

In the name of God

با تشکر از دوست و برادر عزیزم آقای علی اسلامی و آرزوی موفقیت و توفیق روز افزون برای ایشان

Fluids Mechanics

Dr.samani

31384-1385

Fluid Mechanics

References :

1) Fluid Mechanics

by: Victor L. Streeter & E. Benjamin Wylie & Keith W. Bedford

با تشکر از دوست و برادر عزیزم آقای علی اسلامی و آرزوی موفقیت و توفیق روز افزون برای ایشان

2) Mechanics of Fluids

by: Irving H. Shames

3) Elementary Fluid Mechanics

by: J. Vennard & R. L. Street

4) Introduction of Fluid Mechanics

by: R. W. Fox & A. T. McDonald

5) Fluid Mechanics

by: F. M. White

Fluid Mechanics

Fluid Mechanics: Statics + Dynamics of liquids and gases

سیال (Fluid)

سیال ماده ای است که اثر تحت تأثیر تنش برشی (Shear Stress) قرار گیرد (هر چند این تنش ناچیز باشد) مداوماً تغییر شکل می دهد.

قانون نیوتن در لزجت (Newton's law in Viscosity)

نکته:

قانون رابطه ای است که قابل اثبات ریاضی نیست (یعنی نمی توان از جایی شروع کرده و بصورت ریاضی درستی آن را اثبات نمود) ولی در عمل صحت آن مشاهده می شود.

* نیون با انجام آزمایش تغییر شکل مشاهده کرد که اگر بین دو صفحه را از یک سیال پر کنیم صفحه‌ی بالایی را که قابل حرکت است با نیروی F و سرعت u دریم سیال در بین دو صفحه حرکت خواهد کرد و نیز می‌تواند با تشکر از دو صفحه حرکت خواهد کرد. μ و τ برقرار است: نیست اما رابطه‌ی زیرین تغییرات سرعت و τ برقرار است: وقتی جسمی بر جسم دیگری با فشار کشیده می‌شود « نیرو بر واحد سطح » برابر تنش برشی (Shear Stress) خواهد بود.

$$\tau = \frac{F}{A}$$

$$\tau \propto \frac{dv}{dy}$$

در محل اعمال shear stress، رابطه‌ی تناسب $\tau \propto \frac{dv}{dy}$ برقرار است.

$$\Rightarrow \tau = \mu \frac{dv}{dy}$$

در این رابطه μ ، viscosity نامیده می‌شود. به عبارت دیگر « لزجت (viscosity) ضریب تناسب بین shear stress و $\frac{dv}{dy}$ است ».

نکته: هرگاه ماده‌ای که بین دو صفحه قرار گیرد در اثر تنش برشی، تغییر شکل مداوم (مثلاً حرکت) داشته باشد، این ماده سیال خواهد بود.

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy}$$

μ : "viscosity" or "absolute viscosity" or "dynamic viscosity"

$\frac{dv}{dy}$: "rate of angular deformation"



* * *

نکته: در سیالات همیشه هنگام deformation فاکتور زمان مطرح است. (یعنی این deformation نسبت به واحد زمان برری می‌شود: rate of deformation) و در جامدات فاکتور زمان مطرح نیست.

$$\mu = \frac{\tau}{\frac{dv}{dy}} \rightarrow \text{unit of } \mu: \frac{N/m^2}{m/s} = \frac{N}{m^2} \cdot s \rightarrow Pa \cdot s$$

* * *

اگر آزمایش بالا را یک بار با قیر (tar) و بار دیگر با نفت (oil) انجام دهیم مشاهده می‌شود:

$$\text{tar} \rightarrow \mu_{\text{tar}} = \frac{\tau}{\left(\frac{dv}{dy}\right)_{\text{tar}}}$$

$$\text{oil} \rightarrow \mu_{\text{oil}} = \frac{\tau}{\left(\frac{dv}{dy}\right)_{\text{oil}}}$$

بنابراین می توان گفت: لزجت (viscosity) ، معیاری است از مقاومت سیال در برابر shear stress

Viscosity: the resistance to flow (بررسی فیزیکی: تعریف فیزیکی)

در بررسی لزجت مسیناتیکی، عامل آن یعنی نیرو، در نظر گرفته نمی شود ولی در لزجت دینامیکی، نیرو در نظر گرفته می شود.

با تشکر از دوست و برادر عزیزم آقای علی اسلامی و آرزوی موفقیت و توفیق روز افزون برای ایشان

kinematic viscosity: $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ \Rightarrow unit of ν : $\frac{\frac{kg \cdot m}{s^2}}{\frac{kg}{m^3}} = \frac{m^2}{s}$

چون واحد دینامیکی از مبراست به آن kinematic viscosity می گویند

نکته: در با افزایش دما، تغییر می کند:

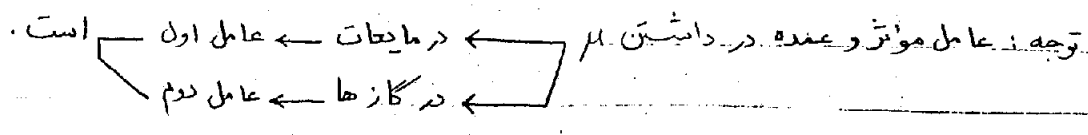
- ۱- در مایعات، با افزایش دما، مقدار μ کم می شود.
- ۲- در گازها، با افزایش دما، مقدار μ زیاد می شود.

مقدار μ بستگی دارد به:

1. Cohesive force between molecules (نیروی جاذبه‌ی بین مولکول)
2. Momentum interchange between colliding molecules

(تغییر momentum بین مولکول‌های برخورد کننده)

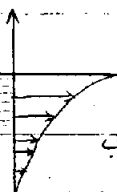
* اندازه حرکت (momentum) هر جسم متحرک برابر است با mv .



چون در گازها با افزایش دما، انرژی ذره‌ها (مولکول‌ها) در همین انرژی برخوردهای مولکولی افزایش می یابد و مقدار μ هم افزایش می یابد.

نکته (مربوط به آزمایش نیوتن): اگر بین دو صفحه، سیال قرار دهیم، هر چند shear stress ناچیز باشد صفحه‌ی بالایی حرکت می کند اما اگر بین دو صفحه جسی جامد (غیرسیال) باشد باید shear stress از مقدار معینی بیشتر شود تا بر اصطکاک غلبه کند پس سیال ماده‌ای است که با shear stress ناچیز نیز به حرکت درآید.

آب راه عمران
لایه های بیشتر
در نظری لایه



* لایه ی بالایی آب که به صفحه ی قابل حرکت متصل است در اثر حرکت صفحه

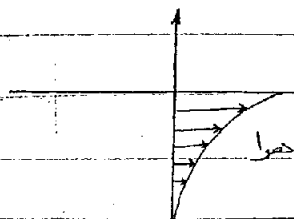
حرکت می کند چون بین مولکول های آب جاذبه وجود دارد لایه های پایین تر آب

نیز در اثر حرکت لایه های بالاتر شروع به حرکت می کنند ولی هر لایه از لایه ی

پایین تر از خود حرکت کمتری خواهد داشت. به این ترتیب حرکت لایه ها در نزدیکی صفحه ی

مکانیزم (برابر سرعت حرکت صفحه ی متحرک) بوده و به تدریج کاهش می یابد تا در پایین ترین لایه (در مجاریت

صفحه ی ثابت) سرعت حرکت لایه برابر صفر می شود.



* لایه ی بالایی هوا که در تماس با صفحه ی قابل حرکت است با همان

سرعت صفحه ی بالایی حرکت می کند. مولکول های پراکنده ی لایه ی بالایی

به مولکول های لایه ی پایینی برخورد کرده و حرکت موضعی آن ها

را به حرکت انتقالی تبدیل می کند. در نتیجه لایه ی پایینی حرکت می کند

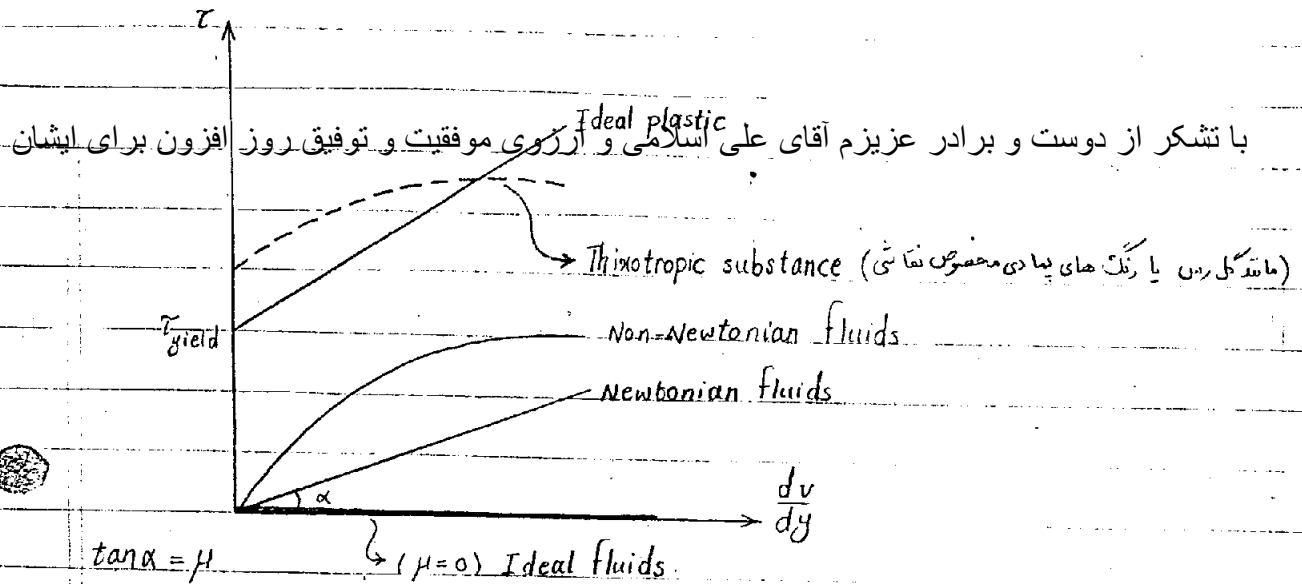
ولی نه به اندازه ی لایه ی بالایی. به همین دلیل با افزایش دما چون انرژی مولکول ها بیشتر می شود، اثر

افزایشی می یابد. نسبی که اثر ندارد، لایه ها مانند صابون روی هم لیز می خورند چون دگرگونی نیروی

جاذبه ای بین مولکول ها وجود دارد و به تعخیر تکانه ای مشاهده می گردد.

* * *

Rheological Diagram



تقسیم بندی رهاولژی مواد

Newtonian fluids: در سیالات نیوتنی رابطه بین $shear\ stress$ و $rate\ of\ deformation$ ($\frac{dv}{dy}$) رابطه ای خطی است. ($\mu = const.$) نمودار رهاولژی این سیالات از مبدأ میگذرد یعنی با حداقل $shear\ stress$ حرکت می کنند.

Non-Newtonian fluids: در این گونه سیالات رابطه بین $shear\ stress$ و $rate\ of\ angular\ deformation$ رابطه ای خطی نیست. ($\mu \neq const.$) نمودار رهاولژی این سیالات خط راست نیست ولی از مبدأ میگذرد یعنی با کوچکترین مقدار $shear\ stress$ حرکت پیدا می کنند.

Ideal plastic: این مواد تا حد معینی در برابر $shear\ stress$ مقاومت کرده و حرکت نمی کنند ولی چنانچه $shear\ stress$ از مقدار خاصی (τ_{yield}) بیشتر شود ماده حرکت کرده و از این پس رفتار آن شبیه سیال نیوتنی است. نمودار این مواد خطی است و بعد از τ_{yield} دارای لزجت ثابتی هستند.

Thixotropic substances: این مواد نیز تا حد معینی در برابر $shear\ stress$ مقاومت کرده و حرکت نمی کنند و با افزایش $shear\ stress$ از مقدار خاصی (τ_{yield}) حرکت کرده و از این پس رفتاری شبیه سیالات غیر نیوتنی خواهند داشت. نمودار رهاولژی این مواد خط راست نیست و ...

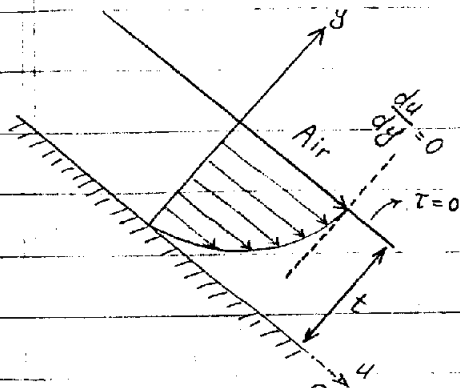
شده در printer ها که در حالتی که تحت shear stress با همند بد ریج با افزایش
 viscosity ، shear stress آن ها کاهش می یابد ولی در حالتی که تحت تنش برشی
 نباشند تمایل به جامد شدن دارند.

Ideal fluids : به منظور تحلیل و آنالیز ، گاهی از این فرض استفاده می شود که یک سیال viscosity

با تشکر از دوست و برادر عزیزم آقای علی اسلامی و آرزوی موفقیت و تکمیل روز افزون برای ایشان
 در خصوص viscosity صفر باشند
 shear stress هم همواره برابر صفر خواهد بود (البته بدون در نظر گرفتن حرکت
 سیال) . اگر سیال incompressible هم در نظر گرفته شود ، در این صورت به آن
 سیال ایده آل (Ideal fluid) گفته می شود که نمودار رهنوردی آن منطبق
 بر محور rate of deformation $(\frac{dv}{dy})$ خواهد بود. $(\mu = 0)$

* * *

Problem 1.4 , page 23



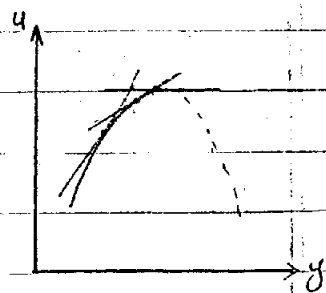
چون سیال ، نیوتنی است پس در محل تماس با هوا $\tau = 0$
 یعنی لایه ی بالای سیال در اثر حداقل مقدار τ که برابر صفر
 است به حرکت درآمده است.

$$\tau = 0 \Rightarrow \mu \frac{du}{dy} = 0$$

since the liquid is Newtonian, $\mu \neq 0$

$$\Rightarrow \frac{du}{dy} = 0$$

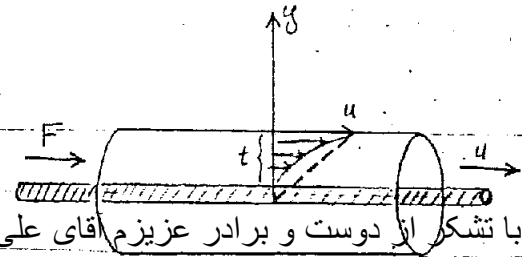
* The variation of u with y would not be linear
 but as shown in the figure :



توجه انتهای نمودار در شکل بالا : با توجه به این در سطح مایع $\frac{du}{dy} = 0$ است پس شیب
 منحنی u بر حسب y باید در این نقطه صفر باشد که تنها حالت ممکن برای
 آن به صورت شکل بالا خواهد بود. در ضمن تا قبل از آن نقطه ، شیب u
 بر حسب y باید مثبت باشد.

Problem 1-12, page 23

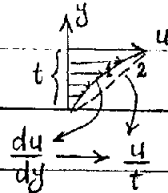
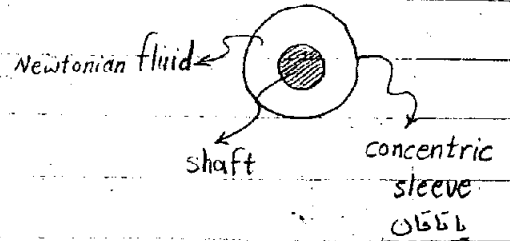
$F_1 = 600 \text{ N}$, $u_1 = 1 \text{ m/s}$



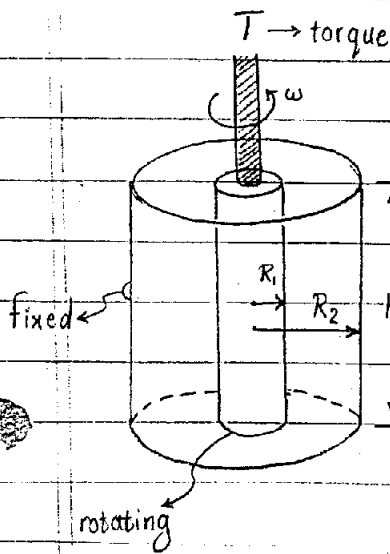
با تشکر از دوست و برادر عزیزم آقای علی اسلامی و آرزوی موفقیت و توفیق روز 1500 برای ایشان

$\tau = \mu \frac{dv}{dy} \Rightarrow \frac{F}{A} = \mu \frac{u}{t}$

$\frac{F_1}{A} = \mu \frac{u_1}{t}$
 $\frac{F_2}{A} = \mu \frac{u_2}{t} \Rightarrow \frac{600}{1500} = \frac{1}{u_2} \Rightarrow u_2 = 2.5 \text{ m/s}$



با توجه به این که فاصله‌ی بین سطح داخلی باقیان shaft بسیار ناچیز است نمودار منحنی (1) را می‌توانیم خط راست (2) در نظر بگیریم. مانند شکل:



مکانسیم کار Viscosimeter

H, R_1, R_2, ω, T : معلوم

$\mu = ?$

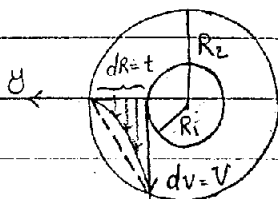
$T = F \cdot R_1$

$T = (\tau A) R_1 \Rightarrow$

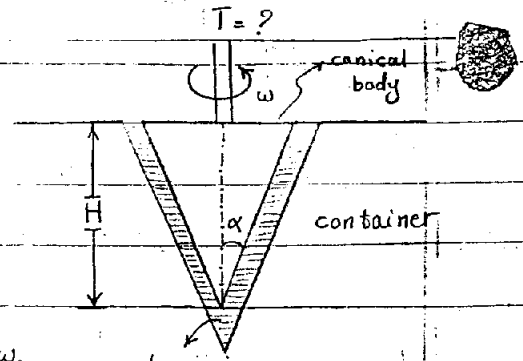
$T = \mu \frac{dv}{dR} (2\pi R_1 H) R_1 = \mu \frac{v}{t} 2\pi R_1^2 H = \mu \frac{R_1 \omega}{R_2 - R_1} 2\pi R_1^2 H$

$\Rightarrow T = \mu \frac{\omega R_1^3}{R_2 - R_1} \cdot 2\pi H \Rightarrow \mu = \frac{T(R_2 - R_1)}{2\pi H R_1^3 \omega}$

* در این مسأله نیز مقدار $\frac{dv}{dR}$ را به دلیل کوچکی بودن آن به صورت $\frac{v}{t}$ (که در آن $t = R_2 - R_1$ فاصله‌ی بین shaft, sleeve می‌باشد) نوشته می‌شود.



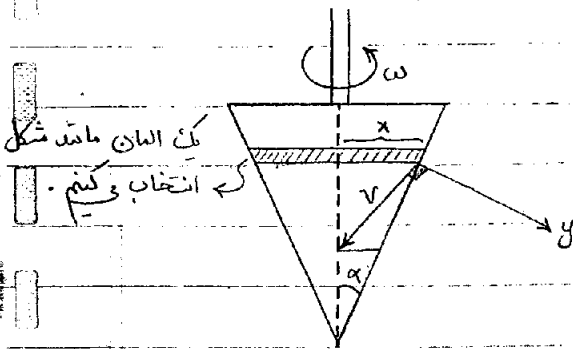
Example: An oil of viscosity μ , between a conical body and the container fills the clearance. Find the torque required to be applied on the conical body to produce an angular velocity ω .



با تشکر از دوست و برادر عزیزم آقای علی اکلامی و ارزوی موفقیت و توفیق روز افزون برای ایشان

(در این مسئله متناظر بستگی به موقعیت نقطه دارد، در همه جا یکسان نیست. به همین علت باید برای

بدست آوردن گشتاور انتگرال گرفت.)
 $\vec{T} = \vec{F} \times \vec{r} \Rightarrow T = Fr \sin \alpha$



$$\sin \alpha = \frac{dr}{ds} \Rightarrow ds = \frac{dr}{\sin \alpha}$$

بر روی المان: $dT = (dF)r \Rightarrow dT = (\tau dA)r = \mu \frac{dv}{dy} dA r = \mu \frac{r\omega}{t} 2\pi r ds r$

$$\Rightarrow T = \int_0^R \mu \frac{r^3 \omega}{t} 2\pi ds = \frac{2\pi \mu \omega}{t} \int_0^R \frac{r^3 dr}{\sin \alpha} = \frac{2\pi \mu \omega}{t \sin \alpha} \left(\frac{R^4}{4} \right) = \frac{\pi \mu \omega R^4}{2t \sin \alpha}$$

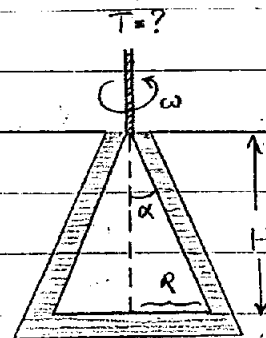
$$\Rightarrow T = \frac{\pi \mu \omega R^4}{2t \sin \alpha}$$

* * *

Homework: Solve the same problem as above, but with a different situation in the shape.

$$R = 5 \text{ cm}$$

$$H = 10 \text{ cm}$$



Solution: $T = T_1 + T_2$

T_1 : torque around the conical part of the clearance

T_2 : torque in clearance between the base of the conical body and the container.

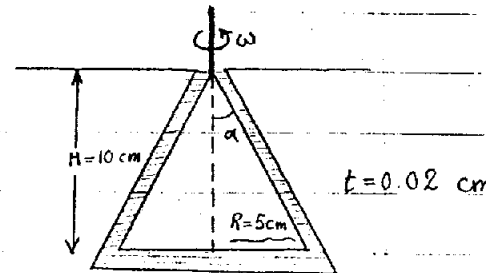
با تشکر از دوست و برادر عزیزم آقای علی لاسلامی و آرزوی موفقیت و توفیق روز افزون برای ایشان
 $\tan \alpha = \frac{R}{H} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{5}{10} \Rightarrow \alpha = 26.565^\circ$

Choosing an element like the one in the previous problem we have:

$$dT_1 = (dF_1)r \Rightarrow dT_1 = (\tau dA)r = \left(\mu \frac{dv}{dt} 2\pi r ds\right)r$$

$$\Rightarrow dT_1 = \mu \frac{v}{t} 2\pi r^2 \frac{dr}{\sin \alpha} \Rightarrow dT_1 = \mu \frac{r\omega}{t} 2\pi r^2 \frac{dr}{\sin \alpha}$$

$$\Rightarrow dT_1 = \mu \frac{r^3 \omega}{t} 2\pi \frac{dr}{\sin \alpha} \Rightarrow T_1 = \frac{2\pi \mu \omega}{t \sin \alpha} \int_0^R r^3 dr \Rightarrow T_1 = \frac{\mu \pi \omega}{2t \sin \alpha} R^4$$

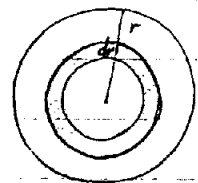


Choosing an element like the one in the figure, T_2 can be found:

$$dT_2 = (dF_2)r = (\tau dA)r = \left(\mu \frac{dv}{dt} 2\pi r dr\right)r$$

$$\Rightarrow dT_2 = \mu \frac{r\omega}{t} 2\pi r^2 dr \Rightarrow dT_2 = \frac{2\pi \mu \omega}{t} r^3 dr$$

$$\Rightarrow T_2 = \frac{2\pi \mu \omega}{t} \int_0^R r^3 dr = \frac{2\pi \mu \omega}{t} \left(\frac{R^4}{4}\right) = \frac{\pi \mu \omega}{2t} R^4$$



$$\Rightarrow T = T_1 + T_2 \Rightarrow T = \frac{\mu \pi \omega R^4}{2t} (\csc \alpha + 1)$$

Bulk Modulus of Elasticity (K)

$$K = \frac{dP}{-\frac{dv}{v}} \quad (1)$$

where P is pressure & v is fluid volume

با نشکر از دو سطح و برادیر عزیزم آقای علی اسلامی و آرزوی موفقیت و توفیق روز افزون برای ایشان

We had in statics & strength of material $E = \frac{\sigma}{e}$ stress (2)

$\frac{\Delta L}{L}$: strain

از فرمول (2) می توان برای منیالات استفاده کرد زیرا در منیالات تنها تغییر طول رخ نمی دهد بلکه :

Strain در منیالات عبارتست از تغییر حجم نسبی.

به همین جهت در مورد منیالات از فرمول (1) استفاده می شود. dp نیز می تواند معادل stress در نظر گرفته شود (برای منیالات).

* تراکم پذیری (= compressibility) در مایعات از گازها کمتر است پس K برای مایعات

بیشتر از گازهاست.

به عبارت دیگر K با تراکم پذیری نسبت عکس دارد:

مثلاً برای مایع مانند آب که با افزایش فشار و حجم آن تغییر محسوسی نمی کند، مقدار K عددی بزرگ خواهد شد.

$$K_{\text{water}} = 2.2 \times 10^9 \frac{N}{m^2} \text{ or } \frac{lb}{ft^2}$$

نکته: اکثر مایعات را می توان در فشار معمولی تراکم ناپذیر فرض کرد.

* * *

مثال: اگر فشار را از P_0 به P برسانیم و $P - P_0 = 0.1 \text{ MPa}$ (تقریباً برابر 1 اتمسفر) و حجم آب در

P_0 برابر $V_0 = 1 \text{ m}^3$ باشد، V را پیدا کنید.

$$K = \frac{dP}{-\frac{dv}{v}} \Rightarrow dP = -K \frac{dv}{v} \Rightarrow \int_{P_0}^P dP = -K \int_{V_0}^V \frac{dv}{v} \Rightarrow [P]_{P_0}^P = -K [\ln v]_{V_0}^V$$

$$\Rightarrow P - P_0 = -K \ln\left(\frac{V}{V_0}\right) \Rightarrow \frac{V}{V_0} = e^{\frac{-(P-P_0)}{K}} \Rightarrow V = V_0 e^{\frac{P_0-P}{K}}$$

$$\Rightarrow V = 1 \times e^{\frac{-0.1 \times 10^6}{2.2 \times 10^9}} \Rightarrow V = 0.9999545 \text{ m}^3$$

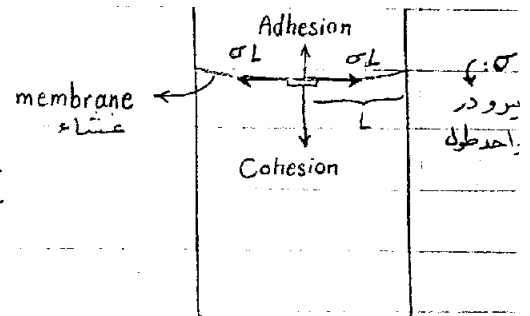
* همانگونه که در مثال قبل مشاهده شد در فشارهای معمول مانند فشار اتمسفر، مایعات (مانند آب) تراکم نا پذیر فرض می شوند چون مقدار m (چگالی) آن ها به مقدار ناچیز تغییر می کند که قابل چشم پوشی است. اما در فشارهایی مانند اعماق اقیانوس ها که تغییرات فشار بسیار بیشتر از یک اتمسفر است باید تراکم پذیری آب (و در واقع مقدار چگالی آب که در اعماق زیاد میشود) در نظر گرفته شود. عزیزم آقای دکتر استعلامها و آرزوی موفقیت و توفیق روز افزون برای ایشان زیاد پس از دوستانه و بهادر عزیزم را می پذیرم. m^3

* * *

Surface Tension (σ)

Cohesion: نیروی جاذبه ی بین مولکول های شبیه

Adhesion: نیروی جاذبه ی بین مولکول های غیر شبیه



* وقتی دو نیروی Adhesion و Cohesion در تعادل نباشند

کشش سطحی برای ایجاد تعادل بین این دو وجود می آید.

$$\text{نیروی کشش سطحی} = \sigma \times L$$

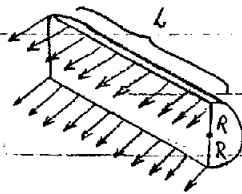
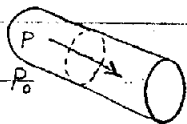
مثلاً: در مورد آب، نیروی Adhesion بین مولکول های آب و هوا کمتر از نیروی Cohesion خواهد بود.

بنابراین نیروی در امتداد سطح وجود می آید که مؤلفه ی قائم آن بر نیروی Adhesion می افزاید.

و تعادلی در مابین ایجاد می گردد؛ این نیروی جدید همان Surface Tension می باشد.

1. Jet (فواره)

اگر فواره ای از آب در نظر بگیریم در درون آن Cohesion و بیرون آن Adhesion وجود دارد بنابراین σ وجود می آید.



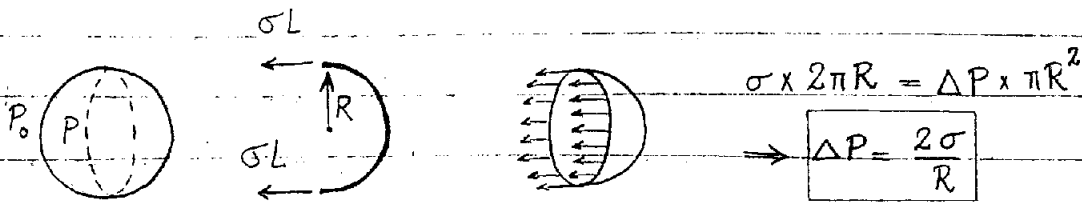
ΔP اختلاف فشار درون و بیرون فواره است.

$$F = PA$$

$$\sigma \times 2L = \Delta P L \times 2R$$

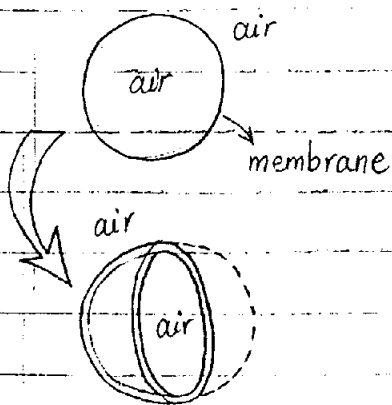
$$\Rightarrow \Delta P = \frac{\sigma}{R}$$

2. Droplet (قطره)



با تشکر از دوست و برادر عزیزم آقای علی اسلامی و ارزوی موفقیت و توفیق روزی افزون برای ایشان

3. Bubble (حباب)



$$2 \times \sigma \times 2\pi R = \Delta P \times \pi R^2$$

$$\Rightarrow \Delta P = \frac{4\sigma}{R}$$

چون در فصل مشتک با هوا داریم بنابراین

دو غشاء وجودی آید!

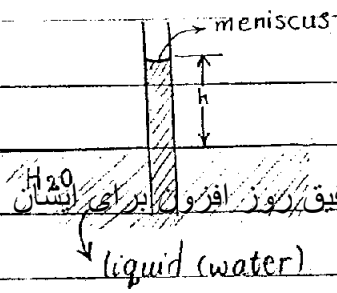
Summary: Three important formulas:

1. Jet: $\Delta P = \frac{\sigma}{R}$

2. Droplet: $\Delta P = \frac{2\sigma}{R}$

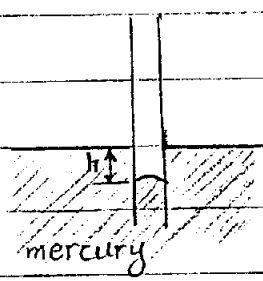
3. Bubble: $\Delta P = \frac{4\sigma}{R}$

Capillary (مویستگی)



* اگر لوله‌ی نازکی (با قطر کم) را درون ظرفی از آب قرار دهیم آب تا ارتفاعی در لوله بالا می‌آید. زیرا در این حالت نیروی Adhesion بین مولکول‌های آبی، علی‌الاصلا، موثرتر از نیروی Cohesion بین مولکول‌های آب و نیز وزن آب است.

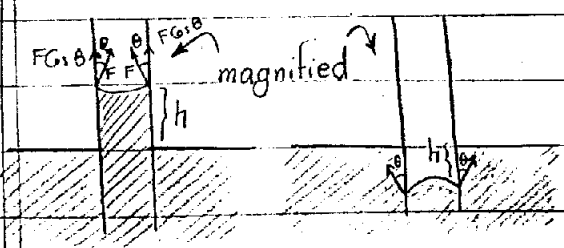
$Adhesion > Cohesion + W_{water}$



* اگر لوله‌ای مانند مثال بالا را درون ظرفی از جیوه قرار دهیم جیوه تا ارتفاعی در لوله پایین می‌آید (نسبت به سطح آزاد جیوه در ظرف). زیرا در این حالت مجموع نیروی وزن جیوه به علاوه‌ی نیروی Cohesion از نیروی Adhesion بین مولکول‌های جیوه و شیشه بیشتر است. (وجه: جیوه چگالی بالایی دارد.)

$Cohesion + W_{Hg} > Adhesion$

نکته: در هر دو مثال بالا فصل مشترک بین مایع، شیشه و هوا، یک دایره است که شعاع آن را وجود می‌آورد. از این مسئله برای بدست آوردن h استفاده می‌تور:



معادله h :
هرچه شعاع لوله بیشتر باشد ارتفاع مایع نیز کاهش می‌یابد (تجسیر ارتفاع مایع درون لوله نسبت به سطح آزاد مایع کمتر است.)

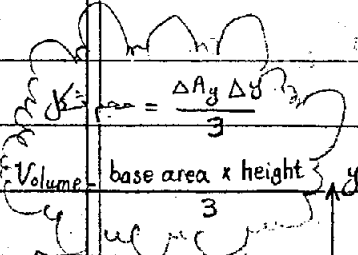
$F = PA \Rightarrow FG \cos \theta = PA$
 $\Rightarrow (\sigma \times 2\pi R) \cos \theta = \rho h (\pi R^2) \Rightarrow h = \frac{2\sigma \cos \theta}{\rho R}$

نکته: θ معمولاً زاویه‌ای بسیار کوچکی است که گاهی مقدار آن را بی‌دهند یعنی آن را صفر در نظر گرفته‌اند: $\cos(0) = 1$

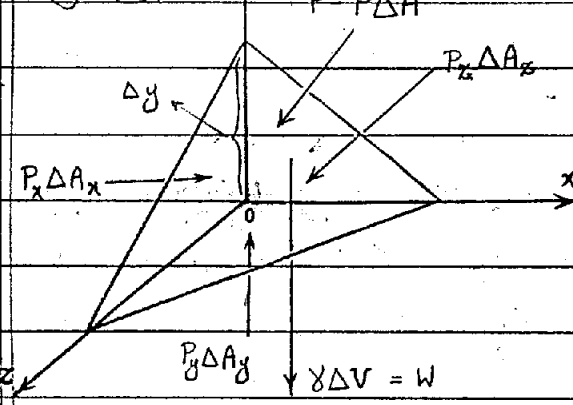
Chapter 2

Fluid Statics

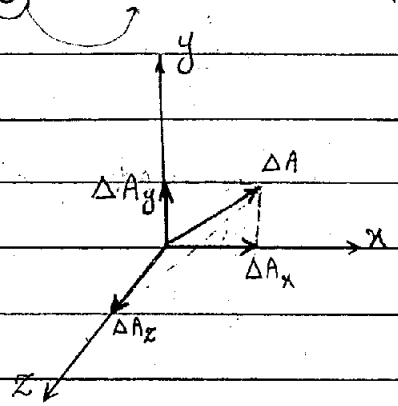
* در کلیه سیالات ساکن مقدار shear stress صفر است زیرا $\frac{dv}{dy} = 0 \Rightarrow \tau = 0$
 یک تشبیه از پوست: در پوست با کشش و منقبض شدن، در مایع در حالت ساکن، هیچ کشش و منقبض شدنی وجود ندارد و فقط نیروی وزن و نیروی واکنش از پایین به آن عمل می‌کند.
 باز هم $\tau = 0$ ولی سیال سرعت دارد.



* فشار در همه جهات برای یک سیال ساکن صفر است.
 اثبات: یک المان در مایع در نظر گرفته و دیواره آن آزاد آن را در نظر می‌گیریم.
 بهترین شکلی که می‌توان به عنوان المان در نظر گرفت یک چهاروجهی است چون می‌توان همه جهات را روی آن بررسی نمود. چون سیال ساکن است فقط نیروهای برآیند بر سطح را حساب می‌کنیم. به این نیروها surface forces گفته می‌شود. نیروهای موازی با سطح را مد نظر نمی‌گیریم (shear forces).
 سطح مایل را ΔA می‌نامیم.



نیروی که فقط بر یک سطح اثر می‌کند: surface force
 نیروی که به تمام ذرات اثر می‌کند مانند وزن: body force



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow P_x \Delta A_x - P \Delta A \cos \theta_x = 0 \Rightarrow P_x - P = 0 \Rightarrow P_x = P$$

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow P_z \Delta A_z - P \Delta A \cos \theta_z = 0 \Rightarrow P_z - P = 0 \Rightarrow P_z = P$$

(l, m, n)
 $\cos \theta_x \cos \theta_y \cos \theta_z$
 کسینوس های هادی

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow P_y \Delta A_y - P \Delta A \cos \theta_y - \gamma \Delta V = 0$$

$$\Rightarrow P_y \Delta A_y - P \Delta A_y - \gamma \frac{\Delta A_y \Delta y}{3} = 0$$

$$\Rightarrow F_y - P - \frac{\gamma \Delta y}{3} = 0$$

as Δy approaches zero, the element approaches a point and hence:

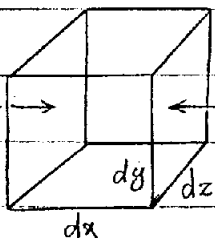
$$P_y - P = 0 \Rightarrow P_y = P$$

با تشکر از دوست و برادر عزیزم آقای علی اسلامی و آرزوی موفقیت و توفیق روز افزون برای ایشان

$$\Rightarrow P_x = P_y = P_z = P$$

$$F = PA$$

معادله و عمود حرکت سیالات



$$f(x) \quad f(x+dx)$$

$$\left(P + \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \frac{(dx)^2}{2!} + \dots \right) dy dz$$

$$f(x+dx) = f(x) + f'(x) dx + f''(x) \frac{(dx)^2}{2!} + \dots$$

$$\sum F = ma \Rightarrow \sum F_x \vec{i} + \sum F_y \vec{j} + \sum F_z \vec{k} = ma$$

$$\sum F_x = P dy dz = \left(P + \frac{\partial P}{\partial x} dx \right) dy dz$$

$$\sum F_x = -\frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz$$

Similarly:

$$\sum F_z = -\frac{\partial P}{\partial z} dz dx dy$$

$$\sum F_y = -\frac{\partial P}{\partial y} dy dx dz - \gamma dx dy dz$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz \right) \vec{i} + \left(-\frac{\partial P}{\partial y} dy dx dz - \gamma dx dy dz \right) \vec{j} + \left(-\frac{\partial P}{\partial z} dz dx dy \right) \vec{k} = \rho dx dy dz \vec{a}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial P}{\partial y} \vec{j} - \gamma \vec{j} + \frac{\partial P}{\partial z} \vec{k} = \rho \vec{a}$$

$$\Rightarrow -\left(\frac{\partial P}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial P}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial P}{\partial z} \vec{k} \right) - \gamma \vec{j} = \rho \vec{a} \Rightarrow \boxed{-\vec{\nabla} P - \gamma \vec{j} = \rho \vec{a}}$$

(Euler Equation =) معادله و عمود حرکت سیالات

(Inviscid flow): Shear stress بدون

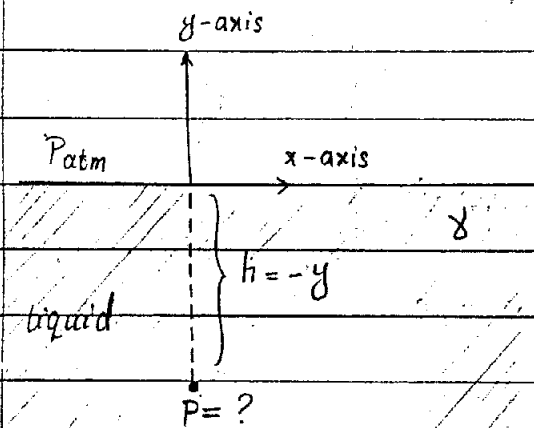
برای سیالات مساکن $\vec{a} = 0 \Rightarrow -\vec{\nabla}P - \gamma \vec{j} = 0$

$$\Rightarrow -\frac{\delta P}{\delta x} \vec{i} - \frac{\delta P}{\delta y} \vec{j} - \frac{\delta P}{\delta z} \vec{k} - \gamma \vec{j} = 0$$

با تشکر از دوست و برادر عزیزم آقای علی اسلامی و آرزوی موفقیت و توفیق روز افزون برای ایشان
یعنی فشار فقط با عمق تغییر می کند.

$$dP = \frac{\delta P}{\delta x} dx + \frac{\delta P}{\delta y} dy + \frac{\delta P}{\delta z} dz$$

$$\Rightarrow dP = 0 - \gamma dy + 0 \Rightarrow \boxed{dP = -\gamma dy} \text{ differential equation of fluid statics}$$



مثال: فشار را در عمق y بیابید.

$$dP = -\gamma dy \Rightarrow P = -\gamma y + C$$

$$y=0 \Rightarrow P = P_{atm} \Rightarrow P_{atm} = -\gamma(0) + C$$

$$\Rightarrow C = P_{atm}$$

$$\Rightarrow P = -\gamma y + P_{atm}$$

\Rightarrow taking $h = -y$ we get :

$$\boxed{P = \gamma h + P_{atm}}$$

در مایعات این رابطه حاکم است

$P = P_{abs.} = \text{Absolute pressure} =$ فشار مطلق (فشار نسبت به مطلقاً)

Gauge pressure = فشار نسبی (فشار نسبت به اتمسفر)

فشار : منظور فشار نسبی است $\leftarrow \gamma h$ را بدست می آوریم.

فشار مطلق : مقدار $P_{atm} +$ فشار نسبی را می یابیم.

در حل مسائل

* ممکن است در مسأله مقدار چگالی ثابت نباشد :

$p = ?$

$\rho = ?$

$$dP = -\gamma dy \Rightarrow dP = -\rho g dy$$

با تشکر از دوست و برادر عزیز آقای علی اسلامی در آرزوی موفقیت و توفیق روز افزون برای ایشان

$$P = \frac{m}{V} \frac{R T}{M} \Rightarrow P = \rho R T$$

datum
سطح مقایسه

$$P = \rho R T \Rightarrow P_0 = \rho_0 R T_0$$

Isothermal : $T = T_0$

$$\frac{P}{P_0} = \frac{\rho}{\rho_0} \Rightarrow \rho = \frac{P}{P_0} \rho_0$$

$$-dP = -\frac{\rho_0}{P} P g dy \Rightarrow \frac{dP}{P} = -\frac{\rho_0}{P_0} g dy$$

$$\Rightarrow \int_{P_0}^P \frac{dP}{P} = \int_{y_0}^y -\frac{\rho_0 g}{P_0} dy \rightarrow \ln\left(\frac{P}{P_0}\right) = -\frac{\rho_0 g}{P_0} (y - y_0) \Rightarrow P = P_0 e^{-\frac{\rho_0 g}{P_0} (y - y_0)}$$

Example: Find ρ, P in the previous example if $y - y_0 = 2000$, $P_0 = 10^5$ Pa

$$\rho_0 = 1.24 \text{ kg/m}^3 ?$$

$$P = 10^5 e^{-\frac{1.24 \times 9.806}{10^5} (2000)} = 78412 \text{ Pa}$$

$$\rho = \frac{1.24}{10^5} \times 78412 = 0.972 \text{ kg/m}^3$$

Example: Find the gauge pressure at depth of an ocean (1500 m).

$$K = 2.07 \times 10^9 \text{ Pa}, \quad \gamma_{\text{water}} = 10050 \text{ N/m}^3 \text{ (در سطح اقیانوس)}$$

$$\rho_0 = 1005 \text{ kg/m}^3$$

Since gauge pressure = γh , we have to find the amount of γ at the depth of 1500 m.

$\gamma = \rho g$ so we should find ρ at the desirable depth.

$$k = \frac{dP}{\frac{dv}{v}} \quad (1)$$

از تشریح در دیانت و برادار عزیزم آقای علی اسلامی و آرزوی موفقیت و توفیق روزی افزون برای ایشان $m = \rho v \Rightarrow \rho = \frac{m}{v}$

$$(1) \& (2) \Rightarrow k = \frac{dP}{\frac{dv}{v}} \rightarrow k \frac{dP}{\rho} = dP \Rightarrow P|_P^P = k \ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) \Rightarrow P - P_0 = k \ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)$$

$$\Rightarrow e^{\frac{P-P_0}{k}} = \frac{\rho}{\rho_0} \Rightarrow \rho = \rho_0 e^{\frac{P-P_0}{k}} \quad (3)$$

$$dP = -\gamma dy \Rightarrow dP = -\rho g dy \stackrel{(3)}{\Rightarrow} dP = -\rho_0 g e^{\frac{P-P_0}{k}} dy \Rightarrow$$

$$e^{\frac{P_0-P}{k}} dP = -\rho_0 g dy \Rightarrow -k e^{\frac{P_0-P}{k}} \Big|_P^P = -\rho_0 g (y - y_0) \Rightarrow$$

$$-k(e^{\frac{P_0-P}{k}} - 1) = -\rho_0 g (y - y_0) \Rightarrow e^{\frac{P_0-P}{k}} = \left[\frac{\rho_0 g}{k} (y - y_0) \right] + 1$$

$$\Rightarrow \frac{P_0 - P}{k} = \ln\left[\frac{\rho_0 g}{k} (y - y_0) + 1 \right] \Rightarrow P - P_0 = -k \ln\left[\frac{\rho_0 g}{k} (y - y_0) + 1 \right]$$

$$\Rightarrow \text{Gauge pressure} = P - P_0 = -2.07 \times 10^9 \ln\left[\frac{10050}{2.07 \times 10^9} \times (-1500) + 1 \right] = 15130160.63$$

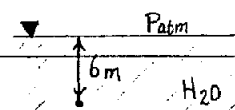
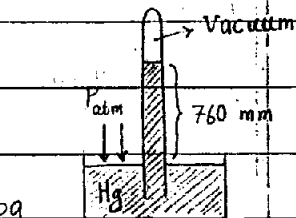
* * *

Example: Find the gauge and absolute pressure at depth of 6 m. The barometer reaches 760 mm Hg. (Hint: $\gamma_{Hg} = 13.57 \gamma_{H_2O}$)

$$P_{\text{gauge}} = \gamma h = 9806 \times 6 = 58826 \text{ pa}$$

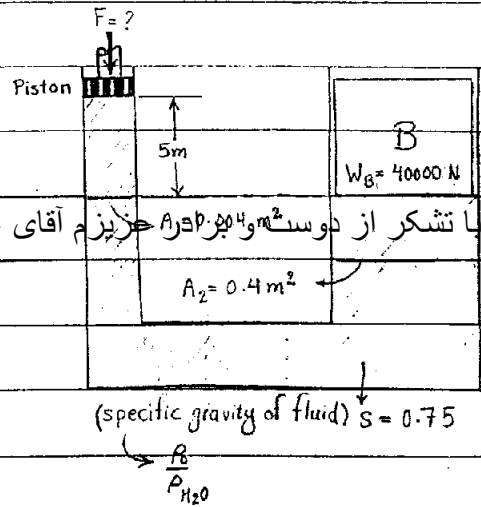
$$P_{\text{atm}} = \gamma_{Hg} \times h_{Hg} = 13.57 \times \overbrace{1000}^{\gamma_{\text{water}}} \times 9.806 \times 0.760 = 101131.24 \text{ pa}$$

$$P_{\text{abs}} = P_{\text{gauge}} + P_{\text{atm}} = 58826 + 101131.24 = 159967.24 \text{ pa}$$



Point: Barometer determines P_{atm}

Example: Find F required to balance.



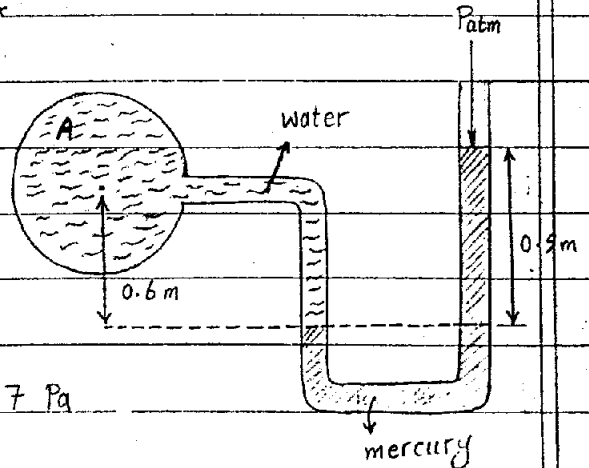
$$\frac{F}{A_1} + \gamma_o h_1 = \frac{W_B}{A_2}$$

با تشکر از دوست و همکارم مهندس عزیزم آقای علی اسلامی و آرزوی موفقیت و توفیق روز افزون برای ایشان

$$\Rightarrow \frac{F}{0.004} + 0.75 \times 9806 \times 5 = \frac{40000}{0.4}$$

$$\Rightarrow F = 253 \text{ N}$$

Example: Find the gauge pressure at A



$$P_A + \gamma_{H_2O} \times 0.6 = P_{atm} + \gamma_{Hg} \times 0.9$$

$$\Rightarrow P_A - P_{atm} = 0.9 \gamma_{Hg} - 0.6 \gamma_{H_2O}$$

$$P_{gauge} = P_A - P_{atm}$$

$$\Rightarrow P_{gauge} = 0.9(13.57 \times 9806) - 0.6(9806) = 113877 \text{ Pa}$$

Example: Find $P_A - P_B$ in this figure.

$$\gamma_w: \gamma_{water}, \gamma_o: \gamma_{oil}, \gamma_H: \gamma_{Mercury}$$

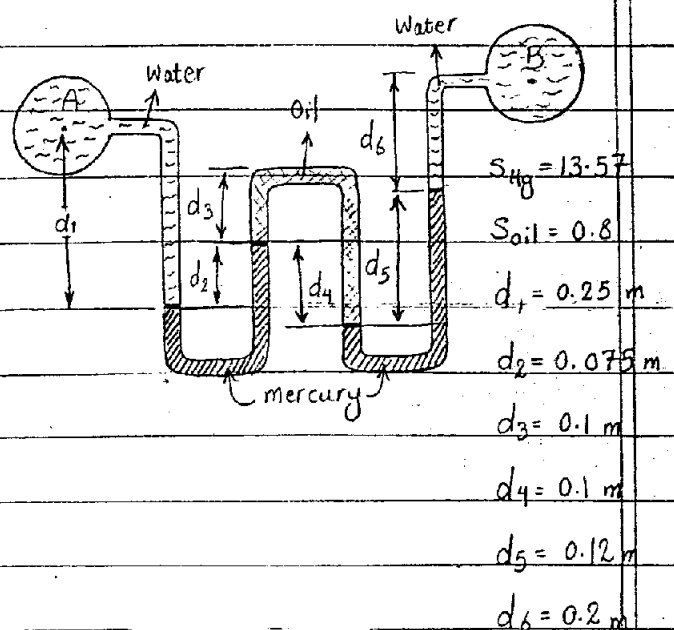
$$P_A + \gamma_w d_1 - \gamma_H d_2 + \gamma_o d_4 - \gamma_H d_5 - \gamma_w d_6 = P_B$$

$$\Rightarrow P_A + 9806 \times 0.25 - 13.57 \times 9806 \times 0.075$$

$$+ 0.8 \times 9806 \times 0.1 - 13.57 \times 9806 \times 0.12$$

$$- 9806 \times 0.2 = P_B$$

$$\Rightarrow P_A - P_B = 24672.32 \text{ pa}$$



$$S_{Hg} = 13.57$$

$$S_{oil} = 0.8$$

$$d_1 = 0.25 \text{ m}$$

$$d_2 = 0.075 \text{ m}$$

$$d_3 = 0.1 \text{ m}$$

$$d_4 = 0.1 \text{ m}$$

$$d_5 = 0.12 \text{ m}$$

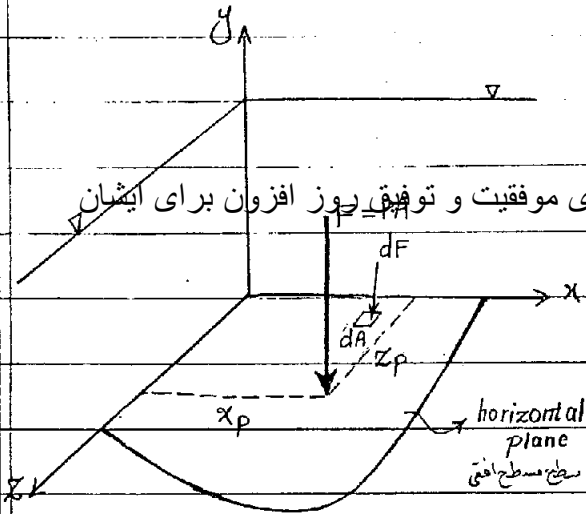
$$d_6 = 0.2 \text{ m}$$

Pressure forces on Planes

نیروهای وارد بر سطح مسطح سیالات

نیروی وارد بر سطح مسطح افقی در صفحه‌ی xz
را بررسی و محاسبه می‌کنیم.

با تشکر از دوست و برادر عزیزم آقای علی اسلامی و آرزوی موفقیت و توفیق روز افزون برای ایشان



$$\Rightarrow F = \int_A P dA = P \int_A dA \Rightarrow F = PA$$

Pressure Center (مرکز فشار) یعنی نقطه اثر

نیروی برآمد فشاری

(Note: Momentum of Resultant = Sumation of moments of components of the resultant)

حال باید بررسی کنیم که نیروی F بر چه نقطه‌ای از صفحه وارد می‌شود. برای این کار باید نقاط x_p و z_p را پیدا کرد.
اول پیدا کردن x_p حول محور z گشتاوری بگیریم:

$$dM = (dF)x$$

$$\Rightarrow M = F \cdot x_p = \int (dF)x \Rightarrow PAx_p = \int_A P dA x \Rightarrow x_p = \frac{\int x dA}{A}$$

$$\text{Similarly: } z_p = \frac{\int z dA}{A}$$

آن گشتاور حول محور x ها بگیریم:

x_p و z_p در فصول‌های بدست آمده نشان دهنده این است که نیروی برآیند (Resultant force)

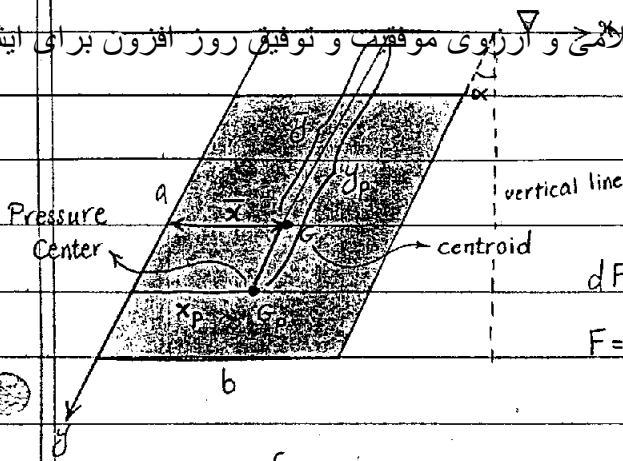
از مرکز سطح (centroid) عبور می‌کند.

$$\Rightarrow \begin{cases} x_p = \frac{\int x dA}{A} \\ z_p = \frac{\int z dA}{A} \end{cases}$$

Inclined Plane

برای پیدا کردن نیروهای وارد بر سطح مایل باید دستگاه مختصات را مشخص نمود.

محور x موازی سطح مایل با سطح آزاد مایع است و محور y عمود بر آن است. برای این محورها باید این محورها را به گونه ای انتخاب کرد که سطح مایل در صفحه xy واقع شود.



$$dF = P dA$$

$$F = \int P dA \xrightarrow[\text{کتاب}]{\text{اشادتم}} F = P_G A = \gamma h_G A$$

$G = \text{centroid}$

حال پس از یافتن نیروی برآیند که بر این صفحه وارد می شود باید نقطه اثر (خط اثر: Influence line) صفحه را بیابیم چون صفحه مایل است نقطه اثر بر نقطه G منطبق نخواهد بود. چون نقاط پایینی G از فشار و در نتیجه نیروی بالاتری برخوردارند. به همین دلیل نقطه اثر یا همان مرکز فشار (Pressure Center) نقطه ای پایین تر از G خواهد بود که مختصات آن (x_p, y_p) را از فرمول های زیر بدست می آوریم:

(Note: $G(\bar{x}, \bar{y})$ و $C_p(x_p, y_p)$)

با امان گیری و اشتباه گیری، گسترده حول محورهای x و y :

$$y_p = \bar{y} + \frac{I_{\bar{x}}}{\bar{y}A}$$

$I_{\bar{x}} = \int y^2 dA$

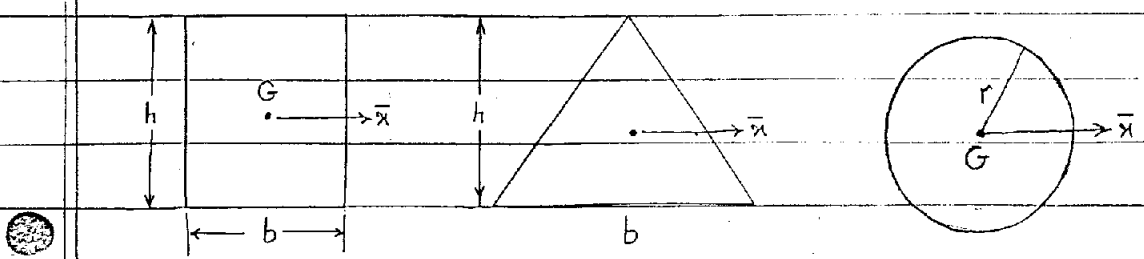
eccentricity (خارج از مرکز) Moment of Inertia with respect to \bar{x} -axis

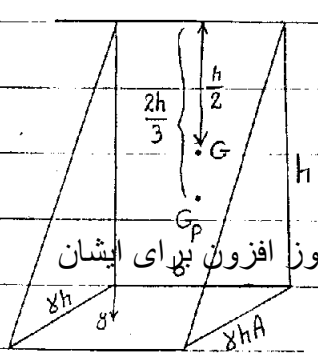
$$x_p = \bar{x} + \frac{I_{\bar{y}}}{\bar{y}A}$$

$I_{\bar{y}} = \int x^2 dA$

Product of Inertia with respect to \bar{x} and \bar{y} axes

برای سطوحی که محور x یا y محور تقارن باشند، $I_{\bar{x}\bar{y}} = 0$. مثلاً سطوح مستطیلی، مثلثی (مستطای السطائینی) و دایره ای:



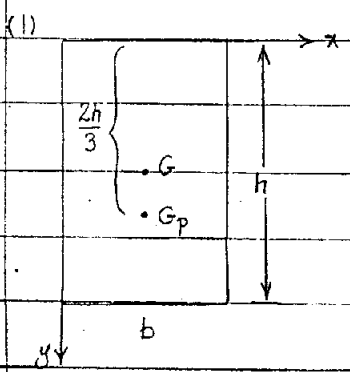


$$F = P_G A$$

$$= \gamma \frac{h}{2} (bh)$$

با تشکر از دوست و برادر عزیزم آقای علی اسلامی و آقای موفقی و توفیق روز افزون برای ایشان

Example : Find pressure force & pressure center.

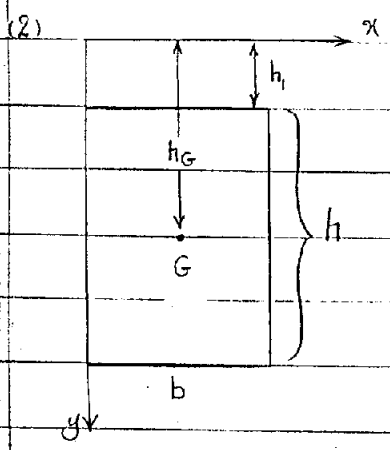


$$F = P_G A$$

$$= \gamma h_G A = \gamma \frac{h}{2} (bh) = \frac{\gamma b h^2}{2}$$

$$x_p = \bar{x} = \frac{b}{2} \quad (I_{xy} = 0)$$

$$y_p = \bar{y} + \frac{I_{xy}}{\bar{y} A} = \frac{h}{2} + \frac{bh^3/12}{\frac{h}{2} \times bh} = \frac{h}{2} + \frac{h}{6} = \frac{2h}{3}$$



$$F = P_G A$$

$$= \gamma h_G A = \gamma \left(h_1 + \frac{h}{2} \right) bh$$

$$x_p = \bar{x} + \frac{I_{xy}}{\bar{y} A} = \frac{b}{2}$$

$$y_p = \bar{y} + \frac{I_{xy}}{\bar{y} A} = h_1 + \frac{h}{2} + \frac{bh^3/12}{\left(h_1 + \frac{h}{2} \right) (bh)}$$

Example: Find the pressure force and its pressure center exerted on ABCD plane. (The width of the tank normal to the page is equal to 3 ft)

$$F = P_G A = \gamma h_G A = 62.4 \times (6 + 3 \sin 30) \times (3 \times 6) = 8424 \text{ lb}$$

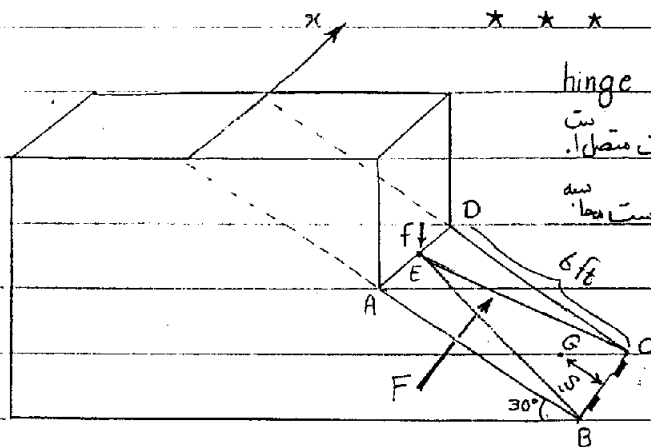
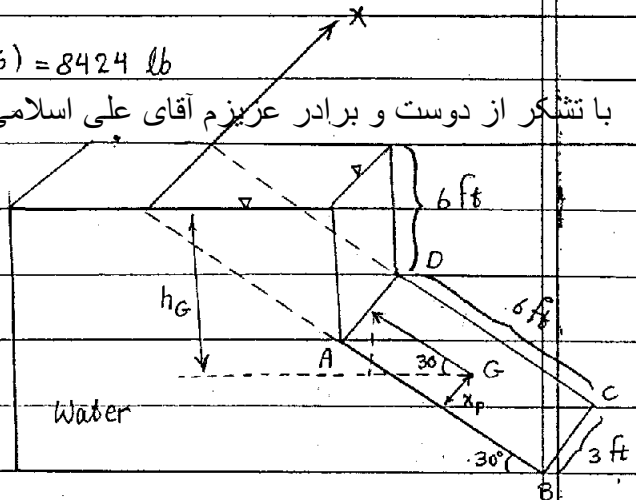
با تشکر از دوست و برادر عزیزم آقای علی اسلامی و آرزوی موفقیت و توفیق روز افزون برای ایشان

$$x_p = \bar{x} = \frac{3}{2} = 1.5 \text{ ft} \quad (I_{\bar{x}\bar{y}} = 0)$$

$$y_p = \bar{y} + \frac{I_{\bar{x}}}{\bar{y} A} = \left(\frac{6}{\sin 30} + 3 \right) + \frac{3 \times 6^3 / 12}{15 \times (3 \times 6)}$$

$$= 15 + 0.2 = 15.2 \text{ ft}$$

← eccentricity خروج از مرکز



مثال: همان مثال قبلی است، با این تفاوت که در hinge

دریچه ای مثلثی شکل تعبیه شده که از طریق پلاک کف متصل است.

نیروی F را که برای بسته نگه داشتن دریچه لازم است محاسبه کنید.

(Find F to keep the triangular gate EBC closed. Assume that the gate weight is negligible)

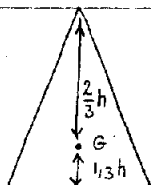
$$F = P_G A = \gamma h_G A = 62.4 \times (6 + 4.5 \sin 30) \times \frac{3 \times 6}{2} = 508.2 \text{ lb}$$

$$x_p = \bar{x} = 1.5 \text{ ft}$$

$$y_p = \bar{y} + \frac{I_{\bar{x}}}{\bar{y} A} = 16 + \frac{3 \times 6^3 / 36}{16 \times \left(\frac{6 \times 3}{2} \right)} = 16 + 0.1875 = 16.1875 \text{ ft}$$

$$s = 18 - y_p \Rightarrow s = 18 - 16.1875 = 1.8125 \text{ ft}$$

$$f \times 6 = F \times s \Rightarrow f = \frac{F \times s}{6} \Rightarrow f = \frac{508.2 \times 1.8125}{6} = 153.51875$$



نکته: در مثلث مساحتی الساقین مرکز ثقل به فاصله $\frac{2}{3}$ از رأس و $\frac{1}{3}$ از قاعده آنرا دارد یعنی در حل مثال بالا از این نکته استفاده شده است.

Pressure Prism Method (روش منشور فشار)

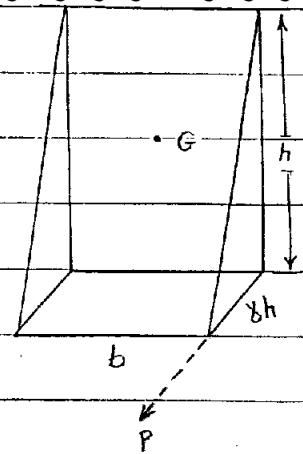
$$dV = dF = p dA = \gamma h dA$$

$$F = \int dV = V$$

با تشکر از دوست و برادر عزیزم آقای علی اسلامی و آرزوی موفقیت و توفیق روز افزون برای ایشان

$F = \text{Pressure Prism Volume}$ (حجم منشور فشار)

$$F = \frac{\gamma h \times h}{2} \times b = \frac{\gamma b h^2}{2}$$



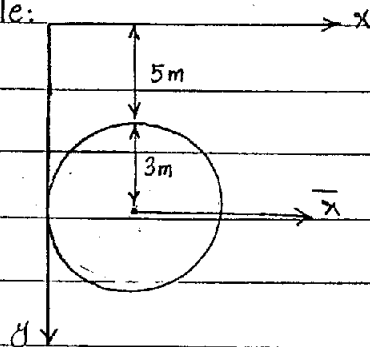
مرکز حجم منشور فشار، نقطه اثر F خواهد بود یعنی مرکز فشار خواهد بود.
 توجه: کارایی این روش محدود بوده و تنها برای اشکالی نظیر همین
 شکل کاربرد دارد. (اگر سطح مورد نظر مستطیل باشد روش
 منشور ساده تر خواهد بود.)

$$F = P_G A = \frac{\gamma h}{2} \times bh = \frac{\gamma h^2 b}{2}$$

روش قلبی:

$$y_p = \bar{y} + \frac{I_{\bar{x}}}{\bar{y} A} = \frac{h}{2} + \frac{bh^3/12}{(h/2)(bh)} = \frac{h}{2} + \frac{h}{6} = \frac{2h}{3}$$

Example:



$$F = P_G A = 9806 \times 8 \times \pi \times 3^2$$

$$x_p = \bar{x} = 3m$$

$$y_p = \bar{y} + \frac{I_{\bar{x}}}{\bar{y} A} = 8 + \frac{\pi \times 3^4/4}{8(\pi \times 3^2)}$$

جمع بندی: $F = P_G A$

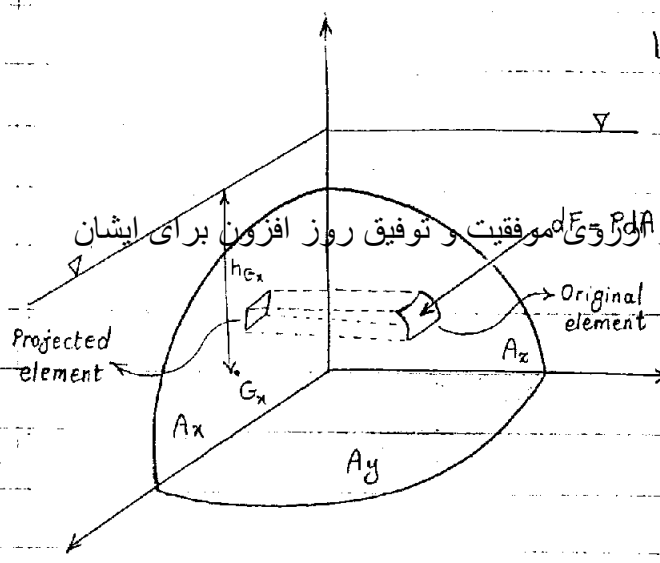
$$y_p = \bar{y} + \frac{I_{\bar{x}}}{\bar{y} A}$$

برای سطح غیر مستطیلی

دری سطح مستطیلی یا از فرمول بالا استفاده می شود یا y_p منطبق بر مرکز حجم منشور فشار

Pressure Forces on Curved Surfaces

در این جا نمی توان با انتگرال گیری فشار را محاسبه نمود زیرا نیروها در یک جهت نیستند و جمع آن ها بصورت جبری نخواهد بود (بلکه جمع برداری است).



حال آن که انتگرال فقط برای جمع های جبری با تشکر از دوست و برادر عزیزم آقای علی اسلامی قابل محاسبه است. در این جا اگر روی محاسبه ای عملی کنیم

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$$

$$dF = P dA$$

$$\Rightarrow dF_x = P dA_x \Rightarrow dF_x = P dA \cos \theta_x$$

$$F_x = \int dF_x = \int_{A_x} P dA \cos \theta_x = \int_{A_x} P dA_x \Rightarrow F_x = P G_x A_x$$

فشار روی المان تصویر

Similarly we have: $F_z = P G_z A_z$

$$F_y = \int P dA \cos \theta_y = \int P dA_y = \int \gamma h dA_y = \gamma \int dV \Rightarrow F_y = \gamma V$$

فشار روی المان اصلی

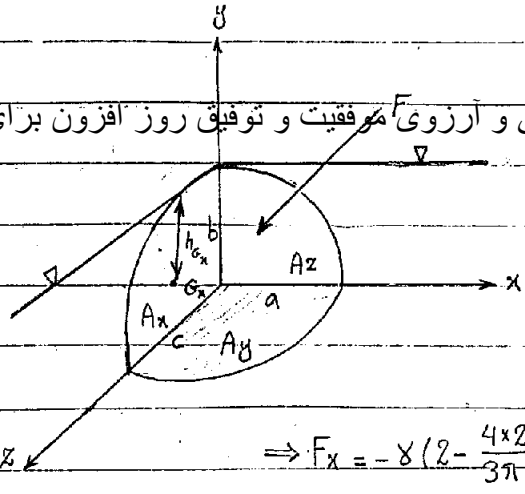
F_y : وزن سیال روی جسم

V : حجم محصور بین سطح جسم، سطح آزاد و خطوط شاعولی برابر جسم

نکته: نقطه اثر F_y در مرکز حجم V است.

مثال: نیروهای فشاری وارد بر بیضوی (ellipsoid) به معادله $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$ را که در آب غوطه‌ور است محاسبه نمایید. مرکز بیضوی دو متر زیر سطح آب است.

با تشکر از دوستانتان و برادر عزیزم آقای علی الهلالمی و آرزوی موفقیت و توفیق روز افزون برای ایشان



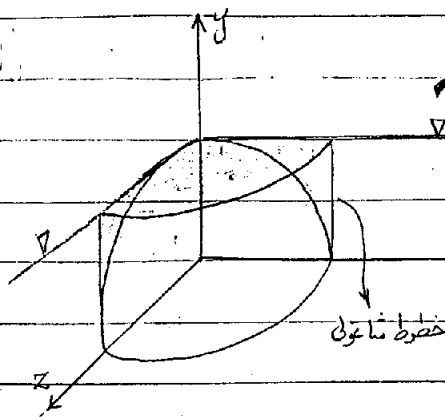
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = 2m \\ b = 2m \end{cases}$$

$$F_x = -P_{G_x} A_x = -\gamma h_{G_x} A_x$$

مرکز ثقل ربع بیضی: $\frac{4b}{3\pi}$ (مرکز ثقل ربع دایره: $\frac{4r}{3\pi}$)

$$\Rightarrow F_x = -\gamma \left(2 - \frac{4 \times 2}{3\pi}\right) \times \frac{\pi \times 2 \times 3}{4} = -53200 \text{ N}$$

$$F_z = -P_{G_z} A_z = -\gamma h_{G_z} A_z = -9806 \left(2 - \frac{4 \times 2}{3\pi}\right) (\pi \times \frac{2^2}{4}) = -35400 \text{ N}$$

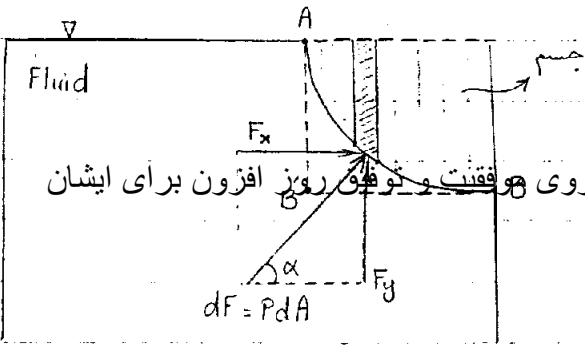


$$\begin{cases} V_{\text{ellipsoid}} = \frac{4\pi abc}{3} \\ V_{\text{sphere}} = \frac{4\pi r^3}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow F_y = -\gamma V = -\gamma \left(\frac{\pi \times 2 \times 3}{4} \times 2 - \frac{1}{8} \times \frac{4}{3} \pi \times 2 \times 2 \times 3 \right)$$

حجم بیضوی حجم کروی

* محاسبه نیروهای فشاری بر سطح منحنی در حالتی که سیال زیر سطح منحنی قرار دارد



$$dF = p dA$$

$$dF_x = p dA_x = p dA \cos \alpha = p dA_x$$

$$F_x = \int p dA_x \Rightarrow F_x = P_G A_x$$

با تشکر از دوست و برادر عزیزم آقای علی اسلامی و ارزوی هوشیار و نوذیر روزی افزون برای ایشان

$$\text{Similarly: } F_z = P_G z A_z$$

$$dF_y = p dA \sin \alpha \Rightarrow dF_y = p dA_y \Rightarrow dF_y = \gamma h dA_y = \gamma dV$$

$$\Rightarrow F_y = \int dF_y \Rightarrow F_y = \gamma \int dV \Rightarrow F_y = \gamma V$$

V: حجم محصور بین جسم، سطح آزاد یا امتداد آن و خطوط شاقولی پیرامون جسم

جمع کند: نتایج محاسبه نیروهای فشاری در هر دو صورت (سیال زیر منحنی یا بالای آن):

$$F_x = P_G A_x$$

$$F_z = P_G z A_z$$

$$F_y = \gamma V$$

جهت F_y برای حالت سیال در جسم (بالای منحنی) $F_y \downarrow$

" " " " زیر سطح جسم (زیر منحنی) $F_y \uparrow$

Example: Find F which is exerted on the curved surface AB .

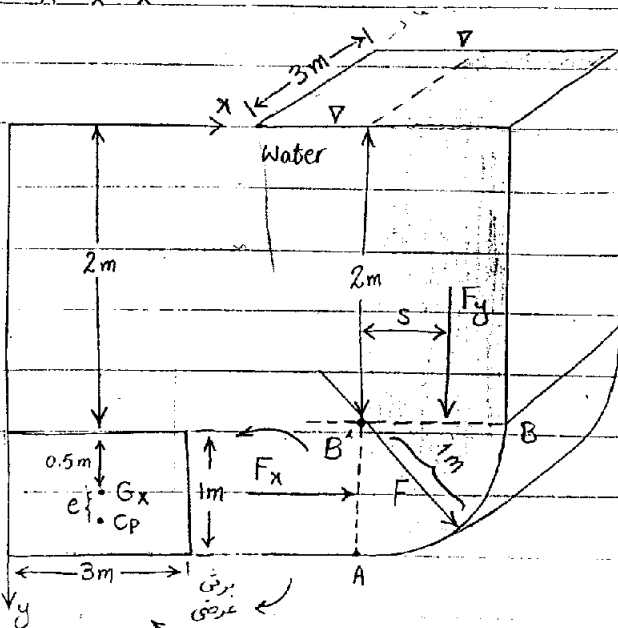
$$F_x = ? \quad F_y = ? \quad F_z = 0 \quad (\text{در راستای } z \text{ نیرو نداشتیم})$$

$$F_x = P_G A_x = \gamma h_G A_x$$

$$= 9806 \times 2.5 \times (1 \times 3) = 73545 \text{ N}$$

$$\bar{y}_p = \bar{y} + \frac{I_{\bar{x}}}{\bar{y} A} = 2.5 + \frac{3x^3/12}{2.5(3 \times 1)} = 2.533 \text{ m}$$

$$F_y = \gamma V = 9806 \left(\frac{\pi \times 1^2}{4} + 2 \times 1 \right) \times 3 = 81940 \text{ N} \downarrow$$



فاصله مرکز از مرکز مستطیل تا محور AB: $1 \times \frac{1}{2} = 0.5 \text{ m}$
مساحت \times مساحت \times مساحت \times مساحت

(فاصله مرکز (centroid) ربع دایره تا محور AB) \times مساحت $+$ (فاصله مرکز مستطیل تا محور AB) \times مساحت \times مساحت

$$\Rightarrow \left(1 \times 2 \times \frac{\pi \times 1^2}{4} \right) S = 1 \times 2 \times 0.5 + \frac{\pi \times 1^2}{4} \times \frac{4 \times 1}{3\pi} \Rightarrow S = \frac{1 + \frac{1}{3}}{\frac{\pi}{7}} \Rightarrow S = 0.85 \text{ m} = \bar{x}_p$$

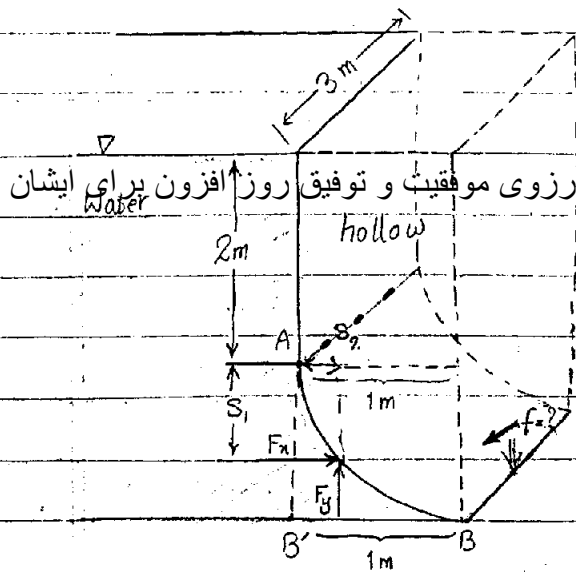
مثال: نیروی جذب نیوتن بایست تا دریچه ثابت باشد و باز نشود.

عرض عمود بر صفحه: 3 m و وزن دریچه قابل چشم پوشی

فرض شود (چنانچه دریچه دریچه وزن داشته باشد آن را

در نظر گرفته و در معادلات وارد می کنیم. اما مرکز و وسط

با تشکر از دوست و برادر عزیزم آقای علی اسلامی و ارزوی موفقیت و توفیق روز افزون برای ایشان دریچه وارد می گردد.)



$$F_{x1} = F_x \times S_1 + F_y \times S_2$$

$$F_x = \rho g h_c A_x = 9806 \times 2.5 \times (1 \times 3) = 73575 \text{ N}$$

$$h_p = \bar{h} + \frac{I_{\bar{x}}}{\bar{h} A} = 2.533 \text{ m}$$

$$S_1 = h_p - 2 \text{ m} = 2.533 - 2 = 0.533 \text{ m}$$

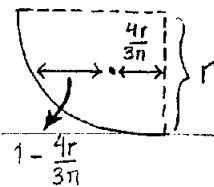
$$F_y = \rho V = 9806 \left(1 \times 2 + \frac{\pi \times 1^2}{4} \right) \times 3 = 81970 \text{ N} \uparrow$$

محل نقطه اش Fy در مرکز حجم V باشد (S1 = 1.5 m)

بازر (ناصله‌ای مرکز ثقل نامرئی دایره) + جز دوم + بازر (ناصله‌ای مرکز ثقل تاجریخته x جزء اول x مساحت کل (مستطیل))

$$\left(1 \times 2 + \frac{\pi \times 1^2}{4} \right) S_2 = 1 \times 2 \times 0.5 + \frac{\pi \times 1^2}{4} \times \left(1 - \frac{4 \times 1}{3\pi} \right)$$

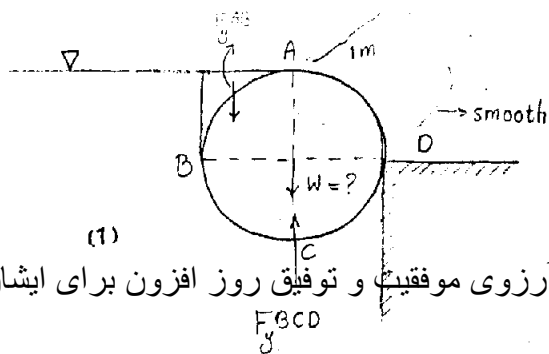
ناصله‌ای مرکز (centroid) ربع دایره تا محور AB' →



$$\Rightarrow S_2 = 0.5213 \text{ m}$$

$$\Rightarrow f = 81950 \text{ N}$$

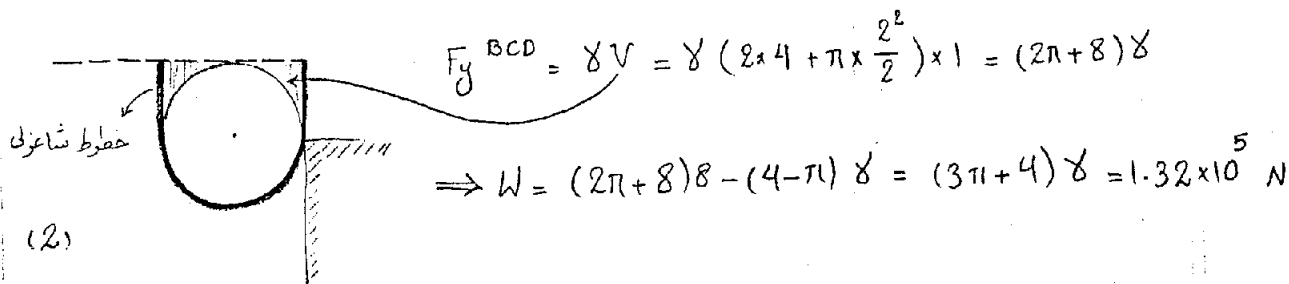
مثال: یک استوانه مانند شکل، مانع از در آمدن بر روی دیوار شده است. سطح تماس بین استوانه و دیوار صیقلی است. نیروی وارد بر دیوار نیروی گرانش استوانه را باید.



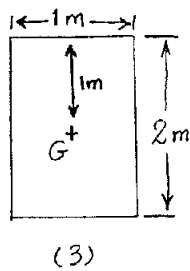
با تشکر از استاد محترم و عزیزم آقای علی اسلامی و آرزوی موفقیت و توفیق روز افزون برای ایشان

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_y^{BCD} - F_y^{AB} - W = 0 \Rightarrow W = F_y^{BCD} - F_y^{AB}$$

$$F_y^{AB} = \gamma V = 9806 \left(2 \times 2 - \frac{\pi \times 2^2}{4} \right) \times 1 = (4 - \pi) \gamma$$

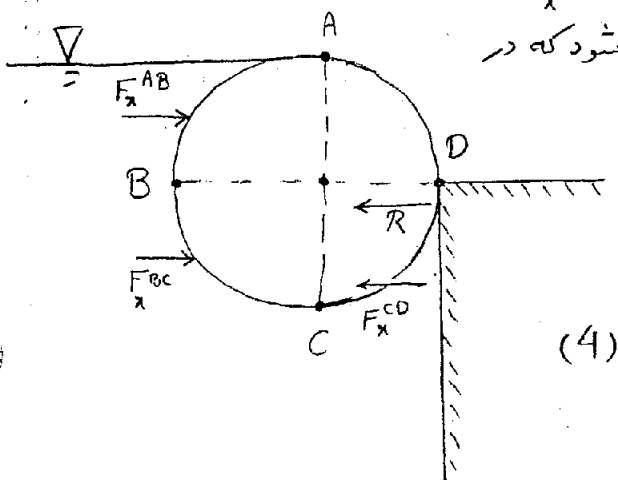


قسط در: $\sum F_x = 0 \Rightarrow F_x^{AB} - R = 0 \Rightarrow R = F_x^{AB} = \rho g_x A_x = \gamma \times 1 \times (1 \times 2) = 2 \gamma = 19600 \text{ N}$

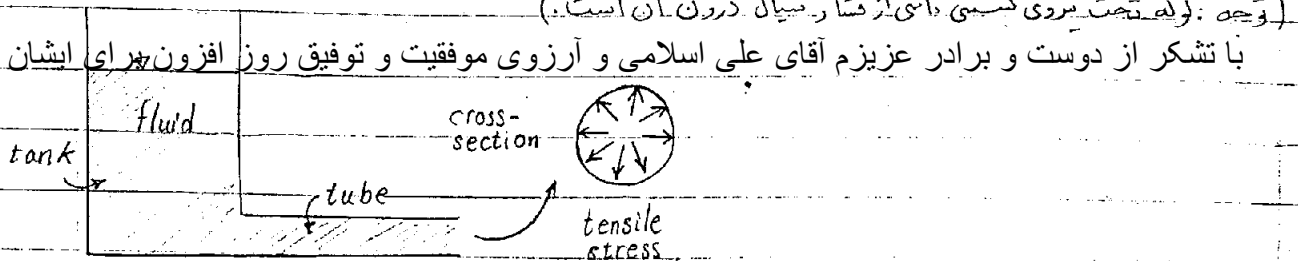


وجه شود که در محاسبه $\sum F_x$ ، با توجه شکل (4)، F_x های که

سیال به استوانه وارد می کند عبارتند از F_x^{CD} ، F_x^{BC} ، F_x^{AB} که F_x^{BC} و F_x^{CD} همدیگر را خنثی می کنند و گاهی تنها F_x^{AB} باقی می ماند که برای صفر بودن $\sum F_x$ باید R را که همان $F_x^{AB} = R$ نیروی عکس العمل دیوار است خنثی کند. F_x^{AB} بر صفحه ی تصویر نیم استوانه ی بالای وارد می شود که در شکل (3) نشان داده شده است.

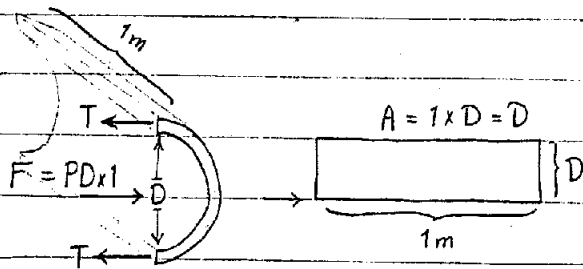


* اگر بخواهیم سیالی را تحت فشار ثابت (مثل تارخت فشار) در یک مخزن یا لوله ای استوانه‌ای قرار دهیم با معلوم بودن شرایط مانند فشار درون لوله (P)، قطر لوله (D) و تنش کششی مجاز (σ) می‌توان ضخامت (e) مورد نیاز برای مخزن یا لوله‌ی مورد نظر را بطریق زیر محاسبه کرد.
(وجه: لوله تحت نیروی کششی ناشی از فشار سیال درون آن است.)



با تشکر از دوست و برادر عزیزم آقای علی اسلامی و آرزوی موفقیت و توفیق روز افزون برای ایشان

برای این کار ابتدا Free Body Diagram (نمودار جسم آزاد) نیم استوانه را رسم می‌کنیم. طول لوله را یک متر



$$\sum F_x = 0$$

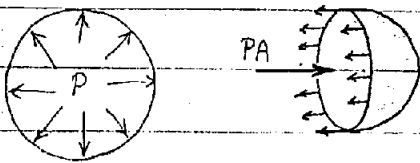
$$\Rightarrow F - 2T = 0 \Rightarrow PA - 2T = 0$$

$$\Rightarrow PA = 2T \Rightarrow P(D \times 1) = 2T$$

$$\Rightarrow PD = 2\sigma \times e \times 1 \Rightarrow \boxed{e = \frac{PD}{2\sigma}}$$

* حال اگر مخزن بصورت کره باشد:

(نمودار جسم آزاد نیم کره را رسم می‌کنیم):



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow T - PA = 0 \Rightarrow \sigma e (\pi D) = P \pi D^2 / 4 \Rightarrow \boxed{e = \frac{PD}{4\sigma}}$$

پس اگر مخزن کروی باشد ضخامت کمتر و در نتیجه مقدار ماده‌ی کمتری برای ساخت مخزن مورد نیاز است.

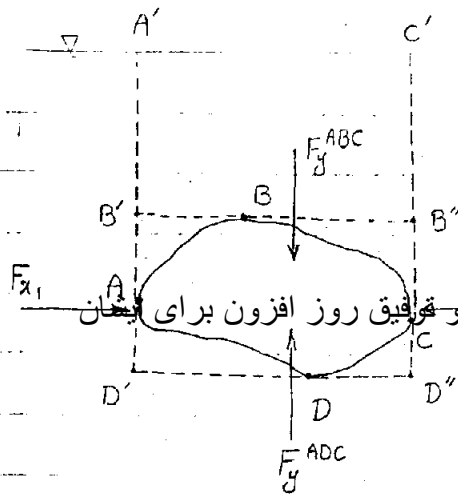
نیروی برآش (= نیروی ارشمیدس = Bouyant Force)

برآیند نیروهای وارد بر یک جسم مستغرق (submerged) یا شناور (floating) درون

یک سیال را «نیروی برآش» یا Bouyant Force گویند.

محاسبه نیروی برآیند

برآیند نیروهای افقی وارد بر جسم صغیر است. مثلاً $F_{x1} = F_{x2}$
 و همین طور برای هر نیروی افقی دیگری یک نیروی خنثی کننده
 وجود دارد و نتیجتاً برآیند نیروهای افقی صفر خواهد شد.



با تشکر از دوست و برادر عزیزم آقای علی اسلامی و آرزوی موفقیت و توفیق روز افزون برای ایشان

$$F_y^{ABC} = \gamma V_{A'C'CB'A}$$

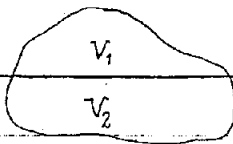
$$F_y^{ADC} = \gamma V_{ADCC'A'}$$

$$F_{\text{Bouyant}} : F_B = F_y^{ADC} - F_y^{ABC} = \gamma V_{ADCC'A'} - \gamma V_{A'C'CB'A}$$

$$\Rightarrow F_B = \gamma V_{\text{جسم مستغرق}}$$

* * *

حال اگر جسمی بطور کامل درون سیال نیفتد:



V_1 : حجم قاع گرفته در بیرون سیال

$$F_B = \gamma V_2$$

V_2 : حجم قاع گرفته درون سیال

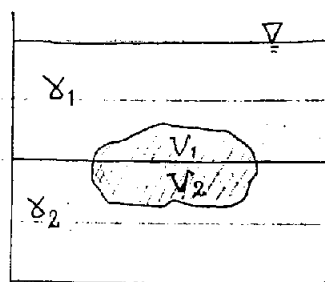
displaced fluid volume: V_2

* نقطه اثر نیروی برآیند در مرکز ثقل (centroid) قسمت درون سیال است.

نکته: اگر سیال از دو قسمت γ_1 و γ_2 تشکیل شده باشد و جسم بین دو قسمت سیال واقع شود،

نیروی برآیندی برابر خواهد بود با:

$$F_B = \gamma_1 V_1 + \gamma_2 V_2$$



مثال: سنگ معدنی که وزن طبیعی آن $W = 1.5 \text{ N}$ و وزن ظاهر آن در درون سیال

$W' = 1.1 \text{ N}$ است. حجم سنگ و وزن مخصوص نسبی (relative density) آن را بیابید.

(Hint : $S = \frac{\gamma}{\gamma_{\text{water}}}$)

$$F_B = W - W' = 1.5 - 1.1 = 0.4 \text{ N}$$

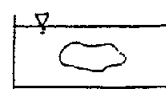
با تشکر از دوست و برادر عزیزم آقای علی اسلامی و آرزوی موفقیت و توفیق روغن افزون برای ایشان

$$F_B = \gamma_w V = 9806 \times V = 0.4 \Rightarrow V = \frac{0.4}{9806} \text{ m}^3 = 40.8 \text{ cm}^3$$

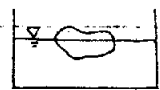
$$S = \frac{\gamma_{\text{ore}}}{\gamma_w} = \frac{W/V}{\gamma_w} = \frac{1.5 / (0.4 / 9806)}{9806} = 3.75$$

* * *

Stability of Submerged & Floating Bodies



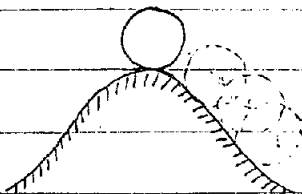
submerged



floating

اعتشاش : disturbance

بررسی حالت های پایداری



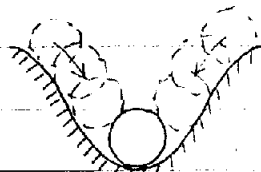
Unstable Equilibrium

در اثر اعتشاش نیروهای ایجاد

می شود که سعی دارند سیستم را

از حالت اولیه دور کنند.

(تعادل ناپایدار)



Stable Equilibrium

در اثر اعتشاش نیروهای

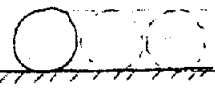
ایجاد می شود که سعی دارند

سیستم را به حالت اولیه

برگردانند. اثری اعتشاش

نهایتاً مستهلک می شود.

(تعادل پایدار)



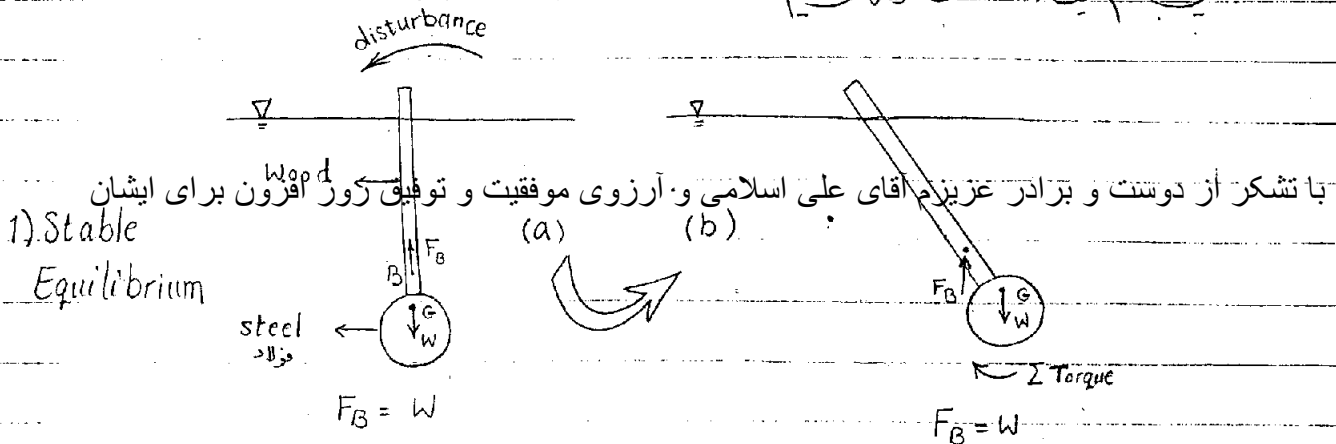
Neutral Equilibrium

در اثر اعتشاش نیروی ایجاد

می شود.

(تعادل خنثی)

جسم نامشکی را که از دو نوع ماده همبسته شده است در یک سطح قرار داده ایم. برای بررسی تعادل بد این جسم یک اغتشاش را معرفی کنیم:

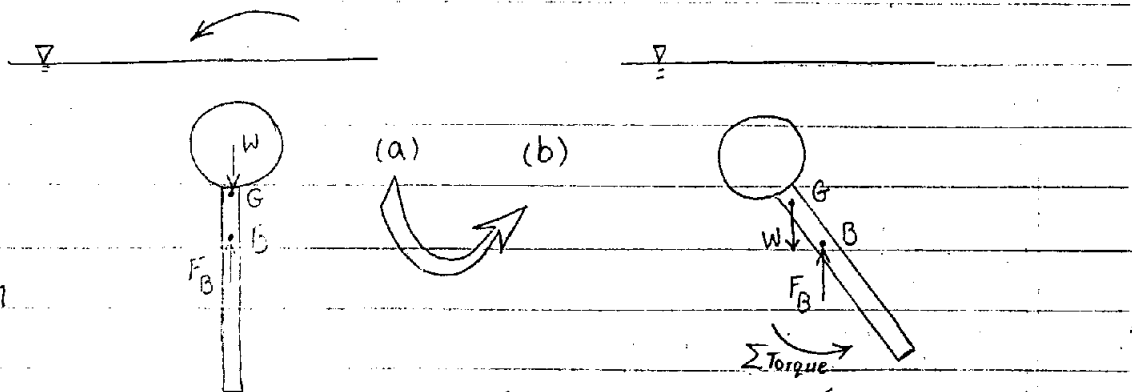


1) Stable Equilibrium

با تشکر از دوست و برادر عزیزم آقای علی اسلامی و آرزوی موفقیت و توفیق روز افزون برای ایشان

* * *

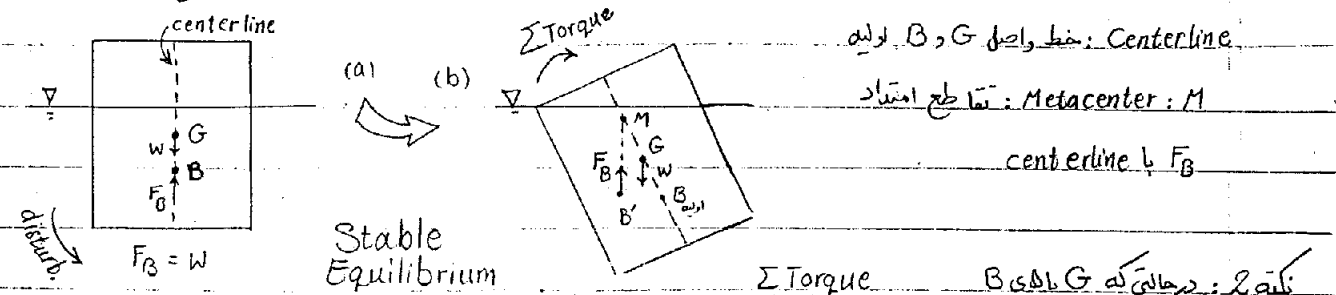
2) Unstable Equilibrium



نکته 1: در حالتی که G زیر B باشد حتماً Stable Equilibrium داریم. (بسیار مهم در کنکور)

* * *

Stability of Prismatic Bodies

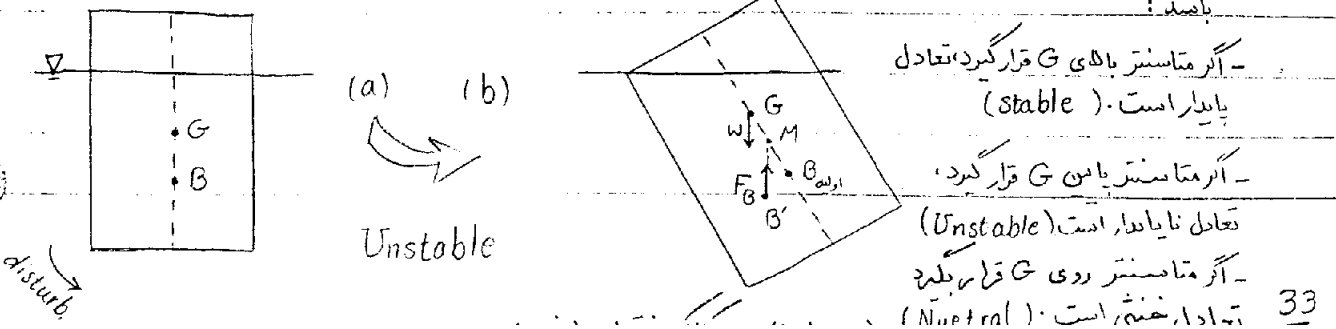


Centerline: خطی که از B و G می‌گذرد.

Metacenter: M: تقاطع امتداد

centerline با F_B

نکته 2: در حالتی که G بالای B باشد:



- اگر متاسنتر بالای G قرار گیرد تعادل پایدار است. (Stable)

- اگر متاسنتر پایین G قرار گیرد،

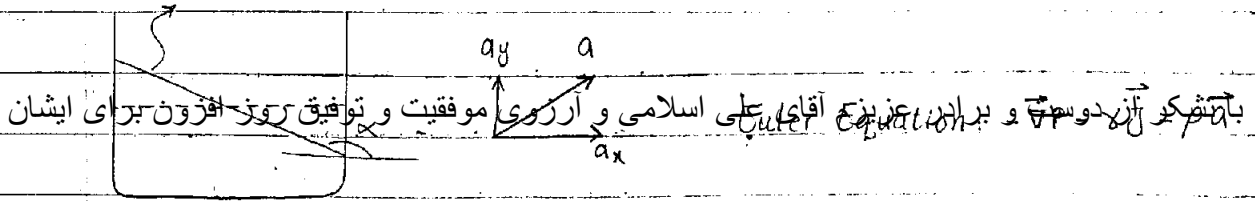
تعادل ناپایدار است. (Unstable)

- اگر متاسنتر روی G قرار بگیرد

تعادل خنثی است. (Neutral)

Uniform Linear Acceleration

اگر سیالی درون ظرفی قرار گرفته و ظرف با شتاب a حرکت کند، سطح آزاد سیال



ایات کند:

| |
|------------------------|
| $\frac{dy}{dx} = -a_x$ |
| $a_y + g$ |

$\tan \alpha =$

شیب سطح آزاد سیال: $\frac{dy}{dx}$

همچنین: $P = \rho(g + a_y)h$

برای سیالی که با شتاب حرکت می کند، فشار وارد بر جسی که در عمق h آن قرار دارد از رابطه ی فوق محاسبه می شود که در آن علامت a_y در حالت های مختلف به صورت زیر تعیین می شود:

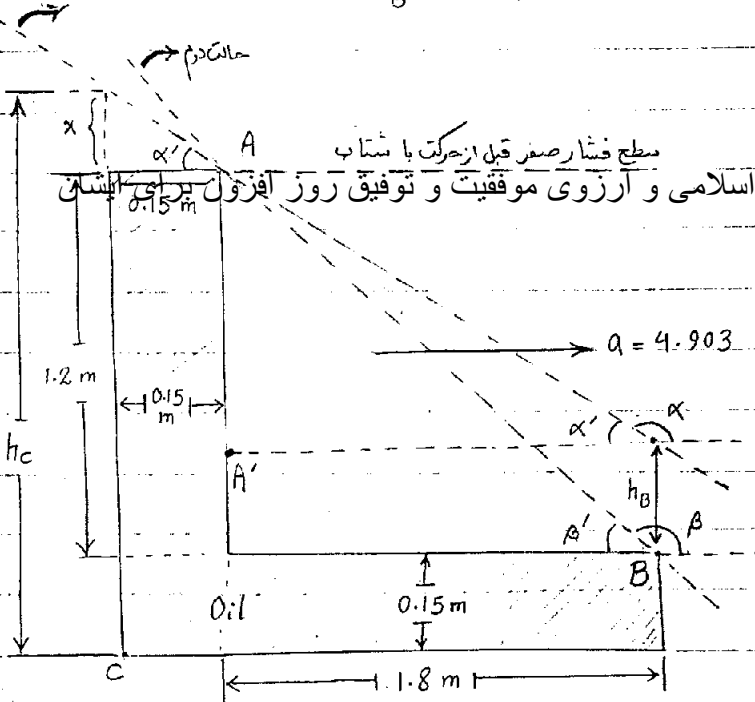
تند شونده به سمت بالا $\leftarrow a_y$ مثبت
 تند شونده به سمت پایین $\leftarrow a_y$ منفی

Acceleration
تند شونده

کند شونده به سمت بالا $\leftarrow a_y$ منفی
 کند شونده به سمت پایین $\leftarrow a_y$ مثبت

Deceleration

مثال: در نقطه A روغنهای کوچکی وجود دارد که از طریق آن Oil با جوی در ارتباط است. فشار در B و C را بیابید. (S_{oil} = 0.8) در جهتی P_B = 0؟ سطح فشار صفر بعد از حرکت



$$\frac{dh}{dx} = \frac{-a_x}{a_y + g} = \frac{-4.903}{0 + 9.806} = -0.5$$

با تشکر از دوست و برادر عزیزم آقای علی اسلامی و آرزوی موفقیت و توفیق روز افزون برای ایشان

$$\Rightarrow \tan \alpha' = 0.5 = \frac{AA'}{1.8}$$

$$\Rightarrow AA' = 0.9 \text{ m}$$

$$h_B = 1.2 - AA' = 1.2 - 0.9 = 0.3 \text{ m}$$

$$\Rightarrow h_B = 0.3 \text{ m}$$

$$P_B = \rho(g + a_y)h_B \Rightarrow$$

$$P_B = 0.8 \times 1000 \times (0 + 9.806) \times 0.3 = 2353.44 \text{ Pa}$$

$$h_c = 0.15 + 1.2 + x$$

$$\tan \alpha' = \frac{x}{0.15} \Rightarrow x = 0.15 \tan \alpha' \Rightarrow x = \frac{0.15}{2}$$

$$\Rightarrow h_c = 0.15 + 1.2 + \frac{0.15}{2} = 1.425 \text{ m}$$

$$\Rightarrow P_c = 0.8 \times 1000 (0 + 9.806) (1.425) = 11179 \text{ Pa}$$

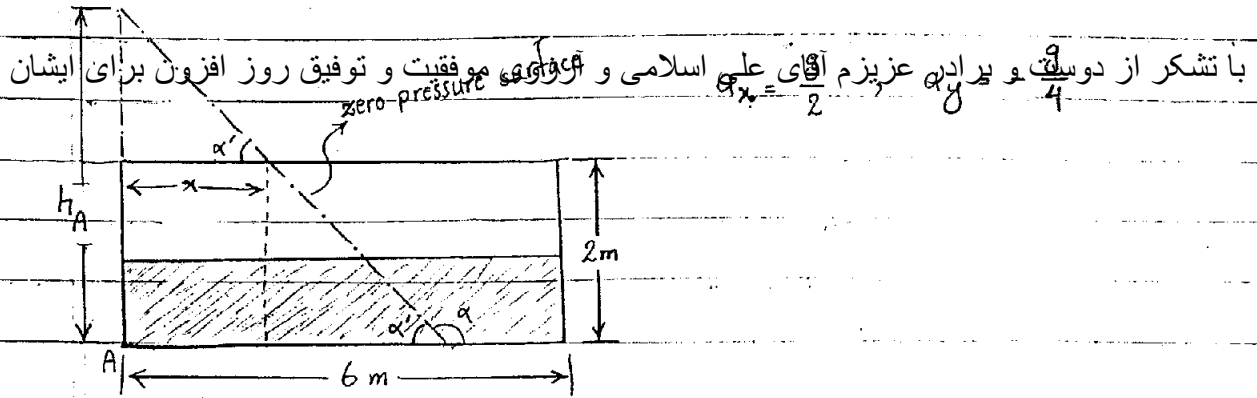
نسبت دم: برای این که P_B = 0، باید خط مورب (سطح آزاد مایع) از نقطه B عبور کند (حالت دم در شکل بالا) که این مسئله مستلزم شتاب بیشتر است.

$$\tan \beta' = \frac{1.2}{1.8} = 0.667$$

$$\Rightarrow \tan \beta = -0.667 = \frac{dh}{dx} = \frac{-a_x}{a_y + g} \Rightarrow -0.667 = \frac{-a_x}{0 + 9.806}$$

$$\Rightarrow a_x = 6.537 \text{ m/s}^2$$

مثال: یک جعبه ی بسته با قاعده ی افقی به اضلاع 6 متر در 6 متر تا نیمه از مایع پر است. در حالی که ارتفاع جعبه 2 متر است. یک فشار ثابت خطی $\vec{a}(a_x, a_y)$ به جعبه داده می شود. فشار را در نقطه ی A بیابید.



$$\frac{dy}{dx} = \frac{-a_x}{a_y + g} = \frac{-\frac{g}{2}}{-\frac{g}{4} + g} = -\frac{2}{3} \Rightarrow \tan \alpha = -\frac{2}{3} \Rightarrow \tan \alpha' = \frac{2}{3}$$

در این گونه مسائل از ثابت بودن حجم سیال هم استفاده می شود.

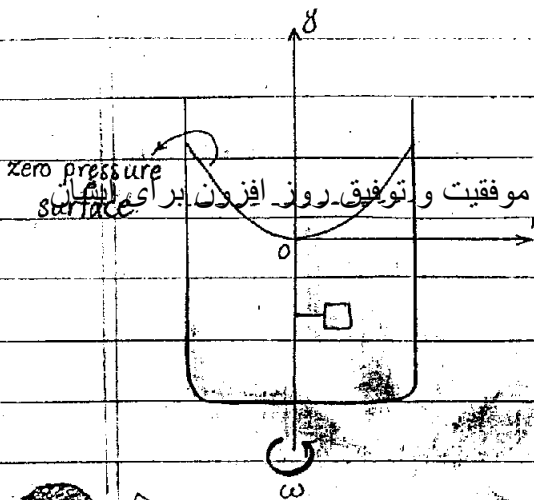
$$V_{\text{fluid}} = 6 \times 1 \times 6 = \frac{x + (x+3)}{2} \times 2 \times 6 \Rightarrow x = 1.5 \text{ m}$$

محل قرار گرفتن سطح فشار صفر را از روی تجربه انتخاب می کنیم چرا که از نظر منطقی می توان آن را در مکان های دیگری در نظر گرفت اما در این صورت x عددی غیر قابل قبول و مسخره و صد البته مزخرف (!) بدست می آید مثلاً $x = 8 \text{ m}$.

$$P_A = \rho (a_y + g) h_A = \rho (g + (-\frac{g}{4})) \times 3 = \frac{9}{4} \rho g$$

Uniform Rotation About a Vertical Axis

سیالی در درون ظرفی قرار گرفته است. ظرف با سرعت زاویه‌ای به حول محور عمودی می‌چرخد. سطح سیال در نتیجه چرخش ظرف از حالت افقی خارج می‌شود و بصورت یک سهمی در می‌آید. این دو نسبت و بردار در کنار هم معادله آرای علی اسلام و آرزوی موفقیت و توفیق روز افزون برای شما را در پی می‌آید. برای یک المان حجمی با سطح dA و طول dr در نظری می‌کنیم:



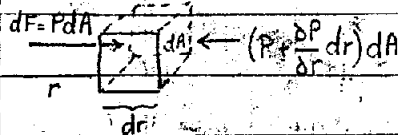
$$\sum F_r = PdA - (P + \frac{\delta P}{\delta r} dr)dA = ma = \rho Va$$

$$\Rightarrow \frac{\delta P}{\delta r} dr dA = \rho dr dA (-\omega^2 r)$$

شتاب

علامت منفی شتاب بدلیل مرکز گرا بردن شتاب است که در نتیجه در خلاف جهت محور r خواهد بود.

magnified
element
illustration



$$\Rightarrow \frac{\delta P}{\delta r} = \rho \omega^2 r \quad (1)$$

We also know that: $\frac{\delta P}{\delta y} = -\rho g \quad (2)$

$$P = P(y, r) \Rightarrow dP = \frac{\delta P}{\delta y} dy + \frac{\delta P}{\delta r} dr \xrightarrow[\text{of (1) \& (2)}]{\text{Substitution}} dP = -\rho g dy + \rho \omega^2 r dr$$

$$\Rightarrow P = -\rho g y + \frac{\rho \omega^2 r^2}{2} + C$$

Putting $r=0, y=0, P=0 \Rightarrow C=0 \Rightarrow$

$$P = -\rho g y + \rho \frac{\omega^2 r^2}{2}$$

قمار در هر
نقطه از سیال
حسب r و y

* برای یافتن معادله‌ی سطح فشار یعنی P را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$P=0 \Rightarrow 0 = -\rho g y + \frac{\rho \omega^2 r^2}{2} \Rightarrow y = \frac{\omega^2 r^2}{2g}$$

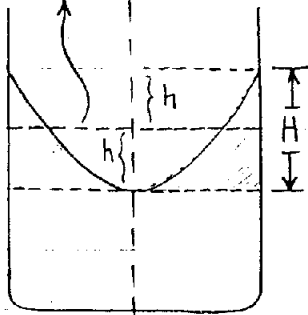
* Zero pressure surface is a paraboloid surface.

نکته: از معادله $P = \rho gh$ نیز می‌توان فشار دارد بر نقطه را یافت.

h : depth of point from zero pressure surface

نکته: در حال چرخش با سرعت زاویه‌ای ω می‌توان شکل زیر را مورد نظر قرار داد.

با لشکر از دوست و برادر عزیزم آقای علی اسلامی و آرزوی موفقیت و توفیق روز افزون برای ایشان
 سطح آزاد افقی قبل از چرخش $h = \frac{1}{2} H$



هر قدر سیال در حال چرخش نسبت به حالت افقی قبل از

چرخش بالا می‌آید به همان مقدار هم پایین می‌رود.

این اصل را می‌توان از طریقی این‌که در حجم مگنی‌کون، نصف

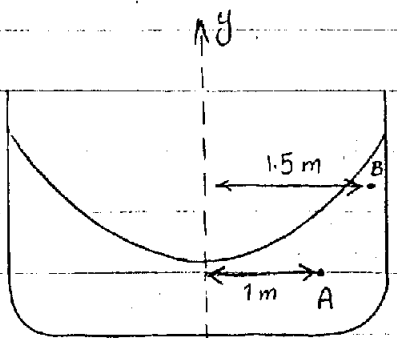
حجم استوانه‌ی محیط بر آن است. اثبات کرد.

مثال: مایعی ($S = 1.2$) با سرعت $\omega = 200 \text{ rpm}$ ($\text{rpm} : \text{round per minute}$) چرخانده می‌شود.

(در راستای یک محور عمودی). در نقطه‌ی A از سیال که فاصله‌ی آن تا محور دوران

1 متر است، فشار برابر 70 kPa است. فشار را در نقطه‌ی B که 2 متر بالاتر از نقطه‌ی

A قرار دارد حساب کنید. فاصله‌ی نقطه‌ی B تا محور دوران $r_B = 1.5 \text{ m}$ است.



$$P_A = -\rho g y_A + \rho \frac{\omega^2 r_A^2}{2}$$

$$\Rightarrow 70000 = -1.2 \times 1000 \times 9.806 \times y_A + 1.2 \times 1000 \left(\frac{200 \times 2\pi}{60} \right)^2 \times \frac{1^2}{2}$$

(ω بر حسب $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ نوشته شده است $\leftarrow \left(\text{rpm} \times \frac{2\pi}{60} = \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)$)

$\Rightarrow y_A = 16.42 \text{ m} \quad \Rightarrow y_B = y_A + 2 = 18.42 \text{ m}$ (چون دستگاه مختصات است و بدان جهت مثبت y رو به بالاست، جمع می‌شوند.)

$$P_B = -\rho g y_B + \rho \frac{\omega^2 r_B^2}{2} = -1.2 \times 1000 \times 9.806 \times 18.42 + 1.2 \times 1000 \left(\frac{200 \times 2\pi}{60} \right)^2 \times \frac{(1.5)^2}{2}$$

$\Rightarrow P_B = 355424.44 \text{ Pa}$

مثال: لوله‌ای به طول 2 m از کف بسته است. این لوله را با آب پری کنیم و به صورت مایل به زاویه‌ی شیب 60° قرار می‌دهیم. سپس آن را حول محور قائم که دقیقاً از وسط آن می‌گذرد با سرعت زاویه‌ای $\omega = 6.73 \frac{rad}{s}$ می‌چرخانیم. بطوریکه زاویه‌ی شیب آن تغییر نکند. سطح فشار آزاد صفر را رسم کنید و فشار را در نقاط B و C تعیین کنید.

با تشکر از دوست و برادر عزیزم آقای علی اسلامی و توفیق روز افزون برای ایشان

$$A'B = AB \cos 30 = 1 \cos 30$$

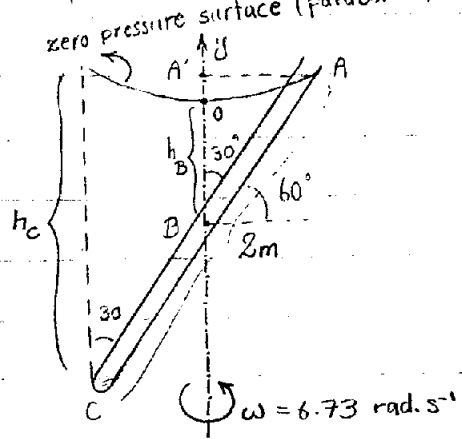
از فرمول سطح فشار استفاده کرده و r را برابر r_A قرار می‌دهیم تا $A'O = y_A$ را محاسبه کنیم.

$$y_A = \frac{\omega^2 r_A^2}{2g} = \frac{(6.73)^2 \times (1 \sin 30^\circ)^2}{2 \times 9.806} = 0.577 \text{ m}$$

$$h_B = A'B - y_A = 1 \cos 30^\circ - 0.577 = 0.289 \text{ m}$$

$$P_B = \rho g h_B = 1000 \times 9.806 (0.289) = 2830 \text{ Pa}$$

$$\checkmark P_C = \rho g h_C = 1000 \times 9.806 (2 \cos 30) = 16980 \text{ Pa}$$



* * *

در مسائلی که با گسترده‌های شیب از روش التام گیری و انتقال گیری استفاده می‌شود، یک نکته بر سطح همیشه بطور دلخواه انتخاب می‌کنیم. حال باید فشار وارد بر این نقطه را بیابیم.

$$0 + \gamma_1 R - 4\gamma_w = \gamma_2 r \sin \theta = P(\theta)$$

$$\Rightarrow 3\gamma_w \times 1.5 - 4\gamma_w - 0.9\gamma_w \times 2 \sin \theta = P(\theta)$$

$$\Rightarrow P(\theta) = 0.5\gamma_w - 1.8\gamma_w \sin \theta = \gamma_w (0.5 - 1.8 \sin \theta)$$

بنابراین فشار در oil به ازای θ ی خاصی صفر می‌شود که برای θ ی کمتر از آن فشار منفی خواهد بود. در قسمت فشار منفی نیروی سیس داخل مایع (سیال) وارد می‌شود.

$$dF = P(\theta) dA = \gamma_w (0.5 - 1.8 \sin \theta) \times 4r d\theta$$

$$dM = dF l = 8\gamma_w (0.5 - 1.8 \sin \theta) d\theta \times r \sin(\frac{\pi}{2} - \theta)$$

moment of dF with respect to the hinge.

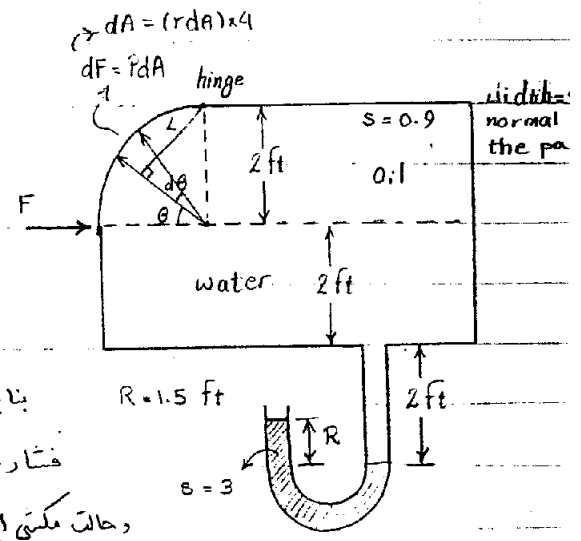
$$\Rightarrow dM = \gamma_w (0.5 - 1.8 \sin \theta) (4r d\theta) l = \gamma_w (0.5 - 1.8 \sin \theta) \times 8 d\theta r \sin(\frac{\pi}{2} - \theta)$$

$$= 16\gamma_w (0.5 - 1.8 \sin \theta) \cos \theta d\theta$$

$$M = \int_0^{\pi/2} 16\gamma_w (0.5 - 1.8 \sin \theta) \cos \theta d\theta = F \times r$$

$$\Rightarrow F \times 2 = 16\gamma_w \int_0^{\pi/2} (0.5 \cos \theta - 1.8 \cos \theta \sin \theta) d\theta = 16\gamma_w \left[0.5 \sin \theta - 1.8 \frac{\sin^2 \theta}{2} \right]_0^{\pi/2}$$

$$= 16\gamma_w \left[0.5 - \frac{1.8}{2} \right] = 16\gamma_w (-0.4) \Rightarrow F = -8 \times 62.4 \times 0.4$$



سپس گسترده نیروی حاصل از $P(\theta)$ را بیابیم.

در دینامیک سه اصل بررسی می شود:

1) Mass conservation law

2) Momentum conservation law

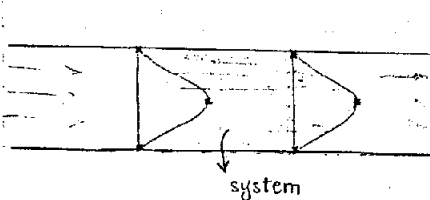
3) Energy conservation law

با تشکر از دوست و برادر عزیزم آقای علی اسلامی و ارزوی موفقیت و توفیق روز افزون برای ایشان در دینامیک جامدات ، وقتی که بخشی حرکت می کند می توان با دانستن centroid ، سرعت جسم و یا مسافت طی شده توسط آن را بدست آورد زیرا در جسم جامد ، مولکول ها نسبت به هم جای ثابتی دارند . به این گونه سیستم ها ، Lagrangian System گفته می شود .

System: mass of material particles (mass of a certain collection of particles)

به این روش بررسی در جامدات ، Lagrangian Approach گفته می شود .

در سیالات نمی توان روش مذکور را به کار برد زیرا به عنوان مثال اگر سیالی در لوله ی زیر در حالت



حرکت یابند ، نقاط چسبیده به بدنه ی داخلی

لوله ثابت بوده و سرعت صفر دارند اما نقاط

محوری دارای حداکثر سرعت هستند .

بنابراین شکلی سیستم در اثر flow تغییر می کند .

از این رو در سیالات از روش دیگری بنام Euler Approach در بررسی دینامیک استفاده می شود .

Control Volume

A fixed volume in shape and size in space.

حجم سیستم اولیه ی رسم شده در لوله ی بالا همیشه شکل و اندازه ی ثابتی دارد بنابراین control volume می باشد .

Control Volume Relationship (the relationship between system & control volume)

معادله ی زیر برای جرم ، مومنتوم و انرژی کاربرد دارد .

$$\left. \frac{dN}{dt} \right|_{\text{system}} = \frac{\delta}{\delta t} \int_{\text{c.v.}} \rho \eta dV + \int_{\text{c.s.}} \rho \eta \cdot \vec{v} \cdot d\vec{A}$$

control volume control surface (سطح حجم کنترل) velocity

N: Property (mass, momentum, Energy)

η: property per unit mass

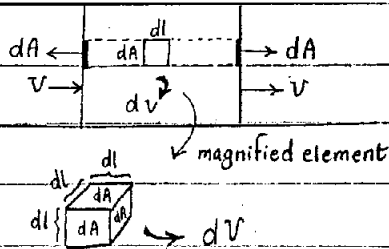
$\left. \begin{array}{l} N: \text{mass} \\ N: \text{moment.} \end{array} \right\} \eta = \frac{m}{m} = 1$
 $\eta = \frac{mV}{m} = V$

Mass Conservation Law (Continuity)

چون جرم سیستم ثابت است و اینک تغییر آن صورت $\frac{dN}{dt} \Big|_{\text{system}} = \frac{dm}{dt} \Big|_{\text{system}} = 0$ است

با تشکر از دوست و برادر عزیزم آقای علی اسلامی و آرزوی موفقیت و توفیق روزی افزون برایشان

$$\frac{\delta}{\delta t} \int_{c.v.} \rho dV + \int_{c.s.} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0 \quad \text{General Continuity Equation}$$



نکته: سطح کنترل، سطح روی حجم کنترل است.

توجه: همیشه حاصلضرب A, V و در نتیجه

علامت آن در ورودی ها ← منفی است
در خروجی ها ← مثبت

$$\vec{V} = \frac{dl}{dt} \Rightarrow \vec{V} \cdot d\vec{A} = \frac{dl}{dt} \cdot dA = \frac{dV}{dt}$$

انگیزه از $\frac{dV}{dt}$ ، کل حجم سیالی را نشان می دهد که در واحد زمان وارد می شود. در اطراف المان هم dA داریم ولی چون ورود و خروج سیال داریم منظور نمی شود. پس این معادله چون $c.s$ می باشد فقط در ورودی و خروجی معنا دارد.

* بر روی اینک تغییر جرم در حجم کنترل

$$\text{Rate of increase of } m = \frac{\delta m_{c.v.}}{\delta t}$$

$$\vec{V} = \frac{dl}{dt} \Rightarrow \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \rho \frac{dl}{dt} \cdot dA = \rho \frac{dV}{dt} = \frac{dm_{in}}{dt}$$

$$\int \rho \cdot \vec{V} \cdot d\vec{A} = \int \frac{dm_{in}}{dt} = -\dot{m}_{in} \quad \text{کل جرم ورودی در واحد زمان}$$

$$\int_{out} \rho \cdot \vec{V} \cdot d\vec{A} = \dot{m}_{out} \quad \text{کل جرم خروجی در واحد زمان}$$

$$\Rightarrow \frac{dm_{c.v.}}{dt} - \dot{m}_{in} + \dot{m}_{out} = 0 \quad (m^{\circ} : m \text{ در واحد زمان})$$

مثال: در یک اتاق $\dot{m}_{in} = 2 \text{ kg/s}$ و $\dot{m}_{out} = 1.5 \text{ kg/s}$ می باشد. مقدار هم انباشته شده در واحد زمان را بدست آورید.

$$\frac{\delta m_{c.v.}}{\delta t} = ? \quad \frac{\delta m_{c.v.}}{\delta t} - \dot{m}_{in} + \dot{m}_{out} = 0$$

$\Rightarrow \delta m_{c.v.} = 2 - 1.5 = 0.5 \text{ kg/s}$
 در این حالت سیال تراکم پذیر (compressible) است. با تسکر از دوست و بزرگتر عزیزم آقای علی اسلامی و آرزوی موفقیت و توفیق روز افزون برایهمه ایشان

اما اگر سیال تراکم ناپذیر (incompressible) باشد، حالتی مانند مثال بالا (که در آن ورودی و خروجی برابر باشند) به وجود نمی آید، چون چگالی سیالات تراکم ناپذیر ثابت است و در نتیجه حجم آن ها نیز ثابت می ماند. (آهنک تخمیر حجم برابر صفر است.)

incompressible fluid flow ($\rho = \text{const.}$)

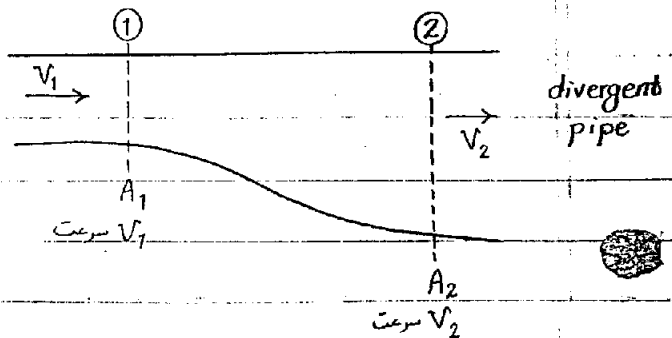
$$\rho \frac{\delta}{\delta t} \int_{c.v.} dV + \rho \int_{c.s.} \vec{v} \cdot d\vec{A} = 0 \Rightarrow \int_{c.s.} \vec{v} \cdot d\vec{A} = 0$$

پس برای لوله ها (بدون توجه به مقطع) داریم:

$$V_{av} = \frac{\int \vec{v} \cdot d\vec{A}}{A} = \frac{Q}{A}$$

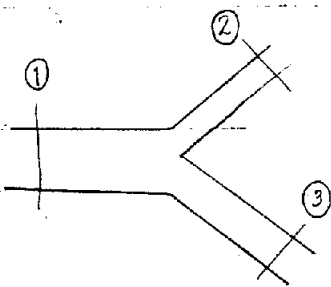
Q : discharge volume flow rate (debit)

این سرعت میانگین (V_{av}) را برای تمام نقاط سطح مقطع در نظر می گیریم.



$$\int_{c.s.} \vec{v} \cdot d\vec{A} = 0 \Rightarrow -v_1 A_1 + v_2 A_2 = 0 \Rightarrow$$

$$Q = v_1 A_1 = v_2 A_2$$



$$\int \vec{v} \cdot d\vec{A} = \sum \vec{v} \cdot \vec{A} = 0$$

$$-v_1 A_1 + v_2 A_2 + v_3 A_3 = 0$$

Example: For a compressible steady flow obtain the final continuity equation.

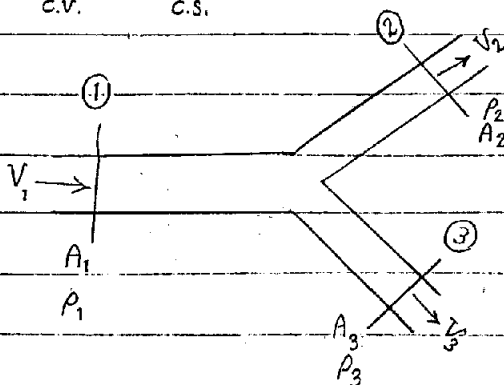
$$\frac{\delta}{\delta t} \int_{c.v.} \rho dV + \int_{c.s.} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0 \Rightarrow \int_{c.s.} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0$$

با تشکر از دوست و برادر عزیزم آقای علی اسلامی و ارزوی موفقیت و توفیق روز افزون برای ایشان

$$\sum \rho \vec{V} \cdot \vec{A} = 0 \Rightarrow -\rho_1 V_1 A_1 + \rho_2 V_2 A_2 + \rho_3 V_3 A_3 = 0$$

* * *

$$\frac{\delta}{\delta t} \int_{c.v.} \rho dV + \int_{c.s.} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0 \quad \text{continuity equation}$$



Steady flow $\rightarrow \frac{\delta}{\delta t} = 0$

$$V_{av.} = \frac{\int \vec{V} \cdot d\vec{A}}{A} = \frac{Q}{A}$$

If the fluid is compressible:

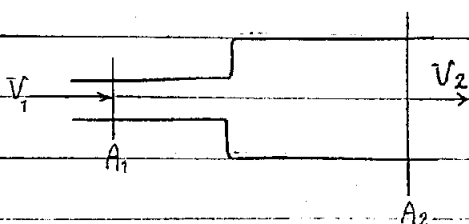
$$-\rho_1 V_1 A_1 + \rho_2 V_2 A_2 + \rho_3 V_3 A_3 = 0 \Rightarrow \underbrace{\rho_1 V_1 A_1}_{\dot{m}_1} = \underbrace{\rho_2 V_2 A_2}_{\dot{m}_2} + \underbrace{\rho_3 V_3 A_3}_{\dot{m}_3}$$

If the fluid is incompressible:

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \text{const.}$$

$$\Rightarrow V_1 A_1 = V_2 A_2 + V_3 A_3 \Rightarrow Q_1 = Q_2 + Q_3$$

* * *



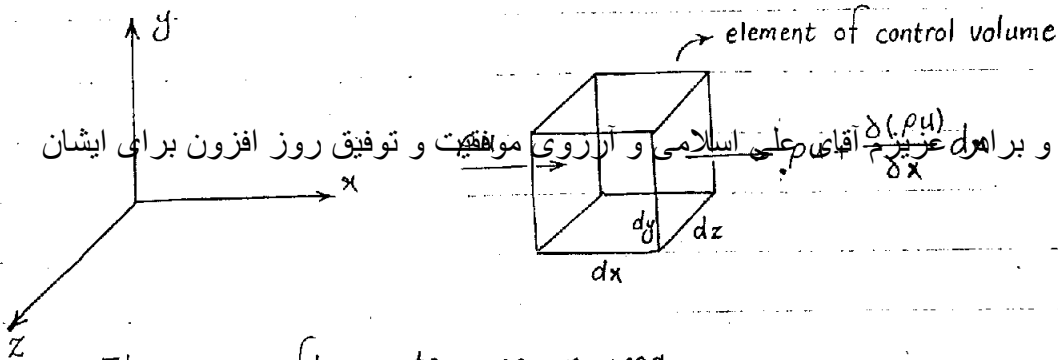
مثال: درلوله با قطرهای متفاوت به هم متصل شده اند و سیال در آن ها در جریان است.
 $V_1 = 3 \text{ ft/s}$, $D_1 = 2 \text{ ft}$
 $D_2 = 3 \text{ ft}$, $V_2 = ?$, $Q = ?$ (سیال تراکم ناپذیر است)

$$V_1 A_1 = Q \Rightarrow 3 \times \pi \times \frac{2^2}{4} = Q \Rightarrow Q = 9.42 \text{ ft}^3/\text{s}$$

$$Q = V_2 A_2 = V_2 \times \pi \times \frac{3^2}{4} = 9.42 \rightarrow V_2 = 1.33 \text{ ft/s}$$

Continuity Differential Equation

شکل دیفرانسیلی معادله پیوستگی است که در مختصات کارتی سیستم های مختلف بررسی می شود.



Flux : mass flow rate over an area

$$\frac{\delta m_{c.v.}}{\delta t} - \dot{m}_{x_{in}} + \dot{m}_{x_{out}} - \dot{m}_{y_{in}} + \dot{m}_{y_{out}} - \dot{m}_{z_{in}} + \dot{m}_{z_{out}} = 0$$

$$m_{c.v.} = \rho dx dy dz$$

$$-\dot{m}_{x_{in}} + \dot{m}_{x_{out}} = -\rho u dy dz + (\rho u + \frac{\delta(\rho u)}{\delta x} dx) dy dz = \frac{\delta(\rho u)}{\delta x} dx dy dz$$

مؤلفه ی سرعت در جهت x

Similarly

$$-\dot{m}_{y_{in}} + \dot{m}_{y_{out}} = \frac{\delta(\rho v)}{\delta y} dy dx dz$$

مؤلفه ی سرعت در جهت y

$$-\dot{m}_{z_{in}} + \dot{m}_{z_{out}} = \frac{\delta(\rho w)}{\delta z} dz dx dy$$

مؤلفه ی سرعت در جهت z

Substitution :

$$\frac{\delta \rho}{\delta t} dx dy dz + \frac{\delta(\rho u)}{\delta x} dx dy dz + \frac{\delta(\rho v)}{\delta y} dy dx dz + \frac{\delta(\rho w)}{\delta z} dz dx dy = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\delta \rho}{\delta t} + \frac{\delta(\rho u)}{\delta x} + \frac{\delta(\rho v)}{\delta y} + \frac{\delta(\rho w)}{\delta z} = 0 \Rightarrow \frac{\delta \rho}{\delta t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0$$

divergence

General Continuity Equation for compressible and incompressible fluids

$$\left(\frac{\delta}{\delta x} \vec{i} + \frac{\delta}{\delta y} \vec{j} + \frac{\delta}{\delta z} \vec{k} \right) \cdot (\rho u \vec{i} + \rho v \vec{j} + \rho w \vec{k}) = \nabla \cdot (\rho \vec{V})$$

فرمول بالا برای مسائل تراکم پذیر و تراکم ناپذیر کاربرد دارد

For incompressible fluids : $\rho = \text{const}$

$$\rightarrow 0 + \rho(\nabla \cdot \vec{V}) = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{V} = 0 \Rightarrow \frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta y} + \frac{\delta w}{\delta z} = 0$$

یا تشکر از دوست و برادر عزیزم آقای علی اسلامی و آرزوی موفقیت و توفیق روز افزون برای ایشان مثال: در لیست فوق معین سوال شود: کدام یک از گزینه های زیر در معادله ی پیوستگی (continuity) صدق میکند؟

1. $\begin{cases} u = x^2 + y^2 + 3 \\ v = x - 2xy + 4 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} - \\ - \end{cases}$ 3. $\begin{cases} - \\ - \end{cases}$ 4. $\begin{cases} - \\ - \end{cases}$

حل:

باید همه ی گزینه ها را در معادله ی $\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta y} = 0$ قرار دهیم و ببینیم کدام یک در آن صدق میکند.

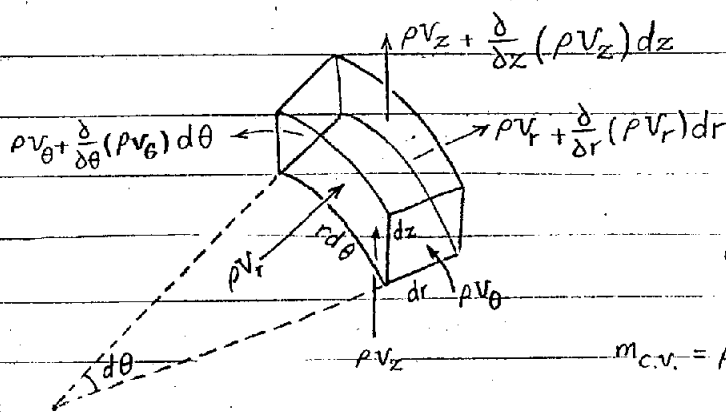
1) $u = x^2 + y^2 + 3 \Rightarrow \frac{\delta u}{\delta x} = 2x, \frac{\delta v}{\delta y} = -2x$

$\Rightarrow \frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta y} = 2x - 2x = 0$

پس در معادله، صدق میکند.

Cylindrical Continuity

بخش از یک استوانه به ضخامت dz و ارتفاع dr را در نظر می گیریم.



$$\frac{\delta}{\delta t} \int_{c.v.} \rho dV + \int_{c.s.} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$m_{c.v.} = \rho \frac{(rd\theta + (r+dr)d\theta)}{2} dr dz$$

$$\frac{\delta m_{c.v.}}{\delta t} + \dot{m}_{r_{in}} + \dot{m}_{r_{out}} + \dot{m}_{\theta_{in}} + \dot{m}_{\theta_{out}} + \dot{m}_{z_{in}} + \dot{m}_{z_{out}} = 0$$

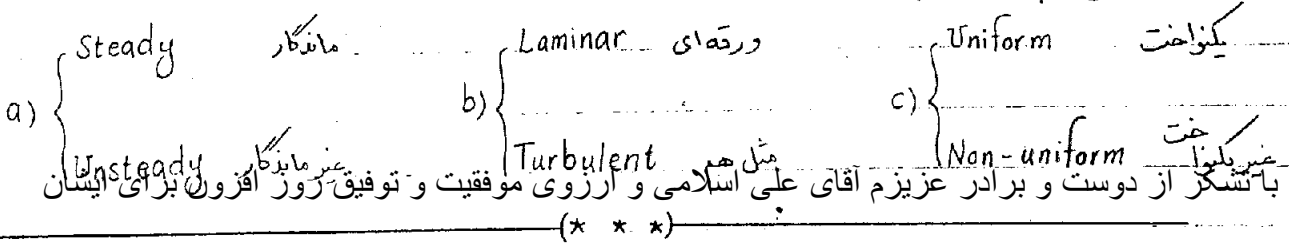
$$-\dot{m}_{r_{in}} + \dot{m}_{r_{out}} = -\rho v_r r d\theta dz + \left(\rho v_r + \frac{\delta(\rho v_r)}{\delta r} dr \right) (r+dr) d\theta dz$$

$$= \frac{\delta}{\delta r} (\rho v_r) dr \cdot r d\theta \cdot dz$$

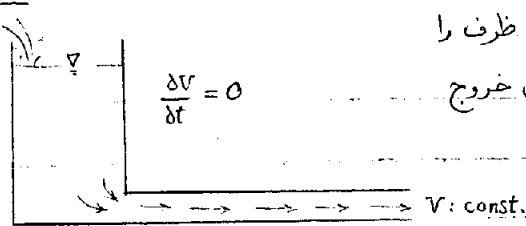
همین طور باید برای θ و z حساب کنیم و در معادله قرار دهیم.

Fluid Flow Classification

* سه نوع طبقه بندی وجود دارد :



* Steady : the flow does not change with time. ($\frac{\delta v}{\delta t} = 0$) تغییرات آن در زمان، صفری باشد.



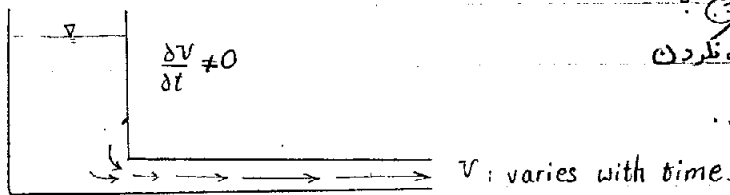
سیال درون لوله جریان دارد و اگر سطح سیال درون ظرف را

با اضافه نمودن سیال، همواره ثابت نگه داریم، سرعت خروج

سیال در لوله ثابت می ماند.

(* * *)

* Unsteady : the flow changes with time. ($\frac{\delta v}{\delta t} \neq 0$)



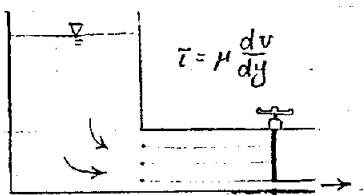
سیال درون لوله جریان یافته و بتدریج با

پایین آمدن سطح آزاد سیال (اضافه نکردن

سیال به آن) سرعت خروج تغییر می کند.

(* * *)

* Laminar



دانشمندی، در آزمایشی مطابق شکل، چند دانه رنگی

را در یک سیال قرار داد. مشاهده کرد که اگر مسیر،

به مقدار اندک باز شود دانه های رنگی بر روی خطوط موازی

و منظم به آسانی حرکت می کنند. به این شکل از جریان

laminar گفته می شود.

definition:

In this type of flow, fluid particles move along smooth paths in laminations (layers).

There is no exchange of momentum from a portion to another.

(هیچ ذره ای بین ورقه ها جابجا نمی شود.)

* Turbulent

اگر در آزمایش مربوط به laminar ، شیر را زیاد باز کنیم مشاهده می شود که trace دانه های رنگی دیگر بصورت خطوط موازی و منظم نیست.

با تشکر از دوست و برادر عزیزم آقای علی اسلامی و آرزوی موفقیت و روزی روزگاری افزون برای ایشان

definition:

In this type of flow, fluid particles, move in very irregular, swirling paths caused by exchanges of momentum from one portion to another.

* آن چنان که مشاهده شد ، فرمول $\tau = \mu \frac{dv}{dy}$ فقط برای جریانات laminar تعریف می شود و برای جریانات turbulent از فرمول زیر استفاده می شود.

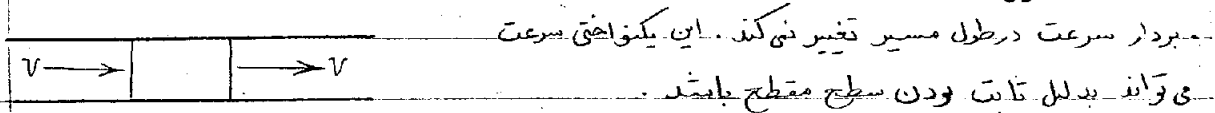
(1) $\tau = \eta \frac{dv}{dy}$ η : eddy viscosity

(2) $\eta = \rho (K y^2) \frac{dv}{dy}$ $\left\{ \begin{array}{l} K: \text{van Karmen constant} \\ y: \text{distance from the wall.} \end{array} \right.$

نکته: با توجه به فرمول 2 ، مقدار η در یک turbulence به مجذور فاصله از دیواره بستگی دارد و از این رو برای نقاط مختلف ، η متفاوت خواهد بود پس نمی توان یک property یا مشخصه ی سیال باشد.

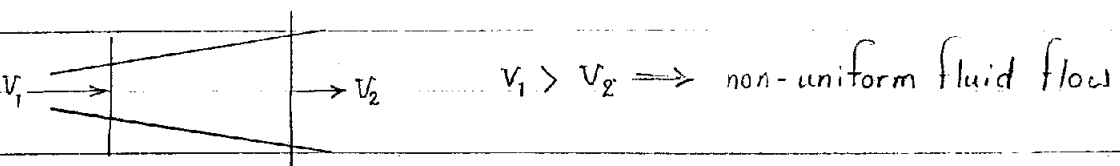
(* * *)

Uniform : velocity vector does not change along the path. ($\frac{\delta V}{\delta s} = 0$)

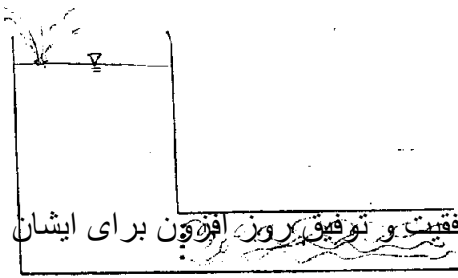


(* * *)

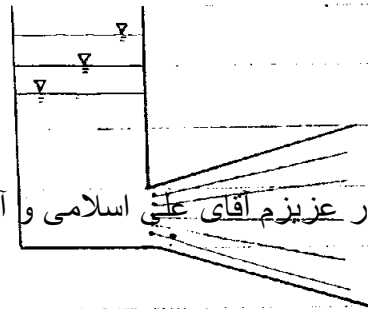
Non-uniform: velocity vector changes along the path. ($\frac{\delta V}{\delta s} \neq 0$)



نکته: یک flow می تواند از جنبه های مختلف بررسی شود.



steady - turbulent - uniform



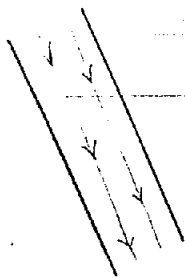
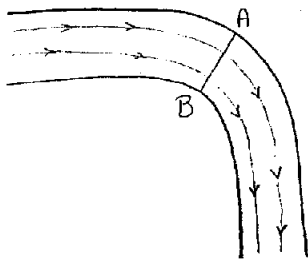
unsteady,
laminar,
non-uniform

با تشکر از دوست و برادر عزیزم آقای علی اسلامی و آرزوی موفقیت و توفیق روز افزون برای ایشان

* * *

Stream Line

Stream line is a continuous line drawn through the fluid so that it has the direction of the velocity vector at every point.



AB نمی تواند یک stream line باشد زیرا جهت سرعت را نشان نمی دهد اما خطوط پیکان در جهت سرعت بوده و stream line هستند.

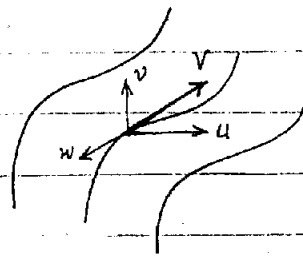
نحوه بدست آوردن معادله Stream Line

$$V = \frac{ds}{dt}$$

$$u = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dt = \frac{dx}{u}$$

$$v = \frac{dy}{dt} \Rightarrow dt = \frac{dy}{v}$$

$$w = \frac{dz}{dt} \Rightarrow dt = \frac{dz}{w}$$



$$\Rightarrow \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$$

Stream line differential equation

مثال: معادله‌ی دیرانسیتی stream line برای یک سیال بصورت زیر است.

$$u = -x, v = 2y, w = 5 - z$$

معادله‌ی stream line، را که از نقطه‌ی (1, 1, 2) می‌گذرد بیابید.

با تشکر از دوست و برادر عزیزم آقای علی اسلامی و ارزوی موفقیت و توفیق روز افزون برای ایشان

$$\frac{dx}{-x} = \frac{dy}{2y} \Rightarrow -\ln x = \frac{1}{2} \ln y + \ln c \Rightarrow \ln \frac{1}{x} = \ln \sqrt{y} + \ln c$$

$$\Rightarrow \ln \frac{1}{x} = \ln c \sqrt{y} \Rightarrow \frac{1}{x} = c \sqrt{y} \Rightarrow \frac{1}{2} = c(1) \Rightarrow c = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \sqrt{y} \Rightarrow x = \frac{2}{\sqrt{y}}$$

$$\frac{dx}{u} = \frac{dz}{w} \Rightarrow \frac{dx}{-x} = \frac{dz}{5-z} \Rightarrow -\ln x = -\ln(5-z) + \ln C_1$$

$$\Rightarrow \ln \frac{1}{x} = \ln \frac{C_1}{5-z} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{C_1}{5-z} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{C_1}{5-1} \Rightarrow C_1 = 2 \Rightarrow x = \frac{5-z}{2}$$

نکته: از یک نقطه درون سیال فقط یک stream line می‌گذرد.

* * *

Euler Equation along Stream Line

برای یافتن معادله‌ی اولر بر روی stream line، ابتدا یک المان

میله‌ای شکلی انتخاب کرده نیروهای وارد بر آن را در نظر می‌گیریم. مانند

گدشته، در این جا هم سه نیروی surface force (نیروهای

عمود بر سطح) و body force (نیروی وزن) و shear force

(موازی با سطح) داریم. نیروهای عمود بر جهت S در محاسبات

وارد نمی‌شوند (زیرا متقابلان‌ها بیدلیل عمود بودن بر جهت حرکت

صفر خواهد بود). همچنین جریان را بدون اصطکاک در نظر

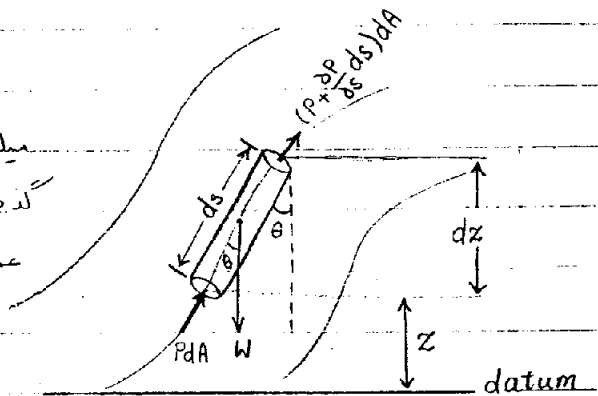
می‌گیریم (frictionless flow). پس: $\gamma = 0 \Rightarrow \tau = 0 \Rightarrow \text{shear stress} = 0$

با براین shear force جا هم برابر صفر خواهند بود. تنها یک نیروی وزن و یک surface force

باقی می‌ماند که مقدار این surface force برابر PdA می‌باشد. (F_s : surface force)

$$\sum F_s = ma_s$$

$$PdA - (P + \frac{\partial P}{\partial s} ds) dA - w \cos \theta = \rho dA ds a_s$$



$$\Rightarrow -\frac{\delta P}{\delta s} ds dA - \rho g dA ds \cos \theta = \rho dA ds a_s$$

$$\Rightarrow a_s + \frac{1}{\rho} \frac{\delta P}{\delta s} + g \cos \theta = 0$$

$$a_s = \frac{dV(t,s)}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + v \frac{\partial V}{\partial s}$$

با تشکر از دوست و برادر عزیزم آقای علی اسلامی و ارشدی موهبت و رفیق در آفرین پیرای ایشان

$$\cos \theta = \frac{dz}{ds} = \frac{\delta z}{\delta s}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right) + v \frac{\partial V}{\partial s} + \frac{1}{\rho} \frac{\delta P}{\delta s} + g \frac{\delta z}{\delta s} = 0 \quad \text{Euler Equation for Unsteady Flow}$$

For Steady Flow: $\frac{\delta}{\delta t} = 0 \Rightarrow v \frac{\partial V}{\partial s} + \frac{1}{\rho} \frac{\delta P}{\delta s} + g \frac{\delta z}{\delta s} = 0$ مشتق نسبت به یک عامل است

$$\Rightarrow v \frac{dV}{ds} + \frac{1}{\rho} \frac{dP}{ds} + g \frac{dz}{ds} = 0$$

$$\Rightarrow v dV + \frac{dP}{\rho} + g dz = 0 \quad \text{Euler Equation for Steady Flow}$$

* Assumptions used in the derivation of Euler Equation for steady flow:

1. Flow is frictionless
2. The equation holds along a stream line.
3. Steady flow.

Bernoulli Equation

For incompressible fluid flow ($\rho = \text{const.}$), integrating Euler Equation yields

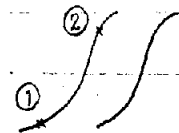
$$\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz = \text{const.} \Rightarrow z + \frac{P}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} = \text{const.} \quad \text{Bernoulli Equation}$$

با تشکر از دوست و برادر عزیزم آقای علی اسلامی و آرزوی موفقیت و توفیق روز افزون برای ایشان

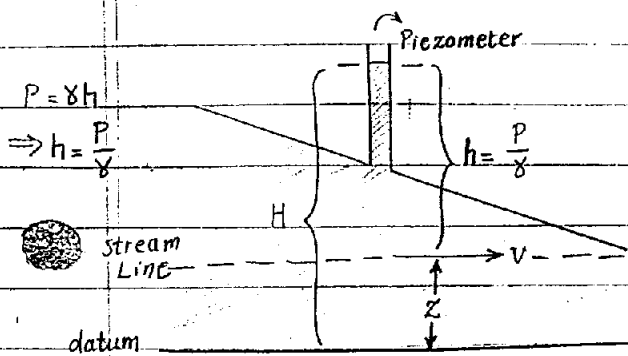
Assumptions used in the derivation of Bernoulli Equation:

1. The flow is frictionless.
2. The equation holds along a stream line.
3. The flow is steady.
4. The fluid is incompressible. ($\rho = \text{const.}$)

$$z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} = \text{const.}$$



Interpretation of Bernoulli Equation Terms



باای لوله ای مطابق شکل، یک لوله شیشه ای قرار داده ایم که Piezometer نامیده می شود.

Piezometric head = $z + \frac{P}{\rho g}$ ارتفاع پیزومتریک

$$E_1 = E_2 \Rightarrow z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g}$$

$$E = z + \frac{P}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} = z + h + \frac{v^2}{2g}$$

$$\Rightarrow E = H + \frac{v^2}{2g} \quad \text{Piezometric head}$$

weight of fluid

$$\Rightarrow E \times mg = \underbrace{mgH}_{\text{Potential energy}} + \underbrace{\frac{1}{2}mV^2}_{\text{Kinetic energy}} = \text{total energy}$$

$$\Rightarrow E = \frac{\text{Total Energy}}{\text{Weight of Fluid}} \quad \frac{J}{N} = \frac{N \cdot m}{N} = m \quad \text{انرژی واحد وزن سیال}$$

* اگر گفته شود که E در یک نقطه مثلاً 5 متر باشد منظور طول نیست، بلکه به این معنی است که در اینونین سیال گذرنده، دارای 5 ژول انرژی است.

مثال: با توجه به مقدار E، کل انرژی را که در واحد زمان میگذرد حساب کنید.

با تشکر از دوست و برادر عزیزم آقای علی اسلامی و آرزوی موفقیت و توفیق روز افروز برای ایشان
 Pipe $Q = 1 \text{ m}^3/\text{s}$ water
 $E = 5 \text{ m}$.

(Find the total energy of fluid passing per unit time.)

$$E \times \frac{\text{وزن سیال}}{\text{زمان}} \Rightarrow Q \times \delta$$

\downarrow \downarrow
 حجم سیال / زمان وزن / حجم سیال

Total Energy per unit time = $\delta Q E$ کل انرژی عبورکننده از سطح در واحد زمان

$$= 9806 \times 1 \times 5 = 49030 \text{ J/s}$$

مثال: آب در یک کانال روباز در حال حرکت است.

سپس در راستای یک کانال با شیب زیاد حرکت می‌کند. با فرض عدم اصطکاک در حرکت (بدلیل

تردیک بودن نقاط ابتدایی و انتهایی و انتقارت

در ارتفاع دوگت کانال‌ها را بیابید.

* ابتدا یک stream line در نظر می‌گیریم. مثلاً

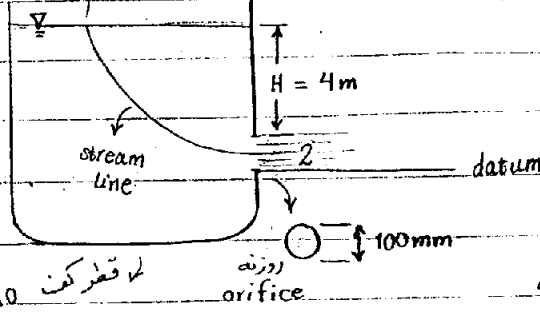
گفت را خط جریان در نظر می‌گیریم.

سپس سطح مبنا را انتخاب می‌کنیم. در این‌گونه مسائل معمولاً سطح پایین‌تر را datum می‌گیریم.

$$E_1 = E_2 \Rightarrow z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g}$$

اگر stream line را در سطح بالای آب در نظر بگیریم باز همان نتیجه حاصل می‌شود.

مثال: یک مخزن داریم که سوراخی در بدنه‌ی آن وجود دارد که orifice نامیده می‌شود. (اگر قطر کم‌تر پس ثابت شود آن را nozzle می‌نامند). (سرعت خارج شدن آب، ثابت نیست و در پایین بیشتر است اما ما سرعت متوسط را در وسط در نظر می‌گیریم). چقدر طول می‌کشد تا ارتفاع آب در مخزن نصف شود؟
 متوجه شکر از دوست و برادر عزیزم آقای علی اسلامی و آرزوی موفقیت و توفیق روز افزون برای ایشان



$$E_1 = E_2$$

$$z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g}$$

$$V_1 (V_1 A_1 = V_2 A_2) \text{ (با تقریب)}$$

فشار در خروجی صفر است چون مزجی به صورت فواره (jet) است که بطور کلی به عنوان یک اصل فشار آن را صفر در نظر می‌گیرند.

$$H + 0 + 0 = 0 + 0 + \frac{V_2^2}{2g} \Rightarrow V_2 = \sqrt{2gH}$$

$$V_2 = \sqrt{2 \times 9.806 \times 4} = 8.86 \text{ m/s}$$

اگر بخواهیم محاسبات دقیق‌تری داشته باشیم V_2 را بصورت زیر بیان می‌کنیم:

$$V = C \sqrt{2gH}$$

C: orifice coefficient

مقدار C اعدادی متبیه 0.97, 0.98 و ... است.

$$Q = V_2 A_2 = 8.86 \times \pi \times \frac{0.1^2}{4} = 0.07 \text{ m}^3/\text{s} = 70 \text{ L/s}$$

بر پیدا کردن زمان در قسمت آخر مسأله

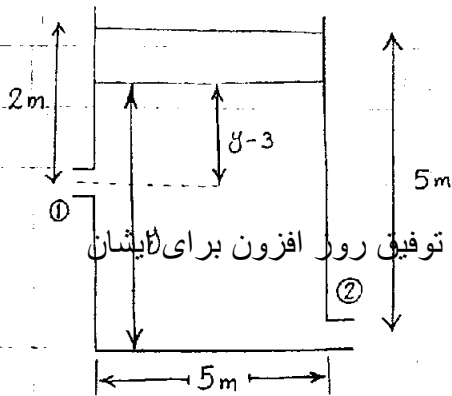
$$V_1 A_1 = V_2 A_2$$

$$\frac{dy}{dt} \times \frac{\pi \times 10^2}{4} = \sqrt{2gy} \times \pi \times \frac{0.1^2}{4} \Rightarrow dt = \frac{-100 dy}{(0.1)^2 \sqrt{2g} \sqrt{y}}$$

$$\Rightarrow T = \frac{-100 \times 2}{0.01 \sqrt{2g}} \int_4^2 \frac{dy}{2\sqrt{y}} = \frac{-200}{0.01 \sqrt{2g}} \left[\sqrt{y} \right]_4^2 = \frac{-200}{0.01 \sqrt{2 \times 9.806}} [\sqrt{2} - 2]$$

$$\Rightarrow T = \frac{20000(2 - \sqrt{2})}{\sqrt{2 \times 9.806}} \Rightarrow T = 264.55 \text{ s}$$

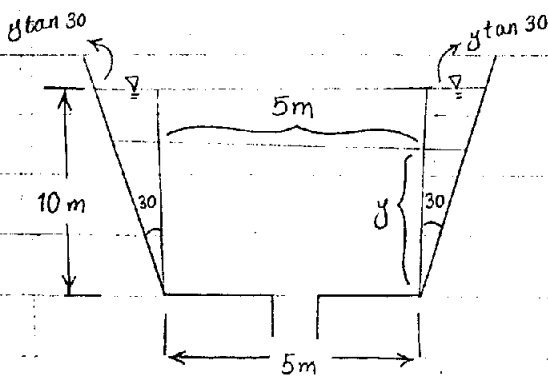
مثال: مدت زمان خالی شدن مخزن را بیابید.



$$V_T A_T = V_1 A_1 + V_2 A_2$$

$$-\frac{dy}{dt} \cdot \pi \frac{D_T^2}{4} = \sqrt{2g(y-3)} A_1 + \sqrt{2gy} A_2$$

با تشکر از نویسنده و برادر عزیزم آقای علی اسلامی و آرزوی موفقیت و توفیق روز افزون برای ایشان
 حدود اشتغال را باید یکبار از 3 تا 5 و هر دو عبارت سمت راست را در
 او یکبار باید از 0 تا 3 گرفت و نقطه جبهه در سمت راست را مرور
 نظر گرفت.

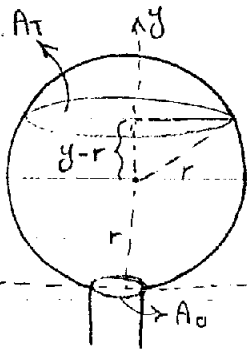


مثال: مدت زمان خالی شدن مخزن را بیابید.

$$V_T A_T = V_2 A_2$$

$$-\frac{dy}{dt} \times \frac{\pi(2y \tan 30 + 5)^2}{4} = \sqrt{2gy} \times \frac{\pi d^2}{4}$$

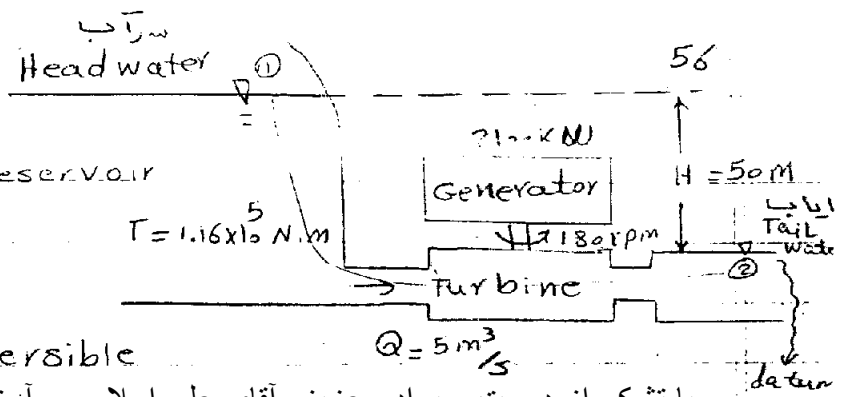
مثال: زمان خارج شدن آب از مخزن چقدر است؟



$$V_T A_T = V_0 A_0$$

$$A_T = \pi [r^2 - (y-r)^2]$$

$$\Rightarrow -\frac{dy}{dt} \cdot (\pi [r^2 - (y-r)^2]) = \sqrt{2gy} \times A_0$$



a) Determine the reversible

با تشکر از دوست و برادر عزیزم آقای علی اسلامی و آرزوی موفقیت و توفیق روز افزون برای ایشان
Hydro power plant
نیروگاه

$$E_1 = h \frac{v_1^2}{2} + H_T = E_2$$

H_T : انرژی که تقریباً از واحد وزن سیال می‌گذرد

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} - H_T = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g}$$

$$50 + 0 + 0 - H_T = 0 + 0 + 0 \Rightarrow H_T = 50 \text{ m}$$

power given to the turbine = $\gamma Q H_T$

$$= 9806 \times 5 \times 50 = 2451500 \text{ W} = 2451.5 \text{ kW}$$

b) Determine the losses in this system:

یعنی هم Head losses و هم power losses را بیابید

Power losses in the hydroelectric plant system:

$$= 2451.5 - 2100 = 351.5 \text{ kW}$$

Head losses in the hydroelectric plant system

$$= \frac{351.5 \times 1000}{9806 \times 5} = 7.16 \text{ m}$$

c) Determine losses and efficiency in turbine and generator?
power losses and head losses?

Power losses in the turbine = $2451.5 - \frac{1.16 \times 10^5}{60} \times \frac{1800 \times \pi \times 10^3}{60}$

$P = T \omega$

Head losses in the turbine = $\frac{265 \times 1000}{9806 \times 5} = 5.4 \text{ m}$

با تشکر از دوست و برادر عزیزم آقای علی اسلامی و آرزوی موفقیت و توفیق روز افزون برای ایشان

Efficiency of turbine = $\frac{2186.5}{2451.5} \times 100 = 89.19\%$

or

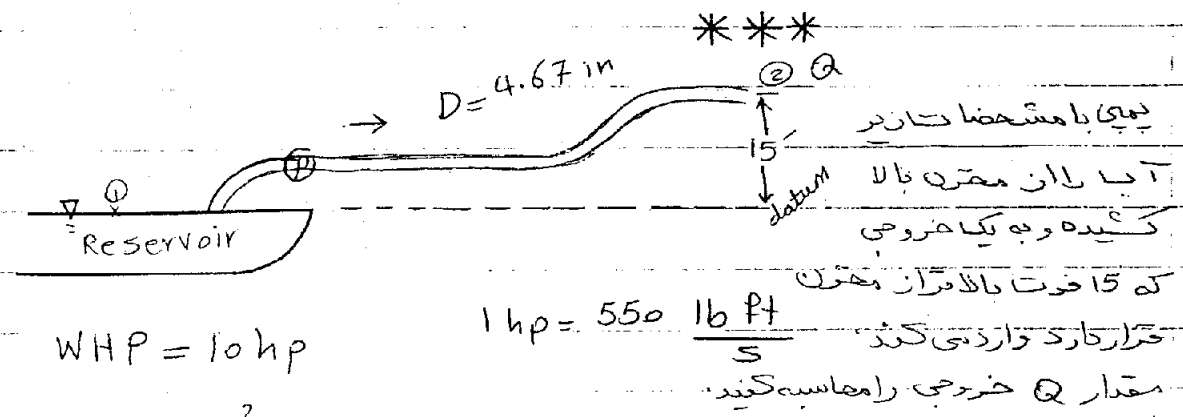
= $\frac{50 - 5.4}{50} \times 100 = 89.19\%$

Power losses in the generator = $2186.5 - 2100 = 86.5 \text{ kW}$

Head = $\frac{86.5}{9806 \times 5} = 1.76$

Efficiency of the generator = $\frac{2100}{2186.5} \times 100 = 96.05\%$

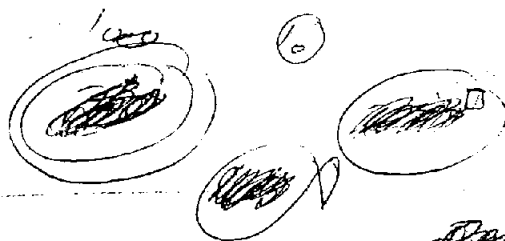
= $\frac{50 - 5.4 - 1.76}{50 - 5.4} \times 100 = 96.05\%$



WHP = 10 hp

$h_{f_{1-2}} = \frac{8 \times 2^2}{2g}$

انرژی کمپ به واحد وزن سیال می دهند



$$E_1 = h_{f_{1-2}} + H_p = E_2$$

$$z_1 + \frac{P_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2g} - h_{f_{1-2}} + H_p = z_2 + \frac{P_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2g}$$

با تشکر از چوبست و برادر عزیزم آقای علی اسلامی و آرزوی موفقیت و توفیق روز افزون برای ایشان

$$0 + 0 + 0 - \frac{v^2}{2g} + \frac{10 \times 550}{62.4 \times \pi \times (\frac{4.67}{12})^2 / 4} = 15 + 0 + \frac{v^2}{2g}$$

↓
شیر آب ۱/۲ فوت

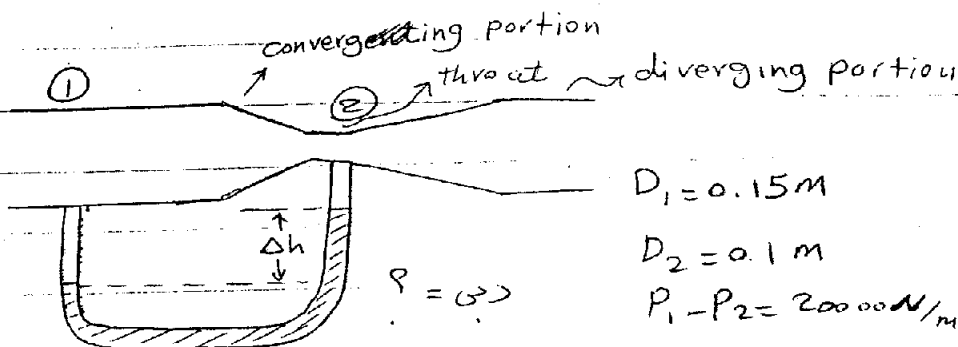
آزمون خطی
By trial and Error

$$v = 15.4 \text{ ft/s} \Rightarrow Q = vA = 1.83 \text{ ft}^3/\text{s}$$

$$v = 10.8$$

Venturimeter

Ex:



$$D_1 = 0.15 \text{ m}$$

$$D_2 = 0.1 \text{ m}$$

$$P_1 - P_2 = 200000 \text{ N/m}^2$$

$$S = 0.9$$

از این دستگاه برای محاسبه ی دی آب درون لوله استفاده می کنند

مقاومت نقطه ی اول بیشتر از نقطه ی دوم است. همین باعث ریافت لوله شدن جیوه به سمت پایین درست جیب لوله ی U شکل شیشه ای می شود.

$$v_1 A_1 = v_2 A_2 \Rightarrow v_1 \times \pi \times (\frac{0.15}{4})^2 = v_2 \times \pi \times \frac{(0.1)^2}{4}$$

$$v_2 = 2.25 v_1 \quad (1)$$

$$E_1 = E_2$$

$$z_1 + \frac{P_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2g} \Rightarrow \frac{P_1 - P_2}{\rho} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \Rightarrow V_1 = 3.31 \text{ m/s}, \quad Q = V_1 A_1 = 0.0584 \text{ m}^3/\text{s} \\ = 58.4 \text{ L/s}$$

The Control Volume Linear Momentum Equations

با تشکر از دوست و برادر عزیزم آقای علی اسلامی و آرزوی موفقیت و تکمیل روز افزون برای ایشان $\frac{d}{dt} \int_{\text{system}} \rho \eta dV + \int_{\text{C.S.}} \rho \eta \vec{v} \cdot d\vec{A}$

$$N = m\vec{v}, \quad \eta = \frac{N}{m} = \frac{m\vec{v}}{m} = \vec{v}$$

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} \Big|_{\text{system}} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{C.V.}} \rho \vec{v} dV + \int_{\text{C.S.}} \rho \vec{v} \vec{v} \cdot d\vec{A}$$

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \Sigma \vec{F}$$

$$\Rightarrow \Sigma \vec{F} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{C.V.}} \rho \vec{v} dV + \int_{\text{C.S.}} \rho \vec{v} \vec{v} \cdot d\vec{A}$$

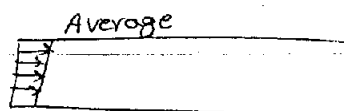
For steady flow: $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

$$\Sigma \vec{F} = \int_{\text{C.S.}} \rho \vec{v} \vec{v} \cdot d\vec{A}$$

$$\Sigma F_x = \int_{\text{C.S.}} \rho v_x (\vec{v} \cdot d\vec{A}) \rightarrow \text{در عمود بر سطح و مؤلفه x دارد}$$

$$\Sigma F_y = \int_{\text{C.S.}} \rho v_y \vec{v} \cdot d\vec{A}$$

$$\Sigma F_z = \int_{\text{C.S.}} \rho v_z \vec{v} \cdot d\vec{A}$$



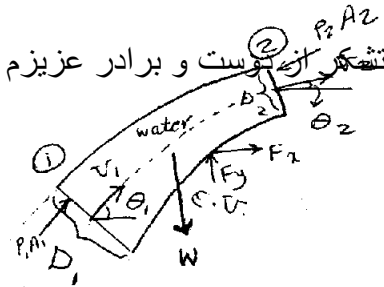
$$\sum F_x = \sum \rho v_x \vec{v} \cdot \vec{A}$$

$$\sum F_y = \sum \rho v_y \vec{v} \cdot \vec{A}$$

$$\sum F_z = \sum \rho v_z \vec{v} \cdot \vec{A}$$

حجم عنصر در مقاطع ورودی و خروجی
ضرب در $\rho \vec{v} \cdot d\vec{A}$ می‌گیریم

با تشکر از دوست و برادر عزیزم آقای علی اسلامی و آرزوی موفقیت و توفیق روز افزون برای ایشان



Ex: $\theta_1 = 45^\circ$, $\theta_2 = 30^\circ$

$$D_1 = 25 \text{ cm}$$

$$D_2 = 15 \text{ cm}$$

$$Q = 50 \text{ l/s}$$

$$P_1 = 8.5 \text{ kPa}$$

$$P_2 = 5.83 \text{ kPa}$$

$$W = 2 \text{ N (weight of fluid in the control volume)}$$

Find the horizontal and vertical forces required to hold the pipe in place.

$$v_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{0.050}{\pi (0.25)^2 / 4}$$

$$v_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{0.050}{\pi (0.15)^2 / 4}$$

$$\sum F_x = \sum \rho v_x \vec{v} \cdot d\vec{A}$$

F_x و F_y نیروی مقابله لوله در برابر سیال

$$P_1 A_1 \cos \theta_1 - P_2 A_2 \cos \theta_2 + F_x = \rho v_1 \cos \theta_1 (-Q)$$

$$+ \rho v_2 \cos \theta_2 (+Q)$$

$$8.5 \times 10^3 \times \pi \frac{(0.25)^2}{4} \cos 45^\circ - 5.83 \times 10^3 \times \pi \times \frac{(0.15)^2}{4} \cos 30^\circ + F_x$$

$$= 1000 \times \frac{0.05}{\pi (0.25)^2 / 4} \cos 45^\circ (-0.050) + 1000 \times \frac{0.05}{\pi (0.15)^2 / 4} \cos 30^\circ$$

$$\times (0.05) \Rightarrow F_x = -8014 \text{ N}$$

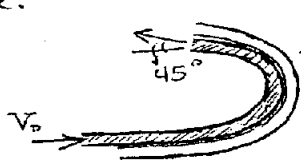
$$\sum F_y = \sum \rho v_y \vec{v} dA$$

$$P_1 A_1 \sin \theta_1 - P_2 A_2 \sin \theta_2 - W + F_y = \rho v_1 \sin \theta_1 (-Q) + \rho v_2 \sin \theta_2 (Q)$$

$$\Rightarrow F_y = 963.2 \text{ N}$$

با تشکر از دوست و برادر عزیزم آقای علی اسلامی و آرزوی موفقیت و توفیق روز افزون برای ایشان

Ex:



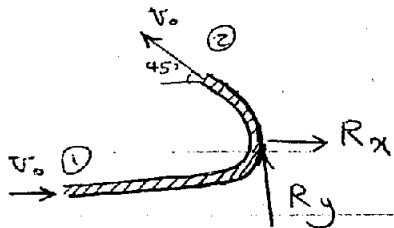
Fixed vane.

نیروی عکس العمل وارد از طرف پرده‌ی

گاز است به خارج راباید

$$Q_0 = 60 \text{ L/s}$$

$$v_0 = 50 \text{ m/s}$$



نیروی متاثری که بر سطح عمل می‌کنند

وجود ندارد چون جتا با هوا در ارتباط است. نیروی وزن آب موجود در سیال نیز صفر در نظر گرفته می‌شود.

شکل بالا ممکن است در صفحه‌ی xy و یا xz باشد که در این صورت در حالت اول دردی و ضربه‌ی وارده سرعت‌های متغیاتی خواهد داشت اما با این فرض نیز سرعت خروجی تقریباً برابر سرعت ورودی خواهد بود (بر اساس معادله‌ی برنولی)

$$\sum F_x = \sum \rho v_x \vec{v} \cdot A$$

$$R_x = \rho v_0 (-Q) + \rho (-v_0 \cos 45) (Q)$$

$$= 1000 \times 50 (-0.060) + 1000 (-50 \frac{\sqrt{2}}{2}) (0.06)$$

$$= -5121 \text{ N} = -5.121 \text{ kN}$$

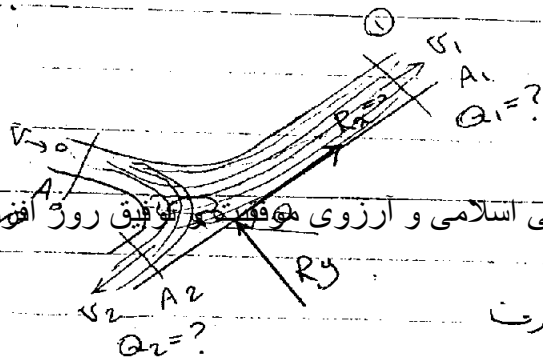
$$\sum F_y = \sum \rho v_y \vec{v} \cdot A$$

$$R_y = \rho (0) (-Q) + \rho v_0 \sin 45 (Q)$$

$$= 2121 \text{ N} = 2.121 \text{ kN}$$

آنجا که سطح smooth می باشد، نمی تواند نیرویی موازی با خودش به سیال وارد کند و تنها نیرویی که سطح بر سیال وارد می کند نیروی عمود بر سطح است. سیال پس از برخورد با سطح می خواهد در راستای عمود بر سطح برگردد که با فرضی از همین خود رو بروی سرد و به ناچار مسیرش را در سطح برای ادامه حرکت خود بر می گرداند.

Ex:



سیالی از حفزه‌ای بیرون آمده و با یک صفحه‌ی صاف، مایل و منطبق (Smooth inclined Plate) برخورد می‌کند و بر روی آن تقسیم می‌شود. برای تعیین سرعت و جهت جریان در هر دو طرف، از اصل انرژي و اصل تانسور تنش استفاده می‌کنیم. برای نشان

نیروی وارده بر صفحه را بیابید. از آنت انرژي ناشی از برخورد صرف نظر کنید.

$$v_1 = v_0 \quad z_1 = z_2 \quad P_1 = P_2 \quad \text{در نتیجه} \quad v_1 = v_0$$

continuity eq.

$$\sum \rho \vec{v} \cdot \vec{A} = 0$$

$$\sum \vec{v} \cdot \vec{A} = 0$$

$$-v_0 A_0 + v_1 A_1 + v_2 A_2 = 0$$

$$v_0 A_0 = v_1 A_1 + v_2 A_2 \Rightarrow A_0 = A_1 + A_2$$

$$Q_0 = Q_1 + Q_2 \quad (1)$$

Momentum eq.

برای نوشتن معادله‌ی همگانه، باید محور R_x و R_y را انتخاب کنید. بهترین حالت برای انتخاب R_x و R_y در شکل نشان داده شده است.

$$\sum F_x = \sum \rho v_x \vec{v} \cdot \vec{A}$$

$$R_x = \rho v_0 \cos \theta (-Q_0) + \rho v_1 (Q_1) + \rho (-v_2) (Q_2)$$

$$0 = -Q_0 \cos \theta + Q_1 - Q_2 \quad (2)$$

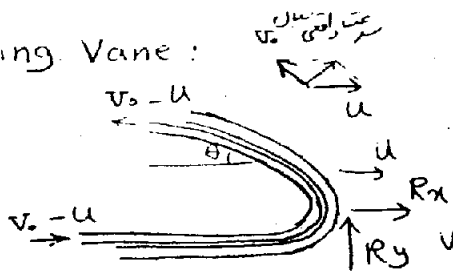
$$(1), (2) \Rightarrow Q_1 = \frac{Q_0}{2} (1 + \cos \theta)$$

$$Q_2 = \frac{Q_0}{2} (1 - \cos \theta)$$

$$\sum F_y = \sum \rho v_y \vec{v} \cdot \vec{A}$$

$$R_y = \rho (-v_0 \sin \theta) (-Q_0) + \rho (0) (Q_1) + \rho (0) (Q_2)$$

Moving Vane :



نیروی وارد بر Fixed Vane بیشتر است

Moving است

در حالتی که سرعت حرکت Vane برابر

سرعت آب v_0 باشد نیروی به Vane

وارد نمی شود. پس نیرویی که به Vane وارد می شود تا

تغییرات سرعت Vane و آب رابطه مستقیم دارند. با تشکر از دوست و برادر عزیزم آقای علی اسلامی و توفیق روز افزون برای ایشان در حالتی که Vane حرکت می کند، control vol. حرکت کرده و نتیجتاً

موقعیت ثابتی نسبت به مختصات نخواهد داشت. پس نمی توان از معادلات

control volume استفاده کرد. برای رفع این معضل، محورهای مختصات

این عبارت در حال حاضر متغی است و نشان می دهد که جهت

با برعکس شود

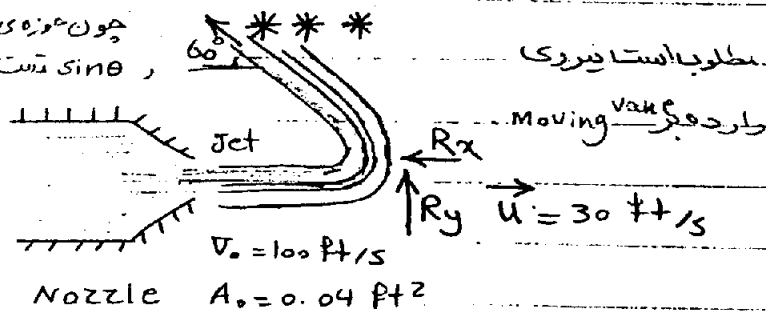
$$\sum R_x = -\rho (v_0 - u)^2 A_0 (1 + \cos \theta)$$

$$R_y = \rho (v_0 - u)^2 A_0 \sin \theta$$

چون عوزی تغییرات θ در ربع اول مثلثاتی است $\sin \theta$ است در نتیجه R_y نیز مثبت رحبت آن

Ex:

Also find the rate of work done on the vane



$$\sum F_x = \sum \rho v_x \vec{v} \cdot \vec{A}$$

$$-R_x = \rho (v_0 - u) [-(v_0 - u) A_0] + \rho [-[v_0 - u] \cos \theta] [(v_0 - u) A_0]$$

$$R_x = \rho (v_0 - u)^2 A_0 [1 + \cos \theta]$$

$$= \frac{62.4}{32.17} (100 - 30)^2 \cdot 0.04 [1 + \cos 60^\circ] \Rightarrow R_x = 569 \text{ lb}$$

$$R_y = \sum F_y = \sum \rho v_y \vec{v} \cdot \vec{A}$$

$$R_y = \rho (v_0 - u) \sin \theta [(v_0 - u) A_0]$$

$$= \rho (v_0 - u)^2 A_0 \sin \theta = \frac{62.4}{32.17} [100 - 30]^2 \times 0.04$$

$$R_y = 329 \text{ lb}$$

$$dt = 77.71 \frac{dv_1}{(100-v_1)^2} \Rightarrow t = \frac{77.71}{100-v_1} + C_1$$

$$t=0, v_1=0 \Rightarrow C_1 = -0.7771 \Rightarrow t = \frac{77.71}{100-v_1} - 0.7771$$

با تشکر از دوست و برادر عزیزم آقای علی اسلامی و آرزوی موفقیت و توفیق روز افزون برای ایشان

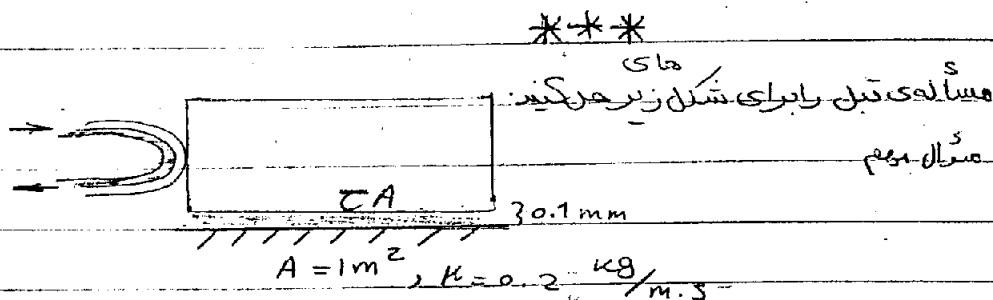
$$t=10 \Rightarrow v_1 = 92.79 \text{ ft/s}$$

$$\frac{dx_1}{dt} = 100 - \frac{77.71}{t+0.7771} \Rightarrow x_1 = 100t - 77.71 \ln(t+0.7771) + C_2$$

$$t=0, x_1=0 \Rightarrow C_2 = -19.3$$

$$x_1 = 100t - 77.71 \ln(t+0.7771) - 19.3$$

$$t=10 \Rightarrow x_1 = 796 \text{ ft}$$



$$\sum F_x = R_x - CA = m \frac{dv_1}{dt}$$

$$2\rho(v_0-v_1)^2 A_0 - \mu \frac{v_1}{0.1 \times 10^{-3}} \times 1 = m \frac{dv_1}{dt}$$

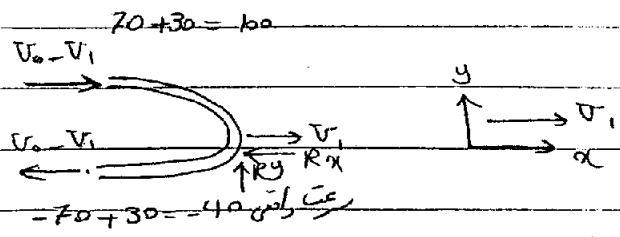
$$dt = \frac{m}{2\rho(v_0-v_1)^2 A_0 - \mu \frac{v_1}{0.1 \times 10^{-3}}} dv_1 = \frac{m}{2\rho A_0 v_1^2 - (\frac{\mu}{0.1 \times 10^{-3}} + 4v_0 \rho A_0) v_1 + 2\rho A_0 v_0^2} dv_1$$

$$\frac{200}{0.16v_1^2 - 2032v_1 + 1600} dv_1 = \frac{1250}{v_1^2 - 12700v_1 + 10000} dv_1$$

rate of work = $F_x u = 569 \times 30 = ? \frac{lb \cdot ft}{s}$

Ex $A_0 = 0.02 ft^2$
 $\rho = 2 slug/ft^3$
 $v_0 = 100 ft/s$
 $v_1 = 70 ft/s$
 $u = 30 ft/s$
 $W = 200 lb$

با تشکر از دوست و برادر عزیزم آقای علی اسلامی و آرزوی موفقیت و توفیق روز آفرین برای ایشان
 جریان سیال به وسیله ی نیا
 Vane به سمت راست منحرف
 می شود. فرض شده کاری
 بدون اصطکاک است و برای حرکت
 در جهت افقی آزاد است.
 سرعت و فاصله ی طی شده به وسیله ی کاری
 یاد سرعت 10S پس از برخورد جت به Vane
 محاسبه کنید



$\sum F_x = \sum \rho v_x \bar{v} \cdot A$

$-R_x = \rho (v_0 - v_1) [- (v_0 - v_1) A_0]$
 $+ \rho [- (v_0 - v_1)] [+ (v_0 - v_1) A_0]$

$R_x = 2 \rho (v_0 - v_1)^2 A_0$

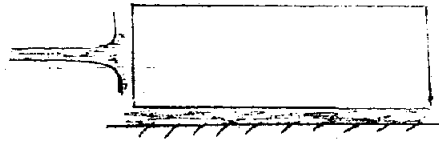
موردی R_x در خلاف جهت، به سمت راست، به کاری وارد می شود.

$\sum F_x = m a_x \Rightarrow R_x = m \frac{dv_1}{dt}$

$2 \rho (v_0 - v_1)^2 A_0 = \frac{200}{32.17} \frac{dv_1}{dt}$

سرعت نهایی، Terminal velocity برابر v_0 است. در همین حالت نیرویی
 از سمت جت به کاری وارد نمی شود.

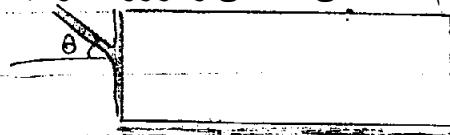
$2 \times 2 (100 - v_1) \times 0.02 = \frac{200}{32.17} \frac{dv_1}{dt}$



$$R_x = \rho (v_0 - v_1) [- (v_0 - v_1) A_0]$$

با تشکر از دوست و برادر عزیزم آقای علی اسلامی و آرزوی موفقیت و توفیق روز آفتون برای ایشان

$$R_x = \rho A_0 (v_0 - v_1)^2$$

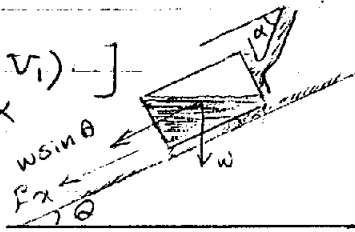


$$R_x = \rho A_0 (v_0 - v_1)^2 \cos \theta$$

$$-R_x = -\rho A_0 (v_0 - v_1) [(v_0 - v_1) \cos \alpha]$$

=>

$$w \sin \theta + \rho A_0 (v_0 - v_1)^2 \cos \alpha = m \frac{dv_1}{dt}$$



Dimensional Analysis & Dynamic Similitude

| Quantity | Symbol | Dimension |
|---------------------|----------|---|
| length | L | L |
| Time | t | T |
| Mass | m | M |
| Force | F | F or MLT^{-2} |
| Velocity | v | LT^{-1} |
| Acceleration | a | LT^{-2} |
| Area | A | L^2 |
| Discharge | Q | L^3T^{-1} |
| Pressure | p | FL^{-2} or $MLT^{-2}L^{-2} = ML^{-1}T^{-2}$ |
| Density | ρ | ML^{-3} |
| specific weight | γ | FL^{-3} or $ML^{-2}T^{-2}$ |
| viscosity | μ | $ML^{-1}T^{-1}$ or $\frac{FT}{L^2}$ |
| kinematic viscosity | ν | L^2T^{-1} |

Ex:

Determine the Power of a pump P as a function of Discharge Q , total dynamic head H_p and fluid specific weight γ

با تشکر از دوست و برادر عزیزم آقای علی اسلامی و آرزوی موفقیت و توفیق روز بروز برای آقایان
مسائلی از این قبیل که شامل ۳ متغیر و یک تابع می باشند از طریق

Dimensional Homogeneity

$$P = k Q^a H_p^b \gamma^c$$

حل می کنند.

$$FLT^{-1} = (L^3 T^{-1})^a L^b (FL^{-3})^c$$

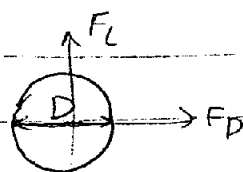
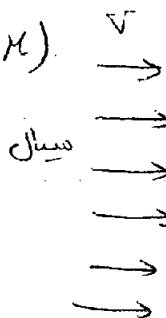
$$= F^c L^{3(a-c)+b} T^{-a}$$

$$c=1, a=1 \quad 3(1-1)+b=1 \Rightarrow b=1$$

$$P = k Q H_p \gamma$$

Ex

$$F_D = f(D, v, \rho, \mu)$$



$$F_D = \text{Drag force}$$

F_D - نیروی استاکه در جهت حرکت سیال به جسمی که درون آن قرار دارد و عمل می شود وارد می شود.

$$F_L = \text{Lift force}$$

F_L - نیرویی است که در جهت عمود بر حرکت سیال به جسمی که در آن قرار دارد وارد می شود.

در اینجا از روش قبل نمی توان استفاده کرد، زیرا در سمت راست F توان مجرد دارد، در حالی که سمت چپ سه متغیر با ۳ توان دارد.

π Theorem (Buckingham theorem):

1) choose repeating variables

The number of them is equal to the dimensions of the problem.
با تشکر از دوست و برادر عزیزم آقای علی اسلامی و آرزوی موفقیت و توفیق روز افزون برای ایشان

In this case: 3 dimensions.

- should not be a dependant variable.
- Their dimensions should not be the same.
- should be important.
- They should include all dimensions in overall.

dimensionless parameter non-repeating variable
انتخاب نشود انتخاب می‌کنیم

$$\pi_1 = \rho^a \nu^b D^c \mu$$

ρ, ν, D انتخاب می‌کنیم

$$M^0 L^0 T^0 = (ML^{-3})^a (LT^{-1})^b L^c ML^{-1} T^{-1}$$

$$= M^{a+1} L^{-3a+b+c-1} T^{-b-1}$$

$$\begin{cases} a+1=0 \\ -3a+b+c-1=0 \\ -b-1=0 \end{cases} \Rightarrow a=b=c=-1$$

$$\pi_1 = \rho^{-1} \nu^{-1} D^{-1} \mu \Rightarrow \pi_1 = \frac{\mu}{\rho \nu D}$$

π_1 is dimensionless $\leftarrow F(F_D, \rho, \nu, D, \mu) = 0 \Rightarrow \pi_2 = \rho^a \nu^b D^c F_D$

$$M^0 L^0 T^0 = (ML)^{-3a_1} (LT^{-1})^{b_1} L^{c_1} MLT^{-2}$$

$$= M^{a_1+1} L^{-3a_1+b_1+c_1+1} T^{-b_1-2}$$

$$\Rightarrow a_1+1=0 \quad -b_1-2=0 \quad -3(-1)+(-2)+c_1+1=0$$

$$\pi_2 = \rho^{-1} v^{-2} D^{-2} F_D \Rightarrow \pi_2 = \frac{F_D}{\rho D^2 v^2}$$

ما مسئله‌ی ۵ متغیره را به مسئله‌ای با دو متغیره π_1 و π_2 تبدیل کرده ایم

$$\pi_2 = f(\pi_1)$$

Reynolds number

یا تشکر از دوست و برادر عزیزم آقای علی (سلامی و آرزوی موفقیت (توفیق‌یون) آرزوی برای ایشان $\frac{F_D}{\rho v^2 D^2}$ $\frac{\rho v D}{\mu}$

$$\Rightarrow F_D = F(Re) \rho D^2 v^2 = \frac{4 \times 2 F(Re)}{\pi} \rho \frac{\pi D^2}{4} \frac{v^2}{2}$$

$$\Rightarrow F_D = C_D \rho A \frac{v^2}{2}$$

مساحت دایره در مقابل جریان

این رابطه در مکانیک سیالات بسیار مهم است که اثبات تئوری ندارد ولی اثبات dimensional دارد که اولین بار توسط آقای stocks

$$C_D \rho \frac{\pi D^2}{4} v^2 = 6 \pi \mu v$$

$$F_D = 6 \pi \mu v \rightarrow \text{For Laminar Flow} \Rightarrow C_D = \frac{24 \times 2 \mu}{\rho v D^2} = \frac{24}{Re}$$

$$C_D = \frac{24}{Re}$$

دری همان نشان داد که:

Calculation of Head Loss in Pipes

nonrepeating variables

$$F(h_f, L, v, D, \rho, \mu, g) = 0$$

$$\pi_1 = \frac{h_f}{L}$$

choose repeating variables

$$\pi_2 = \rho^{x_2} v^{y_2} D^{z_2} \mu \Rightarrow \pi_2 = \frac{\mu}{\rho v D} \Rightarrow \pi_2 = \frac{\rho v D}{\mu} = Re$$

$$\pi_3 = \rho^{x_3} v^{y_3} D^{z_3} g$$

$$m L T^{-1} = (m L^{-3})^{x_2} (L T^{-1})^{y_2} L^{z_2} L T^{-2}$$

$$= m L^{-3x_2 + y_2 + z_2 + 1} T^{-y_2 - 2} \Rightarrow x_2 = 0$$

$$-y_2 - 2 = 0$$

$$y_2 = -2$$

$$-3x_2 + y_2 + z_2 + 1 = 0$$

$$z_2 = 1$$

$$\pi_3 = \rho v^{-2} D g = \frac{\rho D}{v^2}$$

$$F\left(\frac{h_f}{L}, \frac{\rho v D}{\mu}, \frac{\rho D}{v^2}\right) = 0 \Rightarrow F(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = 0$$

با تشکر از دوست و برادر عزیزم آقای علی اسلامی و آرزوی موفقیت و توفیق روز افزون برای ایشان

دو تابع مشخصه روی این شکل متغیر $\frac{\rho v D}{\mu}$ و $\frac{\rho D}{v^2}$ مترجم شدند که بین $\frac{h_f}{L}$ و $\frac{\rho D}{v^2}$ رابطه‌ای عکس برقرار است:

$$\frac{h_f}{L} = f(Re) \frac{v^2}{gD} \Rightarrow h_f = 2f(Re) \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g}$$

$$\Rightarrow h_f = F(Re) \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g} \quad \text{Darcy weizbach relation}$$

Friction Factor

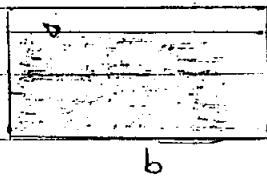
Prove that $\lambda = \frac{f}{8} \rho v^2$ in pipes

Consider that $\lambda = 8R \frac{h_f}{L}$

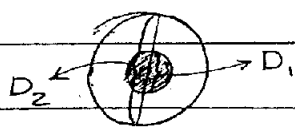
hydraulic radius = $\frac{\text{cross section area}}{\text{wetted perimeter}}$

R for circle = $\frac{\pi D^2 / 4}{\pi D} = \frac{D}{4}$

میان خطی شده



$$R = \frac{bh}{b+2h}$$



$$D_H = 4R = 4 \frac{\text{Area}}{P}$$

Hydraulic Diameter
قطر هیدرولیکی

$$D_H = \frac{\pi D_2^2 - \pi D_1^2}{\pi D_2 + \pi D_1}$$

For Laminar Flow: $f = \frac{64}{Re}$

برای اشیاء افزومول $\lambda = \frac{\rho}{8} f v^2$ فرمول h_p را در فرمول
 $\lambda = 8 R \frac{h_p}{L}$ قرار می دهیم، رابطه ای اثبات می شود.

Dimensionless Parameter

یکد طول مشخصه مثلاً
 با تشکر از دوست و میزبان عزیزم آقای علی دالاسلامی و آرزوی موفقیت و توفیق روز افزون برای ایشان

a) Reynolds Number, Re $Re = \frac{\rho v L}{\mu}$

$$Re = \frac{\rho v L}{\mu} \times \frac{v L}{v L} = \frac{\rho v^2 L^2}{\mu v L} = \frac{\rho \frac{L^2}{T^2} L^2}{\mu \frac{L}{T} L^2} = \frac{\rho L^3 \frac{L}{T^2}}{\mu \frac{L}{T} L^2}$$

$$= \frac{m a}{\mu} = \frac{\text{Inertial Forces}}{\text{Viscosity Forces}} = Re$$

It is significant for flow in closed conduits

مغزی بسته ها است

b) Froude Number, F_r $F_r = \frac{v}{\sqrt{g L}}$

این رابطه در کانال های باز بسیار مهم است که سطح سیال با هوا در تماس است

It is significant in open channels

$$F_r^2 = \frac{v^2}{g L} \times \frac{\rho L^2}{\rho L^2} = \frac{\rho v^2 L^2}{\rho g L^3} = \frac{\text{Inertial Forces}}{\text{Gravity Forces}} = F_r$$

در کانال های باز، عامل حرکت نیروی وزن است که در جهت شیب وارد می شود.

c) Mach Number, Ma $Ma = \frac{v}{c}$
 v → Fluid velocity
 c → sound speed in fluid

This value is applied for compressible flow

این گونه نیست که ما هر چه می‌خواهیم داشته باشیم Ma مطرح شود
 بلکه compressibility مهم است به طریقی که ما سرعت ما و Ma
 $\frac{1}{Ma}$ سرعت ما را تجاوز کند، Ma مهم می‌شود.
 با تشکر از دوست و برادر عزیزم آقای علی اسلامی و آرزوی موفقیت و توفیق روز افزون برای ایشان

$$Ma = \frac{v}{c} \times \frac{\rho v L^2}{\rho c v L^2} = \frac{\text{Inertial Forces}}{\text{Elastic Forces}}$$

d) weber number, w $w = \frac{\rho v^2 L}{\sigma}$
 $\sigma \rightarrow$ surface tension

$$w = \frac{\text{Inertial Forces}}{\text{surface tension force}}$$

e) Pressure coefficient

$$= \frac{\Delta P}{\rho v^2} = \frac{\text{pressure drop forces}}{\text{Inertial Forces}}$$

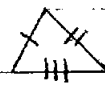
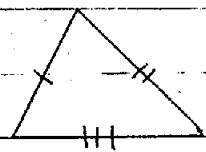
Geometric Similitude تساوی هندسی

Prototype اصل

model مدل

Geometric similarity:

Ratios of corresponding dimensions are constant



$$\frac{L_P}{L_m} = \text{constant}$$

Dynamic similitude

تساوی دینامیکی

Ratios of corresponding forces are constant

با داشتن Dynamic similitude, Geometric similarity داریم:

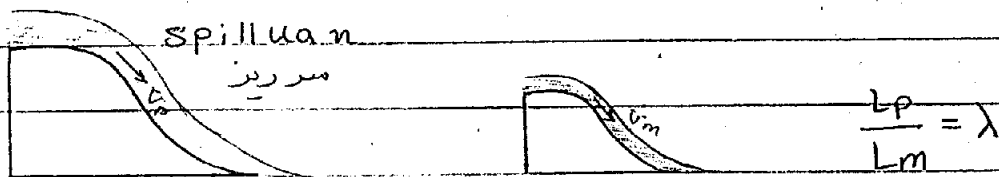
$$Re_p = Re_m \quad \text{و} \quad Fr_p = Fr_m \quad \text{و} \quad W_p = W_m \quad \text{و} \quad Ma_p = Ma_m$$

با تشکر از دوست و برادر عزیز آقای علی اسلامی و آرزوی موفقیت و توفیق روز افزون برای ایشان

این شباهت‌ها باید در 100٪ باشند، باید نسبت‌ها نسبتاً مساوی به مدل به اصل 1 به 1 باشد. یعنی باید عین خود جسم را بسازیم که امکان پذیر نیست. پس شباهت دینامیکی مدل هیچ وقت 100٪ نخواهد بود و باید Dominant Forces را در نظر گرفت.

Pipe Flow $\rightarrow Re_m = Re_p$

Hydraulic Structure $\rightarrow Fr_m = Fr_p$



Prototype model

در خواص نسبت سرعت در prototype به model را داریم

$$Fr_m = Fr_p \Rightarrow \frac{v_m}{\sqrt{g L_m}} = \frac{v_p}{\sqrt{g L_p}} \Rightarrow \frac{v_m}{v_p} = \sqrt{\frac{L_m}{L_p}}$$

$$\Rightarrow v_p = v_m \lambda^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{Q_p}{Q_m} = \frac{v_p}{v_m} \times \frac{L_p^2}{L_m^2} = \lambda^{\frac{1}{2}} \times \lambda^2 = \lambda^{\frac{5}{2}}$$

نسبت دبی در مدل اصلی به مدل

$$t = \frac{L}{v} \Rightarrow \frac{t_p}{t_m} = \frac{L_p / v_p}{L_m / v_m} = \frac{L_p}{L_m} \times \frac{v_m}{v_p} = \lambda / \lambda^{\frac{1}{2}} = \lambda^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{Q_p}{Q_m} = \frac{L_p^3 / t_p}{L_m^3 / t_m} = \left(\frac{L_p}{L_m}\right)^3 \times \frac{t_m}{t_p} = \frac{\lambda^3}{\lambda^{\frac{1}{2}}} = \lambda^{\frac{5}{2}}$$

Ex :

A short smooth hydraulic overflow structure passes a flowrate of $600 \text{ m}^3/\text{s}$. What flowrate structure to obtain dynamic similitude

کدام تشکر از دست و پیرانه عزیزم آقای علی اسلامی آزادی موفقیت و توفیق روز افزون برای ایشان

$Q_p = 600 \text{ m}^3/\text{s}$, $Q_m = ?$

$$F_{rp} = F_{rm} \Rightarrow \frac{v_p}{\sqrt{g L_p}} = \frac{v_m}{\sqrt{g L_m}} \Rightarrow \frac{v_p}{v_m} = \sqrt{\frac{L_p}{L_m}} = \sqrt{\lambda}$$

$$\frac{Q_p}{Q_m} = \frac{v_p A_p}{v_m A_m} = \frac{v_p}{v_m} \times \frac{A_p}{A_m} = \lambda^{1/2} \lambda^2 = \lambda^{5/2}$$

$$\frac{600}{Q_m} = 15^{5/2} \Rightarrow Q_m = 0.69 \text{ m}^3/\text{s}$$

CHAPTER 5

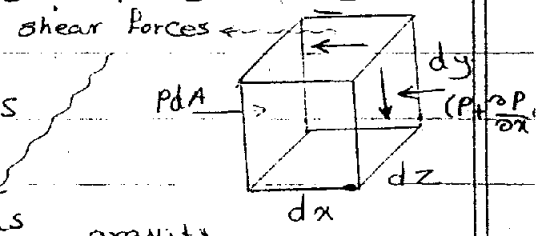
Viscous Flow

در به دست آوردن معادلات انرژی برینزی خونی ما بریم و برود اصطلاحی بود و head loss و افت انرژی وجودناست. اما در این فصل ما به دنبال معادله‌ی head loss هستیم

Navier - Stokes Equations

$$\begin{aligned} \sum F_x &= m a_x \\ \sum F_y &= m a_y \\ \sum F_z &= m a_z \end{aligned}$$

$$F_x^p + F_x^{\text{viscous}} + F_x^{\text{gravity}} = m a_x$$



درستی این معادله را می‌پذیریم (منتهی بعد)

element volume

$$(\vec{v} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k})$$

75

$$-\frac{\partial p}{\partial x} dV + \nu \nabla^2 u \rho dV + \rho dV g_x = \rho dV a_x$$

(یا با این)

$$\Rightarrow a_x = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u + g_x$$

با شکر از دوست و برادر عزیز آقای علی اسدپوری و آقای سید سعید و توفیق و روز افزون برای اینشان

$$a_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\Rightarrow a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}$$

substitution in ①:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u + g_x$$

x-component of Navier Stokes Equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u + g_x$$

y-component of Navier-Stokes eq

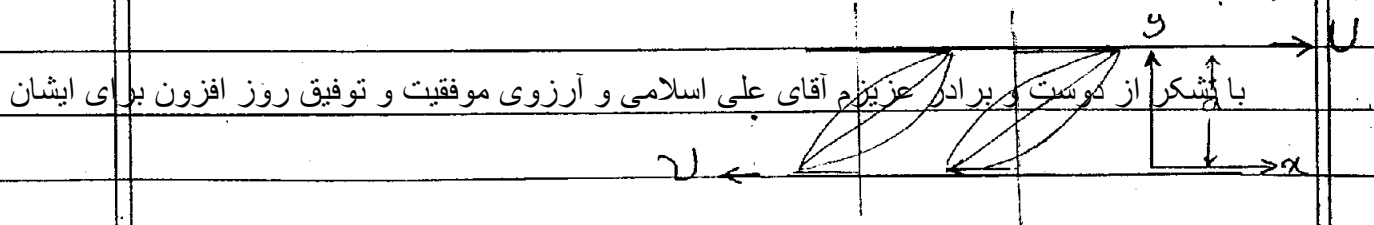
و برای u و v و w معادلات معادله Navier-Stokes هستند

و برای z نیز معادله Navier-Stokes را می نویسیم

These Navier-Stokes Equations are valid for laminar flow.

در مفهومی اختی که پس از تحلیل سیال درونی و مرزها در نظر E: بگیریم. مفهومی بالایی با سرعت بالا به سمت راست و مفهومی پایینی با سرعت بالا به سمت چپ حرکت می کنند. توزیع سرعت را هم این مفهومات

متحرک است. باید بدانیم در هر کدام از این صفحات مقدار shear stress
باید بداند



آنچه در مورد مسائل می دانیم این است که حرکت افقی است و در
در بعد یعنی صفحه‌ی y انجام می‌گیرد پس باید از معادله‌ای که
در جهت x انجام می‌گیرد استفاده شود.
 x -component of N.S eq.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + g_x$$

چون شرایط اینجا حرکت در سیال (حرکت صفحه‌ها)
با زمان تغییر نمی‌کند، سرعت سیال نیز steady-state
است. $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ steady flow

در کنار ارتفاع مشخص درون لوله سرعت سیال در طول لوله (جهت x)
ثابت است. $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \rightarrow \text{from continuity}$$

$$v \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \Rightarrow \text{since } v = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{because } \frac{\partial u}{\partial x} = 0)$$

$$g_x = 0 \Rightarrow \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 u}{dy^2} = 0 \quad (\text{since } u \text{ is a fun. of } y \text{ only})$$

$$\frac{du}{dy} = c \Rightarrow u = cy + c_1$$

$$y=0, u=-v \quad \text{Boundary conditions}$$

$$-v = c(0) + c_1 \Rightarrow c_1 = -v$$

با تشکر از دوست و برادر عزیزم آقای علی اسلامی و آرزوی موفقیت و توفیق روز افزون برای ایشان

$$y=a, u=U$$

$$U = ca + (-v) \Rightarrow c = \frac{U+v}{a}$$

$$\Rightarrow u = \frac{U+v}{a} y - v$$

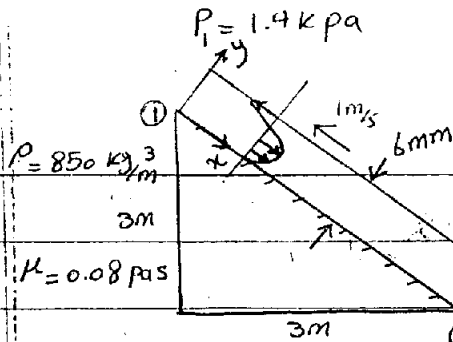
پس توزیع سرعت خطی است.

$$y = \frac{av}{U+v} \quad \text{منها در نقطه ی سرعت صفر است}$$

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad \tau = \mu \frac{U+v}{a}$$

چون توزیع سرعت خطی است تنش مالشی برای دو صفحه

یکسا است.



سیالی بر روی سطح شیبدار متقابل در حال جریان است. در سطح

بالایی سیال صفحاتی با سرعت

کتابت به سمت بالا

مرکز استاتیکی (کندوسنتی) بر باریک زینم آقای علی اسلامی و آرزوی موفقیت و توفیق روز افزون برای این

$u = ?$
 $Q = ?$

دقیق و شش برقی را در صفحه بالایی بیابید

Elevation above datum عرض درون صفحه استر است z at upper plate = ?

piezometric pressure = $P + \rho z$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$\bar{P} = P + \rho z \Rightarrow \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x} + \rho \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x} + \rho g \sin \theta$$

این عبارت با عبارات زیر است:

$$g_x = -g \sin \theta \Rightarrow g = -\frac{g_x}{\sin \theta}$$

$$\sin \theta = \frac{z}{x} \Rightarrow z = x \sin \theta$$

$$= -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + g_x$$

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x} + \rho (-g \sin \theta) = \frac{\partial P}{\partial x} - \rho g \sin \theta$$

ناب است

$$\Rightarrow -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + g_x$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \text{ (steady flow)}$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ تغییر توزیع سرعت در طول مسیر وجود ندارد. (continuity)}$$

$$v \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \text{ چون لزوم است.}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \text{ چون } \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ است.}$$

$$\Rightarrow 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial x} = \frac{P_2 - P_1}{\Delta L} = \frac{1}{\Delta L} \left((P + \rho z)_2 - (P + \rho z)_1 \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(0.8 \times 10^3 + 0) - (1.4 \times 10^3 + 850 \times 9.806 \times 3) \right]$$

$$0 = +6035 + 0.08 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{-6035}{0.08} \Rightarrow \frac{du}{dy} = -37718y + c_1$$

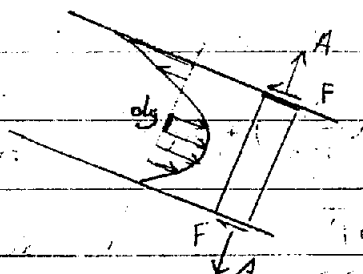
$$u = -37718 \frac{y^2}{2} + c_1 y + c_2$$

با تشکر از دوست و برادر عزیزم آقای علی اسلامی و آرزوی موفقیت و توفیق روز افزون برای ایشان

$$y=0 \Rightarrow u=0 \Rightarrow 0 = 0 + 0 + c_2 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$y=0.006 \Rightarrow u=-1 \Rightarrow -1 = -37718 \frac{(0.006)^2}{2} + c_1 \times 0.006$$

$$\Rightarrow c_1 = 59.646 \Rightarrow u = -37718 \frac{y^2}{2} + 59.646y$$



$$dQ = u dA = u dy x 1 \Rightarrow Q = \int_0^{0.006} u dy$$

$$Q = \int_0^{0.006} (-37718y^2 + 59.646y) dy$$

$$= -0.00164 \text{ m/s}$$

علامت منفی نشان می دهد که جریان به سمت بالا در دست راست

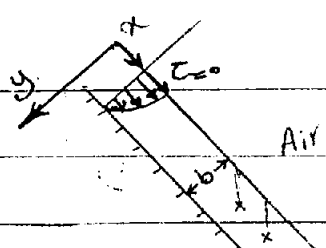
$$\tau = \mu \frac{du}{dy} = \mu (-2 \times 37718y + 59.646)$$

$$= 0.08 (-2 \times 37718 \times 0.006 + 59.646) = -31.94 \text{ Pa}$$

علامت منفی ناشی از منفی بودن نیروی ایجادکننده ی shear stress

وارد بر سطح با بر دار سطح مشت است

Ex.



سیالی بر روی سطح شیب دار
به سمت پایین حرکت می کند
مقادیر u ، Q و T را در

صورتشکی بالایی است و در پایین آن موازی سطح مایل است و آروی موفقیت هر دو توفیق روز افزون برای این
است. $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ است

steady continuity $v=0$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + g \sin \theta$$

$$0 = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g \sin \theta \Rightarrow 0 = \nu \frac{d^2 u}{dy^2} + g \sin \theta$$

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = -\frac{g}{\nu} \sin \theta \Rightarrow \frac{du}{dy} = -\frac{g}{\nu} \sin \theta y + C_1$$

B.C. $y=0, u=0 \Rightarrow \frac{du}{dy} = 0 \Rightarrow 0 = C_1$

$$\Rightarrow \frac{du}{dy} = -\frac{g}{\nu} \sin \theta y$$

$$u = -\frac{g}{2\nu} \sin \theta y^2 + C_2$$

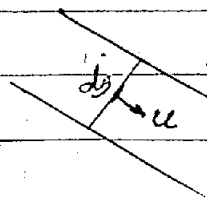
B.C.

$$y=b, u=0 \Rightarrow 0 = -\frac{g}{2\nu} \sin \theta b^2 + C_2$$

$$C_2 = \frac{g}{2\nu} \sin \theta b^2$$

$$u = -\frac{g}{2\nu} \sin \theta y^2 + \frac{g}{2\nu} \sin \theta b^2$$

$$u = \frac{g}{2\nu} \sin \theta (b^2 - y^2)$$



$$da = u dA = u dy x l$$

$$a = \int_0^b u dy = \int_0^b \frac{g}{2v} \sin \theta (b^2 - y^2) dy$$

$$a = \frac{g}{2v} \sin \theta \left[b^2 y - \frac{y^3}{3} \right]_0^b = \frac{g}{3v} \sin \theta b^3 = Q$$

با تشکر از دوست و برادر عزیزم آقای علی اسلامی و آرزوی موفقیت و توفیق روز افزون برای ایشان

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} = \mu \left(\frac{g}{2v} \sin \theta x - 2y \right)$$

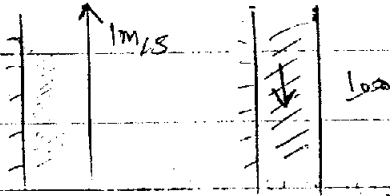
$$\tau_{bed} = \mu \times \frac{g}{2v} \sin \theta x - 2b$$

$$\Rightarrow \tau = -\rho g b \sin \theta$$

ح متقی است چرا که جهت و نسبت به مسأله قبل عکس است.

مسأله قبل را با فرض اینکه جهت جریان مشخصی داشته باشد حل کنید

تفاوت در Boundary condition است



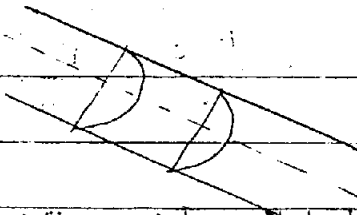
سوالات زیر را نیز حل کنید.

Laminar Flow Through Circular Pipes:

$$\tau = \eta \frac{du}{dy}$$

→ adds viscosity

برای حل این مسائل در مورد Pipes باید از مشخصات استوانه‌ای استفاده کرد. سرعت سیال باید در جهت x در نظر گرفته شود.



با تشکر از دوست و برادر عزیزم آقای علی اسلامی و آرزوی موفقیت و توفیق روز افزون برای ایشان
N.S.E

z : component in cylindrical coordinates

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right]$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = 0 \text{ steady state}$$

$$v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} = 0 \quad (v_r = 0)$$

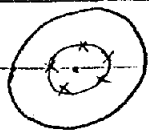
$$\frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} = 0 \quad (v_\theta = 0)$$

$$v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (\text{continuity})$$

$\frac{\partial p}{\partial z}$ صغیر نیست چون برای حرکت آب در لوله ای افقی باید از پمپ

استفاده کرده کرد. پمپ در میان ایماز اصطلاحات می کند

در مورد لوله ها Axial symmetry وجود دارد $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$



$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} = 0 \quad (\text{Axial symmetry})$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{dv_z}{dr} \right) = \frac{1}{\nu} \frac{dp}{dz} r$$

سوال

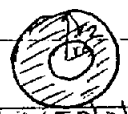
$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_z}{dr} \right) = \frac{r}{\mu} \frac{d\bar{P}}{dz} \Rightarrow r \frac{dv_z}{dr} = \frac{r^2}{2\mu} \frac{d\bar{P}}{dz} + C_1$$

Boundary conditions:

$$r=0 \Rightarrow \frac{dv_z}{dr} = 0$$

تشکر از دوست و برادر عزیزم آقای علی اسلامی و آرزوی موفقیت و توفیق روز افزون برای ایشان
 $0 = 0 + C_1 \Rightarrow C_1 = 0$

$$r \frac{dv_z}{dr} = \frac{r^2}{2\mu} \frac{d\bar{P}}{dz}$$



با استناد از معادله N, S, E برای دو توده می تو در تو مستطیله حاصل کنید

$$r \frac{dv_z}{dr} = \frac{r^2}{2\mu} \frac{d\bar{P}}{dz} + C_1$$

با باید از این معادله استناد گرفت

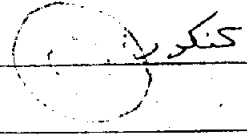
B.C. $r=R, v_z=0$

$$0 = \frac{R^2}{4\mu} \frac{d\bar{P}}{dz} + C_2 \Rightarrow C_2 = -\frac{R^2}{4\mu} \frac{d\bar{P}}{dz}$$

$$v_z = \frac{-R^2}{4\mu} \frac{d\bar{P}}{dz} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$

Hagen - Poiseuille Equation

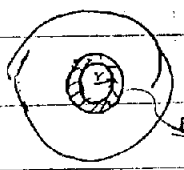
$$v_z = k \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$



$$\left. \frac{\partial v_z}{\partial r} \right|_{r=0} = \mu \frac{dv_z}{dr}$$

$$\tau = \mu k \left(-\frac{2r}{R^2} \right)$$

برای یافتن دبی باید همان رابطه صورت حلقه انتخاب کرد



$$dQ = v_z dA = v_z 2\pi r dr$$

$$Q = \int_0^R \frac{-R^2}{4\mu} \frac{d\bar{P}}{dz} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \times 2\pi r dr$$

$$Q = \frac{-R^2}{4\mu} \frac{d\bar{P}}{dz} \times 2\pi \int_0^R \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) r dr$$

$$= \frac{-R^2 \pi}{2\mu} \frac{d\bar{P}}{dz} \left[r^2 - \frac{r^4}{4R^2} \right]_0^R$$

با تشکر از دوست و برادر عزیزم آقای علی اسلامی و آرزوی موفقیت و توفیق روز افزون برای ایشان

$$Q = \frac{-R^4 \pi d\bar{P}}{8\mu dz}$$

average velocity:

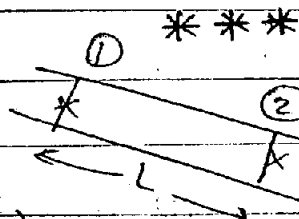
$$v = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\pi R^2}$$

$$v_{av.} = \frac{-R^2}{8\mu} \frac{d\bar{P}}{dz}$$

$$v_{max} = \frac{-R^2}{4\mu} \frac{d\bar{P}}{dz}$$

$$\Rightarrow v_{av.} = \frac{v_{max}}{2}$$

$$\frac{d\bar{P}}{dz} = \frac{\bar{P}_2 - \bar{P}_1}{L}$$



$$= \frac{(P_2 + \gamma z_2) - (P_1 + \gamma z_1)}{L}$$

$$= \frac{\gamma}{L} \left[\left(z_2 + \frac{P_2}{\gamma} \right) - \left(z_1 + \frac{P_1}{\gamma} \right) \right]$$

$$\frac{d\bar{P}}{dz} = \frac{\gamma}{L} (-h_p) = \frac{-\gamma h_p}{L}$$

From *

$$v = \frac{-R^2}{8\mu} \times \frac{-\gamma h_p}{L}$$

$$\Rightarrow h_p = \frac{32\mu L v}{\gamma D^2}$$

$$\frac{32 \mu L}{\rho D^2} = f \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g} \Rightarrow f = \frac{64}{\rho v D / \mu} \Rightarrow \left(\frac{64}{Re} \right)$$

فشار کم در جریان laminar و معادله C.N.S.E

$Re < 2000$

$f = \frac{64}{Re}$

با تست کردن دو جهت و برابری انرژی علی اسلامی و آرزوی موفقیت و توفیق روز افزون برای ایشان

For turbulent flow $Re > 2000$

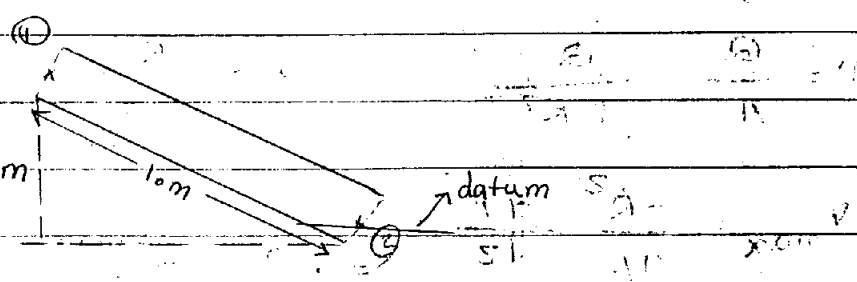
$P_1 = 200 \text{ kPa}$

$\gamma = 8000 \text{ N/m}^3$

$D = 10 \text{ mm}$

$\mu = 0.04 \text{ Pa}\cdot\text{s}$

$P_2 = 300 \text{ kPa}$



$Q = ? \quad v = ?$

جریان به سمت بالا است چون انرژی در واحد حجم سیال در پایین بیشتر است

$E_1 - h_{f_{1-2}} = E_2$ Flow from ① toward ②

$E_2 - h_{f_{2-1}} = E_1$ Flow " ② " " ①

$$E_1 = z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = 5 + \frac{200000}{8000} + \frac{v_1^2}{2g} = 30 + \frac{v_1^2}{2g}$$

$$E_2 = z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} = 0 + \frac{300000}{8000} + \frac{v_2^2}{2g} = 37.5 + \frac{v_2^2}{2g}$$

$E_2 > E_1 \Rightarrow$ Flow from ② to ①

$$z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} - h_{f_{2-1}} = z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g}$$

$37.5 - h_{f_{2-1}} = 30 \Rightarrow h_{f_{2-1}} = 7.5 \text{ m}$

$f \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g} = 7.5 \Rightarrow \text{Assume laminar flow: } \frac{64}{\rho v D} \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g} = 7.5$

برای $Re > 2000$ با ایجاد کوچکترین اغتشاشی جریان از laminar به

turbulent تبدیل می شود در مورد رسیدن از Re های بسیار بالاتر

در $Re = 2000$ اغتشاش درون سیستم وجود دارد و همین اغتشاش مانع

از آن می شود که در $Re > 2000$ بتوانیم به laminar Flow

با تشکر از دوست و برادر عزیزم آقای علی اسلامی و آرزوی موفقیت و توفیق روز افزون برای ایشان

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s} - \frac{1}{s} = 0$$

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s} - \frac{1}{s} = 0$$

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s} - \frac{1}{s} = 0$$

$$\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \right) = 0$$

Reynolds number

Reynolds number

Reynolds number

Reynolds number

Reynolds number

Reynolds number

Reynolds number

Reynolds number

Reynolds number

$$\frac{32 \mu L \nu}{\rho D^2 g} = 75 \Rightarrow \frac{32 \times 0.04 \times 10 \times \nu}{8000 \times (0.010)^2} = 75$$

$$\nu = 0.42 \text{ m/s}$$

با تشکر از دوست و برادر عزیزم آقای علی اسلامی و آرزوی موفقیت و توفیق روز افزون برای ایشان
 دیاگنوز باید بررسی شود که جریان turbulent است و نه

laminar. برای اینکه مطمئن باشیم که $Re < 2000$ مقادیر داده شده
 رده دست آمده را در فرمول زیر جایگزین می کنیم.

$$Re = \frac{\rho \nu D}{\mu} = 95.6 < 2000$$

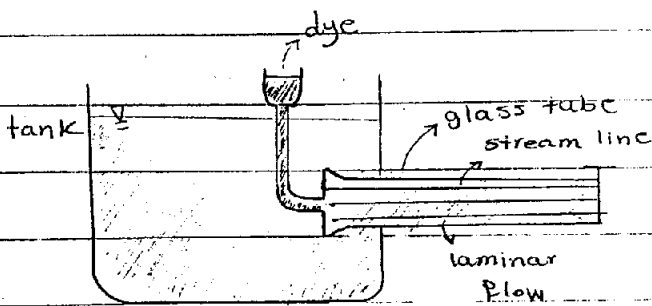
$$\tau = \frac{r}{2} \frac{d\bar{p}}{dz} \quad \tau = \mu \frac{dr}{dr} = \mu \frac{d}{dr} \left(\frac{-R^2}{4\mu} \frac{d\bar{p}}{dz} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \right) \quad \tau = \text{تاب}$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{d\bar{p}}{dz} + \frac{\mu}{\rho} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d^2 \nu_z}{dz^2} \right) \quad \text{به N.S.E مراجعه کنید}$$

$$0 = -\frac{d\bar{p}}{dz} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \mu \frac{d^2 \nu_z}{dz^2} \right)$$

سیس انتگرال می گیریم

Reynolds Experiment

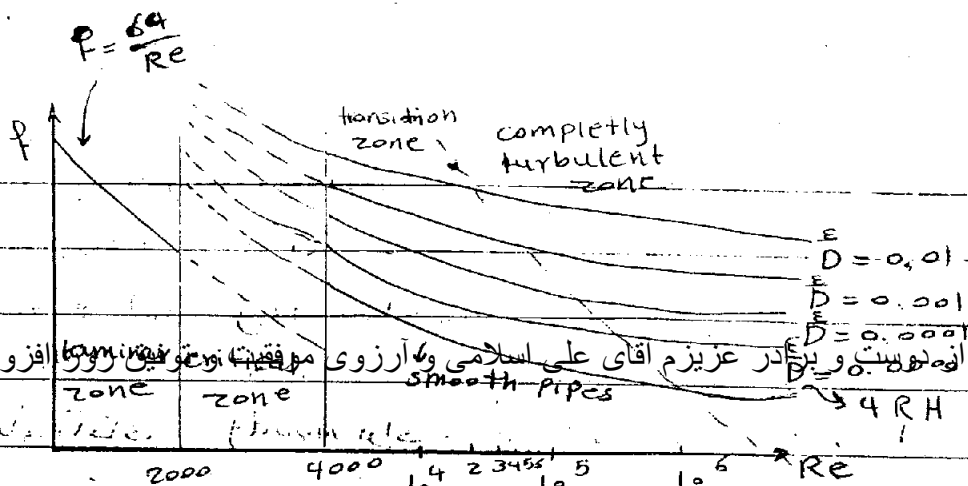


stable laminar flow

Laminar Reynolds Apparatus.

unstable ~ turbulent flow دارد.

تا $Re = 2000$ laminar flow به صورت stable است از
 $Re = 2000$ تا مثلاً 12000 ~ ~ ~ unstable ~ برای
 $Re > 12000$ جریان به صورت turbulent است (مغاکه) می باشد.



با تشکر از نویسنده و بی در عزیزم آقای علی اسلامی و آرزوی موفقیت و پیشرفت روز افزون برای ایشان

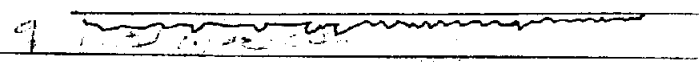
$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g}$$

Friction factor

* laminar flow $\rightarrow f = \frac{64}{Re}$

* Turbulent $\rightarrow f = f\left(\frac{\epsilon}{D}, Re\right)$

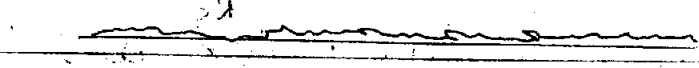
هر چقدر ای داخلی هر لوله ای قاعده آن بر است



$\epsilon = \text{Absolute Roughness}$

ارتفاع میانگین زبری ها

$\epsilon/D = \text{Relative Roughness}$



* هر لوله ای با هر جنسی بکنای مخصوص به خود دارد که در جدول های آمده است. گاهی اوقات ϵ در یک باره معنی نمی شود که برای استفاده از آن دو جدول، میانگین هر مقدار را در می دهیم.

Colebrook formula

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -0.86 \ln \left[\frac{\epsilon/D}{3.7} + \frac{2.51}{Re \sqrt{f}} \right]$$

turbulent

این رابطه بیان می کند که در صورت وجود جریان در یک لوله می توان f را از رابطه ی داده شده به دست آورد. اما برای یافتن آن از روش $try\ and\ error$ استفاده می شود.

جذاب آقای Moody برای رهایی از دروسهای یافتن f در این

با تشکر از دوست و برادر عزیزم آقای علی اسلامی و آرزوی موفقیت و توفیق روز افزون برای ایشان

ملاحظه ای رسم نمود. دینوار صغری قبل

در نمودار f در محور Re و f در محور f هستند یعنی در $Re = 2300$ تا 2300 و $f = 0.02$ تا 0.05 و این محدوده ها را به طور کلی به عنوان منطقه های مساری تعمیم می کنند.

برای یافتن f از Re مورد نظر بر محور افقی خط عمودی می کشیم این خط نمودار f را در یک نقطه قطع می کند از آن نقطه بر محور f (محور عمودی) خط عمودی می کشیم. تقاطع این خط با محور عمودی f را نشان می دهد.

* خط چین ها در $critical\ zone$ دیده می شوند. اگر جریان $laminar$

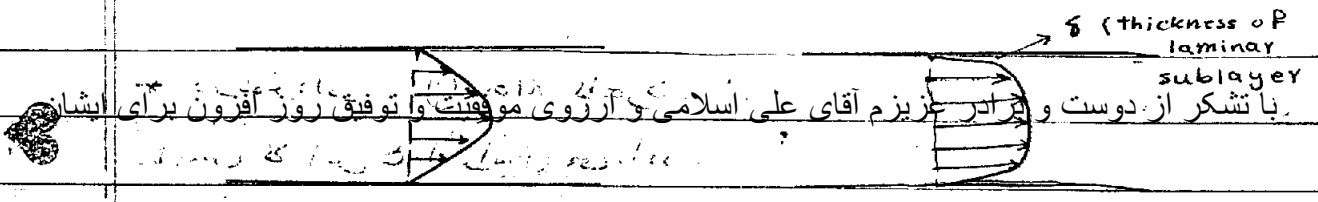
بود از $f = \frac{64}{Re}$ استفاده می کنیم و اگر $turbulen$ بود از فرمول $colebrook$ استفاده می کنیم.

* در مواردی که $\frac{E}{D}$ یکی از نمودارهای رسم شده نباشد باید به طور تقریبی نمودار مورد نظر را که بین دو نمودار دیگر واقع می شود رسم نمود.

* در $critical\ zone$ نمودارها منتهی شده و فاصله ی آنها از $smooth\ pipes$ $critical\ zone$ کم است. اما بالاتر از Re و رسیدن به

$completely\ turbulent\ zone$ از تمام نمودارها کاسته شده و آنها را کنار هم گذاشتند. $smooth\ pipes$ هستند.

$$U = U_{max} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$
 Hagen - Poissuelle eq.



laminar flow

Turbulent flow

Turbulent flow در نزدیکی دیوارها جریان خطی است اما

بسیار شبیه تند به صورت exponential در می آید

laminar sublayer لایه ی نازکی است که در Turbulent flow

مرکز laminar دارد

* در laminar flow delta برابر کل ضخامت سیال است

* در مود مدی delta برابر است از چپ به راست کاهش می یابد

* زبری های درون دیواره ی لوله می تواند نقش ایجابگر داشته باشد و باعث

باشند قطعاً در laminar flow این زبری ها تأثیری ندارند چرا که

در عمول معادله ϵ و ϵ به چشم نیفتد $\frac{\epsilon}{D}$

* پس اگر دو جریان laminar یکی از درون یک لوله ی زبر و دیگری

از درون یک لوله ی P.V.C یا پولیکا یا شیشه ای که زبری نداشت عبور

کند f در هر دو مورد یکسان است.

* در جریان turbulent که $\epsilon > \delta$ و سیال بین δ و ϵ

قرار داشته باشد ϵ تأثیری بر f نمی گذارد چون کل زبری با δ

که شامل منطقه ای laminar می باشد پوشانده شده است.

اینها ^{لوله ها} $hydraulically smooth pipe$ نام می گیرند

Ex. (Type 1):

$$Q = 140 \text{ L/s}, \quad v = 0.00001 \text{ m}^2/\text{s}$$

$$L = 400 \text{ m}, \quad D = 200 \text{ mm}$$

با تشکر از دوست و برادر عزیزم آقای مهندس و آرزوی موفقیت و تمیز روز افروز برای ایشان

$$h_p = ?$$

$$h_p = f \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g}$$

در هر سه type مسائل لوله، f

بیز مجهول است. پس همیشه

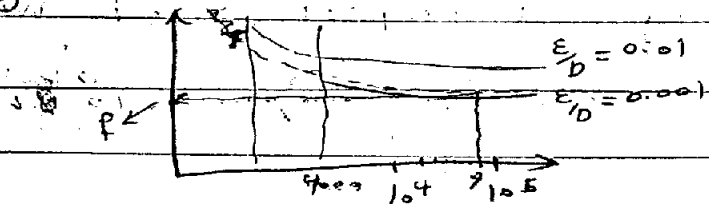
۲ مجهول وجود دارد.

$$v = \frac{Q}{A}$$

$$Re = \frac{vD}{\nu} = \frac{Q}{A} \frac{D}{\nu} = \left(\frac{0.140}{\pi \times 0.2^2 / 4} \right) \times \frac{0.2}{0.00001} = 89127$$

$$\frac{\epsilon}{D} = \frac{0.25}{2000} = 0.00125$$

Moody
diagram



$$f = 0.023$$

$$h_p = 0.023 \frac{400}{0.2} \frac{\left(\frac{0.14}{\pi \times 0.2^2 / 4} \right)^2}{2 \times 9.806} = 46.58 \text{ m}$$

Ex. (Type 2)

$$T = 15^\circ\text{C}, \quad D = 300 \text{ mm}, \quad \text{riveted steel pipe}$$

$$\epsilon = 3 \text{ mm}$$

$$h_p = 6 \text{ m}, \quad L = 300 \text{ m}, \quad Q = ?$$

$$\frac{\epsilon}{D} = \frac{3}{300} = 0.01$$

برای تعیین Q نیاز داریم Re و f را بدانیم. Re مجهول است.

بر اساس ϵ/D یک f مناسب حدی می‌زنیم، روش آزمون و خطا.

برای اینکار باید Re را بزرگتر فرض کنیم. $f = 0.04$

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g} \Rightarrow 6 = 0.04 \frac{300}{0.3} \frac{v^2}{2 \times 9.806}$$

$$\Rightarrow v = 1.715 \text{ m/s}$$

با تشکر از دوست و برادر عزیزم آقای علی اسلامی و آرزوی موفقیت و توفیق روز افزون برای ایشان این که لایق این قطعی نسبتاً زیاد ما Re را همین روزی برای

اطمینان از مقدار لایق و اصیلاً تصحیح نمودن آن Re را محاسبه می کنیم.

$$Re = \frac{vD}{\nu} = \frac{1.715 \times 0.3}{1.13 \times 10^{-6}} = 455000$$

برای پیدا کردن لایق که در مخبر قرار دارد از جدول های شبیه جدول زیر استفاده می شود.

Physical Properties of water

| T | ρ | γ | ν (cm ² /s) | ν (m ² /s) |
|----|--------|----------|----------------------------|---------------------------|
| 0 | | | | |
| 45 | | | | |
| 10 | | | | |
| 15 | | | 1.13 | |
| 20 | | | | |

$$\frac{E}{D} = 0.01 \xrightarrow[\text{diag.}]{\text{Moody}} f = 0.038$$

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g} \Rightarrow 6 = 0.038 \frac{300}{0.3} \frac{v^2}{2 \times 9.806}$$

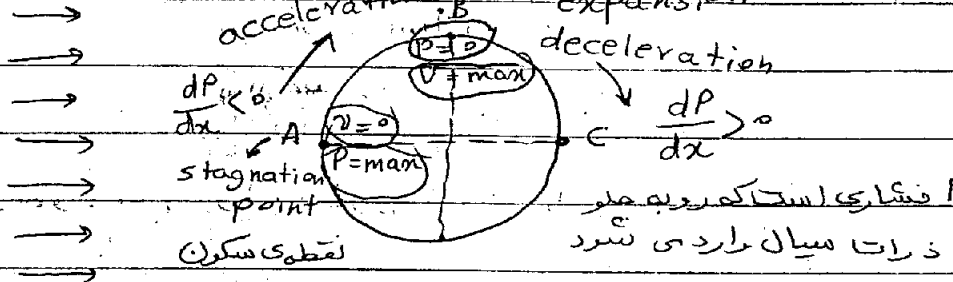
$$v = 1.76 \text{ m/s}$$

این که لایق با زخم لایق نسبت در باره کارهای بالا را انجام می دهیم و این کار را تا جایی انجام می دهیم که مقدار لایق دو برابر حداکثر 0.004 باشند.

اگر سیال از دو طرف سطح تماس حرکت کند F_D دو برابر می شود

حالا کیا استوانه را بد نظر بگیریم

با تشکر از دوست و برادر عزیزم آقای contraction و موفقیت و توافق روز افزون برای ایشان



در نقطه A سرعت سیال صفر و در آن Max است

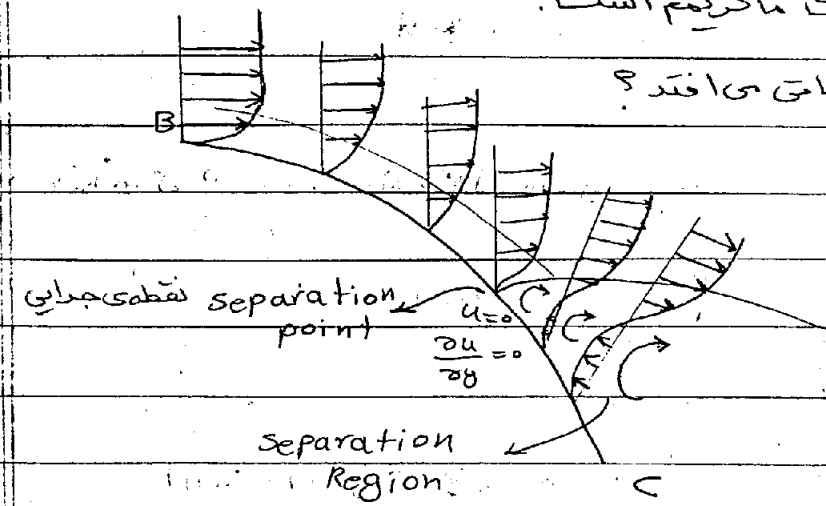
از A به B شرایط مانند contraction و

از B به C = = = expansion است

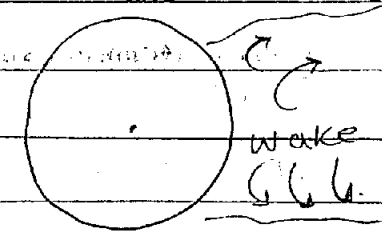
با تشکر از شما مجدداً سرعت زیادی شود

در نقطه B سرعت ماکزیمم است

* از B به C چه اتفاقی می افتد؟

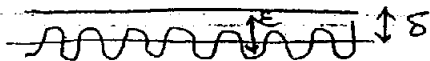


$\frac{dp}{dx} \neq 0$ $\frac{dp}{dx} > 0 \Rightarrow$ it causes the separation



irregularity wake
منطقه‌ای که در آن بی نظمی وجودش
و فشار منفی وجود دارد

$F_D = \text{Pressure drag Force} + \text{skin friction drag Force}$



اگر $D > E$ نیویولده مارا

* در نمودار Moody با حرکت از سمت چپ به راست با افزایش

با تشکر از دوست و یار عزیزم که با کمکش این مطلب را می توانم در اختیار شما قرار دهم و آرزوی موفقیت و توفیق روز افزون برای ایشان

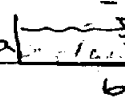
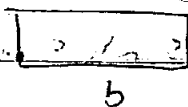
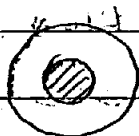
* برای لوله هایی که مقطع آنها غیر از دایره است برای توان رابطه h_p

رابطه نوشت. اما با اندکی تغییر

$$h_p = f \frac{L}{4R_H} \frac{v^2}{2g}$$

Hydraulic Radius = $\frac{A}{P}$ → cross-sectional area
 P → wetted perimeter

D_H hydraulic diameter



$4R_H$

$R_H = \frac{ba}{2(b+a)}$

$R_H = \frac{ba}{b+2a}$

* نمودار Moody را می توان برای هر مقطعی که کاربرد. تفاوت

آن برای مقاطع غیر دایره ای D است که با $4R_H$ جایگزین می شود.

simple problems in pipes

Type 1 → h_p is unknown

Type 2 → v or Q is unknown

Type 3 → D

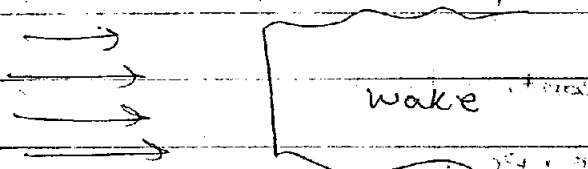
بر روی یک صفحه صیقلی و جدا شدن دیرینه می شود چون $\frac{dp}{dx} = 0$

برای ساخته هوا را با فکته کردن نوک آن مقدار wake را کاهش می دهند

stream lined shape
 با تشکر از دوست و برادر عزیزم آقای علی اسلامی و آرزوی موفقیت و توفیق روز افزون برای ایشان
 شکل خط جریان wake

* یک صفحه می شود مقابل جریان بیشترین Wake را دارد ای باشد یعنی

$F_D = \text{skin friction}$



$F_D = \text{pressure drag}$

* Compressible Flow

هنگامی که M تغییر باشد ρ آنرا سیال گاز باشد نباید همیشه ρ را متغیر گرفت

$F = \frac{\text{Fluid velocity}}{\text{Sound speed in the fluid medium}} = \frac{v}{a}$

$M > 0.3 \Rightarrow$ compressibility becomes significant

h : specific enthalpy

$h + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = \text{const.}$

internal energy per unit mass

$h + \frac{v^2}{2} = \text{constant}$

$c_p T \Rightarrow$ temperature in kelvin

specific heat

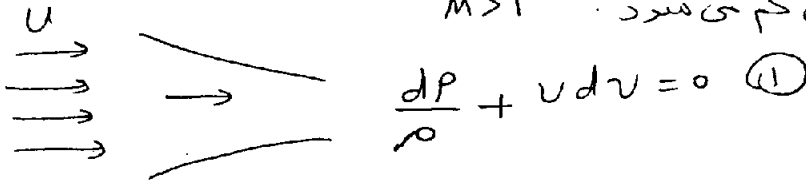
در compressible flow Z نامیز

فرض می شود

isentropic flow \Leftrightarrow reversible + adiabatic

در $supersonic$ flow دانه با سرعت $M > 1$ در یک contraction در بر روستوم

سرعت به جای زیاد شدن کم می شود



با تشکر از دوست و برادر عزیزم آقای علی اسلامی و آرزوی موفقیت و توفیق روز افزون برای ایشان در $compressible$ هادی توان گفت $A_1 v_1 = A_2 v_2$ Fluid

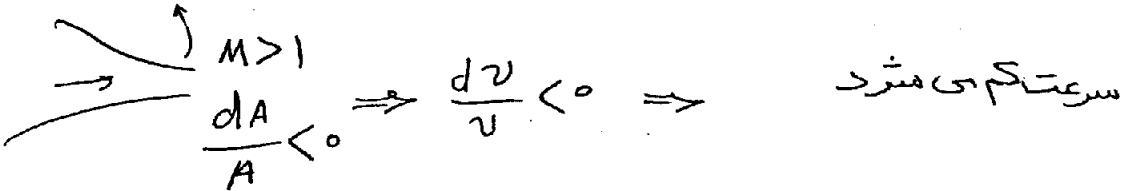
kg/s $\rho A v = \text{constant}$ (2) (continuity)

$\frac{dp}{d\rho} = a^2$ (3)

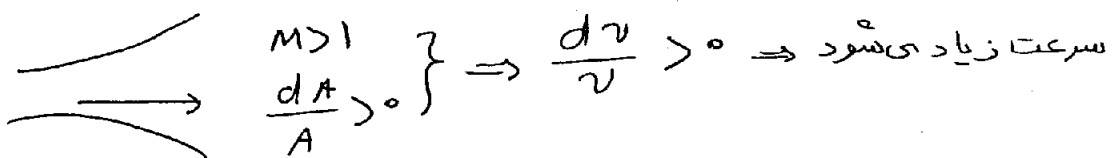
(1), (2), (3) \Rightarrow

$\frac{dA}{A} = \frac{dv}{v} (M^2 - 1)$

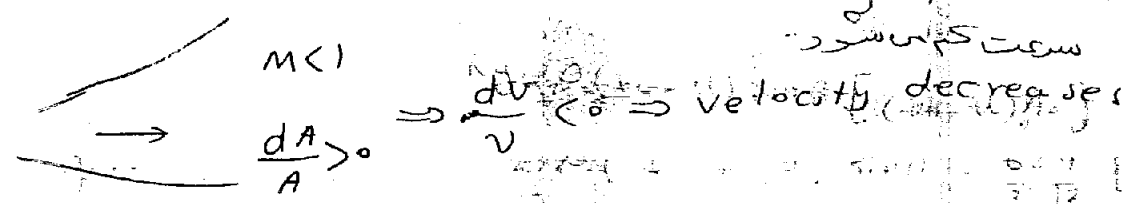
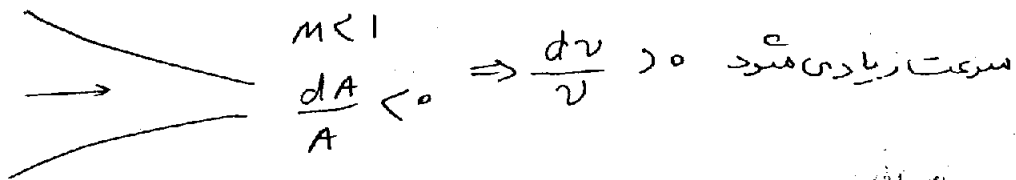
تنگنا throat



در مقطع 1، هم سرعت v ، هم مساحت A کاهش یافته است پس M باید بسیار افزایش یافته باشد تا $\rho A v = \text{cte}$ شود.



subsonic flow ($M < 1$)



باخودم گفتم تو عاشق نیستی

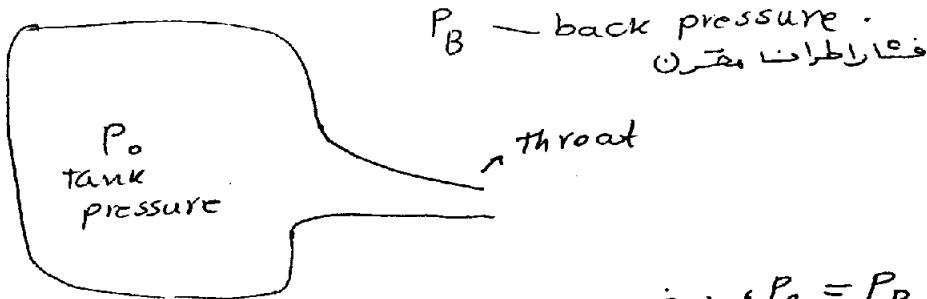
اگر از سر بشنایم

- In throat

با تشکر از $Reynolds$ و $Prandtl$ عزیزم آقای دلی اصلاحی و کارزوی موفقیت هر توفیق روزی افزون و عذرا ایشان = $\frac{dA}{A}$

تنها در گره می توان جریان sonic داشت.
و نه در هیچ جای دیگر.

Convergent nozzle



case 1) $P_0 = P_B$ ، در خروجی $discharge = 0$ آر

case 2) $P_0 - P_B$ is very small $\Rightarrow v_{th} = subsonic$, $v_{th} = v_{max}$
 $P_{th} = P_B$
که این سرعت بیشترین سرعت است.

case 3) $P_0 - P_B$ is large enough to produce sonic velocity at the throat.

$v_{th} = sonic v$ ($P_{th} = P_b$)
 $v = subsonic$ elsewhere

case 4) $P_0 - P_b > case (3)$

$v_{th} = sonic v$ و $P_{th} > P_b \Rightarrow Choking$
استناد یافتنی