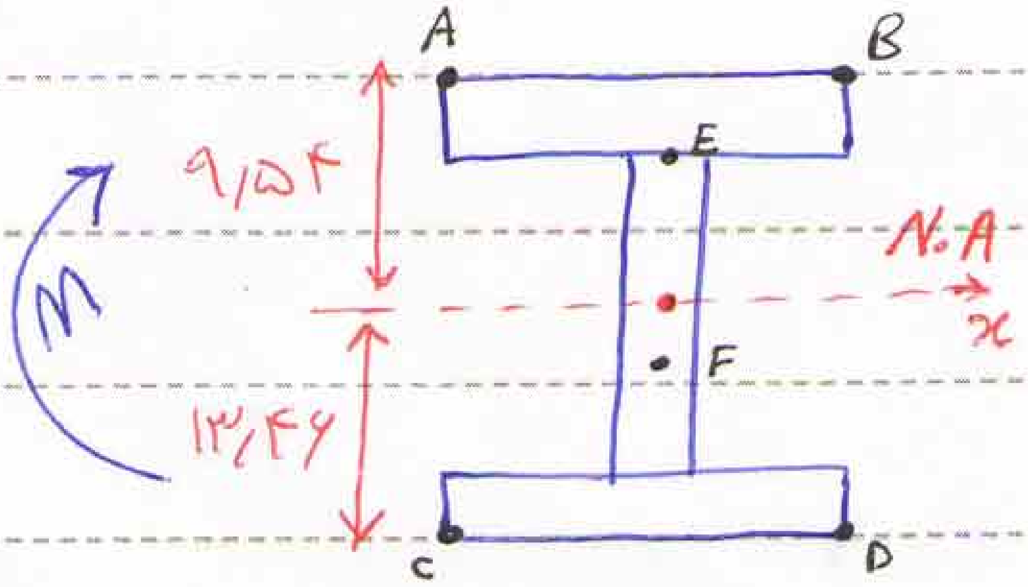
$$\bar{y} = \boxed{13.46\ cm}$$

Subject : مقاومت مصالح

Year: 90 Month. 2 Date. 22

ABADANOMRAN

گام سوم) محاسبه‌ی ممان اینرسی نسبت به محور خنثی:



$$I_x = I_1 + I_2 + I_3$$

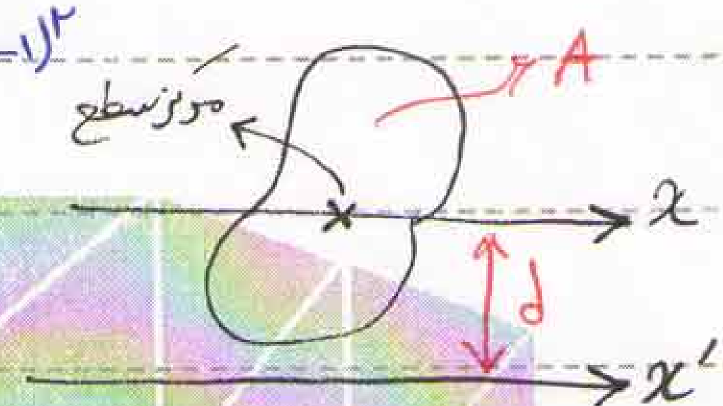
یادآوری قضیه‌ی محورهای موازی:

$$I_1 = \frac{bh^3}{12} + Ad^2 = \frac{12\times 2^3}{12} + (2\times 12)(9.54-1)^2$$

$$I_2 = \frac{1\times 20^3}{12} + (20\times 1)\times(13.46-11)^2$$

$$I_3 = \frac{12\times 1^3}{12} + (12\times 1)\times(13.46-0.5)^2$$

$$\rightarrow I_{NA} = I_1 + I_2 + I_3 = 4562.6\ cm^4$$



$$I_{x'} = I_x + Ad^2$$

$$\sigma_A = \sigma_B = \frac{M}{I}y = \frac{6\times 10^5}{4562.6}(9.54) = -1245.5\ \frac{kg}{cm^2}$$ فشاری

$$\sigma_E = \frac{M}{I}y = \frac{6\times 10^5}{4562.6}(9.54-2) = -991.5\ \frac{kg}{cm^2}$$ فشاری

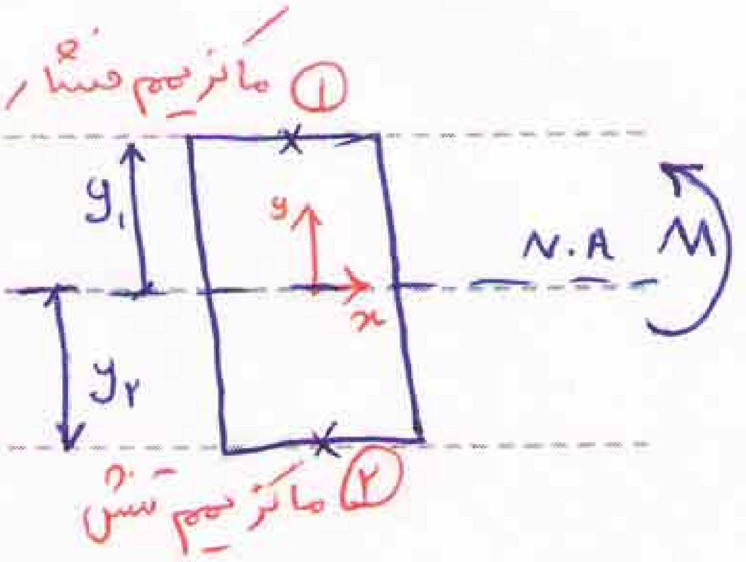
$$\sigma_F = \frac{M}{I}y = \frac{6\times 10^5}{4562.6}(13.46-11) = +257.7\ \frac{kg}{cm^2}$$ کششی

$$\sigma_C = \sigma_D = \frac{M}{I}y = \frac{6\times 10^5}{4562.6}(13.46) = +1770\ \frac{kg}{cm^2}$$

* اساس مقطع خمشی :

فشاری $\sigma_{max} = \frac{M}{I} y_1 = \frac{M}{\frac{I}{y_1}} = \frac{M}{S_{x_1}}$

کششی $\sigma_{max} = \frac{M}{I} y_2 = \frac{M}{\frac{I}{y_2}} = \frac{M}{S_{x_2}}$

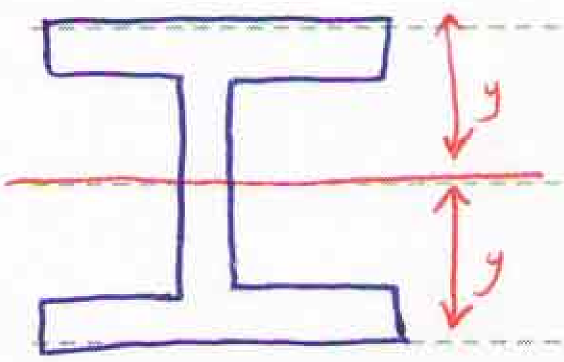


S_{x_1} : اساس مقطع تار بالا نامیده می شود

S_{x_2} : اساس مقطع تار پایین نامیده می شود

* اساس مقطع جزء خواص هندسی یک سطح مقطع می باشد که در جدول مشخصات سطح مقطع پروفیل ها محاسبه گردیده است.

* برای مقاطعی که نسبت به محور خنثی متقارن هستند اساس مقطع تار بالا و پایین با هم برابر است.



$$S_{x_1} = S_{x_2} = S_x$$

مقاطع ایده آل در خمش :

سوال: چگونه می توان ظرفیت خمشی دو مقطع را با همدیگر مقایسه کرد؟

هرکدام که لنگر ماکزیمم M_{max} بزرگتری بتواند تحمل کند ظرفیت خمشی بالاتری دارند.

سوال: چگونه می توان تشخیص داد که از بین دو مقطع تیر با شرایط یکسان و سطح مقطع متفاوت کدام یک لنگر خمشی بزرگتری می تواند تحمل کند؟

$\sigma_{max} \le \sigma_a \Rightarrow \frac{M_{max}}{S_x} \le \sigma_a$

$\boxed{M_{max} \leq \sigma_a . S_x}$

با توجه به رابطه مقابل چون برای دو تیر با مصالح یکسان σ_a که ثابت است آن تیری که S_x بزرگتر دارد لنگر ماکزیمم M_{max} بزرگتری را می تواند عمل کند.

*نتیجه گیری: اساس مقطع یا S_x در واقع معیار سنجش ظرفیت خمشی یک مقطع می باشد.

$\boxed{S_x = \frac{I_x}{y}}$

سوال: چگونه می توان S_x یک مقطع را افزایش داد؟

با توجه به رابطه ی روبرو اگر ممان اینرسی (I_x) مقطع نسبت به محور خنثی افزایش داده شود، ظرفیت خمشی مقطع بالا خواهد رفت.

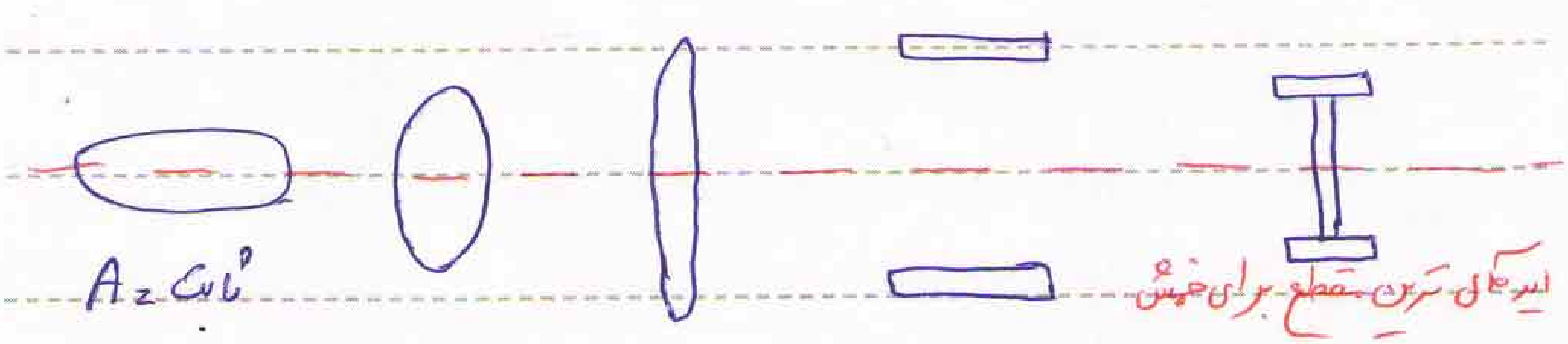
$\boxed{I_x = \int y^2 dA}$

برای افزایش ممان اینرسی (I_x) مطابق فرمول روبرو دو راه وجود دارد: روش های افزایش I_x:

① افزایش سطح مقطع A ② افزایش فاصله نقاط تا محل مرکز سطح y (محور خنثی)

روش اول، افزایش A: مقرون به صرفه ی اقتصادی نیست، زیرا برای افزایش سطح مقطع می بایست مصالح بیشتری استفاده شود.

مناسب تر این است که سطح مقطع ثابت بماند و فاصله نقاط افزایش داده شود:



باتوجه به شکل های قبل این نتیجه حاصل می شود که علت I شکل ساختن تیرها

افزایش ظرفیت خمشی مقطع می باشد (همان افزایش S_x)

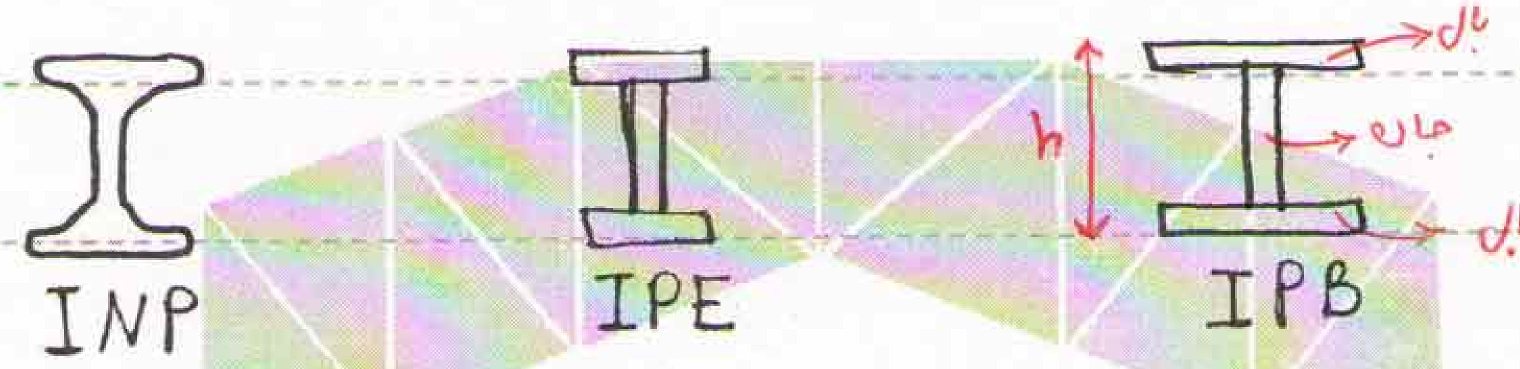
نتیجه ② برای افزایش اساس مقطع یا ظرفیت خمشی S_x

$\uparrow A \Rightarrow$ مقرون به صرفه نیست

$\uparrow y \Rightarrow$ راه حل مناسبتر می باشد

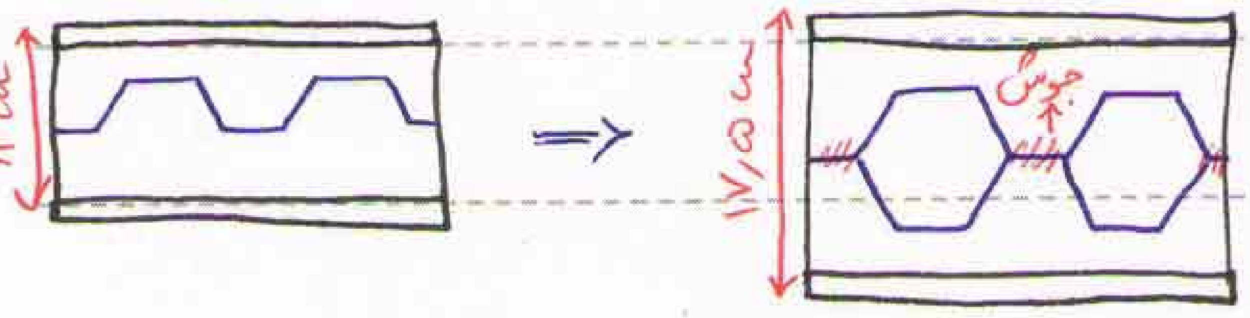
$\uparrow S_x \Leftarrow \uparrow I_x \Leftarrow$

* انواع مقاطع I شکل متداول در بازار:



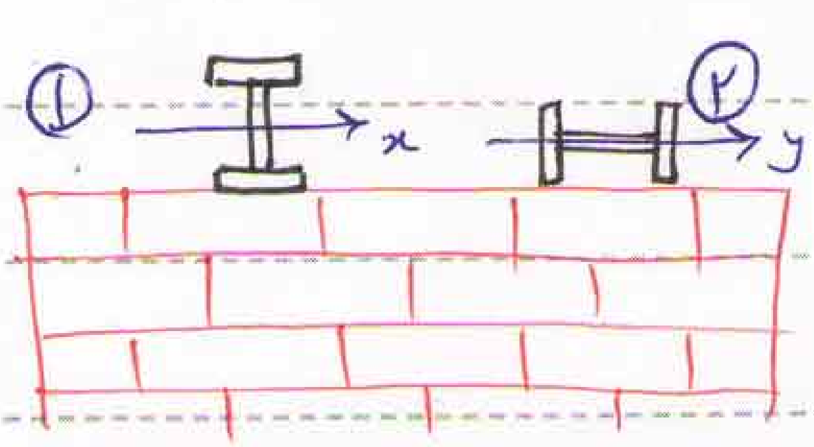
"تیرآهن نمره ۱۴ یعنی h=۱۴"

* علت لانه زنبوری کردن تیرها: افزایش ظرفیت خمشی آن ها



این تیر مقاومتش از IPE14 بیشتر است.

محور قوی و محور ضعیف یک مقطع:



① خمش حول محور x صورت می گیرد

② خمش حول محور y صورت می گیرد.

در دو شکل چون $I_x > I_y$ می باشد $S_x = \frac{I_x}{y}$ <= شکل ①

لذا با توجه به فرمول های روبرو نتیجه

می شود $\underline{S_x > S_y}$ خواهد بود $S_y = \frac{I_y}{x}$ <= شکل ②

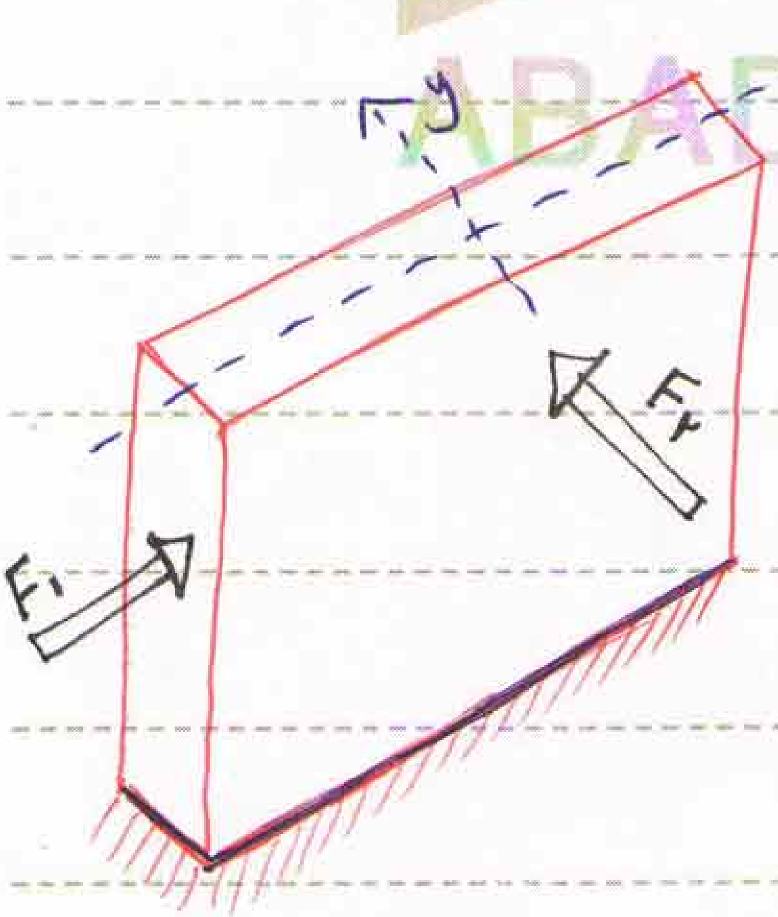
پس شکل ① خمش بیشتری تحمل می کند.

بنابراین محور x ها محور قوی می باشد.

نتیجه گیری: در یک مقطع منظور از محور قوی محوری می باشد که ممان اینرسی حول آن محور ماکزیمم باشد.

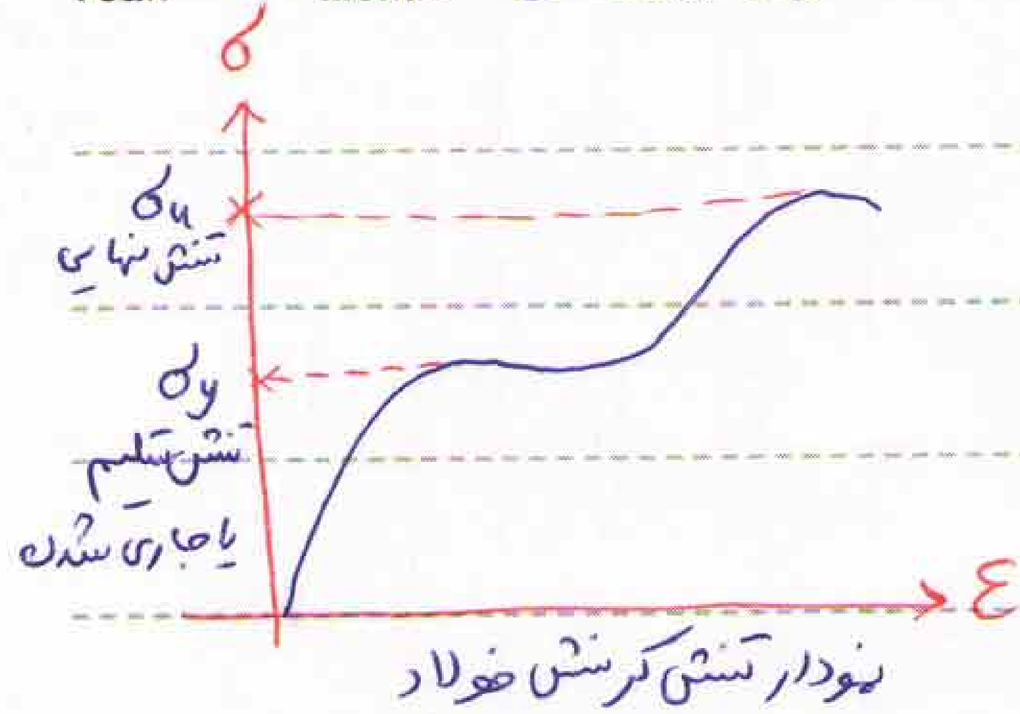
منظور از محور ضعیف محور با ممان اینرسی مینیمم است.

$\boxed{\text{مثال}}$ ساختمان بلند و باریک روبرو نیروی F_1 را بیشتر تحمل می کند یا F_2؟



F_1 خمش حول محور y و F_2 خمش حول محور x ایجاد می کند

چونکه $I_y > I_x$ است، محور y ها قوی تر می باشد بنابراین این F_1 که حول y لنگر ایجاد می کند را بیشتر تحمل می کند.



* تنش مجاز فولاد و طرح خمشی تیرها :

رابطه‌ی طراحی تیرها $\sigma_{max} \le \sigma_a$

$$\sigma_{max} \le \sigma_a = \frac{\sigma_u}{F.S}$$

برای مصالح فولادی تنش نهایی را برابر σ_y در نظر می‌گیرند.

تنش مجاز فولاد $\sigma_a = \frac{\sigma_y}{F.S} = \frac{2400}{1/67} = 1440 \ \frac{kg}{cm^2}$

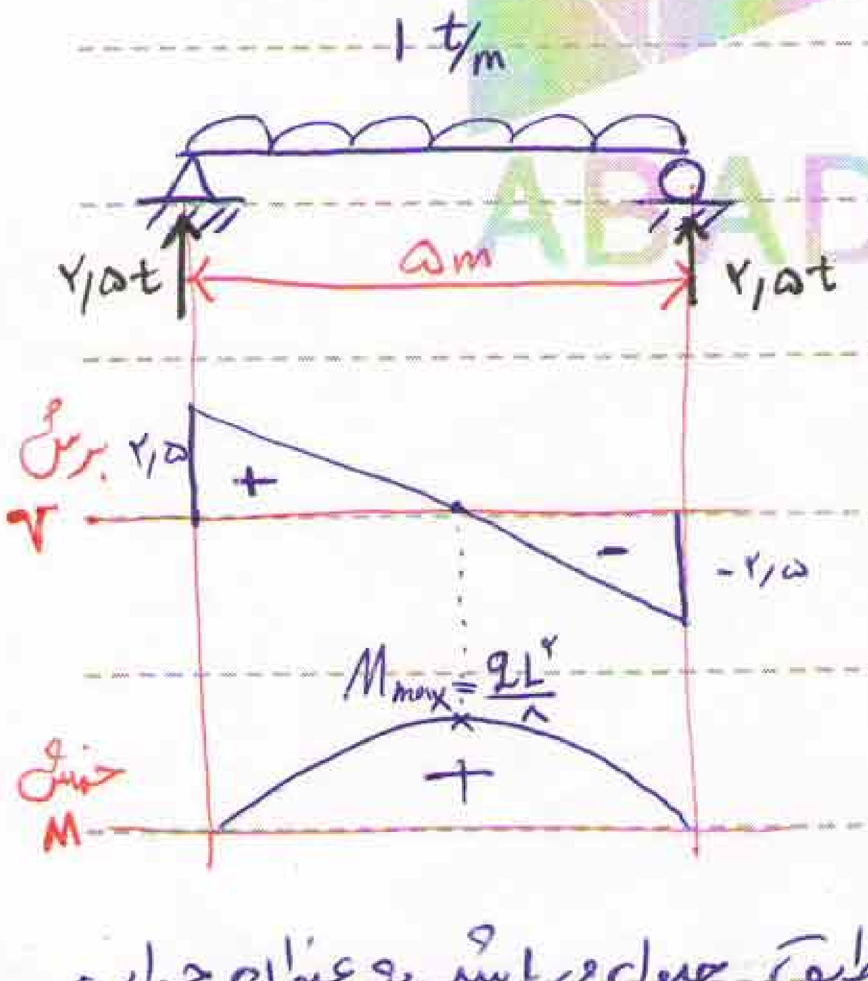
مثال: تیر روبرو را با مقطع INP طراحی کنید؟ (یعنی شماره تیرآهن را تعیین کنید)

حل) رابطه طراحی $\sigma_{max} \le \sigma_a$

$$\frac{M_{max}}{S_x} \le \sigma_a \Rightarrow S_x \ge \frac{M_{max}}{\sigma_a}$$

$M_{max} = \frac{1 \times 5^2}{8} = 3/125$ ton.m

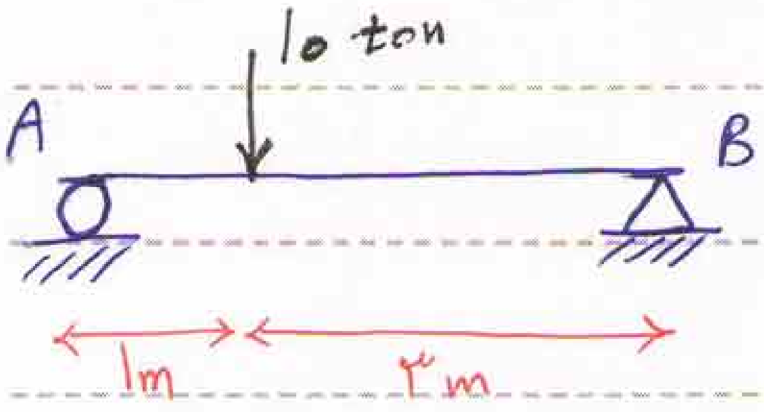
برای تعیین M_{max} می‌بایست دیاگرام نیروهای داخلی را ترسیم کنیم :



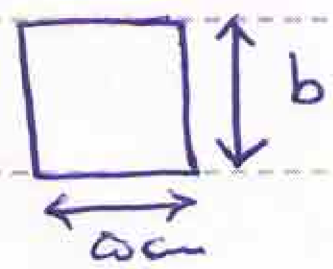
$$S_x \ge \frac{3/125 \times 10^5}{1440} = 217 \ cm^3$$

چون INP 22 دارای $S_x = 278$ طبق جدول می‌باشد به عنوان جواب مسئله می‌پذیریم.

$\boxed{\text{مثال}}$ در تیر مقابل مقدار **b** را بیابید؟



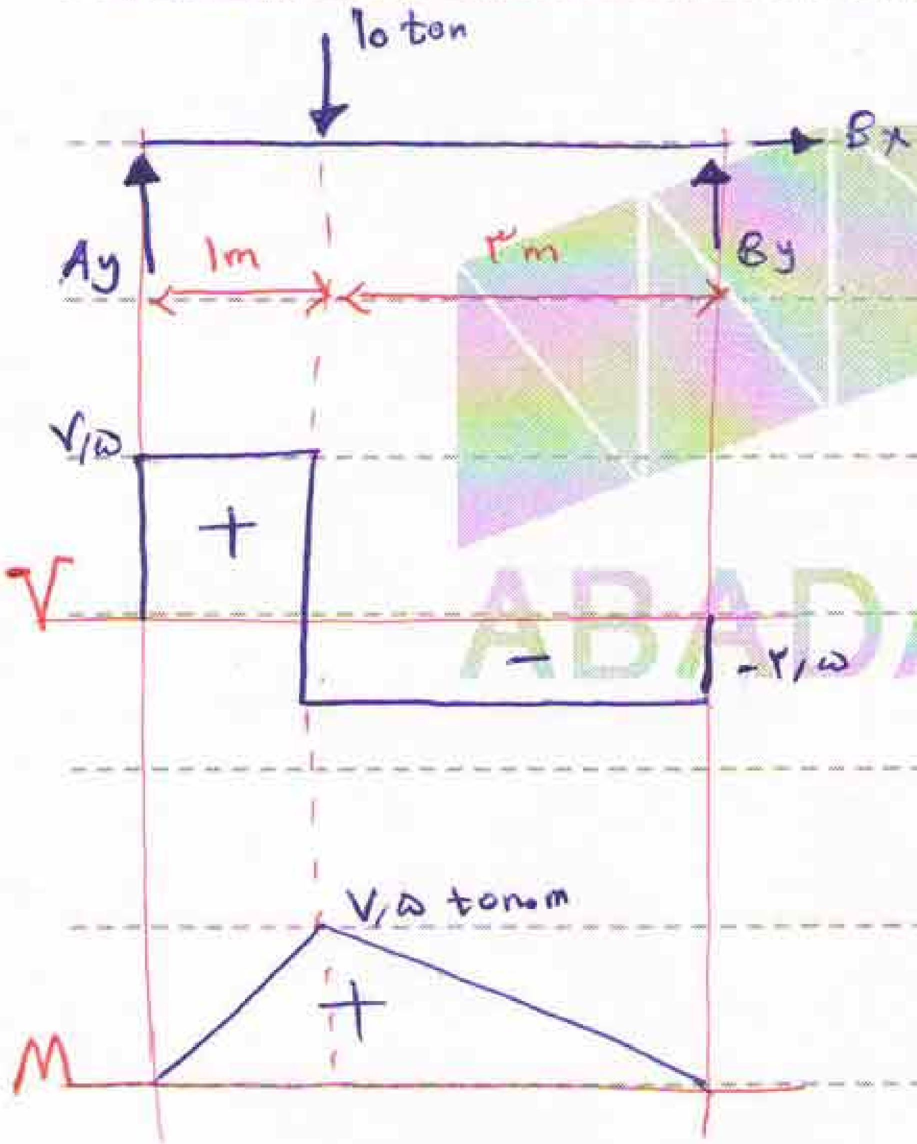
$\sigma_a = 1440 \ \frac{kg}{cm^2}$



حل) رابطه طراحی: $\sigma_{max} \leq \sigma_a$

برای تعیین M_{max} می‌بایست دیاگرام نیروهای داخلی را ترسیم کنیم

$$\frac{M_{max}}{I}(y) \leq \sigma_a$$



$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 \Rightarrow A_y \times 4 - 10 \times 3 = 0$

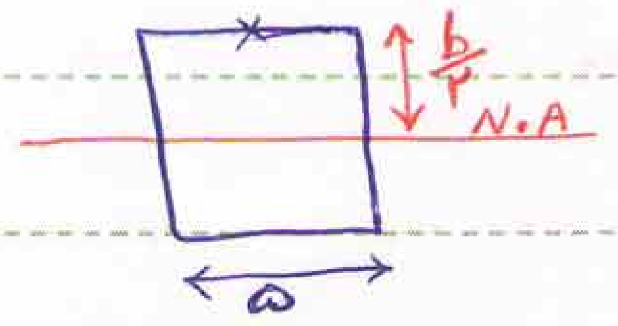
$\rightarrow \boxed{A_y = 7.5 \ ton}$

$\sum \overset{\rightarrow}{F_x} = 0 \rightarrow \boxed{B_x = 0}$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \rightarrow A_y - 10 + B_y = 0 \rightarrow \boxed{B_y = 2.5 \ ton}$

با توجه به شکل مقابل $M_{max} = 7.5 \ ton.m$

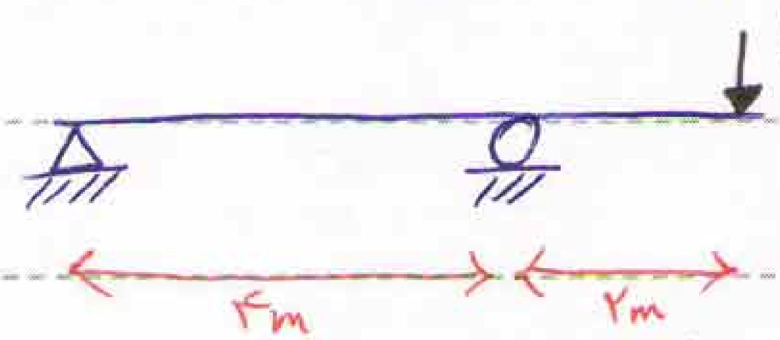
$$\frac{M_{max}}{I}(y) \leq 1440$$



$$\frac{7.5 \times 10^5}{\frac{5 \times b^3}{12}} \left(\frac{b}{2}\right) \leq 1440$$

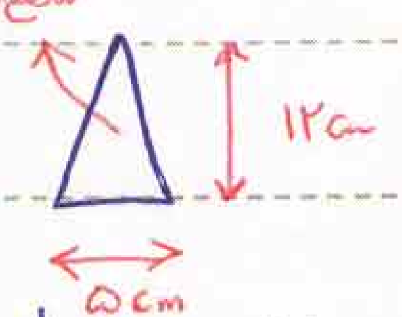
$$\Rightarrow b^2 \geq \frac{6 \times 7 \times 10^5}{5 \times 1440} \rightarrow \boxed{b \geq 25 \ cm}$$

مثال) در تیر مقابل P_{max} که می‌تواند به تیر وارد شود چقدر است؟

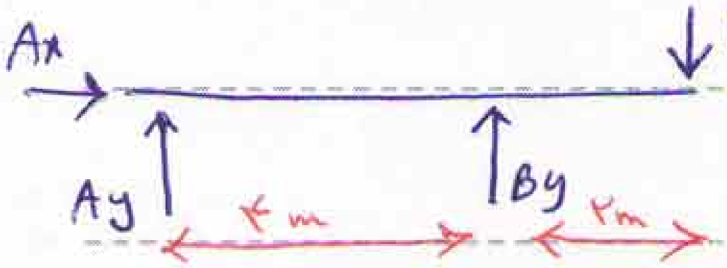


$\sigma_a = 800\ \frac{kg}{cm^2}$ مجاز کششی

$\sigma_a = 500\ \frac{kg}{cm^2}$ مجاز فشاری



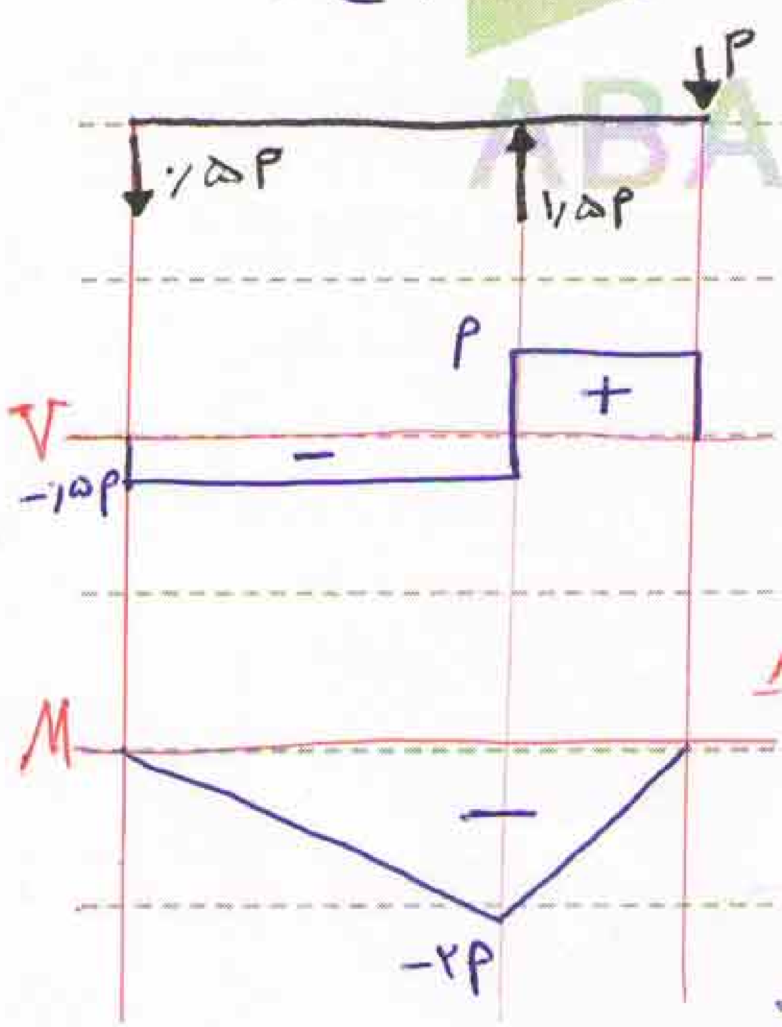
حل) دو شرط طراحی داریم که مقدار P را باید به گونه‌ای طراحی کنیم که در روابط فوق صدق کند.



$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \rightarrow -B_y \times 4 + P \times 6 = 0 \rightarrow \boxed{B_y = 1.5P}$

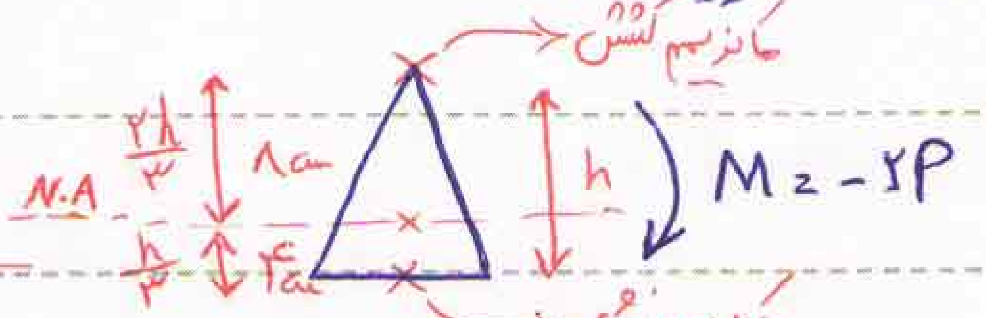
$\sum \overset{+}{\rightarrow} F_x = 0 \rightarrow \boxed{A_x = 0}$ $\quad +\uparrow \sum F_y = 0 \rightarrow A_y - P + B_y = 0 \rightarrow \boxed{A_y = -0.5P}$

علامت منفی به این معنی است که جهت A_y برعکس خواهد بود و رو به پایین ↓ است.



با توجه به شکل $M_{max} = -2P$ می‌باشد

علامت منفی یعنی تار پایین فشرده می‌شود.



* محل محور خنثی در مرکز سطح می‌باشد.

$$I_x = \frac{bh^3}{36} = \frac{5 \times 12^3}{36} = 240\ cm^4$$

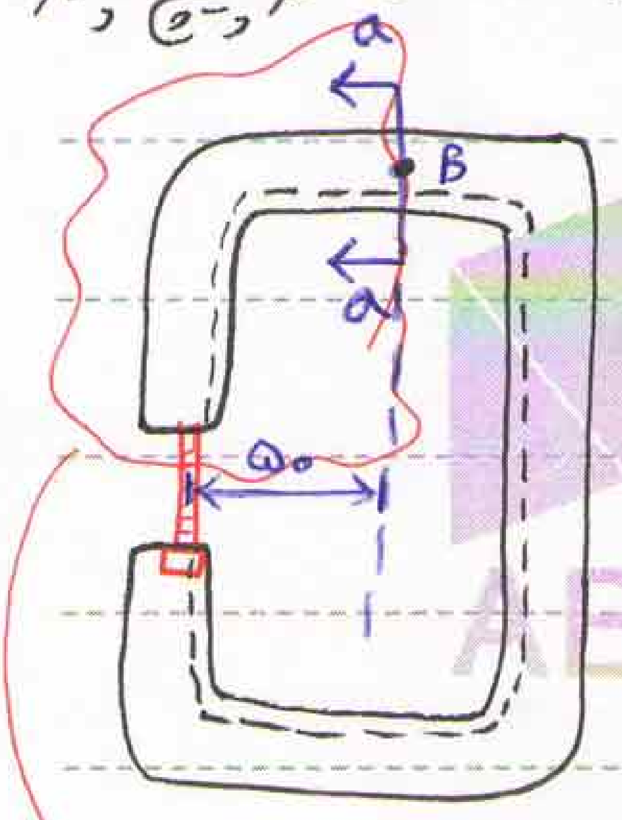
کششی $\sigma_{max} \le 800 \Rightarrow \frac{2P\times 10^2}{240}(8) \le 800 \Rightarrow P \le 120$ kg

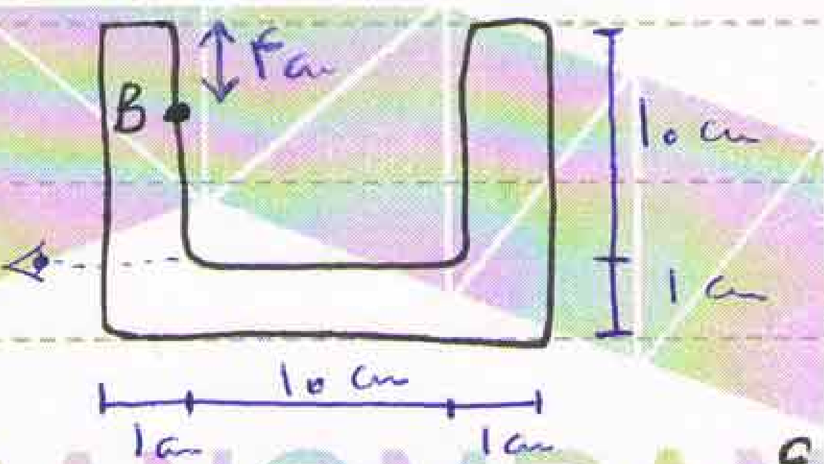
فشاری $\sigma_{max} \le 500 \Rightarrow \frac{2P\times 10^2}{240}(4) \le 500 \Rightarrow P \le 75$ kg

* P به عنوان جواب نهایی انتخاب می‌کنیم که در دو رابطه صدق کند

$P_{max} = 75$ kg جواب مسئله خواهد بود.

$\boxed{\text{مثال}}$ گیره‌ای مطابق شکل سفت شده است و پس از سفت کردن آن کرنش در نقطه‌ی B مطابق با زیر بدست آمد، نیروی محوری بدست آمده در پیچ چقدر است؟

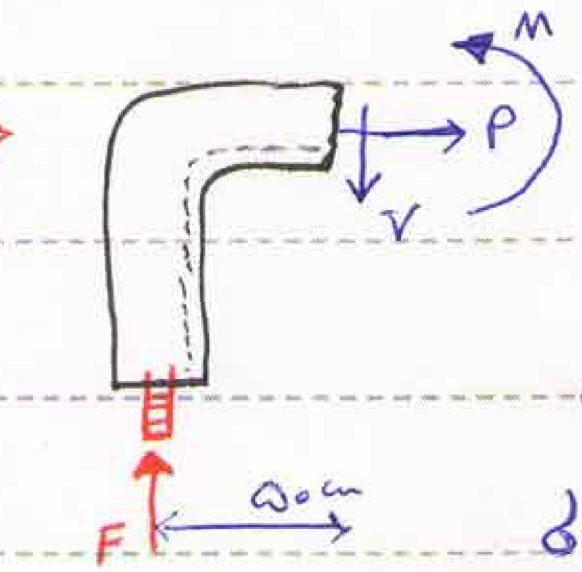




a-a مقطع

$E = 2\times 10^6 \ \frac{kg}{cm^2}$

$\varepsilon_B = 0.002$



$+\circlearrowleft \sum M_S = 0 \Rightarrow F\times 50 - M = 0$

$F = \frac{M}{50}$

$\sigma_B = E\,\varepsilon_B = 2\times 10^6 \times 0.0002 = 400 \ \frac{kg}{cm^2}$

$\sigma_B = \frac{M}{I} y_B \Rightarrow M = \frac{\sigma_B \times I}{y_B}$

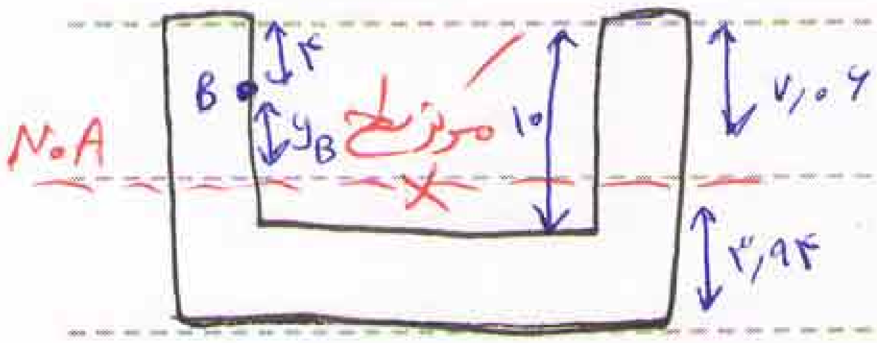
محاسبه‌ی محل محور خنثی: (مرکز سطح)

$\bar{y} = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i}$

مستطیل بزرگ − مستطیل کوچک

$$\bar{y} = \frac{۱۲\times۱۱\times\frac{۱۱}{۲} - ۱۰\times۱۰\times۶}{۱۲\times۱۱ - ۱۰\times۱۰} = ۳٫۸۴ \text{ cm}$$

محاسبه ی ممان اینرسی:



$$I_x = \left[\frac{۱۲\times۱۱^۳}{۱۲} + \left(۱۲\times۱۱\times\left(\frac{۱۱}{۲} - ۷٫۰۶\right)^۲\right)\right] - \left[\frac{۱۰\times۱۰^۳}{۱۲} + \left(۱۰\times۱۰\times(۷٫۰۶ - ۵)^۲\right)\right]$$

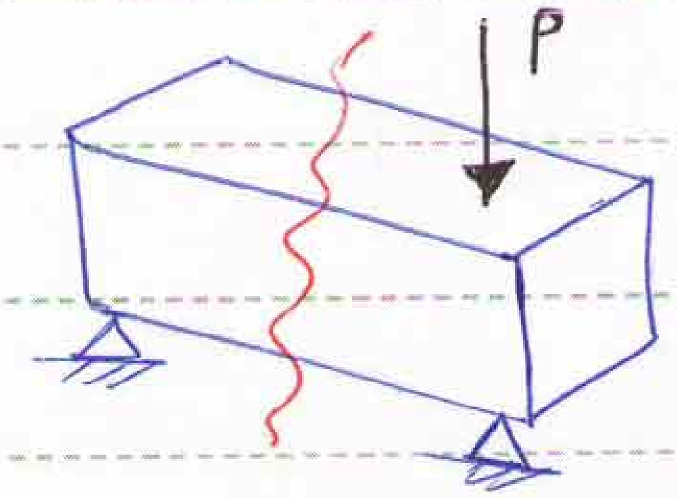
$$\rightarrow I_x = ۳۹۴٫۵۴ \text{ cm}^۴$$

$$y_B = ۷٫۰۶ - ۴ = ۳٫۰۶$$

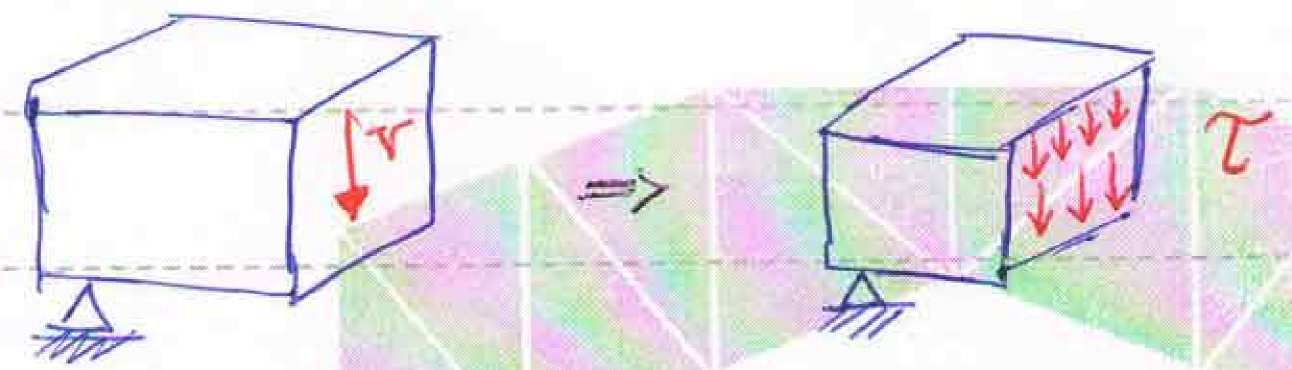
$$M = \frac{\sigma_B \times I}{y_B} = \frac{۴۰۰ \times ۳۹۴٫۵۴}{۳٫۰۶} = ۵۱۵۷۴۱ \text{ kg.m}$$

$$F = \frac{M}{۵۰} = \frac{۵۱۵۷۴۱}{۵۰} = \boxed{۱۰۳۱٫۴۸ \text{ kg}}$$

فصل پنجم - تنش برشی «Shear stress»



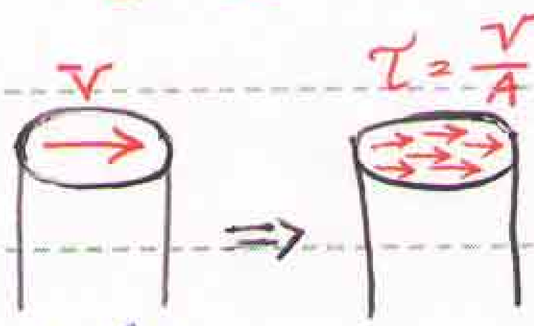
* در اثر نیروی برشی داخلی در یک سطح مقطع تنش های برشی ایجاد می‌گردد.



در این فصل هدف آن است به تنش های برشی دقیق را در سطح مقطع تیرها محاسبه کنیم

$\boxed{\text{سؤال}}$ چرا در فصل های گذشته برای محاسبه تنش برشی در سطح مقطع پیچ ها از فرمول تنش متوسط استفاده کردیم؟

$\tau = \frac{V}{A}$

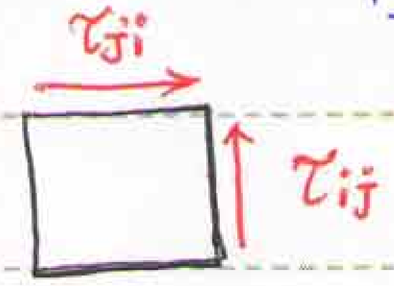


(جواب) از آن جایی به سطح مقطع پیچ خیلی کوچک است می توان فرض نمود که تنش برشی بطور یکنواخت روی سطح مقطع پیچ توزیع می شود لذا از فرمول متوسط استفاده کردیم ولی برای تیرها چون سطح تیر بزرگ است تنش برشی از نقطه ای به نقطه دیگر تفاوت می کند و باید از روابط دقیقتر τ را محاسبه نمود.

Subject: مقاومت مصالح

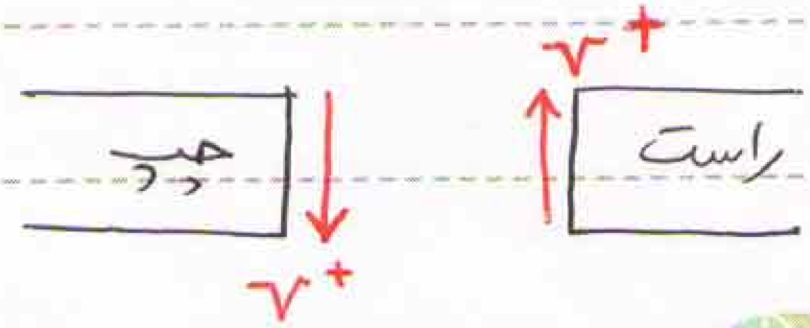
Year: 90 Month. 2 Date. 31

یادآوری ①: اگر روی یک وجه المان تنش برشی داشته باشیم روی وجه عمود بر خواهیم داشت:

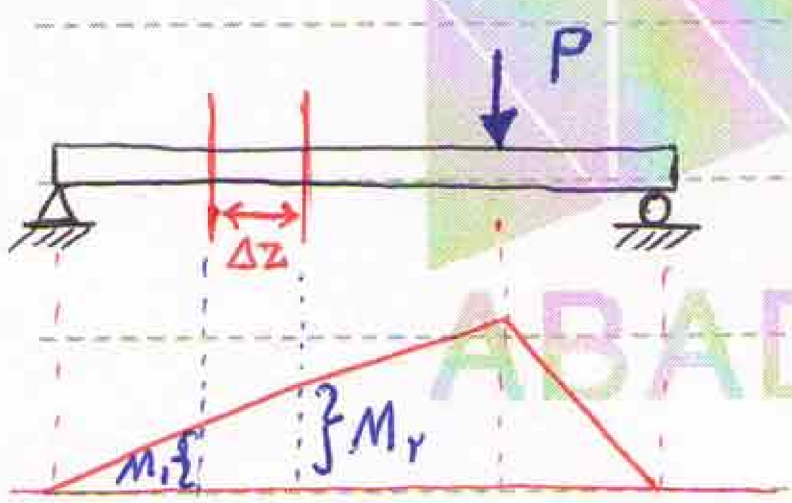


یادآوری ②: رابطه بین نیروی برشی و لنگر خمشی: $\frac{dM}{dz} = V$

یادآوری ③: قرارداد علامت نیروهای داخلی:

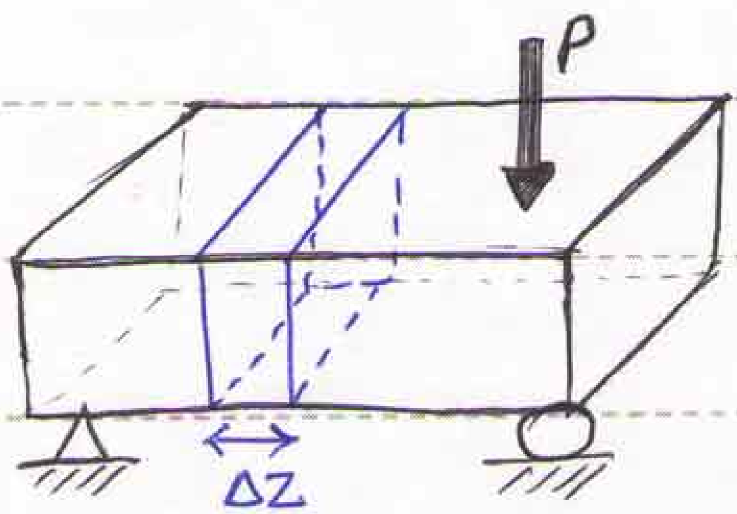


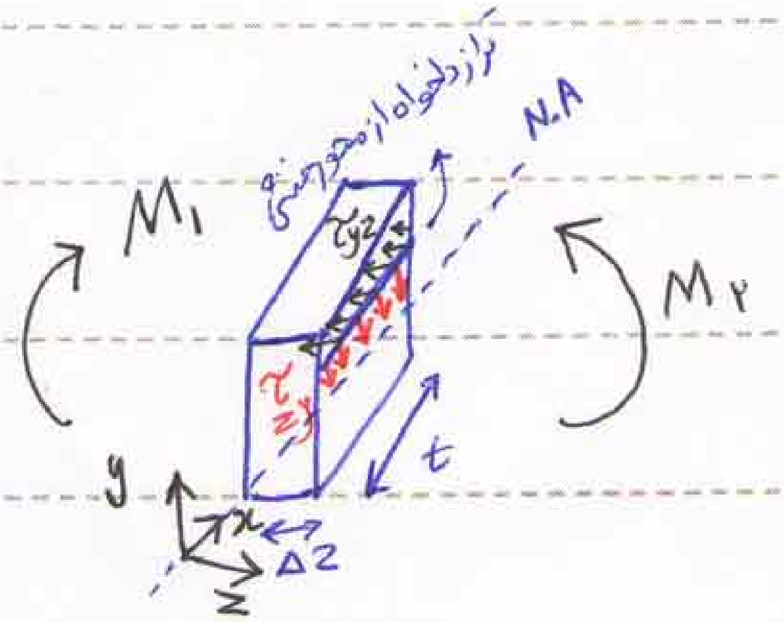
برای قطعه کوچک روبرو لنگر خمشی دو وجه قطعه با هم برابر نیست



دیاگرام لنگر خمشی

$M_2 > M_1 \Rightarrow \Delta M = M_2 - M_1$



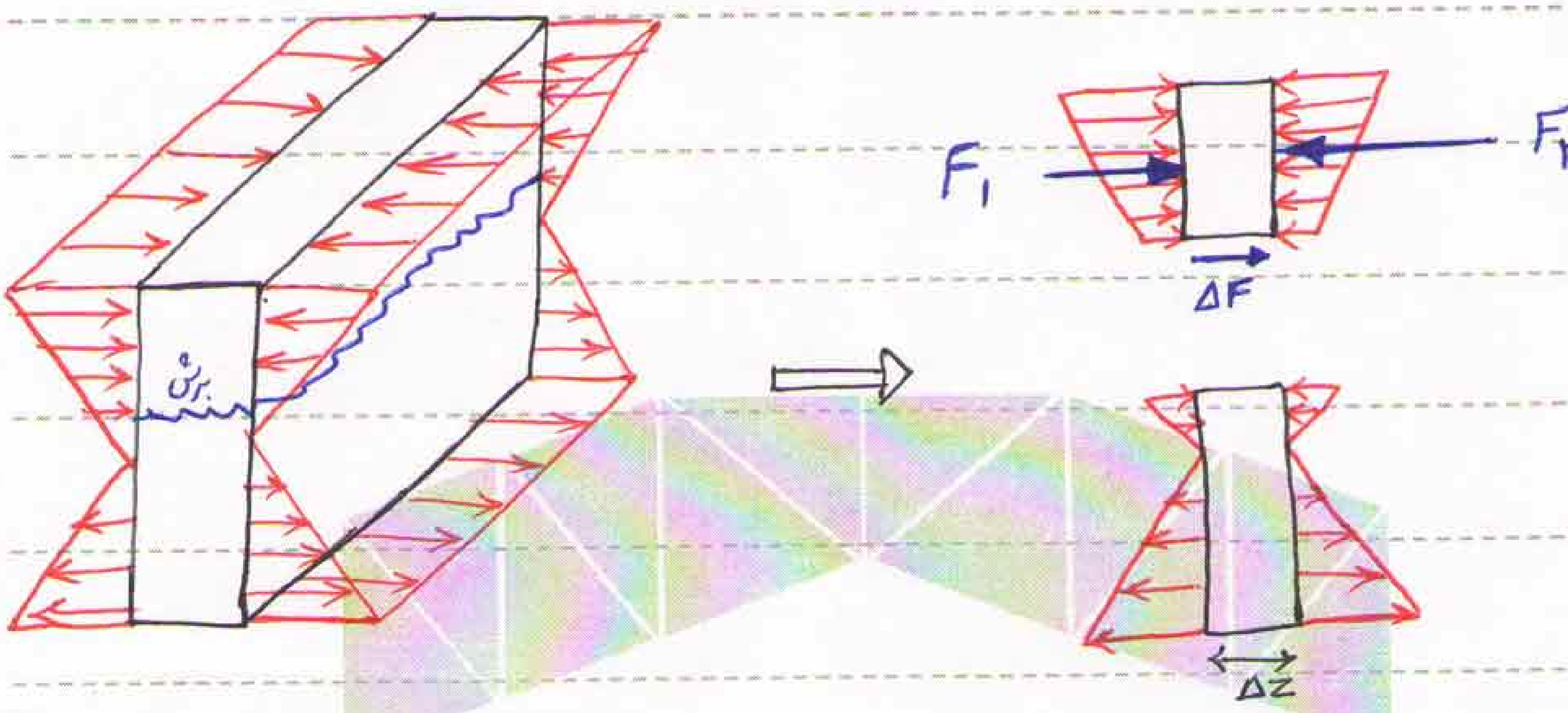


می‌خواهیم در یک تراز دلخواه مطابق شکل تنش های برشی را محاسبه کنیم

طبق یادآوری ① داریم: $\tau_{zy} = \tau_{yz}$

بنابراین اگر بتوان تنش های τ_{yz} را محاسبه نمود به جواب مساله رسیده ایم، به علت M_1 و M_2 در دو وجه المان تنش های خمشی قائم σ ایجاد می گردد

$$\sigma_1 = \frac{M_1}{I} y \qquad \sigma_2 = \frac{M_2}{I} y$$



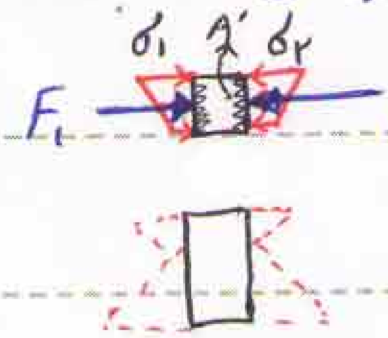
چون $F_2 > F_1 \Longleftarrow \sigma_2 > \sigma_1 \Longleftarrow M_2 > M_1$

$$\Delta F = F_2 - F_1$$

و چون F_1 و F_2 با هم برابر نیستند برای این که قطعه $\xrightarrow{F_1}\square\xleftarrow{F_2}$ به حال تعادل باقی بماند
می بایست در آن نیروی ΔF بوجود آید. $\xrightarrow{F_1}\square\xleftarrow{F_2}$

چون ΔZ خیلی کوچک است با فرض این که تنش های τ_{yz} بطور یکنواخت در تراز نشان داده شده پخش شده باشد.

$$\tau_{yz} = \frac{\Delta F}{\Delta Z \times t}$$



$$\Delta F = F_2 - F_1$$

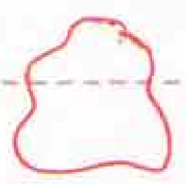
$$F_1=\int_{A'}\sigma_1\,dA=\int_{A'}\frac{M_1}{I}y\,dA=\frac{M_1}{I}\underbrace{\int_{A'}y\,dA}=\frac{M_1\,Q}{I}$$

گش اول سطح هاشور خورده نسبت به محور خنثی Q

$$F_2=\int_{A'}\sigma_2\,dA=\int_{A'}\frac{M_2}{I}y\,dA=\frac{M_2}{I}\underbrace{\int_{A'}y\,dA}=\frac{M_2\,Q}{I}$$

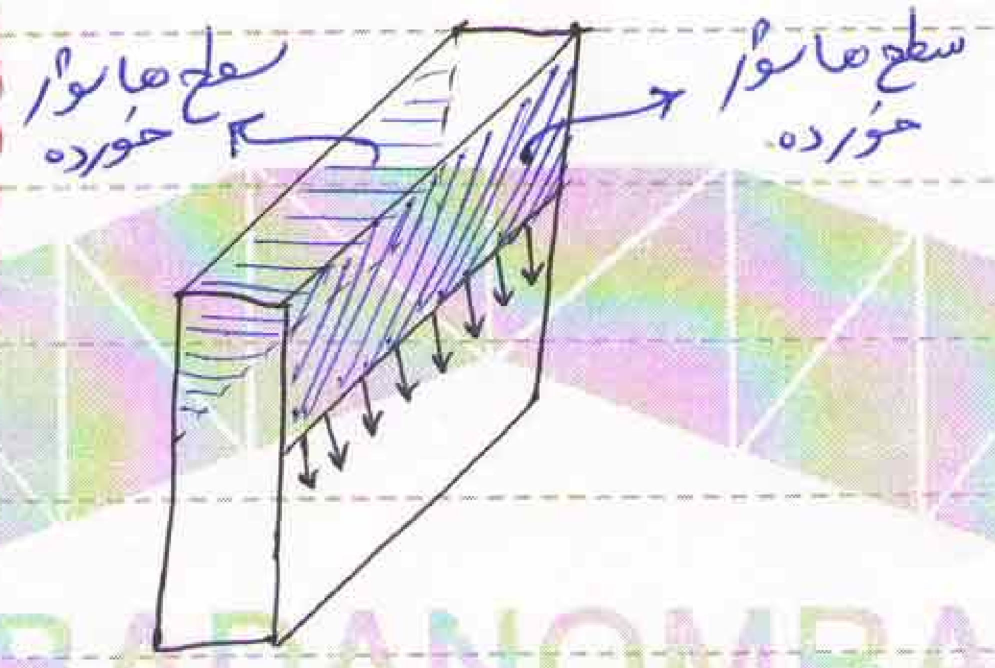
گش اول سطح هاشور خورده نسبت به محور خنثی Q

یادآوری:



$Q=\int y\,dA$ گش اول سطح

$I=\int y^2\,dA$ گش دوم سطح



$$\Delta F=F_2-F_1\ ,\ \Delta F=\frac{M_2Q}{I}-\frac{M_1Q}{I}\Rightarrow\Delta F=\frac{(M_2-M_1)\,Q}{I}$$

$$\Delta F=\frac{\Delta M\,Q}{I}\qquad \tau_{yz}=\frac{\Delta F}{\Delta z\times t}=\frac{\overset{V}{\overbrace{\Delta M}}\,Q}{\Delta z\times I\times t}$$

طبق یادآوری ② چون $\frac{dM}{dz}=V$

$$\tau_{yz}=\frac{VQ}{It}$$

چون $\tau_{yz}=\tau_{zy}$ لذا فرمول نهایی تنش برشی در یک تراز دلخواه از محور خنثی

$$\boxed{\tau=\frac{VQ}{It}}$$

در این رابطه :

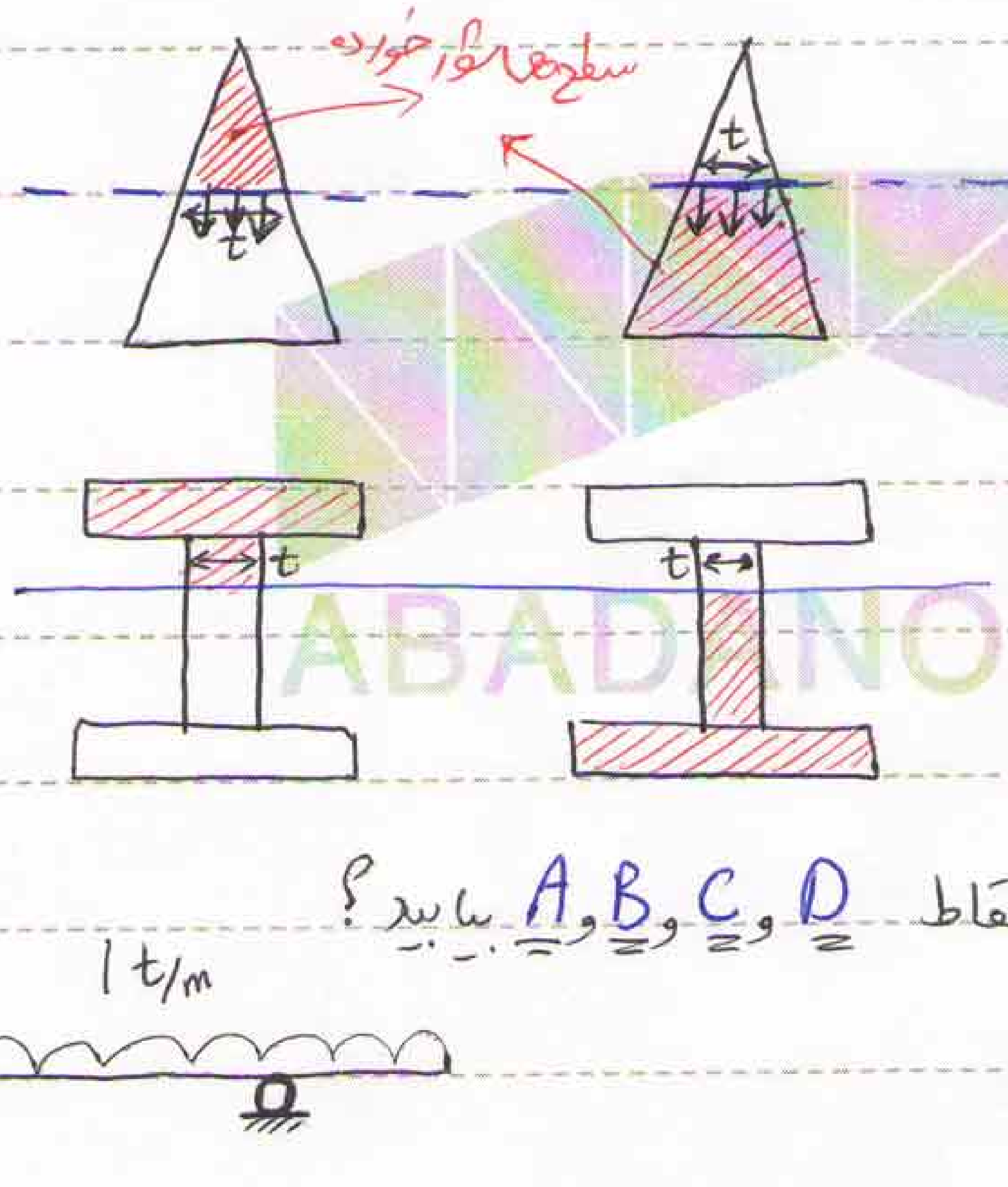
V : نیروی برشی داخلی در سطح مقطع که از دیاگرام نیروهای داخلی بدست می آید.

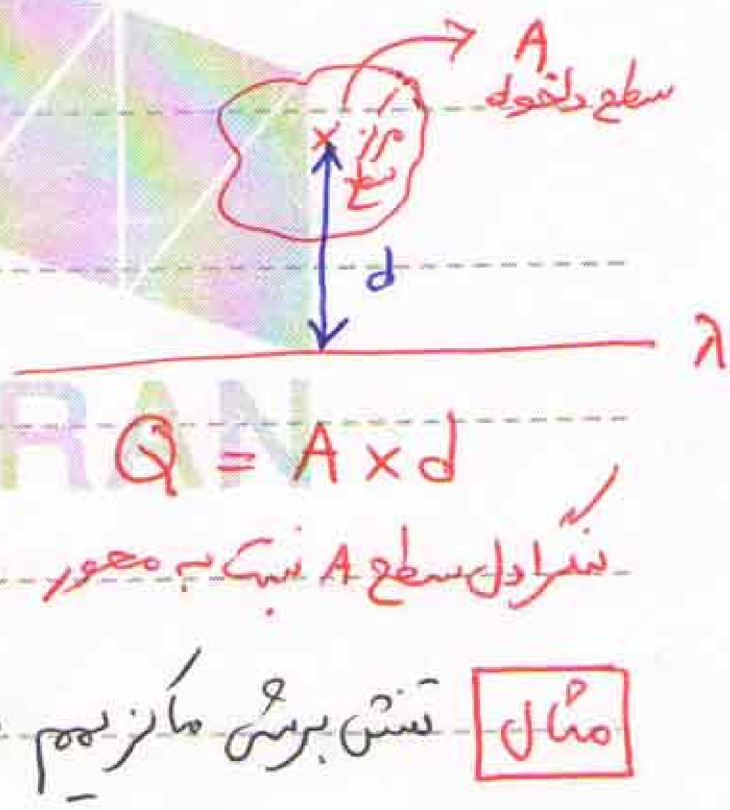
I : ممان اینرسی کل سطح نسبت به محور خنثی

t : عرض مقطع در تراز دلخواه مورد نظر

Q = لنگر اول سطح هاشور خورده نسبت به محور خنثی

روش محاسبه ی لنگر اول سطح :

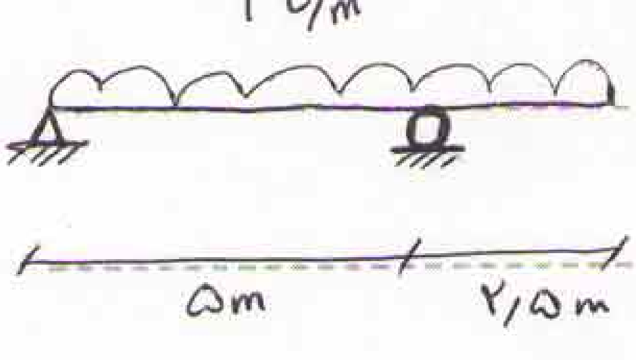


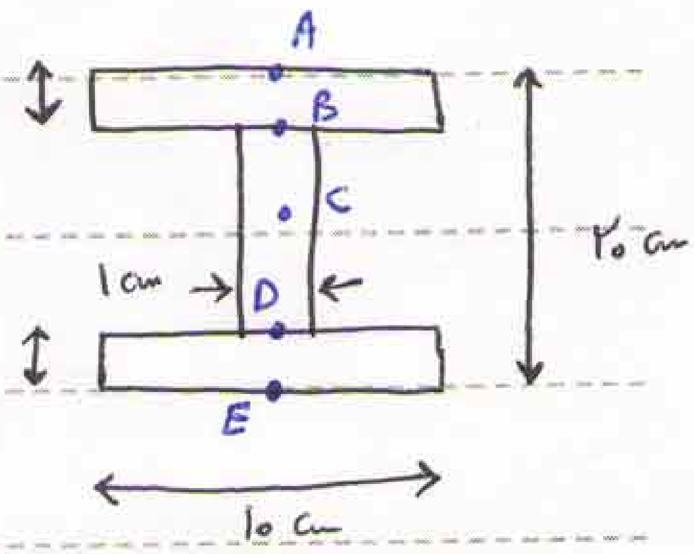


$$Q = A \times d$$

لنگر اول سطح A نسبت به محور λ

مثال تنش برشی ماکزیمم را در نقاط A و B و C و D بیابید؟

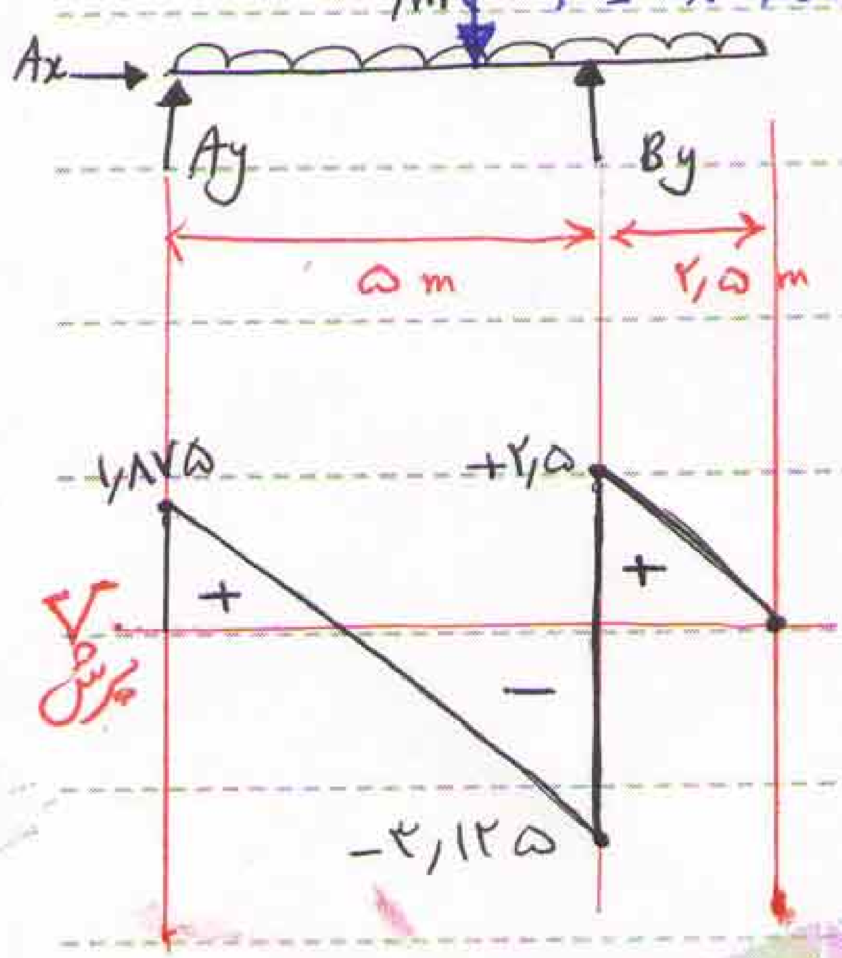




حل) برای یافتن محل V_{max} می بایست دیاگرام برشی داخلی ترسیم گردد.

$F = 1 \times 7.5 = 7.5\,t$ برآیند بار گسترده

$\sum F_x = 0 \to \boxed{A_x = 0}$

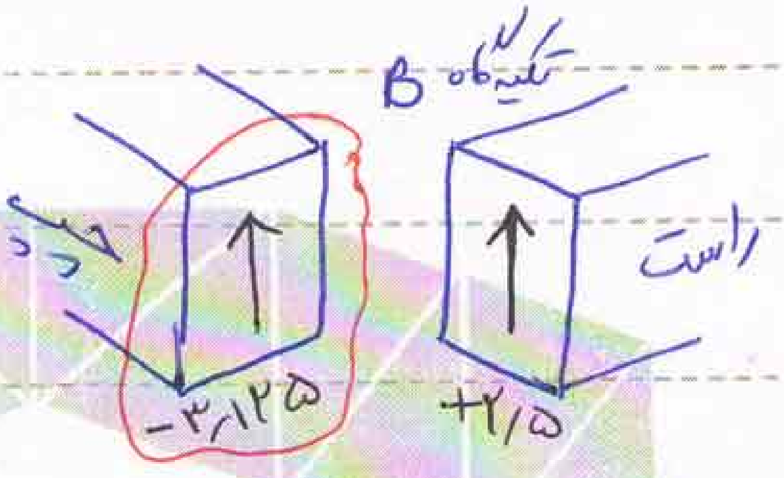


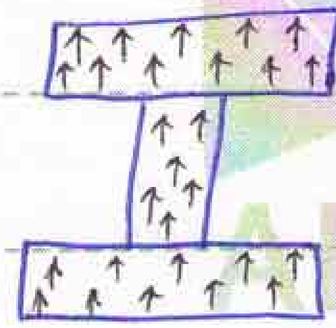
$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \to -B_y \times 5 + 7.5 \times \frac{7.5}{2} = 0 \to \boxed{B_y = 5.625\ \text{ton}}$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \to A_y - 7.5 + B_y = 0 \to \boxed{A_y = 1.875\ \text{ton}}$

پس از رسم دیاگرام برش مطابق شکل:

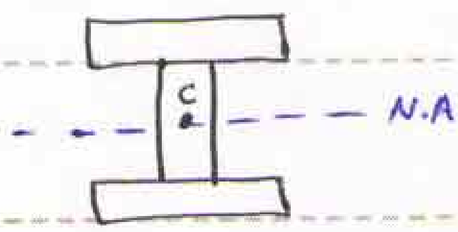
$V_{max} = -3.125\ \text{ton}$





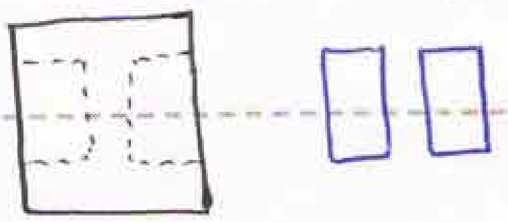
با توجه به علامت فوق جهت فلش‌ها در سطح مقطع:

$$\tau = \frac{VQ}{It}$$



مشخص کردن مرکز سطح (محور خنثی)

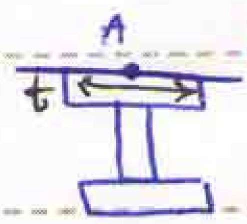
محاسبه‌ی ممان اینرسی سطح نسبت به محور خنثی:



برای سادگی محاسبات

$I = \frac{10 \times 20^3}{12} - \frac{9 \times 17.6^3}{12} \longrightarrow I_{N.A} = 2578\ cm^4$

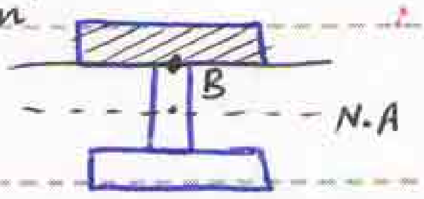
تنش در نقطه A:



چون سطح برش خورده نداریم

$\left.\begin{array}{l} Q = 0 \\ t = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow \tau_A = 0$

تنش در نقطه B :

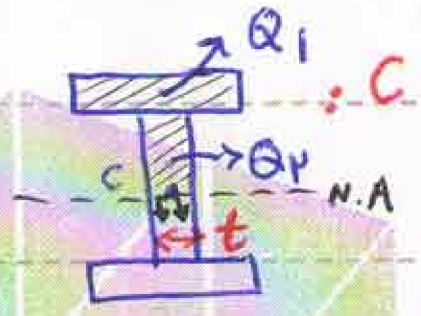


برای بال
$$\begin{cases} Q = 10 \times 1{,}2 \times (10 - 0{,}6) = 112{,}8 \ cm^3 \\ t = 10 \end{cases}$$

$$\tau_B = \frac{VQ}{It} = \frac{3{,}125 \times 10^3 \times 112{,}8}{2578 \times 10} = 13{,}67 \ \frac{kg}{cm^2}$$

برای جان
$$\begin{cases} Q = 112{,}8 \\ t = 1 \ cm \end{cases} \qquad \tau_B = \frac{3{,}125 \times 10^3 \times 112{,}8}{2578 \times 1} = 136{,}7 \ \frac{kg}{cm^2}$$

تنش در نقطه C :



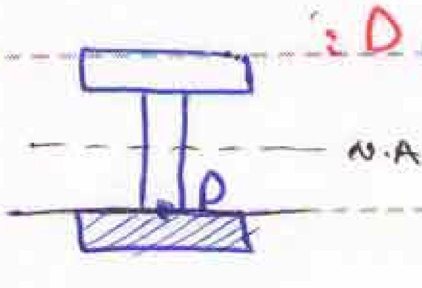
$$Q = Q_1 + Q_2$$

$$= \overbrace{10 \times 1{,}2 \times (10 - 0{,}6)}^{Q_1} +$$

$$+ (10 - 1{,}2) \times 1 \times \left(\frac{10 - 1{,}2}{2}\right) = 151{,}52 \ cm^3$$

$$t = 1 \ cm \qquad \tau_C = \frac{VQ}{It} = 183{,}67 \ \frac{kg}{cm^2}$$

تنش در نقطه D :



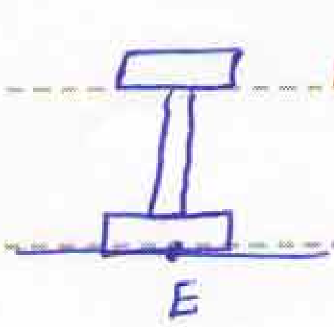
برای بال
$$\begin{cases} Q = 1{,}2 \times 10 \times (10 - 0{,}6) = 112{,}8 \ cm^3 \\ t = 10 \ cm \end{cases}$$

$$\tau_D = \frac{VQ}{It} = 13{,}67$$

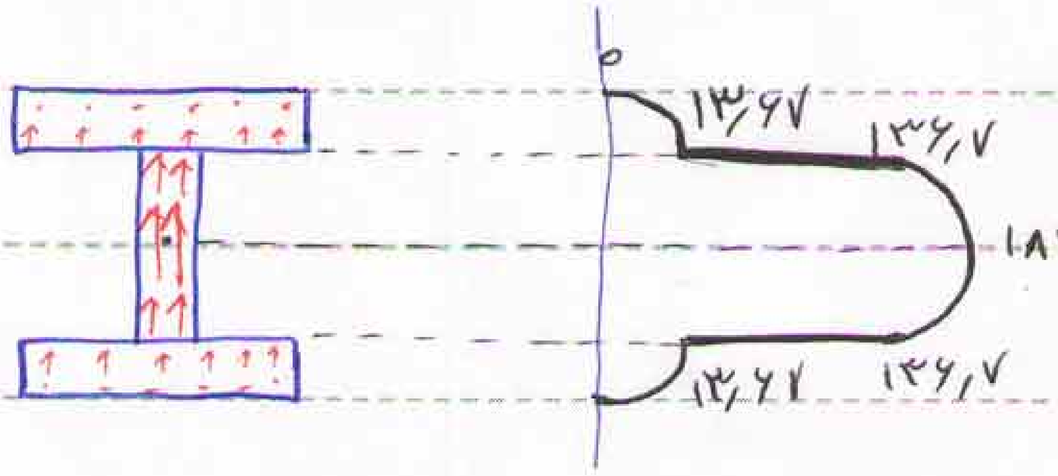
برای جان
$$\begin{cases} Q = 112{,}8 \\ t = 1 \ cm \end{cases} \qquad \tau_D = 136{,}7 \ \frac{kg}{cm^2}$$

تنش در نقطه E :

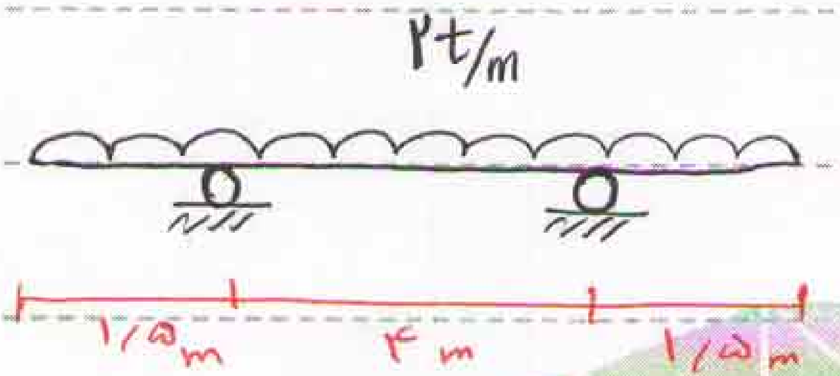
$$\begin{cases} Q = 0 \\ t = 10 \end{cases} \Rightarrow \tau_E = 0$$

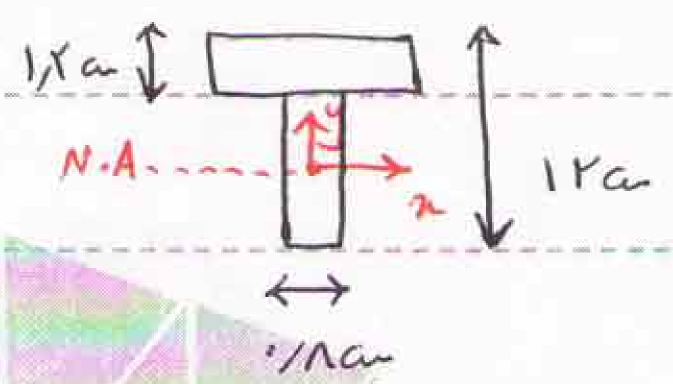


شکل توزیع تنش های برشی :

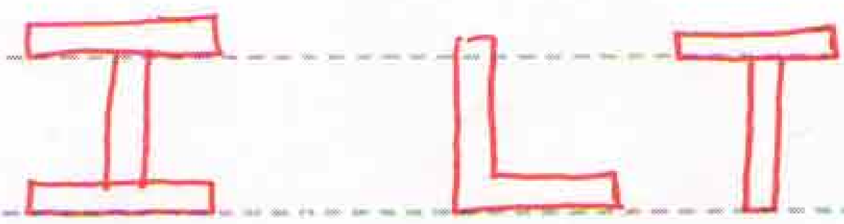


تکلیف : مقدار تنش برشی ماکزیمم در تیر با سطح مقطع زیر چقدر است؟



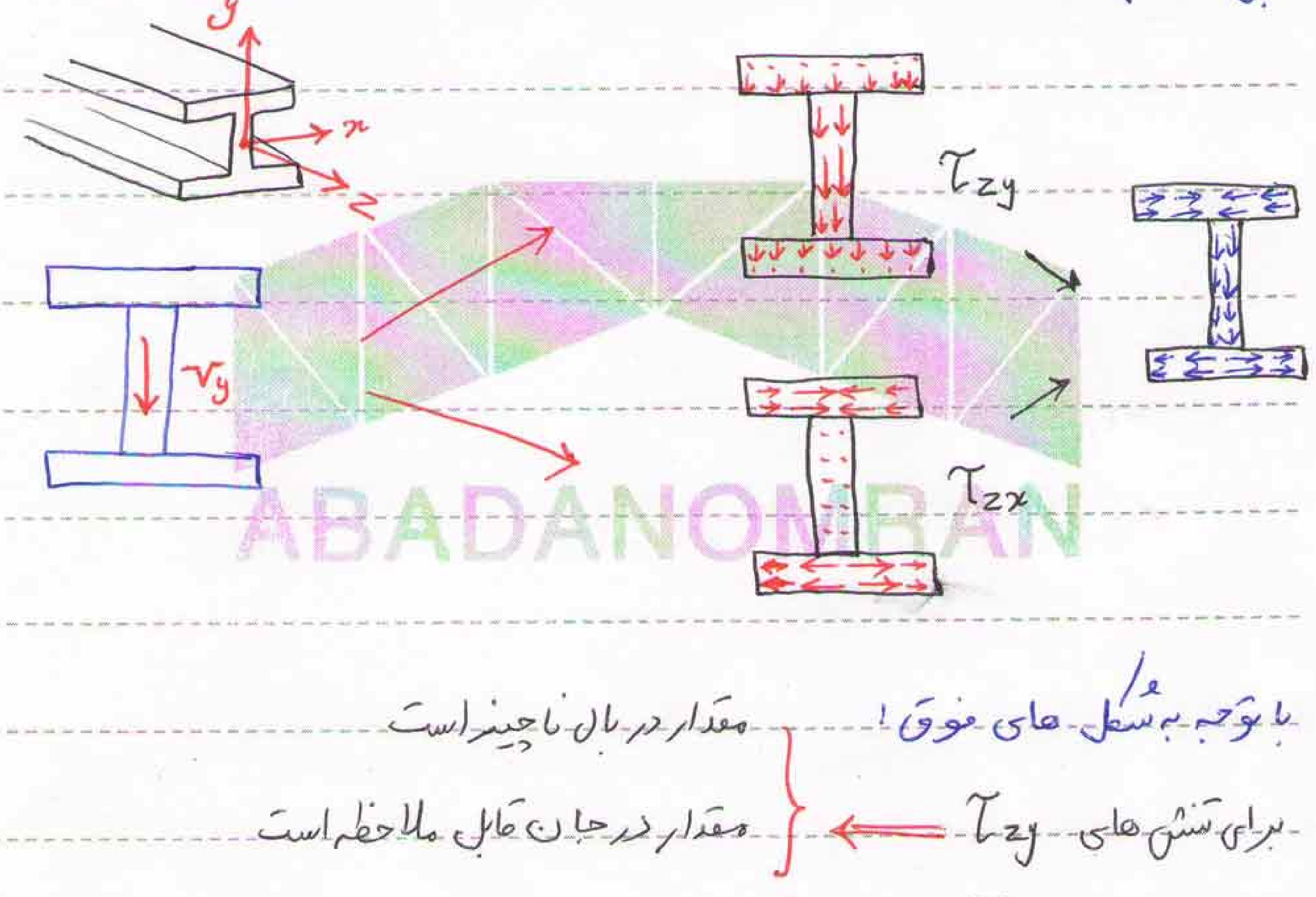


راهنمایی : ابتدا مرکز سطح را بدست آورید، سپس مبدا مختصات و محور خنثی را مطابق بر مرکز سطح در نظر بگیریم τ_{max} در محل محور خنثی اتفاق می افتد.



* تنش برشی در مقاطع جدار نازک :

ثابت می‌شود اگر در یک مقطع جدار نازک نیروی برشی در جهت محور y ها وجود داشته باشد، علاوه بر تنش هایی که در جهت y ایجاد می‌شود، تنش برشی در جهت x نیز بوجود می‌آید که از رابطه‌ی $\tau = \frac{VQ}{It}$ قابل محاسبه است.



با توجه به شکل های فوق :

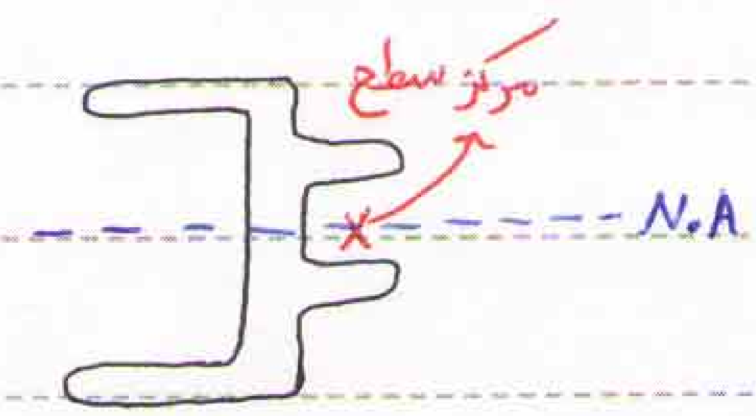
برای تنش های τ_{zy} ⟸ { مقدار در بال ناچیز است / مقدار در جان قابل ملاحظه است }

برای تنش های τ_{zx} ⟸ { مقدار در بال قابل ملاحظه است / مقدار در جان ناچیز است }

نتیجه‌گیری : در مقاطع جدار نازک تنش هایی را در نظر می‌گیریم که موازی بال یا جان هستند.

* نحوه استفاده از رابطه ی " $\tau = \frac{VQ}{It}$ " برای محاسبه ی تنش های برشی در مقاطع جدار نازک :

گام اول) ابتدا محل محور خنثی را مشخص می کنیم (از مرکز سطح می گذرد)

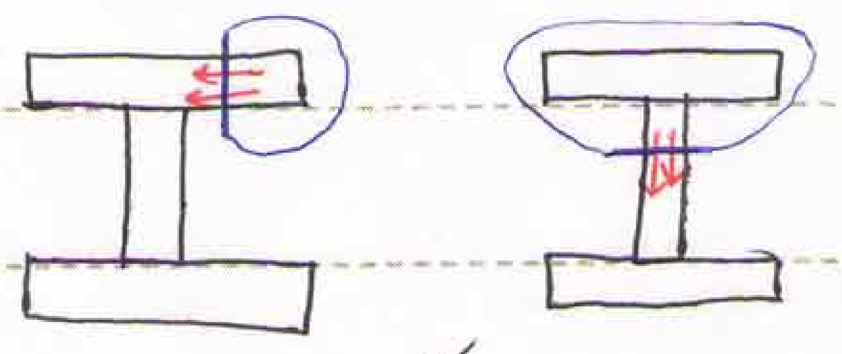


گام دوم) محاسبه ی ممان اینرسی کل مقطع نسبت به محور خنثی (I)

گام سوم) V نیروی برشی در سطح مقطع می باشد که از دیاگرام نیروهای داخلی آن را استخراج می کنیم.

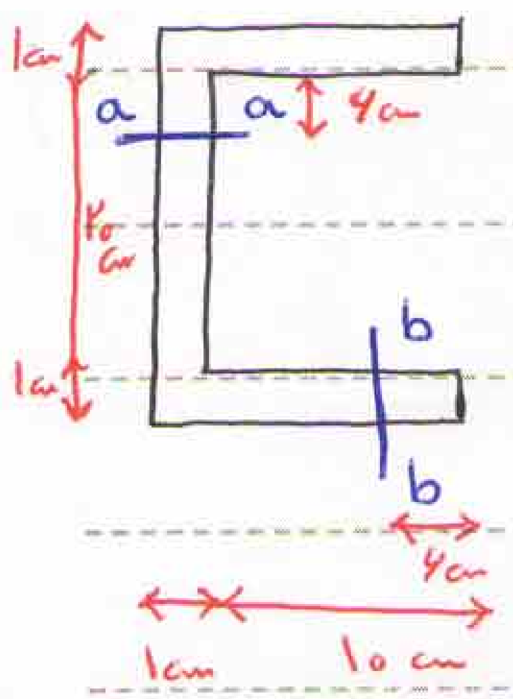
گام چهارم) t ضخامت مقطع در جهت عمود بر تنش های برشی می باشد.

گام پنجم) لنگر اول سطح هاشور خورده نسبت به محور خنثی می باشد.



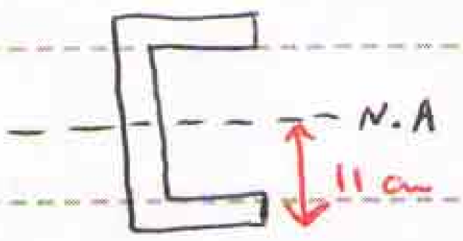
نکته: برای تعیین Q ابتدا عمود بر جهت تنش یک خط می کشیم سپس آنرا به خط بسته تبدیل می کنیم، هر قسمتی که درون خط بسته قرار بگیرد سطح هاشور خورده خواهد بود.

$\boxed{\text{مثال}}$ در سطح مقطع روبرو تنش برشی را در ترازهای که در شکل صفحه بعد نشان داده شده، a-a و b-b بیابید؟ (نیروی برشی سطح مقطع $V = ۳$ ton است)



محاسبه‌ی ممان اینرسی نسبت به محور خنثی:

ـ ابتدا محور خنثی را تعیین می‌کنیم که با توجه به متقارن بودن شکل نیازی به محاسبه نیست



و سپس ممان اینرسی نسبت به محور خنثی:

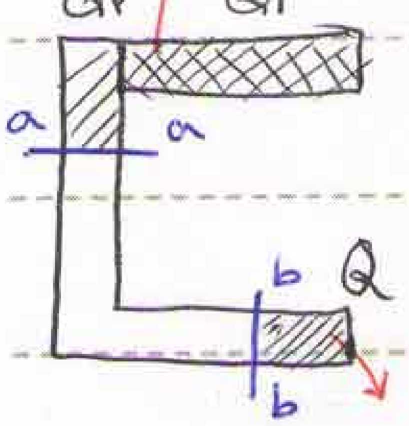
$$I_{N.A} = \frac{11 \times 22^3}{12} - \frac{10 \times 20^3}{12} = 3094 \ cm^4$$

ـ تنش برشی در تراز a-a:

$$\tau_{a-a} = \frac{VQ}{It} \qquad \begin{cases} V = 3000 \ kg \ , \ I = 3094 \ cm^4 \\ t = 1 \ cm \ , \ Q = Q_1 + Q_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow Q = \overbrace{10 \times 1 \times 10.5}^{Q_1} + 7 \times 1 \times (4 + 3.5) = 157.5 \ cm^3$$

$$\Rightarrow \tau_{a-a} = \frac{3000 \times 157.5}{3094 \times 1} = 152.71 \ \frac{kg}{cm^2}$$



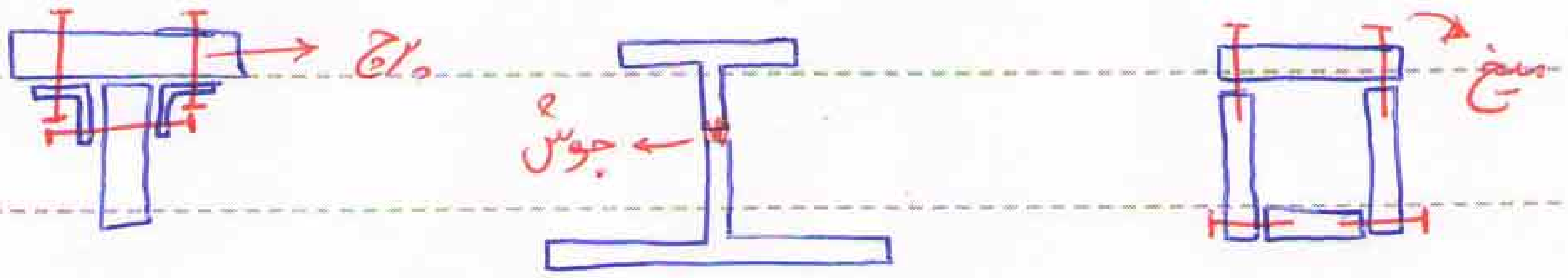
ـ تنش برشی در تراز b-b:

$$\begin{cases} V = 3000 \ kg \ , \ I = 3094 \ cm^4 \\ t = 1 \ cm \end{cases}$$

$$Q = 1 \times 6 \times 10.5 = 63 \ cm^3$$

$$\tau_{b-b} = \frac{3000 \times 63}{3094 \times 1} = 61.08 \ \frac{kg}{cm^2}$$

* آشنایی با طراحی تیرهای تشکیل شده از اعضای متصل به هم:

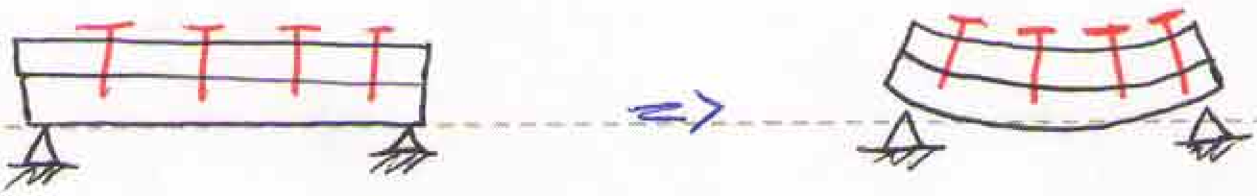


طراحی چنین تیرهای شامل دو مرحله می‌باشد:

الف) طراحی کلی سطح مقطع (یعنی ابعاد سطح مقطع را طوری می‌یابیم که روابط طراحی مثل $\sigma_{max} \leq \sigma_a$ برای آن برقرار باشد)

ب) طراحی اعضای اتصال دهنده: { میخ، پیچ، پرچ، جوش، چسب }

- یعنی قطر پیچ ها چقدر باشد؟
- فواصل میخ ها چقدر باشد؟
- ضخامت جوش چقدر باشد؟



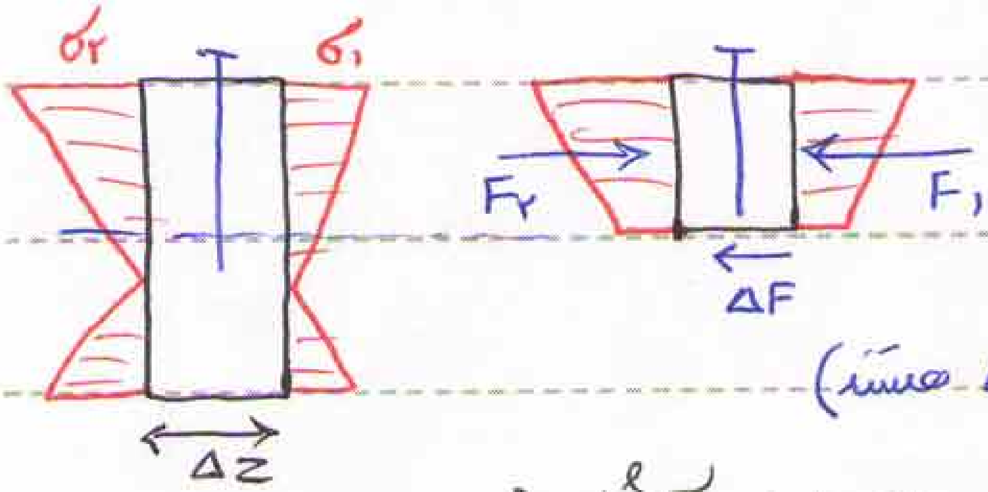
* با توجه به شکل های فوق نتیجه می‌شود که اعضای اتصال دهنده تحت اثر نیروی برشی هستند.

سوال: نیروی برشی بوجود آمده در شکل های فوق در اثر چه عاملی تولید می‌شود؟

جواب: با توجه به شکل های نشان داده شده های ΔF است یعنی (اختلاف F_1 و F_2) که در اثبات رابطه $\tau = \frac{VQ}{It}$ به کار رفت.

Subject: مقاومت مصالح

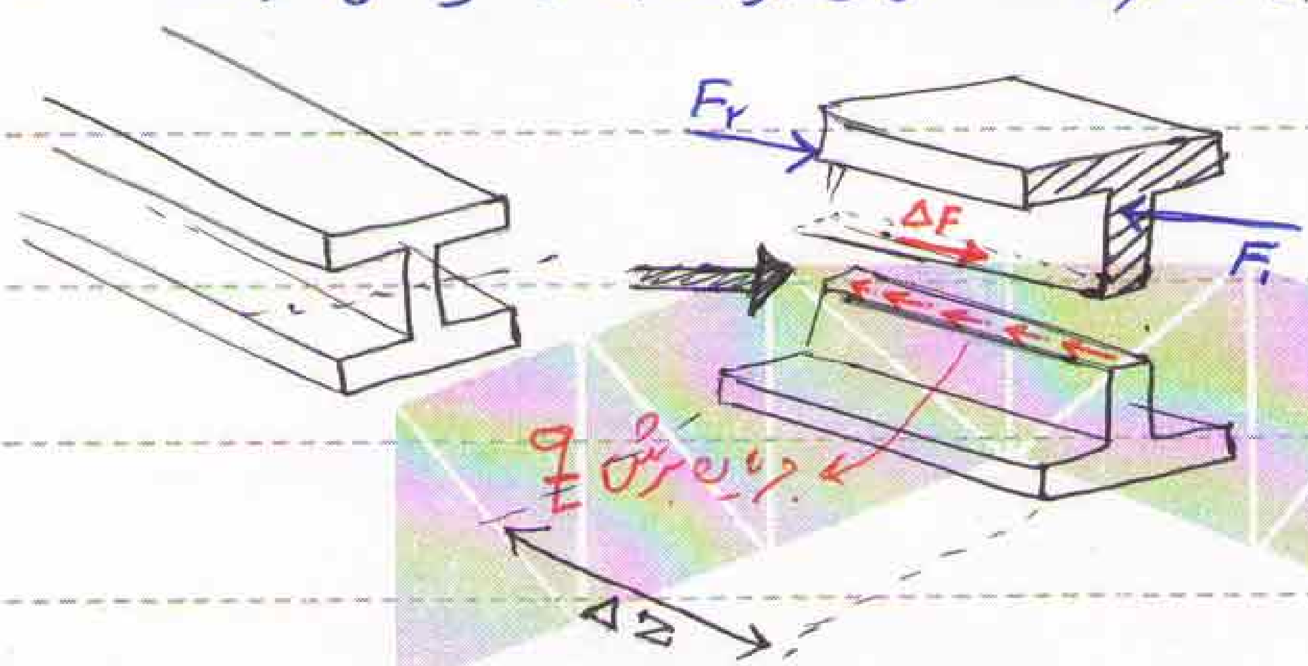
Year: 90 Month. 3 Date. 5

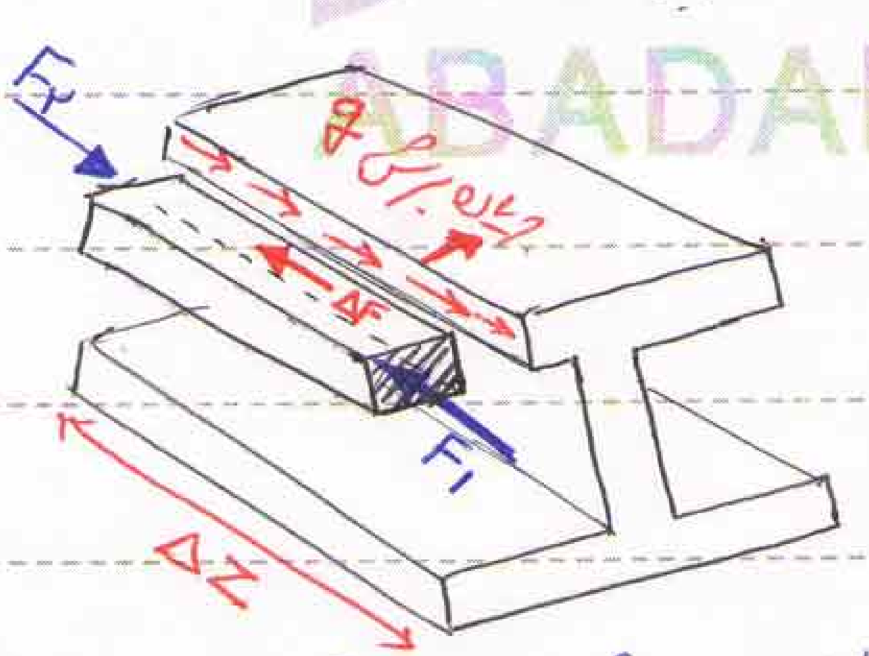


* نتیجه گیری: (اعضای اتصال دهنده (پیچ، میخ و ...) در معرض نیروی برشی ΔF هستند)

به منظور طراحی اعضای اتصال دهنده ابتدا باید با تعریف زیر آشنا شویم:

* جریان برش: نیروی برشی در واحد طول تیر جریان برشی نامیده می شود.





جریان برش را با علامت q نشان می دهیم

* واحد جریان برش $\frac{kg}{cm}$ است.

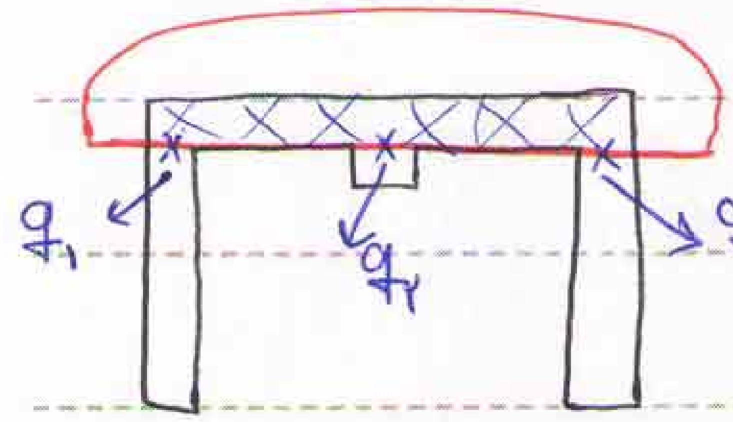
فرمول جریان برش q:

با توجه به تعریف جریان برش که نیرو در واحد طول می باشد و در اثر ΔF (همان اختلاف F_1 و F_2) بوجود می آید، لذا:

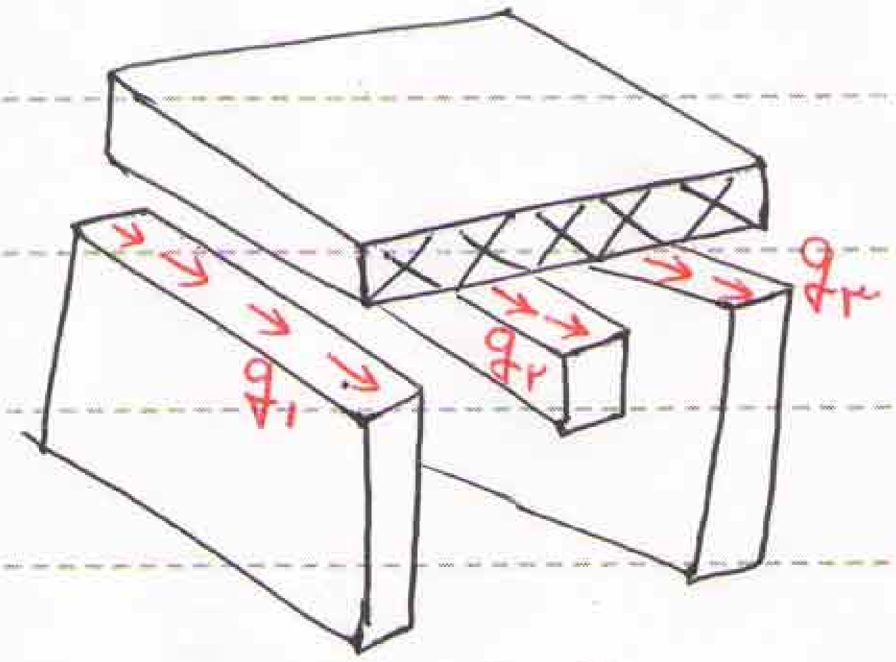
$$q = \frac{\Delta F}{\Delta z} \Longrightarrow q = \frac{VQ}{I}$$

پارامترهای V، Q و I همان هایی هستند که در فرمول $\tau = \frac{VQ}{It}$ به کار بردیم.

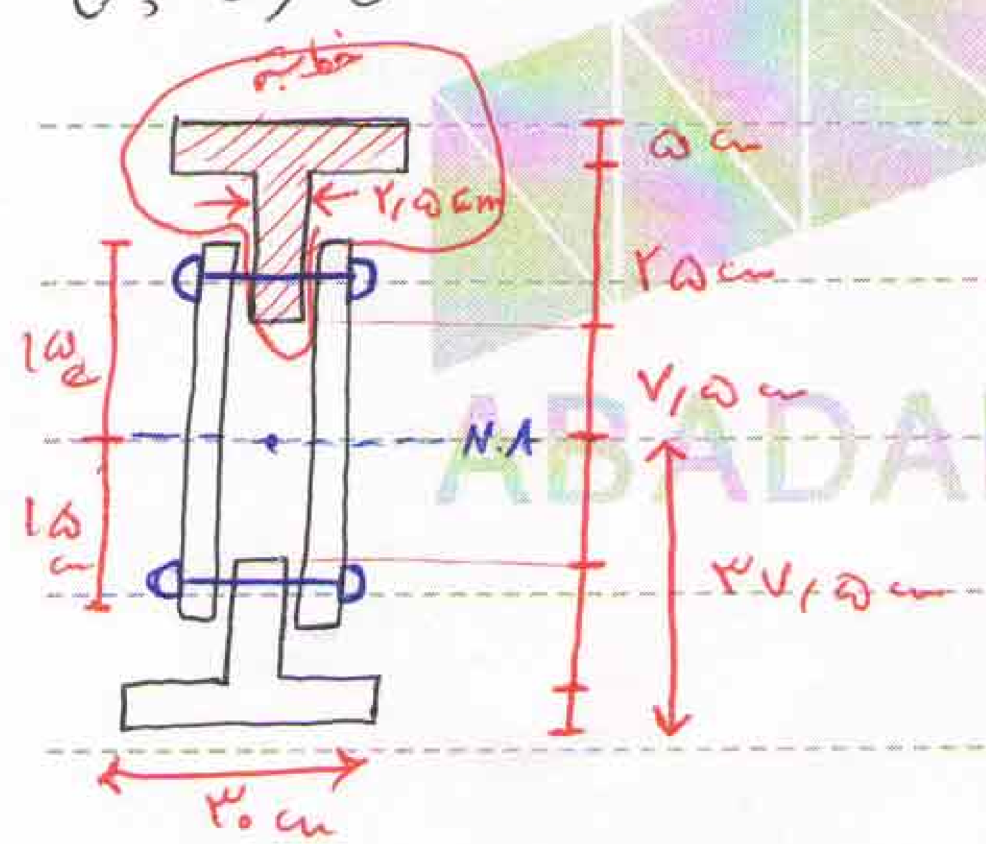
تعمیم رابطه‌ی جریان برشی q :

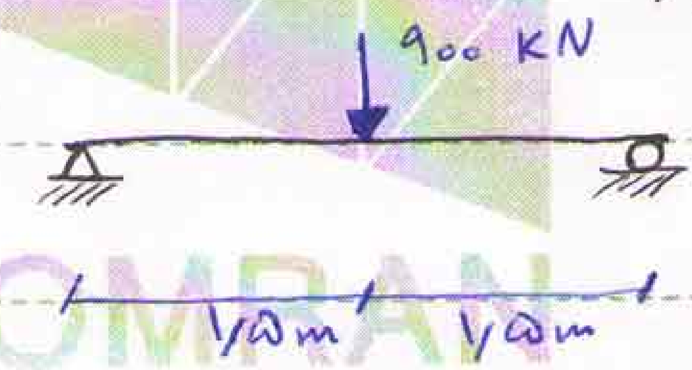


$$\boxed{q_1 + q_2 + q_3 = \frac{VQ}{I}}$$



مثال: دو سپری توسط پرچ های به دو ورق متصل شده اند، تنش برشی در پرچ ها را بیابید؟

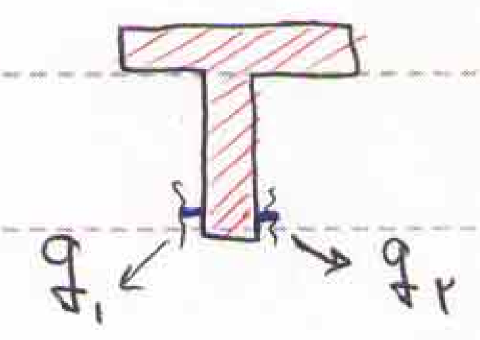




$I_x = 4200 \times 10^6 \ mm^4$

قطر پرچ ها $d = 22 \ mm$

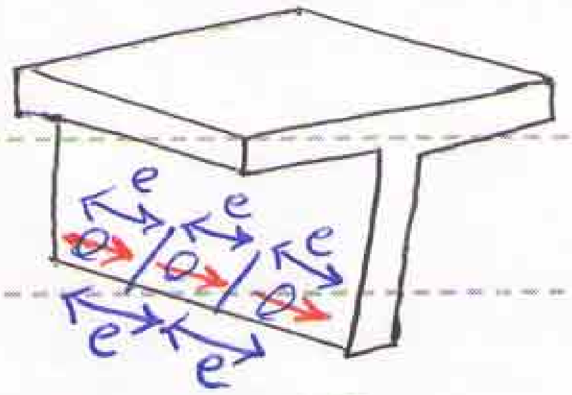
فاصله‌ی پرچ ها $e = 125 \ mm$



حل) همیشه ابتدا پیچ را قطع می کنیم، سپس خط را ادامه می دهیم تا خط بسته تشکیل گردد و هر کجای دیگر که خط بسته ها پرچ را قطع نمود در آن جا نیز جریان برشی داریم

Subject: مقاومت مصالح

Year: 90 Month. 3 Date. 5

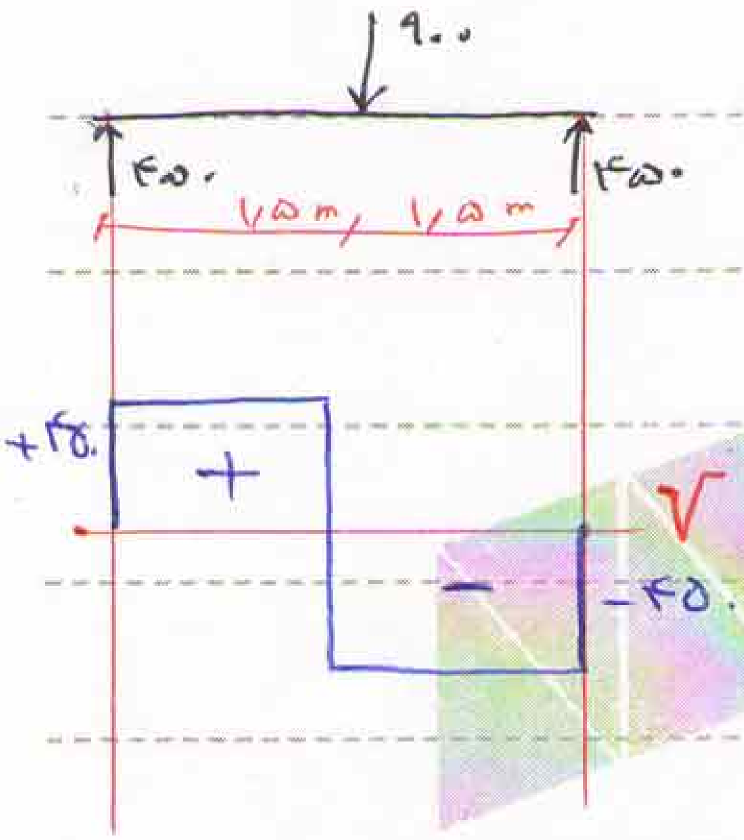


$$q_1+q_2=\frac{VQ}{I}$$

$q_1=q_2$ چون $\Rightarrow 2q=\frac{VQ}{I}$

$$\rightarrow q=\frac{VQ}{2I}$$

به منظور محاسبه ی V می بایست نمودار نیروهای داخلی را برای تیر مسئله داده شده ترسیم کنیم



$$V=450\ kN=450\times10^{3}\ N$$

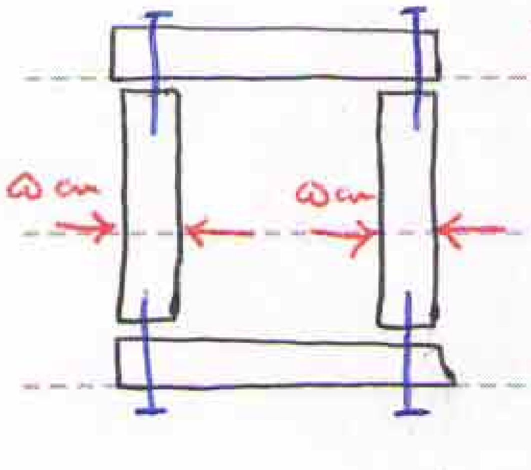
$$Q=30\times5\times\left(7.5+25-\frac{5}{2}\right)+25\times2.5\times(7.5+12.5)=6500\ cm^{3}$$

$$\Rightarrow q=\frac{450\times10^{3}\times6500\times10^{3}}{2\times4300\times10^{6}}=340.12\ \frac{N}{mm}$$

نیروی پیچ $=F=q\times e$

$$\Rightarrow F=340.12\times125=42514.53\ N$$

$$\tau=\frac{F}{A}=\frac{42514.53}{\pi(11)^{2}}=11.84\ \frac{N}{mm^{2}}$$



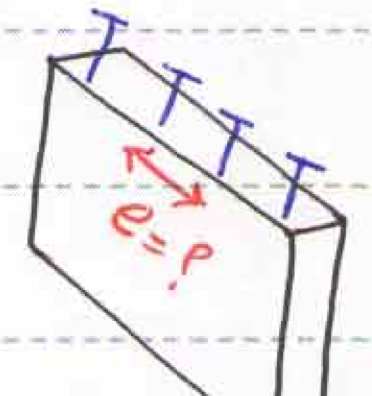
مثال) در تیر با سطح مقطع نشان داده شده مطلوب است.

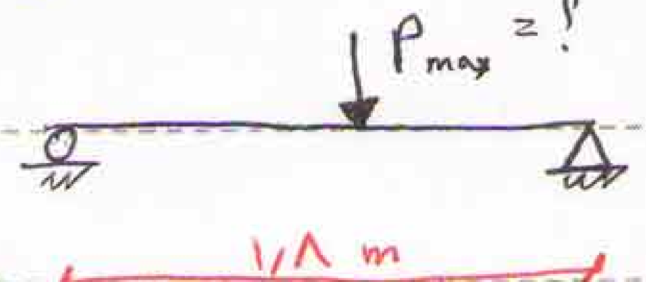
الف) حداکثر بار P که به تیر می‌تواند وارد گردد؟

ب) فاصله‌ی مجاز میخ‌ها از هم؟ = e

تنش مجاز خمشی $\sigma_a = \pm 70 \frac{kg}{cm^2}$

نیروی برشی مجاز میخ‌ها $F_a = 280\ kg$

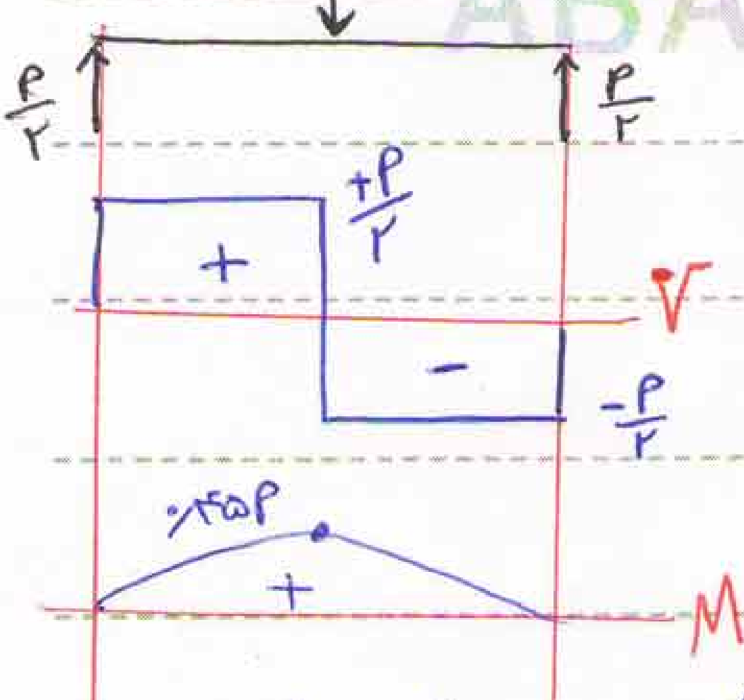




حل الف) مقدار P را باید به گونه‌ای تعیین کنیم که ماکزیمم تنش خمشی بوجود آمده در سطح مقطع از مقدار مجاز بیشتر نشود.

$$\sigma_{max} \le \sigma_a \Rightarrow \frac{M_{max}}{I} y_{max} \le 70$$

باید دیاگرام نیروهای داخلی را بیابیم



$$\rightarrow M_{max} = 0.45 P$$

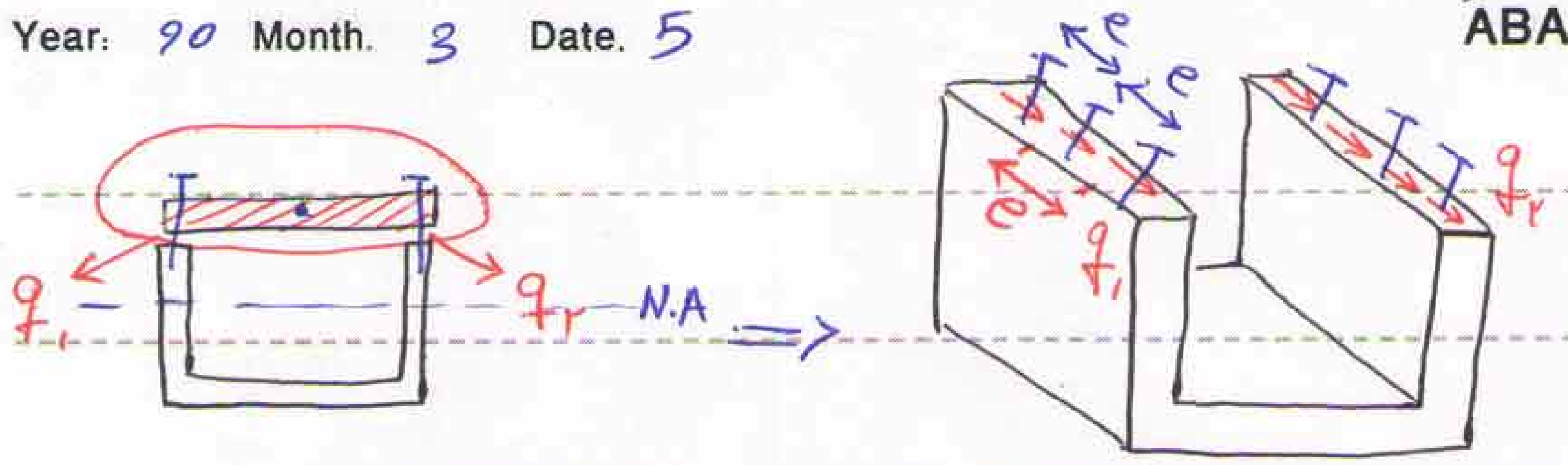
$$I_{N.A} = \frac{20 \times 25^3}{12} - \frac{10 \times 20^3}{12} = 19375\ cm^4$$

$$y_{max} = 12.5\ cm \Rightarrow \frac{0.45 P \times 10^2}{19375}(12.5) \le 70$$

$$\rightarrow \boxed{P \le 2411\ kg}$$

حل ب) فواصل میخ‌ها e را طوری تعیین می‌کنیم که نیروی برشی بوجود آمده در میخ‌ها از مقدار مجاز بیشتر نشود.

$F_{\text{میخ}} \le F_a$



میخ $F = q \times e \leq 280$ $\qquad q_1 + q_2 = \frac{VQ}{I}$

$$q_1 = q_2 \rightarrow 2q = \frac{VQ}{I} \rightarrow \boxed{q = \frac{VQ}{2I}}$$

$V = \frac{P}{2}$ از دیاگرام نیروی برشی

$$V = \frac{P}{2} = \frac{2411}{2} = 1205.5 \ kg$$

$$I = 19375 \ cm^4$$

$$Q = 20 \times 2.5 \times \left(10 + \frac{2.5}{2}\right) = 562.5 \ cm^3$$

$$q = \frac{VQ}{2I} = \frac{1205.5 \times 562.5}{2 \times 19375} = 17.5 \ \frac{kg}{cm}$$

$$q \times e \leq 280 \rightarrow 17.5 \times e \leq 280$$

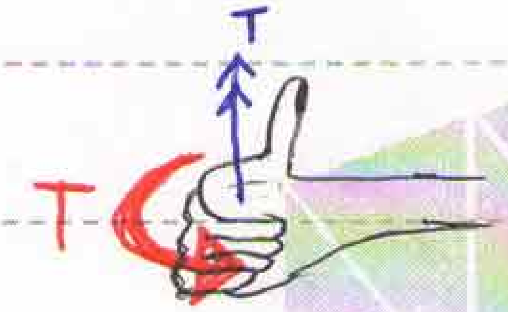
$\rightarrow e \leq 16 \ cm$ فاصله مجاز میخ ها از هم

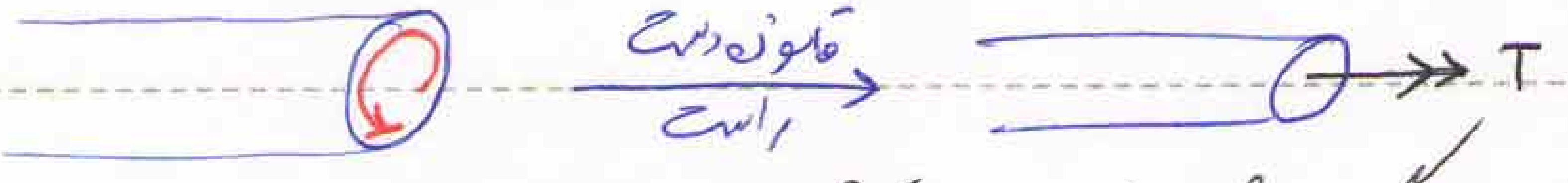
فصل ششم - تنش های ناشی از پیچش «Torsion stresses»

رسم دیاگرام لنگر پیچشی داخلی برای تیرها :

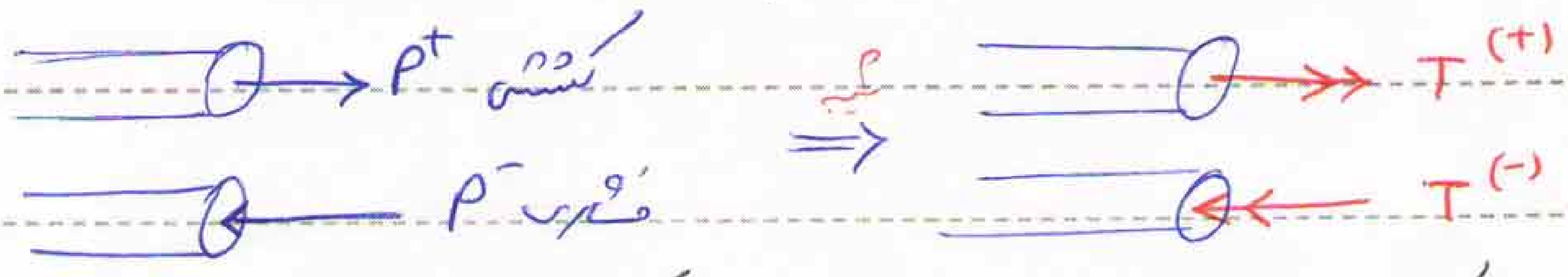
ابتدا بردار خمیده لنگر پیچشی G را با استفاده از قانون دست راست به بردار مستقیم ← تبدیل کرده، سپس تمامی قوانینی که برای رسم دیاگرام نیروی محوری داخلی P را به کار بردیم برای پیچش T نیز به کار می رود.

قانون دست راست : اگر بسته شدن چهار انگشت دست راست در جهت بردار خمیده باشد، انگشت شست نشان دهنده‌ی جهت بردار مستقیم است



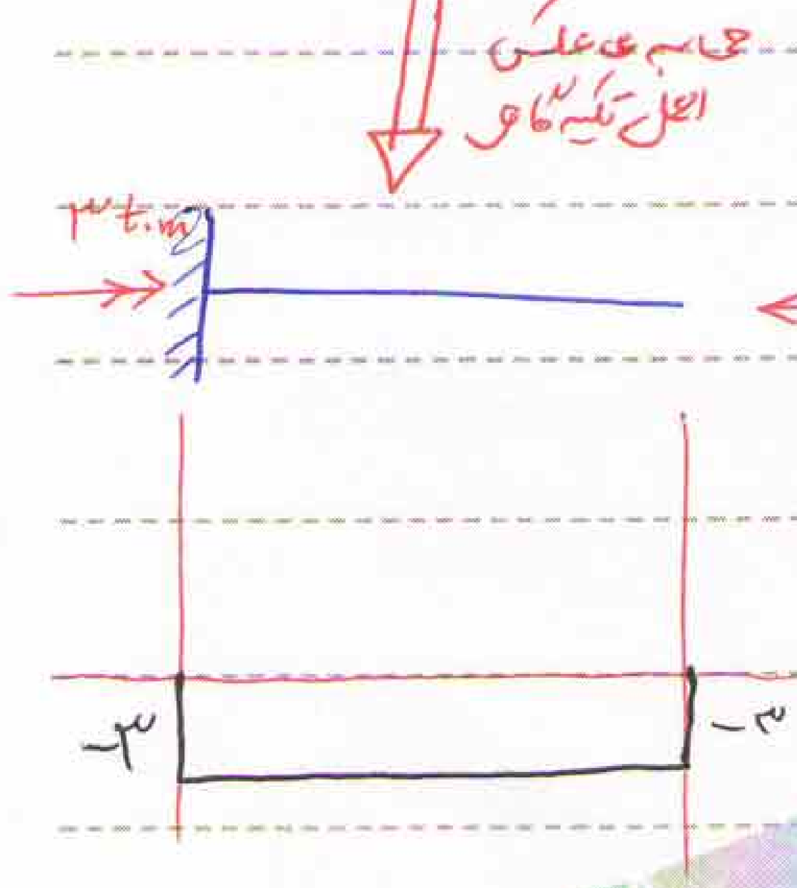


قرارداد علامت لنگر پیچشی داخلی : دقیقاً شبیه نیروهای محوری است.



مثال دیاگرام پیچش داخلی را برای تیرهای زیر رسم کنید :

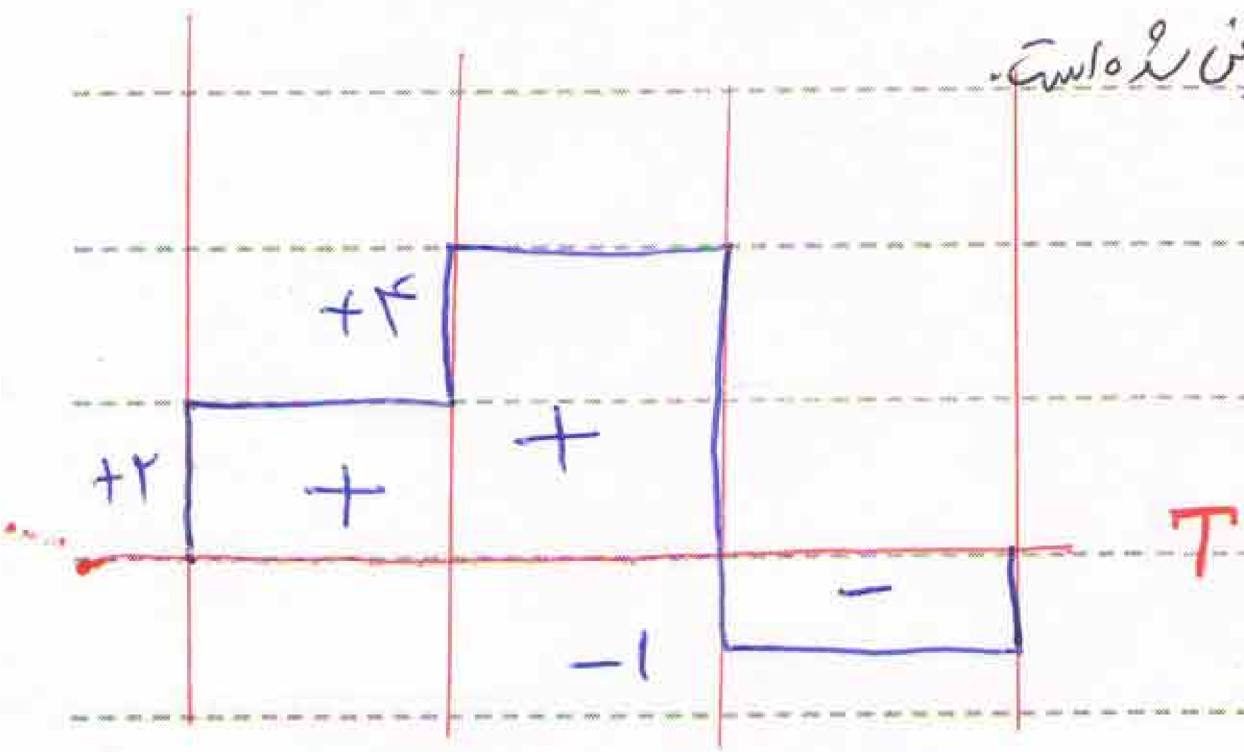
* یادآوری جهش در نمودار نیروهای محوری:
اگر جهت بار به سمت چپ باشد، جهش در نمودار به سمت بالا ↑ است
و اگر جهت بار به سمت راست باشد جهش در نمودار به سمت پایین ↓ است



مثال ۲)

$$\sum \overset{+}{\rightarrow} T_x = 0 \rightarrow -T-2+5-1=0 \rightarrow T=+2\ t.m$$

علامت مثبت یعنی جهت T درست فرض شده است.

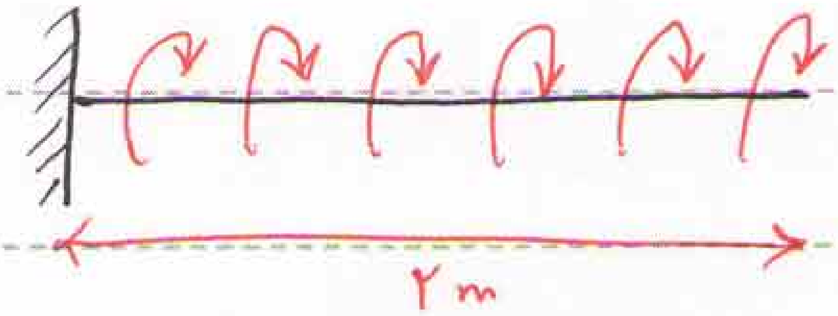


Subject: مقاومت مصالح

Year: 90 Month. 3 Date. 5

ABADANOMRAN

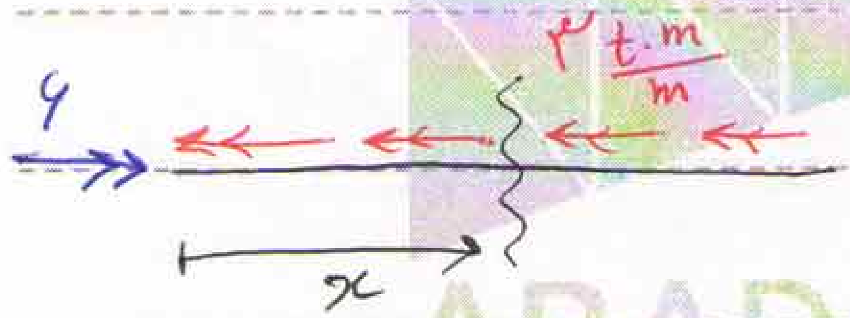
مثال ۳) پیچش گسترده:



$$\sum T_x = 0 \rightarrow T - 3\times 2 = 0$$

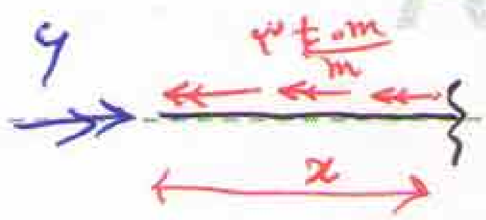
$$\rightarrow \boxed{T = 6\ t.m}$$

* با استفاده از روش مقطع زدن معادله نیروی داخلی $T(x)$ را می‌یابیم



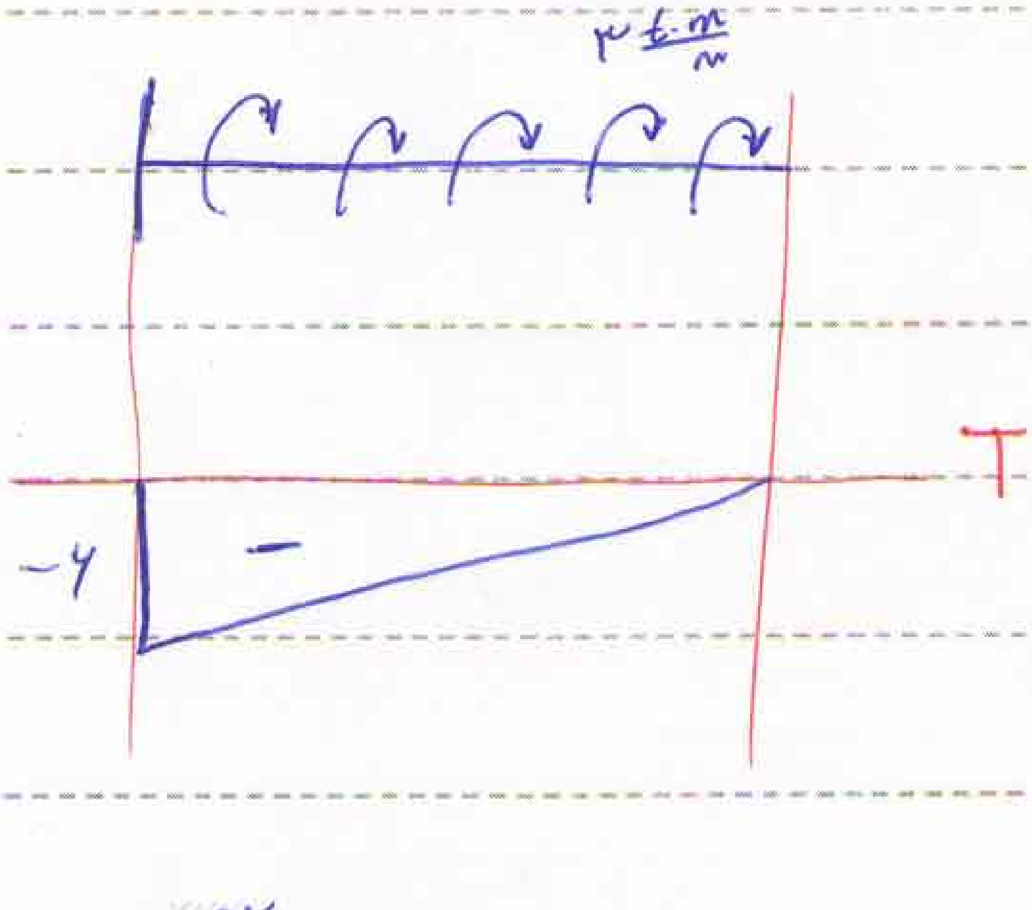
$$\sum T_x = 0 \rightarrow 6 - 3\times x + T(x) = 0$$

$$\rightarrow \boxed{T(x) = 3x - 6}$$



معادله درجه ① خط صاف:

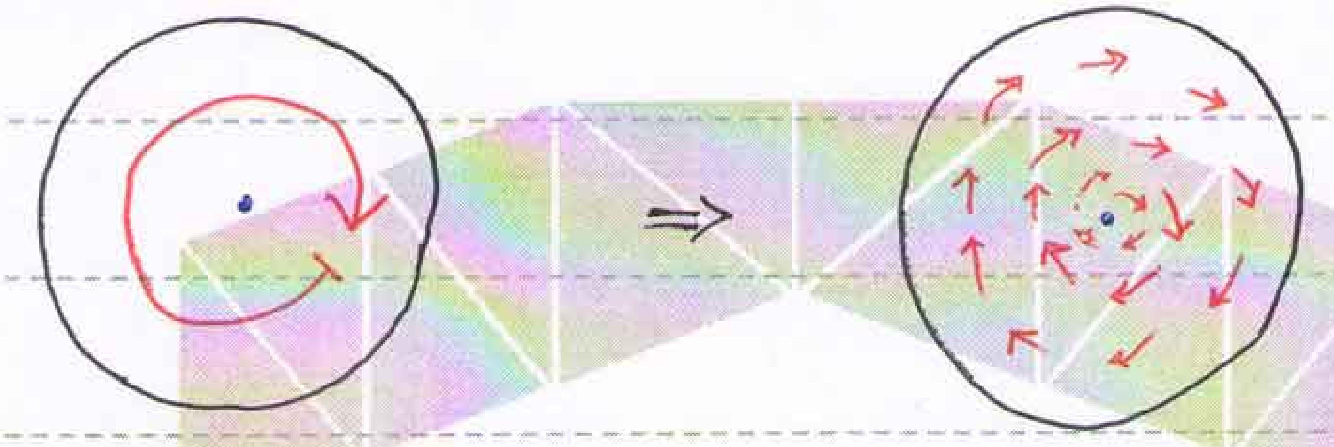
x	0	2
T	-6	0



* تنش های ناشی از لنگر پیچشی :

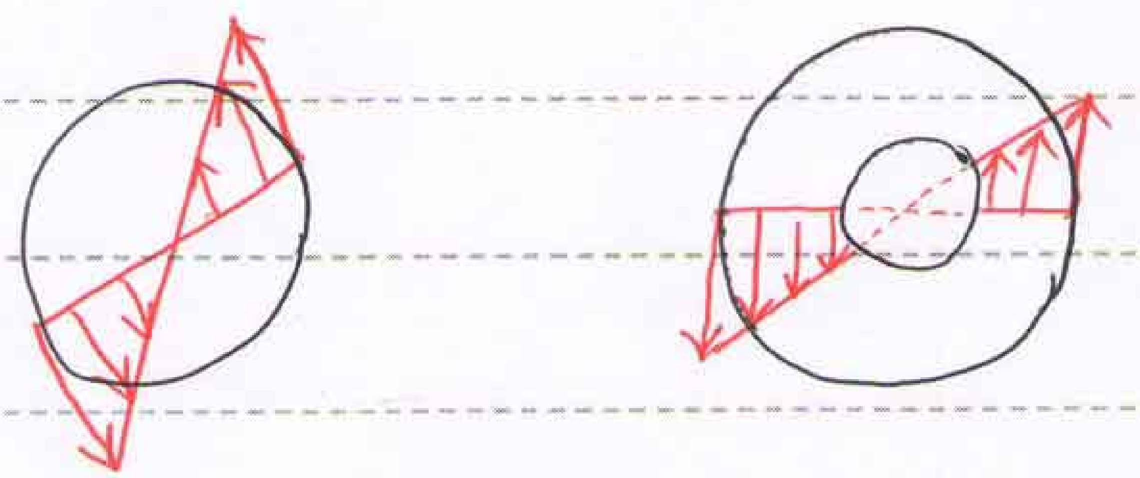
برخلاف سایر انواع تنش ها که برای هرکدام یک فرمول ارائه شد ، رفتار مقاطع با شکلهای مختلف در برابر لنگر پیچشی متفاوت می باشد و برای هر شکل سطح مقطعی یک رابطه تنش پیچشی خاص ارائه می گردد.

فرمول تنش پیچشی برای مقاطع دایره ای توپر یا توخالی :



نتیجه گیری : در اثر لنگر پیچشی در یک سطح مقطع تنش های برشی τ ایجاد می گردد.

* برای مقطع دایره ای توپر و توخالی توزیع تنش های ناشی از پیچش خطی می باشد و از رابطه زیر بدست می آید.



$$\boxed{\tau = \frac{T}{J} R}$$

دراین رابطه :

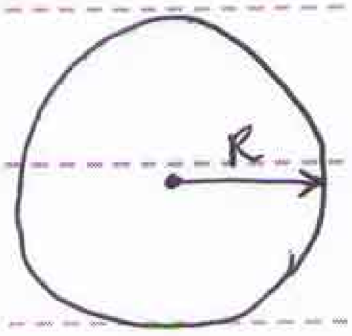
T : لنگر پیچشی داخلی سطح مقطع که از دیاگرام نیروهای داخلی بدست می آید.

R : فاصله ی نقطه مورد نظر که می خواهیم تنش در آن را محاسبه کنیم نسبت به مرکز دایره

$\dot{J}$: ممان اینرسی قطبی کل سطح مقطع دایره

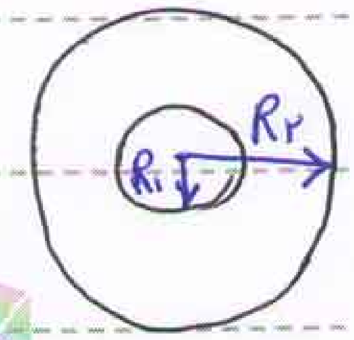
$$\dot{J} = \frac{\pi R^4}{2}$$

دایره توپر



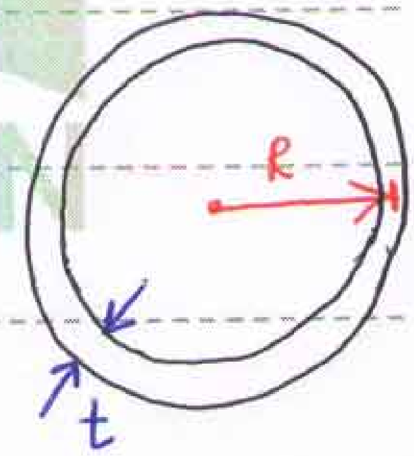
$$\dot{J} = \frac{\pi R_2^4}{2} - \frac{\pi R_1^4}{2}$$

دایره توخالی

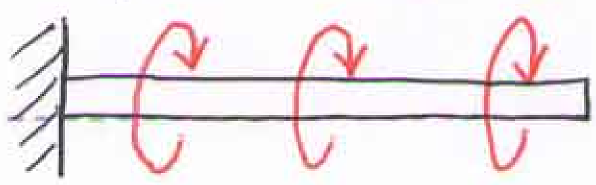


$$\dot{J} = 2\pi R^3 t$$

دایره جدار نازک

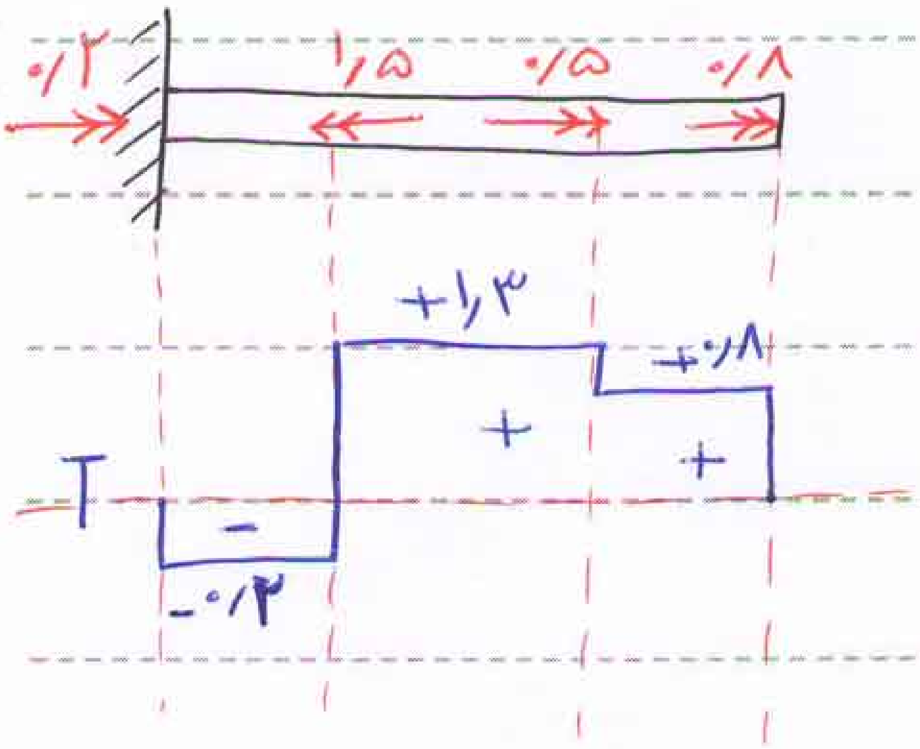


مثال: تنش برشی ماکزیمم را در تیر زیر بیابید؟



شکل سطح مقطع

حل) ابتدا دیاگرام نیروی داخلی (لنگر پیچشی) را رسم می کنیم تا T_{max} را بیابیم



$$J = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi (5)^4}{2} = 981.75\ cm^4$$

$$R = 5\ cm$$

$$\tau_{max} = \frac{T_{max}}{J} R$$

$$\boxed{\tau_{max} = \frac{1.3 \times 10^5}{981.75}(5) = 662\ \frac{kg}{cm^2}}$$

* تغییر شکل ناشی از پیچش در مقاطع دایره‌ای :

تغییر شکل های ناشی از پیچش بصورت چرخش یک سطح مقطع نسبت به سطح مقطع دیگر ظاهر می‌گردد. مثلاً در شکل فوق اگر تیر تحت اثر لنگر پیچشی T قرار گیرد، سطح مقطع A نسبت به سطح مقطع B به اندازه‌ی زاویه‌ی φ_{AB} می‌چرخد که از رابطه‌ی زیر قابل محاسبه است.

$$\boxed{\varphi_{AB} = \frac{T_{AB}\ L_{AB}}{G\ J_{AB}}}$$

φ_{AB} : چرخش سطح مقطع A نسبت به سطح مقطع B

T_{AB} : لنگر پیچشی داخلی در بازه‌ی AB

L_{AB} : فاصله سطح مقطع A تا B

G : ضریب الاستیسیته برشی

J_{AB} : ممان اینرسی قطبی سطح مقطع

* جوابی که از رابطه ی قبل بدست می آید برای φ برحسب رادیان است.

رابطه ی فوق زمانی قابل استفاده است که دو شرط زیر برقرار باشد:

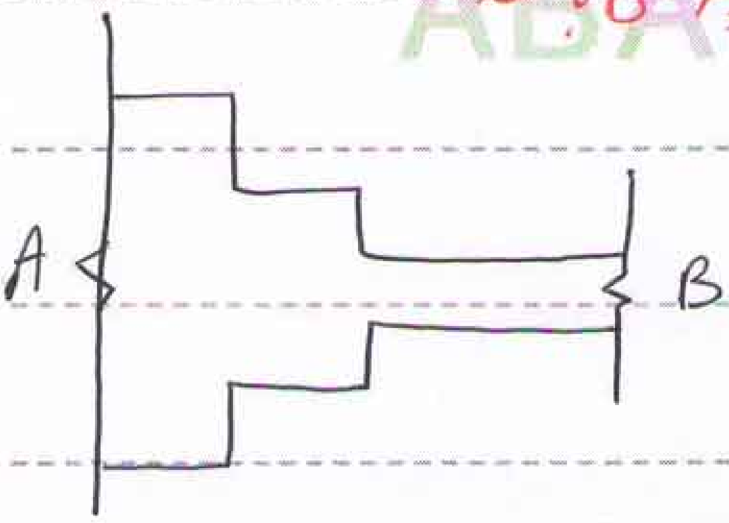
الف) نیروی داخلی تیر در بازه ی A تا B ثابت باشد.

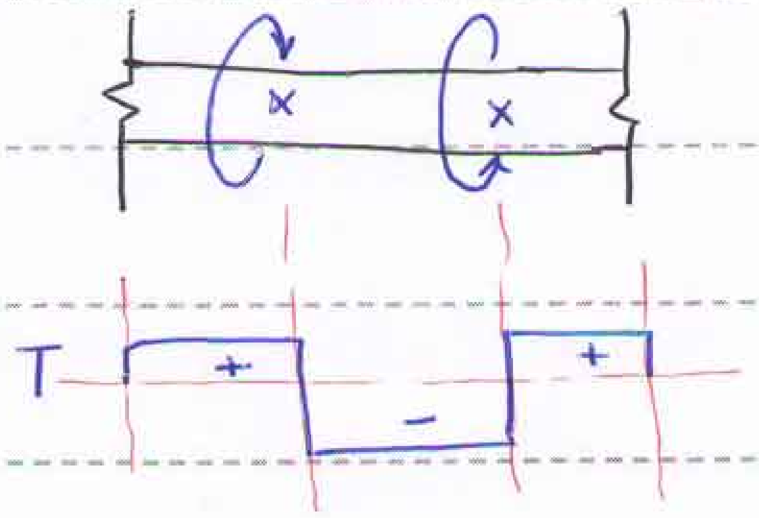
ب) سطح مقطع در بازه ی A تا B ثابت باشد.

* تعمیم رابطه ی $\varphi = \frac{TL}{GJ}$:

- درصورتی که هر یک از شرایط الف و ب برقرار نباشد، دو حالت ممکن است بوجود آید:

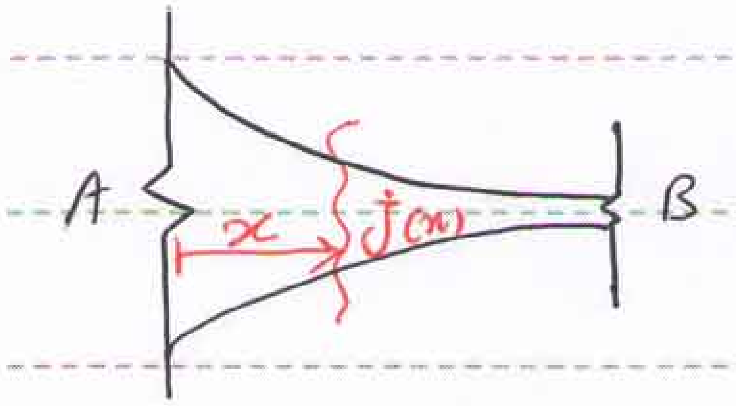
حالت اول) تغییرات T یا سطح مقطع در طول تیر پله ای باشد.



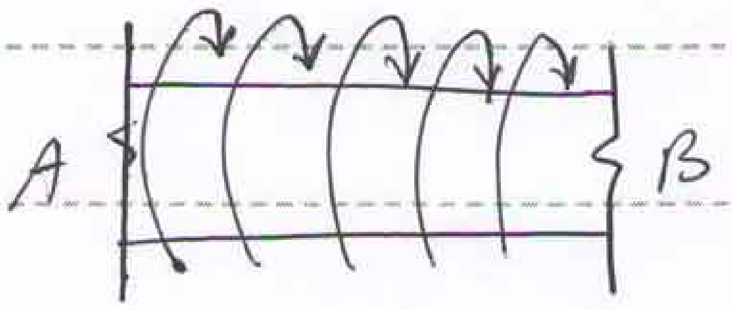


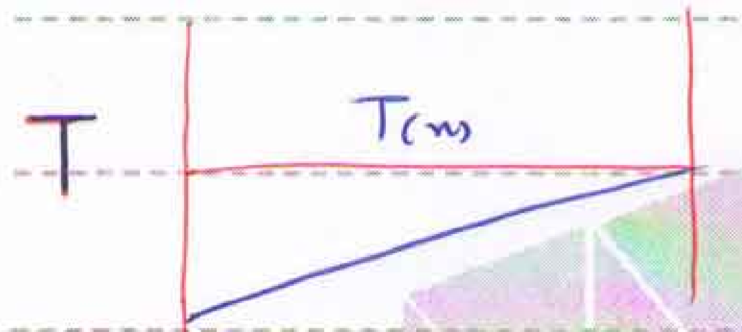
$$\boxed{\varphi_{AB} = \sum \frac{T_i L_i}{G J_i}}$$

حالت دوم) تغییرات T یا سطح مقطع در طول تیر پیوسته باشد:



$$\varphi_{AB} = \int_A^B \frac{T(x)}{G\,J(x)}\,dx$$





مثال: در ماشین زیر به علت اصطکاک و عوامل دیگر در محور ماشین گشتاور پیچشی بوجود می‌آید

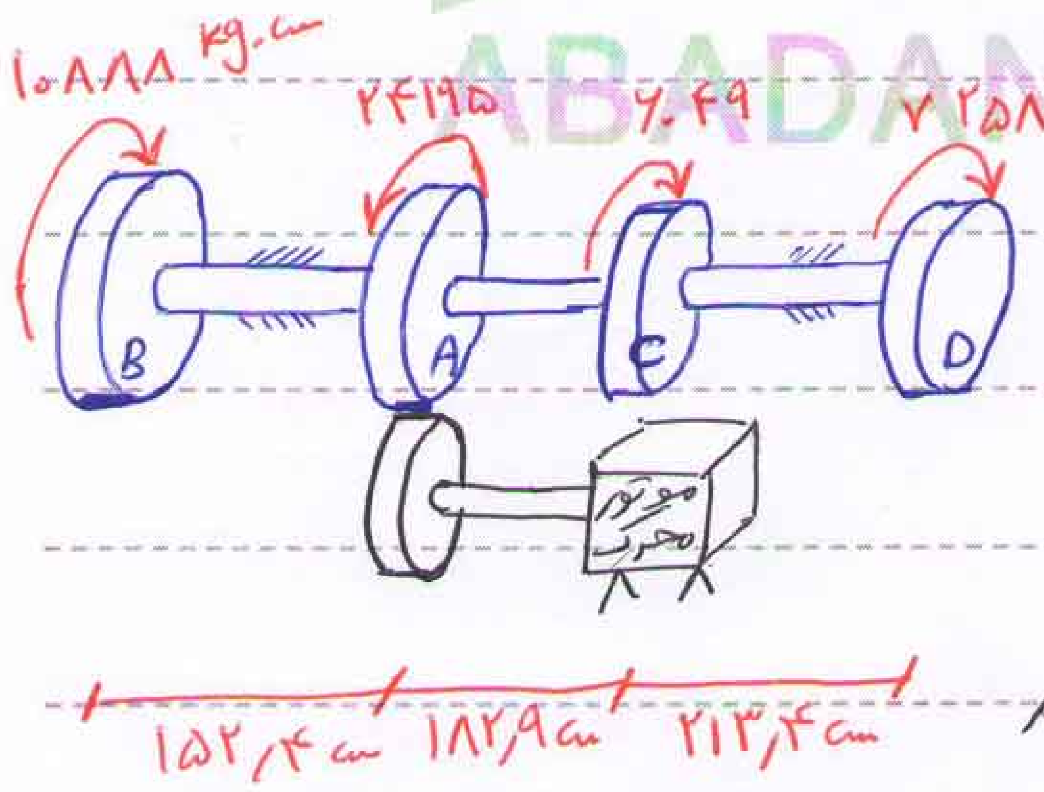
مطلوبست:

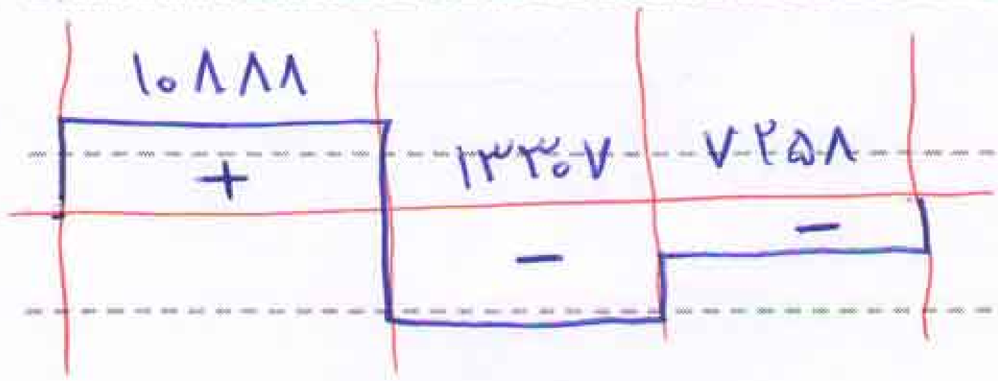
الف) چرخش سطح مقطع A نسبت به B

ب) چرخش سطح مقطع B نسبت به D

$G = ۸۴۳۷ \times ۱۰^{۶} \frac{kg}{cm^{۲}}$

قطر محور $d = ۵٫۰۸\ cm$





Subject : مقاومت مصالح

Year: 90 Month. 3 Date. 11

ABADANOMRAN

حل) الف) φ_{AB} :

$$\varphi_{AB} = \frac{T_{AB} L_{AB}}{G J_{AB}} \quad , \quad J_{AB} = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi \times (\frac{5.08}{2})^4}{2} = 65.38\ cm^4$$

$$\varphi_{AB} = \frac{10888 \times 152.4}{8437 \times 10^6 \times 65.38} = 0.0301\ rad$$

بر حسب درجه:

$$\boxed{\frac{R}{\pi} = \frac{D}{180}} \longrightarrow \frac{0.0301}{\pi} = \frac{\varphi_{AB}}{180} \rightarrow \boxed{\varphi_{AB} = 1.72^\circ}$$

ب) φ_{BD} :

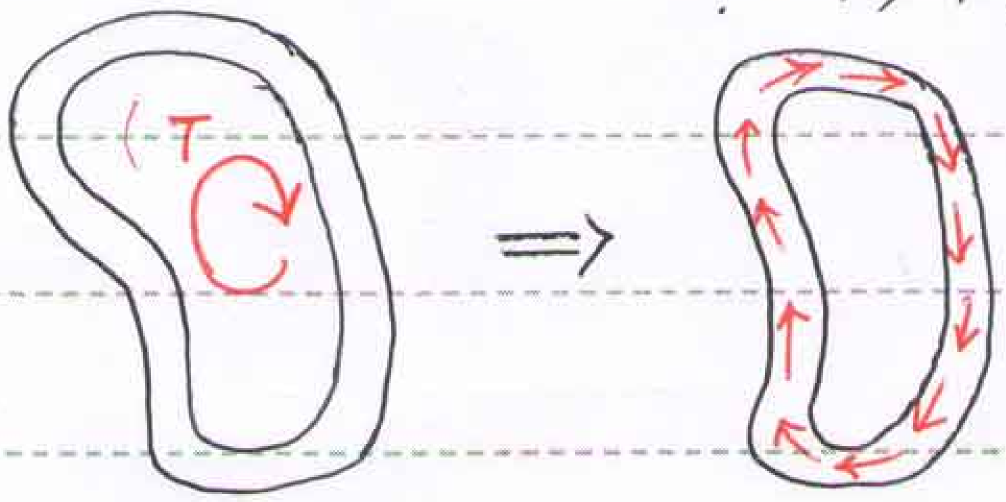
$$\varphi_{BD} = \varphi_{AB} + \varphi_{AC} + \varphi_{CD}$$

نکته: در استفاده از رابطه « $\varphi = \sum \frac{T_i L_i}{G J_i}$ » مقادیر T_i حتماً باید با علامت در رابطه گذارده شوند.

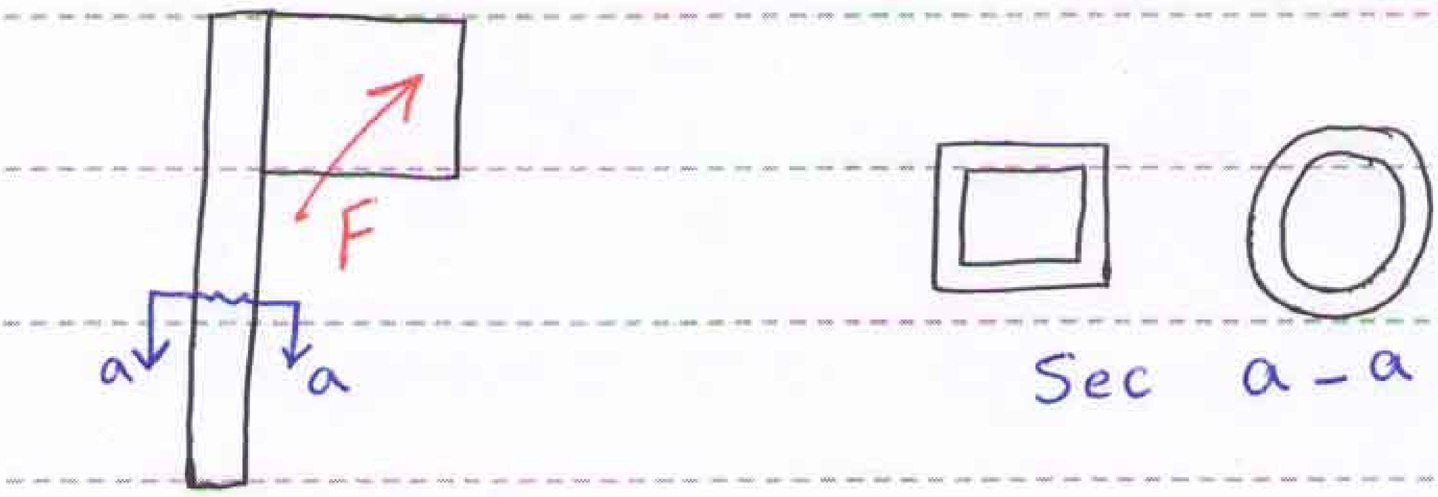
$$\varphi_{BD} = \frac{10888 \times 152.4}{8437 \times 10^6 \times 65.38} + \frac{-13307 \times 182.9}{8437 \times 10^6 \times 65.38} + \frac{-7258 \times 213.4}{8437 \times 10^6 \times 65.38} \Rightarrow$$

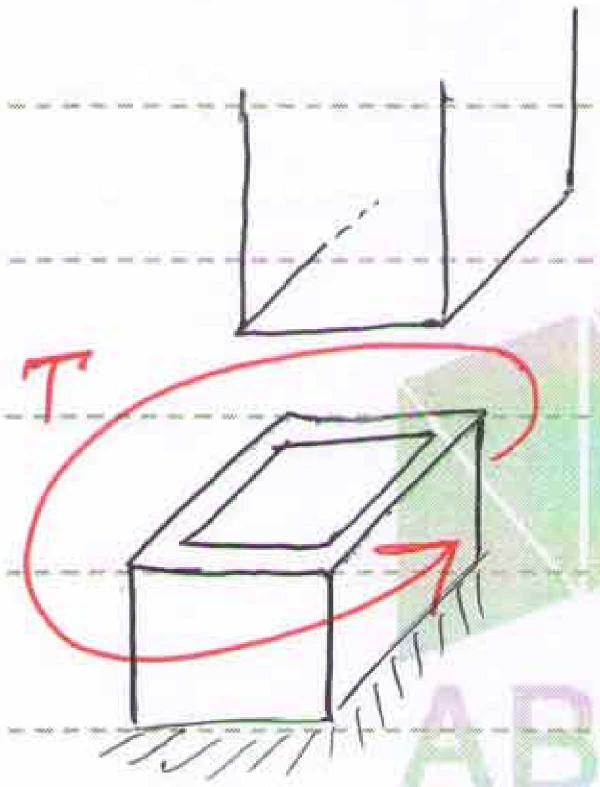
$$\varphi_{BD} = -0.0421\ rad = \boxed{-2.41^\circ}$$

* فرمول تنش پیچشی در مقاطع جدار نازک بسته:



کاربرد مقاطع جدار نازک بسته در رشته عمران پروفیل های قوطی شکل می باشد.





تنش ناشی از پیچش در این مقاطع
از رابطه‌ی زیر محاسبه می گردد:

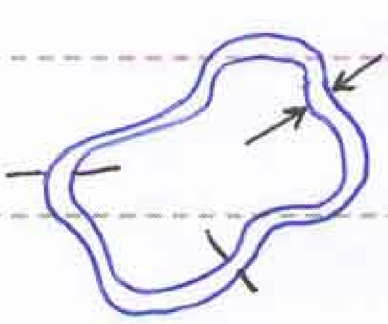
$$\boxed{\tau = \frac{T}{2At}}$$

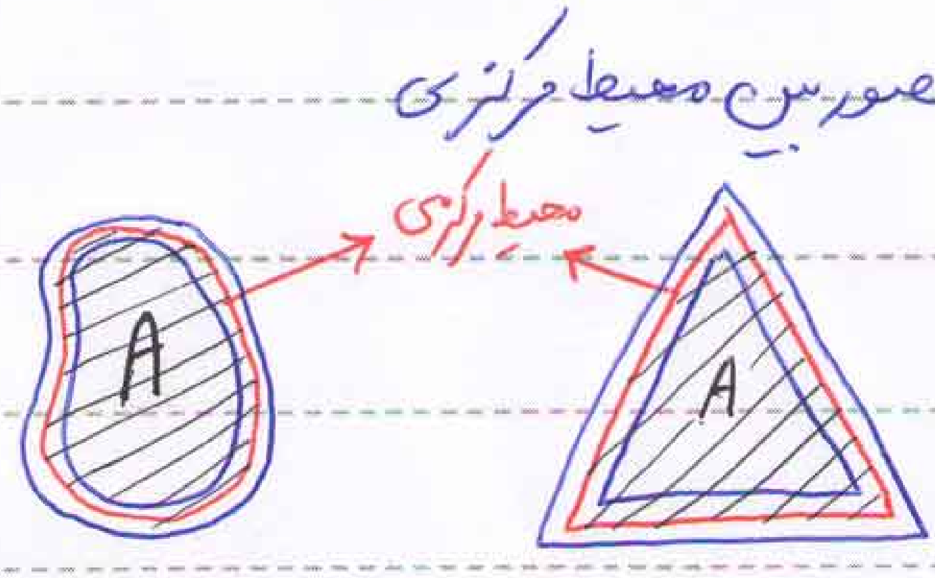
در این رابطه:

T : گشتاور پیچشی داخلی سطح مقطع می باشد که از دیاگرام پیچش داخلی بدست می آید.

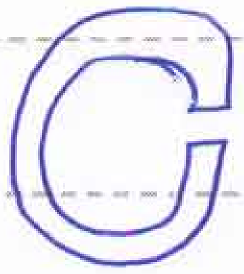
t : ضخامت جداره در نقطه ای که می خواهیم تنش را محاسبه کنیم

A : مساحت محصور بین محیط مرکزی

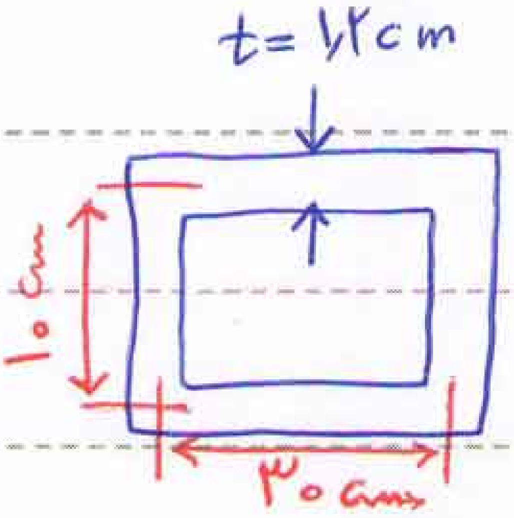




نکته ①: هرچه عضو جدار نازک تر باشد یعنی t کوچکتر باشد، جواب رابطه دقیق تر است



نکته ۲ : فرمول فوق برای مقاطع جدار نازک باز برقرار نیست.



مثال: ظرفیت پیچشی مقطع زیر چقدر است؟

$$\tau_a = 960 \ \frac{kg}{cm^2}$$

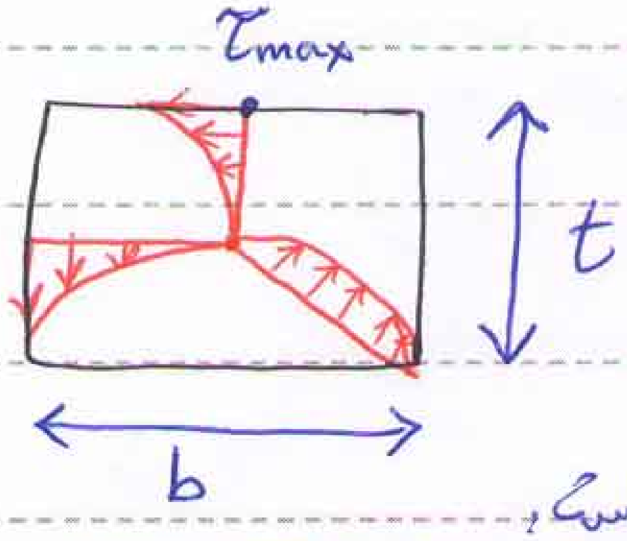
* منظور از ظرفیت پیچشی یعنی حداکثر لنگر پیچشی که به مقطع می توان وارد کرد.

$$\tau_{max} \leq \tau_a$$

$$\frac{T_{max}}{2At} \leq 960 \rightarrow \frac{T_{max}}{2 \times (10 \times 30) \times 1.2} \leq 960$$

$$\rightarrow \boxed{T_{max} \leq 691200 \ kg.cm}$$

* پیچش در مقاطع مستطیلی:



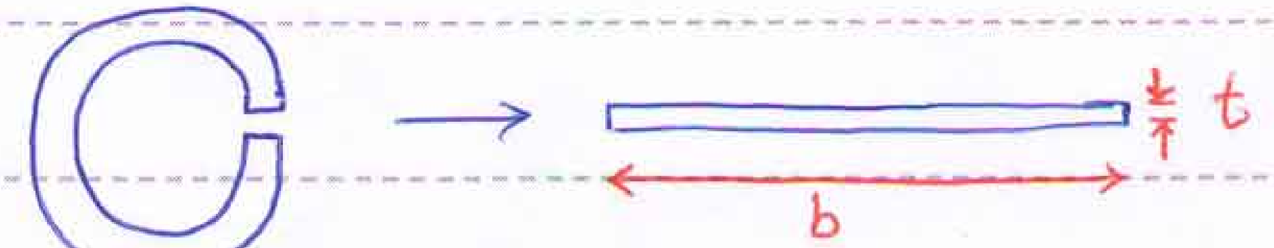
توزیع تنش پیچشی در این مقاطع غیرخطی می باشد.

تنش پیچشی ماکزیمم برای مقطع توپر مستطیلی در وسط ضلع بزرگتر اتفاق می افتد که از رابطه زیر قابل محاسبه است،

$$\boxed{\tau_{max} = \frac{T}{\alpha b t^2}}$$

α ضریبی است که به نسبت $\frac{t}{b}$ بستگی دارد و از جدول بدست می آید

* کاربرد رابطه ی فوق در محاسبه ی پیچش مقاطع جدار نازک باز می باشد، زیرا این مقاطع را می توان به صورت یک مستطیل باریک در نظر گرفت.

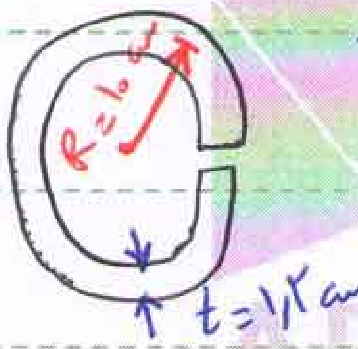


نکته: درصورتی که مقدار $\frac{t}{b}$ خیلی کوچک شود ضریب α ثابت و برابر $\frac{1}{3}$ خواهد بود.
یعنی اگر $\frac{t}{b} \to 0$ آنگاه $\alpha \to 0.33$ بنابراین فرمول تنش پیچشی مقاطع جدار نازک باز می‌شود:

$$\boxed{\tau_{max} = \frac{T}{0.33\, b t^2}}$$

مثال: تنش برشی را در مقطع روبرو محاسبه کرده و نتیجه را با حالت جدار نازک بسته مقایسه کنید؟

- گشتاور پیچشی داخل سطح مقطع "$T = 0.5\ t.m$" می‌باشد



حل) حالتی که مقطع جدار نازک باز باشد

الف)

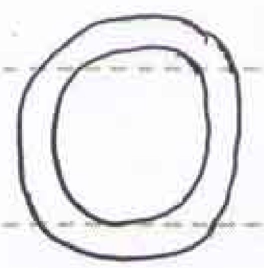
$$\tau_{max} = \frac{T}{0.33\, b t^2}$$

$$b = 2\pi R = 2\pi(10) = 20\pi\ cm$$

$$t = 1.2\ cm \quad , \quad T = 0.5 \times 10^5\ kg.cm$$

$$\to \tau_{max} = \frac{0.5 \times 10^5}{0.33 \times 20\pi \times (1.2)^2} \Rightarrow \boxed{\tau_{max} = 1657.8\ \frac{kg}{cm^2}}$$

ب) مقطع جدار بسته باشد:



$$A = \pi R^2 = \pi(10)^2 = 100\pi\ cm^2$$

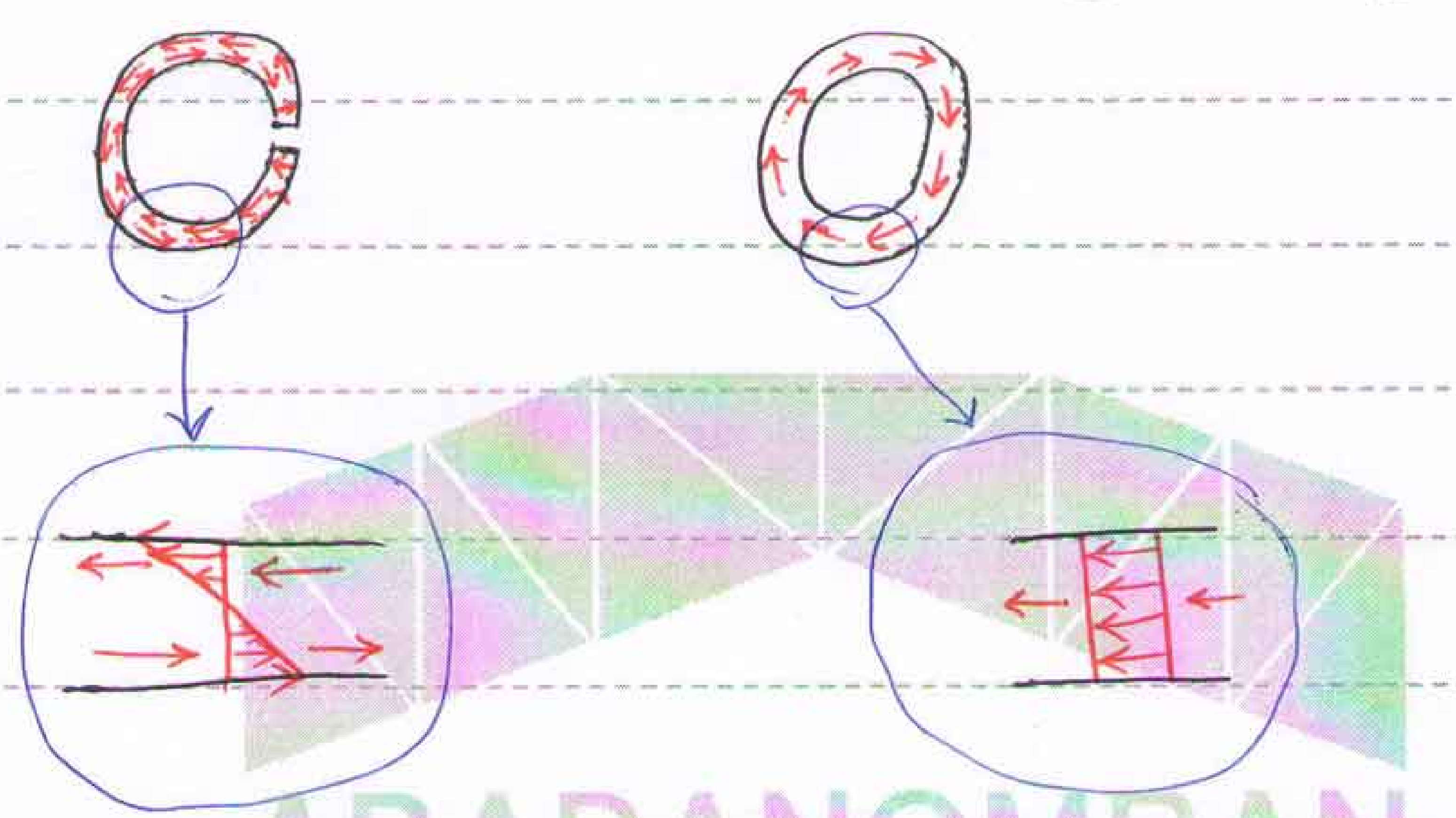
$$\tau_{max} = \frac{0.5 \times 10^5}{2 \times 100\pi \times 1.2} = \boxed{66.31\ \frac{kg}{cm^2}}$$

مقایسه نتایج:

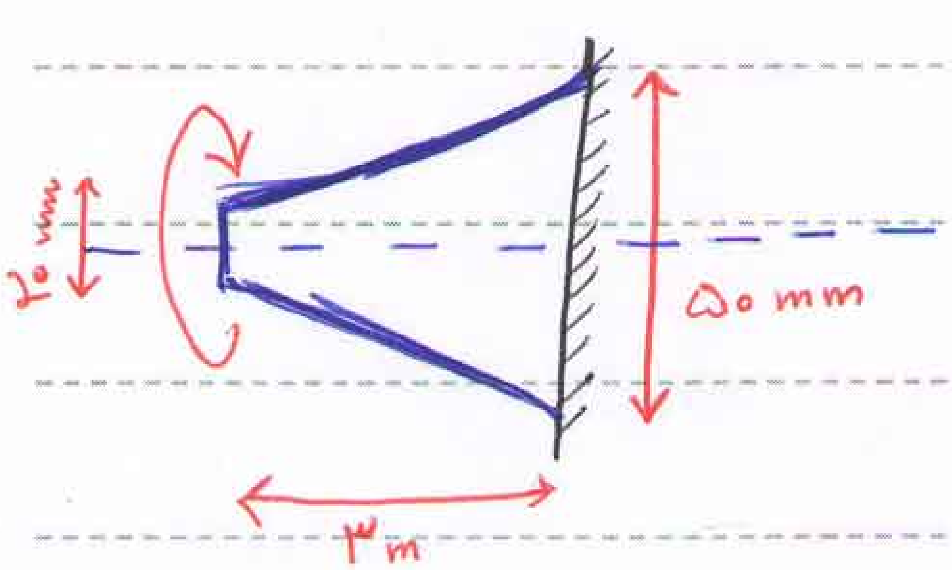
$$\frac{\text{تنش مقطع جدار نازک باز}}{\text{تنش مقطع جدار نازک بسته}} = 25$$

نتیجه می گیریم که مقاطع جدار نازک بسته ظرفیت پیچشی بالاتری نسبت به مقاطع باز دارند
زیرا در اثر لنگر پیچشی داخل در آنها تنش کوچکتری ایجاد می شود.

* شکل توزیع تنش در مقاطع جدار نازک باز و بسته:



$\boxed{\text{مثال}}$ بیشترین زاویه پیچش انتهای مخروط ناقص زیر چقدر است؟



$\tau_a = 91$ MPa تنش مجاز برشی

$G = 17 \times 10^3$ MPa

(مگاپاسکال) $\text{MPa} = \frac{N}{mm^2}$

حل) مقدار T را طوری می یابیم که فرمول رو به رو برقرار باشد: $\tau_{max} \leq \tau_a$

$$\frac{T_{max}}{J} R \leq 91 \qquad \frac{T_{max}}{\frac{\pi R^4}{2}} R \leq 91 \rightarrow \frac{2 T_{max}}{\pi R^3} \leq 91$$

τ_{max} زمانی اتفاق می‌افتد که R مینیمم باشد:

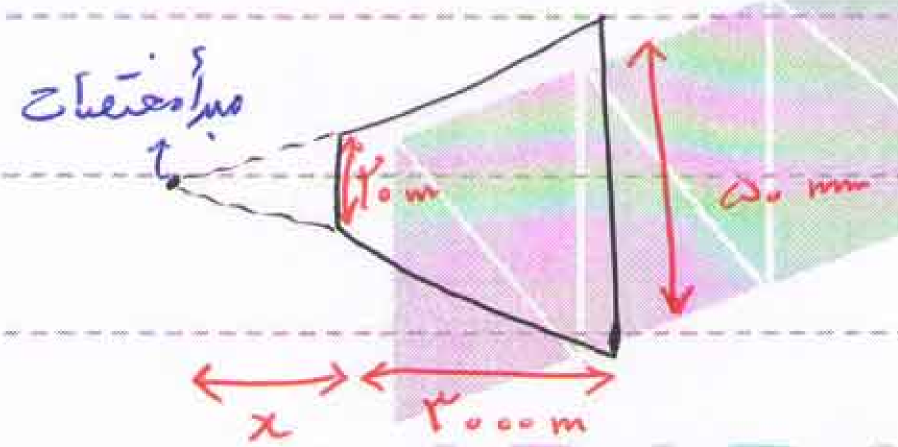
$$\frac{2T_{max}}{\pi R_{min}^3} \le 91 \rightarrow \frac{2T_{max}}{\pi (10)^3} \le 91 \rightarrow T_{max} \le 142942.46 \text{ N.mm}$$

محاسبه φ_{max}: با توجه به اینکه در شکل T در طول تیر ثابت است و سطح مقطع به صورت تابعی از x متغیر است:

$$\varphi_{max} = \varphi_{AB} = \int_A^B \frac{T}{G J(x)} dx$$

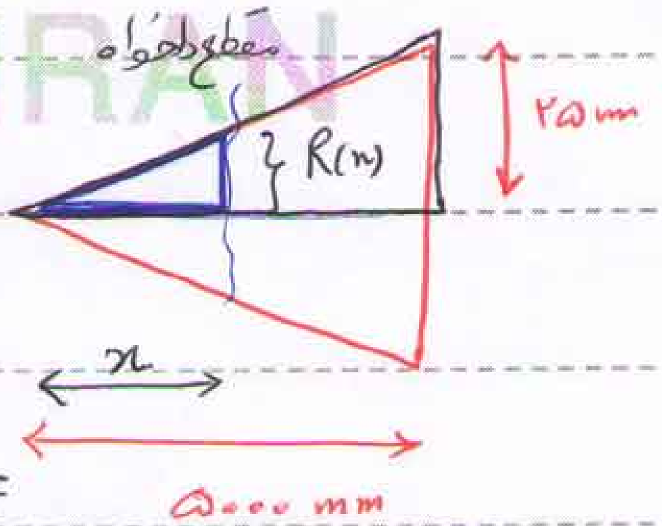
محاسبه J(x): برای انجام محاسبات می‌بایست ابتدا یک دستگاه مختصات در نظر گرفت

مبداء آن را منطبق بر رأس مخروط در نظر می‌گیریم.



از تشابه مثلث‌ها:

$$\frac{x}{20} = \frac{x+3000}{50} \rightarrow \boxed{x = 2000 \text{ mm}}$$



از تشابه مثلث‌ها:

$$\frac{x}{R(x)} = \frac{5000}{25}$$

$$\rightarrow \boxed{R(x) = 0.005x}$$

$$\Rightarrow J(x) = \frac{\pi (R(x))^4}{2} = \frac{\pi (0.005)^4}{2} = 9.82 \times 10^{-10} x^4$$

$$\varphi_{max} = \int_{2000}^{5000} \frac{T_{max}}{G J(x)} dx = \int_{2000}^{5000} \frac{142942.46}{17\times10^3 \times 9.82\times10^{-10} \times x^4} dx$$

$$= 8562505092 \int_{2000}^{5000} x^{-4} dx = 0.33 \text{ rad} = \boxed{18.9^\circ}$$

Subject: مقاومت مصالح

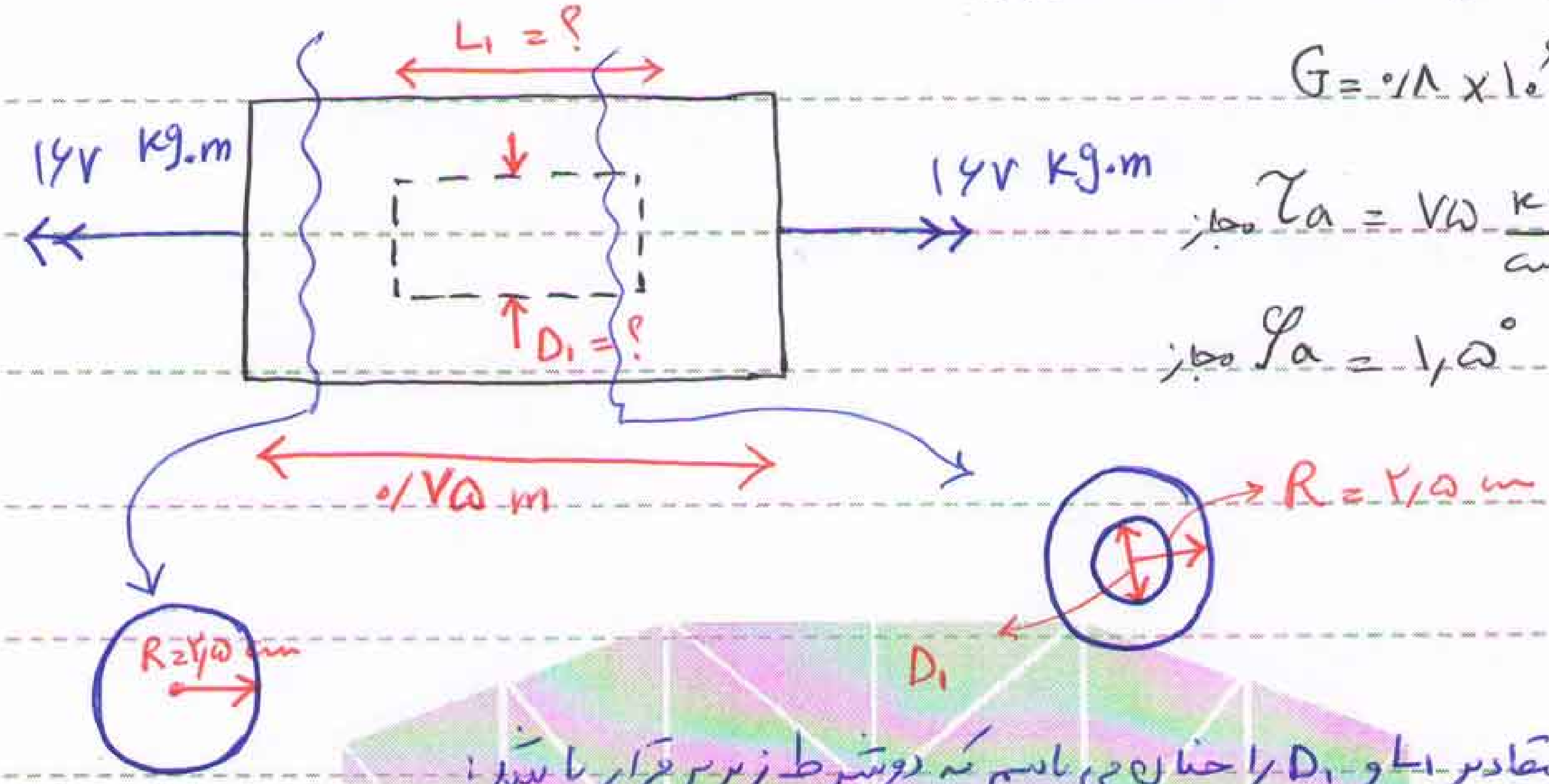
Year: 90 Month. 3 Date. 11

مثال) محور مکانیکی زیر در قسمتی از طولش دارای شکافی هم مرکز با آن می‌باشد، حداکثر قطر شکاف و طول آن را بیابید؟

$G = 0.8 \times 10^{6} \ \frac{kg}{cm^2}$

τ_a مجاز $= 750 \ \frac{kg}{cm^2}$

φ_a مجاز $= 1.5^\circ$



حل) مقادیر L_1 و D_1 را چنان می‌یابیم که دو شرط زیر برقرار باشد:

$$\tau_{max} \leq \tau_a \longrightarrow \frac{T_{max}}{J_{min}} R_{max} \leq 750$$

$$\varphi_{max} \leq \varphi_a \longrightarrow \varphi_{max} \leq 1.5^\circ$$

الف) استفاده از رابطه $\tau_{max} \leq \tau_a$

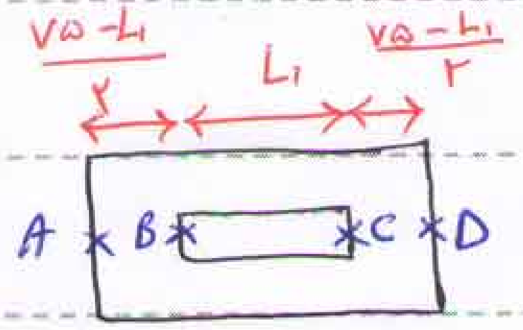
τ_{max} در مقطع توخالی اتفاق می‌افتد زیرا J آن مینیمم است:

$$\frac{T_{max}}{J_{min}} R_{max} \leq 750$$

$$J_{min} = \frac{\pi (2.5)^4}{2} - \frac{\pi \left(\frac{D_1}{2}\right)^4}{2}$$

$$\rightarrow J_{min} = \frac{167 \times 10^2}{\frac{\pi}{2}\left[(2.5)^4 - \left(\frac{D_1}{2}\right)^4\right]} (2.5) \leq 750 \longrightarrow \boxed{D_1 = 2.76 \ cm}$$ حداکثر قطر شکاف

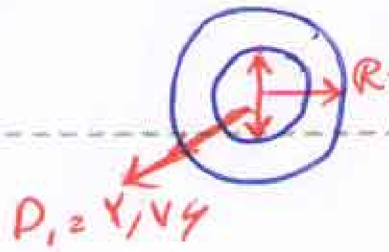
ب) استفاده از فرمول $\varphi_{max} \leq \varphi_a$



$$\varphi_{max} = \varphi_{AD} = \varphi_{AB} + \varphi_{BC} + \varphi_{CD}$$

$$J_{\text{توپر}} = \frac{\pi (2.5)^4}{2} = 61.36 \ cm^4$$

$$J_{\text{توخالی}} = \frac{\pi (2.5)^4}{2} - \frac{\pi \left(\frac{2.76}{2}\right)^4}{2} = 55.66 \ cm^4$$



$$\varphi_{max} = \frac{T_{AB} \, L_{AB}}{G \, J_{\text{توپر}}} + \frac{T_{BC} \, L_{BC}}{G \, J_{\text{توخالی}}} + \frac{T_{CD} \, L_{CD}}{G \, J_{\text{توپر}}}$$

$$\varphi_{max} = \frac{167 \times 10^2 \times \frac{75 - L_1}{2}}{0.8 \times 10^6 \times 61.36} + \frac{167 \times 10^2 \times L_1}{0.8 \times 10^6 \times 55.66} + \frac{167 \times 10^2 \times \frac{75 - L_1}{2}}{0.8 \times 10^6 \times 61.36}$$

$$\varphi_{max} = 3.483 \times 10^{-5} L_1 + 2.551 \times 10^{-2}$$

نکته: در استفاده از فرمول $\varphi_{max} \leq \varphi_a$ مقدار φ_a حتما باید برحسب رادیان باشد

$$\frac{R}{\pi} = \frac{D}{180} \rightarrow \frac{R}{\pi} = \frac{1.5}{180} \rightarrow R = 0.0262 \ rad$$

$$\varphi_{max} \leq 0.0262 \rightarrow 3.483 \times 10^{-5} L_1 + 2.551 \times 10^{-2} \leq 0.0262$$

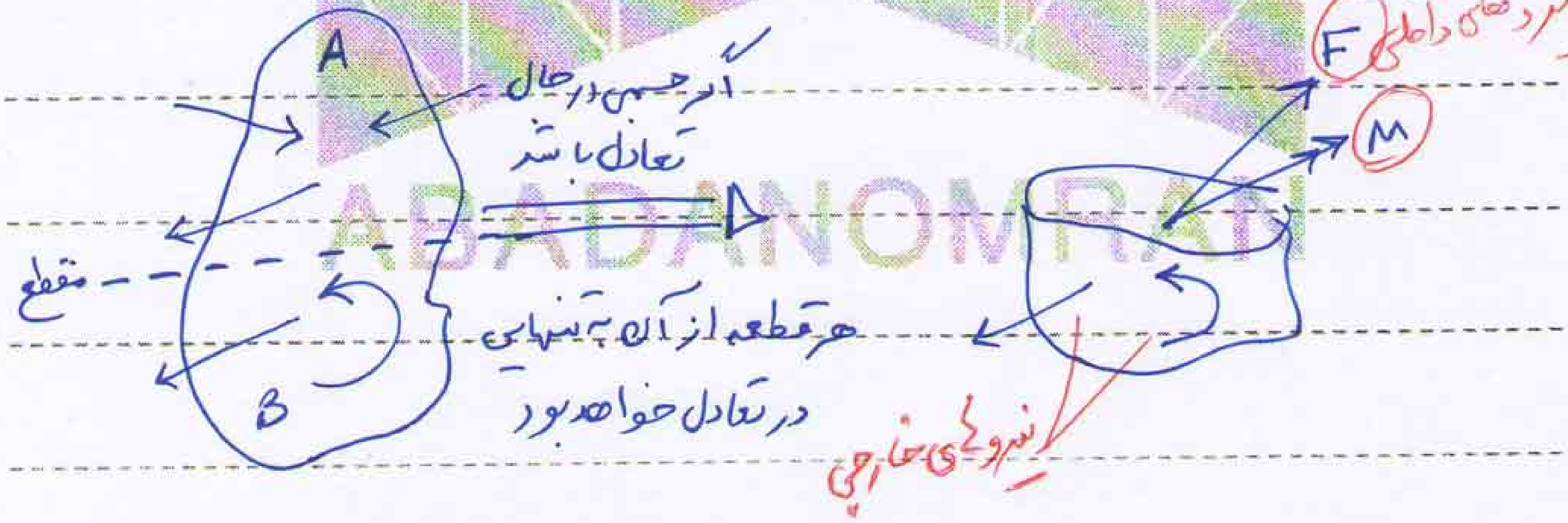
$$\rightarrow \boxed{L_1 \leq 19.81 \ cm}$$ حداکثر طول شکاف

*فصل اول: یادآوری نیروهای داخلی و رسم دیاگرام آن ها:

- انواع نیروهایی که به یک عضو سازه وارد می شوند:

① نیروهای خارجی: در اثر عوامل محیطی و خارجی به عضو وارد می شوند. عکس العمل های تکیه گاهی

② نیروهای داخلی: عکس العمل های نیروهای خارجی هستند که درون عضو ایجاد می شوند و زمانی قابل مشاهده هستند که عضو را برش بزنیم.



*قانون دست راست: اگر چهار انگشت دست راست جهت بردار خمیده را نشان دهند، انگشت شست جهت بردار مستقیم را نمایش می دهد.

Subject : مقاومت مصالح

Year: ۸۹ Month. ۱۲ Date. ۵

* انواع نیروهای داخلی

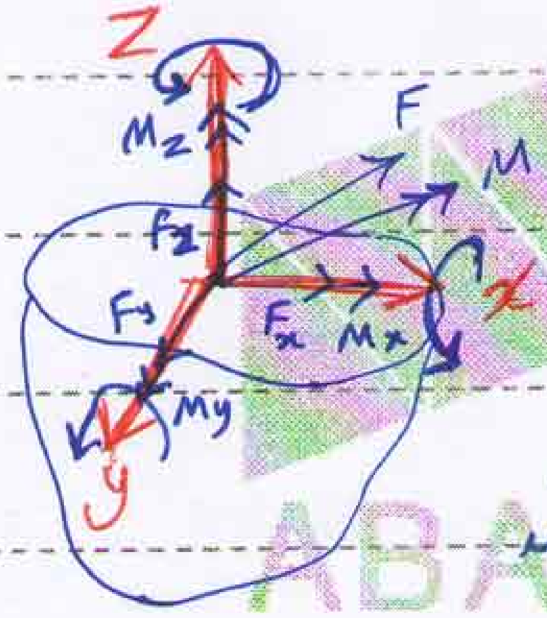
① نیروی محوری P : کششی / فشاری

② نیروی برشی V

③ لنگر خمشی M

④ لنگر پیچشی T

* برای سادگی محاسبات همیشه نیروها را در جهت محورهای مختصات به مؤلفه‌های تجزیه می‌کنیم.



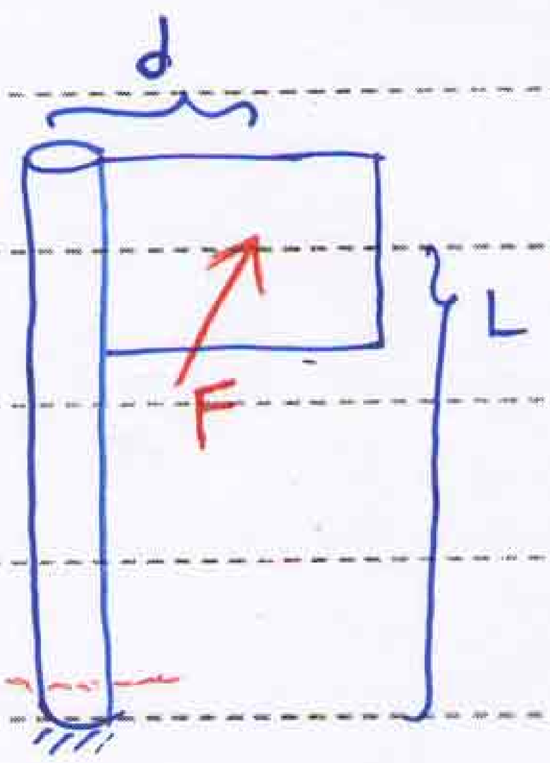
F_z نیروی محوری، زیرا عمود بر سطح مقطع است.

F_x و F_y نیروهای برشی زیرا مماس بر سطح مقطع می‌باشند.

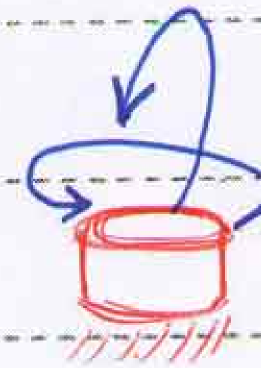
M_x و M_y لنگر خمشی می‌باشند زیرا جسم را خم می‌کنند.

M_z لنگر پیچشی می‌باشد زیرا جسم را می‌پیچاند.

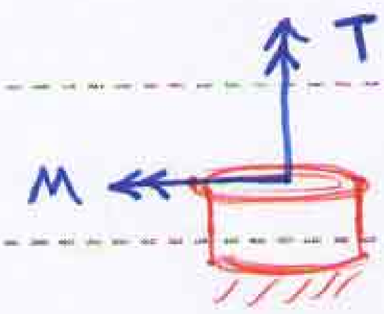
مثال: تابلو که به آن باد می‌وزد:



$M = F \times L$ خمشی

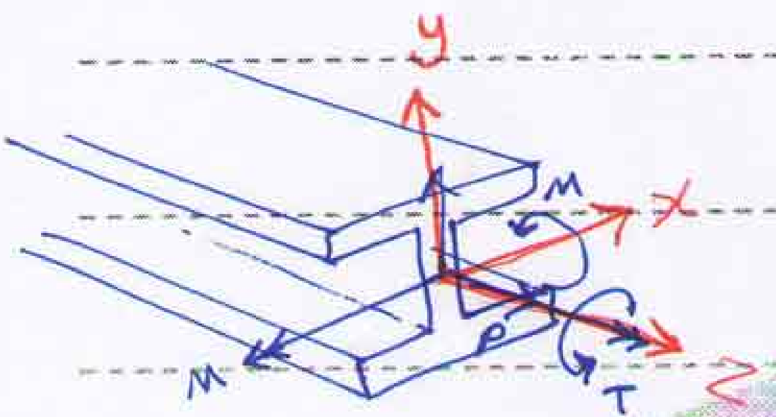


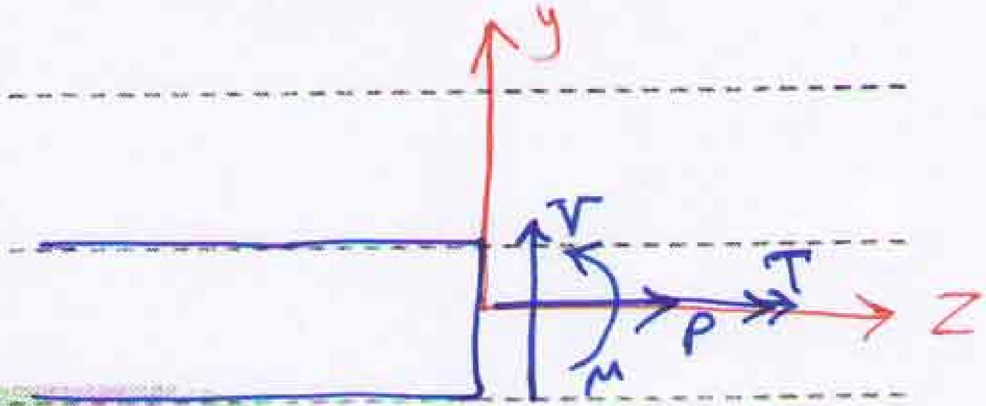
$T = F \times d$ پیچشی



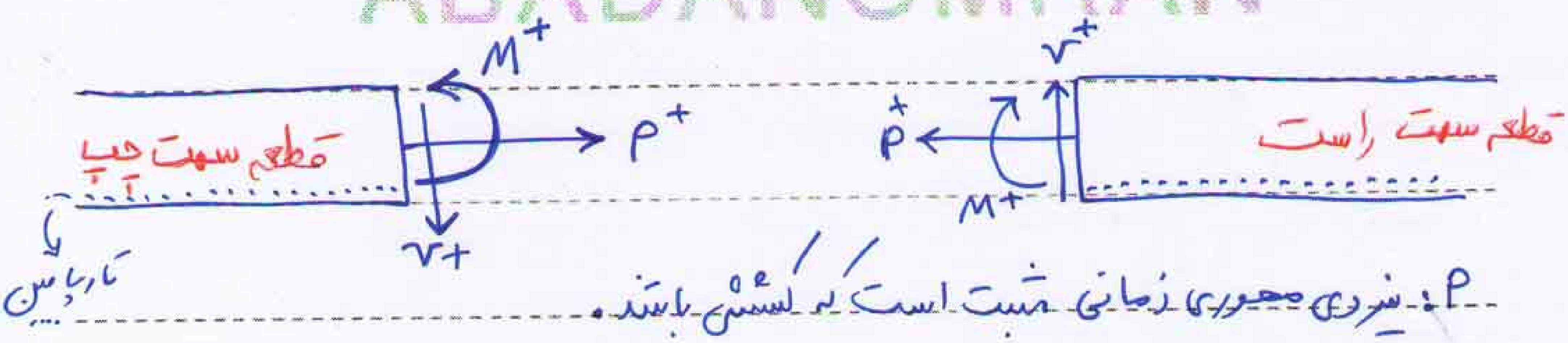
وضعیت بردار مستقیم لنگر خمشی و پیچشی :

* نمایش نیروهای داخلی در حالت دو بعدی (صفحه‌ای)





* قرارداد علامت مثبت نیروهای داخلی



P : نیروی محوری زمانی مثبت است که کششی باشد.

V : نیروی برشی زمانی مثبت است که در قطعه‌ی سمت چپ رو به پایین باشد.

M : لنگر خمشی زمانی مثبت است که تار پایین را بکشد.

* چرا باید دیاگرام نیروهای داخلی را ترسیم کنیم؟

۱- محل و مقدار ماکزیمم را با یک نگاه از روی دیاگرام می‌توان تشخیص داد.

۲- در هر نقطه دلخواه از تیر مقدار نیروهای داخلی به سادگی قابل تشخیص و تعیین است.

۳- به کمک علامت نیروهای داخلی جهت آن‌ها را در هر نقطه‌ی دلخواه از تیر می‌توان به سادگی تشخیص داد. مثلاً در بتن در محل تاری که کشیده می‌شود جهت تحمل کشش میلگرد قرار می‌دهیم.

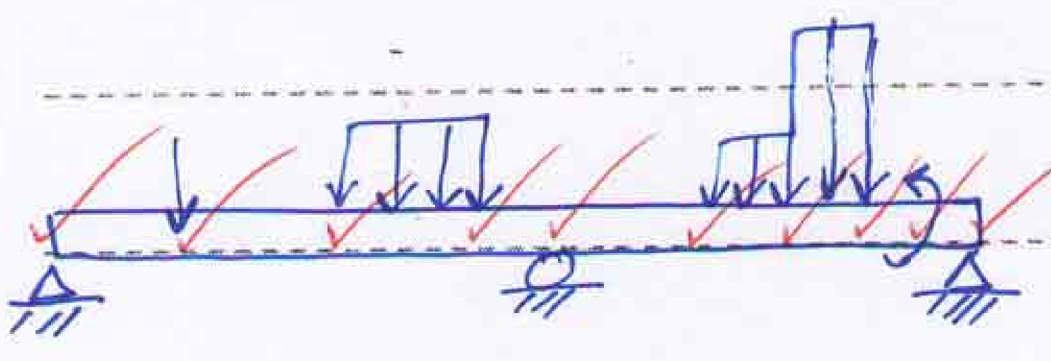
* انواع روش‌های رسم دیاگرام نیروهای داخلی:
۱- روش مقطع زدن
۲- روش جمع زدن

* روش جمع زدن:

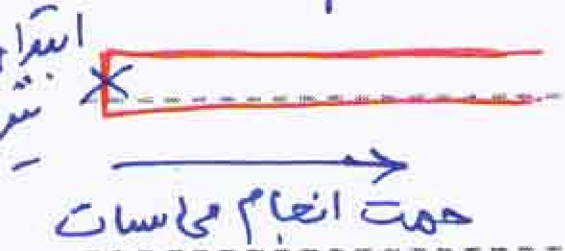
* گام اول: بدست آوردن عکس العمل‌های تکیه‌گاهی

* گام دوم: تعیین نقاط کلیدی؛ ترسیم همواره بین نقاط کلیدی انجام می‌شود:

۱- ابتدا و انتهای تیر ۲- محل بارهای متمرکز ۳- ابتدا و انتهای بار گسترده ۴- مفصل داخلی ۵- محل تکیه‌گاه‌ها ۶- محل تغییر بار گسترده.



* گام سوم: محاسبات ترسیم دیاگرام همواره از سمت چپ به راست انجام می‌شود.



* گام چهارم: برای شروع نمودار نیروی داخلی:

برای برش V

۱- اگر در ابتدای تیر بار متمرکز یا عکس‌العمل تکیه‌گاهی نداشته باشیم مقدار نمودار از صفر آغاز می‌شود.

۲- اگر در ابتدای تیر بار متمرکز یا عکس‌العمل تکیه‌گاهی داشته باشیم مقدار نمودار برش V از آن مقدار بار عکس‌العمل آغاز می‌گردد.

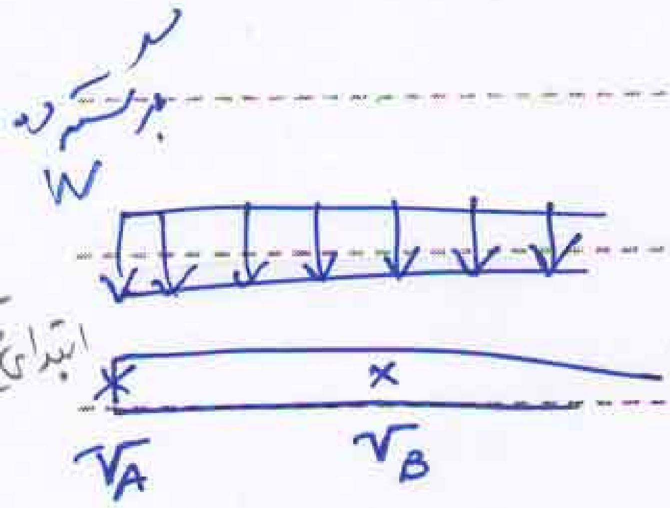
نکته: اگر جهت بار متمرکز ↑ بود مقدار دیاگرام V از (+) آغاز می‌شود و بالعکس

برای خمش M

۱- اگر در ابتدای تیر لنگر متمرکز یا تکیه‌گاه گیردار نداشته باشیم دیاگرام از مقدار صفر آغاز می‌شود

۲- اگر ابتدای تیر لنگر متمرکز یا تکیه‌گاه گیردار داشته باشیم مقدار دیاگرام از مقدار لنگر یا عکس‌العمل لنگری شروع می‌شود

*گام پنجم : روش ادامه دادن نمودار :

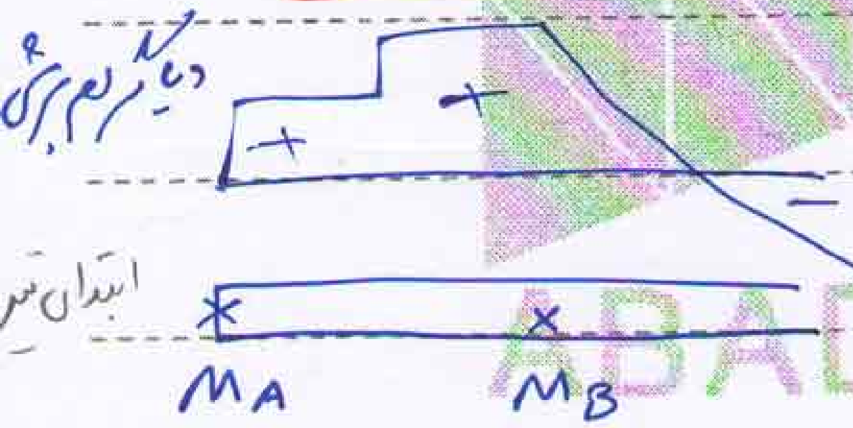


۱- برای برش V :

$V_B = V_A +$ مساحت بارگسترده از A تا B

* نکته : اگر جهت بارگسترده رو به پایین بود مساحت آن با علامت منفی در رابطه قرار داده می‌شود.

$\boxed{V_B = V_A - \text{مساحت زیر بارگسترده از A تا B}}$



۲- برای لنگر خمشی M :

$M_B = M_A +$ مساحت زیر نمودار برشی V از A تا B

نکته : مساحت نمودار برش باید با علامت در رابطه قرار داده بشود.

*گام ششم : جهش در نمودارها :

۱- برای برش V { *اگر در حین ترسیم نمودار به بار متمرکز ↓ برخورد کنیم نمودار به سمت پایین جهش می‌کند و بالعکس

۲_ برای خمش M:

۱- اگر در حین ترسیم نمودار M به لنگر متمرکز ساعتگرد برخورد کنیم، نمودار به سمت بالا جهش می‌کند.

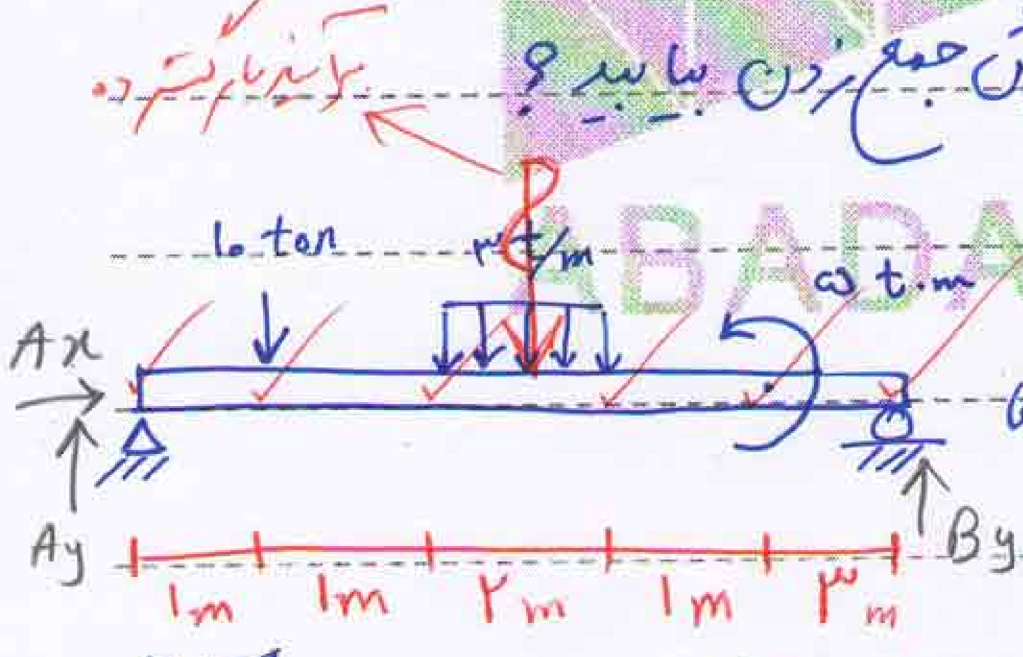
۲- اگر در حین ترسیم نمودار M به لنگر متمرکز پادساعتگرد برخورد کنیم، نمودار به سمت پایین جهش می‌کند.

* گام هفتم: کنترل محاسبات:

در انتهای تمامی دیاگرام نیروهای داخلی باید به صفر برسیم.

مثال: دیاگرام M و V را برای تیر زیر به روش جمع زدن بیابید؟

برآیند بار گسترده



حل> گام اول: بدست آوردن عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \rightarrow \boxed{A_x = 0}$$

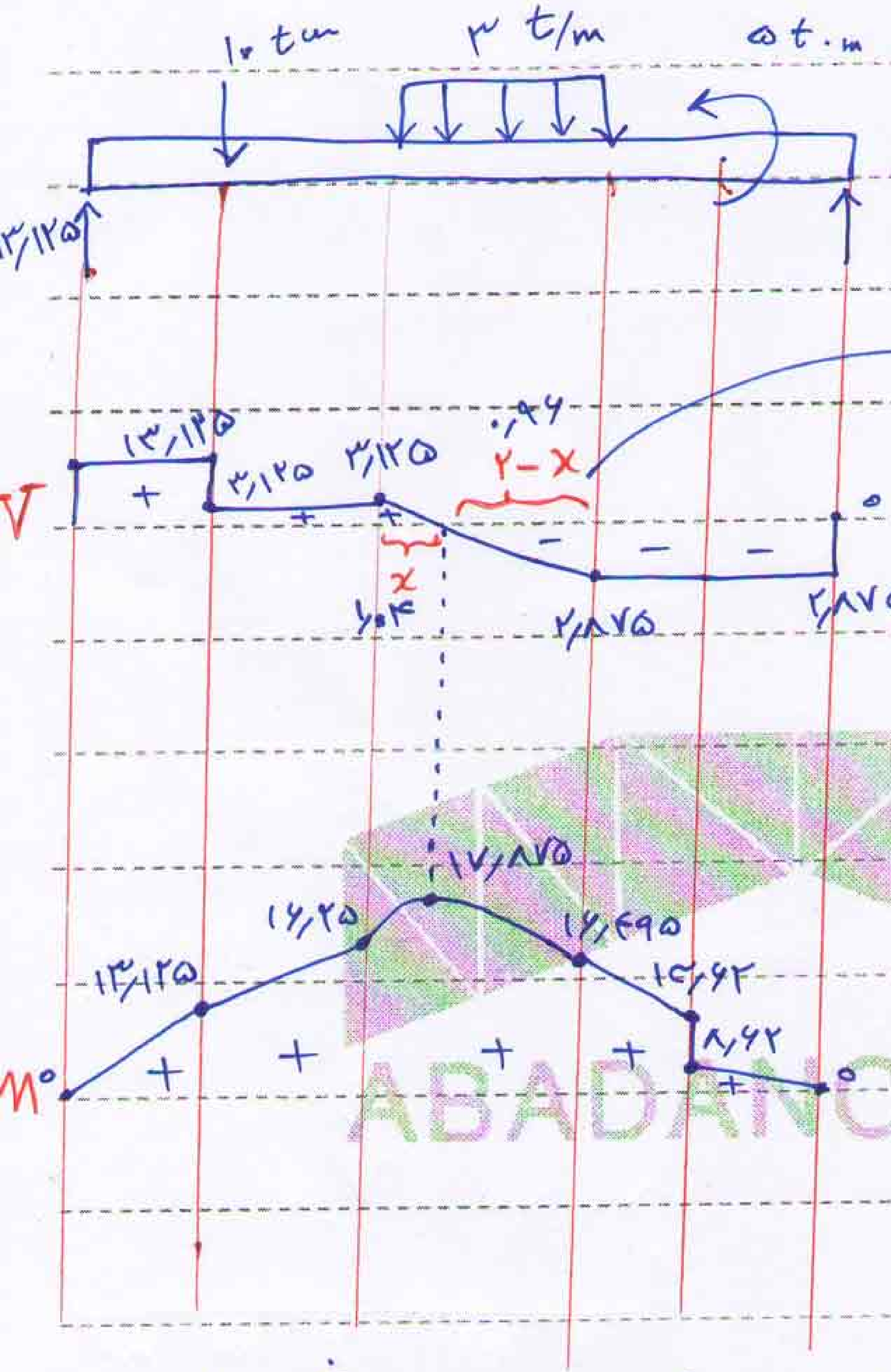
$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 \rightarrow (A_y \times 8) - 10\times 7 - 6\times 5 - 5 = 0 \rightarrow \boxed{A_y = 13.125\ ton}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \rightarrow 13.125 - 10 - 6 + B_y = 0 \Rightarrow \boxed{B_y = 2.875\ ton}$$

گام دوم> تعیین نقاط کلیدی: (۷)

نقاط کلیدی را معین کرده و ترسیم را شروع می‌کنیم.

ABADANOMRAN



تشابه مثلث ها

$$\frac{x}{۳/۱۲۵} = \frac{۲ - x}{۲/۸۷۵}$$

$$\rightarrow x = ۱/۰۴$$

تکلیف سری اول: دیاگرام لنگر خمشی و نیروی برشی تیرهای زیر را به روش جمع زدن بیابید.