

www.icivil.ir

پرتابل جامع دانشجویان و مهندسین عمران

ارائه کتابها و مجلات رایگان مهندسی عمران

بهترین و عتیقین مقالات روز عمران

ازهن های تخصصی مهندسی عمران

فرمودشگاه تخصصی مهندسی عمران

اصل انرژی در کانالهای باز

معادله انرژی (Energy Equation)

$$H = \alpha \frac{V^2}{2g} + d \cos\theta + Z$$

$$H = \alpha \frac{V^2}{2g} + y \cos^2\theta + Z$$

$$\text{If } \theta < 6^\circ, \alpha = 1 \Rightarrow H = \frac{V^2}{2g} + y + Z$$

$$\alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} + d_1 \cos\theta + Z_1 - h_f = \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + d_2 \cos^2\theta + Z_2$$

$$\frac{V_1^2}{2g} + y_1 + Z_1 - h_f = \frac{V_2^2}{2g} + y_2 + Z_2$$

کاربردهایی از معادله انرژی

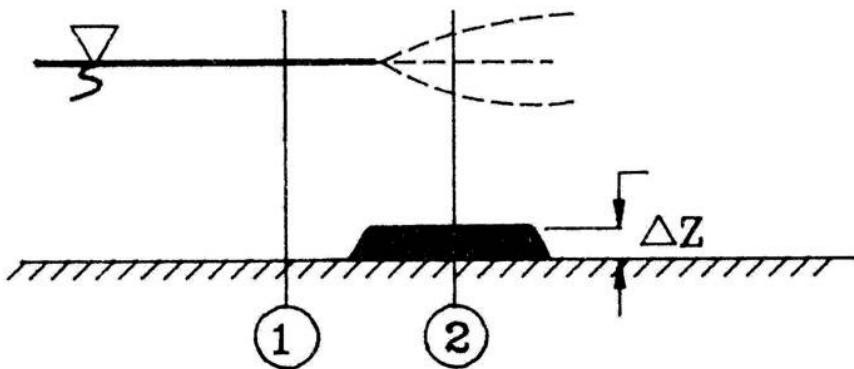
تحلیل جریان در آثر تغییر ارتفاع کف کanal

فرضیات: ۱- مقطع مستطیلی و عرض b .

۲- جریان یکنواختی با دبی Q .

۳- در مسیر کanal یک برآمدگی هموار با طول کوتاه (هموار بودن مانع از ایجاد افت انرژی موضعی و کوتاه بودن مسیر باعث کاهش افت انرژی طولی می‌گردد).

۴- ارتفاع ثابت ΔZ در سرتاسر عرض

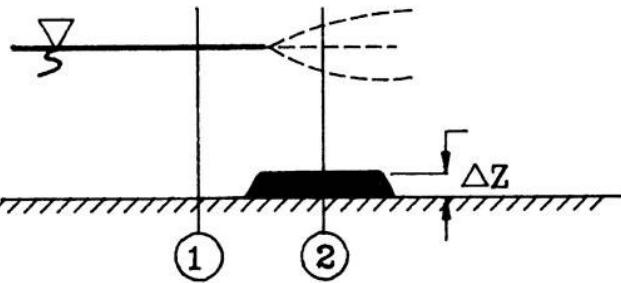


تغییرات سطح آب و یا عمق جریان در حین رسیدن به این مانع چگونه خواهد بود؟

معادله انرژی بین دو مقطع با فرض شیب کم کanal و $\alpha = 1$

$$H_1 = H_2$$

$$\frac{V_1^2}{2g} + y_1 = \frac{V_2^2}{2g} + y_2 + \Delta Z$$



$$V_1 y_1 b_1 = V_2 y_2 b_2 \Rightarrow \begin{cases} V_1 y_1 = V_2 y_2 = q \\ q = \frac{Q}{b} \end{cases}$$

$$\frac{q^2}{2gy_1^2} + y_1 = \frac{q^2}{2gy_2^2} + y_2 + \Delta Z$$

سه جواب برای y_2 بدست خواهد آمد که جوابها می بایست از نظر فیزیکی تعبیر گردند

بررسی جریان در حالت تغییر عرض کanal

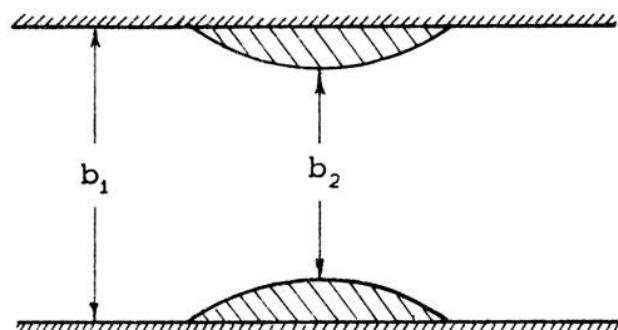
فرضیات: ۱- مقطع مستطیلی و عرض b_1 در مقطع اول و b_2 در مقطع دوم
۲- جریان یکنواختی با دبی Q .

$$H_1 = H_2$$

$$\frac{V_1^2}{2g} + y_1 = \frac{V_2^2}{2g} + y_2$$

$$q_1 = V_1 y_1 = \frac{Q}{b_1}$$

$$q_2 = V_2 y_2 = \frac{Q}{b_2}$$



شکل ۲-۳: پلان کanal مستطیلی با تنگ شدگی در عرض

$$\Rightarrow \frac{q_1^2}{2gy_1^2} + y_1 = \frac{q_2^2}{2gy_2^2} + y_2$$

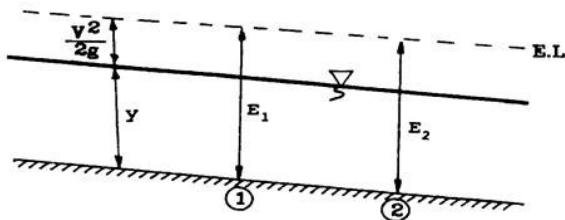
سه جواب برای y_2 بدست خواهد آمد که جوابها می بایست از نظر فیزیکی تعبیر گردند

انرژی مخصوص (Specific Energy)

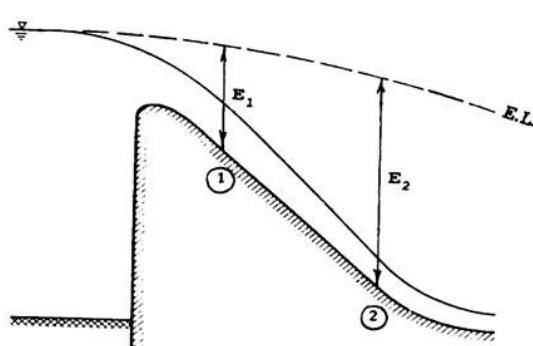
انرژی مخصوص عبارتست از انرژی در هر سطح مقطع برای واحد وزن، زمانیکه نسبت به کف کanal (به عنوان سطح مبنی) در نظر گرفته شود.

$$E = \alpha \frac{V^2}{2g} + d \cos \theta$$

$$E = \alpha \frac{V^2}{2g} + y \cos^2 \theta = y \cos^2 \theta + \alpha \frac{Q^2}{2gA^2}$$



الف) جریان یکنواخت در کanal با شیب کم



ب) جریان از روی سربریز

شکل ۲-۴: مقایسه مفهوم انرژی و انرژی مخصوص

انرژی مخصوص در کانالهای مستطیلی با شیب کم

فرضیات: ۱- مقطع مستطیلی و عرض ثابت b

۲- جریان با شلت ثابت Q .

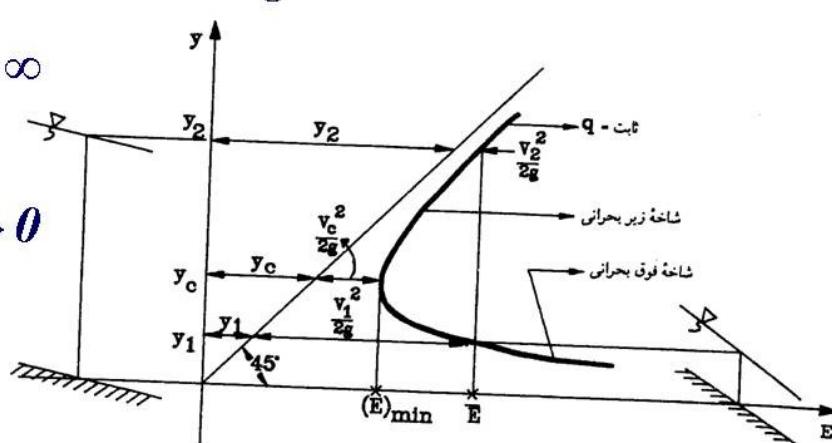
۳- شیب کم

$$E = y + \alpha \frac{q^2}{2gy^2}$$

$$\text{If } (\alpha = 1) \Rightarrow (E - y)y^2 = \frac{q^2}{2g} = \text{Cont.}$$

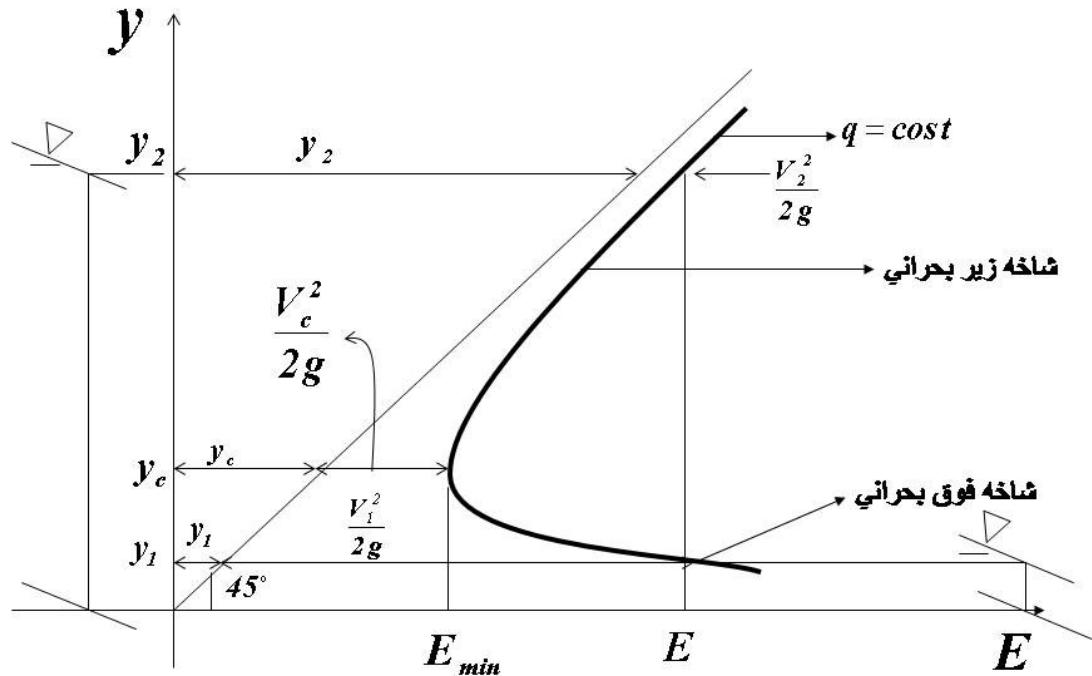
$$y \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{V^2}{2g} \rightarrow \infty$$

$$y \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{V^2}{2g} \rightarrow 0$$



شکل ۲-۵: معنی انرژی مخصوص بر حسب عمق جریان

$$(E - y) y^2 - \frac{q^2}{2g} = 0$$



نکته اول: مینیمم مقدار E چیست و چه خصوصیاتی را منعکس می‌کند؟

$$E = y + \frac{q^2}{2gy^2} \Rightarrow \frac{dE}{dy} = 1 + \frac{q^2}{2g} \left(\frac{-2}{y^3} \right) = 1 - \frac{2q^2}{2gy^3}$$

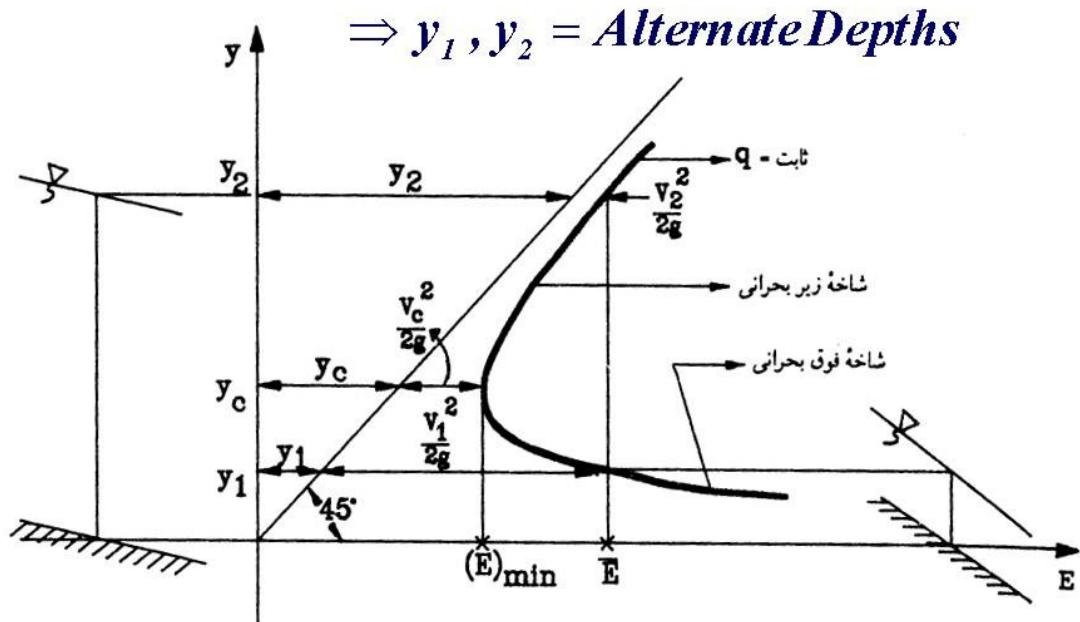
$$\frac{dE}{dy} = 0 \Rightarrow 1 - \frac{2q^2}{2gy^3} = 0 \Rightarrow \frac{q^2}{gy^3} = 1$$

$$y^3 = \left(\frac{q^2}{g} \right) \Rightarrow y = \left(\frac{q^2}{g} \right)^{1/3}$$

$$y = \left(\frac{V^2 y^2}{g} \right)^{1/3} = \frac{V^2}{gy} = 1 \Rightarrow \frac{V}{\sqrt{gy}} = Fr = 1$$

$$y_c = \left(\frac{q^2}{2g} \right)^{1/3} \Rightarrow E_{min} = y_c + \frac{V_c^2}{2g} = y_c + \frac{V_c^2 y_c}{2gy_c} \Rightarrow E_{min} = \frac{3}{2} y_c$$

نکته دوم به ازاء هر انرژی مخصوص ثابت E امکان شکل گیری دو عمق جریان وجود دارد $(y_2 \rangle y_c, Fr \langle 1), (y_1 \langle y_c, Fr \rangle 1)$



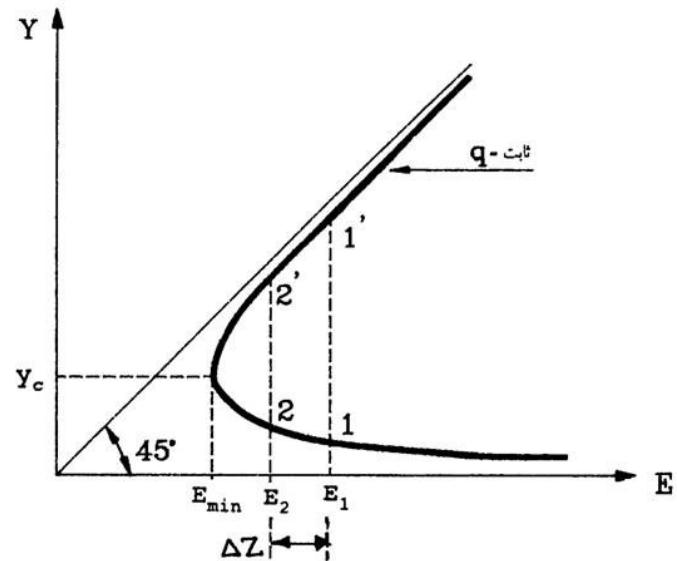
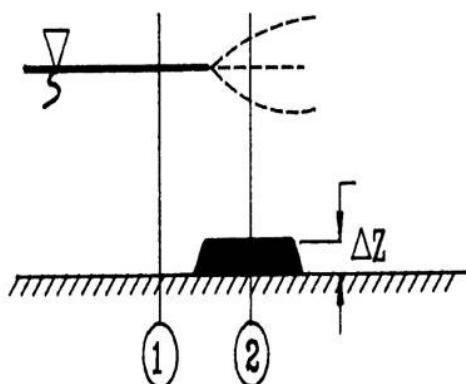
شکل ۲-۵: منحنی انرژی مخصوص بر حسب عمق جریان

تحلیل جریان ناشی از یک برآمدگی موضعی در کانال مستطیلی

$$y_1 + \frac{q^2}{2gy_1^2} = y_2 + \frac{q^2}{2gy_2^2} + \Delta Z$$

$$E_1 = E_2 + \Delta Z$$

$$\Rightarrow E_2 = E_1 - \Delta Z$$

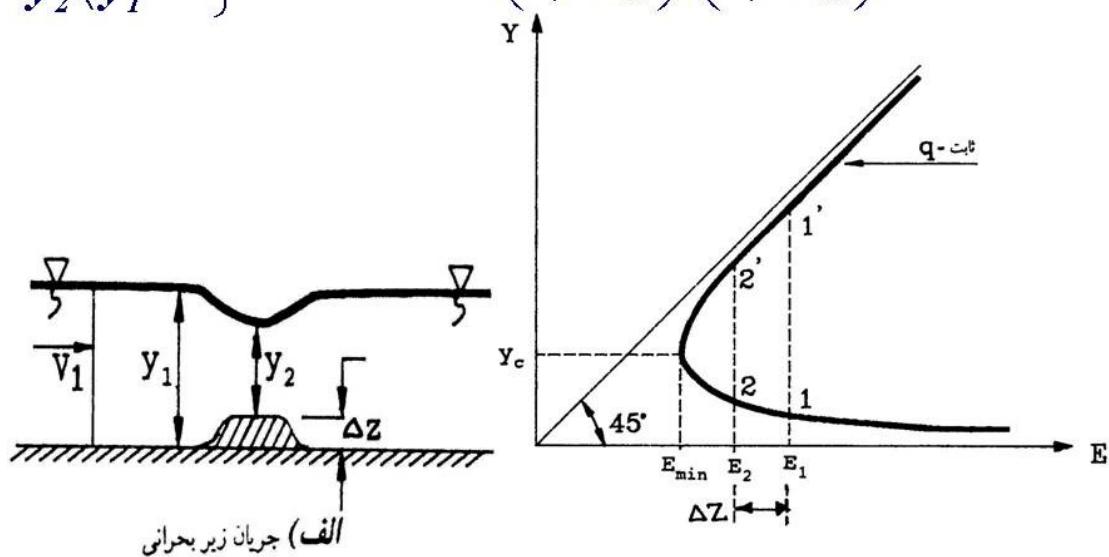


شکل ۲-۷: منحنی $E-y$

۱- در صورتیکه وضعیت جریان قبل از برآمدگی زیر بحرانی باشد (۱)

$$m_{curve} > 45^\circ \Rightarrow (y_2 + \Delta Z) < y_1$$

$$\left. \begin{array}{l} q = Cost. \\ y_2 < y_1 \end{array} \right\} \Rightarrow V_2 > V_1 \Rightarrow \left(\frac{V_2^2}{2g} \right) > \left(\frac{V_1^2}{2g} \right)$$



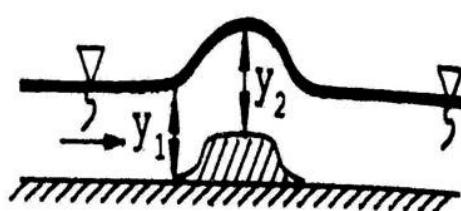
شکل ۲-۷: منحنی $E-y$

۲- در صورتیکه وضعیت جریان قبل از برآمدگی فوق بحرانی باشد (۲)

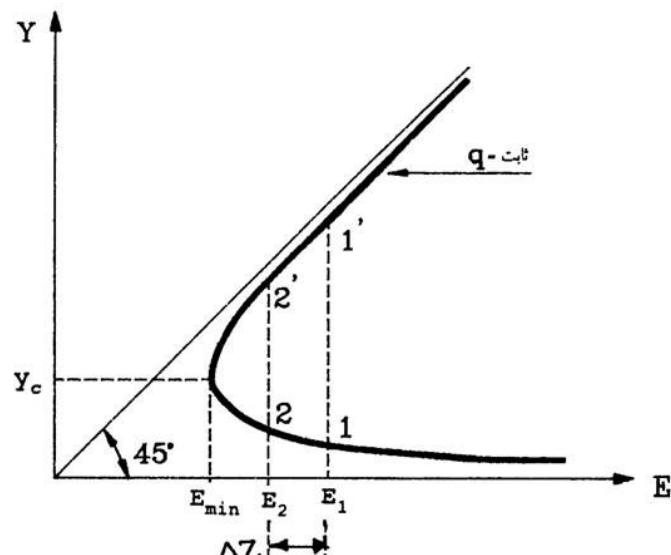
$$y_1 + \frac{q^2}{2gy_1^2} = y_2 + \frac{q^2}{2gy_2^2} + \Delta Z$$

$$E_1 = E_2 + \Delta Z$$

$$\Rightarrow E_2 = E_1 - \Delta Z$$



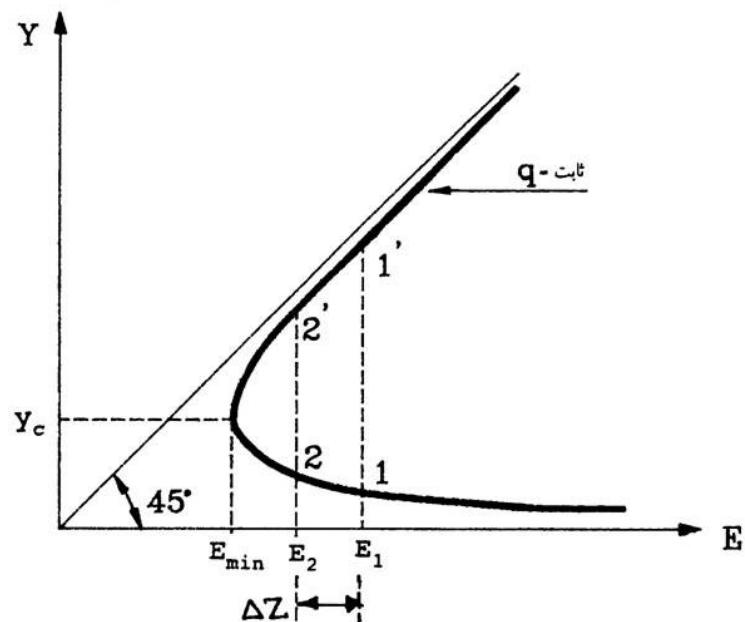
ب) جریان فوق بحرانی



شکل ۲-۷: منحنی $E-y$

۳- جهش از یک شاخه منحنی به شاخه دیگر امکان فیزیکی ندارد

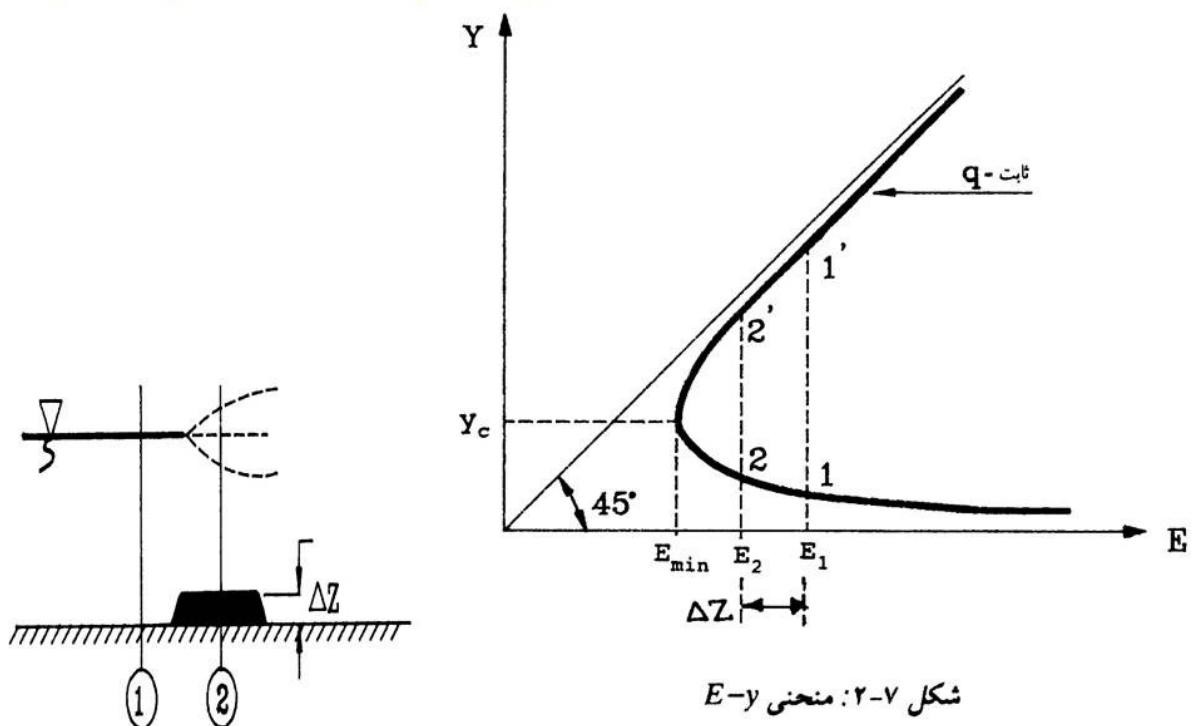
$$E_1 = E_2 + \Delta Z \Rightarrow E_2 = E_1 - \Delta Z$$



شکل ۲-۷: منحنی $E-y$

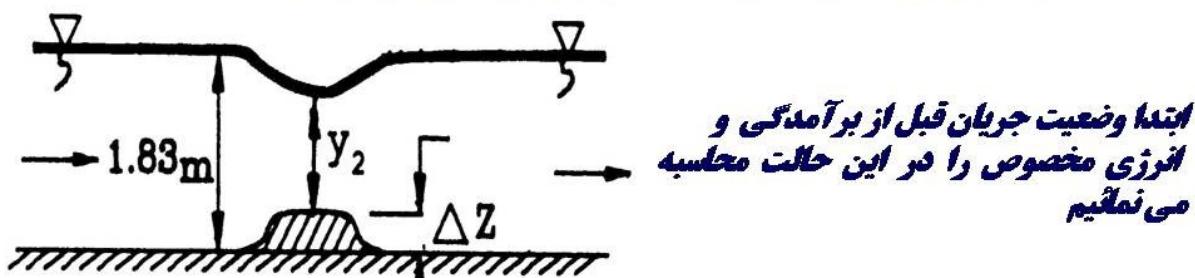
۴- در صورتیکه ارتفاع برآمدگی Δz بگونه‌ای باشد که $E_2 < E_{min}$ نمایم

$$E_1 = E_2 + \Delta Z \Rightarrow E_2 = E_1 - \Delta Z$$



شکل ۲-۷: منحنی $E-y$

مثال: آب به صورت یکنواخت با دبی ۹/۹۱ امتر مکعب در ثانیه و عمق ۱/۸۳ امتر در یک کنال مستطیلی به عرض ۵/۰ امتر جاری است.
 (الف) حداقل ارتفاع برآمدگی چقدر باید تا عمق زیرابر عمق بحرانی شود.



$$q = \frac{Q}{b} = \frac{9.91}{3.05} = 3.25 \text{ m}^3/\text{s.m}$$

$$y_c = \left(\frac{q^2}{g} \right)^{1/3} = \left(\frac{3.25^2}{9.81} \right)^{1/3} = 1.025 \text{ m} \Rightarrow y_1 > y_c \Rightarrow Fr < 1$$

$$E_1 = y_1 + \frac{q^2}{2gy_1^2} = 1.83 + \frac{3.25^2}{2 \times 9.81 \times 1.83^2} \approx 1.99 \text{ m}$$

برای بحرانی شدن در مقطع ۲، بایستی انرژی مخصوص در این مقطع برابر E_{min} باشد

$$E_{min} = \frac{3}{2}y_c = \frac{3}{2} \times 1.025 = 1.54 \text{ m}$$

$$E_1 = E_2 + \Delta Z \Rightarrow E_1 = E_{min} + \Delta Z_c$$

$$\Delta Z_c = 1.99 - 1.54 = 0.45 \text{ m}$$

$$\text{If } \Delta Z_c = 0.45 \text{ m} \Rightarrow y_1 = 1.83 \text{ m}$$

$$y_2 = y_c = 1.025 \text{ m}$$

$$\frac{\text{سطح}}{\text{بافت}} = y_1 - (y_2 + \Delta Z_c) = 1.83 - (1.025 + 0.45) = 0.35 \text{ m}$$

ب - میزان افت در سطح آب را هنگامیکه ارتفاع برآمدگی نصف حالت الی بشد محاسبه نمایید.

$$\Delta Z = \frac{0.45}{2} = 0.225 \text{ m}$$

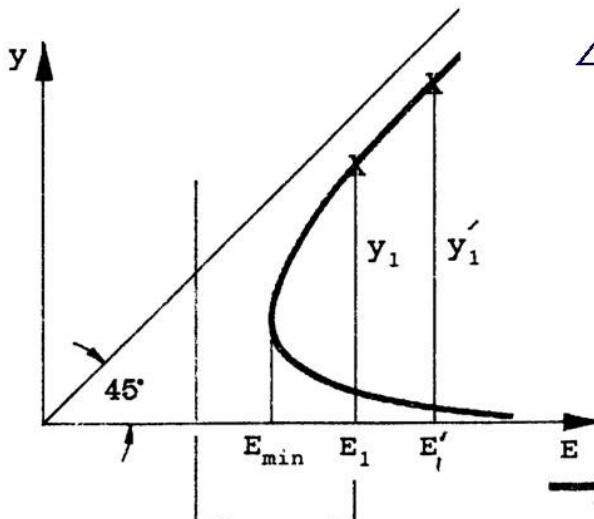
$$E_2 = E_1 - \Delta Z$$

$$y_2 + \frac{q^2}{2gy_2^2} = 1.99 - 0.225$$

$$\left. \begin{array}{l} y_2 + \frac{3.25^2}{2 \times 9.81 \times y_2^2} = 1.765 \\ y_c < y_2 < y_1 \end{array} \right\} \Rightarrow y_2 = 1.53 \text{ m}$$

$$\text{سطح افت} = y_1 - (y_2 + \Delta Z_c) = 1.83 - (1.53 + 0.225) = 0.075 \text{ m}$$

ج - در صورتیکه ارتفاع برآمدگی دو برابر حالت الی انتخاب گردد



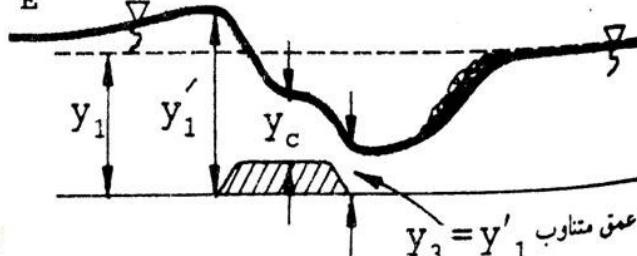
$$\Delta Z = 2\Delta Z_c = 2 \times 0.45 = 0.9 \text{ m}$$

$$E'_1 = E_2 + \Delta Z$$

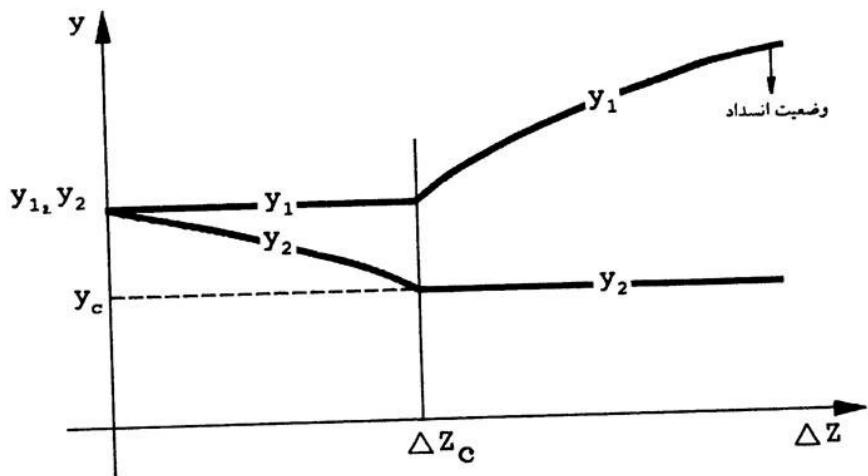
$$E'_1 = E_{min} + \Delta Z$$

$$E'_1 = 1.54 + 0.9 = 2.44$$

$$\begin{aligned} y'_1 + \frac{q^2}{2gy'^2} &= 2.44 \\ \Rightarrow y'_1 + \frac{3.25^2}{2 \times 9.81 \times y'^2} &= 2.44 \\ y'_1 &= y_1 \Rightarrow y'_1 = 2.35 \text{ m} \end{aligned}$$



$$\Delta z > \Delta z_c$$



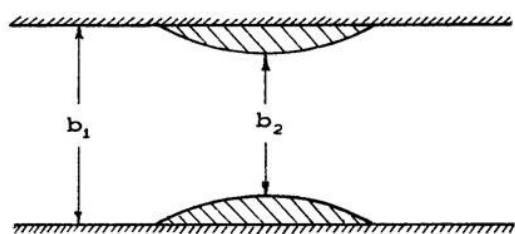
$$y_2 + \frac{q^2}{2gy_2^2} + \Delta Z = y_2 + \frac{q^2}{2gy_3^2}$$

$$E_2 + \Delta Z = E_3$$

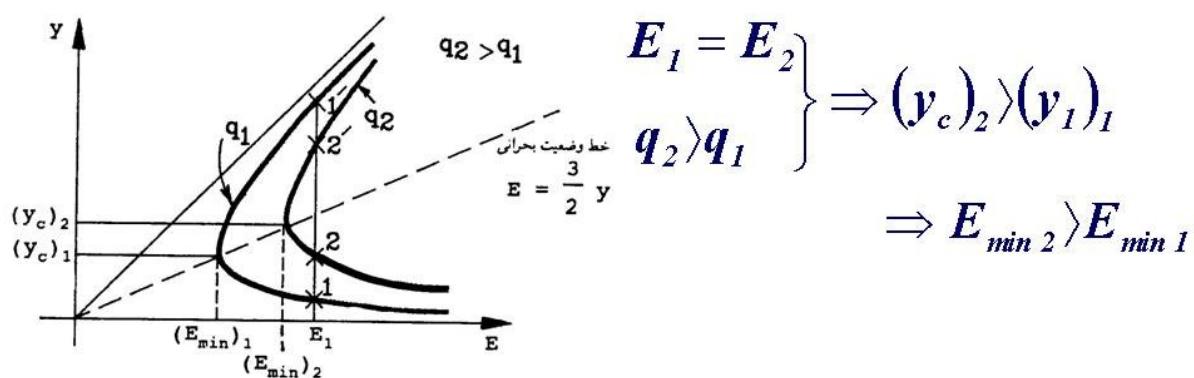
$$E_3 = E_1 = E_2 + \Delta Z$$

جريان ناشی از یک تگنای موضعی در کanal مستطیلی

$$y_1 + \frac{q_1^2}{2gy_1^2} = y_2 + \frac{q_2^2}{2gy_2^2}$$

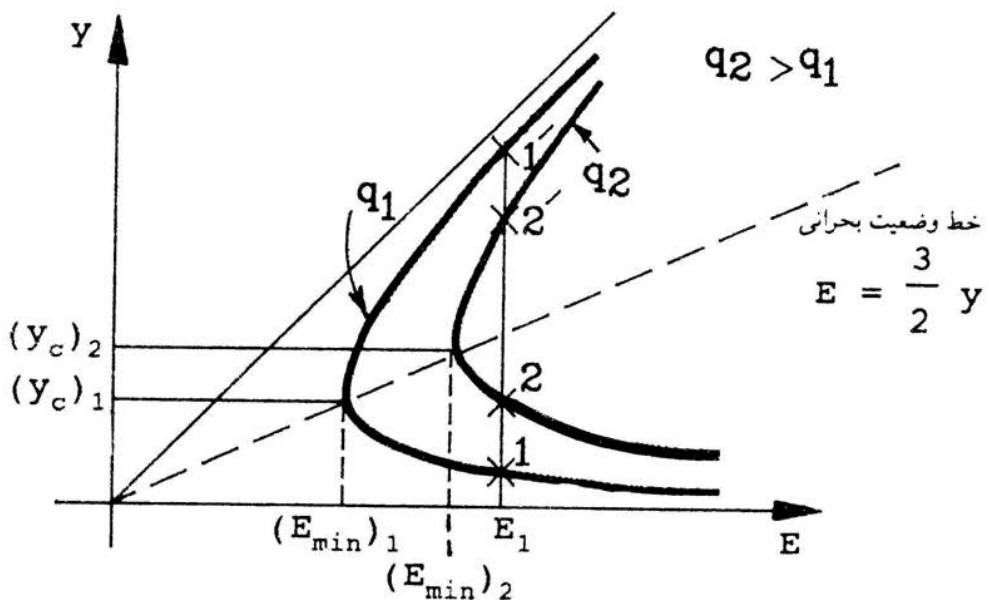


شکل ۲-۳ : پلان کanal مستطیلی با تنگ شدگی در عرض



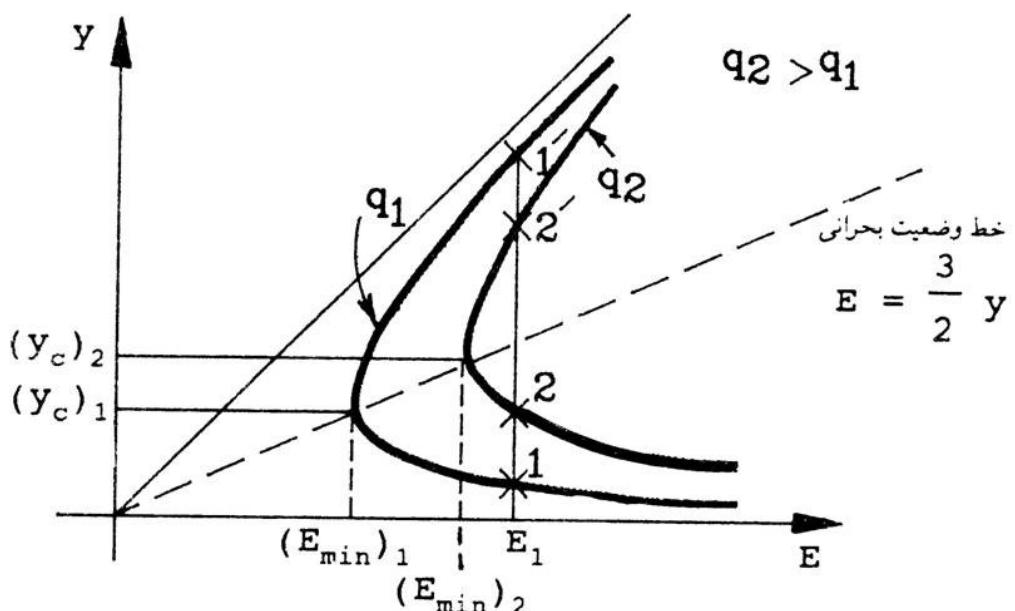
شکل ۲-۱۲: منحنی های E-y در عبور آب از یک تگنا

۱- چنانچه وضعیت جریان قبل از تنگنا زیر بحرانی باشد، جریان کاهش عمق داشته عمق ۱ به عمق ۲ تبدیل می‌شود.



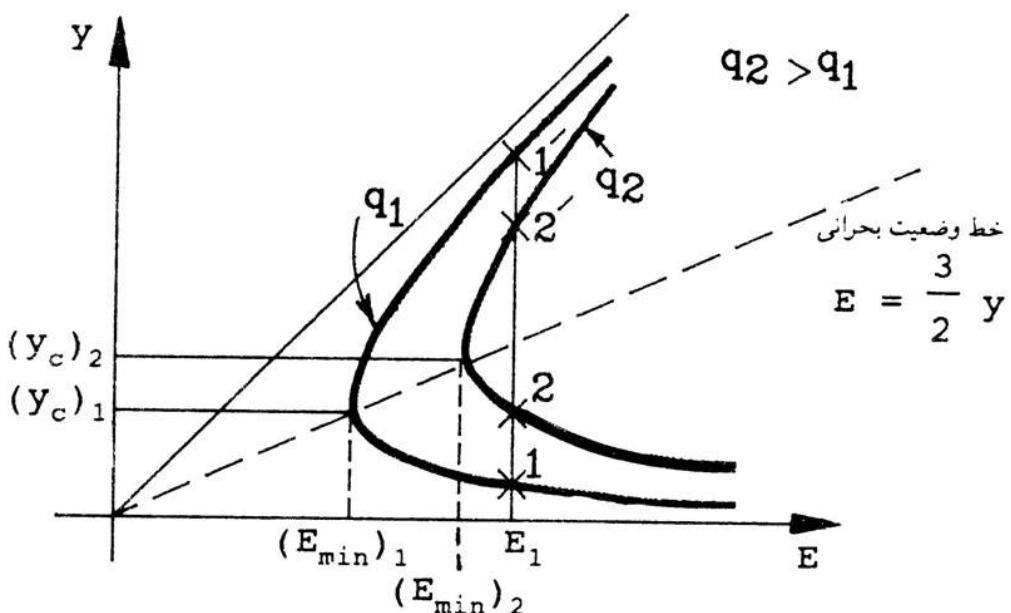
شکل ۲-۱۲: منحنی‌های $E-y$ در عبور آب از یک تنگنا

۲- در صورتیکه وضعیت جریان قبل از تنگنا فوق بحرانی باشد، عمق ۱ به ۲ تبدیل شده، افزایش عمق رخ خواهد داد.



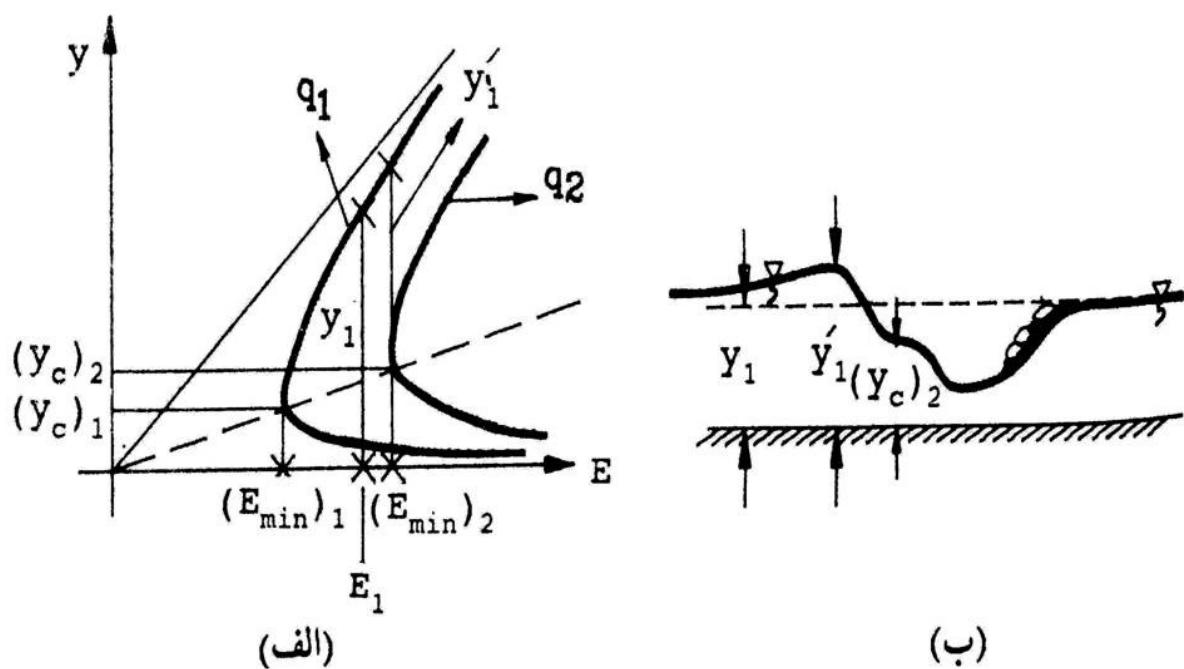
شکل ۲-۱۲: منحنی‌های $E-y$ در عبور آب از یک تنگنا

۳- جهش از یک شاخه منحنی به شاخه دیگر از نظر فیزیکی امکان‌پذیر نمی‌باشد

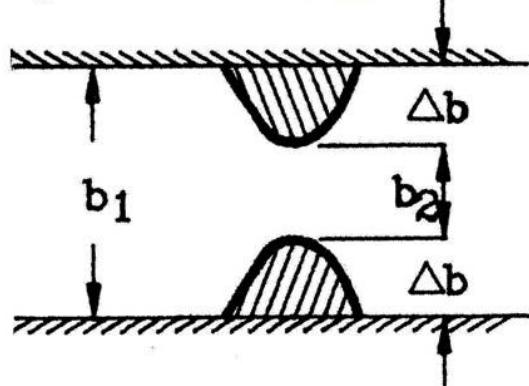


شکل ۲-۱۲: منحنی‌های $E-y$ در عبور آب از یک تنگنا

۴- هرگاه کاهش عرض بگونه‌ای باشد که منحنی $E-y$ با مشخصه q_2 در سمت راست خط قلم به معادله $E=E_1$ قرار گیرد ($E_1 < E_{min2}$) در این صورت هیچ تقدیم از منحنی y با مشخصه q_2 جواب مسئله نخواهد بود



مثال: یک کانال مستطیلی با مشخصات زیر موجود می‌باشد. ماکریم عرض پیش آمدگی پایه‌های پل را بگونه‌ای تعیین نمایید که باعث تغییر وضعیت جریان آب در بالا دست نکرد. از افت انرژی موضعی صرفنظر شود.

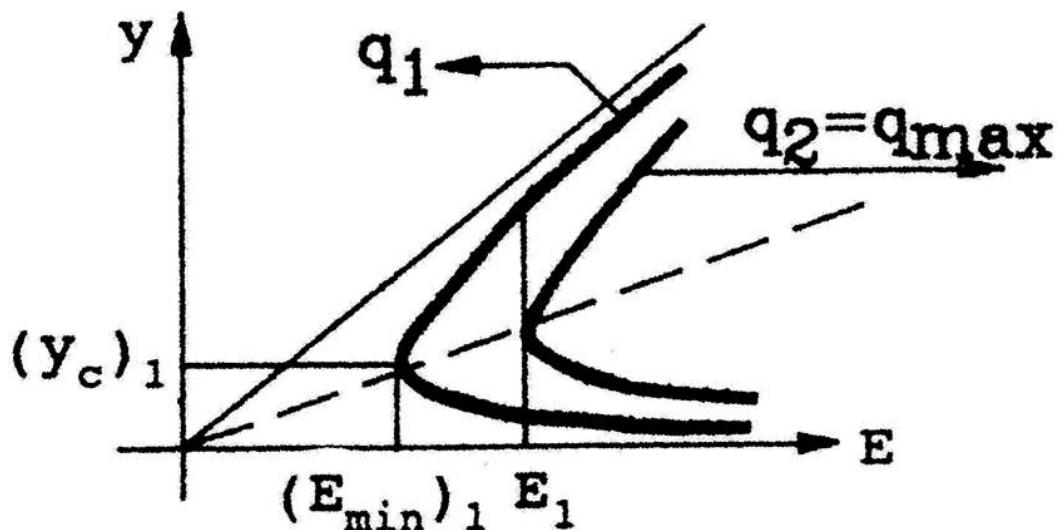
$$b_1 = 30.0 \text{ m} , Q = 90.0 \text{ m}^3/\text{s} , y_1 = 2.5 \text{ m}$$


اجندا وضعیت جریان قبل از تنگ شدن را مشخص می‌گنیم

$$q_1 = \frac{Q}{b_1} = \frac{90}{30} = 3 \frac{\text{m}^3}{\text{s.m}}$$

$$q_1 = V_1 y_1 \Rightarrow 3 = V_1 \times 2.5 \Rightarrow V_1 = 1.2 \text{ m/s}$$

$$Fr_1 = \frac{V_1}{\sqrt{gy_1}} = \frac{1.2}{\sqrt{9.81 \times 2.5}} = 0.242 < 1$$



$$E_1 = y_1 + \frac{q_1^2}{2gy_1^2} = 2.5 + \frac{3^2}{2 \times 9.81 \times 2.5^2} = 2.573 \text{ m}$$

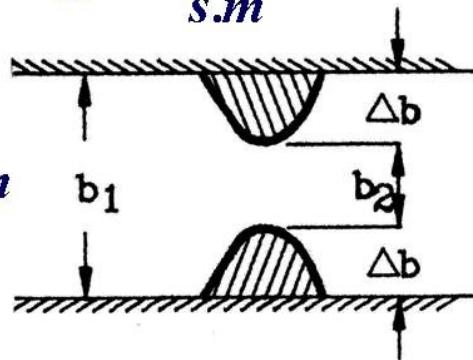
$$E_{min\ 2} = E_1 = 2.573 \text{ m}$$

عمق بحرانی در محل پل با توجه به مقدار انرژی مخصوص مینیمم عبارتست از

$$(y_c)_2 = \frac{2}{3} E_{min2} = \frac{2}{3} \times 2.573 = 1.71 m$$

$$(y_c)_2 = \left(\frac{q_2^2}{g} \right)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow 1.71 = \left(\frac{q_2^2}{9.81} \right)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow q_2 = 7 \frac{m^3}{s.m}$$

$$q_2 = \frac{Q}{b_2} \Rightarrow 7 = \frac{90}{b_2} \Rightarrow b_2 = 12.85 m$$



$$(\Delta b)_{max} = \frac{b_1 - b_2}{2} = \frac{30 - 12.58}{2} = 8.57 m$$

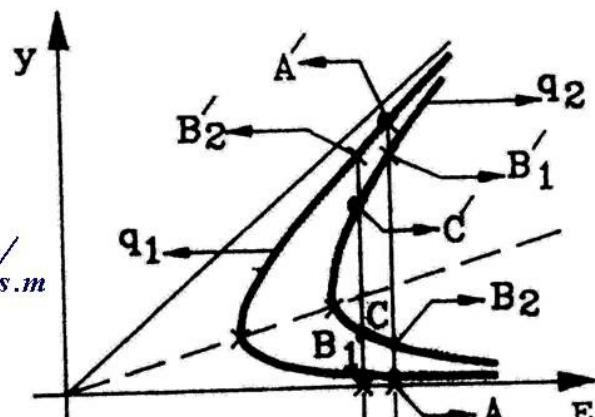
مثال: جریان آبی با دبی ۱۶ متر مکعب بر ثانیه و عمق ۲ متر در یک کنال مستطیلی به عرض ۴ متر برقرار است. در مقطع پائین دست، عرض مقطع به $5/3$ کاهش داده و نیز کف کنال در همین محل به مقدار Δz بالا برده می شود.

تغییرات سطح آب را در محل این تبدیل در دو حالت زیر بدست آورید.
(الف) $\Delta z = 0/2 m$

ابتدا مشخصات جریان در مقطع بالا دست را بدست می آوریم.

$$q_1 = \frac{Q}{b_1} = \frac{16}{4} = 4 \frac{m^3}{s.m}$$

$$\Rightarrow V_1 = \frac{q_1}{y_1} \Rightarrow V_1 = \frac{4}{2} = 2 \frac{m^3}{s.m}$$



$$Fr_1 = \frac{V_1}{\sqrt{gy_1}} = \frac{2}{\sqrt{9.81 \times 2}} = 0.45(1)$$

$$(y_c)_1 = \left(\frac{q_1^2}{g} \right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{4^2}{9.81} \right)^{\frac{1}{3}} = 1.178 \text{ m}$$

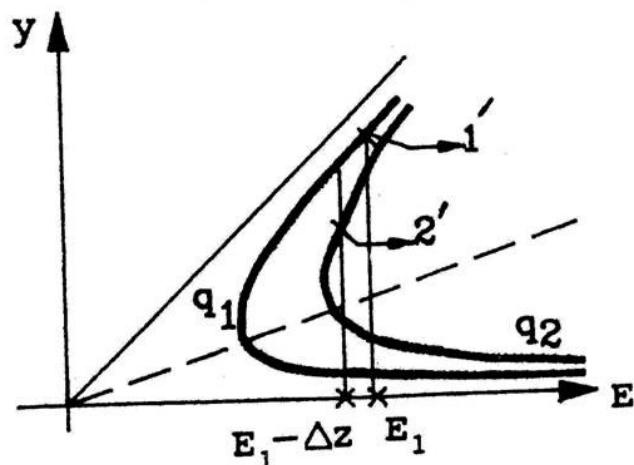
$$E_{min\ 1} = \frac{3}{2} (y_c)_1 = \frac{3}{2} \times 1.178 = 1.766 \text{ m}$$

مشخصات در مقاطع پایین دست (محل تبدیل)

$$q_2 = \frac{Q}{b_2} = \frac{16}{3.5} = 4.57 \frac{\text{m}^3}{\text{s.m}}$$

$$(y_c)_2 = \left(\frac{4.57^2}{9.81} \right)^{\frac{1}{3}} = 1.287 \text{ m}$$

$$E_{min\ 2} = \frac{3}{2} (y_c)_2 = \frac{3}{2} \times 1.287 = 1.93 \text{ m}$$



$$E_1 - \Delta Z = 2.204 - 0.2 = 2.004 \Rightarrow 2.004 > E_{min\ 2}$$

$$E_2 = y_2 + \frac{q_2^2}{2gy_2^2} = 2.004$$

$$y_2 + \frac{4.57^2}{2 \times 9.81 \times y_2^2} = 2.004 \rightarrow y_2 = 1.575 \text{ m}$$

$$\Delta z = \frac{V^2}{g} m$$

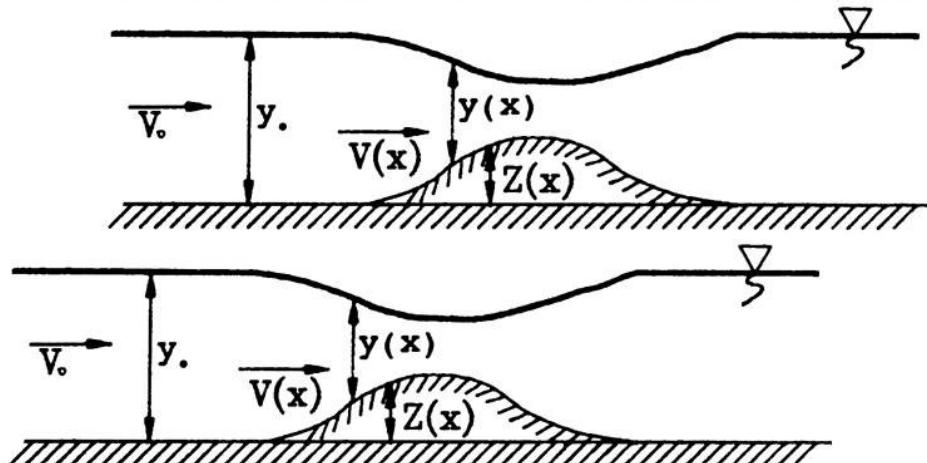
$$E_2 = E_1 - \Delta Z = 2.204 - 0.35 = 1.854 \quad (E_{min})_2$$

$$y_2 = (y_c)_2 = 1.287 \text{ m}$$

$$E_2 = E'_1 - \Delta Z \Rightarrow (E_{min})_2 = E'_1 - \Delta Z$$

$$2.28 = y'_1 + \frac{q^2}{2gy'^2_1} = y'_1 + \frac{4^2}{2 \times 9.81 \times (y'_1)^2} \rightarrow y'_1 = 2.094$$

مثال: در یک کانال مستطیلی مطبق شکل جریان قبل از برآمدگی دارای عمق ثابت y_0 و سرعت V_0 باشد و نیز تغییر در ارتفاع کف، در امتداد طولی کانال توسط تابع $Z(x)$ بیان گردد، نحوه تغییرات سطح آب در روی این برآمدگی را بررسی نمایید. از افت انرژی صرفنظر می‌گردد.



$$y_0 + \frac{V_0^2}{2g} = Z(x) + y(x) + \frac{V^2(x)}{2g}$$

اگر از رابطه نسبت به x مشتق بگیریم:

$$\Rightarrow 0 = \frac{dZ}{dx} + \frac{dy}{dx} + \frac{V}{g} \frac{dV}{dx} \quad (I)$$

$$\text{Continuity Eq.} \rightarrow V_0 y_0 = V y \quad \Rightarrow V dy + y dV = 0$$

$$\frac{-V dy}{dx} = \frac{y dV}{dx} \quad (II)$$

$$\xrightarrow{(I),(II)} \frac{dZ}{dx} + \frac{dy}{dx} - \frac{V}{gy} \frac{dy}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dZ/dx}{Fr^2 - 1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dZ/dx}{Fr^2 - 1}$$

این رابطه نشان می دهد که :

- در صورتیکه جریان قبل از برآمدگی زیربحرانی باشد ($Fr < 1$) و ارتفاع کف کanal افزایش یابد ($dZ/dx > 0$), عمق جریان روی برآمدگی کاهش خواهد یافت ($dy/dx < 0$).

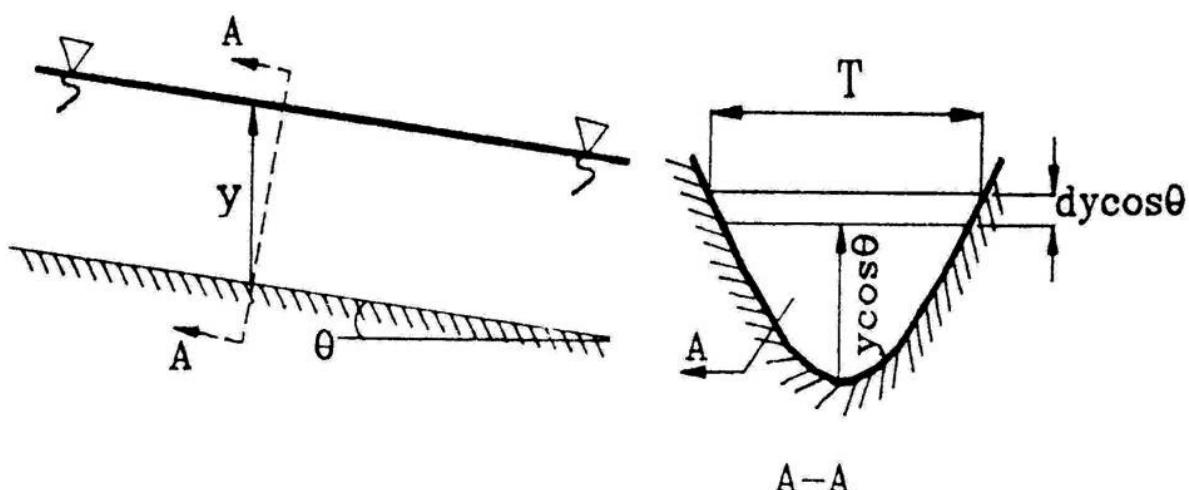
- در صورتیکه جریان قبل از برآمدگی زیربحرانی باشد ($Fr < 1$) و ارتفاع کف کanal کاهش یابد ($dZ/dx < 0$), عمق جریان روی برآمدگی افزایش خواهد یافت ($dy/dx > 0$).

- در صورتیکه جریان قبل از برآمدگی فوق بحرانی باشد ($Fr > 1$) و ارتفاع کف کanal افزایش یابد ($dZ/dx > 0$), عمق جریان روی برآمدگی افزایش خواهد یافت ($dy/dx > 0$).

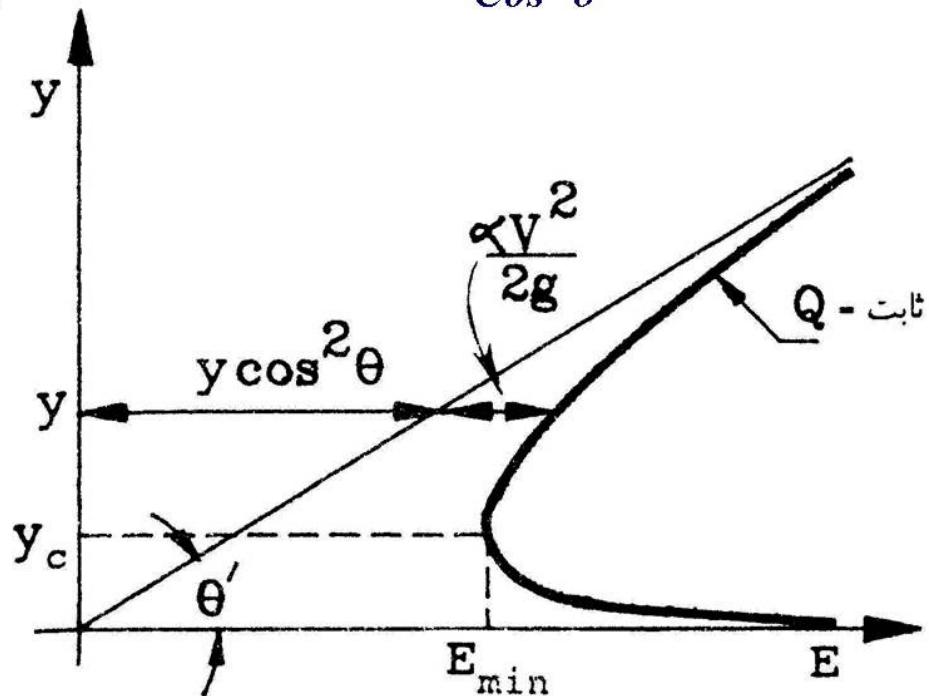
- در صورتیکه جریان قبل از برآمدگی فوق بحرانی باشد ($Fr > 1$) و ارتفاع کف کanal کاهش یابد ($dZ/dx < 0$), عمق جریان روی برآمدگی کاهش خواهد یافت ($dy/dx < 0$).

منحنی y در حالت کلی و برای هر مقطع دلخواه

$$E = \alpha \frac{V^2}{2g} + y \cos^2 \theta = y \cos^2 \theta + \alpha \frac{Q^2}{2gA^2}$$



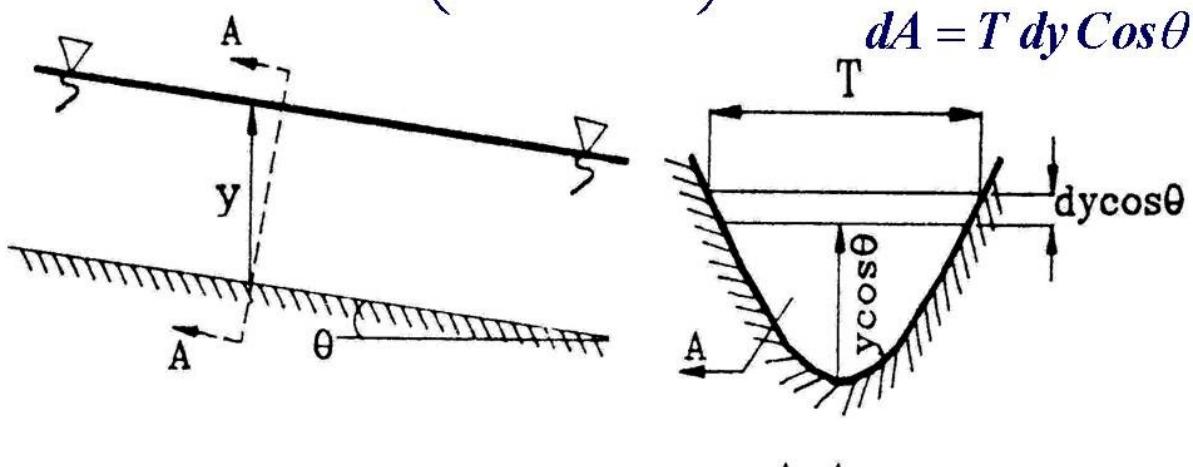
$$\left. \begin{array}{l} y = \theta \\ E = y \cos^2 \theta \end{array} \right\} \Rightarrow \text{مجانب} \Rightarrow \theta' = \tan^{-1} \frac{1}{\cos^2 \theta}$$



$$E = y \cos^2 \theta + \alpha \frac{Q^2}{2gA^2}$$

مشخصات نقطه بحرانی

$$\frac{dE}{dy} = \cos^2 \theta + \frac{\alpha Q^2}{2g} \left(\frac{-2A dA/dy}{A^4} \right) = \cos^2 \theta - \frac{\alpha Q^2 dA/dy}{gA^3}$$



$$\frac{dE}{dy} = \cos^2 \theta - \frac{\alpha Q^2 T \cos \theta}{g A^3}$$

$$\frac{dE}{dy} = 0 \Rightarrow \frac{\alpha Q^2 T}{g A^3 \cos \theta} = 1$$

$$\frac{\alpha Q^2 T}{g A^3 \cos \theta} = 1 \Rightarrow \frac{\alpha V^2 T}{g A \cos \theta} = 1 \quad \frac{A}{T} = D \Rightarrow \frac{\alpha V^2}{g D \cos \theta} = 1$$

$$\frac{\alpha V^2}{g D \cos \theta} = 1 \Rightarrow \frac{V \sqrt{\alpha}}{\sqrt{g D \cos \theta}} = 1 \quad \Rightarrow Fr = \frac{V \sqrt{\alpha}}{\sqrt{g D \cos \theta}}$$

محاسبه مقادیر مینیمم انرژی مخصوص

$$E_{min} = y_c \cos^2 \theta + \frac{\alpha V_c^2}{2g} = y_c \cos^2 \theta + \frac{\alpha V_c^2 D_c \cos \theta}{2g D_c \cos \theta}$$

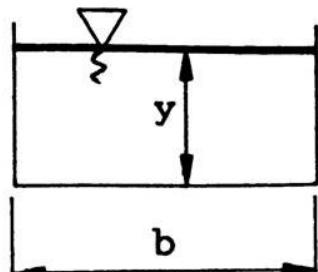
$$\frac{\alpha V^2}{g D \cos \theta} = 1 \Rightarrow \frac{V \sqrt{\alpha}}{\sqrt{g D \cos \theta}} = 1$$

$$E_{min} = y_c \cos^2 \theta + \frac{1}{2} D_c \cos \theta$$

قطع بحرانی

- در قطع بحرانی:
- ۱- عدد فرود جریان برابر یک است. در نتیجه سرعت متوسط جریان برابر سرعت حرکت موج سطحی ناشی از اغتشاش موضعی در کانال می باشد.
 - ۲- به ازاء یک دلیل ثابت، انرژی مخصوص مینیمم است.
 - ۳- به ازاء یک انرژی مخصوص ثابت، دلیل عبوری ماگزینم است.
 - ۴- به ازاء یک دلیل ثابت، نیروی مخصوص مینیمم است.
 - ۵- به ازاء یک نیروی مخصوص ثابت، دلیل عبوری ماگزینم است.

قطع مستطیلی



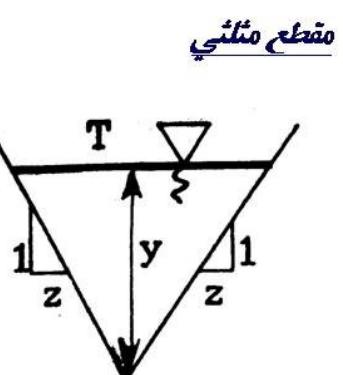
$$\frac{\alpha Q^2 T}{g A^3 \cos \theta} = 1$$

$$\frac{Q^2}{g} = \frac{A_c^3}{T_c} \Rightarrow \frac{Q^2}{g} = \frac{b^3 y_c^3}{b}$$

$$\Rightarrow y_c = \left(\frac{Q^2}{b^2 g} \right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{q^2}{g} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$E_{min} = y_c + \frac{1}{2} D_c \Rightarrow y_c + \frac{1}{2} y_c = \frac{3}{2} y_c \quad Fr = \frac{V}{\sqrt{g D}} = \frac{V}{\sqrt{g y}}$$

$$\frac{Q^2}{g} = \frac{A_c^3}{T_c} \Rightarrow \frac{Q^2}{g} = \frac{z^3 y_c^6}{2zy_c} \Rightarrow y_c = \left(\frac{2Q^2}{gz^2} \right)^{\frac{1}{5}}$$

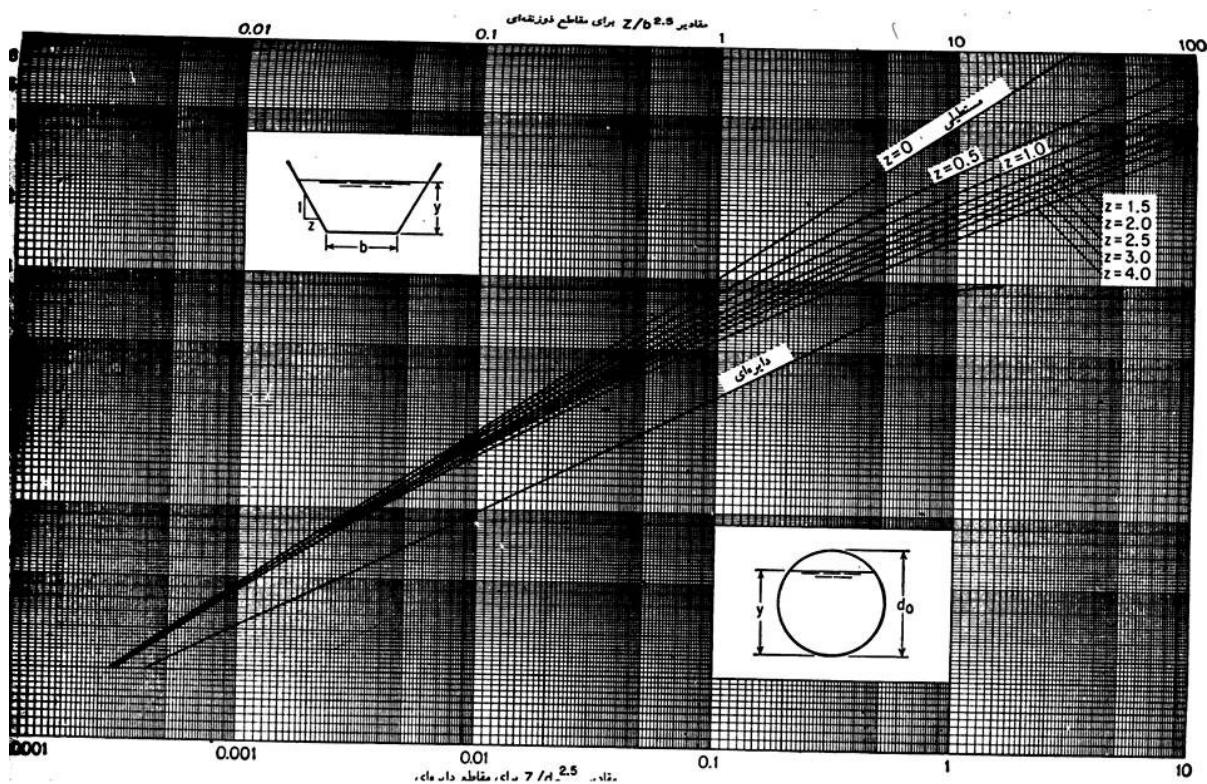
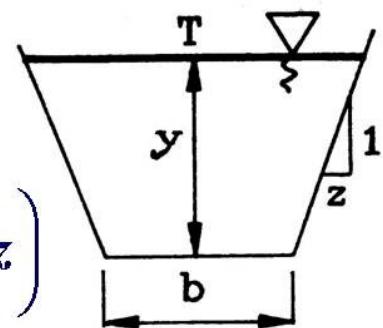


$$E_{min} = y_c + \frac{1}{2} \left(\frac{y_c}{2} \right) = 1.25 y_c$$

$$Fr = \frac{V}{\sqrt{gD}} = \frac{V}{\sqrt{g \frac{y}{2}}} = \frac{V \sqrt{2}}{\sqrt{gy}}$$

$$Z = A \sqrt{A/T} = A \sqrt{D} = \frac{[(b + zy)y]^{1/2}}{(b + 2zy)^{1/2}}$$

$$\frac{z}{(b)^{2.5}} = \frac{\left[\left(1 + \frac{zy}{b} \right) \left(\frac{y}{b} \right) \right]^{1.5}}{\left(1 + \frac{2zy}{b} \right)^{0.5}} = g\left(\frac{y}{b}, z\right)$$



منحنی دایره ای

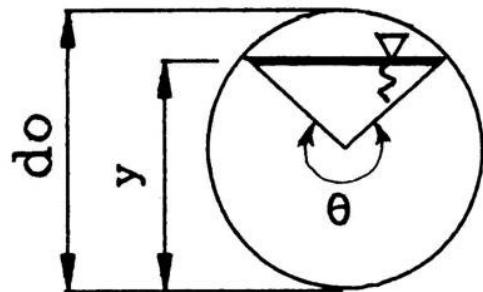
$$\theta = 2 \cos^{-1} \left(1 - \frac{2y}{d_o} \right) = f \left(\frac{y}{d_o} \right)$$

$$Z = A\sqrt{D} = \frac{\sqrt{2}}{32} \frac{(\theta - \sin \theta)^{1.5}}{(\sin \theta / 2)^{0.5}} d_o^{2.5}$$

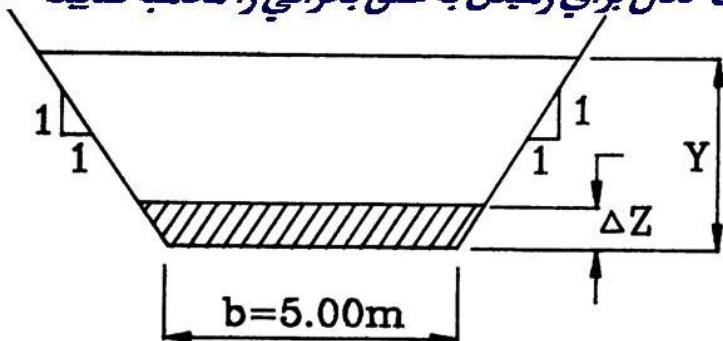
$$\frac{Z}{d_o^{2.5}} = \frac{\sqrt{2}}{32} \frac{(\theta - \sin \theta)^{1.5}}{(\sin \theta / 2)^{0.5}} = g \left(\frac{y}{d_o} \right)$$

$$\frac{Q^2}{g} = \frac{A_e^3}{T_e} \Rightarrow \frac{Q}{\sqrt{g}} = A_e \sqrt{D_e} = Z_e$$

$$\frac{Q}{\sqrt{g} d_o^{2.5}} = \frac{Z_e}{d_o^{2.5}} \Rightarrow \frac{Q}{\sqrt{g}} = A_e \sqrt{D_e} = Z_e$$



مثال: آب در یک کانال ذوزنقه ای به عرض ۵ متر و شیب سکنده های ۱:۱ با عمق ۱/۵ متر و سرعت ۱ متر بر ثانیه جاری است.
 (الف) حداقل ارتفاع برآمدگی در کف کانال برای رسیدن به عمق بحرانی را محاسبه نماید.



حل: ابتدا وضعیت جریان در بالا درست برآمدگی تعیین می شود

$$A_I = (b + z y_I) y_I = (5 + 1.5) 1.5 = 9.75 m^2$$

$$T_I = (b + 2 z y_I) = (5 + 2 \times 1.5) = 8 m$$

$$\Rightarrow D_I = \frac{A_I}{T_I} = 1.22 m$$

$$Q = A_I V_I = 9.75 \times 1 = 9.75 m^3/s$$

$$Fr_1 = \frac{V_1}{\sqrt{gD_1}} = \frac{1}{\sqrt{9.81 \times 1.22}} = 0.29 < 1$$

$$E_1 = y_1 + \frac{V_1^2}{2g} = 1.551 m$$

$$\Delta Z_c = E_1 - E_c \quad E_c = y_c + \frac{1}{2} D_c$$

عمق بحرانی بر روى برآمدگى با استفاده از نمودار و با فرض اينکه عرض کف برابر با ۵ باشد تعیین مى گردد

$$\frac{Z_c}{b^{2.5}} = \frac{Q}{\sqrt{gb^{2.5}}} \Rightarrow \frac{9.75}{\sqrt{9.81(5)^{2.5}}} = 0.056$$

$$\frac{Z_c}{b^{2.5}} = 0.056 \xrightarrow{z=1} \frac{y_c}{b} = 0.135$$

$$\Rightarrow y_c = 0.135 \times 5 = 0.675 m$$

$$D_c = \frac{(5 + 0.675)0.675}{5 + 2 \times 0.675} = 0.603 m$$

$$E_c = y_c + \frac{1}{2} D_c = 0.675 + \frac{1}{2}(0.603) = 0.977 m$$

$$\Delta Z_c = 1.551 - 0.977 = 0.574 m$$

بدینهی است فرض $b=5$ در محاسبه عمق بحرانی صحیح نمی باشد، لذا عرض کف با توجه به مقدار ΔZ_c تصحیح گشته و مجدداً عمق بحرانی محاسبه می گردد

$$b = 5 + 2 \Delta Z_c = 5 + 2 \times 0.574 = 6.148 m$$

$$\frac{Z_c}{b^{2.5}} = \frac{Q}{\sqrt{gb^{2.5}}} \Rightarrow \frac{9.75}{\sqrt{9.81(6.148)^{2.5}}} = 0.0332$$

$$\frac{Z_c}{b^{2.5}} = 0.033 \xrightarrow{z=1} \frac{y_c}{b} = 0.1$$

$$\Rightarrow y_c = 0.1 \times 6.148 = 0.615 \text{ m}$$

$$D_c = \frac{(6.148 + 0.615)0.615}{6.148 + 2 \times 0.615} = 0.564 \text{ m}$$

$$E_c = y_c + \frac{1}{2} D_c = 0.615 + \frac{1}{2}(0.564) \approx 0.9 \text{ m}$$

$$\Delta Z_c = 1.551 - 0.9 = 0.654 \text{ m}$$

با مقدار $\Delta Z_c = 0.654 \text{ m}$ در سومین آزمون عمق بحرانی محاسبه می شود.

$$b = 5 + 2 \Delta Z_c = 5 + 2 \times 0.654 = 6.308 \text{ m}$$

$$\frac{Z_c}{b^{2.5}} = \frac{Q}{\sqrt{g} b^{2.5}} \Rightarrow \frac{9.75}{\sqrt{9.81} (6.308)^{2.5}} = 0.031$$

$$\frac{Z_c}{b^{2.5}} = 0.031 \xrightarrow{z=1} \frac{y_c}{b} = 0.099$$

$$\Rightarrow y_c = 0.099 \times 6.308 = 0.624 \text{ m}$$

$$D_c = \frac{(6.308 + 0.624)0.624}{6.308 + 2 \times 0.624} = 0.573 \text{ m}$$

$$E_c = y_c + \frac{1}{2} D_c = 0.624 + \frac{1}{2}(0.573) = 0.91 \text{ m}$$

$$\Delta Z_c = 1.551 - 0.91 = 0.64 \text{ m} \quad OK.$$

میزان پایین افتادگی سطح آب در محل برآمدگی برابر است با:

$$\Delta y = y_I - (y_c + \Delta Z_c) = 1.5 - (0.573 - 0.64) = 0.236 \text{ m}$$

ب) در صورتیکه ارتفاع برآمدگی نصف حالت الـf باشد، عمق جریان برآمدگی را تعیین کنید

$$\Delta Z = 0.5 \Delta Z_c = 0.5 \times 0.64 = 0.32 \text{ m}$$

$$\Delta Z < \Delta Z_c \quad E_2 = E_1 - \Delta Z = 1.5451 - 0.32 = 1.231 \text{ m}$$

$$b_2 = 5 + 2 \Delta Z = 5 + 2 \times 0.32 = 5.64 \text{ m}$$

$$E_2 = y_2 + \frac{V^2}{2g} = y_2 + \frac{Q^2}{2gA_2^2}$$

$$1.231 = y_2 + \frac{(9.75)^2}{2 \times 9.81 \times [(5.64 + y_2)y_2]^2}$$

$$\Rightarrow y_2 = 1.155 \text{ m} \quad \Delta y = 1.5 - (1.155 + 0.32) = 0.025 \text{ m}$$