

www.icivil.ir

پرتال جامع دانشجویان و مهندسين عمران

ارائه كتابها و جزوات رايجان مهندسي عمران

بهترين و برترين مقالات روز عمران

انجمن هاي تفصلي مهندسي عمران

خوشگاه تفصلي مهندسي عمران

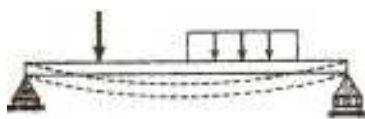
بسمه تعالی

فصل اول: نیروهای برشی و لنگرهای خمشی

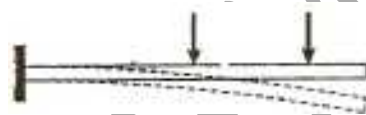
A سازه های صفحه ای

C انواع تیرها - معمولاً بر اساس نوع تکیه گاه توصیف میشوند.

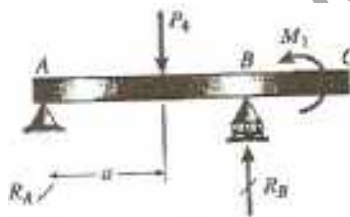
- از انواع تیرها میتوان به موارد زیر اشاره کرد:



1. تیر ساده (تیر دو سر ساده یا دو سر مفصل)



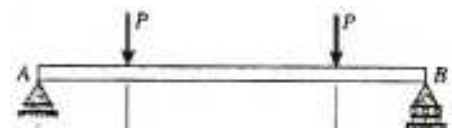
2. تیر طره ای یا کنسولی



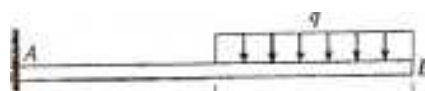
3. تیر دارای پیش آمدگی یا بالکن دار

A انواع بارها

1. بار متمرکز یا منفرد



2. بار گسترده (دو نوع می باشد)

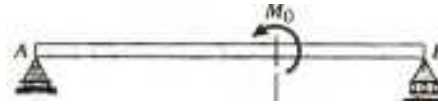


یکنواخت

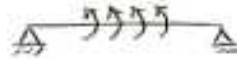
متغیر



3. لنگر متمرکز



4. لنگر گسترده

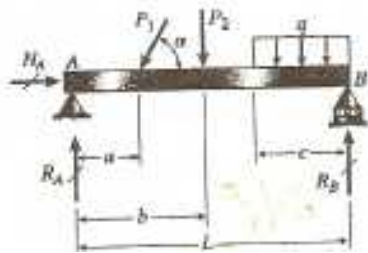


عکس العمل تکیه گاهها اولین گام در تحلیل تیر می باشد: در مسائل صفحه ای سه معادله ی تعادل داریم اگر تیر به لحاظ تکیه گاهی معین باشد (دارای سه مجهول باشد) میتوان تمامی واکنش ها را از معادلات تعادل محاسبه نمود.

$$\sum F = 0 \rightarrow \text{(سه معادله فضایی)}$$

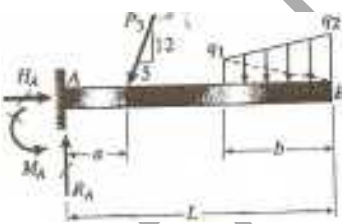
$$\sum M = 0 \rightarrow \text{(سه معادله فضایی)}$$

مثال 1-1: عکس العمل های تکیه گاههای زیر را بیابید؟



$$\sum M_B = 0: -R_A L + P_1 \sin \alpha (L - a) + P_2 (L - B) + \frac{qc^2}{2} = 0$$

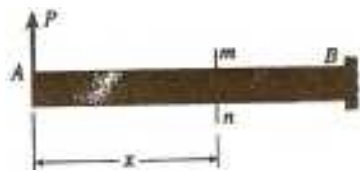
$$M_A = 0: R_B L - P_1 \sin \alpha (a) - p_2 \cdot b - qc \left(L - \frac{c}{2} \right) = 0 \rightarrow R_B = \frac{(p_1 \sin \alpha) (a)}{L} + \sum \frac{P_2 b}{L} + \frac{qc(L - \frac{c}{2})}{L}$$



$$\sum M_A = 0: M_A = \frac{12}{13} p \cdot a + \frac{(q_1) b}{2} \left(L - \frac{2b}{3} \right) + \frac{q_2 b}{2} \left(L - \frac{b}{3} \right)$$

نیروهای برشی و لنگرهای خمشی

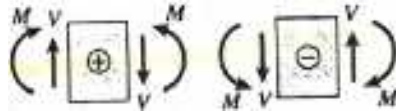
در اثر اعمال بارهای خارجی "تنش و تغییر شکل های داخلی در تیر ایجاد میشود ، برای محاسبه این تنش ها و تغییر شکل ها ابتدا باید نیروها و لنگرهای داخلی که در مقاطع تیر اثر می کنند را بیابیم.



$$V=P \text{ \& } M=P(L-x)$$

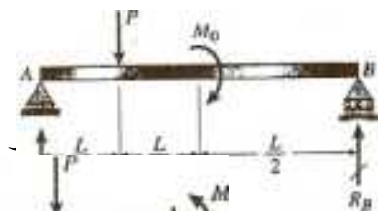
-قرداد علامت برای نیروی برشی و لنگر خمشی مثبت در تیرها:

نیروی برشی مثبت تمایل دارد جسم را در جهت حرکت عقربه های ساعت بچرخاند و لنگر خمشی مثبت باعث کشش تارهای پایینی تیر میشود.



توجه > علائم تغییر شکل بر اساس چگونگی تغییر شکل های ایجاد شده در تیر شکل یافته اند.

? مثال 1-2: تیر ساده ی AB تحت اثر بار P و لنگر متمرکز M_0 قرار دارد مطلوب است :



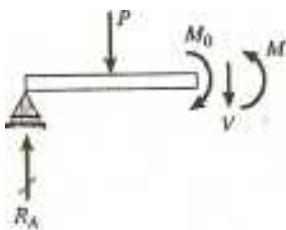
a) نیروی برشی V و لنگر خمشی M در مقطعی از تیر که در فاصله

$$V = R_A - P = -\frac{P}{4} - \frac{M_0}{L} \quad \text{قرار دارد؟}$$

$$M = \frac{PL}{8} - \frac{M_0}{2}$$



b. در فاصله ی بسیار کم از سمت راست وسط تیر قرار دارد؟

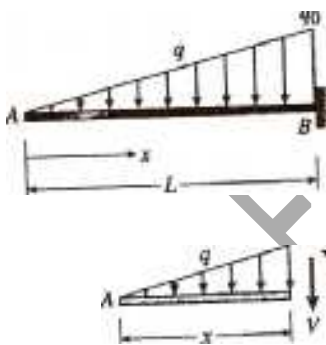


$$V = -\frac{P}{4} - \frac{M_0}{L}$$

$$M = \frac{PL}{8} + \frac{M_0}{2}$$

? مثال 3-1:

تیر طره ی نشان داده شده در شکل در تکیه گاه B بصورت گیر دار و در نقطه ی A بصورت آزاد می باشد. مطلوب است تعیین نیروی برشی V و لنگر خمشی M در فاصله X از لبه آزاد تیر؟

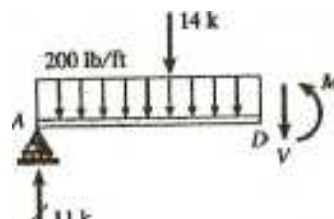
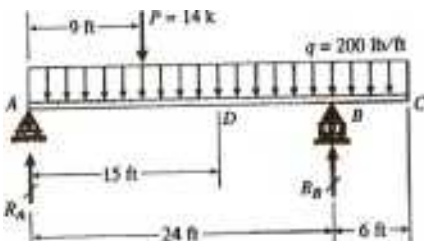


$$q = q_0 \frac{x}{l}$$

$$V = -\frac{q_0 a^2}{2L} \rightarrow \begin{cases} V(0) = 0 \\ V(L) = -\frac{q_0 L}{2} \end{cases}, \quad M = -\frac{q_0 x^3}{6L} \rightarrow \begin{cases} M(0) = 0 \\ M(L) = -\frac{q_0 L}{2} \end{cases}$$

? مثال 4-1.

تیر بالکن دار ABC در شکل مقابل تحت اثر بار گسترده یکنواخت $q=200 \text{ lb/ft}$ که در تمام طول آن اثر می کند و بار منفرد $p=14 \text{ k}$ در فاصله 9 ft از تکیه گاه سمت چپ قرار گرفته است. طول دهانه تیر 24 ft و طول بالکن آن 6 ft می باشد. نیروی برشی V و لنگر خمشی M را در مقطع را در مقطع D به فاصله 15 ft از تکیه گاه سمت چپ محاسبه نمایید؟



$$\begin{cases} V = 11 - 14 - 15 \times \frac{200}{1000} = -6 \text{ KN} \\ \sum M_D = 0 \longrightarrow M = 58.5 \text{ KN.m} \end{cases}$$

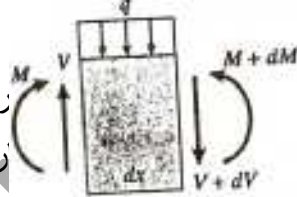
رابطه ی بین بار، نیروی برشی و لنگر خمشی:

بار وقتی به سمت پایین باشد مثبت است و لنگر متمرکز خارجی وقتی مثبت است که مثلثاتی باشد.

$$\sum F_y = 0: v - q dx - (v + dv) = 0$$

تغییرات نیروی برشی
منفی یا مشتق نیروی برشی

رابطه ی بین بار و تغییرات نیروی برشی: $\frac{dv}{dx} = -q$



اگر بار گسترده بر روی بخشی از تیر صفر باشد در اینصورت مقدار نیروی برشی در آن بخش از تیر ثابت است.

$$\frac{dv}{dx} = -q \rightarrow \frac{dv}{dx} = 0$$

اگر بار گسترده بر روی بخشی از تیر ثابت باشد در اینصورت مقدار نیروی برشی در آن بخش از تیر بصورت خطی تغییر خواهد کرد.

$$\frac{dv}{dx} = -q \rightarrow \frac{dv}{dx} = 0$$

اگر بار خطی باشد! نیروی برشی درجه دوم خواهد بود (همانند مثال 3-1) $q = \frac{q_0 x}{l} \rightarrow v = -\frac{q_0 x^2}{2l}$

- بین دو مقطع عرضی مختلف از تیر داریم:

$$\frac{dv}{dx} = -q \rightarrow dv = -q dx \rightarrow \int_a^b dv = - \int_a^b q dx \Rightarrow v_b - v_a = - \int_a^b q dx$$

تغییرات نیروی برشی بین دو مقطع برابر است با سطح زیر منحنی بار. اگر بار وارده به تیر در جهت پایین باشد، مساحت زیر منحنی مثبت و اگر به سمت بالا باشد، منفی خواهد شد.

این معادله برای زمانی است که تیر تحت بار گسترده یا بدون بار باشد زیرا در صورت وجود بار متمرکز نمیتوان انتگرال گیری نمود.

$$\sum M = 0: -M - q dx \left(\frac{dx}{2}\right) - (v + dv) dx + M + dM = 0 \rightarrow \frac{dM}{dx} = V$$

سمت چپ

تغییرات لنگر خمشی در هر نقطه از تیر برابر است با نیروی برشی در آن نقطه یا مشتق لنگر خمشی برابر است با نیروی برشی.

معادله مقابل برای زمانی ست که تیر تحت بار گسترده یا بدون بار باشد (در مثال 3-1 داریم)

$$M = -\frac{q_0 x^3}{6l} \rightarrow \frac{dM}{dx} = -\frac{q_0 x^2}{2L} = V$$

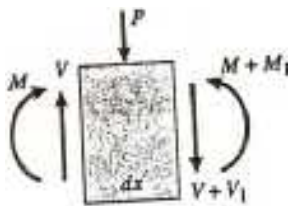
با انتگرال گیری بین دو مقطع داریم:

$$\int_a^b dM = \int_a^b V dx \rightarrow M_b - M_a = \int_a^b V dx$$

تغییرات لنگر خمشی بین دو مقطع برابر است با سطح زیر نمودار برش.

این رابطه حتی برای زمانی که بار متمرکز بین a, b باشد نیز صادق است ولی زمانی که

بین a, b لنگر متمرکز بر تیر اثر کند، نمیتوان از این معادله استفاده نمود.



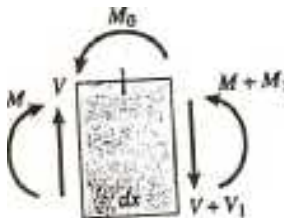
در مورد بارهای متمرکز

نیروی برشی و لنگر خمشی دارای افزایش معین v_1 و M_1 می باشند.

در نقطه ای از تیر که بار متمرکز وارد شود یک تغییر ناگهانی در نمودار نیروی برشی تیر رخ میدهد و مقدار تغییر برابر است با اندازه ی بار متمرکز:

$$\sum \hat{M} = 0 : M_1 = P \left(\frac{dx}{2} \right) + V dx + V_1 dx$$

چون dx دیفرانسیل بسیار کوچک است پس M_1 نیز بسیار کوچک بوده و در نقطه ای از تیر که بار متمرکز وارد می شود لنگر خمشی تغییر نخواهد کرد.



در مورد لنگر متمرکز

در نقطه ی اعمال لنگر متمرکز نیروی برشی تغییر نمی کند.

$$\sum F_y = 0 \rightarrow v_1 = 0$$

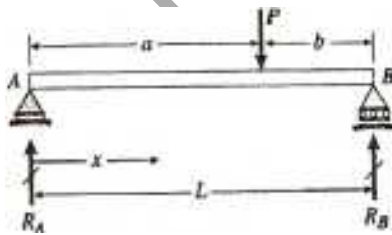
$$\sum \hat{M} = 0 : -M + M_0 - (V + V_1) dx + M + M_1 = 0 \rightarrow M_1 = -M_0$$

پس در نقطه ی اعمال لنگر، لنگر خمشی تیر به طور ناگهانی تغییر می کند و مقدار تغییرات آن

برابر است با اندازه ی لنگر متمرکز.

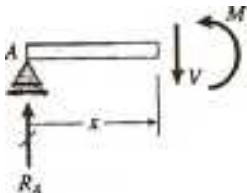
نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی

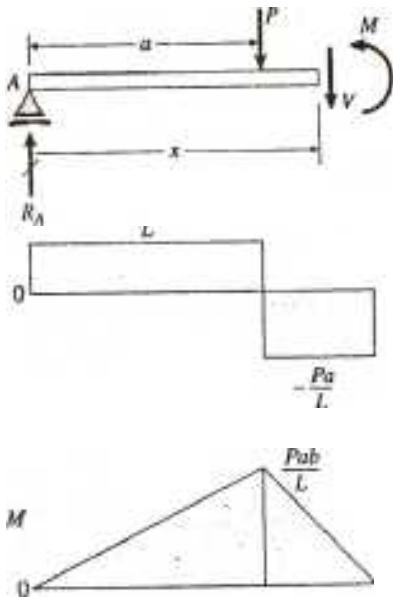
بار متمرکز



→

$$\begin{cases} R_A = \frac{Pb}{L} \\ R_B = \frac{Pa}{L} \end{cases}$$





$$\rightarrow \begin{cases} V = R_A = \frac{Pb}{L} & 0 < x < a \\ M = R_A \cdot x = \frac{Pbx}{L} & 0 < x < a \end{cases}$$

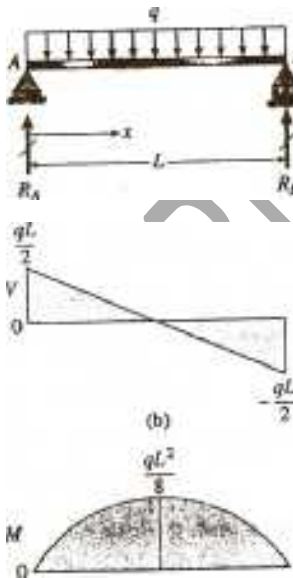
$$\rightarrow \begin{cases} V = R_A - P = \frac{Pb}{L} - P = -\frac{Pa}{L} & a < x < L \\ M = R_A \cdot x - P(x-a) = \frac{Pbx}{L} - P(x-a) & a < x < L \end{cases}$$

$$M = \frac{Pa}{L}(L-x)$$

در فواصل $0 < x < a$ و $a < x < L$ ، چون بار گسترده‌ای روی تیر وجود ندارد ($q=0$) پس $\frac{dv}{dx}=0$ و نمودار نیروی برشی ثابت است در زیر بار متمرکز پله‌ای به اندازه P وجود دارد. در زیر بار متمرکز در نمودار لنگر خمشی، شکستگی بوجود می‌آید و چون علامت برش عوض می‌شود پس شیب نمودار لنگر نیز عوض خواهد شد.

تغییرات لنگر از تکیه گاه A تا زیر بار متمرکز برابر است با $0 - \frac{Pab}{L}$ که همان سطح زیر نمودار برش می‌باشد

بار گسترده:



$$R_A = R_B = \frac{ql}{2}$$

در مقطعی بفاصله x داریم:

$$\begin{cases} V = R_A - qx = \frac{Pl}{2} - qx \\ M = R_A \cdot x - qx\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2} \end{cases}$$

نمودار نیروی برشی بصورت خط راست می‌باشد چرا که $\frac{dv}{dx} = -q$ و مقدار ثابتی است.

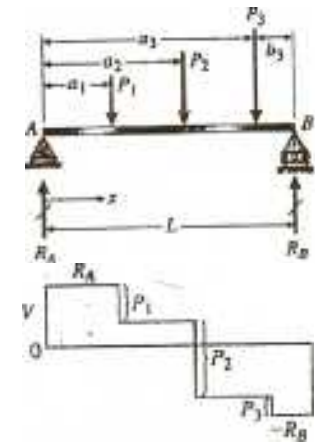
لنگر خمشی تیر بصورت سهمی درجه 2 و متقارن می‌باشد شیب لنگر (مشتق لنگر) در هر نقطه برابر است با برش.

محل لنگر max نقطه‌ایست که شیب منحنی صفر شود $\frac{dM}{dx} = 0$ که وسط تیر خواهد مقدار نیروی برشی مساوی صفر است.

سطح زیر نمودار بار برابر تغییر برش و سطح زیر نمودار برش برابر تغییرات لنگر می‌باشد.

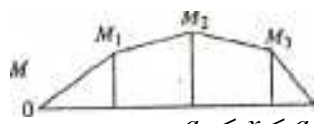
تیر تحت اثر چند بار متمرکز:

برای هر قسمت از تیر که بین بارهای وارده قرار می‌گیرد، مقطع در نظر خواهیم گرفت:



$$0 < x < a_1 : \begin{cases} V = R_A \\ M = R_A \cdot x \end{cases}$$

$$a_1 < x < a_2 : \begin{cases} V = R_A - P_1 \\ M = R_A \cdot x - P_1(x - a_1) \end{cases}$$



$$a_2 < x < a_3 : \begin{cases} V = R_B + P_B = R_A - P_1 - P_2 \\ M = R_B(L - x) - P_3(a_3 - x) \end{cases}$$

با استفاده از نمودار جسم آزاد سمت راست تیر:

$$a_3 < x < L : \begin{cases} V = R_B = R_A - P_1 - P_2 - P_3 \\ M = R_B(L - x) \end{cases}$$

با استفاده از نمودار جسم آزاد سمت راست تیر:

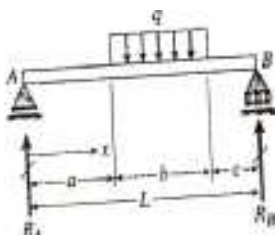
بعلت اینکه روی تیر $q = 0$ است پس نیروی برش در هر قسمت از تیر ثابت می‌باشد. زیرا دو بار متمرکز، نیروی برشی به اندازه آن بار تغییر می‌کند.

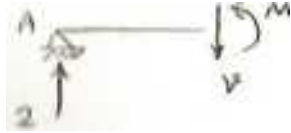
زیر بار متمرکز در دیاگرام لنگر خمشی یک شکستگی خواهیم داشت چون در این نقطه مشتق چپ و راست لنگر که همان نیروی برشی در طرفین بار متمرکز است. برابر نیستند پس شیب منحنی لنگر در این نقطه تغییر خواهد کرد در تیرهای تحت اثر بارهای متمرکز، حداکثر لنگر خمشی در زیر یکی از بارها متمرکز رخ می‌دهد چون تغییر شیب لنگر از مثبت به منفی در یکی از این نقاط اتفاق می‌افتد. در واقع در نقطه ای که علامت نیروی برشی عوض شود.

؟ مثال 5-1.

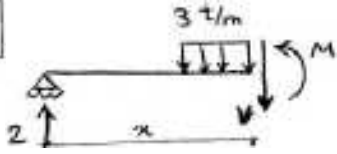
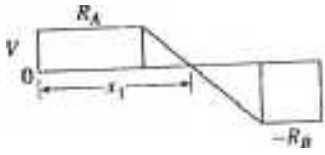
تیر ساده AB در بخشی از دهانه خود تحت اثر یک بار گسترده ثابت با شدت q قرار گرفته است. نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی را برای این تیر ترسیم نمایید.

$$\sum M_A = 0 : R_B \times 6 - 3 \times 2 \times 4 = 0 \Rightarrow R_B = 4 \text{ ton} \longrightarrow R_A = 3 \times 2 - 4 = 2^{\text{ton}}$$

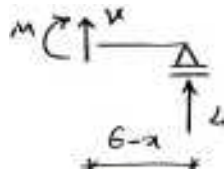
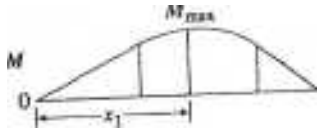




$$0 < x < 3 \begin{cases} V = 2 \text{ ton} \\ M = 2x \end{cases}$$



$$3 < x < 5 \begin{cases} V = 2 - 3(x-3) = -3x + 11 \\ M = 2x - 3(x-3) \times \frac{(x-3)}{2} = 2x - \frac{3(x-3)^2}{2} \end{cases}$$



$$5 < x < 6 \begin{cases} V = -4 \\ M = 4(6-x) \end{cases}$$

در نقاط C و D منحنی لنگر پیوسته است چون در این نقاط تغییر ناگهانی در نیروهای برشی وجود ندارد.

در نقطه برش مساوی صفر، لنگر خمشی به max مقدار خود می‌رسد

$$-3x + 11 = 0 \longrightarrow x = 3.66m$$

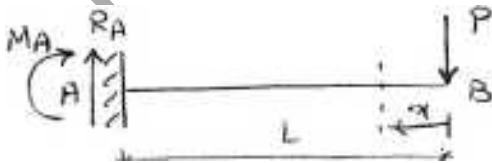
با قرار دادن $x = 3.66m$ در معادله لنگر داریم:

$$M_{\max} = 2 \times 3.66 - \frac{3(3.66-3)^2}{2} = 6.66 \text{ t.m}$$

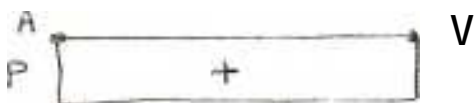
می‌توانیم سطح زیر نمودار برش را حساب کنیم:

$$2 \times 3 + \frac{2 \times 0.66}{2} = 6.66 \text{ t.m}$$

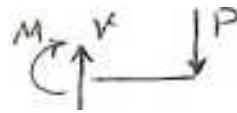
مثال 6-1.



ترسیم نمودار برش و خمش برای تیر مقابل؟



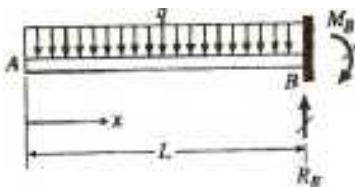
عکس العمل‌ها: $P_A = P, M_A = -PL$



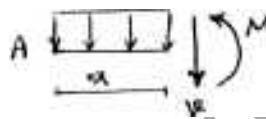
$$\begin{cases} V = P \\ M = -Px \end{cases}$$

مثال 7-1.

تیر طره ی AB تحت اثر بار گسترده ی یکنواخت q قرار گرفته است نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی تیر را رسم نمایید.



$$\begin{cases} R_B = qL \\ M_B = qL \cdot \frac{L}{2} = \frac{qL^2}{2} \end{cases}$$



$$\begin{cases} V = -qx \\ M = -qx \cdot \frac{x}{2} = -\frac{qx^2}{2} \end{cases}$$



برای بدست آوردن مقادیر نیروی برشی و لنگر خمشی می توان بجای استفاده از نمودارهای جسم آزاد از روابط بین برش و بار و برش و خمش انتگرال گیری نمود.

$$\frac{dv}{dx} = -q \longrightarrow \int_A^x dv = \int_0^x -q dx$$

$$v - v_A = -qx \xrightarrow{v_A=0} v = -qx$$

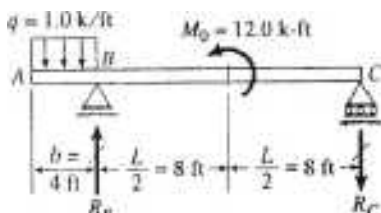
$$\frac{dM}{dx} = v \longrightarrow \int_A^x dM = \int_0^x v dx \Rightarrow M - M_A = \int_0^x -qx dx \xrightarrow{M_A=0}$$

$$M = -q \frac{x^2}{2}$$

مثال 8-1.

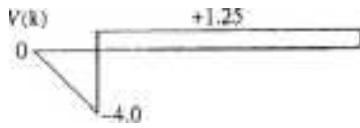
تیر بالکن دار ABC که در قسمت AB بصورت بالکن میباشد. این تیر در دهانه ی AB تحت اثر بار گسترده ای به شدت $q=1\text{KN/m}$ و در وسط دهانه BC تحت اثر یک گشتاور به مقدار

$M_0 = 12\text{KN/m}$ در جهت خلاف حرکت عقربه های ساعت قرار گرفته است. نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی تیر را رسم نمایید.



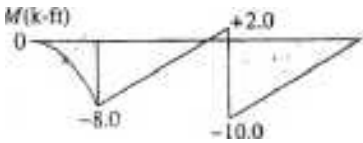
$$\Sigma M_B = 0 : 1 \times 4 \times \frac{4}{2} + 12 + R_C \times 16 = 0 \Rightarrow R_C = -1.25 \text{ KN}$$

$$\uparrow \Sigma F_y = 0 : -1 \times 4 + R_B - 1.25 = 0 \Rightarrow R_B = 5.25 \text{ KN}$$



max نیروی برشی در سمت چپ تکیه گاه B اتفاق می افتد.

سطح زیر نمودار برش:



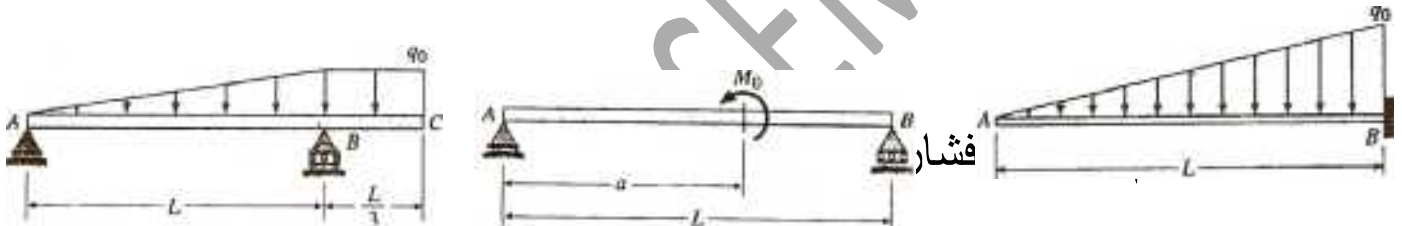
$$M_B = -4 \times 4 / 2 = -8$$

$$M = -8 + 1.25 \times 8 = +2$$

مقادیر max لنگر خمشی در نقاطی اتفاق می افتد که نیروی برشی تغییر علامت می دهد و یا لنگر متمرکزی بر تیر اعمال می شود.

◀ تمرین.

مطلوبست رسم دیاگرام های برش و لنگر برای تیرهای مقابل؟



تنش و کرنش عمودی:

از مفاهیم بنیادی در مکانیک جامدات هستند، اینرو مفهوم را میتوان در ابتدائی ترین شکل خود با بررسی یک میله منشوری تحت بارهای محوری نشان داد

میله منشوری، یک عضو سازه ای مستقیم است که سطح مقطع آن در سراسر طولش یکسان است.

میله تحت اثر یک نیروی محوری قرار داد که محل (امتداد) آن محور عضو است و باعث ایجاد کشش یا فشار در میله می گردد، مانند عضورهای فریابی، ستونهای ساختمانها و ...

یک میله خریابی تحت کشش را بعنوان جسم آزاد در نظر می گیریم (با صرف نظر از نیروی وزن میله):

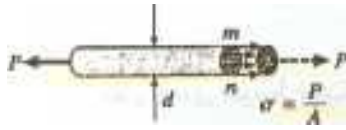


وضعیت میله قبل از بارگذاری:



وضعیت میله پس از بارگذاری:

اگر میله را در مقطع mn (عمود بر محور طول میله) برش دهیم و نمودار جسم آزاد سمت چپ میله را در نظر بگیریم:



تأثیر بخش سمت راست روی مقطع mn عبارتست از یک نیرو که بطور پیوسته بر روی مقطع عرضی توزیع شده است.

(مقطع عمود بر محور طولی میله را مقطع عرضی می‌گویند)

شدت این نیرو، یعنی نیرو بر واحد سطح را تنش می‌نامند (σ) برآیند این تنش‌های گسترده پیوسته همان نیروی P خواهد بود پس خواهیم داشت:

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

تنش‌هایی را که در امتداد عمود بر سطح برش عمل می‌کنند را تنش‌های عمودی می‌نامند.

تنش عمودی می‌تواند کشش یا فشاری باشد

(تنش‌های عمودی: کششی = مثبت و فشاری = منفی)

← واحدهای تنش در سیستم های SI & USCS:

$\frac{N}{m^2}$	$\frac{kN}{m^2}$	$\frac{kg}{cm^2}$	(SI)
II	II		Intrnational System
Pa	MPa		

$\frac{lb}{in^2} = Psi$	$\frac{kip}{in^2} = Ksi$	(USCS)
		U.s.customary System

معادله $\sigma = \frac{P}{A}$ تنها زمانی معتبر است که توزیع تنش بر روی مقطع عرضی میله یکنواخت باشد. این نیز زمانی به واقعیت می‌پیوندد که نیرو در مرکز هندسی سطح مقطع عرضی اعمال شود. اگر نیرو در مرکز هندسی مقطع اعمال نشود دچار خمش نیز خواهد شد.

تمرکز تنش:

حالت یکنواخت توزیع تنش زمانی است که به اندازه کافی از دو انتهای میله (محل اعمال نیرو) دور شویم.

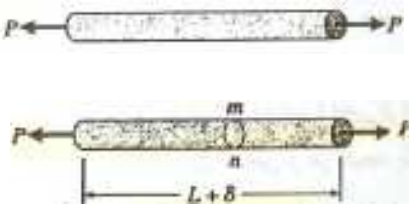
تمرکز تنش در انتهای میله، بستگی به چگونگی انتقال نیرو به میله دارد.



→ بادور شدن از محل اعمال نیرو

در عمل می‌توان زمانی که به اندازه بزرگترین بعد مقطع عرض میله از محل تمرکز تنش دور شدیم، توزیع تنش را یکنواخت در نظر گرفت.

کرنش عمودی:



$$e = \frac{d}{L} \text{ (تغییر طول نسبی یا کرنش عمودی)}$$

اگر میله در کشش باشد، کرنش از نوع کششی و رد فشار کرنش فشاری خواهیم داشت. کرنش یک کمیت بی بعد است.

معادلات $\sigma = \frac{P}{A}$ و $e = \frac{d}{L}$ را میتوان برای هر ماده و هر نیرو مورد استفاده قرار داد و تنها شرط

اصلی اینست که تغییر شکل میله در سراسر حجم آن یکنواخت باشد و این امر مستلزم آنست که:

(1) میله منشوری باشد.

(2) نیروها رد مرکز هندسی مقطع وارد شوند.

(3) جسم همگن باشد (خواص ماده در همه نقاط آن یکسان باشد)

در این حالت تنش و کرنش را تک محوری گویند.

خط اثر نیروهای محوری برای توزیع تنش یکنواخت:

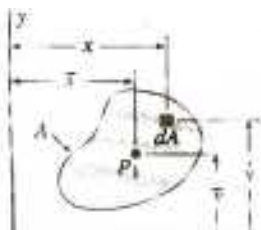
می‌خواهیم ثابت کنیم که تنش عمودی زمانی درای توزیع یکنواخت روی مقطع عرضی می‌باشد که

خط اثر نیروهای محوری از مرکز هندسی مقطع عرضی میله عبور کند.



یک میله منشوری با سطح مقطع دلخواه تحت نیروی محوری P را در

نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم P_1 محل تلاقی خط اثر نیروی محوری P



با مقطع عرضی باشد: $P_1 \bar{x}$

لنگرهای نیروی P حول محورهای مختصات عبارتند از:

$$M_x = P\bar{y} \quad , \quad M_y = -P\bar{x}$$

حال لنگر تنش‌های توزیعی را بدست می‌آوریم:

$$M_x = \int \sigma dA y = \int \sigma dA y$$

$$M_y = \int -\sigma dA x = -\int \sigma dA x$$

این لنگرها ایجاد شده با هم برابرند:

$$\begin{cases} P\bar{x} = \int ax dA \\ P\bar{y} = \int ay dA \end{cases}$$

حال با فرض اینکه تنش بطور یکنواخت توزیع شده، می‌توان آنرا از انتگرال خارج نمود ($\sigma = \frac{P}{A}$)

$$P\bar{x} = \frac{P}{A} \int x dA \rightarrow \bar{x} = \frac{\int x dA}{A} \quad \quad P\bar{y} = \frac{P}{A} \int y dA \rightarrow \bar{y} = \frac{\int y dA}{A}$$

این دو معادله نیز همان معادلاتی هستند که مختصات مرکز هندسی یک سطح را بیان می‌کنند.

پس نتیجه اینکه: برای اینکه توزیع تنش کشش یا فشاری در میله منشوری، یکنواخت باشد، نیروی محوری باید در مرکز هندسی مقطع وارد شود.

مثال 2-1؟

یک تیر کوتاه از میله آلومینیومی با مقطع گرد تو خالی ساخته شده و تحت اثر نیروی فشاری

54 kips قرار دارد. طول تیر 40 in و قطرهای خارجی و داخلی آن به ترتیب عبارتند از:

$d_1 = 3.6 \text{ in}$ و $d_2 = 5 \text{ in}$. طول تیر بر اثر فشار به مقدار 0.022 in کوتاه می‌شود. تنش و کرنش

فشاری در تیر را محاسبه کنید. (از وزن تیر صرف نظر شود)

$$A = \frac{\pi}{4} (d_2^2 - d_1^2) = \frac{\pi}{4} (5^2 - 3.6^2) = 4.46 \text{ in}^2$$



$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{54000 \text{ lb}}{40456 \text{ in}^2} = 5710.6 \text{ psi}$$

$$e = \frac{d}{L} = \frac{0.022 \text{ in}}{40} = 5.5 \times 10^{-4} = 0.00055$$

؟ مثال 2-

یک میله ی فولادی به طول L و قطر d در یک چاه آویزان است و یک ظرف از مواد معدنی به وزن w را در انتهای پایینی خود نگه می دارد (a) رابطه ای برای محاسبه تنش σ_{max} حداکثر در میله پیدا کنید که وزن خود میله نیز در آن محسوب شده باشد.



$$F_{max} = w + w_0$$

$$a_{max} = \frac{F_{max}}{A} = \frac{w + w_0}{A} = \frac{w}{A} + \frac{\rho AL}{A} = \frac{w}{A} + \rho L$$

b. تنش حداکثر را برای $w=1.5 \text{ kN}, d=8 \text{ mm}, L=40 \text{ mm}$ محاسبه کنید.

$$a_{max} = \frac{1.5 \text{ kN} \times 10^3}{\pi \frac{8^2}{4}} + 77 \text{ KN/m}^3 \times \frac{10^3}{(10^3)^3} \times 40 \text{ mm} \times 10^3$$

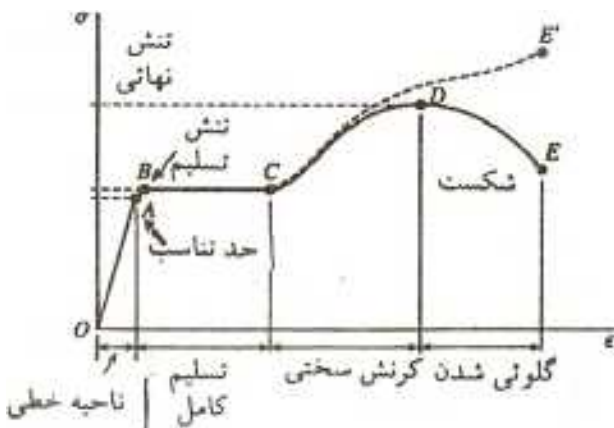
$$a_{max} = 29.84 \text{ N/mm}^2 + 3.08 \text{ N/mm}^2 = 32.92 \text{ MPa}$$

نمودار تنش - کرنش:

در محاسبه کرنش نیز اگر از طول اولیه استفاده کنیم، کرنش اسمی حاصل می شود ولی اگر در هر مرحله از بارگذاری طول در ابتدای « مرحله از بارگذاری را ملاک قرار دهیم، کرنش حقیقی بدست می آید. در کارهای مهندسی تنش و کرنش اسمی کفایت می کند نمودار تنش - کرنش یک مشخصه از ماده مورد آزمایش می باشد و حاوی اطلاعات مهمی در مورد خواص مکانیکی و نوع رفتار ماده می باشد. (برای فولاد ساختمانی (فولاد نرم یا کم کربن،

0.2%))

از نقطه 0 تا A: رابطه تنش و کرنش خطی است و متناسب نیز هست (نسبت آنها همواره ثابت است)



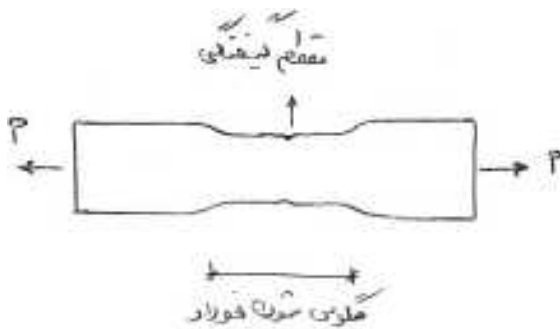
حدتناسب برای فولاد کم کربن حدود $3500 \sim 2100 \text{ kg/cm}^2$ می-باشد. اما برای فولادهای پر کربن ممکن است 5500 kg/cm^2 و بیشتر باشد.

شیب خط $0A$ را مدول الاستیته یا ضریب ارتجاعی فولاد می-نامند (E)

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{\text{واحد } E}{\text{واحد } \epsilon} \rightarrow \text{واحد } E = \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

بعد از حد تناسب به ازاء هر افزایش کوچک در مقدار تنش، کرنش با سرعت بیشتری افزایش می-یابد، در نتیجه شیب مخفی مرتباً کاهش می-یابد. در نقطه B منحنی بصورت خط افقی در می-آید (تنش تسلیم). از B تا C بدون افزایش قابل ملاحظه در مقدار نیرو، افزایش قابل ملاحظه‌ای در مقدار کرنش ایجاد می-شود. (تسلیم فولاد) در محدوده تسلیم، فولاد 10 تا 15 برابر ناحیه تغییر شکل می-دهد.

در نقطه C سخت شدگی دوباره فولاد آغاز می-شود (ناحیه کرنش سختی) و افزایش طول نمونه مستلزم افزایش نیروست و نمودار دارای شیب مثبت خواهد بود تا در نقطه D به حداکثر مقدار خود برسد (تنش نهایی فولاد) از این پس، کشش بیشتر میله با کاهش نیرو همراه خواهد شد و در نقطه E گسیخته خواهد شد.



در اثر کشش فولاد، انقباض جانبی در نمونه نیز رخ می-دهد.

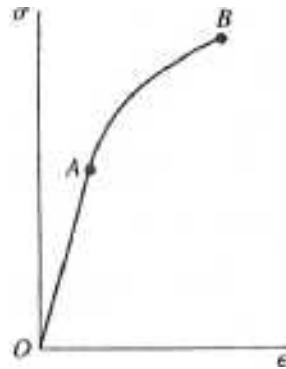
کاهش مساحت مقطع در اثر این انقباض تا نقطه C بسیار کوچک است ولی از نقطه C شروع به افزایش می-کند و در نزدیکی تنش نهایی، کاهش مساحت میله قابل رویت می-شود.

اگر از مساحت واقعی مقطع عرض در قسمت گلویی شده نمونه برای محاسبه تنش استفاده کنیم، منحنی تنش - کرنش حقیقی (به شکل خط چین) بدست می-آید. پس برگشت نیرو بدلیل کاهش مساحت است نه افت مقاومت فولاد از آنجا که اکثر سازه‌ها طوری طراحی می-شود که در تنش‌های کمتر از حد تناسب کار کنند، منحنی تنش - کرنش $OABCDE$ که مبنای آن مساحت اولیه مقطع نمونه و بدست آوردن آن آسان است، در طراحی مهندسی کافی خواهد بود.

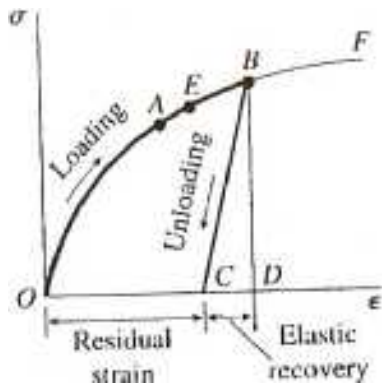
موادی که در کرنش‌های نسبتاً کم گسیخته می-شوند بعنوان ترد دسته‌بندی می-شوند. مانند بتن، سنگ، شیشه و ... مواد ترد غالباً پس از حد تناسب تنها با تحمل مقدار کمی افزایش طول گسیخته می-شوند.

فولادهای پر کربن دارای تنش نهایی بسیار بالا هستند ولی بصورت ترد عمل می‌کنند.

نمودار تنش- کرنش یک ماده ترد:



الاستیته کشانی، پلاستیته (موم سانی):



در نمودار مقابل می‌خواهیم ببینیم در جریان باربرداری از ماده چه اتفاقی خواهد افتاد:

برای نقطه A مسیر بارگذاری و باربرداری دقیقاً برهم منطبقند. این خاصیت ماده را که به موجب آن «ماده در جریان باربرداری به ابعاد اولیه خود بر می‌گردد را الاستیته و خود ماده را الاستیک یا ارتجاعی می‌نامند برای الاستیک بودن یک ماده لازم نیست که

منحنی تنش - کرنش خطی باشد اگر ماده تحت بار بیشتری قرار داده و به نقطه B برسیم و بار برداری کنیم، منحنی روی خط BC بر می‌گردد که موازی با مماس بر منحنی در مبدا می‌باشد.

در نقطه C بار کاملاً برداشته شده است اما یک کرنش باقیمانده یا کرنش پسماند (تغییر شکل ماندگار) در ماده باقی مانده است (پسماند دائمی یا کرنش دائمی). از کل کرنش ایجاد شده (OD) کرنش CD بصورت ارتجاعی بر می‌گردد و کرنش OC بصورت دائمی باقی می‌ماند. ماده را در این حالت الاستو - پلاستیک می‌نامند. نقطه E را حد ارتجاعی ماده می‌نامند.

حد ارتجاعی معمولاً برابر و یا اندکی بیشتر از حد تناسب می‌باشد.

- ویژگی یک ماده را که به موجب آن بعد از حد ارتجاعی دچار تغییر شکل غیر ارتجاعی می‌گردد را پلاستیته یا مومسانی می‌گویند

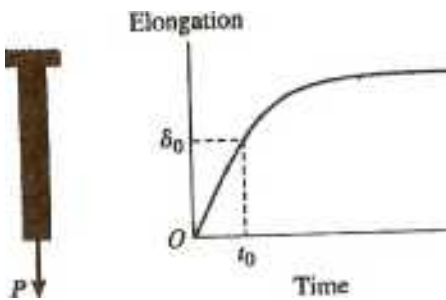
اگر از نقطه C دوباره بارگذاری کنیم منحنی روی خط راست CB حرکت کرده و از نقطه B روی منحنی اولیه قرار می‌گیرد. پس در بارگذاری دوم می‌توان فرض کرد که یک منحنی تنش - کرنش داریم با مبدا C و حد تناسب اکنون در نقطه B است که تنش آن بیشتر از حد ارتجاعی اولیه (نقطه E) می‌باشد. پس با کشیدن یک ماده نظیر فولاد تا داخل محدوده غیر ارتجاعی یا پلاستیک، خواص ماده

تغییر می‌کند. از جمله ناحیه ارتجاعی گسترش می‌یابد و حد تناسب بالا می‌رود ولی نرمی کاهش می‌یابد زیرا مقدار تسلیم (از B تا F) کمتر از مقدار اولیه E تا F شده است.

☞ خزش:

برخی مواد هنگامیکه برای مدت طولانی تحت اثر یک نیرو قرار می‌گیرند، کرنش‌های دیگری در آنها ایجاد می‌شود که در این حالت می‌گویند ماده دچار فرنش شده است.

در اثر بارگذاری تدریجی در بازه زمانی t_0 ، افزایش طول d_0 در میله ایجاد شده است بعد از زمان t_0 بار ثابت است ولی ممکن است میله بتدریج افزایش طول دهد.



بعنوان مثال دوم، سیمی را تحت کشش اولیه (با تنش) بین دو تکیه گاه ثابت کرده‌ایم این کشش اولیه در زمان t_0 انجام شده است پس از زمان t_0 ، با وجود ثابت بودن تکیه‌گاهها، تنش در سیم بتدریج کاهش می‌یابد تا به مقدار ثابتی برسد (رها سازی یا Yelaxation)



☞ قانون هوک:

هنگامی که ماده دارای رفتار ارتجاعی است و بین تنش و کرنش یک رابطه خطی برقرار است (خطی ارتجاعی) بین تنش و کرنش رابطه زیر برقرار است:

$$\sigma = E \cdot \epsilon_0$$

E : مدول ارتجاعی (مدول یانگ، ضریب الاستیسیته) / ϵ_0 : کرنش محوری

$$E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2 = 0.21 \times 10^6 \text{ N/mm}^2 \text{ یا } MPa \text{ فولاد}$$

☞ نسبت پواسون:

جسم همگن: ترکیبات و خواص ارتجاعی در تمام نقاط جسم یکسان است.

جسم ایزوتروپیک: جسمی است که خواص آن در همه جهات (محوری، جانبی و ..) یکسان باشد (مثل فولاد)

جسم غیر ایزوتروپیک: جسمی است که خواص آن در جهت‌های مختلف متفاوت باشند.

{مثل پارچه (دارای الیاف یک جهتی) تخته، چوب}

جسم اورتروپیک: خواص ماده در یک امتداد ویژه در سراسر ماده یکسان و در سایر امتدادهای عمود بر این امتداد نیز یکسان ولی مقدارش متفاوت از خواص اولی است. (مثل بتن مسلح)

☺ در آزمایش کشش میله فولادی:

افزایش طول همراه با انقباض جانبی خواهد بود. برای ماده ارتجاعی خطی، کرنش جانبی در هر نقطه متناسب با کرنش محوری است. برپا آنکه کرنش‌های جانبی در سراسر طول میله یکسان باشند باشد شرایط زیر برقرار باشند:

1- نیروی محوری در تمام طول میله ثابت باشد.

2- ماده همگن باشد.

3- ماده ایزوتروپیک یا اورتوتروپیک باشد.

$$e' = -\nu e \quad \text{کرنش محوری} = \nu \text{ کرنش جانبی}$$

در میله تحت کشش، کرنش محوری مثبت و کرنش جانبی منفی است (بدلیل کاهش عرض میله)

در فشار نیز کرنش محوری منفی و کرنش جانبی مثبت است.

پس ضریب پواسون همواره مقادریست مثبت.

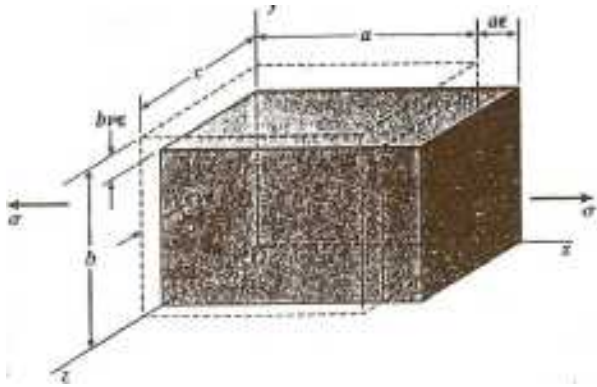
برای اکثر فلزات و بسیاری از مواد دیگر: $0.25 < \nu < 0.35$

برای بتن: $0.1 < \nu < 0.2$

در اکثر موارد نسبت پواسون را در کشش و فشار یکسان فرض می‌کنند.

در محدوده کرنش‌های بزرگ، نسبت پواسون تغییر می‌کند. مثلاً در فولاد اگر دچار تسلیم شود نسبت پواسون به 0.5 افزایش می‌یابد. لذا این نسبت تنها در محدوده تغییر شکل‌های ارتجاعی خطی ثابت باقی می‌ماند.

تغییر حجم:



در امتداد محور x داریم: $\sigma_x = E \cdot \epsilon_x$

افزایش طول در امتداد x : $a \cdot \epsilon_x$

کاهش طول در امتداد y : $bey = -bve_x$

کاهش طول در امتداد z : $ce_z = -cve_z$

$$v = (a + ae_x)(b - bve_x)(c - cve_z)$$

از این پس برای سادگی e_x را با e نمایش می‌دهیم:

$$v = abc(1 + e_x)(1 - ve_x)(1 - ve_z)$$

$$v = v_0(1 + e)(1 + v^2e^2 - 2ve)$$

$$v = v_0(1 - 2ve) + e - 2ve^2 \Rightarrow V = V_0(1 + e - 2ve)$$

$$\Delta V = V - V_0 = V_0(e - 2ve) \leftarrow \text{تغییر حجم}$$

$$e = e_v = \frac{\Delta V}{V_0} = e(1 - 2V) = \frac{1}{E}(1 - 2V) \leftarrow \text{تغییر حجم نسبی (e: انبساط حجمی)}$$

این معادله برای حالت تنش تک محوری (کشش و فشار) صادق است.

$$e_v > 0 \rightarrow 1 - 2V > 0 \Rightarrow V < 0.5 \quad [0 < V < 0.5]$$

$$e_v = e_x + e_y + e_z \rightarrow e_v = e_x + ye_x - ye_x = e_x(1 - 2v)$$

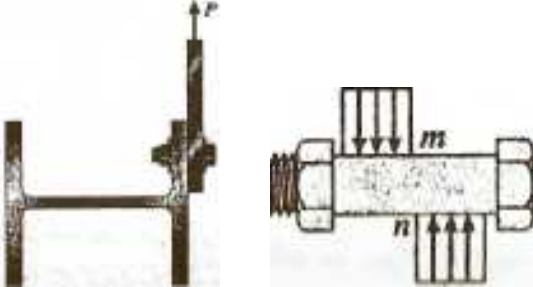
? مثال 2-3

یک لوله فولادی به طول $4ft$ قطر خارجی $d_2 = 6in$ و قطر داخلی $d_1 = 4.5in$ تحت اثر نیروی محوری فشاری $p = 140k$ قرار دارد. مدول ارتجاعی ماده $E = 30000KSi$ و نسبت پواسون $\nu = 0.3$ برای آن میباشد. کمیت های زیر را برای لوله حساب کنید.

(a) کاهش طول؟ (b) کرنش جانبی؟ (c) افزایش در قطر خارجی و قطر داخلی و افزایش ضخامت جداره لوله؟ (e) افزایش در حجم ماده؟ (f) انبساط حجمی؟

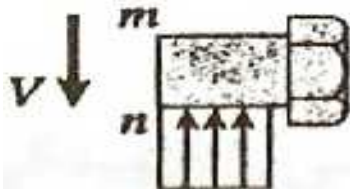
تنش و کرنش برشی:

تنش‌های عمودی در امتداد عمود بر سطح می‌گردند. تنش‌هایی را که مماس بر سطح ماده عمل می‌کنند، تنش برشی می‌نامیم.



توزیع تنش‌های لهدیگی پیچیده است و لذا برای سادگی توزیع آنها را یکنواخت فرض می‌کنیم.

با برش پیچ در مقطع mn داریم:



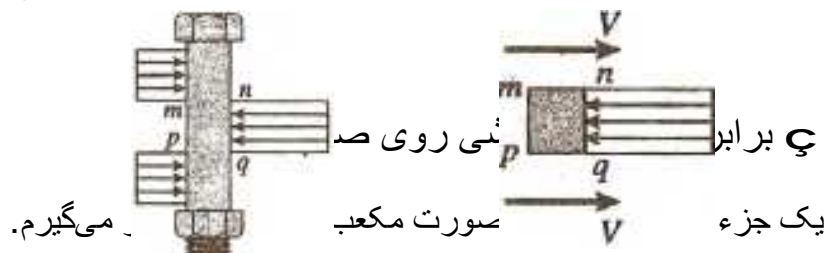
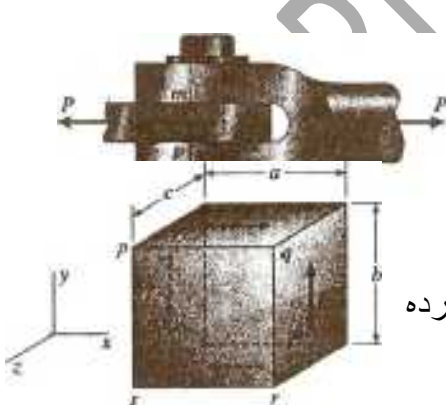
V نیروی برشی مقطع است (مماس بر مقطع عرضی عمل می‌کند)

توزیع تنش برشی روی مقطع بدرستی معلوم نیست ولی مقدار آن در مجاورت مرکز حداکثر و در نقاط کناری صفر می‌باشد.

$$\tau = \frac{V}{A} \rightarrow \text{تنش برشی متوسط}$$

اتصال تحت برش منفرد:

در اتصال فوق، پیچ تحت اثر برش دوگانه قرار دارد. (دو صفحه برش داریم، mn و pq)



فرض می‌کنیم که تنش برشی یکنواختی بر روی وجه فوقانی مکعب گسترده شده است نیروی حاصل برابر است با: $ab \cdot \tau$

برای برقراری تعادل در جهت x ، باید نیرویی در خلاف جهت روی سطح پایینی مکعب اثر کند و چون مساحت هر دو وجه برابرند پس تنش اعمال شده روی وجه تحتانی نیز برابر است با: τ

حال ایندو نیروی ab ایجاد یک گشتاور حول محور y می‌کنند که مقدار آن برابر است با $a.b.c$.
 برای حفظ تعادل قطعه، باید لنگری برابر با
 و در خلاف جهت به قطعه اعمال شود.

اگر تنش برشی روی وجه bc را برابر با c_1 فرض کنیم، نیروی حاصل برابر است با $c_1.bc$.
 که برای حفظ تعادل جهت Z در وجه دیگر هم c_1 را خواهیم داشت و به سمت پایین.

این دو نیروی لنگری ایجاد می‌کنند برابر با: $c_1.bc.a$

$$abc = c_1.bc.a \rightarrow c = c_1$$

نتیجه اینکه:

(تنش‌های برشی بر روی وجوه موازی یک جزء از لحاظ مقدار مساوی و از لحاظ جهت، مخالف یکدیگرند.

(2) تنش‌های برشی بر روی وجوه متعامد از لحاظ مقدار برابر ولی به لحاظ جهت، بهم نزدیک می‌شوند و یا از هم دور می‌شوند.

این حالت را برش خالص می‌نامند.

کرنش برشی:

تنش‌های برشی تمایلی به کاهش یا افزایش طول در امتدادهای x و y و z ندارند. در عوض قطعه را طوری تغییر شکل می‌دهند که از حالت مکعب مستطیل بصورت یک متوازی السطوح در آید. در واقع باعث تغییر زاویه بین وجوه جانبی می‌گردند.

$$P/2 \rightarrow P/2 - \phi$$

اینگونه تغییر شکل را اعوجاج می‌گویند

$$P/2 \rightarrow P/2 + \phi$$

زاویه ϕ که وسیله سنجش اعوجاج است، کرنش برشی نام دارد

قرار داد علامت مثبت:

وجوهی را که عمود خارج شده از آنها در امتداد مثبت یکی از محورها باشد، وجوه مثبت و وجوه مقابل آنها را وجوه منفی می‌گوییم.

بر روی یک وجه مثبت، تنش برشی وقتی مثبت است که در امتداد مثبت یکی از محورهای مختصات باشد.

بر روی یک وجه منفی، تنش برشی وقتی مثبت است که در امتداد منفی یکی از محورهای مختصات باشد.

کرنش برشی در صورتی مثبت است که زاویه بین دو وجه مثبت یا دو وجه منفی کاهش یابد لذا تنش‌های برشی مثبت همواره با کرنش‌های برشی مثبت همراه هستند.

قانون هوک در برش:

اگر دیاگرام تنش - کرنش ماده را در برش کنیم (مثلاً در آزمایش پیچش یک لوله توخالی که در آن برش خالص ایجاد می‌شود) این نمودارها از لحاظ شکل شبیه نمودارهای آزمایش کششی می‌باشند ولی از لحاظ مقدار با هم تفاوت دارند.

خواص ماده در برش معمولاً از لحاظ مقدار در حدود نصف مقادیر آن در کشش هستند.

برای مثال تنش تسلیم فولاد در برش حدود 0.5 برابر تنش تسلیم در کشش است.

برای بسیاری از مواد، بخش اول نمودار تنش - کرنش برشی مانند حالت کشش، یک خط مستقیم است که از مبدأ می‌گذرد در این ناحیه ارتجاعی خطی، قانون هوک رد برش بدین صورت است:

$$G = \gamma \cdot G \quad (\text{دارای واحد تنش می‌باشد})$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

این رابطه بعداً اثبات خواهد شد:

$$0 < \nu < 0.5 \longrightarrow \frac{E}{3} < G < \frac{E}{2}$$

نیروها و تنش‌های مجاز:

برای جلوگیری از گسیختگی سازه، ظرفیت تحمل بار سازه باید از نیروهایی که به آن اعمال می‌گردند، بیشتر باشد. بعبارت دیگر مقاومت واقعی سازه باید از مقاومت مورد نیاز بزرگتر باشد.

$$S.F = \frac{\text{مقاومت واقعی}}{\text{مقاومت مورد نیاز}} > 1$$

انواع گسیختگی سازه:

1. فرو رفتگی و شکست کامل

2. تغییر شکل‌های بزرگ

دلائل اینکه ضریب ایمنی باید بزرگتر از یک باشد:

1- دقت روشهای مدلسازی و تحلیل 2- ایده‌آل نبودن مصالح

3- بیدقتی در ساخت سازه 4- آثار ناشی از خستگی مصالح (در بارهای دینامیکی)

5- آثار ناشی از خوردگی شیمیایی مصالح

- به سبب پیچیدگی‌های فوق، ضریب ایمنی را باید براساس احتمالات تعیین نمود که اینکار توسط گروههایی از مهندسين مجرب انجام می‌شود که در نتیجه آن آیین‌نامه‌ها بوجود می‌آیند.

- در بسیاری از موارد سعی بر آنست که ماده در محدوده تغییر شکل‌های ارتجاعی خطی باقی بماند (برای جلوگیری از تغییر شکل‌های دائمی)، در اینگونه موارد، ضریب ایمنی نسبت به تسلیم سازه بیان می‌شود و با اعمال این ضریب ایمنی مقدار تنش در هیچ نقطه نباید از تنش مجاز بیشتر شود:

$$\sigma_{\text{مجاز}} = \frac{\sigma_y}{\text{s.F}} \leftarrow \frac{\text{تنش تسلیم}}{\text{ضریب ایمنی}} = \text{تنش مجاز}$$

برای مثال تنش مجاز فولاد معمولی در کشش برابر است با:

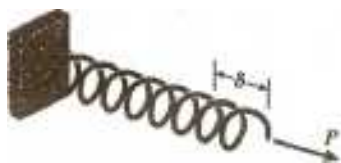
$$1440 = \frac{2400 \text{ kg/cm}^2}{1.67} \quad (0.6 \times 2400)$$

مساحت \times تنش مجاز = نیروی مجاز

فصل سوم: عضوهای کششی یا فشاری.

$$P = K.S \quad (\text{تغییر شکل} \times \text{سختی} = \text{نیرو})$$

$$d = \frac{1}{k} \cdot p \quad (\text{نیرو} \times \text{نرمی} = \text{تغییر شکل})$$



در مورد یک میله منشوری:

با فرض اینکه نیرو در مرکز هندسی مقطع عرضی میله وارد شده داریم: $\sigma = \frac{P}{A}$

و در صورتی که میله از مصالح همگن ساخته شده باشد: $e = \frac{d}{L}$

فرض می‌کنیم که میله از یک ماده ارتجاعی خطی ساخته شده، لذا از قانون هوک پیروی می‌کند:

$$\sigma = E.e \Rightarrow \frac{P}{A} = E \cdot \frac{S}{L} \Rightarrow d = \frac{PL}{EA}$$

EA: صلبیت محوری

سختی عبارت است از نیروی مورد نیاز برای ایجاد افزایش طول واحد یا $\frac{P}{d}$:

$$K = \frac{EA}{L}$$

روابط فوق برای میله‌های تحت فشار نیز صادقند.

در مورد کابلها نیز صادقندبا این تفاوت که کابل فقط می‌تواند کشش تحمل کند.

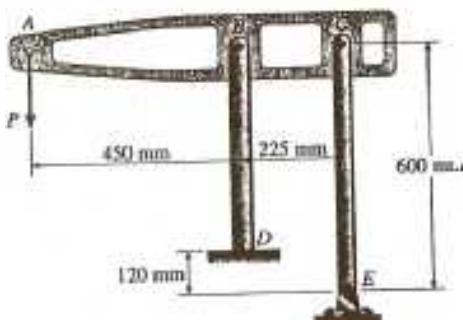
مثال 1-3?

وسیله‌ی فوق از یک تیرافقی ABC که توسط دو میله‌ی عمودی CE و BD نگهداری میشود تشکیل یافته است. میله‌ی CE دو سر مفصل است اما انتهای تحتانی میله‌ی BD در پی ثابت گردیده است. فاصله‌ی A تا B برابر 450mm و از B تا C برابر 225mm است. طول میله‌های BD و CE به ترتیب 480mm و 600mm و مساحت سطح مقطع آنها به ترتیب 1020mm^2 و 520mm^2 میباشد.

مدول ارتجاعی $E=205\text{GPa}$ در صورتی که تیر ABC صلب

فرض شود و تغییر مکان نقطه A برابر 1.0mm باشد، حداکثر

بار مجاز را بدست آورید؟



تغییر طول میله‌های غیر یکنواخت:

در حالتی که نیروی محوری در سراسر طول میله ثابت نیست، تغییر طول میله را میتوان از جمع جبری تغییر طول قطعات میله بدست آورد.



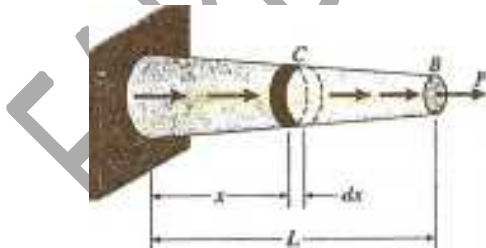
$$N_3 = P_D, N_2 = P_D + P_C, N_1 = P_C + P_D - P_B$$

$$d_1 = \frac{N_1 L_1}{EA}, d_2 = \frac{N_2 L_2}{EA}, d_3 = \frac{N_3 L_3}{EA}$$

در جمع جبری، افزایش طولها را مثبت و کاهش طولها را منفی منظور خواهیم کرد.

$$d = \sum \frac{N_i L_i}{E_i A_i}$$

زمانی که میله به شکل مخروطی باشد:



$$dd = \frac{N dx}{EA(x)} \longrightarrow d = \int_0^L \frac{N}{EA(x)} dx$$

اگر خود نیروی محوری نیز در امتداد محور میله بطور پیوسته تغییر کند:

$$d = \int_0^L \frac{N(x)}{EA(x)} dx \quad (\text{مثلاً در اثر نیروی وزن})$$

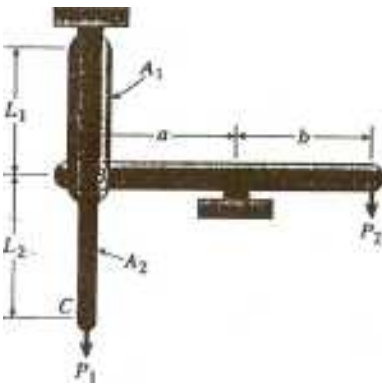
روابط $e = \frac{d}{L} \cdot \sigma = \frac{P}{A}$ برای میله‌های منشوری صادق بود و نه میله‌های مخروطی. لذا از رابطه فوق زمانی میتوان استفاده کرد که زاویه مخروط کوچک باشد (10° تا 20°) در صورتیکه زاویه مخروط بزرگ باشد، روشهای تحلیلی دقیق‌تری مورد نیاز خواهد بود.

مثال 3-2؟

در شکل مقابل با توجه به :

$$L_1 = 20\text{in}, L_2 = 30\text{in}, A_1 = 0.25\text{in}^2, A_2 = 0.16\text{in}^2, E = 29 \times 10^6, a = 28\text{in}, b = 25\text{in}$$

در صورتی که $P_1 = 2250\text{lb}$ و $P_2 = 5800\text{lb}$ باشند تغییر مکان عمودی نقطه C را محاسبه کنید (از وزن میله و تیر صرف نظر شود).



مثال 3-3؟

میله ی توپرمدور AB که دارای طول L بوده و اندکی مخروطی است در انتهای B توسط یک تکیه گاه نگه داری میشود و در انتهای آزاد A تحت تاثیر نیروی کششی P قرار میگیرد. قطر میله در دو انتهای A و B به ترتیب d_B و d_A میباشد. افزایش طول میله را بر اثر بار P پیدا کنید؟



FARDIN GASEMPOUR

سازه‌های بطور استاتیکی نامعین:



در حالتی که تعداد مجهولات مساله بیشتر از تعداد معادلات است باید از معادلات تعادل اضافی که مربوط به تغییر مکانهای سازه می‌باشند، استفاده نمود.

میله منشوری AB بین دو تکیه گاه صلب متصل گردیده است. دو عکس العمل تکیه گاه داریم و یک معادله تعادل قائم:

$$R_A + R_B - P = 0$$

میله را بصورت دو سر آزاد در نظر می‌گیریم. این میله تحت نیروهای وارده تغییر طول خواهد داد که این δ_{AB} باید برابر صفر شود. این معادله بیان می‌کند که تغییر طول میله باید با شرایط تکیه‌گاهی سازگار باشد لذا آنرا معادله سازگاری می‌نامند.

$$d_{AC} = \frac{R_A \cdot a}{EA}, \quad d_{BC} = \frac{-R_B \cdot b}{EA}$$

$$d_{AB} = d_{AC} + d_{BC} = 0 \Rightarrow \frac{R_A \cdot a}{EA} - \frac{R_B \cdot b}{EA} = 0 \Rightarrow R_A \cdot a = R_B \cdot b \quad \leftarrow \text{معادله ی سازگاری}$$

از حل همزمان معادله سازگاری و معادله تعادل، دو مجهول مسأله بدست می‌آید:

$$R_A + R_B = P \longrightarrow R_A + \frac{R_A \cdot a}{b} = P \Rightarrow R_A \left(\frac{b+a}{b} \right) = P \Rightarrow R_A = \frac{P \cdot b}{L} \quad R_B = \frac{P \cdot a}{L}$$

با مشخص شدن عکس‌العمل‌ها، دیگر کمیت‌های نیرویی و تغییر مکانی را میتوان تعیین نمود. بعنوان مثال تغییر مکان عمودی نقطه C برابر است با:

$$d_C = d_{AC} = \frac{R_A \cdot a}{EA} = \frac{P \cdot a \cdot b}{EAL}$$

- تحلیل هر سازه نامعین شامل تشکیل و حل معادلات تعادل و سازگاری می‌باشد. معادلات تحلیل رابطه بین نیروهای وارده به سازه را با نیروهای مجهول از قبیل عکس‌العمل‌ها و معادلات سازگاری شرایط تغییر مکان را در برخی نقاط سازه از جمله تکیه‌گاهها بیان می‌کنند.

مثال 3-4؟

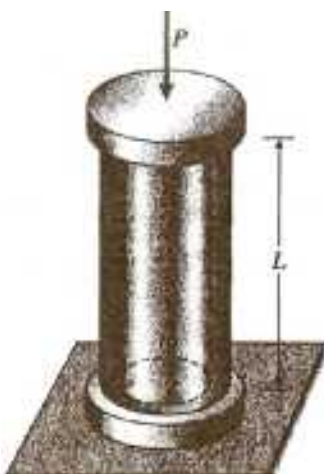
در شکل مقابل یک استوانه ی فولادی توپر در داخل یک لوله ی مسی تو خالی قرار گرفته است. استوانه ولوله که بین دو صفحه ی صلب قرار گرفته اند در یک دستگاه آزمایش تحت اثر

نیروی فشاری P قرار می‌گیرند. سطح مقطع استوانه و لوله به ترتیب A_S

و A_C مدول ارتجاعی آنها به ترتیب E_C و E_S و طول هر دو یکسان و برابر L

میباشد. مطلوب است تعیین:

(a) نیروهای فشاری p_S در استوانه ی فولادی و p_C در لوله ی مسی؟



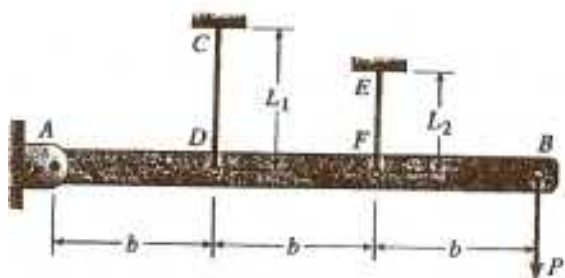
(b) تنش های فشاری δ_c و δ_s مربوط به آنها؟

(c) کاهش طول δ مجموعه؟

FARDIN GASEMPOUR

3-5 مثال؟

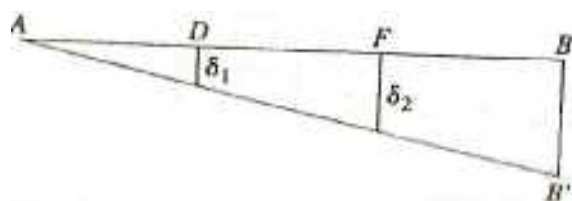
میله صلب AB توسط دو کابل CD و EF نگه داشته شده است. نیروی میله‌های EF و CD؟



$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow P_1 + P_2 + R_A - P = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow P_1 \cdot b + P_2 \cdot (2b) - P \cdot 3b = 0 \quad (2)$$

دو معادله داریم با سه مجهول، از سازگاری تغییر شکلها کمک خواهیم گرفت.



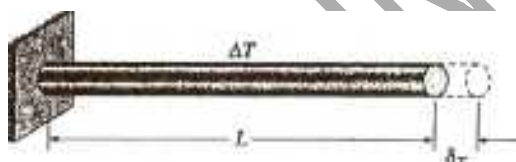
$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{b}{2b} \Rightarrow d_2 = 2d_1$$

$$\frac{P_2 L_2}{E_2 A_2} = 2 \frac{P_1 L_1}{E_1 A_1} \Rightarrow \frac{P_2}{P_1} = 2 \frac{E_2 A_2}{E_1 A_1} \cdot \frac{L_1}{L_2}$$

حال سه معادله و سه مجهول داریم که از حل همزمان آنها نیروهای میله‌ها و عکس العمل تکیه‌گاهها بدست می‌آیند.

تأثیرات حرارتی:

در اثر حرارت دادن میله به اندازه ΔT ، میله افزایش طول می‌یابد:



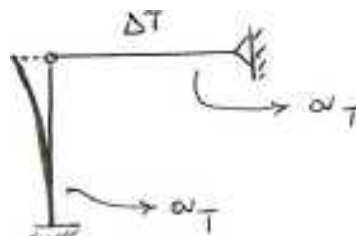
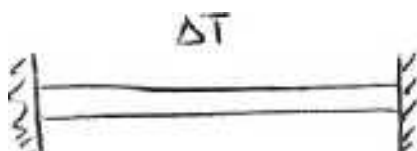
$$S_T = a L \Delta T$$

$$e_T = a \Delta T$$

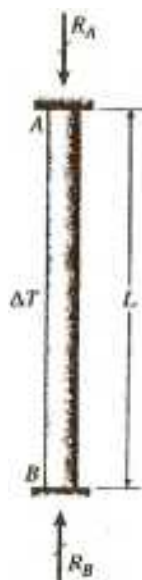
در سازه‌های ایزواستاتیک، در اثر حرارت، تنش ایجاد نمی‌شود و فقط اعضاء تغییر طول می‌دهند.



در سازه‌های هیپراستاتیک، در اثر تنش ایجاد می‌شود، با تغییر شکل یا بدون تغییر شکل.



مثال 3-6



در سازه زیر در اثر حرارت ΔT ، تنش ایجاد شده در میله چقدر است؟

(میله از مصالح ارتجاعی و خطی ساخته شده است)

در اثر افزایش دما، میله تمایل به افزایش طول دارد ولی تکیه‌گاهها مانع این امر هستند، عمل‌های R_A و R_B بوجود می‌آیند.

از معادله تعادل قائم داریم:

$$\uparrow \Sigma F_y : R_B - R_A = 0 \Rightarrow R_A = R_B$$

معادله بعدی، معادله سازگاری خواهد بود. بر این اساس که تغییر طول کلی میله صفر است: $d_{AB} = 0$

برای تعیین تغییر طول میله، یکی از تکیه‌گاهها را بر می‌داریم. در حالت آزاد تغییر طول میله در اثر

$$d_T = a \Delta T \cdot L \quad \text{حرارت برابر است با:}$$

و زمانی که عکس العمل R_A به تنهایی بر میله وارد شود، میله کاهش طول خواهد داد:

$$d_R = \frac{R_A L}{EA}$$

$$d_{AB} = d_T - d_R = 0 \Rightarrow a \Delta T L = \frac{R_A \cdot L}{EA} \Rightarrow R_A = EA \times \Delta T$$

چون افزایش دما داریم پس تنش ایجاد شده فشاری است.

$$\text{تنش حرارتی: } s = \frac{R_A}{A} = Ea \Delta T$$

$$\text{کرنش حرارتی: } e_T = \frac{s}{E} = a \Delta T \longrightarrow$$

در این مسأله کرنش محوری صفر است و در غیاب کرنش محوری، تنش محوری وجود دارد.

نکته در مورد میله‌های موازی:

$$d = \frac{PL}{E_1 A_1 + E_2 A_2}$$

$$K_1 = \frac{E_1 A_1}{L_1}, \quad K_2 = \frac{E_2 A_2}{L_2}$$

$$d = \frac{L}{E_1 A_1 + E_2 A_2} \times P \quad \longrightarrow \quad P = \frac{E_1 A_1 + E_2 A_2}{L} \cdot d$$

$$K_e = K_1 + K_2 = \frac{E_1 A_1}{L} + \frac{E_2 A_2}{L} = \frac{E_1 A_1 + E_2 A_2}{L}$$

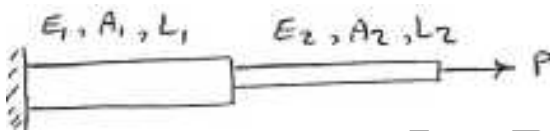
پس میتوان با محاسبه K_e ، مقدار d را محاسبه نمود و پس از آن P_1 و P_2 قابل محاسبه‌اند:

$$P_1 = \frac{E_1 A_1}{L} \cdot d = \frac{E_1 A_1}{L} \times \frac{PL}{E_1 A_1 + E_2 A_2} = \frac{PE_1 A_1}{E_1 A_1 + E_2 A_2} = \frac{K_1}{K_1 + K_2} \cdot P$$

$$P_2 = \frac{E_2 A_2}{L} \cdot d = \frac{K_2}{K_1 + K_2} \cdot P$$

در مورد میله‌های سری:

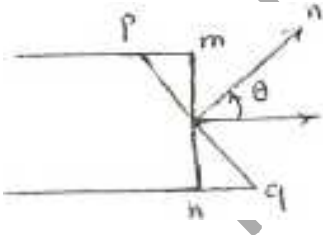
$$P_1 = P_2 = P$$



$$\frac{1}{K_E} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} \quad \Rightarrow \quad K_e = \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2}$$

$$d_1 + d_2 = d \quad \Rightarrow \quad \frac{P_1}{K_1} + \frac{P_2}{K_2} = \frac{P}{K_e} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{K_e} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}$$

تنش بر روی سطوح مایل:



می‌خواهیم وضعیت تنش‌ها را روی سطح مایل بررسی کنیم.

ابتدا روشی برای تعیین امتداد مقطع مایل در نظر می‌گیریم که عبارتست از زاویه بین محور X (عمود بر مقطع عمودی MN) و عمود N بر مقطع مایل.

اگر در مقطع مایل Pq، نیروی افقی را در امتداد عمود بر مقطع و مماس بر مقطع تجزیه کنیم:

N: نیروی عمودی (عمود بر مقطع مایل)

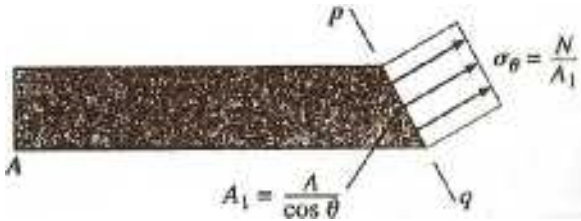
V: نیروی برشی (مماس بر مقطع مایل)



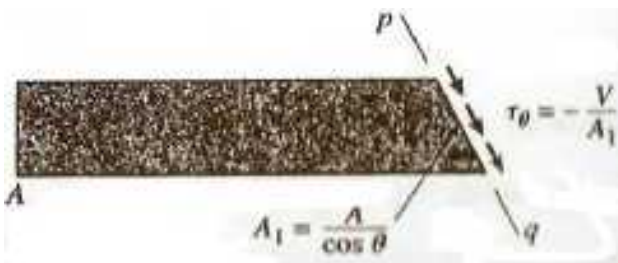
$$\begin{cases} n = Peq \\ V = P \sin q \end{cases}$$

مساحت مقطع مایل نیز برابر است با $A_1 = \frac{A}{\cos q}$

از تقسیم نیروهای عمودی و برشی بر مساحت مقطع مایل، تنش‌های عمودی (نرمال) و برشی بدست می‌آیند:



(بصورت کششی مثبت است یا هم جهت با عمود بر مقطع)



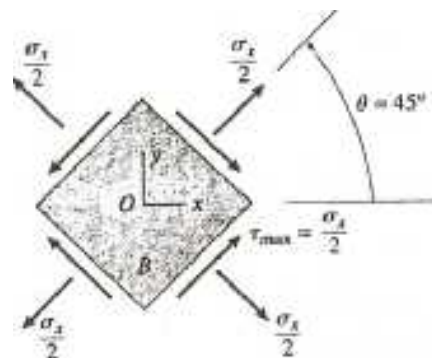
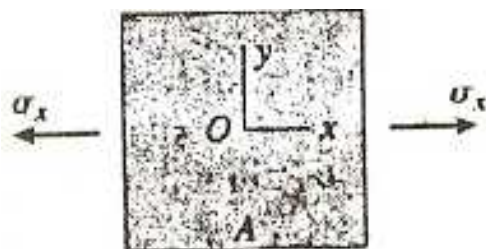
(وقتی مثبت است که تمایل به دوران مثلثاتی داشته باشد)

$$\begin{cases} s_q = \frac{N}{A_1} = \frac{p \cos q}{A / \cos q} = \frac{P}{A} \cos^2 q = s_x e_1^2 q = \frac{s_x}{2} (1 + \cos 2q) \\ s_q = \frac{V}{A_1} = \frac{-P \sin q}{A / \cos q} = -\frac{P}{A} \sin q \cos q = -s_x \sin q \cos q = -\frac{s_x}{2} (\sin 2q) \end{cases}$$

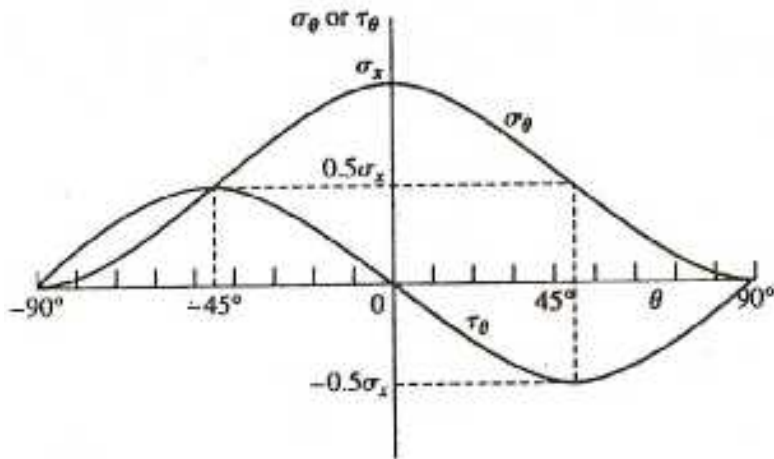
ایندو معادله تنش‌های عمودی (نرمال) و برشی بر روی هر صفحه مایل را نشان می‌دهند و چون از معادلات تعادل استخراج شده و مستقل از نوع ماده‌اند، لذا برای هر نوع ماده خطی یا غیر خطی و ارتجاعی یا غیر ارتجاعی صادقند.

- معمولاً در بررسی تنش‌ها از یک المان مکعبی بنام المان تنش استفاده می‌کنیم.

روی سطوح عمود بر هم تنش‌های برشی با هم برابرند:

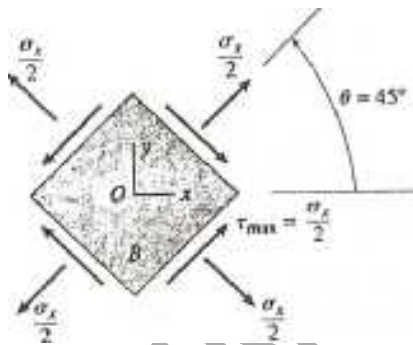


منحنی تغییرات σ_θ , τ_θ به شکل زیر است:



تنش عمودی در $q = 0$ برابر σ_x است و با افزایش یا کاهش q تنش نرمال کاهش یافته و در $q = \pm 90^\circ$ به صفر می‌رسد (تنش عمودی بر روی مقاطع موازی با محور طولی میله صفر است) و در $q = \pm 45^\circ$ ، تنش عمودی بر نصف مقدار حداکثر خود می‌رسد ($\frac{\sigma_x}{2}$)

تنش برشی در $q = 0$ و $q = \pm 90^\circ$ صفر است و در $q = \pm 45^\circ$ به حداکثر مقدار خود می‌رسد $\frac{\sigma_x}{2}$ اگر یک المان با زاویه 45° را در نظر بگیریم:



تنش عمودی نیز روی هر چهار وجه برابر $\frac{\sigma_x}{2}$ می‌باشد و مثبت.

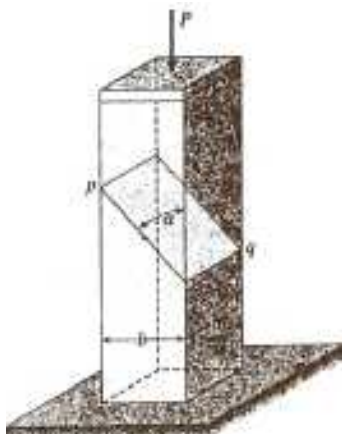
تنش برشی نیز روی هر چهار وجه به حداکثر مقدار خود رسیده و برابر $\frac{\sigma_x}{2}$ می‌باشد.

- در حالتی که میله تحت فشار باشد، تنش σ_x فشاری و منفی خواهد بود و نیز جهت همه تنش‌های موثر بر المان، عکس جهت‌های فوق خواهند بود.

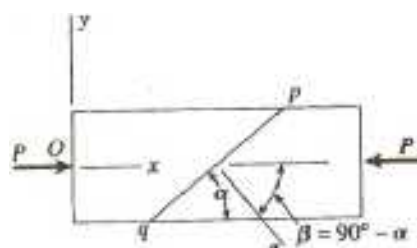
اگر چه تنش برشی حداکثر در یک میله تحت فشار محوری تنها نصف تنش عمودی می‌باشد ولی اگر مقاومت ماده در برش بسیار کمتر از مقاومت در برابر کشش باشد، تنش برشی موجب گسیختگی ماده خواهد شد. این رفتار در کشش فولاد نرم نیز مشاهده می‌شود (خطوط لودرز).



3-7 مثال؟



یک میله ی فشاری با مقطع مربعی به ضلع b باید نیرویی معادل $p=8000lb$ را تحمل نماید دو بخش میله توسط یک اتصال چسبی در امتداد صفحه ی pq که با خط قائم زاویه $\alpha=40$ میسازد به یکدیگر متصل شده اند. میله از یک ماده ی پلاستیکی ساخته شده که تنش مجاز آن در فشار و برش به ترتیب برابر است با: $1100psi$ و $600psi$. به علاوه تنش مجاز فشاری و برشی در اتصال چسبی نیز به ترتیب $750psi$ و $500psi$ میباشد. حداقل مقدار b را برای میله پیدا کنید؟



$$a = 40^\circ \longrightarrow q = -50^\circ \text{ [جهت مثبت } q : q \text{]}]$$

محاسبه σ_x بر اساس تنش های مجاز پلاستیک:

حداکثر تنش فشاری در مقطع عرضی میله رخ می دهد: $\sigma_x = -1100psi$

حداکثر تنش برشی نیز بر روی صفحه 45° رخ می دهد: $\sigma_x = -1200psi \rightarrow \frac{-\sigma_x}{2} = 600$

محاسبه σ_x بر اساس تنش های مجاز در اتصال چسبی:

در حالت فشار و با زاویه $q = -50^\circ$ داریم:

$$\sigma_x = \frac{-(-500)}{\sin -50 \cdot \cos -50} = -1015 \text{ psi}$$

$$\text{Min } \sigma_x = 1015psi$$

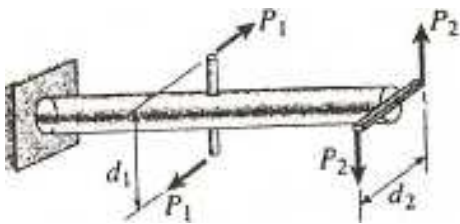
$$A = \frac{8000 \text{ lb}}{1015 \text{ psi}} = 7.88 \text{ in}^2$$

$$b_{\min} = \sqrt{A} = \sqrt{7.88} = 2.807 \text{ in} \longrightarrow b = 3 \text{ in}$$

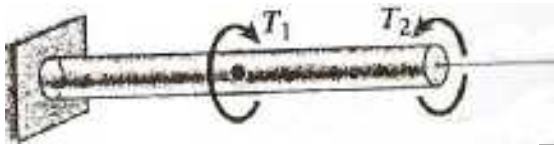
فصل چهارم: پیچش



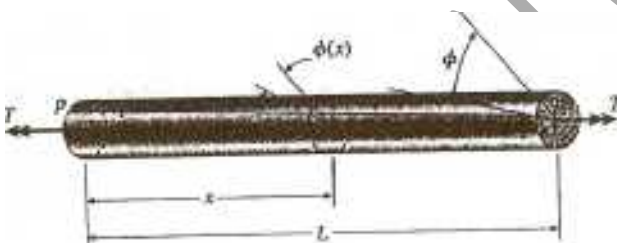
هنگام چرخاندن یک پیچ گوشتی، دست به دسته پیچ گوشتی یک گشتاور اعمال کرده و میله آنرا می پیچاند. این گشتاور اعمالی را گشتاور (لنگر) پیچشی می نامند. (Twisting moment)



اجزاء استوانه‌ای شکل را که از طریق پیچش قدرت را منتقل می‌کنند، شفت می‌نامند.



۳- تغییر شکلهای پیچشی میله‌های مدور:

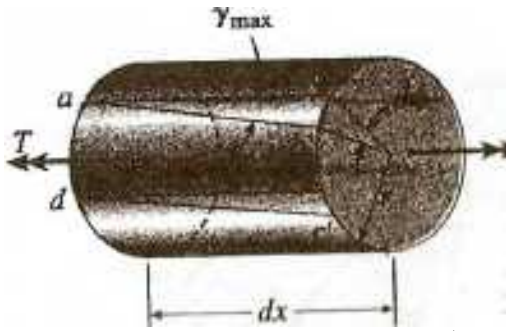


یک میله با سطح مقطع دایروی را تحت لنگر پیچشی T در نظر می‌گیریم. از آنجا که همه سطح مقطع‌های میله یکسان و گشتاور وارده به هر مقطع نیز یکسان است، میله تحت پیچش خالص قرار دارد.

بعلت تقارن هر مقطع مسطح پس از چرخش حول محور طولی خود مسطح باقی می‌ماند و تغییر شکل نمی‌دهد. بعبارت دیگر همه مقاطع گرد، و همه خطوط شعاعی، مستقیم باقی می‌مانند و نیز اگر زاویه چرخش بین دو انتهای میله کوچک باشد، در طول و شعاع میله تغییری حاصل نمی‌شود.

برای درک بهتر فرض می‌کنیم که انتهای سمت چپ میله در جای خود ثابت شده و بر اثر لنگر T ، انتهای سمت راست نسبت به انتهای سمت چپ، به اندازه زاویه f دوران می‌کند. آنرا زاویه چرخش (twist angle) می‌نامند.

در پیچش خالص، زاویه چرخش بین دو انتهای میله بصورت خطی تغییر می‌کند ($f(x)$)



حال یک جزء کوچک از میله بطول dx را در نظر می‌گیریم. روی سطح خارجی این المان، جزء

حال یک جزء کوچک از میله بطول dx را در نظر می‌گیریم. روی سطح خارجی این المان، جزء کوچک $abcd$ با اضلاع موازی

محور طولی را در نظر می‌گیریم. در جریان پیچش، مقطع سمت راست المان نسبت به مقطع سمت چپ به اندازه df می‌چرخد. طول اضلاع جزء کوچک در حالت برش خالص قرار دارد و دچار اعوجاج شده است. مقدار کرنش برش ϕ_{max} برابر است با:

$$\phi_{max} = \frac{bb'}{ab} \quad (\phi = t \phi) \quad \text{(چون زاویه کوچک است)}$$

$$\phi_{max} = \frac{r df}{dx}$$

کمیت $\frac{df}{dx}$ نرخ تغییر زاویه پیچش (f) را نسبت به x نشان می‌دهد، آنرا با q نشان داده و زاویه

پیچش در واحد طول یا نرخ چرخش می‌نامند: $q = \frac{dq}{dx}$

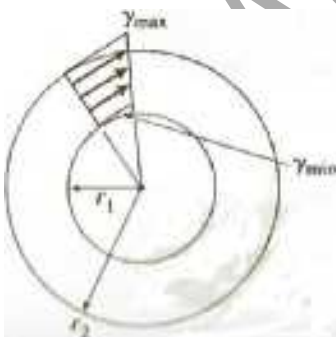
معادله کرنش برشی در سطح خارجی میله: $\phi_{max} = r q$

در حالت کلی f و q هر دو نسبت به x تغییر می‌کنند ولی در پیچش خالص، نرخ پیچش ثابت است و برابر است با:

$$q = \frac{q}{L} \Rightarrow \phi_{max} = \frac{r f}{L}$$

کرنش برشی در نقاط داخلی میله نیز بروش فوق قابل محاسبه است:

$$\phi = e q = \frac{e}{r} \phi_{max}$$



این معادله نشان می‌دهد که کرنش برشی در یک مقطع گرد نسبت به فاصله

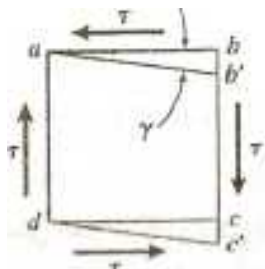
شعاعی از مرکز، بصورت خطی تغییر می‌کند. $\phi_{min} = \frac{r_1}{r_2} \phi_{max}$

نکته: توزیع کرنش برشی فقط بهش کل هندسی مقطع بستگی دارد.

میله‌های مدور با مصالح ارتجاعی خطی:



گشتاور T موجب دوران انتهای سمت راست میله در خلاف حرکت عقربه‌های ساعت می‌شود لذا تنش‌های برشی روی المان انتخاب شده، مطابق شکل خواهند بود روی این جزء کوچک داریم:



اگر مصالح ما ارتجاعی خطی باشد $\sigma = G\gamma$

$$\phi_{\max} = r\theta \Rightarrow t_{\max} = Gr\theta$$

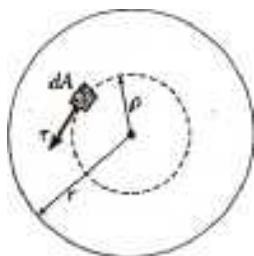
$$t = Gr\theta = GP \frac{t_{\max}}{Gr} \Rightarrow t = \frac{r}{R} t_{\max}$$

پس توزیع تنش برشی نسبت به فاصله از مرکز مقطع بطور خطی تغییر می‌کند این خطی بودن تغییر تنش از تبعات قانون هوک است.

علاوه بر تنش‌های برشی که در مقطع عرضی میله بوجود می‌آیند، روی صفحات طولی میله نیز تنش‌های برشی ایجاد می‌شوند، چرا که روی صفحات متعامد تنش‌های برشی با هم برابرند و مقدار این تنش ایجاد شده روی صفحه طولی از مرکز به سمت جدار خارجی میله افزایش می‌یابد.

فرمول پیچش:

تعیین رابطه‌ای بین تنش برشی و گشتاور T



روی یک مقطع عرضی، توزیع تنش‌های برشی بصورت پیوسته است و برآیند آنها همان لنگر T خواهد بود. بریا محاسبه این برآیند، جزء سطح dA را در نظر می‌گیریم.

$$dM = (t dA) r = trdA \xrightarrow{t = \frac{r}{R} t_{\max}} dM = \frac{t_{\max}}{R} r^2 dA$$

$$T = \int_A dM = \frac{t_{\max}}{R} \int_A r^2 dA$$

$$\int_A r^2 dM = I_p \leftarrow \text{گشتاور اینرسی قطبی یا ممان اینرسی قطبی}$$

برای یک مقطع دایروی:

$$I_P = \frac{pr^4}{2} = \frac{pd^4}{32}$$

$$T = \frac{t_{\max}}{r} I_P$$

$$t_{\max} = \frac{T.r}{I_P} \quad \leftarrow \quad \text{فرمول پیچش:}$$

$$[T(N.m), r(m), I(m^4), t(N/m^2)]$$

$$\text{برای مقطع دایره توپر: } t_{\max} = \frac{T \cdot d/2}{\frac{pd^4}{32}} = \frac{16T}{pd^3}$$

تنتش برشی در فاصله ρ از مرکز میله:

$$t = \frac{r}{r} t_{\max} = \frac{r T.r}{r I_P} = \frac{T.r}{I_P}$$

زاویه پیچش:

$$t_{\max} = \frac{T.r}{I_P} \quad \text{و} \quad t_{\max} = Grq \quad \text{داریم:}$$

$$\Rightarrow Grq = \frac{T.r}{I_P} \Rightarrow q = \frac{T}{GI_P}$$

GI_P صلبیت پیچشی (torsional rigidity)

$$f = qL = \frac{TL}{GI_P} \quad \text{زاویه پیچش کلی}$$

$\frac{GI_P}{L}$ سختی پیچشی (torional stiffness)

گشتاور مورد نیاز برای ایجاد زاویه پیچش واحد .

$\frac{L}{GI_P}$ انعطاف پذیری پیچشی (torional flexibility):

زاویه چرخش ایجاد شده توسط یک گشتاور واحد.

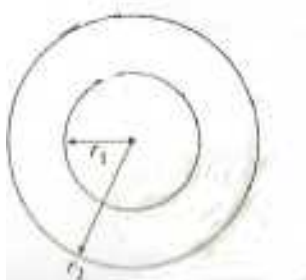
لوله‌های مدور توخالی:

مقاومت لوله‌های مدور توخالی در برابر پیچش بیش از لوله‌های توپر است.

علاوه بر اینکه تنش برشی بر روی سطح خارجی لوله حداکثر می‌شود، در هنگام تعیین گشتاور T، این تنش‌های برشی بعلت بازوی لنگر بیشتر، دارای بیشترین لنگر می‌باشند. بنابراین از نظر وزن و صرفه جویی در مصالح استفاده از لوله‌های توخالی مقرون به صرفه‌تر از لوله‌های توپر است.

تحلیل تنش برشی در لوله‌های توخالی شبیه لوله‌های توپر است.

$$t_{\max} = Grq \quad , \quad t = Grq = \frac{r}{r_{\max}} t_{\max}$$



$$r_1 \leq r \leq r_2$$

$$T = \frac{t_{\max}}{r} I_p \quad , \quad I_p = \int_A r^2 dA$$

حدود انتگرال گیری از

$r = r_2$ تا $r = r_1$ خواهد بود.

$$\text{برای لوله تو خالی: } I_p = \frac{P}{2}(r_2^4 - r_1^4) = \frac{P}{32}(d_2^4 - d_1^4)$$

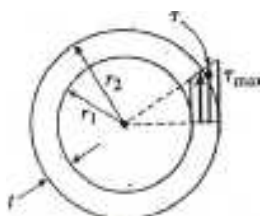
اگر ضخامت دیواره لوله (t) در مقایسه با شعاع آن کوچک باشد، میتوان نوشت:

$$I_p = \frac{P}{2}(r_2^2 + r_1^2)(r_2 + r_1)(r_2 - r_1) \rightarrow I_p \approx \frac{P}{2}.2r^2.2r.t = 2pr^2t$$

r: شعاع متوسط لوله

اگر $t < \frac{r_2}{4}$ باشد، تقریب رابطه فوق کمتر از 2% است.

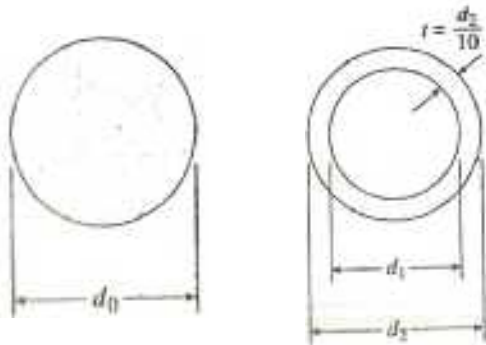
توزیع تنش برشی در لوله ی توخالی:



- معادلات به دست آمده در این بخش را میتوان تنها برای میله‌های مدور توپر و یا تو خالی که رفتار ارتجاعی خطی دارند، مورد استفاده قرار داد و بریا میله‌های غیر مدور با مقاطعی نظیر مستطیل و یا شکل صادف نیستند.

زیرا مقاطع این قبیل میله‌ها پس از پیچش مسطح باقی نمی‌ماند و تنش برشی \max در دورترین فاصله از مرکز سطح مقطع رخ نمی‌دهند.

مثال 4-1؟



قرار است یک شفت فولادی به یک میله مدور توپر و یا تو خالی ساخته شود. این شفت باید گشتاوری برابر $1200N.m$ را منتقل کند بدون آنکه تنش برشی از حد مجاز $40MPa$ و نرخ پیچش از $0.75m$ تجاوز کند:

(a) قطر d مورد نیاز شفت توپر را تعیین کنید؟

(b) قطر خارجی d_2 شفت تو خالی را در صورتی که ضخامت دیواره آن 0.1 قطر خارجی باشد بدست آورید؟

(c) نسبت اقطار شفت های توپرو تو خالی (نسبت $\frac{d_2}{d_0}$) و نیز نسبت وزن آنها را پیدا کنید؟

FARDIN GASEMPOUR

FARDIN GASEMPOUR

پیچش غیر یکنواخت:

پیچش خالص به پیچش میله‌های منشوری اطلاق می‌شود که در دو انتهای خود تحت تأثیر گشتاور قرار می‌گیرند. در صورتی که میله منشوری نباشد و اعمال گشتاور در هر مقطع در امتداد محور میله ممکن باشد، پیچش را غیر یکنواخت می‌نامند.

حالت اول



میله از قطعات منشوری تشکیل یافته و هر قطعه تحت پیچش خالص قرار دارد

در هر یک از قطعات با استفاده از فرمولهای پیچش خالص، میتوان تنش برشی و زاویه پیچش را محاسبه نمود.

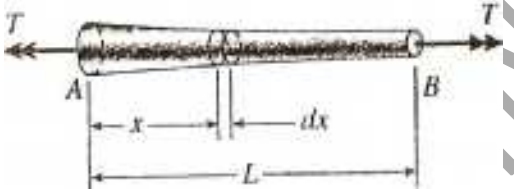


برخی از گشتاورهای و زوایای پیچش متناظر آنها ممکن است مثبت و بعضی دیگر منفی باشند که جمع جبری زوایا برابر است با زاویه پیچش کل میله .

$$f = \sum f_i = \sum \frac{T_i L_i}{G I_i p_i}$$

زاویه پیچش کل میله

حالت دوم:



سطح مقطع میله بطور پیوسته تغییر می‌کند و گشتاور ثابت است

برای جزء کوچک بطور dx در فاصله x از انتهای میله، زاویه پیچش df برابر است با:

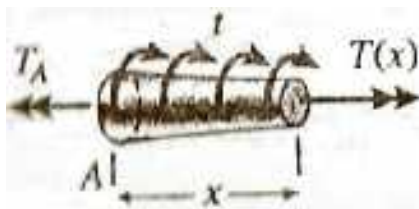
$$df = \frac{T dx}{G I_p(x)}$$

$$f = \int_0^L df = \int_0^L \frac{T dx}{G I_p(x)}, \quad t_{\max} = \frac{T \cdot r}{I_p} \xrightarrow{I_p = \frac{\pi d^4}{32}} t_{\max} = \frac{16T}{\pi d^3}$$

تنش برشی max در مقطعی رخ می‌دهد که دارای xین قطر است.

حالت سوم:

سطح مقطع میله گشتاور هر دو بطور پیوسته تغییر می‌کنند.



تنش حداکثر را تعیین نمود

$$t = \frac{T(x).r(x)}{I_p(x)}$$

پس از تعیین رابطه تنش برشی بر حسب x ، میتوان مقطع تنش برشی حداکثر و

تنش حداکثر را تعیین نمود

زاویه پیچش نیز برابر است با:

$$f = \int_0^L df = \int_0^L \frac{T(a)dx}{G I_p(x)}$$

این انتگرال در حالت‌های خاص بصورت تحلیلی قابل حل است و اغلب محاسبه آن مستلزم روش‌های عددی است.

- محدودیت‌ها:

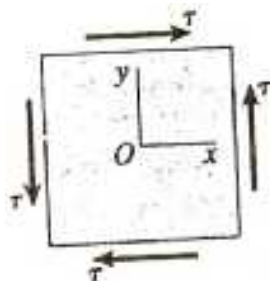
تحلیل‌های ارائه شده در این بخش تنها برای میله‌های مدور تو خالی یا توپر که از مصالح ارتجاعی خطی ساخته شده‌اند، معتبرند و نیز در نواحی دور از محل تمرکز تنش، مثل جایی که قطر دچار تغییر ناگهانی شود، گشتاور متمرکز وارد شود و نیز این روابط برای میله‌های منشوری بدست آمده‌اند و زمانی میتوان برای میله‌های مخروطی بکار برد که تغییرات قطر تدریجی و کوچک باشد. (زاویه مخروط کمتر از 10 باشد)

تنش و کرنش در برش خالص:



می‌خواهیم تنش‌ها و کرنش‌های ایجاد شده در اثر پیچش میله را بطور مفصل‌تر بررسی کنیم.

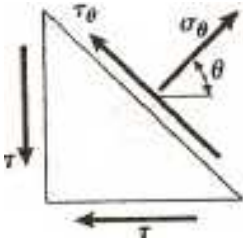
جزء کوچک $abcd$ از میله را که بین دو مقطع عرضی و دو صفحه طولی محصور است در نظر می‌گیریم این جزء در برش خالص قرار داد و جهت تنش‌های برشی نیز با توجه به جهت گشتاور T ، مطابق شکل است.



در اینجا تمامی تنش‌های برشی ایجاد شده مثبت می‌باشند چرا که روی یک وجه مثبت، تنش برشی زمانی مثبت است که در جهت مثبت یکی از محورها باشد

وجه مثبت: وجهی است که عمود خارج شده از آن در امتداد مثبت یکی از محورها باشد.

تنش روی مقطع مایل:



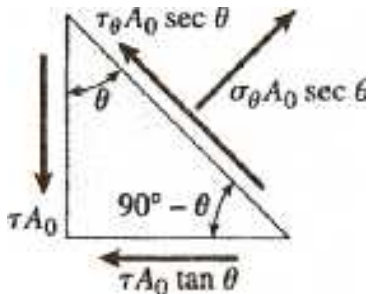
از المان تنش صفحه‌ای فوق یک المان گوه‌ای یا مثلثی شکل جدا می‌کنیم بطوریکه وجه مایل (بردار نرمال وجه مایل) با محور x زاویه q بسازد.

تنش روی وجه مایل:

σ_θ زمانی مثبت است که در جهت عمود بر سطح باشد و τ_θ زمانی مثبت است که تمایل به دوران مثلثاتی داشته باشد.

ستش‌های وجه مایل را میتوان با استفاده از تعادل المان مثلثی بدست آورد.

اگر مساحت وجه جانبی را A_0 فرض کنیم نیروهای اعمال شده روی وجوه المان مطابق شکل خواهند بود:



حال میتوان برای المان، دو معادله تعادل در جهت σ_θ و τ_θ نوشت:

$$\sigma_\theta \cdot A_0 \sec q = t A_0 \sin q + t A_0 t g q + t A_0 t g q \sin\left(\frac{p}{2} - q\right)$$

$$S_q A_0 \frac{1}{\cos q} = t A_0 \sin q + t A_0 \frac{\sin q}{\cos q} \cos q = 2t \sin q$$

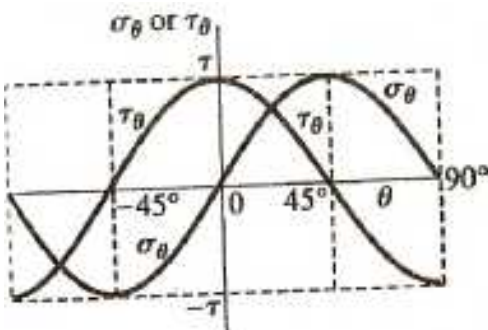
$$S_q = 2t \sin q \cos q \longrightarrow S_q = t \sin 2q$$

$$t_q A_0 \sec q = t A_0 \cos q - t A_0 t g q \cos q \left(\frac{p}{2} - q\right)$$

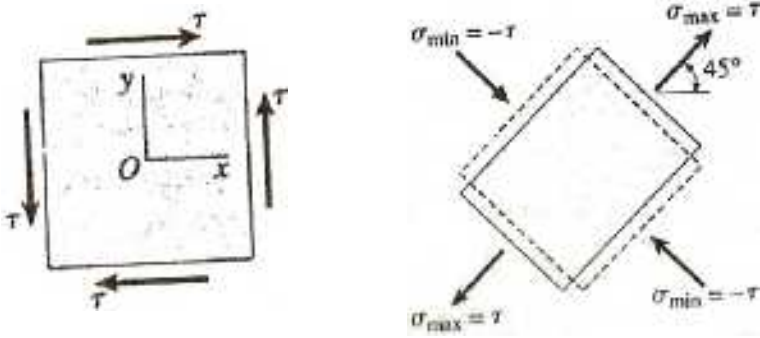
$$t_q A_0 \frac{1}{\cos q} = t A_0 \cos q - t A_0 \frac{\sin q}{\cos q} \sin q$$

$$t_q = t(\cos^2 q - \sin^2 q) \longrightarrow t_q = t \cos 2q$$

منحنی تغییرات σ_θ و τ_θ (در حالت برش خالص):



چ در یک المان تحت زاویه 45:



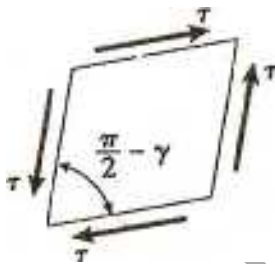
تنش برش روی تمامی وجوه صفر است و تحت تأثیر دو تنش کششی و فشاری عمود بر هم قرار داده معادلات این بخش برای هر المان تحت برش خالص (اعم از میله تحت پیچش یا دیگر اجزاء سازه) و برای هر نوع ماده معتبرند چرا که بر اساس معادلات تعادل استخراج گردیده‌اند.

چ در یک میله تحت پیچش:



اگر مقاومت کششی ماده کمتر از مقاومت برشی آن باشد، گسیختگی در اثر کشش اتفاق خواهد افتاد و روی صفحه با زاویه 45 (تنش کششی max) و ترکها در امتداد یک سطح مارپیچ 45 ظاهر خواهند شد.

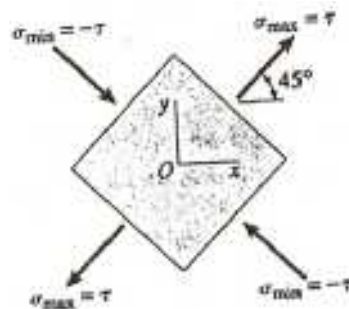
چ کرنش در برش خالص:



رابطه بین تنش و کرنش برشی طبق قانون هوک: $t = G \cdot \phi$

در این حالت قطر 45 المان دچار افزایش طول و قطر 135 دچار کاهش طول می‌شود

در یک المان 45 داریم:



وجود تنش‌های کشش در امتداد 45 موجب افزایش طول و بعثت تأثیر ضریب پواسون موجب کاهش طول المان در امتداد 135 می‌شود همین طور برای امتداد 45- تنش‌های فشاری موجب کاهش طول و برای امتداد عمود آن موجب افزایش طول می‌شوند

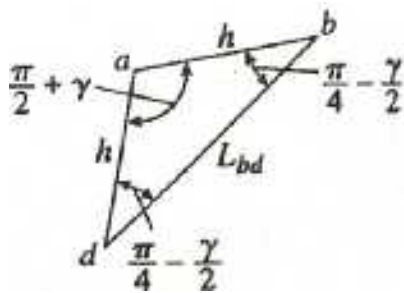
(چون تنش عمودی max است پیش کرنش نیز max است)

در امتداد 45° :
$$e_{\max} = \frac{S_{\max}}{E} + u \frac{S_{\min}}{E} = \frac{t}{E} + \frac{u.t}{E}$$

$$e_{\max} = \frac{t}{E}(1+u)$$

در امتداد -45° :
$$e_{\max} = -\frac{t}{E}(1+u)$$

پس برش خالص موجب افزایش طول در امتداد 45° و کاهش طول در امتداد 135° می‌شود که این کرنش‌ها با تغییر شکل المان تحت تنش‌های برشی (-45°) سازگار است. زیرا قطر 45° بلند و قطر 135° کوتاه شده است.



با بررسی تغییر شکل المان abcd داریم:

طول اولیه اضلاع المان: h

قطر مربع در حالت اولیه: $\sqrt{2}h$

پس از تغییر شکل المان، قطر bd بلندتر خواهد شد: $L_{bd} = \sqrt{2}h(1+e_{\max})$

از قانون کسینوسها: $L_{bd}^2 = h^2 + h^2 - 2h^2 \cos(P/2 + \phi)$

با جاگذاری مقدار L_{bd} : $2h^2(1+e_{\max})^2 = 2h^2(1 - \cos(P/2 + \phi))$

ϕ و e بسیار کوچکند:

$$1 + 2e_{\max} + e_{\max}^2 = 1 + \sin \phi \xrightarrow{e_{\max}^2 \approx 0, \sin \phi \approx \phi}$$

$$1 + 2e_{\max} = 1 + \phi \Rightarrow e_{\max} = \frac{\phi}{2}$$

$$\begin{cases} e_{\max} = \frac{C}{E}(1+\nu) \\ \phi = \frac{C}{G} \end{cases} \quad \frac{C}{E}(1+\nu) = \frac{C}{2G}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

؟ مثال 2-4



یک لوله به قطر خارجی 80mm و قطر داخلی 60mm تحت تاثیر گشتاور قرار دارد. این لوله از جنس آلیاژ آلومینیومی $T_6 7075$ میباشد.

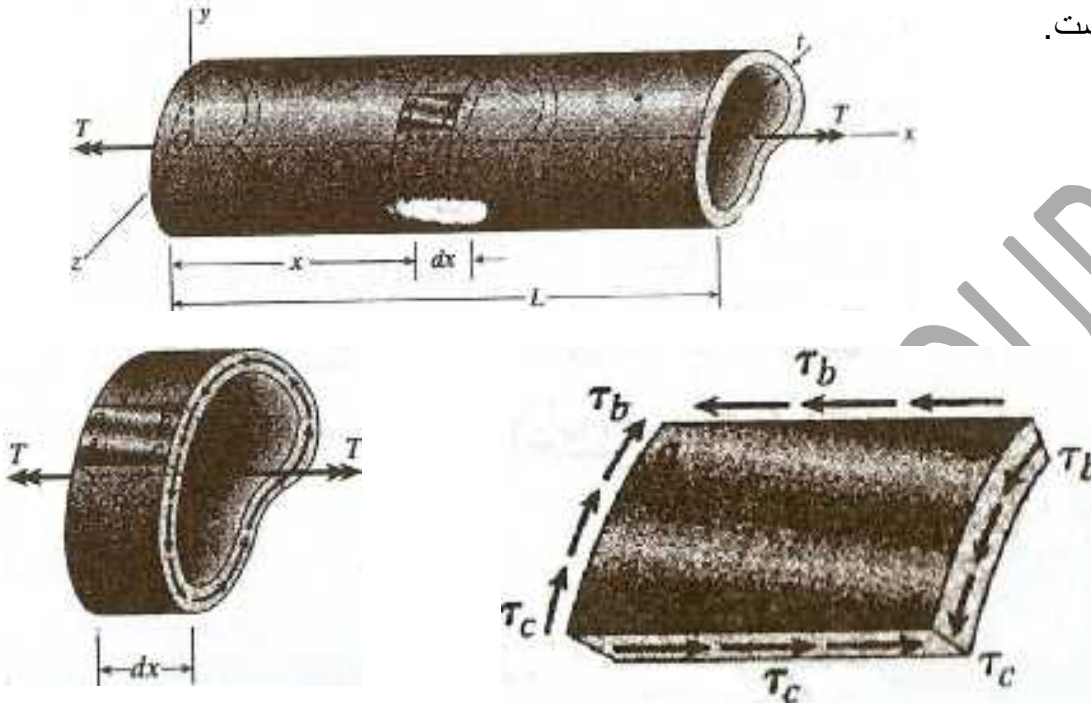
(a) تنش های کششی، فشاری و برشی حداکثر را در لوله بدست آورید و آنها را بر روی المانهای که در امتداد صحیح رسم شده اند نشان دهید.

(b) کرنش های حداکثر مربوط به تنش های مزبور را نشان دهید؟

FARDIN GASEMPOUR

لوله‌های جدار نازک (مقاطع غیر مدور)

یک لوله جدار نازک با مقطع دلخواه و تحت پیچش را در نظر می‌گیریم. این لوله استوانه‌ای شکل است، یعنی همه مقاطع آن یکسان و محور طولی آن یک خط مستقیم است ضخامت جدار لوله هم لزوماً ثابت نیست.

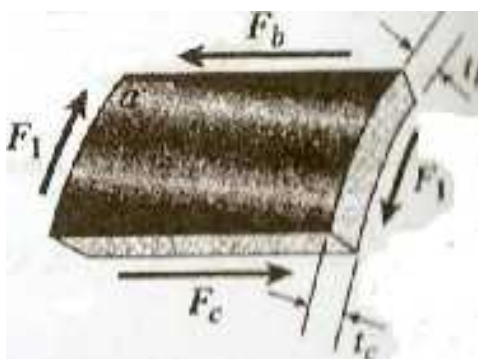


تنش‌های برشی ح بر روی سطح مقطع لوله و به موازات لبه‌های سطح مقطع اثر می‌کنند و حول سطح مقطع جریان می‌یابند لنگر این تنش‌ها حول مرکز مقطع، همان لنگر T خواهد شد. از آنجا که جدار لوله نازک است پس تغییرات تنش در عرض ضخامت لوله ناچیز است و میتوان تنش برش ح را در امتداد ضخامت لوله ثابت فرض نمود. در صورتیکه ضخامت لوله در نقاط b و c یکسان نباشد شدت تنش نیز یکسان نخواهد بود (τ_b و τ_c)

المان abcd را بصورت جسم آزاد بررسی می‌کنیم:

چون ضخامت لوله یکسان نیست پس تنش برشی در نقاط b و c برابر است با t_b و t_c و روی وجوه طولی ab و cd چون ضخامت ثابت است پس تنش برابر است با t_b و t_c .

جهت بررسی تعادل المان باید نیروهای موثر بر وجوه المان را تعیین کنیم:



$$F_b = t_b \cdot t_b \cdot dx$$

$$F_c = t_c \cdot t_c \cdot dx$$

نیروهای اعمال شده در وجوه bc و ad نیز برابرند چون هم تنش‌ها و هم مساحت‌های دو وجه با هم برابرند.

$$F_b = F_c \Rightarrow t_b \cdot t_b = t_c \cdot t_c$$

از تعادل المان در امتداد x

این حاصلضرب را جریان برش می‌نامند که مقدار یست ثابت $f = \uparrow t \cdot t \downarrow$

(تنش max در ضخامت cin رخ می‌دهد)

تعیین رابطه بین تنش برشی و گشتاور T:

از سطح مقطع لوله، یک المان بطول ds و ضخامت t را در نظر می‌گیریم. طول ds روی خط میانی انداز مگیری می‌شود و فاصله s معرف فاصله المان در امتداد خط مرکزی از یک نقطه دلخواه بعنوان مبدأ می‌باشد نیروی برش سبب که روی المان فوق اثر می‌کند برابر است با:

$$t \cdot t \cdot ds = f \cdot ds$$

و لنگر آن حول مرکز مقطع:

$$dT = r \cdot f \cdot ds$$

$$T = \int dT = f \int_0^{L_m} r \cdot ds$$

این انتگرال با یک تعبیر هندسی بسادگی قابل محاسبه است:

دو برابر مساحت مثلث هاشور خورده $r \cdot ds \leftarrow$

$$\int_0^{L_m} r \cdot ds$$

(A_m سطحی است که توسط خط میانی محصور شده است) دو برابر مساحت A_m

$$T = f(2A_m) = 2f_{A_m} \longrightarrow \begin{cases} f = \frac{T}{2A_m} \\ f = t \cdot t \end{cases} \Rightarrow t = \frac{T}{2 \cdot t \cdot A_m}$$

چبرای یک لوله مدور تو خالی:

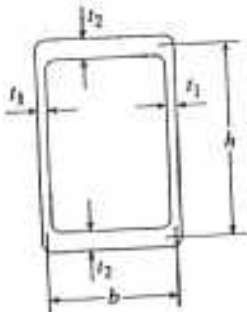
$$A_m = pr^2 \longrightarrow t = \frac{T}{2.t.pr^2} = \frac{T}{2pr^2t}$$

با استفاده از روابط قبلی مهم داشتیم:

$$t = \frac{T.r}{I_p}, \quad I_p \approx 2pr^3t$$

$$t = \frac{T.r}{2pr^3t} = \frac{T}{2pr^2t}$$

چدر مورد یک لوله جدار نازک با مقطع مستطیل:



$$A_m = bh$$

$$f = t_h.t_1 = t_v.t_2$$

$$f = \frac{T}{2A_m} = \frac{T}{2bh}$$

پس تنش max در قسمت افقی اتفاق می افتد.

فصل پنجم: تنش در تیرها

می‌دانیم که در تیرها در اثر بارهای وارده نیروهای برشی و لنگرهای خمشی ایجاد می‌شود می‌خواهیم تنش‌ها و کرنش‌هایی را که در اثر این نیروهای برشی و لنگرهای خمشی ایجاد می‌شود را بررسی کنیم.



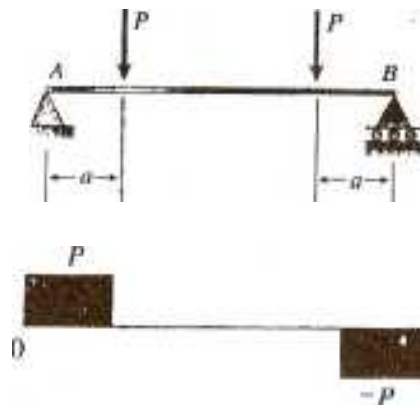
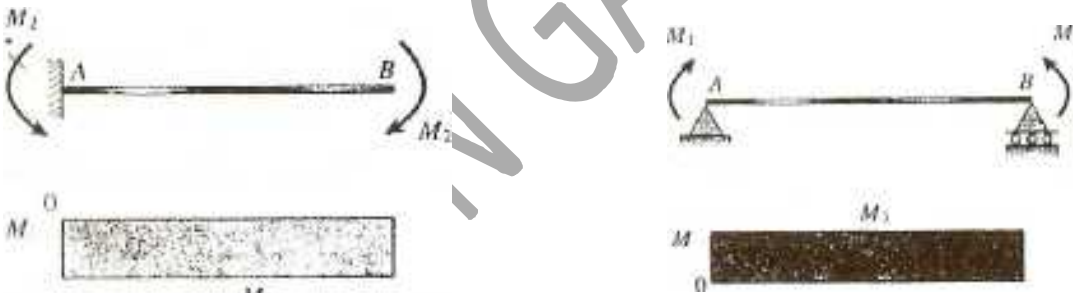
میان‌تار مستقیم اولیه تیر پس از بارگذاری بصورت یک منحنی بنام منحنی تغییر مکان در می‌آید.

مطابق قبل فرض می‌کنیم تیر نسبت به صفحه xy متقارن است و بارهای وارده در صفحه xy عمل می‌کنند. لذا تغییر مکانها نیز در همین صفحه (صفحه خمشی) خواهند بود.

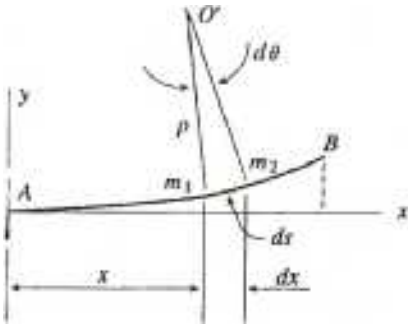
خمش خالص و خمش غیر یکنواخت:

خمش خالص مربوط به حالتی است که تیر تحت لنگر خمشی ثابت قرار می‌گیرد لذا در اینجاست نیروی برشی برابر با صفر است ($V = \frac{dM}{dx}$) در صورت وجود نیروی برشی در تیر خمش غیر یکنواخت ایجاد می‌گردد که در آن در طول محور تیر، لنگر خمشی تغییر می‌یابد.

نمونه‌هایی از خمش خالص:



انحناء تیر:



تیر طرة AB تحت بار متمرکز P را در نظر می‌گیریم دو نقطه m_1 و m_2 را روی منحنی تغییر مکان تیر در نظر می‌گیریم. از این نقاط بر مماس بر منحنی، عمود رسم می‌کنیم. این عمودها یکدیگر را در o' که مرکز انحناء منحنی تغییر شکل نامیده می‌شود، قطع می‌کنند.

فاصله $m_1 o'$ را شعاع انحناء (r) و عکس شعاع انحناء را، انحناء (K) می‌نامند.

در واقع انحناء شدت خمیدگی تیر را نشان می‌دهد.

$$\text{انحناء } K = \frac{1}{r} \Rightarrow$$

$$ds = rdq \longrightarrow \frac{1}{r} = \frac{dq}{ds}$$

$$K = \frac{1}{r} = \frac{dq}{dx}$$

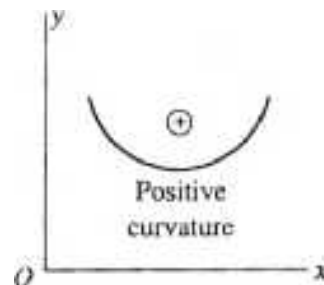
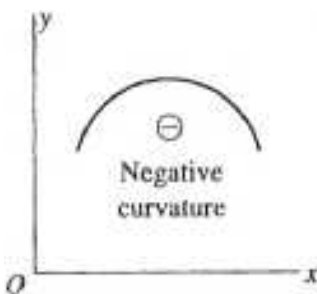
این رابطه به لحاظ ریاضی برای هر نوع منحنی برقرار است و اگر مقدار انحناء در طول منحنی ثابت باشد، شعاع انحناء نیز ثابت خواهد بود و در آنصورت منحنی بخشی از یک دایره است.

چون تغییر شکلهای مورد بررسی خیلی کوچکند میتوان فرض کرد: $ds = dx$

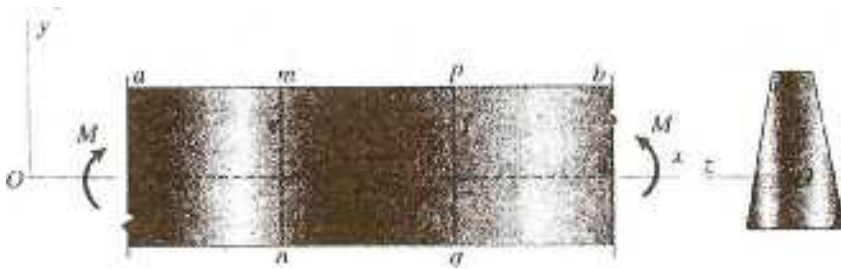
$$K = \frac{1}{r} = \frac{dq}{dx}$$

انحناء شعاع انحناء هر دو تابعی از x می‌باشند لذا مرکز انحناء تیر (نقطه o') نیز تابعی از x است.

قرارداد علامت برای انحناء تیر:



چگونگی کرنش‌های طولی در تیرها:



بخشی از یک تیر را تحت اثر خمش خالص در نظر می‌گیریم فرض می‌کنیم که میان‌تار (محور طولی) تیر در ابتدا مستقیم و محور y محور تقارن مقطع باشد.

قضیه: هر مقطع مسطح عمودی مانند mn (مسطح و عمود بر میان‌تار)

پس از خمش نیز مسطح و عمود بر میان‌تار تغییر شکل یافته باقی می‌ماند (در خمش خالص)

در اثر خمش مقاطع mn و pq نسبت بهم دوران کرده لذا تارهای پایینی تیر کشیده شده و تارهای بالا فشرده می‌شوند. (پایین تیر تحت کشش و بالای تیر تحت فشار قرار می‌گیرد در حد فاصل بخش تحتانی و فوقانی تیز، صفحه‌ای وجود دارد که تغییر طول نمی‌دهد، آنرا سطح خنثی می‌نامند فصل مشترک این صفحه با هر مقطع عرضی، محور خنثی (تار خنثی) مقطع نامیده می‌شود.

امتداد دو مقطع mn و pq همدیگر را در مرکز انحنا o' قطع می‌کنند و فاصله o' تا سطح خنثی برابر شعاع انحنا (r) می‌باشد.

فاصله دو مقطع (dx) روی صفحه خنثی ثابت باقی می‌ماند و برابر است با: $dx = rdq$

ولی سایر تارهای طولی یا کشیده و یا فشرده می‌شوند و لذا در آنها کرنش قائم ایجاد می‌شود (e_x)

جهت بررسی کرنش قائم تار دلخواه ef را به موازات سطح خنثی و در فاصله y از تار خنثی در نظر می‌گیریم طول تار ef پس از خمش برابر است با:

$$L_1 = (r - y)dq = (r - y)\frac{dx}{r} = dx - \frac{y}{r}dx$$

$$\Delta L = L_1 - L = (dx - \frac{y}{r}dx) - dx = -\frac{y}{r}dx$$

$$e_x = \frac{\Delta L}{L} = \frac{-\frac{y}{r}dx}{dx} \Rightarrow e_x = -\frac{y}{r} = -Ky$$

- پس کرنش طولی متناسب است با انحناء تیر و متناسب است با فاصله از تار خنثی

- در بالای تار خنثی، y مثبت است و انحناء نیز مثبت پس (e_x) منفی خواهد شد.

- در پایین تار خنثی، y منفی است و انحناء نیز مثبت پس (e_x) مثبت خواهد شد.

- معادله فوق برای کرنش قائم از شکل هندسی تیر تغییر شکل یافته استخراج گردیده و مستقل از خواص مصالح می‌باشد، لذا در هر تیر تحت خمش خالص و با هر نوع مصالحی برقرار است.

مثال 1-5

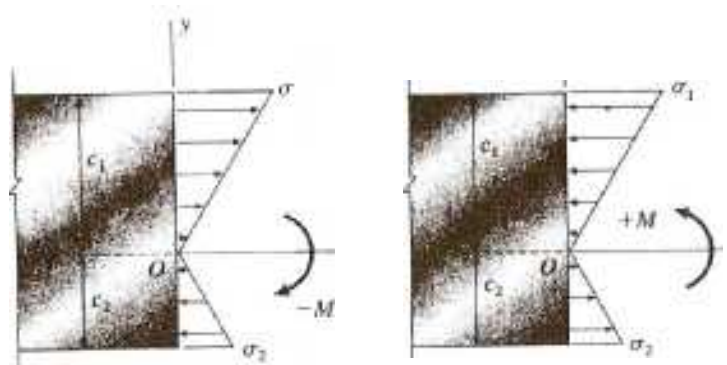
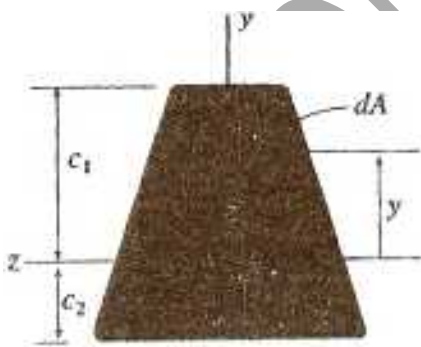
تیر ساده AB به طول $L=16$ در اثر اعمال لنگر M_B تغییر مکان پیدا میکند. این تغییر مکان بصورت کمانی از یک دایره می‌باشد و در شکل نشان داده شده است. خیز تیر در وسط با δ مشخص گردیده است. کرنش طولی اندازه گیری شده در سطح پایینی تیر برابر 0.00125 می‌باشد که برابر کرنش تسلیم فولاد است. فاصله تار خنثی تا تار پایینی تیر برابر 6in می‌باشد. مطلوبست محاسبه شعاع انحناء ρ و انحناء k و تغییر مکان وسط دهانه ی تیر؟



تنش قائم در تیرها:

فرض می‌کنیم که تیر از مصالح ارتجاعی خطی ساخته شده است از آنجائیکه توزیع کرنش در مقطع خطی است $(e_x = -\frac{y}{r})$ پس مطابق با قانون هوک توزیع تنش نیز در مقطع خطی خواهد بود.

$$S_x = Eex = -\frac{E y}{r} = -EKy$$



با فرض انحاء مثبت، در بالای تار خنثی منفی (فشاری) و پایین آن مثبت (کششی) خواهد بود.

این تنش‌های عمودی وارد بر مقطع، دارای 2 برآیند می‌باشند:

(1) نیرویی در امتداد محور x

(2) لنگر خمشی حول محور z

در شرایط خمش خالص، مقدار نیروی محوری برابر صفر است برآیند لنگر تنش‌ها حول محور Z نیز برابر لنگر خمشی مقطع است

تبادل مقطع را بررسی می‌کنیم:

جزء سطح dA را در فاصله y از تار خنثی در نظر می‌گیریم تنش σ_x روی آن عمل می‌کند نیروی اعمالی در جزء سطح برابر است با: $s_x dA$

از آنجا که نیروی برآیند وارده بر مقطع تیز صفر است پس: $\int_A s_x dA = 0$

$$\int_A s dA = \int_A -Eky dA = 0 \xrightarrow{K, E} -Ek \int_A y dA = 0$$

$$\Rightarrow \int_A y dA = 0$$

$\int_A y dA$ همان لنگر اول سطح یا لنگر استاتیکی سطح نسبت به محور Z است

$$\int_A y dA = A\bar{y} = 0 \Rightarrow \bar{y} = 0$$

پس رابطه فوق بیانگر آنست که محور Z باید از مرکز سطح مقطع عبور کند و چون محور Z، تار خنثی است، پس نتیجه اینکه: در مقاطعی که بار محوری نداریم و مصالح ارتجاعی خطی است، تار خنثی از مرکز سطح مقطع می‌گذرد لذا تعیین تار خنثی امر نسبتاً ساده‌ایست.

از آنجاییکه محور y ، محور تقارن است پس از مرکز سطح مقطع عبور می‌کند. پس مرکز مختصات (نقطه 0) در مرکز سطح مقطع قرار دارد.

رابطه لنگر - انحاء:

معادله دوم تبادل بیانگر آنست که لنگر برآیند حاصل از تنش‌های قائم بر روی سطح مقطع تیر برابر است با لنگر خمشی M نیرویی که در جزء سطح dA اثر می‌کند، لنگرش حول محور Z برابر است

$$\text{با: } dM = -s_x y dA$$

علامت منفی بخاطر اینست که لنگر ایجاد شده را در بالا و پایین تار خنثی با لنگر M هم جهت کند.

(در بالای تار خنثی σ_x منفی است و در پایین y منفی است)

$$M = \int_A dM = - \int_A S_x y dA \xrightarrow{S_x = -Eky} M = \int_A KEy^2 dA = KE \int_A y^2 dA$$

می‌نامند (حول محور z) یکی از خواص سطح مقطع تیر است آنرا گشتاور اینرسی یا ممان اینرسی مقطع $I = \int_A y^2 dA$

$$M = KEI \longrightarrow K = \frac{1}{r} = \frac{M}{EI}$$

صلبیت خمشی: EI

پس انحاء با لنگر خمشی رابطه مستقیم و با صلبیت خمشی رابطه عکس دارد .
لنگر خمشی مثبت ایجاد انحاء مثبت و لنگر منفی ایجاد انحاء منفی در تیر می‌کند.



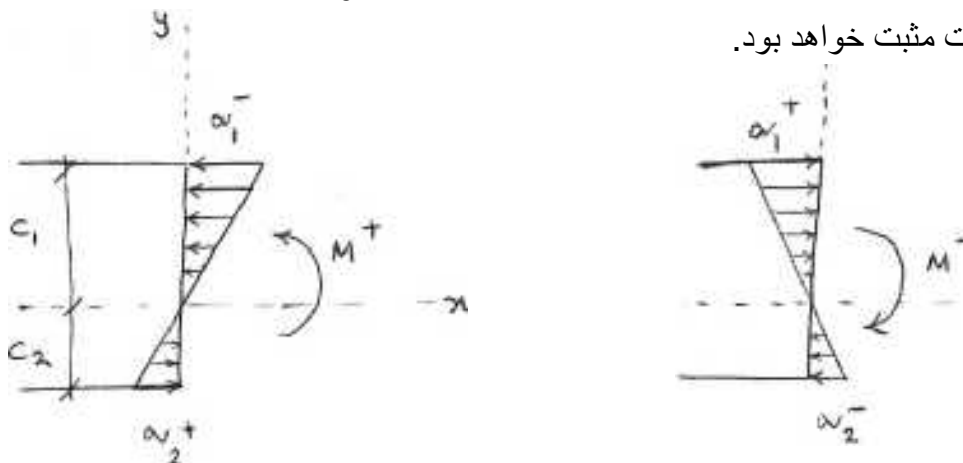
چرا رابطه خمش:

$$\begin{cases} S_x = -Eky \\ K = \frac{M}{EI} \end{cases} \Rightarrow S_x = -E \cdot \frac{M}{EI} \cdot y \Rightarrow S_x = -\frac{My}{I}$$

فرمول خمش:

پس تنش یک تابع خطی از y (فاصله تا تار خنثی) می‌باشد.

اگر لنگر خمشی در تیر مثبت باشد تنش‌های بالای تار خنثی که y مثبت است منفی و پایین تار خنثی که y منفی است مثبت خواهد بود.



تنش‌های حداکثر در یک مقطع عرضی:

با توجه به فرمول خمش مشخص است که حداکثر تنش‌های خمشی در دورترین فاصله زاتار خنثی رخ می‌دهند. اگر این فواصل را برابر C_1 , C_2 بگیریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} S_1 = -\frac{Mc_1}{I} = -\frac{M}{\frac{I}{c_1}} = -\frac{M}{S_1} \\ S_2 = \frac{Mc_2}{I} = \frac{M}{\frac{I}{C_2}} = \frac{M}{S_2} \end{array} \right.$$

کیمت‌های S_1 , S_2 را مدول مقطع (اساس مقطع) می‌نامند (دارای بعد L^3 می‌باشد)

از آنجا که مدول مقطع همواره مثبت است پس C_1 , C_2 باید همواره مثبت در نظر گرفته شوند

اگر مقطع علاوه بر محور y حول محور z نیز متقارن باشد: $C_1 = C_2 = C$ و لذا تنش‌های کششی و فشار به لحاظ مقدار با هم برابر خواهند شد:

$$S_1 = -S_2 = -\frac{Mc}{I} = -\frac{M}{\frac{I}{C}} = -\frac{M}{S}$$

برای مقطع مستطیل:

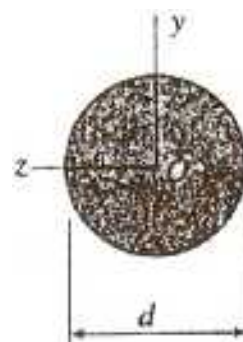
$$I = \frac{bh^3}{12}$$

$$I = \int_A y^2 dA = \int_{-h/2}^{+h/2} y^2 b dy = b \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-h/2}^{+h/2}$$

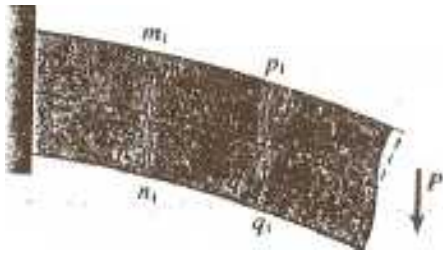
$$I = b \left[\frac{1}{3} \frac{h^3}{8} - \frac{1}{3} \frac{-h^3}{8} \right] = b \left[\frac{h^3}{24} + \frac{h^3}{24} \right] = \frac{bh^3}{12}$$

$$S = \frac{I}{h/2} = \frac{bh^3/12}{h/2} = \frac{bh^2}{6}$$

$$I = \frac{pR^4}{4} = \frac{pd^4}{64}, \quad S = \frac{pd^3}{32} = \frac{pR^3}{4}$$



روابط ارائه شده در این فصل مربوط به حالت خمش خالص در تیرهای ساخته شده از مصالح همگن و ارتجاعی خطی می‌باشد اگر تیر تحت خمش غیر یکنواخت قرار گیرد نیروهای برشی موجب تاب خوردگی مقطع می‌شوند و بنابراین مقاطعه مسطح پس از خمش دیگر مسطح باقی نمی‌مانند تاب خوردگی مقاطع باعث پیچیدگی زیادی در رفتار تیر خواهد شد تحقیقات نشان می‌دهند که تنش‌های عمودی محاسبه شده از رابطه خمش به مقدار کمی تحت تأثیر تنش‌های برش و تاب خوردگی‌های مربوط قرار می‌گیرند و بنابراین می‌توان تئوری خمش خالص را با اطمینان برای تیرهای تحت خمس غیر یکنواخت نیز بکار برد.



چبازده نسبی مقاطع مختلف تیرها

تیرهای خمشی وقتی دارای max بازده‌اند که مصالح در فاصله هر چه دورتر نسبت به تار خمشی قرار گرفته باشد در مقایسه دو مقطع مربع و دایره با مساحت مساوی داریم:

$$a^2 = pr^2 \longrightarrow a = \sqrt{pr}$$

$$S = \frac{a \cdot a^2}{6} = \frac{p \sqrt{pr} r^3}{6} = 0.295 pr^3$$

$$\leftarrow S = \frac{pr^3}{4} = 0.25 pr^3$$

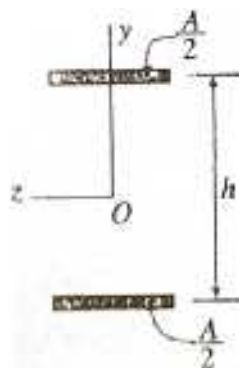


برای یک مقطع مستطیلی با ابعاد b و h داریم:

$$S = \frac{bh^2}{6} = \frac{Ah}{6} = 0.167 Ah$$

شکل ایده‌آل برای این مقطع زمانی است که نصف مساحت مقطع را در فاصله $\frac{h}{2}$ از تار خمشی و در

بالا و نیم دیگر در پایین قرار دهیم:



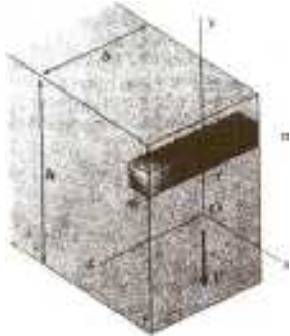
$$I = 2 \left[\frac{A}{2} \times \left(\frac{h}{2} \right)^2 \right] = \frac{Ah^2}{4}$$

$$S = \frac{I}{h/2} = \frac{Ah^2/4}{h/2} = \frac{Ah}{2} = 0.5 Ah$$

از آنجا که لازمست بخشی از ماده در جان مقطع قرار داده شود لذا هرگز نمی‌توان به شرایط ایده‌آل رسید. در تیرهای بال پهن مقدار تقریبی مدول مقطع برابر است با: $S \approx 0.35 Ah$

تنش برشی در تیرهای دارای مقطع مستطیلی:

توزیع تنش‌های برشی در مقطع موازی نیروی برشی در مقطع موازی نیروی برشی است و این تنش‌ها در عرض تیر بصورت یکنواخت توزیع می‌گردند.



اگر این المان تنش را در بالا یا پایین تیر تصور کنیم چون در سطح خارجی تیر تنش صفر است پس تنش برشی افقی و به تبع آن تنش برشی قائم نیز صفر است.

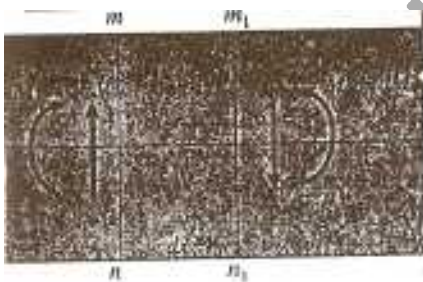


$$\text{پس در } y = \pm \frac{h}{2} \leftarrow t = 0$$

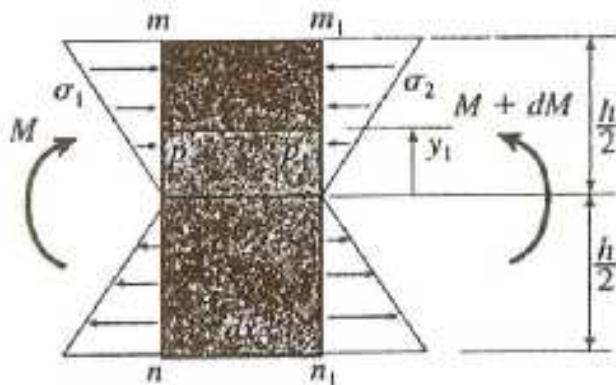
تعیین رابطه برشی: (در تیرهای مستطیلی)

تیری را تحت اثر یک لنگر غیر یکنواخت در نظر می‌گیریم:

(دو مقطع بفاصله dx)



تعداد در جهت افق المان $1 \text{ mnm}1$ را بررسی می‌کنیم لذا در شکل فقط تنش‌های افقی نمایش داده شده‌اند:

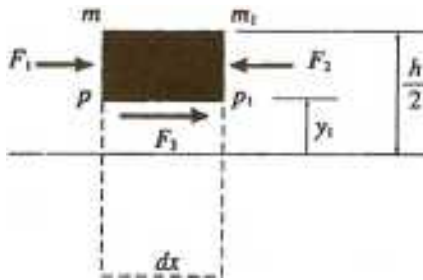


$$\begin{cases} S_1 = -\frac{My}{I} \\ S_2 = -\frac{(M + dM)y}{I} \end{cases}$$

در مرحله بعد صفحه‌ای را در فاصله y_1 از تار خنثی عبور می‌دهیم:

در وجه فوقانی المان $m_p p_1 m_1$ چون جزئی از سطح فوقانی تیر است عاری از هر گونه تنش است ولی در وجه تحتانی ($p p_1$) تنش‌های برشی افقی وجود دارند البته در وجه $m p$ و $m_1 p_1$ تنش‌های برشی قائم وجود دارند که نشان داده نشده‌اند.

نیروهای وارد بر المان $m_p p_1 m_1$ را تعیین می‌کنیم:



(در محدوده $y = y_1$ تا $y = \frac{h}{2}$)

$$F_1 = \int S_1 dA = \int \frac{My}{I} dA$$

$$D_2 \int S_2 dA = \int \frac{(M + dM)}{I} dA$$

$$\sum F_x = 0 \longrightarrow F_3 = F_2 - F_1$$

$$D_3 = \int \frac{(M + dM)y}{I} dA - \int \frac{My}{I} dA = \int \frac{My}{I} y dA = \frac{My}{I} \int y dA$$

از آنجاییکه تنش‌های برشی در عرض تیر بصورت یکنواخت توزیع شده‌اند داریم:

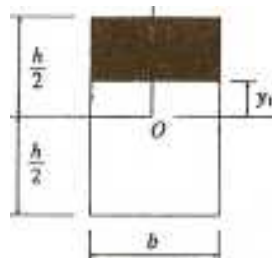
$$F_3 = t b dx$$

$$F_3 = \frac{dM}{I} \int y dA \Rightarrow \frac{dM}{dx} \cdot \frac{1}{Ib} \int y dA$$

Q: ممان استاتیکی سطحی که در بالای مقطع افقی که در آن تنش برشی باید محاسبه شود، قرار دارد.

این تنش برشی در ممان امتدادی است که نیروی برشی V اثر می‌کند.

$$t = \frac{V \cdot Q}{Ib}$$



چون لنگر استاتیک نسبت به آثار خنثی صفر است.

$$Q_1 = -Q_2$$

در فرمول برش مقادیر b, I, V برای یک مقطع مشخص ثابت می‌باشند پس تغییرات تنش برشی در یک مقطع تابع تغییرات Q است.

$$Q = b\left(\frac{h}{2} - y_1\right)\left(y_1 + \frac{\frac{h}{2} - y_1}{2}\right) = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y_1^2\right)$$

میتوان از انتگرال زیر نیز Q را تعیین کرد:

$$Q = \int y dA = \int_{y_1}^{\frac{h}{2}} y b dy = b \frac{y^2}{2} \Big|_{y_1}^{\frac{h}{2}} = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right)$$

(ح تابع درجه 2 از y_1 می باشد)

$$\tau = \frac{V}{2I} \left(\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right)$$

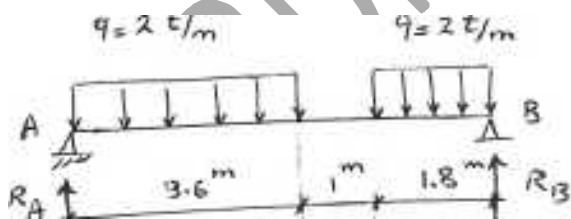
$$y_1 = \pm \frac{h}{2} \longrightarrow \tau = 0$$

$$y_1 = 0 \longrightarrow \tau_{\max} = \frac{Vh^2}{81} = \frac{Vh^2}{8bh^3} = \frac{12vh^2}{8bh^3} = \frac{3V}{2bh} = \frac{3V}{2A} = 1.5\tau_{av}$$

$$\tau_{\max} = 1.5\tau_{av}$$

مثال 2-5؟

تیر AB مطابق شکل مفروض است. با فرض تنش مجاز خمشی 1440 Kg/cm^2 تیر را با مقطع IPE طرح دهید؟ (وزن تیر را نیز در نظر بگیرید)

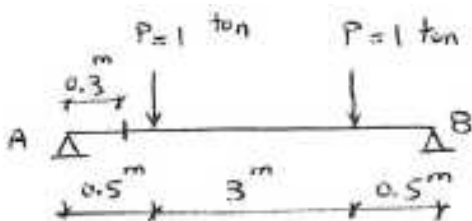


FARDIN GASEMPOUR

FARDIN GASEMPOUR

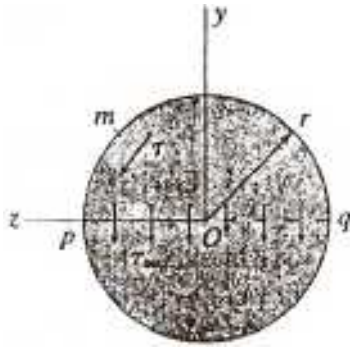
مثال 3-5؟

تیر چوبی AB مطابق شکل مفروض است. مطلوبست محاسبه ی تنش قائم و تنش برشی در نقطه ی C که در فاصله ی 2.5cm از تار خنثی قرار دارد. ثانیاً در صورتیکه تنش مجاز خمشی تیر برابر با 11MPa ، و تنش برشی افقی مجاز تیر 1.2MPa باشد. مقدار بار مجاز p را محاسبه کنید؟



FARDIN GASEMPOUR

چگتنش برشي در تيرهاي با مقطع دايره اي:



در تيرهاي مدور نمي توان فرض نمود كه تنش هاي برشي به موازات محور y عمل مي كنند. بطور مثال، تنش برش t در نقطه m (روي سطح خارجي مقطع) بايد مماس بر دايره باشد، چون مؤلفه شعاعي ندارد. در وجه خارجي تير تنش صفر است لذا در امتداد عمود بر آن (امتداد شعاعي) نيز تنش صفر است.

يافتن توزيع تنش هاي جهشي در مقطع ساده نيست، لذا با چند فرض منطقي ميتوان تنش هاي برش را در روي تار خنثي تعيين نمود:

- تنش بر روي تار خنثي \max مقدار است و در امتداد تار خنثي تنش ها به موازات محور y عمل کرده و در پهنای تير داراي شدت ثابت مي باشند. از آنجا كه اين فرضيات همان هايي هستند كه در استخراج رابطه $t = \frac{VQ}{Ib}$ مورد استفاده قرار گرفتند، ميتوان از اين رابطه روي محور خنثي استفاده کرد.

$$I = \frac{pr^4}{4}, \quad Q = A \cdot \bar{y} = \left(\frac{pr^2}{2}\right)\left(\frac{4r}{3p}\right) = \frac{2r^3}{3}, \quad b = 2r$$

$$t_{\max} = \frac{V\left(\frac{2r^3}{3}\right)}{\left(\frac{pr^4}{4}\right)2r} = \frac{4V}{3pr^2} = \frac{4V}{3A} = \frac{4}{3}t_{ar}$$

روي امتداد P_1q_1 : تنش هاي جهشي در دو انتهاي وتر محاسند بر مقطع عرضي و در نقطه مياني نيز بعلت تقارن بايد در امتداد محور y باشد. امتداد اين تنش ها يکديگر را در نقطه اي مثل n قطع مي کنند. با فرض اينکه امتداد تنش برش در هر نقطه ديگر روي خط P_1q_1 ، نقطه n عبور خواهد کرد، امتداد تنش هاي برش مشخص خواهد شد.

فرض ديگر اينکه: مولفه هاي قائم تنش هاي برشي براي تمام نقاط واقع روي P_1q_1 مساوي مي باشند.

پس براي محاسبه مؤلفه قائم تنش هاي برش مي توان از رابطه $t = \frac{VQ}{Ib}$ استفاده کرد. حال با دانستن

امتداد تنش جهشي و مؤلفه قائم آن، ميتوان مقدار آنرا براي هر نقطه مقطع عرض محاسبه نمود.

براي محاسبه Q :

$$dA = 2\sqrt{r^2 - y^2} dy$$

$$Q = \int_{y_1}^r 2y\sqrt{r^2 - y^2} dy = \frac{2}{3}(r^2 - y_1^2)^{3/2}$$

$$b = 2\sqrt{r^2 - y_1^2}$$

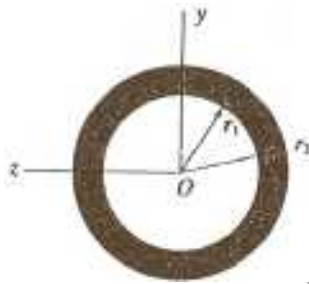
با جاگذاري مقادير فوق، مؤلفه قائم تنش جهشي بدست مي آيد:

$$t_y = \frac{V(r^2 - y_1^2)}{3I}$$

از اين معادله نيز مشخص است که max تنش برشي در $y_1 = 0$ مي باشد.

$$t_{\max} = \frac{V.r^2}{3I} = \frac{V.r^2}{3\frac{pr^4}{4}} = \frac{4V}{3pr^2} = \frac{4}{3}t_{ar}$$

- در مورد مقطع دايروي تو خالي، با دقت قابل قبول ميتوان فرض نمود که تنش هاي برشي در روي محور خنثي موازي محور y مي باشند و بطور يکنواخت روي مقطع توزيع شده اند. لذا ميتوان از رابطه برشي براي محاسبه t_{\max} استفاده کرد.



$$I = \frac{p}{4}(r_2^4 - r_1^4), \quad Q = \frac{2}{3}(r_2^3 - r_1^3), \quad b = 2(r_2 - r_1)$$

$$t_{\max} = \frac{VQ}{Ib} = \frac{4V}{3A} \left(\frac{r_2^2 - r_2r_1 + r_1^2}{r_2^2 + r_1^2} \right), \quad A = p(r_2^2 - r_1^2)$$

تنش هاي جهشي در بالا تيرهاي بالدار:

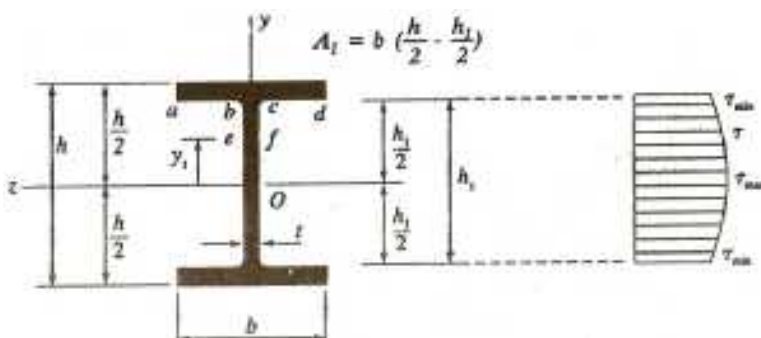
توزيع تنش هاي برشي در تيرهاي | شکل بسيار پيچيده تر از تيرهاي مستطيلي است. اين تنش ها در بالهاي تير بدو صورت افقي و عمودي عمل مي کنند که تنش هاي جهشي افقي بزرگتر از تنش هاي عمودي هستند.



تنش هاي جهشي در جان تيرهاي |، فقط در امتداد عمودي عمل مي کنند و حداکثر

مقدار آنها نيز بر روي تار خنثي تير رخ

مي دهد.



در اینجا نيز فرضيات بعمل آمده در مورد تيرهاي مستطيلي را مورد استفاده قرار مي دهيم، يعني فرض مي کنيم که

تنش هاي جهشي به موازات محور y عمل مي کند و در امتداد ضخامت جان داراي توزيع يکنواخت مي باشند. در امتداد ef با استفاده از رابطه $t = \frac{VQ}{Ib}$ داريم:

$$A_1 = b\left(\frac{h}{2} - \frac{h_1}{2}\right) \text{ مساحت بال}$$

$$A_2 = t\left(\frac{h_1}{2} - y_1\right) \text{ مساحت جان}$$

$$Q = A_1\left(\frac{h_1}{2} + \frac{h/2 - h_1/2}{2}\right) + A_2\left(y_1 + \frac{h_1/2 - y_1}{2}\right) \longrightarrow$$

$$Q = \frac{b}{8}(h^2 - h_1^2) + \frac{t}{8}(h_1^2 - 4y_1^2)$$

$$t = \frac{VQ}{Ib} = \frac{V}{8It}[b(h^2 - h_1^2) + t(h_1^2 - 4y_1^2)] \text{ تنش برش در جان تير در فاصله } y_1 \text{ از تار خنثي:}$$

$$I = \frac{bh^3}{12} - \frac{(b-t)h_1^3}{12} = \frac{1}{12}(bh^3 - bh_1^3 + th_1^3)$$

از آنجا که در رابطه تنش برشي تمامي مقادير بجز y_1 ثابت هستند، لذا t يك تابع درجه 2 از y_1 مي باشد و تغييرات t در ارتفاع جان تير بصورت سهمي خواهد بود.

$$y_1 = 0 \rightarrow t_{\max} = \frac{V}{8It}(bh^2 - bh_1^2 + th_1^2)$$

$$y_1 = \pm \frac{h_1}{2} \rightarrow t_{\min} = \frac{Vb}{8It}(h^2 - h_1^2)$$

چ نیروي برشي در جان:

نیروي برشي عمودي در جان تير را ميتوان از حاصلضرب مساحت نمودار تنش برشي در ضخامت جان (t) بدست آورد.

$$h_1 t_{mn} + \frac{2}{3} h_1 (t_{\max} - t_{\min}) = \frac{1}{3} h_1 t_{\min} + \frac{2}{3} h_1 t_{\max} \text{ مساحت نمودار تنش:}$$

$$V_{web} = \frac{th_1}{3}(2t_{\max} + t_{\min}) \text{ در تيرهاي استاندارد:}$$

بين 90 تا 98 درصد کل نیروي جهشي توسط جان تير و بقيه توسط بالها تحمل مي شوند.

بدلیل کوچک بودن t در مقابل b ، تفاوت زیادی بین t_{\min} ، t_{\max} وجود ندارد و توزیع تنش های جهشی در مقطع عرضی جان تیر تقریباً یکنواخت است. مقدار تقریبی تنش جهشی حداکثر از تقسیم نیروی برشی بر مساحت جان بدست می آید که آنرا باید تنش برشی متوسط در جان تیر نامید، زیرا

$$t_{av} = \frac{V}{th_1} \quad \text{با فرض اینکه کل نیروی برشی توسط جان تیر تحمل می شود، بدست آمده است:}$$

t_{av} ممکن است کمی کوچکتر یا بزرگتر از t_{\max} بدست آمده از رابطه برش باشد.

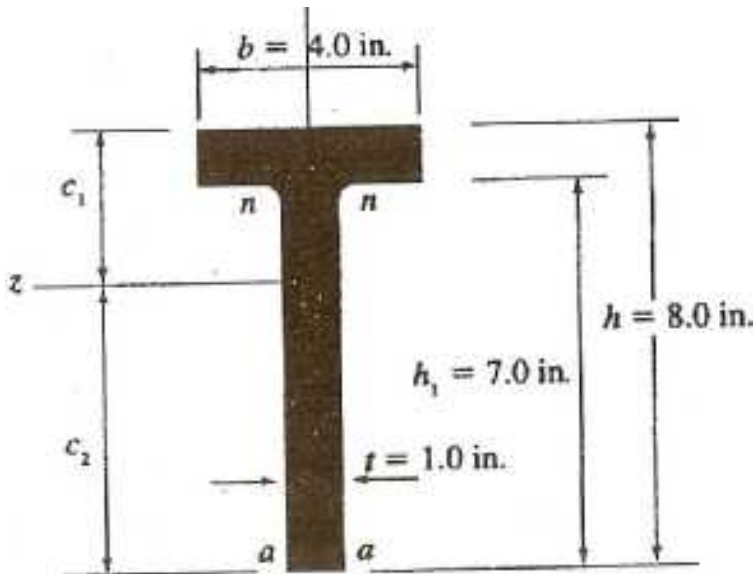
مثال 4-5؟

یک تیر بال پهن $W12 \times 35$ تحت نیروی جهشی $V=10,000\text{lb}$ قرار گرفته است. مطلوبست محاسبه همان نیروی مقطع، تنش های جهشی حداقل و حداکثر در جان تیر، تنش جهشی متوسط در جان تیر و نیروی برشی جان؟

FARDIN GASEMPOUR

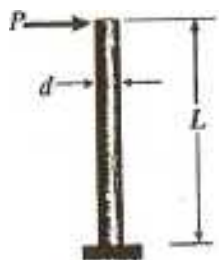
؟ مثال 5-5

یک تیر T شکل تحت اثر نیروی برشی عمودی $V=10000lb$ قرار گرفته است. ابعاد تیر عبارتند از $h_1 = 7.0in$ و $h=8.0in$ و $t=1.0in$ و $b=4in$ مطلوبست تعیین تنش برشی τ_1 در سطح فوقانی جان تیر (مقطع nn) و همچنین محاسبه τ_{MAX} ؟



FARDIN GASEMPOUR

؟ مثال 5-6



یک تیرک چوبی با سطح مقطع دایره ای تو پر به قطر d در معرض یک بار افقی $p=500lb$ قرار دارد. طول تیرک $l=6ft$ و تنش های مجاز خمشی و برشی در چوب به ترتیب برابر $150psi$ و $2100psi$ میباشد. حداقل قطر مورد نیاز را براساس:

(a) تنش مجاز خمشی

(b) تنش مجاز برشی تعیین کنید؟

تیرهای چند تکه ای از دو یا چند قطعه تشکیل شده اند که به یکدیگر متصل شده و تشکیل یک تیر واحد می دهند. این تیرها به شکل های مختلف و برای برآورده کردن شرایط خاص سازه ای یا معماری ساخته می شوند.



تیرورق فولادی

تیرهای چند لایه ای اتصال توسط چسب



تیر جعبه ای چوبی یا فولادی

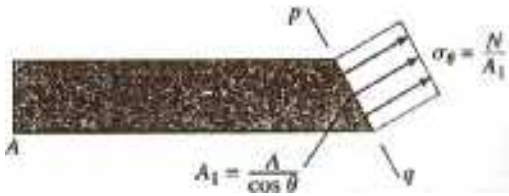


تیرهای چند تکه ای باید به نحوی طراحی گردند که بعنوان يك عضو واحد، تنش های جهشی و خمشی را تحمل کنند و علاوه بر آن اتصالات بین قطعات باید قادر به تحمل نیروهای برشی بین لایه ها باشند.

FARDIN GASEMPOUR

فصل ششم: تحلیل تنش و کرنش

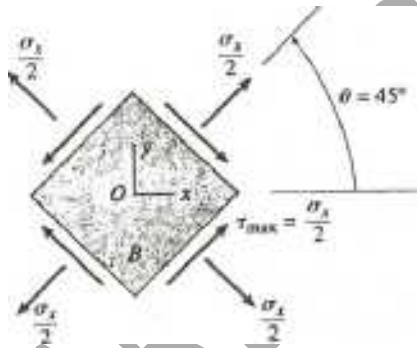
یادآوری از تنش تک محوری



تنش برشی زمانی مثبت است که تمایل به دوران مثلثاتی داشته باشد.

$$\begin{cases} s_q = \frac{N}{A_1} = s_x \cos^2 q \\ t_q = \frac{V}{A_1} = -s_x \sin q \cos^2 q \end{cases}$$

در حالت تک محوری روی صفحات با زاویه 45°، تنش برشی به حداکثر مقدار خود می رسد $(\frac{s_x}{2})$



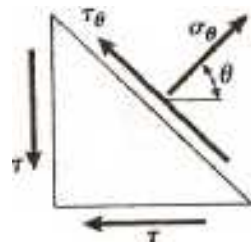
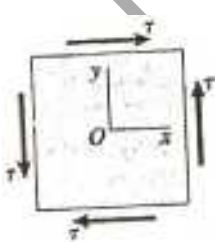
روی این صفحات تنش عمودی برابر $\frac{s_x}{2}$ می باشد.

یادآوری از برش خالص:

(در استوانه تحت پیچش اتفاق می افتد)

روی صفحات با زاویه 45°، تنش برشی صفر است و تنش عمودی به max مقدار خود رسیده:

$$s_{max} = t$$

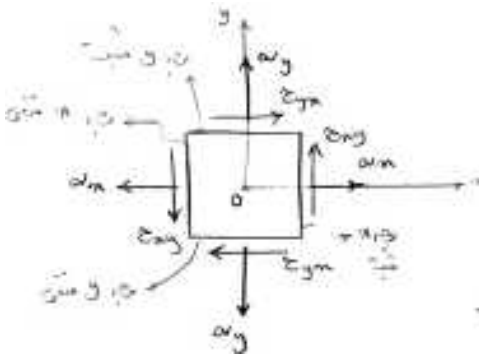


از تعامل المان مثلثی:

$$\begin{cases} s_q = t \sin 2q \\ t_q = t \cos 2q \end{cases}$$

لذا تنش بر روی مقطع مایل ممکن است بزرگتر از تنش روی مقاطع عرض باشد. در این مرحله می خواهیم تنش بر روی سطح مایل را در حالت عمومی تر، بنام تنش صفحه ای بررسی کنیم.

تنش صفحه اي (تنش مسطح)



در حالت تنش صفحه اي وجوه X و Y تحت تنش قرار مي گيرند و همه تنش ها به موازات محورهاي X و Y عمل مي کنند.

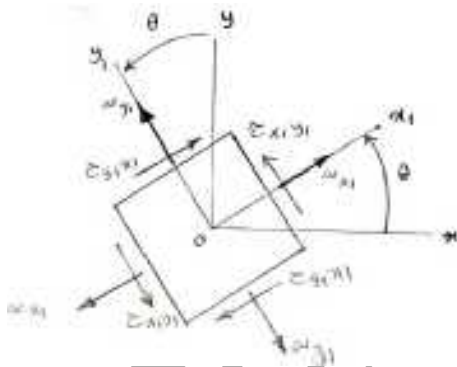
وجوه المان با توجه به جهت عمودي خارج شده از آنها مشخص مي شوند.

تنش عمودي: اندیس تنش نشانگر وجهي است که تنش روي آن عمل مي کند. تنش کششي مثبت و تنش فشاري منفي است.

تنش برشي: اندیس اول نشان دهنده وجهي است که تنش روي آن عمل مي کند و اندیس دوم بيانگر جهت تنش است.

تنش برشي روي وجه مثبت زماني مثبت است که در جهت مثبت يکي از محورها عمل کند و تنش برشي روي وجه منفي زماني است که در جهت منفي يکي از محورها عمل کند.

تنش روي مقطع مایل:



با فرض اینکه تنش هاي t_{xy}, s_y, s_x معلومند، مي خواهيم تنش بر روي مقاطع مایل را تعيين کنيم.

$$t_{x_1 y_1} = t_{y_1 x_1} \text{ داریم:}$$

براي اين منظور يك المان مثلثي شکل طوري انتخاب مي کنيم که وجه مایل آن همان وجه x_1 باشد و تعادل اين المان را بررسي مي کنيم.

مساحت وجه سمت چپ المان (وجه X منفي):

$$A_0 \text{ بنابراین مساحت وجه پاييني } A_0 \text{ tog } q \text{ و وجه مایل برابر } \frac{A_0}{\cos q} \text{ يا } A_0 \text{ Sec } q \text{ خواهد شد.}$$

دو معادله تعادل در امتداد y_1, x_1 داریم:

$$s_{x_1} A_0 \sec q - s_x A_0 \cos q - t_{xy} A_0 \sin q - s_y A_0 \text{ tog } q \sin q - t_{yx} A_0 \text{ tog } q \cos q = 0$$

$$s_{x_1} = s_x \cos^2 q + s_y \sin^2 q + 2t_{xy} \sin q \cos q$$

در جهت y_1 :

$$t_{x_1 y_1} A_0 \sec q + s_x A_0 \sin q - t_{xy} A_0 \cos q - s_y A_0 \tan q \cos q + t_{yx} A_0 \tan q \sin q = 0$$

$$t_{x_1 y_1} = -(s_x - s_y) \sin q \cos q + t_{xy} (\cos^2 q - \sin^2 q)$$

$$q = 90 \begin{cases} s_{x_1} = s_y \\ t_{x_1 y_1} = -t_{yx} \end{cases} \quad : q = 0 \begin{cases} s_{x_1} = s_x \\ t_{x_1 y_1} = t_{xy} \end{cases} \quad \text{در حالت}$$

$$\text{داریم: } \cos^2 q = \frac{1 - \cos 2q}{2}, \sin^2 q = \frac{1 - \cos 2q}{2}, \sin q \cos q = \frac{1}{2} \sin 2q$$

$$\cos^2 q - \sin^2 q = \cos 2q$$

با قرار دادن این روابط در معادلات | و || خواهیم داشت:

$$\begin{cases} s_{x_1} = \left(\frac{s_x - s_y}{2}\right) + \left(\frac{s_x - s_y}{2}\right) \cos 2q + t_{xy} \sin 2q \\ t_{x_1 y_1} = -\frac{s_x - s_y}{2} \sin 2q + t_{xy} \cos 2q \end{cases}$$

برای محاسبه تنش عمودی s_{y_1} ، بجای q قرار خواهیم داد: $q + \frac{p}{t}$

$$s_{y_1} = \frac{s_x + s_y}{2} - \frac{s_x - s_y}{2} \cos 2q - t_{xy} \sin 2q$$

از جمع روابط s_{y_1}, s_{x_1} داریم:

$$s_{x_1} + s_{y_1} = s_x + s_y$$

پس مجموع تنش های قائم بر روی وجوه عمود بر هم، ثابت و مستقل از زاویه q است.

- حالت های خاص تنش صفحه ای:

- اگر همه تنش ها بجز تنش عمودی s_x صفر باشند، همان در حالت تنش تک محوری قرار دارد:

$$\begin{cases} s_{x_1} = \frac{s_x}{2} + \frac{s_x}{2} \cos 2q = s_x \left(\frac{1 + \cos 2q}{2}\right) = s_x \cos^2 q \\ t_{x_1 y_1} = -\frac{s_x}{2} \sin 2q = -s_x \sin q \cos q \end{cases}$$

- اگر $s_y = 0, s_x = 0$ و فقط t_{xy} داشته باشیم، همان در حالت برش خالص قرار دارد:

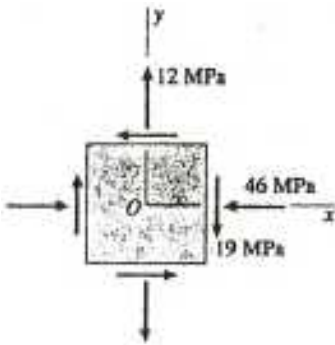
$$\begin{cases} s_{x_1} = t_{xy} \sin 2q \\ t_{x_1y_1} = t_{xy} \cos 2q \end{cases}$$

اگر $t_{xy} = 0$ باشد، المان در حالت تنش دو محوري قرار دارد:

$$\begin{cases} s_{x_1} = \frac{s_x - s_y}{2} + \frac{s_x - s_y}{2} \cos 2q \\ t_{x_1y_1} = -\frac{s_x - s_y}{2} \sin 2q \end{cases}$$

؟ مثال 1-6:

یک نقطه در سطح یک سازه بار گذاری شده دارای شرایط تنش صفحه ای است. مقدار و جهت تنش ها در شکل مقابل نشان داده شده است. مطلوبست محاسبه ی تنش های موثر در المانی که نسبت به المان اولیه دارای زاویه ی 15° درجه در جهت حرکت عقربه های ساعت میباشد.



تنش ها و صفحات اصلي:

تنش هاي حداكثر و حداقل قائم را تنش هاي اصلي و صفحاني را كه اين تنش ها بر روي آنها عمل مي كنند را صفحات اصلي مي نامند.

$$s_{x_1} = \frac{s_x + s_y}{2} + \frac{s_x - s_y}{2} \cos 2q + t_{xy} \sin 2q$$

$$\frac{ds_{x_1}}{dq} = 0 \rightarrow -(s_x - s_y) \sin 2q + 2t_{xy} \cos 2q = 0$$

$$\tan 2q_p = \frac{2t_{xy}}{s_x - s_y}$$

q_p زاوية صفحات اصلي را مشخص مي كند. از اين معادله براي زاوية $2q_p$ دو مقدار در محدوده 0° تا 360° بدست مي آيد كه 180° با هم اختلاف دارند. بنابر اين q_p داراي دو مقدار است كه 90° با هم اختلاف دارند. يكي از ايندو مقدار در محدوده 0° تا 90° و ديگري بين 90° تا 180° قرار دارد. ايندو زاويه را زاويه هاي اصلي مي نامند. يكي از اين زاويه ها نشاندنده جهت صفحه اي است كه تنش اصلي حداكثر بر روي آن رخ مي دهد و ديگري جهت صفحه اي را نشان مي دهد كه تنش اصلي حداقل بر روي آن رخ مي دهد و چون ايندو زاويه 90° اختلاف دارند، لذا ميتوان گفت كه تنش هاي اصلي روي صفحات متعامد رخ مي دهند.

يك مثلث قائم الزاويه را به شكل زير در نظر مي گيريم:

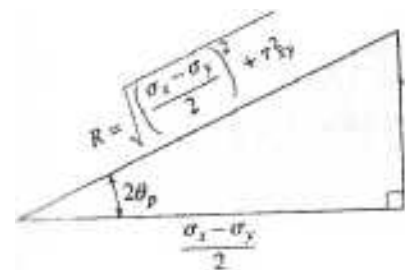
$$R = \sqrt{\left(\frac{s_x - s_y}{2}\right)^2 + t_{xy}^2}$$

از روابط مثلث: $\cos 2q_p = \frac{s_x - s_y}{2R}$, $\sin 2q_p = \frac{t_{xy}}{R}$

$$s_{x_1} = \frac{s_x + s_y}{2} + \frac{s_x - s_y}{2} \cos q + t_{xy} \sin 2q$$

با قراردادن اين روابط در معادله روبرو، تنش اصلي s_1 كه به لحاظ جبري بزرگتر است بدست مي آيد:

$$s_1 = \frac{s_x + s_y}{2} + \frac{s_x - s_y}{2} \cos 2q_p + t_{xy} \sin 2q_p$$



$$s_1 = \frac{s_x + s_y}{2} + \frac{(s_x - s_y)^2}{4R} + \frac{t_{xy^2}}{R}$$

$$= \frac{(s_x - s_y)^2 + 4t_{xy^2}}{4R} = \frac{4 \left[\frac{(s_x - s_y)^2}{2} + t_{xy^2} \right]}{4R} = R$$

$$\text{پس } s_1 = \frac{s_x + s_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{s_x - s_y}{2}\right)^2 + t_{xy^2}}$$

تنش اصلي كوچتر يعني s_2 را ميتوان بروش زير تعيين نمود:

$$s_1 + s_2 = s_x + s_y$$

$$s_2 = \frac{s_x + s_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{s_x - s_y}{2}\right)^2 + t_{xy^2}}$$

$$s_{1,2} = \frac{s_x + s_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{s_x - s_y}{2}\right)^2 + t_{xy^2}}$$

ميتوان نوشت:

اگر زاويه صفحات اصلي: مربوط به تنش هاي s_2, s_1 را به ترتيب با q_{P_2}, q_{P_1} مشخص كنيم، مقدار

هر زاويه از رابطه $\tan 2q_P = \frac{2t_{xy}}{s_x - s_y}$ بدست مي آيد. جهت تشخيص اينكه کدام زاويه q_{P_1} و کدام

q_{P_2} مي باشد، ميتوان گفت كه فقط زاويه q_{P_1} هر دو معادله $\cos 2q_P = \frac{s_x - s_y}{2R}$ ، $\sin q_P = \frac{t_{xy}}{R}$ را

ارضا مي كند.

در مورد تنش برشي:

$$t_{x_1y_1} = -\frac{s_x - s_y}{2} \sin 2q + t_{xy} \cos 2q = 0$$

$$-(s_x - s_y) \sin 2q + 2t_{xy} \cos 2q = 0 \rightarrow \tan 2q = \frac{2t_{xy}}{s_x - s_y}$$

اين معادله، همان معادله ايست كه صفحات اصلي را تعيين مي كند. پس نتيجه اينكه:

بر روی صفحات اصلی، تنش برشی مساوی صفر است.

☞ برای المانهای تنش تک محوری و دو محوری:

$$\operatorname{tg} 2q_p = \frac{2t_{xy}}{s_x - s_y} \xrightarrow{t_{xy}=0} \operatorname{tg} 2q_p = 0 \rightarrow 2q_p = 0, 180$$

$$q_p = 0, 90$$

پس صفحات y, x ، همان صفحات اصلی می باشند و تنش جهشی نیز روی آنها صفر است.

- برای المان در جهش خالص:

$$\operatorname{tg} 2q_p = \frac{2t_{xy}}{s_x - s_y} \xrightarrow{s_x = s_y = 0} \operatorname{tg} 2q_p \rightarrow \infty \Rightarrow 2q_p = 90, 270$$

$$q_p = 45^\circ, 135^\circ$$

با فرض اینکه t_{xy} مثبت باشد، داریم:

$$s_{1,2} = \frac{s_x + s_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{s_x - s_y}{2}\right)^2 + t_{xy}^2}$$

☞ تنش های برشی حداکثر:

$$t_{x_1 y_1} = -\frac{s_x - s_y}{2} \sin 2q + t_{xy} \cos 2q$$

$$\frac{dt_{x_1 y_1}}{dq} = -(s_x - s_y) \cos 2q - 2t_{xy} \sin 2q = 0$$

$$\operatorname{tg} 2q = -\frac{s_x - s_y}{2s_{xy}}$$

q_s زاویه صفحاتی را نشان می دهد که تنش های جهشی حداکثر و حداقل روی آنها رخ می دهد.

از این معادله برای q_s ، دو مقدار بدست آید که 90° با هم اختلاف دارند (یکی بین 0 تا 90° و دیگری بین 90° تا 180° پس صفحات تنش جهشی حداکثر و حداقل بر هم عمودند و از آنجا که تنش برشی

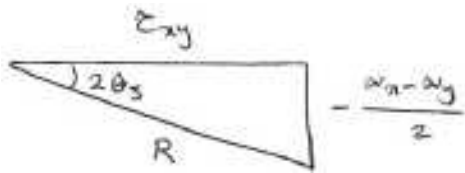
روي صفحات متعامد از لحاظ قدر مطلق با هم برابرند، پس تنش هاي برشي حداکثر و حداقل فقط از

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tog} 2q_s &= -\frac{s_x - s_y}{2t_{xy}} \\ \operatorname{tog} 2q_p &= \frac{2t_{xy}}{s_x - s_y} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \operatorname{tog} 2q_s = -\frac{1}{\operatorname{tog} 2q_p} = -\cot 2q_p \text{ . حيث علامت با هم متفاوتند .}$$

$$\frac{\sin 2q_s}{\cos 2q_s} + \frac{\cos 2q_p}{\sin 2q_p} = 0 \Rightarrow \sin 2q_s \sin 2q_p + \cos 2q_s \cos 2q_p = 0$$

$$\cos(2q_s - 2q_p) = 0 \rightarrow 2q_s - 2q_p = \pm 90 \rightarrow q_s = q_p \pm 45$$

صفحات تنش جهشي حداکثر و صفحات تنشي اصلي با يکديگر زاوية 45° مي سازند.



$$\begin{cases} \cos 2q_s = \frac{t_{xy}}{R} \\ \sin 2q_s = -\frac{s_x - s_y}{2R} \end{cases}, R = \sqrt{\left(\frac{s_x - s_y}{2}\right)^2 + t_{xy}^2}$$

با قرارداد اين مقادير در رابطه $t_{x_1y_1}$ ، تنش برشي حداکثر بدست مي آيد:

$$t_{x_1y_1} = -\frac{s_x - s_y}{2} \sin 2q + t_{xy} \cos 2q$$

6447448

$$t_{\max} = -\frac{s_x - s_y}{2} \times \left(-\frac{s_x - s_y}{2R}\right) + t_{xy} \frac{t_{xy}}{R} = \frac{(s_x - s_y)^2}{4R} + \frac{t_{xy}^2}{R}$$

$$t_{\max} = \sqrt{\left(\frac{s_x - s_y}{2}\right)^2 + t_{xy}^2}$$

q مربوط به صفحه تنش جهشي حداکثر با q_s معرفي مي گردد. داريم:

$$2q_s = 2q_p \pm 90 \text{ يا } q_s = q_p \pm 45$$

با فرض اينکه $2q_p$ در ناحية اول قرار دارد، چون $\sin 2q_s$ ، منفي است پس $2q_s$ در ربع چهارم قرار

$$\text{گرفته و داريم: } q_s = q_p - 45$$

تنش جهشي منفي حداکثر يا t_{\min} نیز به لحاظ مقدار با t_{\max} برابر و فقط از نظر علامت با آن

متفاوت است.

$$s_{1,2} = \frac{s_x + s_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{s_x - s_y}{2}\right)^2 + t_{xy}^2}$$

$$s_1 - s_2 = 2\sqrt{\left(\frac{s_x - s_y}{2}\right)^2 + t_{xy}^2} = 2t_{\max} \rightarrow t_{\max} = \frac{s_1 s_2}{2}$$

در صفحاتی که تنش جهشی حداکثر رخ می دهد، تنش قائم نیز وجود دارد. مقدار این تنش قائم با قرار دادن مقدار q_{s_1} در رابطه s_{x_1} بدست می آید:

$$\begin{cases} \cos 2q_{s_1} = \frac{t_{xy}}{R} \\ \sin 2q_{s_1} = -\frac{s_x - s_y}{2R} \end{cases}$$

$$s_{x_1} = \frac{s_x + s_y}{2} + \frac{s_x - s_y}{2} \cos 2q + t_{xy} \sin 2q$$

$$s_{x_1} = \frac{s_x + s_y}{2} + \frac{s_x - s_y}{2} \times \frac{t_{xy}}{R} + t_{xy} \left(-\frac{s_x - s_y}{2R} \right) \Rightarrow s_{av} = \frac{s_x + s_y}{2}$$

همین تنش قائم روی صفحه تنش برش حداکثر منفي نیز عمل می کند.

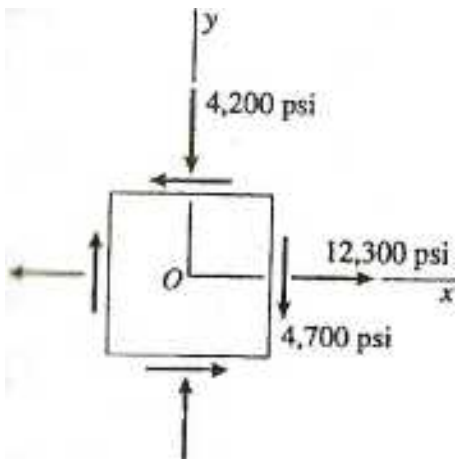
? مثال 2-6:

یک المان تنش صفحه ای مطابق شکل مقابل تحت اثر تنش های $\sigma_x = 12300 \text{ psi}$ و $\sigma_y = -4200 \text{ psi}$

و $\tau_{xy} = -4700 \text{ psi}$ قرار گرفته است:

(a) تنش های اصلی را محاسبه و آن ها را بر روی المانی که اضلاع آن موازی امتدادهای اصلی هستند نشان دهید.

(b) تنش های برشی حداکثر را تعیین و بر روی المان مربوط به آن ها نشان دهید.



FARDIN GASEMPOUR

❧ دایرة مور برای تنش صفحه ای:
معادلات $s_{x_1}, t_{x_1y_1}$ را بصورت زیر داریم:

$$\begin{cases} s_{x_1} = -\frac{s_x + s_y}{2} = \frac{s_x - s_y}{2} \cos 2q + t_{xy} \sin 2q \\ t_{x_1y_1} = -\frac{s_x - s_y}{2} \sin 2q + t_{xy} \cos 2q \end{cases}$$

طرفین معادلات فوق را به توان 2 رسانده و با هم جمع می کنیم: (دو برابر جمله اول x دوم حذف خواهد شد)

$$(s_{x_1} - \frac{s_x + s_y}{2})^2 + t_{x_1y_1}^2 = (\frac{s_x - s_y}{2})^2 + t_{xy}^2$$

$$\text{داریم: } s_{av} = \frac{s_x + s_y}{2}, R = \sqrt{(\frac{s_x - s_y}{2})^2 + t_{xy}^2}$$

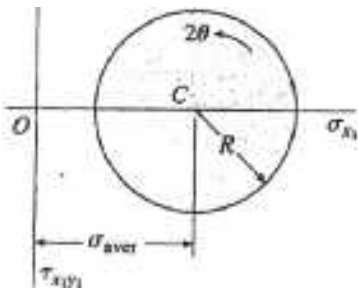
$$(s_{x_1} - s_{av})^2 = t_{xy}^2 = R^2$$

معادله فوق، معادله جبری یک دایره است.

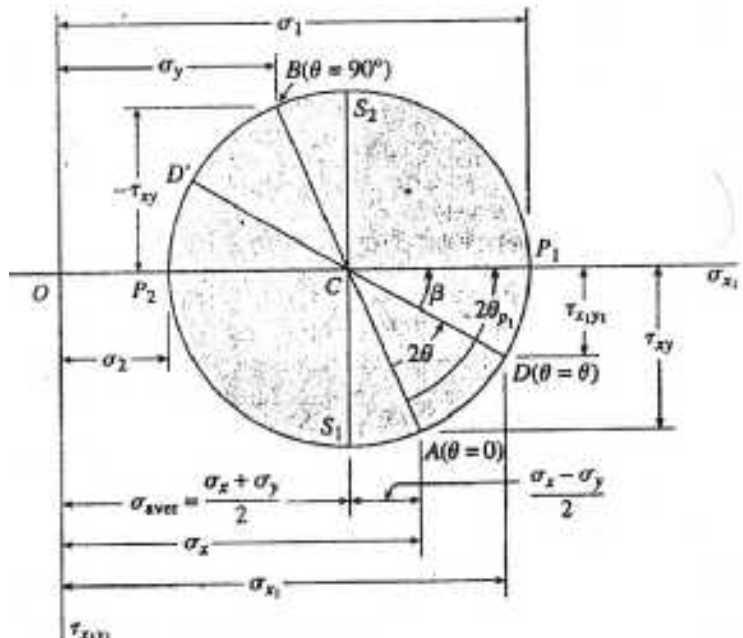
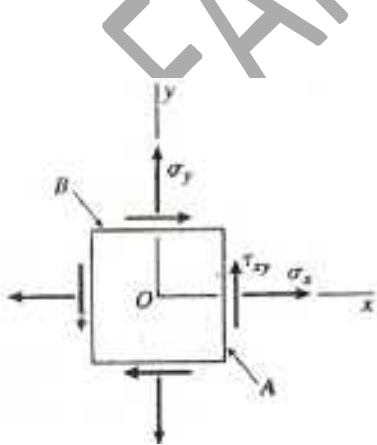
مختصات مرکز این دایره برابر است با: $\begin{cases} s_{x_1} = s_{xv} \\ t_{xy} = 0 \end{cases}$ و شعاع نیز برابر R

است.

جهت مثبت محورهای $s_{x_1}, t_{x_1y_1}$ را به شکل مقابل در نظر می گیریم. زاویه $2q$ در جهت مثلثاتی مثبت است.



❧ رسم دایرة مور:
المان تنش زیر داریم:



- مرکز دایره را به مختصات $(s_{av}, 0)$ تعیین می کنیم.

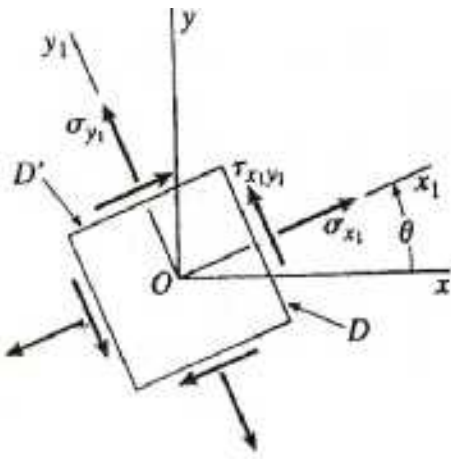
- نقطه A را که نشان دهنده وضعیت تنش در وجه x المان است با مختصات $\begin{cases} s_{x_1} = s_x \\ t_{x_1 y_1} = t_{xy} \end{cases}$ را تعیین می کنیم.

- نقطه B را که نشان دهنده وضعیت تنش در وجه y المان است $\begin{cases} s_{x_1} = s_y \\ t_{x_1 y_1} = -t_{xy} \end{cases}$ را مشخص می کنیم.

نقطه A مربوط به $q = 0$ و نقطه B مربوط به $q = 90^\circ$ می باشد. چون معادلات پارامتریک دایره بر حسب پارامتر $2q$ می باشد، لذا دوران q روی المان برابر با دوران $2q$ روی دایره خواهد بود. اگر نقطه A را به B وصل کنیم، این خط، قطر دایره مور بوده و از مرکز (c) خواهد گرفت. اگر به مرکز c و قطر AB، دایره ای رسم کنیم، دایره مور بدست می آید. - CA و CB شعاع دایره مور بوده و طول آنها برابر است با R: (از مثلث قائم الزویه)

$$R = \sqrt{\left(\frac{s_x - s_y}{2}\right)^2 + t_{xy}^2}$$

تنش بر روی المانهای مایل:



می خواهیم وضعیت تنش ها را روی وجه D، که با محور x زاویه q ساخته، بررسی کنیم. اگر روی دایره مور، از نقطه A، هم جهت با زاویه q (مثلثاتی) و به اندازه $2q$ حرکت کنیم، به نقطه D خواهیم رسید که این نقطه، وضعیت تنش ها را روی وجه D نشان می دهد $(s_{x_1}, t_{x_1 y_1})$ زاویه بین CD و محور x را b فرض می کنیم، داریم:

$$\begin{cases} s_{x_1} = \frac{s_x + s_y}{2} + R \cos b & (I) \\ t_{x_1 y_1} = R \sin b & (II) \end{cases}$$

با توجه به اینکه زاویه بین CA و محور x برابر $2q + b$ است، داریم:

$$\begin{cases} \cos(2q + b) = \frac{\frac{s_x - s_y}{2}}{R} = \frac{s_x - s_y}{2R} \\ \sin(2q + b) = \frac{t_{xy}}{R} \end{cases}$$

با بسط روابط \sin و \cos خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \cos 2q \cos b - \sin 2q \sin b = \frac{s_x - s_y}{2R} & (a) \\ \sin 2q \cos b + \cos 2q \sin b = \frac{t_{xy}}{R} & (b) \end{cases}$$

اگر رابطه (a) را در $\cos 2q$ و رابطه (b) را در $\sin 2q$ ضرب نموده و با هم جمع کنیم داریم:

$$\begin{cases} \cos^2 2q \cos b - \cos 2q \sin 2q \sin b = \cos 2q \frac{s_x - s_y}{2R} + \\ \sin^2 2q \cos b + \sin 2q \cos 2q \sin b = \sin 2q \frac{t_{xy}}{R} \end{cases}$$

$$\cos b = \frac{1}{R} \left(\frac{s_x - s_y}{2} \cos 2q + t_{xy} \sin 2q \right)$$

و اگر رابطه (a) را در $\sin 2q$ و رابطه (b) را در $\cos 2q$ ضرب نموده و از هم کم کنیم، داریم:

$$\sin 2q \cos 2q \cos b - \sin^2 2q \sin b = \sin 2q \frac{s_x - s_y}{2R}$$

$$\cos 2q \cos b + \cos^2 2q \sin b = \cos 2q \frac{t_{xy}}{R}$$

$$\sin b = \frac{1}{R} \left(-\frac{s_x - s_y}{2} \sin 2q + t_{xy} \cos 2q \right)$$

اگر روابط بدست آمده برای $\cos b, \sin b$ را در روابط | و || قرار دهیم، خواهیم داشت:
که همان روابطی هستند که قبلاً نیز بدست آوردیم:

$$\begin{cases} s_{x_1} = \frac{s_x - s_y}{2} + \frac{s_x - s_y}{2} \cos 2q + t_{xy} \sin 2q \\ t_{x_1 y_1} = -\frac{s_x - s_y}{2} \sin 2q + s_{xy} \cos 2q \end{cases}$$

وجه D' با وجه D ، اختلاف 90° ، در روی دایره با اختلاف 180° یعنی نقطه D' خواهد بود. تنش برشی در D' به لحاظ مقدار برابر با تنش برشی نقطه D ($t_{x_1 y_1}$) ولی مختلف علامت خواهد بود.

تنش نرمال در D' (s_{y_1}) نیز به سادگی قابل تعیین است.

◀ نکته: اگر المان تنش در جهت مثلثاتی دوران کند، در روی دایره مور نیز باید در جهت مثلثاتی حرکت کنیم و برعکس.

☞ تنش های اصلی:

در روی دایره مور، نقطه P_1 ، معرف تنش اصلی \max است، چرا که هم تنش قائم به \max مقدار خود رسیده و هم تنش برشی صفر است. نقطه P_2 معرف تنش اصلی \min است که با اختلاف 180° با P_1 قرار دارد.

$$s_1 = oc + cp_1 = \frac{s_x + s_y}{2} + R, \quad R = \sqrt{\left(\frac{s_x - s_y}{2}\right)^2 + t_{xy}^2}$$

از دایره مور

$$\text{و تنش اصلی } \min \text{ نیز } \begin{cases} \cos 2q_{P_1} = \frac{s_x - s_y}{2R} \\ \sin 2q_{P_2} = \frac{t_{xy}}{0} \end{cases} \text{ زاویه بین صفحه اصلی و محور } x \text{ نیز برابر است:}$$

$$s_2 = \frac{s_x + s_y}{2} - R \text{ برابر است با:}$$

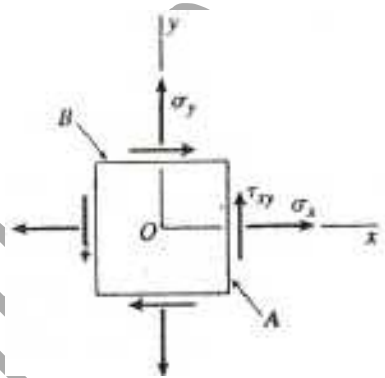
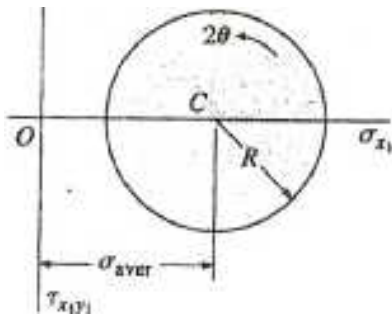
تنش هاي جهشي حداكثر:

نقاط S_2, S_1 مربوط به صفحاتي هستند كه تنش برشي حداكثر مثبت و منفي روي آنها رخ مي دهد. زاوية اين صفحات تا نقاط P_2, P_1 برابر 90° است. پس صفحه تنش هاي جهشي \max ، زاوية 45° مي سازد مقدار تنش جهشي حداكثر برابر با شعاع دايرة مورد است و تنش

$$\frac{S_x + S_y}{2}$$

قائمي كه روي اين صفحات عمل مي كند:

حالتهاي خاص:



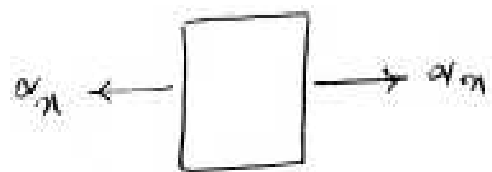
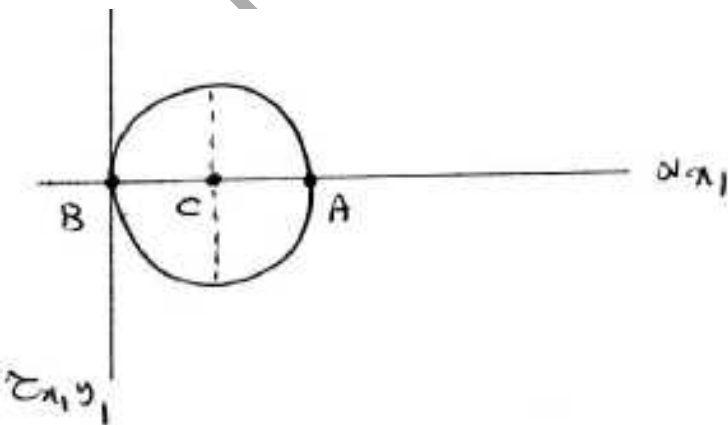
- در تنش دو محوري: وجوه y, x همان صفحات اصلي هستند. تنش برشي حداكثر: $\frac{S_x - S_y}{2}$

تنش روي صفحه مایل با زاوية q برابر است با:

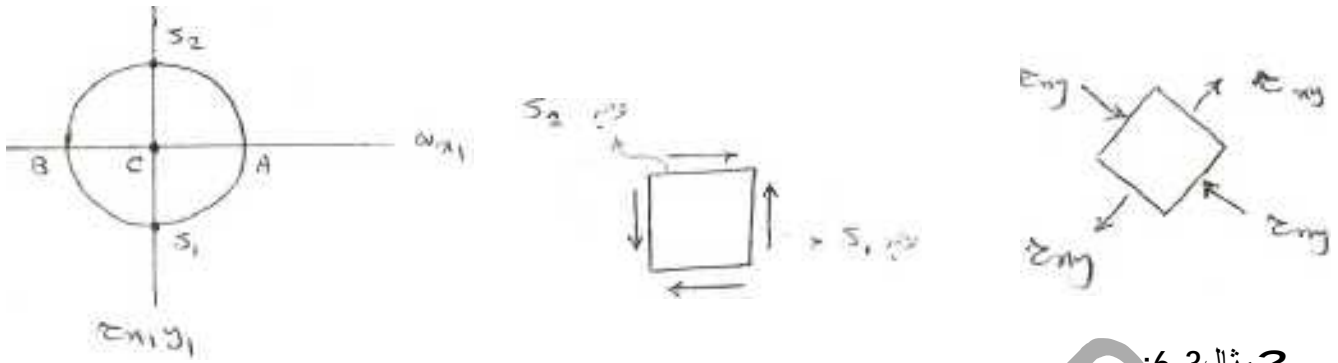
$$\begin{cases} S_{x_1} = \frac{S_x + S_y}{2} + \frac{S_x - S_y}{2} \cos 2q \\ t_{x_1 y_1} = -\frac{S_x - S_y}{2} \sin 2q \end{cases}$$

در حالت تنش تك محوري: باز هم وجوه y, x صفحات اصلي هستند.

تنش جهشي حداكثر روي صفحه 45° اتفاق مي افتد و مقدارش: $\frac{S_x}{2}$



برش خالص:



مثال 3-6:

در نقطه ای بر روی یک مولد برق تنش های وارده مطابق شکل عبارتند از:

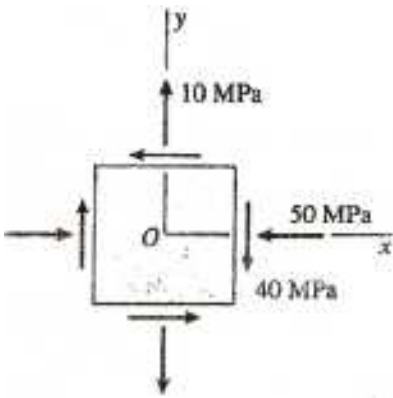
$\sigma_x = -50 \text{ MPa}$ و $\sigma_y = 10 \text{ MPa}$ و $\tau_{xy} = -40 \text{ MPa}$ با استفاده

از دایره مور کمیت های زیر را بدست آورید:

(a) تنش های ایجاد شده بر روی یک المان مایل با زاویه $\theta = 45^\circ$.

(b) تنش های اصلی؟

(c) تنش برشی حداکثر؟



FARDIN GASEMPOUR

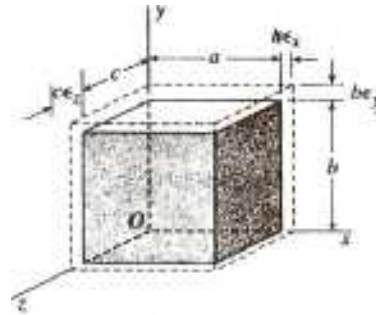
☞ قانون هوک برای تنش مسطح:

در مطالعه کرنش های ایجاد شده، در مورد موادی بحث می کنیم که روشها زیر را برآورده سازند:

1- همگن و ایزوتروپ باشند، یعنی خواص آنها در تمام نقاط جسم و در تمام جهات یکسان باشد.

2- رفتار مصالح از قانون هوک تبعیت کند یعنی ارتجاعی خطی باشد.

تغییر ابعاد المان:



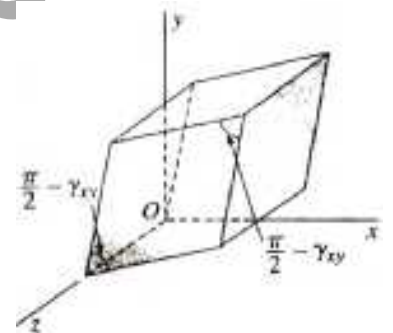
با استفاده از اصل جمع آثار (بر هم نهی) داریم:

$$e_x = \frac{s_x}{E} - \nu \frac{s_y}{E} \rightarrow e_x = \frac{1}{E}(s_x - \nu s_y)$$

$$e_y = \frac{1}{E}(s_y - \nu s_x)$$

$$e_z = -\nu \frac{s_x}{E} - \nu \frac{s_y}{E} \rightarrow e_z = -\frac{\nu}{E}(s_x + s_y)$$

$$(کرنش برشی) \rightarrow g_{xy} = \frac{t_{xy}}{G}$$



- تنش های قائم هیچ اثری بر کرنش جهشی ندارند و برعکس.

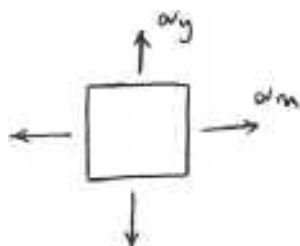
$$\begin{cases} e_x = \frac{1}{E}(s_x - \nu s_y) \\ e_y = \frac{1}{E}(s_y - \nu s_x) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} s_x = \frac{E}{1-\nu^2}(e_x - \nu e_y) \\ s_y = \frac{E}{1-\nu^2}(e_y + \nu e_x) \end{cases}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$


☞ در حالت خاص تنش دو محوری:

بعلت مستقل بودن اثر تنش های قائم و برشی، e_x, e_y همان روابط قبلی هستند و فقط $g_{xy} = 0$ خواهد

شد.



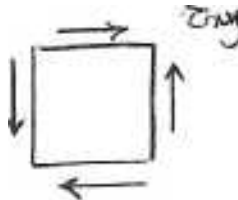
☞ در حالت تنش تک محوري:



$$s_y = 0 \rightarrow e_x = \frac{s_x}{E}$$

$$e_y = e_z = -\nu \frac{s_x}{E}$$

☞ در حالت برشي خالص:



$$e_x = e_y = e_z = 0$$

$$g_{xy} = \frac{t_{xy}}{G}$$

☞ تغيير حجم واحد:

حجم اوليه المان $V_0 = abc$

$$V_1 = (a + ae_x)(b + be_y)(c + ce_z)$$

$$V_1 = abc(1 + e_x)(1 + e_y)(1 + e_z)$$

$$V_1 = abc(1 + e_y + e_x + e_z)(1 + e_z) = 1 + e_z + e_y + e_y e_z + e_x e_z + e_x e_y + e_x e_y e_z$$

$$V_1 = abc(1 + e_x + e_y + e_z)$$

$$\Delta V = V_1 - V_0 = abc(e_x + e_y + e_z)$$

$$e = \frac{\Delta V}{V_0} = e_x + e_y + e_z = e_v \rightarrow \text{تغيير حجم واحد يا تغيير حجم نسبي}$$

این رابطه برای هر نوع مصالح بهتر است به شرط آنکه کرنش‌ها بسیار کوچک باشند و نیز برای تمام حالات تنش معتبر است. مشاهده می‌شود که کرنش جهشی تأثیری در تغییر حجم ماده ندارد. ◀ اگر ماده از قانون هک تبعیت کند، داریم (در حالت تنش صفحه ای):

$$\begin{cases} e_x = \frac{1}{E}(s_x - \nu s_y) \\ e_y = \frac{1}{E}(s_y - \nu s_x) \\ e_z = \frac{\nu}{E}(s_x - \nu s_y) \end{cases} \quad \begin{cases} e_v = \frac{1}{E}[s_x - \nu s_y + s_y - \nu s_x - \nu s_x - \nu s_y] \\ e_v = \frac{1}{E}[s_x(1 - 2\nu) + s_y(1 - 2\nu)] \end{cases}$$

$$e_v = \frac{1 - 2\nu}{E}(s_x + s_y)$$

$$\text{در حالت تک محوري} \rightarrow s_y = 0 \rightarrow e_v = \frac{1 - 2\nu}{E} s_x = \frac{1 - 2\nu}{E} E e_x = e_x(1 - 2\nu)$$

- تنش سه محوري:

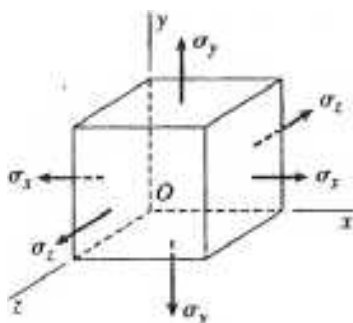
اگر يك المان در سه امتداد عمود بر هم تحت اثر تنش هاي s_x, s_y, s_z

قرار گیرد، مي گوييم المان تحت اثر تنش سه محوري قرار دارد.

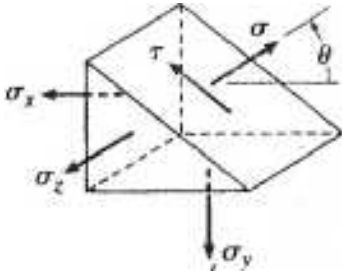
از آنجا که روي وجوه z, y, x تنش جهشي وجود ندارد، لذا این وجوه،

صفحات اصلي بوده و تنش هاي

s_x, s_y, s_z نیز، تنش هاي اصلي مي باشند.



اگر يك صفحه مایل، به موازات محور z ، المان را قطع کند، در صفحه ایجاد شده، تنش قائم s و تنش جهشي t ، هر دو به موازات صفحه xy عمل می کنند. از آنجا که تنش هاي t, s از تعادل نیروها در صفحه xy بدست می آیند، لذا مستقل از s_z می باشند و برای تعیین آنها از روابط قبلي و دایرة مور میتوان استفاده کرد. این نتیجه برای صفحات مایلي که به موازات محورهاي y, x نیز المان را قطع کنند، صادق است.



از آنجا که تنش جهشي \max بر روی صفحاتي رخ می دهد که با صفحات اصلي زاویه 45° می سازد، لذا در تنش سه محوري، حداکثر تنش جهشي بر روی صفحاتي رخ می دهد که با محورهاي z, y, x زاویه 45° می سازند.

اگر المان 45° حول محور z دوران کند داریم:

$$(t_{\max})_z = \pm \frac{s_x - s_y}{2}$$

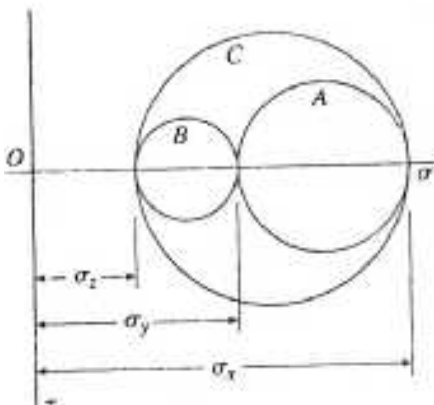
اگر المان 45° حول محور x دوران کند داریم:

$$(t_{\max})_x = \pm \frac{s_y - s_z}{2}$$

اگر المان 45° حول محور y دوران کند داریم:

$$(t_{\max})_y = \pm \frac{s_x - s_z}{2}$$

تنش جهشي \max مطلق، بزرگترین مقادير فوق است.



-اگر المان حول محور z دوران کند میتوان دایرة محور A را رسم نمود (با فرض $s_x > s_y$ و هر دو مثبت) اگر المان حول محور x دوران کند: دایرة B

اگر المان حول محور y دوران کند: دایرة C
 \max - تنش جهشي برابر شعاع بزرگترین دایره است. تنش هاي قائم مربوط به صفحات تنش جهشي \max نیز برابر است با میانگین تنش هاي اصلي مربوط.

قانون هذک در تنش سه بعدي: مشابه حالت تنش مسطح میتوان نوشت:

$$\begin{cases} e_x = \frac{s_x}{E} - \frac{\nu}{E}(s_y + s_z) \\ e_y = \frac{s_y}{E} - \frac{\nu}{E}(s_x + s_z) \\ e_z = \frac{s_z}{E} - \frac{\nu}{E}(s_x + s_y) \end{cases}$$

می دانیم که این رابطه برای هر نوع مصالح با شها کوچک بودن کرنش ها صادق است.

$$e_v = \frac{\Delta V}{V} = e_x + e_y + e_z$$

اگر ماده از قانون هذک تبعیت کند، با جاگذاري مقادير e ها داریم:

$$e_v = \frac{1}{E}(s_x + s_y + s_z) - \frac{\nu}{E} \times 2(s_x + s_y + s_z)$$

$$e_v = \frac{1 - 2\nu}{E}(s_x + s_y + s_z)$$

حالت خاص: در حالي كه المان تحت تنش هيدرواستاتيک قرار دارد، داريم: $s_x = s_y = s_z = s_0$. اين حالت را تنش كروي نيز مي گويند. دواير مور در اين حالت تبديل به يك نقطه مي شوند. پس در روي تمامي صفحات تنش برشي صفر است و تنش قائم نيز برابر مقدار ثابت s_0 است. پس هر صفحه، يك صفحه اصلي است. کرنش ها نيز در تمام جهات يکسان هستند:

$$e_0 = \frac{s_0}{E} - \frac{V}{E}(s_0 + s_0)$$

$$e_0 = \frac{s_0}{E}(1 - 2\nu)$$

$$e_v = \frac{\Delta V}{V} = 3e_0 = \frac{3s_0}{E}(1 - 2\nu)$$

حالت کرنش صفحه اي يا مسطح (plane strain):

يك المان مكعبي را در نظر بگيريد. اگر تغيير شكل اين المان فقط در صفحه xy رخ دهد، در آن صورت سه مؤلفه کرنش وجود خواهد داشت: e_x, e_y, g_{xy} . الماني كه تحت اثر اين کرنش ها قرار گرفته باشد در حالت کرنش مسطح قرار دارد. پس در حالت کرنش مسطح داريم: $e_z = g_{xz} = g_{yz} = 0$. کرنش هاي ديگر (g_{xy}, e_y, e_x) ممكن است داراي مقدار غير صفر باشند. شرايط کرنش صفحه اي زماني ايجاد مي شود كه وجوه مقابل و پشت المان در مقابل تغيير مكان قيد شده باشند. در حالت تنش مسطح داشتيم: $s_z = t_{xz} = t_{yz} = 0$ و تنش هاي ديگر ممكن است داراي مقدار باشند. بطور كلي حالت تنش مسطح و کرنش مسطح همزمان اتفاق نمي افتند. در يك المان تنش مسطح، کرنش در جهت z مخالف صفر است پس المان در حالت کرنش مسطح نيست. در حالت کرنش مسطح نيز معمولاً در امتداد z تنش وجود دارد. يك حالت استثناء زماني است كه المان تنش مسطح تحت اثر تنش هاي قائم برابر و مختلف علامت $(s_x = -s_y)$ قرار گيرد، كه المان هم در حالت تنش مسطح و هم کرنش مسطح قرار دارد:

$$e_z = -\frac{V}{E}(s_x + s_y) = 0$$

حالت خاص ديگر زماني است كه ضريب پواسون صفر باشد $(\nu = 0)$

$$e_z = 0$$

فصل هفتم: کاربردهای تنش صفحه ای

مخازن کروی تحت فشار:

اگر ضخامت جدار مخزن نسبت به شعاع به شعاع و یا طول آن کوچک باشد، آنرا پوسته می نامند. در مورد مخازن، زمانی که نسبت شعاع به ضخامت جدار بزرگتر از 10 باشد، سازه را جدار نازک می نامند. برای تعیین تنش کششی در جدار مخزن، کره را بطور قائم بدو نیم تقسیم نموده و دیگران جسم آزاد را رسم می کنیم.



$$\sum F_x = 0 \quad p p r^2 = s (2 p r_m t) \quad r_m = r + \frac{t}{2}$$

$$s = \frac{P \cdot r^2}{2 r_m t} \quad r_m \approx r \quad \text{در مخزن جدار نازک} \quad s = \frac{P \cdot r}{2 t}$$

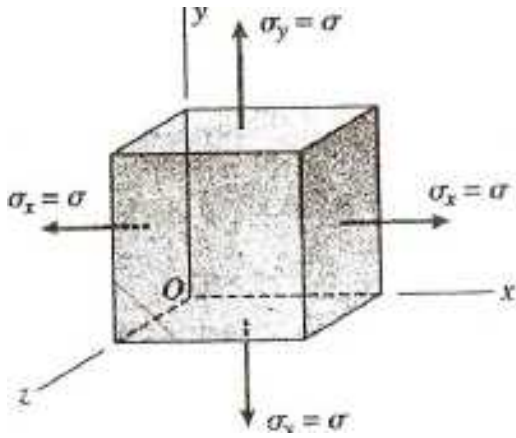
مقطع مورد نظر را میتوان در محل دیگری نیز انتخاب نمود.

$$(p \cdot a^2) p = 2 p a t \cdot (s \cos a)$$

$$p a^2 p = 2 p a t \cdot s \cdot \frac{a}{r} \rightarrow s = \frac{P \cdot r}{2 t}$$

پس اگر کره را در هر امتداد دلخواه برش دهیم، خواهیم دید که کره تحت اثر تنش های کششی یکنواخت در تمامی جهات قرار دارد. این تنش ها را که مماس بر سطح خمیده پوسته عمل می کنند (s) را تنش های غشایی می نامند.



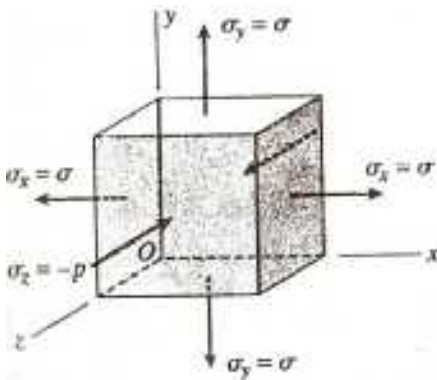


تنش روی سطح خارجی و داخلی مخزن:
روی سطح خارجی چون بارگذاری دیگری وجود ندارد،
المان در حالت تنش دو محوری است. چون $S_x = S_y = S$ پس دایره مور تبدیل به یک نقطه خواهد شد. پس تمامی صفحات، صفحه اصلی بوده و روی آنها تنش قائم ثابت و تنش برشی صفر است. (در دوران المان حول محور Z)

$$S_1 = S_2 = S = \frac{P.r}{2t}, S_3 = 0$$

اگر المان حول محورهای X یا Y دوران کند، در روی صفحاتی که با دوران 45° نسبت به X و Y بدست می آیند، تنش جهشی حداکثر خواهد شد:

$$t_{\max} = \frac{S}{2} = \frac{P.r}{4t}$$



در سطح داخلی مخزن:
المان در حالت تنش سه محوری قرار دارد. تنش های نشان داده شده همگی تنش های اصلی می باشند:

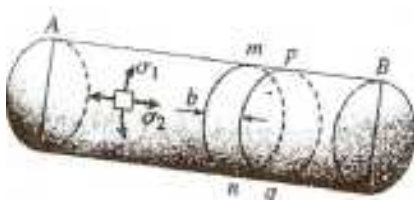
$$\begin{cases} S_1 = S_2 = \frac{P.r}{2t} \\ S_3 = P \end{cases}$$

در دوران حول محور Z: دایره مور یک نقطه خواهد بود.
در دوران حول محور X یا Y:

$$t_{\max} = \frac{S - (-P)}{2} = \frac{S + P}{2} = \frac{P.r}{4t} = \frac{P}{2}$$

با فرض اینکه نسبت $\frac{r}{t}$ بزرگ است، میتوان از عدد 1 در مقابل $\frac{P.r}{4t}$ جمله $t_{\max} = \frac{P}{2} = \left(\frac{r}{2t} + 1\right) \approx \frac{P.r}{4t}$

$\frac{r}{2t}$ صرف نظر کرد و لذا تنش های اصلی و تنش جهشی حداکثر مانند سطح خارجی مخزن خواهد شد. پس میتوان با تقریب قابل قبول، از S_3 در جهت Z، صرف نظر کرده و روی سطح داخلی نیز مانند سطح خارجی از روابط تنش دو محوری استفاده نمود.



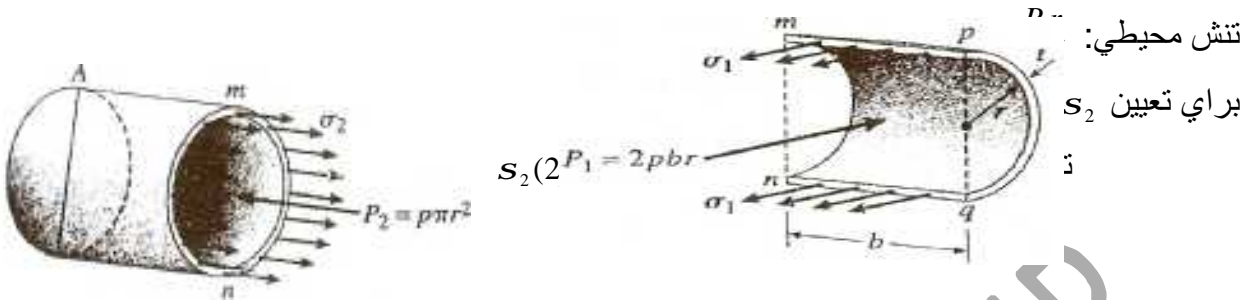
مخازن استوانه ای تحت فشار:
بعلمت تقارن در هندسه و بارگذاری سازه، هیچ گونه تنش برشی در وجوه المان وجود ندارد. (تنش دو محوری)

S_1 : تنش محیطی، S_2 : تنش طولی

برای تعیین s_1 :

تنش و فشار سمت راست و چپ المان نشان داده نشده اند چرا که در معادلات تعادل وارد نمی شوند.

$$P_1 = p(2br)$$



نتیجه اینکه در یک مخزن استوانه ای، تنش محیطی دو برابر تنش طولی است. اگر دو خط جوش برای مخزن در نظر بگیریم، مقاومت خط جوش طولی باید دو برابر خط جوش محیطی باشد.

ج تنش روی سطح خارجی و داخلی مخزن استوانه ای: روی سطح خارجی المان در حالت تنش دو محوری است. در دوران حول محور Z، تنش جهشی حداکثر برابر است با:

$$(t_{\max})_z = \frac{s_1 - s_2}{2} = \frac{P.r}{4t}$$

تنش جهشی حداکثر خارج از صفحه نیز بر روی صفحاتی که با دوران 45° حول محورهای X و Y بدست می آید، رخ می دهد:

$$(t_{\max})_x = \frac{s_1}{2} = \frac{P.r}{2t}, \quad (t_{\max})_y = \frac{s_2}{2} = \frac{P.r}{4t}$$

پس تنش جهشی حداکثر مطلق برابر است با:

$$t_{\max} = \frac{s_1}{2} = \frac{P.r}{2t}$$

روی سطح داخلی:

در دوران حول محورهای X، Y و Z تنش های جهشی حداکثر عبارتند از:

$$(t_{\max})_x = \frac{s_1 - s_3}{2} = \frac{P.r}{2t} + \frac{P}{2}$$

$$(t_{\max})_y = \frac{s_2 - s_3}{2} = \frac{P.r}{4t} + \frac{P}{2}$$

$$(t_{\max})_z = \frac{s_1 - s_2}{2} = \frac{P.r}{2t} + \frac{P.r}{4t}$$

تنش جهشی $(t_{\max})_x$ بزرگترین تنش جهشی است. مانند مخزن کروی بعلت جدار نازک بودن میتوان

از جمله $\frac{P}{2}$ در مقابل $\frac{P.r}{2t}$ صرف نظر کرده و با این فرض مسائل مخازن جدار نازک، روی سطح

داخلی و خارجی مخازن، تنش دو محوری است.

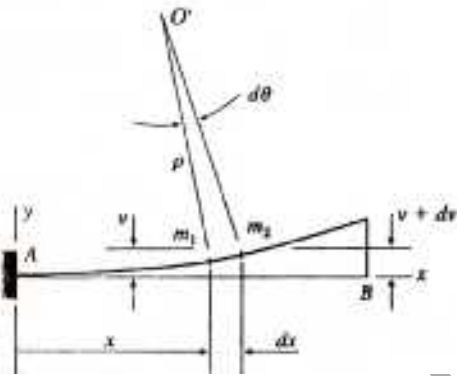
فصل هشتم: تغییر مکان تیرها

معادله دیفرانسیل منحنی تغییر مکان تیر

یک تیره طره را تحت اثر بار منفرد در انتها در نظر می‌گیریم. در اثر اعمال بار، محور تیر بصورت یک منحنی تغییر شکل می‌دهد که آنرا منحنی خیز تیر یا منحنی ارتجاعی تیر می‌نامند.



فرض می‌کنیم که صفحه xy ، صفحه تقارن تیر است و تمامی نیروها در همین صفحه وارد می‌شوند، لذا منحنی ارتجاعی تیر نیز در صفحه xy خواهد بود. خیز یا تغییر مکان (v) عبارتست از جابجایی هر نقطه بر روی محور تیر در امتداد محور y مانند قبل دو نقطه m_1 و m_2 را روی منحنی تغییر مکان در نظر می‌گیریم.

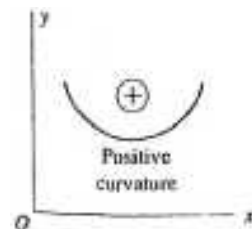
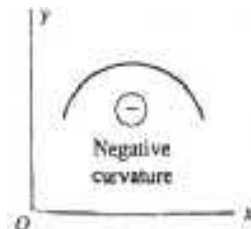
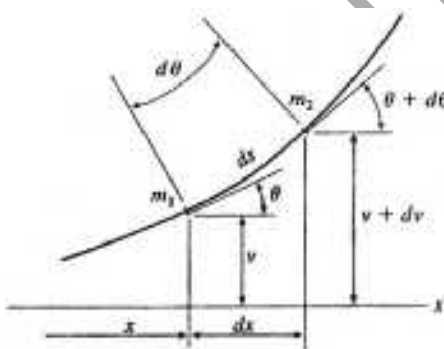


از قبل می‌دانیم که: اگر در نقاط m_1 و m_2 بر مماس بر منحنی، عمود رسم کنیم، این عمودی همدیگر را در مرکز انحناء (O') قطع می‌کنند. شعاع انحناء (r) و عکس آن را انحناء (k) می‌نامند:

$$k = \frac{1}{r}$$

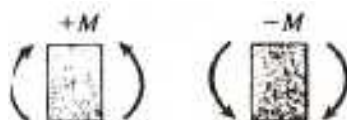
$$ds = rdq \rightarrow k = \frac{1}{r} = \frac{dq}{ds}$$

$$\text{شیب منحنی تغییر مکان} = \frac{dv}{dx} = \text{togg}$$

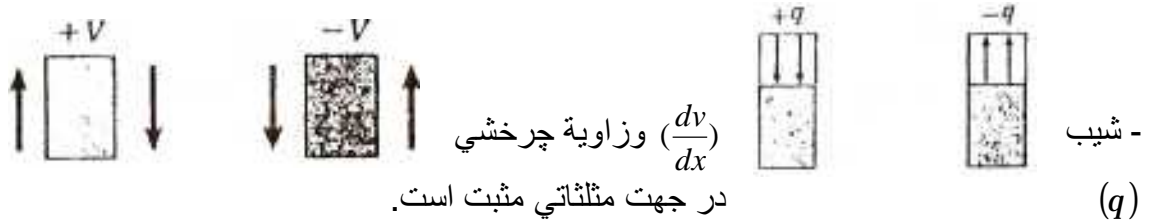


با معلوم بودن لنگر خمشی (M) و صلبیت خمشی (EI) بصورت تابعی از x ، میتوان با انتگرال گیری از معادله فوق تغییر مکان تیر را محاسبه نمود.

یادآوری قرارداد علائم مثبت:



- تغییر مکان V به سمت بالا مثبت است.



با استفاده از این روابط میتوان به معادلات دیگری نیز رسید.

$$\begin{cases} \frac{dM}{dx} = v \\ \frac{dV}{dx} = -q \end{cases}$$

در تیرهای غیر منشوری: صلبیت خمشی تغییرات (EI) :
 منحنی ارتجاعی تیر را میتوان از حل هر یک از سه معادله مقابل بدست آورد.

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{M}{EI_x} \rightarrow EI_x \frac{d^2V}{dx^2} = M \quad (1)$$

$$\frac{d}{dx} = (EI_x \frac{d^2V}{dx^2}) = \frac{dM}{dx} = V \quad (2)$$

$$\frac{d}{dx} = (EI_x \frac{d^2V}{dx^2}) = \frac{dv}{dx} = -q \quad (3)$$

در تیرهای منشوری: EI ثابت است.

$$EI \frac{d^2V}{dx^2} = M \quad (1)$$

$$EI \frac{d^3V}{dx^3} = V \quad (2)$$

$$EI \frac{d^4V}{dx^4} = -q \quad (3)$$

معادلات فوق را میتوان به این صورت نیز نوشت:

$$[EIV'' = M, EIV''' = V, EIV'''' = -q]$$

رابطه دقیق انحناء تیرها:

در استخراج معادلات فوق فرض کردیم که قانون هُک برقرار است و شیب منحنی تغییر مکان نیز کوچک است (q) اگر شیب منحنی کوچک نباشد نمی توان فرض کرد که: $ds \approx dx$, $\text{tog } q \approx q$

$$\text{tog } q = \frac{dv}{dx} \rightarrow q = \text{Arctog } \frac{dv}{dx} \text{ یا } q = \text{Arxtog } V'$$

$$k = \frac{1}{r} = \frac{dq}{ds} = \frac{dq}{dx} \frac{dx}{ds} \quad , \quad \frac{dq}{dx} = \frac{d}{dx} (\text{Aro tog } V') = \frac{V''}{1+(V')^2}$$

$$ds^2 = dx^2 + dv^2 \rightarrow ds = (dx^2 + dv^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{ds}{dx} = \left[\left(\frac{dx}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right]^{1/2} = [1 + (v')^2]^{1/2} \Rightarrow \frac{dx}{ds} = \frac{1}{[1 + (v')^2]^{1/2}}$$

$$(1), (2) \Rightarrow k = \frac{1}{r} = \frac{dq}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{v''}{[1 + (v')^2]^{3/2}} = \frac{M}{EI}$$

$$q \rightarrow (V')^2 \approx 0 \rightarrow k = \frac{1}{r} = V'' = \frac{M}{EI}$$

FARDIN GASEMPOUR