

# www.icivil.ir

پرتال جامع دانشجویان و مهندسين عمران

ارائه كتابها و جزوات رايجان مهندسي عمران

بهترين و برترين مقالات روز عمران

انجمن هاي تفصلي مهندسي عمران

خوشگاه تفصلي مهندسي عمران

## مکانیک سیالات

### عناوین درس:

- خواص سیالات
- استاتیک سیالات
- جریان سیال ( معادلات برنولی، اویلر، نویه- استوکس)
- آنالیز بعدی
- سیال تراکم ناپذیر نیوتنی (جریان در لوله ها)
- تلمبه ها
- تعیین اندازه لوله ها

## نحوه نمره دادن:

- مسائل ..... ۵ نمره
- کوئیز ..... ۱ نمره
- میان ترم ..... ۶ نمره
- پایان ترم ..... ۸ نمره

## فصل اول

### خواص سیالات

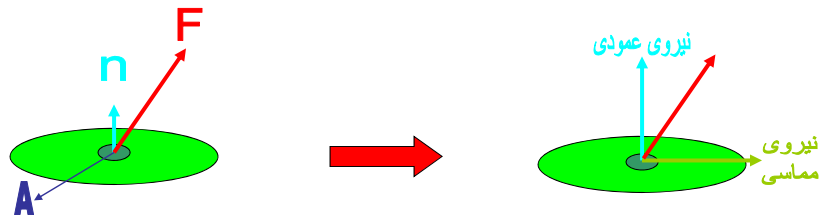
## خواص سیالات:

سیال به ماده ای گفته می شود که در برابر هر نیروی مماسی وارد بر آن تغییر شکل دهد و این تغییر شکل پیوسته باشد.

سیالات به دو دسته گازها و مایعات تقسیم می شوند.

- گازها تراکم پذیرند، اما مایعات عملاً تراکم ناپذیرند.
- مایعات حجم معینی را اشغال می کنند، اما گازها هر حجمی را اشغال می کنند.

## فشار و تنش:

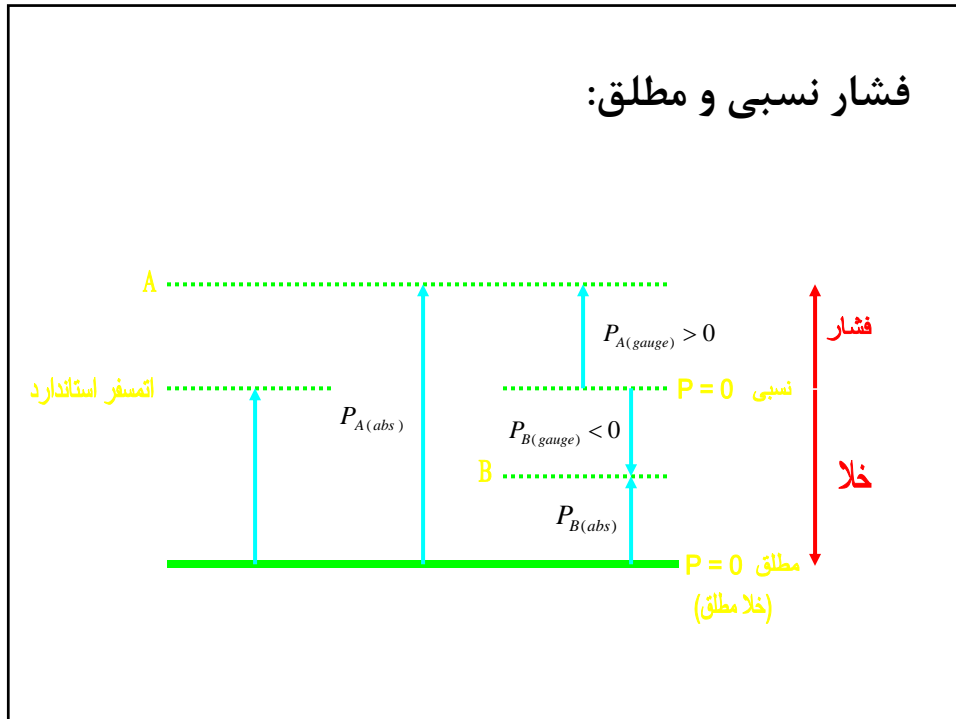


- نیروی عمودی:  $F_n$
- نیروی مماسی:  $F_t$

$$\text{Normal Stress} = \frac{F_n}{A} = P \quad [Pa]$$

$$\text{Shear Stress} = \frac{F_t}{A} = \tau \quad [N/m^2]$$

## فشار نسبی و مطلق:



## چند نکته:

$$P_{abs.} = P_{atm.} + P_{gauge}$$

اگر گفته شود که مثلا 100 mm Hg خلا است، یعنی فشار برابر است با:

$$P_{abs} = 760 - 100 = 660 \text{ mmHg}$$

$$P_{gauge} = -100 \text{ mmHg}$$

لازم به یادآوری است که اتمسفر استاندارد برابر است با:

$$101325 \text{ Pa}$$

$$14.7 \text{ Psi}$$

$$760 \text{ mmHg}$$

$$1.01325 \text{ bar}$$

## چگالی سیال:

$$\rho = \frac{m}{V}, \quad \frac{Kg}{m^3} \text{ or } \frac{lb}{ft^3} \text{ or } \frac{g}{cm^3}$$

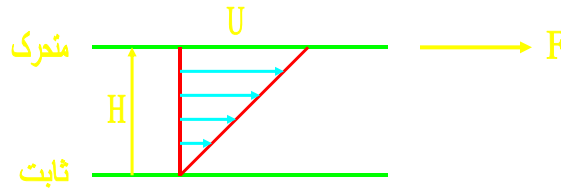
$$S.G. = \frac{\rho}{\rho_{water}} \quad \bullet \text{ برای مایعات}$$

$$S.G. = \frac{\rho_{gas}}{\rho_{air}} = \frac{\frac{PM_{gas}}{RT}}{\frac{PM_{air}}{RT}} = \frac{M_{gas}}{M_{air}} \quad \bullet \text{ برای گازها}$$

## نکاتی در مورد چگالی سیال:

- در مورد مایعات معمولاً از S.G.<sub>20/20</sub> یا S.G.<sub>20/4</sub> برای گزارش کردن استفاده می شود.
- چگالی مایعات معمولاً با افزایش دما کاهش می یابد. به غیر از آب که دارای یک حداکثر چگالی در ۴ درجه سانتیگراد است.

### ویسکوزیته (لزجت یا گرانی) سیال:



$$\frac{F}{A} = \tau \propto \frac{U}{H}$$

$$\text{in general: } \tau \propto \frac{dU}{dy}$$

$$\text{Shear Stress } \leftarrow \tau = -\mu \frac{dU}{dy} \rightarrow \text{Shear Rate}$$

### واحد ویسکوزیته:

$$\frac{N}{m^2} = \mu \frac{m/s}{m} \Rightarrow \text{در سیستم SI}$$

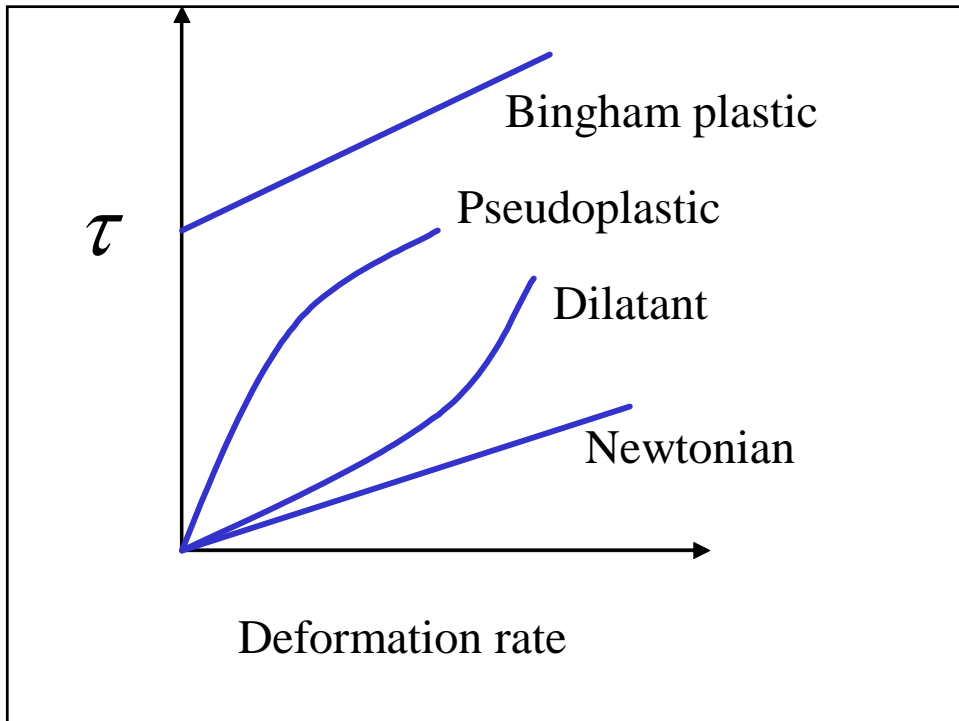
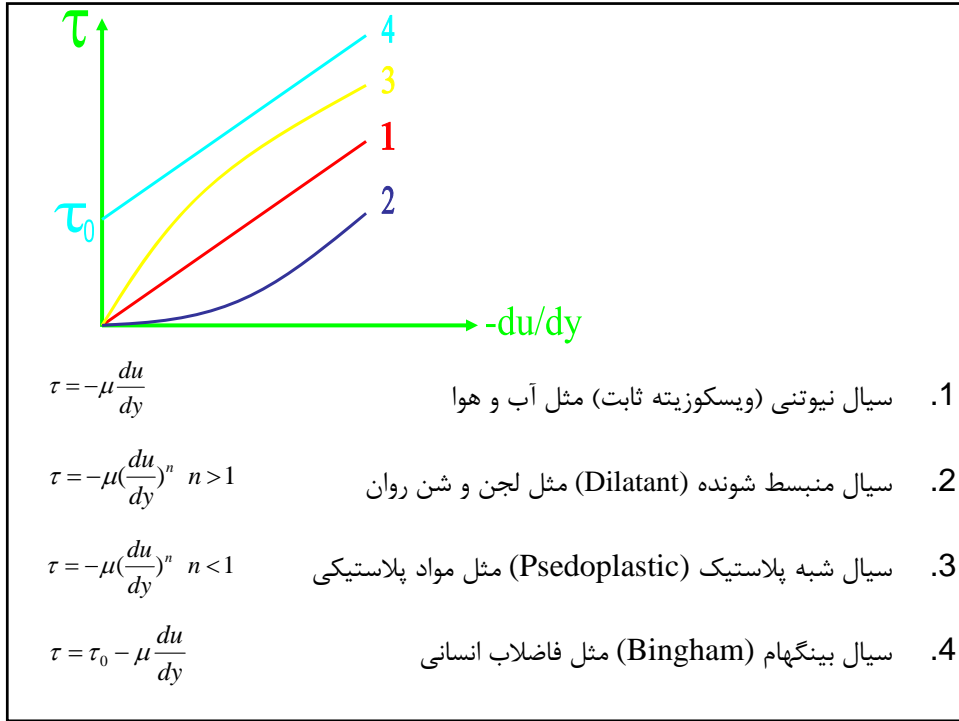
$$\mu = \frac{N \cdot s}{m^2} = Pa \cdot s = \frac{Kg}{m \cdot s}$$

$$\mu = \text{poise (P)} = 100 \text{ cP} \quad \text{در سیستم CGS}$$

$$\mu \text{ for water in } 20^\circ C = 1 \text{ cP}$$

$$1 \text{ cP} = 10^{-3} \text{ Pa} \cdot s \quad \text{or} \quad 1 \text{ P} = 0.1 \text{ Pa} \cdot s$$

$$\mu = \frac{lb \cdot s}{ft^2} \quad \text{در سیستم انگلیسی}$$






## ویسکوزیته ظاهری و سینماتیک:

- ویسکوزیته ظاهری

$$\tau = -\mu \left(\frac{du}{dy}\right)^n = - \left[ \mu \left(\frac{du}{dy}\right)^{n-1} \right] \left(\frac{du}{dy}\right)$$



- ویسکوزیته سینماتیک

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

$$\nu = \frac{\text{Kg} / \text{m.s}}{\text{Kg} / \text{m}^3} = \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

## تغییرات ویسکوزیته با دما و فشار:

- مایعات

$$T \uparrow \Rightarrow \mu \downarrow$$

- گازها

$$T \uparrow \Rightarrow \mu \uparrow$$

$$P \uparrow \Rightarrow \mu \uparrow \longrightarrow \text{ولی در فشارهای پایین، تغییرات محسوس نیست}$$

### تراکم پذیری:

- در بحث ویسکوزیته راجع به تغییرات سیال با تنش برشی صحبت کردیم. تراکم پذیری مربوط می شود به تغییرات سیال بر اثر فشار.
- ضریب تراکم پذیری یا ضریب کشسانی حجمی:

$$K = - \frac{\Delta P}{\Delta V/V} \Big|_T = \frac{\Delta P}{\Delta \rho / \rho} \Big|_T$$

$$= -V \frac{\partial P}{\partial V} \Big|_T = \rho \frac{\partial P}{\partial \rho} \Big|_T$$

واحد آن همان واحد فشار است.

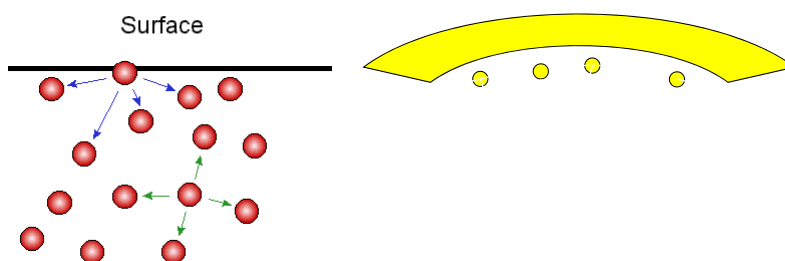
$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$$

• سرعت صوت:

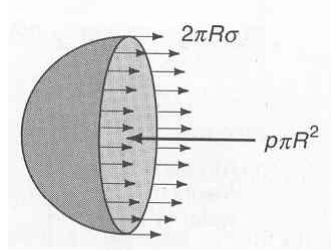
### کشش سطحی:

- کشش سطحی ناشی از وجود نیروی جاذبه بین مولکول های هم شکل است. کشش سطحی کاری است که لازم است تا مصرف شود تا اینکه واحد سطح مایع را از هم بپاشد.

$$\sigma = \frac{N \cdot m}{m^2} = N / m$$



رابطه فشار درون یک قطره با کشش سطحی آن:

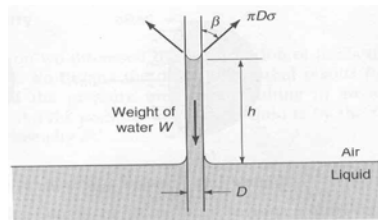


$$P \pi R^2 = \sigma 2\pi R$$

$$\Rightarrow P = \frac{2\sigma}{R}$$

رابطه ارتفاع مایع در لوله موئینه با کشش سطحی:

مؤلفه عمودی نیروها باید با هم برابر باشند:

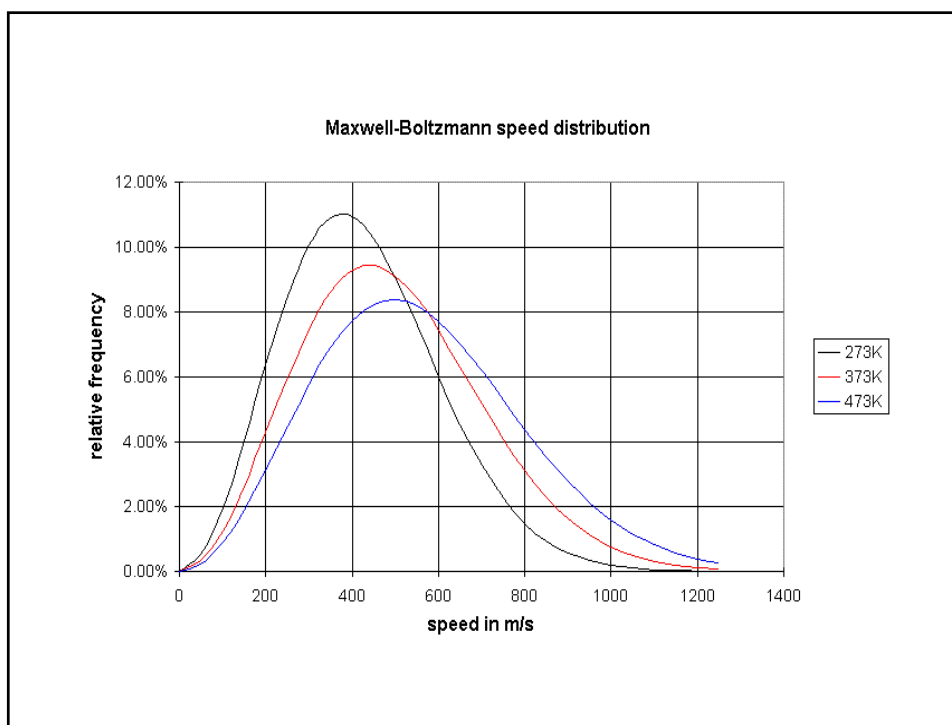
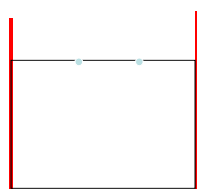


$$\sigma \pi D \cos \beta = \rho g \frac{\pi D^2}{4} h$$

$$h = \frac{4\sigma \cos \beta}{\rho g D}$$

## فشار بخار:

- در سطح مایع، انرژی تعدادی از مولکولها در حدی است که می‌تواند بر نیروی جاذبه بین مولکولها غلبه کند و از سطح مایع خارج شود و به فاز بخار برود. این باعث بوجود آمدن فشار بخار مایعات است.



### نکته:

هر چه دما بیشتر شود، فشار بخار بالا می رود. دلیل این مساله این است که تعداد مولکول هایی که مقدار انرژی بیشتری از انرژی متوسط به دست می آورند، زیاد می شود. وقتی فشار بخار برابر فشار محیط خارجی شود، پدیده جوشش اتفاق می افتد. بر این اساس، نقطه جوش نرمال دمایی است که در آن فشار بخار برابر با فشار 1 atm است.

### خلأزایی Cavitation:

- بطور کلی در جریان سیال ممکن است محلی وجود داشته باشد که فشار در آن نقطه کمتر از فشار بخار آن مایع در آن دما (دمای سیال) باشد. در این حالت حبابهایی از بخار در آن نقطه خاص تولید می شود که به این پدیده خلأ زایی یا cavitation گویند.
- این پدیده می تواند مخرب باشد، به این دلیل که وقتی این حبابها به فشار بالاتر بروند، ناگهان از بین می روند و این باعث ایجاد ضربه فشاری در آن نقطه می شود که می تواند مخرب باشد.

معادله گاز کامل:

$$PV = RT \quad PV = \frac{m}{M} RT$$

or

$$PV = nRT \quad \rho = \frac{m}{V} = \frac{PM}{RT}$$

خواص حرارتی:

$$C_p = \left. \frac{\partial h}{\partial T} \right|_p \Rightarrow \Delta h = \int C_p dT$$

$$C_v = \left. \frac{\partial U}{\partial T} \right|_v \Rightarrow \Delta U = \int C_v dT$$

$$k = C_p / C_v$$

- $k = 1.67$ : گاز یک مولکولی
- $k = 1.4$ : گاز دو مولکولی
- $k = 1.33$ : گاز سه مولکولی یا بیشتر

## فصل دوم

### ایستایی سیال

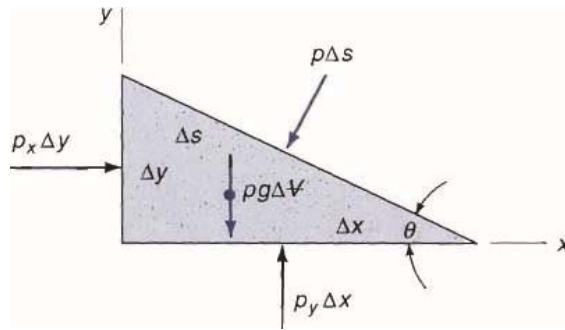
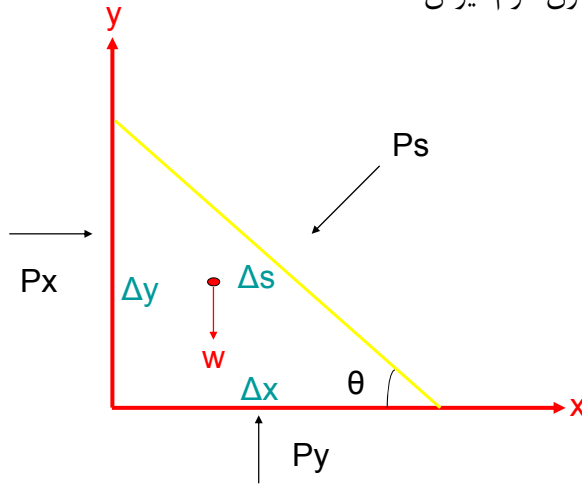
### ایستایی سیال

در این حالت سیال ساکن است و بنابراین گرادیان سرعت صفر است. در نتیجه تنش برشی صفر است و فقط تنش عمودی را که همان فشار است، داریم.

در اینجا کل سیال با هم حرکت می کند، ولی لایه ها نسبت به هم ساکن هستند.

در یک سیال ساکن فشار در همه جهات مساوی است.

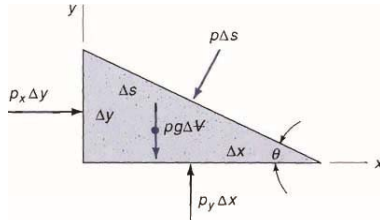
اثبات با استفاده از قانون دوم نیوتن:



$$\sum F_x = ma_x \Rightarrow p_x \Delta y - p_s \Delta s \sin \theta = \rho \frac{\Delta x \Delta y}{2} a_x$$

$$\sum F_y = ma_y \Rightarrow p_y \Delta x - p_s \Delta s \cos \theta - \rho g \frac{\Delta x \Delta y}{2} = \rho \frac{\Delta x \Delta y}{2} a_y$$





$$\Delta s \sin \theta = \Delta y,$$

$$\Delta s \cos \theta = \Delta x$$

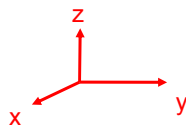
$$\Rightarrow p_x - p_s = \frac{1}{2} \rho a_x \Delta x$$

$$p_y - p_s = \frac{1}{2} \rho (a_y + g) \Delta y$$

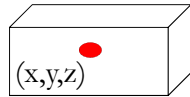
$$\Delta x, \Delta y \rightarrow 0 \Rightarrow p_x = p_y = p_s = p$$

می دانیم:  $\theta$  هر زاویه ای می تواند باشد.

## معادله اصلی سیال ساکن



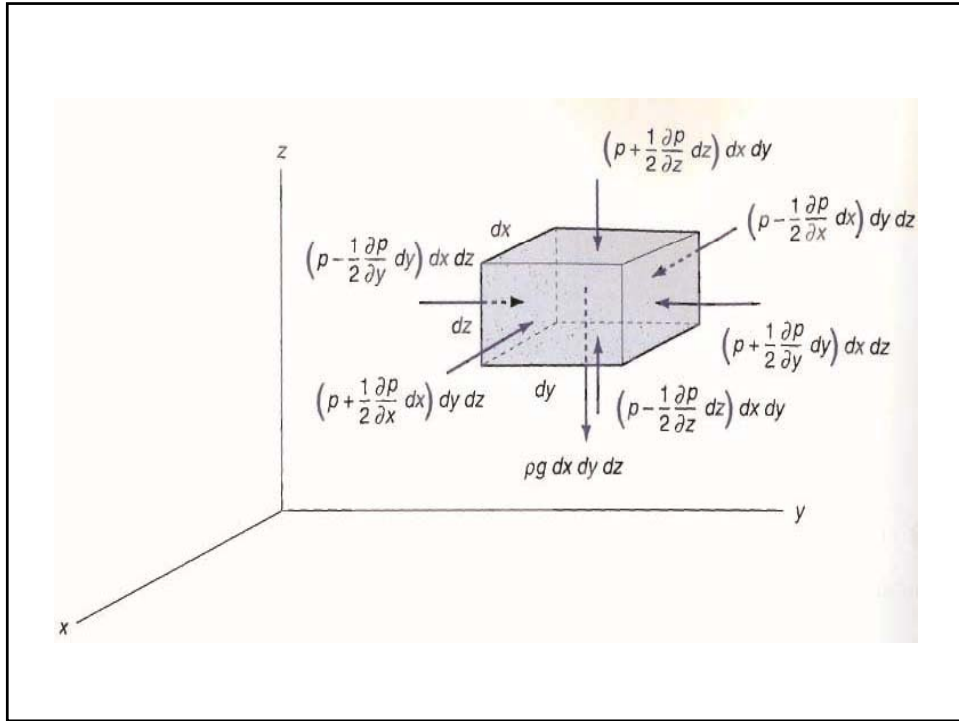
المان:  $\Delta x \times \Delta y \times \Delta z$



$p =$  فشار در مرکز

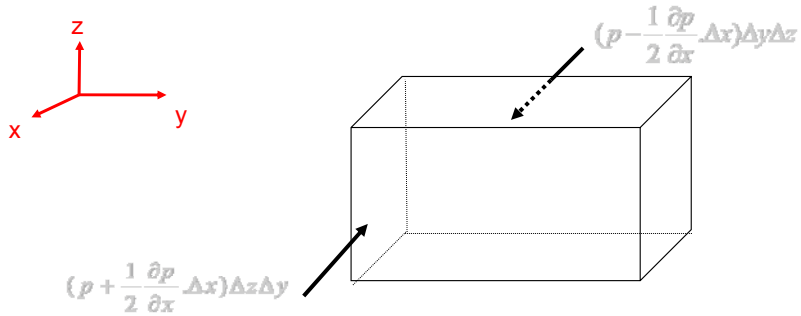
$$\Rightarrow p \Big|_{x+\Delta x/2} = p + \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{2}$$

و به همین ترتیب در مورد بقیه جهت ها هم می توان عمل کرد.



### معادله اصلی سیال ساکن

قانون دوم نیوتن  $\sum F = ma$



در جهت X:

$$\left(p - \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \Delta x\right) \Delta y \Delta z - \left(p + \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \Delta x\right) \Delta y \Delta z$$

$$= (\rho \Delta x \Delta y \Delta z) a_x$$

$$\text{در جهت } y: (p - \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial y} \cdot \Delta y) \Delta x \Delta z - (p + \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial y} \cdot \Delta y) \Delta x \Delta z$$

$$= (\rho \Delta x \Delta y \Delta z) a_y$$

$$\text{در جهت } z: (p - \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial z} \cdot \Delta z) \Delta x \Delta y - (p + \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial z} \cdot \Delta z) \Delta x \Delta y$$

$$- (\rho \Delta x \Delta y \Delta z) g = (\rho \Delta x \Delta y \Delta z) a_z$$

با توجه به عبارت های حاصل از موازنه در سه جهت داریم:

$$\Rightarrow -\frac{\partial p}{\partial x} = \rho a_x$$

$$-\frac{\partial p}{\partial y} = \rho a_y$$

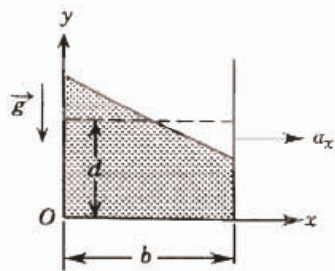
$$-\frac{\partial p}{\partial z} = \rho(a_z + g)$$

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz$$

$$\Rightarrow dp = -\rho a_x dx - \rho a_y dy - \rho(a_z + g) dz$$

### مثال:

مخزن شکل را در نظر بگیرید. چقدر آب باید در مخزن ریخته شود تا مطمئن شویم که در هنگام حرکت مخزن، آب از آن بیرون نمی ریزد؟



$$V = 300\text{mm} \times 600\text{mm} \times 300\text{mm}$$

فرض:

شتاب مثبت و منفی خطی مخزن در حال حرکت، تاثیر اصلی را بر سطح آب دارد. از حرکت ذرات آب نسبت به هم صرفنظر می کنیم. در این صورت مساله تبدیل به تعیین شتاب خطی روی سطح آزاد می شود.

به این ترتیب، خواسته های مساله به قرار زیر خواهند بود:

- شکل سطح آزاد تحت تاثیر شتاب ثابت در جهت حرکت  $x$
- عمق مجاز آب  $d$  برای جلوگیری از سرریز کردن به صورت تابعی از شتاب و وضعیت مخزن
- وضعیت بهینه مخزن و عمق مجاز

از آنجا که فشار تابع  $z$  نیست:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

همچنین:

$$g_x = 0, \quad g_y = -g, \quad g_z = 0$$

$$a_y = a_z = 0$$

معادله های مولفه ای عبارتند از:

مشقی پاره ای به این معناست  
که متغیرهای مستقل دیگر در  
دیفرانسیل گیری ثابت نگه  
داشته می شوند.

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho a_x$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g$$

اکنون مساله این است که عبارت  $p=p(x,y)$  را بیابیم. با این تابع خواهیم توانست معادله سطح آزاد را پیدا کنیم. اما راه دیگری نیز وجود دارد!

از آنجا که فشار تابع  $x$  و  $y$  است، تفاضل فشار بین دو نقطه با فاصله  $\Delta x$

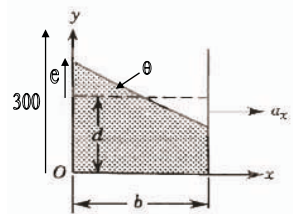
$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy \quad \text{و } \Delta y \text{ به صورت زیر خواهد بود:}$$

سطح آزاد یک خط فشار ثابت است. بنابراین در امتداد سطح آزاد  $p=0$  و

$$dp=0 \quad \text{در نتیجه}$$

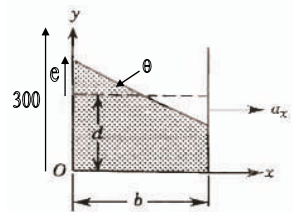
$$0 = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy = -\rho a_x dx - \rho g dy$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right)_{Surface} = -\frac{a_x}{g} \quad \text{بنابراین}$$



$$e = \frac{b}{2} \tan \theta = \frac{b}{2} \left( -\frac{dy}{dx} \right)_{Surface} = \frac{b a_x}{2 g} \quad \text{for: } \left\{ d \leq \frac{b}{2} \right\}$$

از آنجا که می خواهیم برای  $a_x$  داده شده  $e$  کوچکترین مقدار خود را داشته باشد، ضلع  $b$  که در جهت حرکت است باید تا حد امکان کوچک باشد. باید ضلع بزرگتر را در جهت عمود بر حرکت بگیریم، یعنی  $b=300\text{mm}$  انتخاب کنیم.



$$b = 300\text{mm} \Rightarrow e = 150 \frac{a_x}{g} \text{mm}$$

حداکثر مقدار مجاز ارتفاع آب:  $e = 300 - d$

$$300 - d = 150 \frac{a_x}{g}, \quad d_{\max} = 300 - 150 \frac{a_x}{g} \quad \text{بنابراین:}$$

اگر حداثر  $a_x$  را  $g/3$  بگیریم، در این صورت  $d=200\text{mm}$  عمق مجاز است. برای اطمینان بیشتر،  $d=150\text{mm}$  را انتخاب می کنیم.

یادآوری می شود که در این مساله شتاب را ثابت فرض کردیم.

این مساله علاوه بر نشان دادن کاربرد معادله

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz$$

مشخص کرد که تمام مسائل نه به وضوح تعریف می شوند و نه دارای جواب یکتا هستند.

## حالت خاص:

سیال ساکن

$$a_x = a_y = a_z = 0 \Rightarrow dp = -\rho g dz$$

یعنی تغییر فشار در جهات X و Y نداریم و تغییرات فقط در جهت شتاب جاذبه است.

## حالت خاص:

- اگر فرض کنیم که چگالی ثابت است می توان انتگرال گرفت:

$$\Delta p = -\rho g \Delta z$$

$$\text{or } p + \rho g z = \text{cte.}$$

$$\text{or } \frac{p}{\rho g} + z = \text{cte.}$$

را بلندای پیزومتریک ( piezometric head ) می گویند.  $\frac{p}{\rho g} + z$

$$\text{if } p=0 \text{ in } h=0 \Rightarrow p = \rho gh$$

در جو :

$$T(z) = T_0 - \alpha z$$

$$\alpha = 0.0065 \text{ K/m}$$

$$p = \rho RT \Rightarrow dp = -\frac{\rho M}{RT} g dz$$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{gM}{R} \cdot \frac{dz}{T_0 - \alpha z} \Rightarrow \int_{p_{atm}}^p \frac{dp}{p} = -\frac{gM}{R} \int_0^z \frac{dz}{T_0 - \alpha z}$$

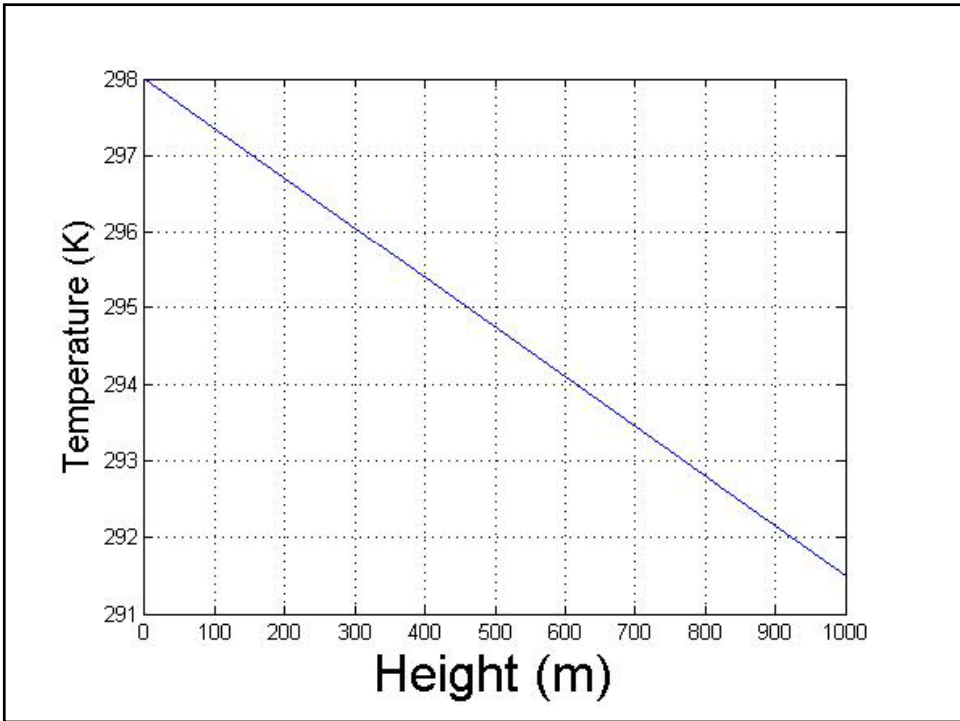
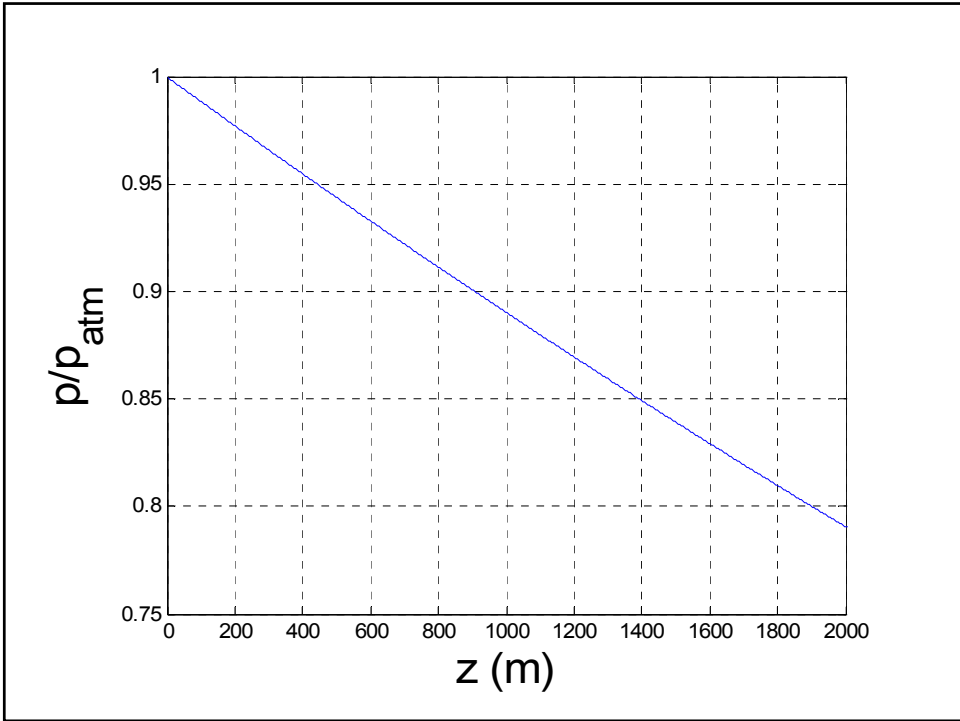
$$\Rightarrow \ln \frac{p}{p_{atm}} = \frac{gM}{\alpha R} \ln \frac{T_0 - \alpha z}{T_0}$$

$$\Rightarrow p = p_{atm} \left( \frac{T_0 - \alpha z}{T_0} \right)^{gM/\alpha R}$$

$$\text{if } z = 10 \text{ m} \Rightarrow \frac{P}{P_{atm}} = 0.999$$

پس در ارتفاع های معمولی اثر تغییر فشار بر دما قابل صرف نظر کردن است.





در صورتی که دما ثابت باشد (مثل استراتوسفر) :

$$dp = -\rho g dz$$

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0} \Rightarrow \rho = \frac{p}{p_0} \rho_0$$

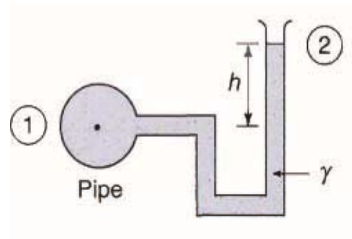
$$\frac{dp}{p} = -\frac{\rho_0}{p_0} g dz \Rightarrow \int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = -\frac{\rho_0}{p_0} g \int_{z_0}^z dz$$

$$\ln p \Big|_{p_0}^p = -\frac{\rho_0}{p_0} g z \Big|_{z_0}^z \Rightarrow \ln \left( \frac{p}{p_0} \right) = -\frac{\rho_0}{p_0} g (z - z_0)$$

$$\Rightarrow p = p_0 \exp \left( -\frac{\rho_0 g (z - z_0)}{p_0} \right)$$

## مانومتر

مانومتر دستگاهی است که از طریق ارتفاع مایع فشار را اندازه می‌گیرد.



$$p_1 + \rho g z_1 = p_2 + \rho g z_2$$

$$p_1 - p_2 = \rho g (z_2 - z_1)$$

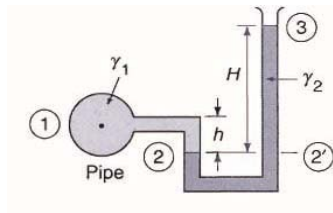
$$\Delta p = \rho g h$$

$$\text{if } p_2 = 0 \Rightarrow p_1 = \rho g h$$

## حالت فشار بالا:

وقتی فشار زیاد باشد بهتر است که از یک مایع با چگالی بالا استفاده کرد.

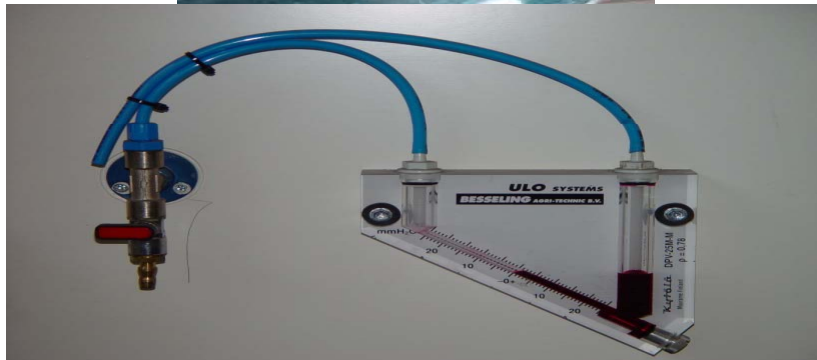
$$\rho_{Hg} = 13.6 \rho_{H_2O} \quad \text{مثال:}$$

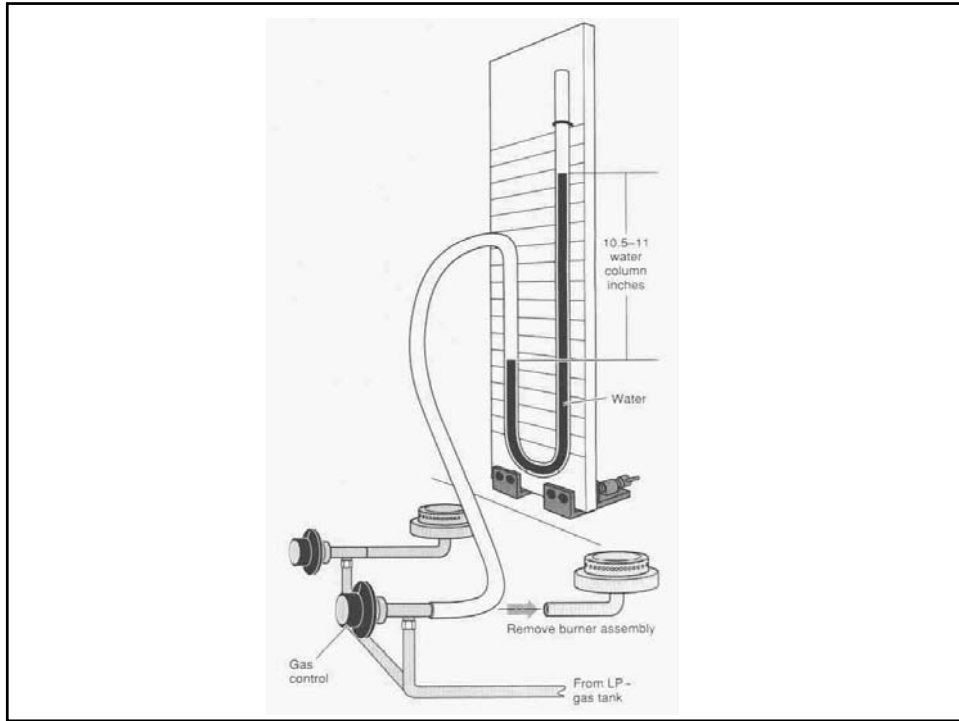


$$p_1 - p_2 = \rho_1 g (z_2 - z_1)$$

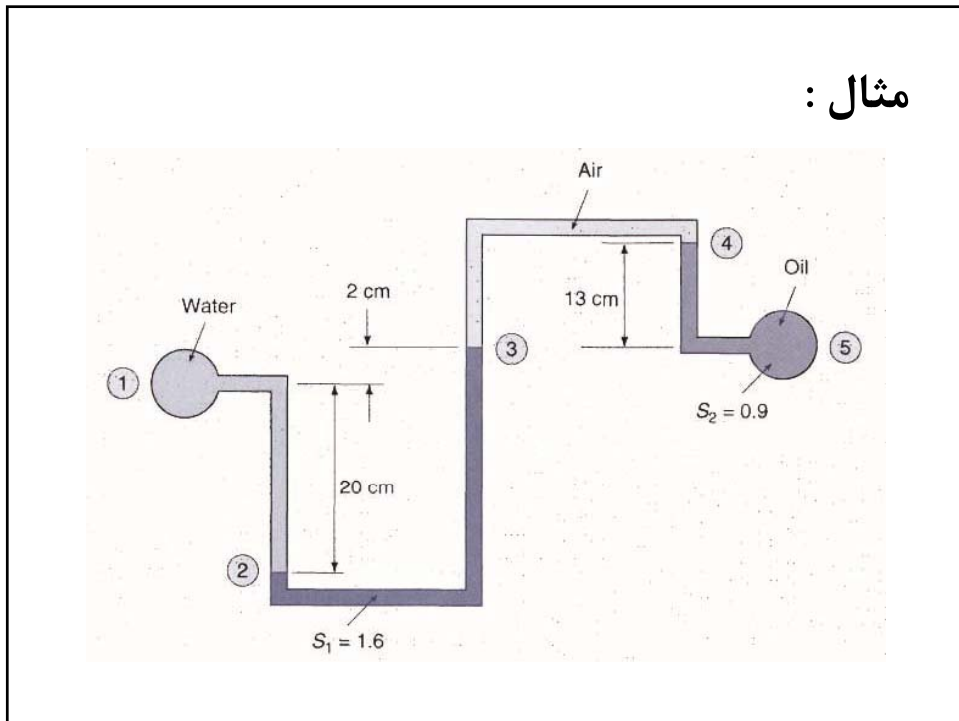
$$p_2 - p_3 = \rho_2 g (z_3 - z_2)$$

$$p_1 - p_3 = \rho_1 g (z_2 - z_1) + \rho_2 g (z_3 - z_2) \\ = -\rho_1 g h + \rho_2 g H$$





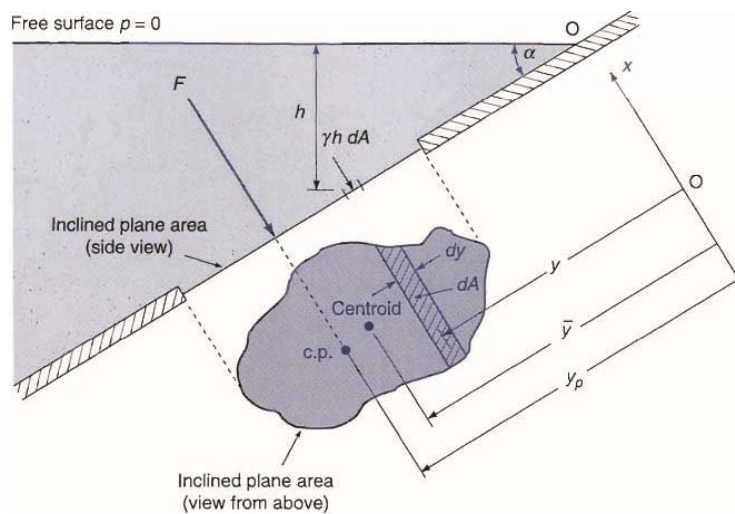
مثال :



حل :

$$\begin{aligned}
 P_1 - P_5 &= (P_1 - P_2) + (P_2 - P_3) + (P_3 - P_4) + (P_4 - P_5) \\
 &= \rho_w g(z_2 - z_1) + 1.6 \rho_w g(z_3 - z_2) + \\
 &\quad 0 \times \rho_w g(z_4 - z_3) + 0.9 \rho_w g(z_5 - z_4) \\
 &= 1000 \times 9.81(-0.2) + 1.6 \times 1000 \times 9.81 \times 0.22 \\
 &\quad + 0.9 \times 1000 \times 9.81 \times (-0.13) \\
 &= 343 \text{ Pa}
 \end{aligned}$$

## نیروی وارد بر سطوح



با توجه به شکل داریم:

$$F = \int_A P dA$$

$$P = \rho g h = \rho g y \sin \alpha$$

$$F = \rho g \sin \alpha \int_A y dA$$

مرکز جرم (centroid):  $\bar{y} = \frac{1}{A} \int_A y dA$   
 $\Rightarrow F = \rho g \sin \alpha \cdot A \bar{y} = \rho g \bar{h} A = P_c A$

## نیروی شناوری

قانون ارشمیدس: هر جسمی در سیالی قرار گیرد به اندازه وزن سیال هم حجم خود سبک می شود.

(a)                      (b)                      (c)

با توجه به شکل داریم:

$$\sum F = F_2 - F_1 - F_w = F_B$$

$$F_B = (\rho g h_2)A - (\rho g h_1)A - \rho g V_w$$

$$= \rho g [A(h_2 - h_1) - V_w]$$

$$= \rho g V$$

وزن ظاهری اگر جسم کاملاً مستغرق باشد:

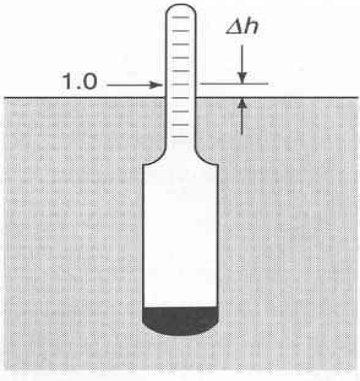
$$W - F_B = \rho_s g V - \rho_L g V = (\rho_s - \rho_L)g V$$

## هیدرومتر

اندازه گیری چگالی با استفاده از قانون ارشمیدس:

(a) (b)

**Figure 2.14** Hydrometer: (a) in water; (b) in an unknown liquid.



وزن هیدرومتر      سطح مقطع دستگاه

$$W = \rho_w gV$$

$$W = \rho_x g (V - A \Delta h)$$

$$\Rightarrow \Delta h = \frac{V}{A} \left( 1 - \frac{\rho_w}{\rho_x} \right)$$

$$= \frac{V}{A} \left( 1 - \frac{1}{SG} \right)$$

$$\text{or } S.G. = \left( 1 - \frac{A}{V} \Delta h \right)^{-1}$$

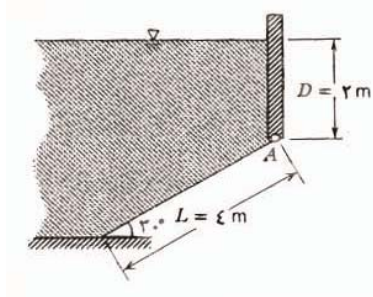
این وسیله برای اندازه گیری چگالی یا غلظت آب باتری ضد یخ در رادیاتور و محلول ها استفاده می شود.



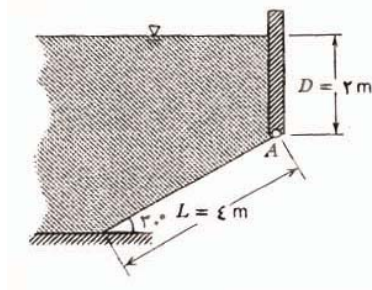


مثال: نیروی برآیند وارد بر سطح غوطه ور مستوی شیب دار

سطح شیب دار نشان داده شده، که در امتداد لبه A لولا شده است، به عرض 5 cm است. نیروی برآیند اعمالی از آب و هوا بر سطح شیب دار را بیابید.



حل:



نیروی برآیند اعمال شده  
از آب و هوا به دریچه  $\vec{F}_R$

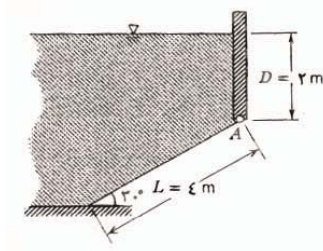
برای اینکه نیرو را به طور کامل تعیین کنیم، باید موارد زیر را مشخص نماییم:

- مقدار
- جهت
- خط حامل نیروی برآیند

## معادله های اصلی:

$$\vec{F}_R = -\int p d\vec{A} \quad \frac{dp}{dh} = \rho g$$

از آنجا که فشار جو بر وجه پایینی دریچه اثر می کند، فشار خالص یا فشار مطلق ناشی از اثر ترکیبی هر دو سیال است.



در یچه را که در امتداد A لولا شده است و در صفحه XY قرار دارد، با مختصات نشان داده شده در نظر بگیرید.

$$\vec{F}_R = -\int p d\vec{A} = -\int p w dy \hat{k} \quad (d\vec{A} = w dy \hat{k})$$

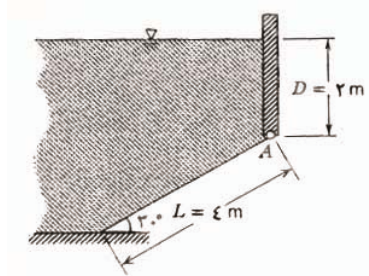
اکنون باید  $p$  را به صورت تابعی از  $y$  بیابیم تا انتگرال را محاسبه کنیم. از رابطه اصلی فشار با ارتفاع:

$$\frac{dp}{dh} = \rho g \Rightarrow dp = \rho g dh \quad , \quad \int_{p_a}^p dp = \int_0^h \rho g dh \quad , \quad \rho = cte$$

بنابراین  $p=p(h)$  به تابع  $p=p(y)$  نیاز داریم:

$$p = p_a + \rho g h$$

با توجه به شکل:



$$h = D + y \sin 30^\circ$$

از آنجا که فشار مطلق است،  $P_a=0$ . در نتیجه خواهیم داشت:

$$p = \rho g (D + y \sin 30^\circ)$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} \vec{F}_R &= - \int_A p d\vec{A} = - \int_0^L \rho g (D + y \sin 30^\circ) w dy \hat{k} \\ &= - \rho g w \left[ Dy + \frac{y^2}{2} \sin 30^\circ \right]_0^L \hat{k} = - \rho g w \left[ DL + \frac{L^2}{2} \sin 30^\circ \right] \hat{k} \\ &= - 999 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 5\text{m} \left[ 2\text{m} \times 4\text{m} + \frac{16\text{m}^2}{2} \times \frac{1}{2} \right] \frac{\text{N} \cdot \text{s}^2}{\text{kg} \cdot \text{m}} \hat{k} \\ \Rightarrow \vec{F}_R &= -588 \hat{k} \text{ kN} \end{aligned}$$

برای یافتن خط حامل نیروی برآیند، می دانیم که این خط به صورتی است که گشتاور نیروی برآیند نسبت به هر محور دلخواه با گشتاور نیروی توزیعی نسبت به همان محور مساوی است. با محاسبه گشتاور نسبت به محور x که از نقطه  $A(0,0,0)$  می گذرد، داریم:

$$F_R y' = \int_A y p dA$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{F_R} \int_A y p dA = \frac{1}{F_R} \int_0^L y p w dy = \frac{\rho g w}{F_R} \int_0^L y (D + y \sin 30^\circ) dy \\ &= \frac{\rho g w}{F_R} \left[ \frac{Dy^2}{2} + \frac{y^3}{3} \sin 30^\circ \right]_0^L = \frac{\rho g w}{F_R} \left[ \frac{DL^2}{2} + \frac{L^3}{3} \sin 30^\circ \right] \\ &= 999 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times \frac{5\text{m}}{5.88 \times 10^5 \text{N}} \left[ \frac{2\text{m} \times 16\text{m}^2}{2} + \frac{64\text{m}^3}{3} \times \frac{1}{2} \right] \frac{\text{N} \cdot \text{s}^2}{\text{kg} \cdot \text{m}} \\ \Rightarrow y' &= 2.22\text{m} \end{aligned}$$

همچنین از محاسبه گشتاور نسبت به محور  $y$  که از نقطه  $A$  می گذرد، داریم:

$$x' = \frac{1}{F_R} \int_A x p dA$$

برای محاسبه نیروی گشتاور توزیعی (سمت راست)، برای  $x$  باید از مرکز جز سطح استفاده کرد. از آنجا که جز سطح با عرض ثابت است و

$$\vec{r}' = 2.5\hat{i} + 2.22\hat{j} \text{ m}$$

نتیجه می شود:

$$x' = \frac{1}{F_R} \int_A \frac{w}{2} p dA = \frac{w}{2F_R} \int_A p dA = \frac{w}{2} = 2.5m$$

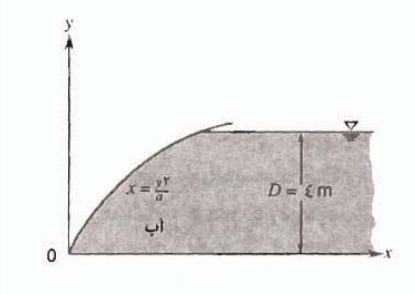
### مثال:

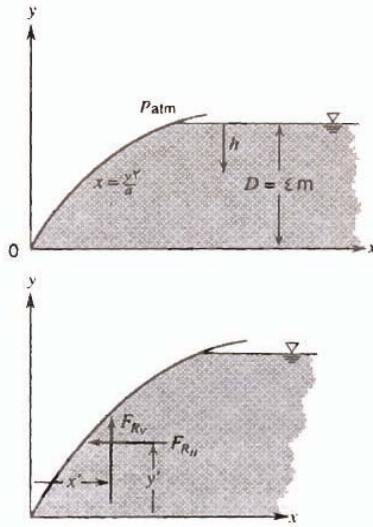
دریچه نشان داده شده دارای عرض ثابت  $5m$  است.

$$x = \frac{y^2}{a}$$

معادله سطح عبارت است از:

که در آن  $a=4m$ ، عمق آب در سمت راست دریچه  $D=4m$  است. مولفه های افقی و عمودی نیروی برآیند ناشی از فشارهای سیال و خط حامل هر یک از آنها را بیابید.





با توجه شکل، خواسته مساله  $F_{RH}$  و  $F_{RV}$  و خط حامل هر یک از آنهاست.

معادله های اصلی:

$$\vec{F}_R = -\int p d\vec{A} = \frac{dp}{dh} = \rho g$$

$$F_{RH} = \int_0^D p w dy \quad F_{RV} = \int_0^{\frac{D^2}{a}} p w dx$$

برای انتگرال گیری، به عبارت های  $p(x)$  و  $p(y)$  در امتداد سطح دریچه نیاز داریم:

$$\frac{dp}{dh} = \rho g \Rightarrow dp = \rho g dh$$

$$\int_{p_a}^p dp = \int_0^h \rho g dh$$

اگر چگالی ثابت باشد، خواهیم داشت:

$$p = p_a + \rho g h$$

از آنجا که فشار جو بر بالای دریچه و بر سطح آزاد مایع اثر می کند، نیروی خالص ناشی از فشار جو وجود ندارد. به این ترتیب، برای تعیین نیروی ناشی از سیالات، قرار می دهیم

$$p = \rho gh$$

اکنون عبارت های  $h=h(y)$  و  $h=h(x)$  را در امتداد سطح دریچه لازم داریم. در امتداد سطح دریچه،

$$h = D - y$$

از آنجا که معادله سطح دریچه عبارت است از:

$$x = \frac{y^2}{a}$$

بنابراین در امتداد دریچه داریم:

$$y = \sqrt{a} x^{\frac{1}{2}}$$

از این رو  $h$  را به صورت مقابل می توان نوشت:

$$h = D - \sqrt{a} x^{\frac{1}{2}}$$

با جایگذاری معادله های مناسب  $h$  در عبارتهای  $F_{RH}$  و  $F_{RV}$  داریم:

$$\begin{aligned} F_{RH} &= \int_0^D p w dy = \int_0^D \rho gh w dy = \rho g w \int_0^D h dy \\ &= \rho g w \int_0^D (D - y) dy \\ &= \rho g w \left[ Dy - \frac{y^2}{2} \right]_0^D = \rho g w \left[ D^2 - \frac{D^2}{2} \right] = \frac{\rho g w D^2}{2} \end{aligned}$$

$$F_{RH} = 999 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 5\text{m} \times \frac{4^2 \text{m}^2}{2} \times \frac{\text{N} \cdot \text{s}^2}{\text{kg} \cdot \text{m}} = 392 \text{ kN}$$

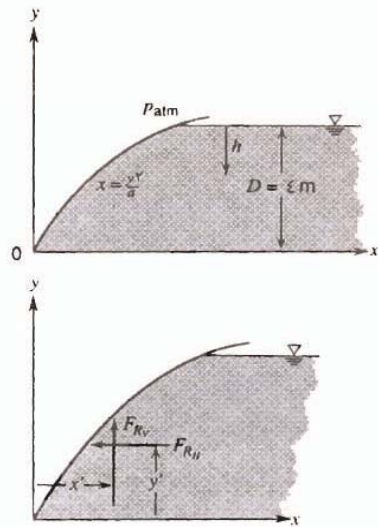
$$F_{RV} = \int_0^{\frac{D^2}{a}} p w dx = \int_0^{\frac{D^2}{a}} \rho gh w dx = \rho g w \int_0^{\frac{D^2}{a}} h dx$$

$$= \rho g w \int_0^{\frac{D^2}{a}} (D - \sqrt{a} x^{\frac{1}{2}}) dx$$

$$= \rho g w \left[ Dx - \frac{2}{3} \sqrt{a} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^{\frac{D^2}{a}} = \rho g w \left[ \frac{D^3}{a} - \frac{2}{3} \sqrt{a} \frac{D^3}{a^{\frac{1}{2}}} \right] = \frac{\rho g w D^3}{3a}$$

$$F_{RV} = 999 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 5\text{m} \times \frac{4^3 \text{m}^3}{3} \times \frac{1}{4\text{m}} \times \frac{\text{N} \cdot \text{s}^2}{\text{kg} \cdot \text{m}} = 261 \text{ kN}$$

برای یافتن خط حامل  $F_{RH}$ ، گشتاور  $F_{RH}$  نسبت به محور Z باید با مجموع گشتاورهای  $dF_H$  نسبت به همان محور مساوی باشد.



$$y'F_{RH} = \int_{A_x} ypdA_x \quad , \quad y' = \frac{1}{F_{RH}} \int_{A_x} ypdA_x$$

$$y' = \frac{1}{F_{RH}} \int_0^D ypw dy = \frac{1}{F_{RH}} \int_0^D y\rho gwh dy$$

$$= \frac{\rho gw}{F_{RH}} \int_0^D y(D-y) dy = \frac{\rho gw}{F_{RH}} \left[ \frac{Dy^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right]_0^D$$

$$y' = \frac{\rho gw D^3}{6F_{RH}} = \frac{\rho gw D^3}{6} \left[ \frac{2}{\rho gw D^2} \right] = \frac{D}{3} = \frac{4}{3} m$$

$$y' = 1.33m$$

برای یافتن خط حامل  $F_{RV}$ ، گشتاور  $F_{RV}$  نسبت به محور Z باید با مجموع گشتاورهای  $dF_V$  نسبت به همان محور مساوی باشد.

$$x'F_{RV} = \int_{A_y} xpdA_x \quad , \quad x' = \frac{1}{F_{RV}} \int_{A_y} xpdA_x$$

$$x' = \frac{1}{F_{RV}} \int_0^a xpwdx = \frac{1}{F_{RV}} \int_0^a x\rho gwh dx$$

$$= \frac{\rho gw}{F_{RV}} \int_0^a x(D - \sqrt{a}x^{\frac{1}{2}}) dx$$

$$= \frac{\rho gw}{F_{RV}} \left[ \frac{Dx^2}{2} - \frac{2}{5}\sqrt{a}x^{\frac{5}{2}} \right]_0^a = \frac{\rho gw}{F_{RV}} \left[ \frac{D^3}{2a^2} - \frac{2}{5}\sqrt{a} \frac{x^{\frac{5}{2}}}{a^{\frac{5}{2}}} \right]$$

$$= \frac{\rho gw D^3}{10F_{RV} a^2} = \frac{\rho gw D^3}{10a^2} \left[ \frac{3a}{\rho gw D^3} \right]$$

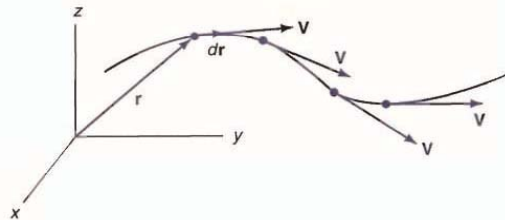
$$x' = \frac{3D^2}{10a} = \frac{3}{10} \times 4^2 m^2 \times \frac{1}{4m} = 1.2m$$

## فصل سوم

### جریان سیال

#### سیستم لاگرانژی:

یک توده کوچک از سیال در نظر گرفته می شود و ما حرکت آن را دنبال می کنیم.



این توده می تواند تغییر شکل دهد و ما آن را بصورت مجموعه ای از ذرات در نظر می گیریم.

در هر نقطه سرعت، مکان و شتاب خاص خودش را دارد و فقط تابع زمان است.



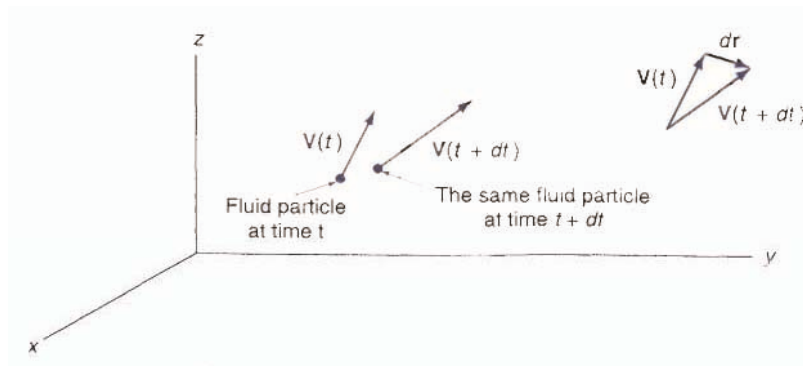
## چند اشاره:

این روش را می‌توان برای تمام ذرات سیال در نظر گرفت و اثر ذرات مختلف سیال را بر یکدیگر دید.

اشکال این روش این است که زمانی که تعداد زیادی ذره را بخواهیم در نظر بگیریم کار بسیار زیادی می‌برد.

## روش اویلری:

در این روش یک نقطه را در نظر می‌گیریم و بعد سیال را مشاهده می‌کنیم که چطور از آن نقطه عبور می‌کند و سرعتش تغییر می‌کند.



بنابراین سرعت و شتاب، تابع مکان و زمان هر دو خواهند بود.

## تفاوت دو روش:

در روش لاگرانژی دستگاه مختصات بر ذره سوار است و با آن حرکت می‌کند ولی در روش اویلری دستگاه مختصات ثابت است و این ذرات هستند که نسبت به مبدأ مختصات حرکت می‌کنند.

## مثال:

برای مشاهده مشکلات ترافیکی می‌توان عده ای را استخدام کرد که سوار بر ماشین در شهر بگردند و مشکلات را گزارش کنند (لاگرانژی)، یا سر چهار راههایی بایستند و مشکلات را مشاهده کنند (اویلری)، ولی هر دو به یک نتیجه خواهند رسید.

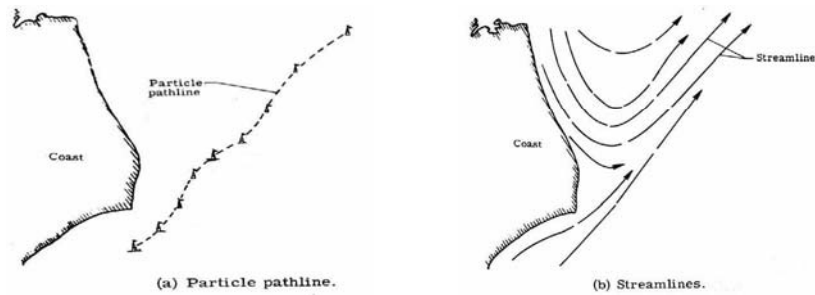
روش اویلری ساده تر است و منجر به معادلات ساده تری در حرکت سیالات می‌شوند. بنابراین ما از روش اویلری استفاده می‌کنیم. در هر حال هر دو قابل تبدیل شدن به یکدیگر هستند و در تفسیر جریان به یک نتیجه خواهند رسید.

### میدان جریان (Flow Field) :

میدان جریان ناحیه ای از جریان است (در روش اویلری) که جریان در آن مطالعه می شود.

### خط گذر (Pathline) :

خط گذر مکان نقاطی است که یک ذره همراه با جریان از این نقاط عبور می کند خط گذر سابقه مکان ذرات را به ما می دهد.



### خط جریان (Streamline) :

مکان نقاطی را که ذرات در آنجا بوده اند و مماس بر بردار سرعت در هر نقطه است.

$$v \times dr = 0$$

$$v = 2xi - 4yj$$

مثال:

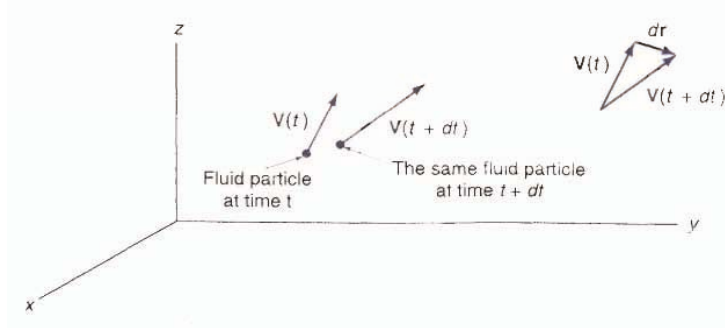
$$v \times dr = 0 \Rightarrow (2xi - 4yj) \times (dxi + dyj) = 0$$

$$\Rightarrow (2xdy + 4ydx)k = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} = -2 \frac{dx}{x} \Rightarrow x^2 y = c$$

در جریان پایا (Steady flows)، خط گذر و خط جریان بر هم منطبق هستند. بنابراین ما فقط از اصطلاح خط جریان استفاده می کنیم.

شتاب :



$$a = \frac{dv}{dt}$$

$$v = v_x i + v_y j + v_z k$$

با توجه به تابعیت بردار سرعت نسبت به زمان و هر سه بعد مکان داریم:

$$V = V(x, y, z, t)$$

$$\Rightarrow dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz + \frac{\partial V}{\partial t} dt$$

$$\Rightarrow a = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} + \frac{\partial V}{\partial t}$$

$$= v_x \frac{\partial V}{\partial x} + v_y \frac{\partial V}{\partial y} + v_z \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial t}$$

مولفه های شتاب در سه جهت:

$$a_x = \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z}$$

$$a_y = \frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z}$$

$$a_z = \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

اغلب برای راحتی کار از مشتق کلی استفاده می شود.

$$a = \frac{DV}{Dt}$$

$$\frac{D}{Dt} = V_x \frac{\partial}{\partial x} + V_y \frac{\partial}{\partial y} + V_z \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t}$$

مشتق کلی در حقیقت رابطه بین سیستم لاگرانژی (فقط تابع  $t$ ) و سیستم اویلری (تابع  $t, z, y, x$ ) است.

در مختصات استوانه ای:

$$\frac{D}{Dt} = V_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t}$$

$$a_r = \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{V_\theta^2}{r}$$

$$a_\theta = \frac{\partial V_\theta}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_\theta}{\partial z} + \frac{V_r V_\theta}{r}$$

$$a_z = \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

در مختصات کروی :

$$\frac{D}{Dt} = V_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{V_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\partial}{\partial t}$$

$$a_r = \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + \frac{V_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial V_r}{\partial \phi} - \frac{V_\theta^2 + V_\phi^2}{r}$$

$$a_\theta = \frac{\partial V_\theta}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial V_\theta}{\partial \phi} - \frac{V_r V_\theta - V_\phi^2 \cot \theta}{r}$$

$$a_\phi = \frac{\partial V_\phi}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\phi}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_\phi}{\partial \theta} + \frac{V_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} + \frac{V_r V_\phi + V_\theta V_\phi \cot \theta}{r}$$

$$\frac{D}{Dt} = V_x \frac{\partial}{\partial x} + V_y \frac{\partial}{\partial y} + V_z \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t}$$

$\frac{\partial}{\partial t}$  شتاب نقطه ای است و بقیه جملات شتاب کنوکسیونی نامیده می شوند.

مثال برای شتاب نقطه ای (Local):

اگر شیر را باز کنیم، سیال به جریان می افتد.

مثال برای شتاب کنوکسیونی (Convective):

وقتی که سطح مقطع لوله تغییر می کند، سیال شتاب می گیرد.

هر دو شتاب هستند ولی با دلایل متفاوتی.

### جریان غیر ویسکوز (Inviscid flow):

در این نوع جریان، ویسکوزیته تأثیری در جریان ندارد یا قابل صرفنظر کردن است.

این حالت وقتی پیش می آید که مقدار تنش برشی نسبت به نیروهای دیگر بسیار کم باشد. در این حالت کافی است در معادلات مقدار ویسکوزیته را برابر صفر قرار دهیم.

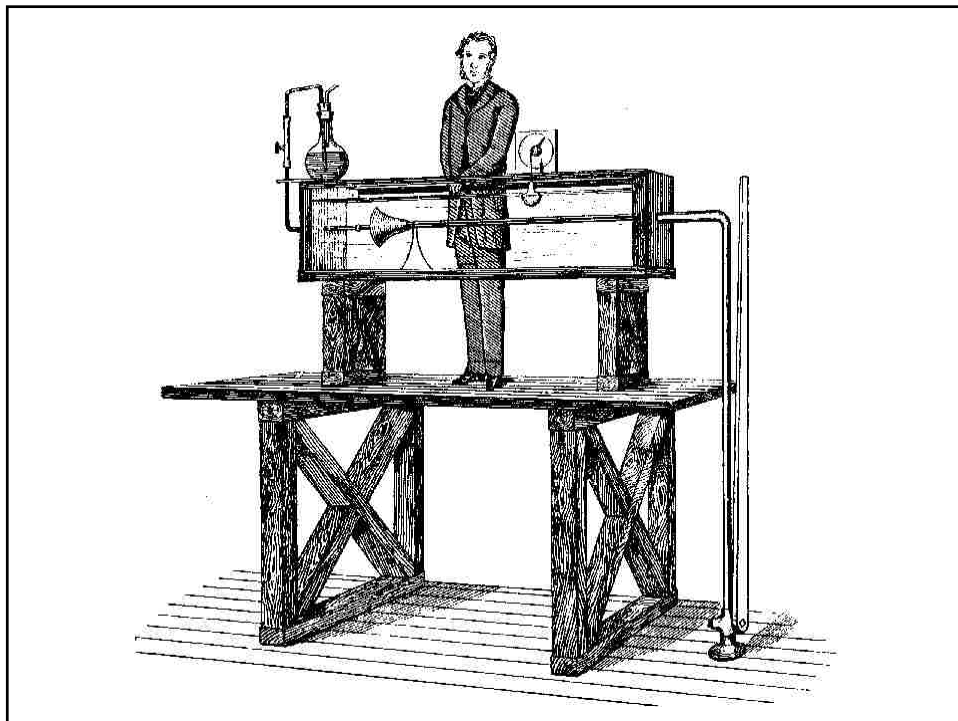
در حالت کلی همه سیالات به هر حال ویسکوزیته دارند، ولی مثلاً در جریانهای خارجی که روی سطوح اتفاق می افتد، می توان فرض کرد که اثر ویسکوزیته قابل صرفنظر کردن است.

## جریان ویسکوز (Viscous flow):

اثرات ویسکوزیته را نمی‌توان صرفنظر کرد و تنش برشی باید در نظر گرفته شود.

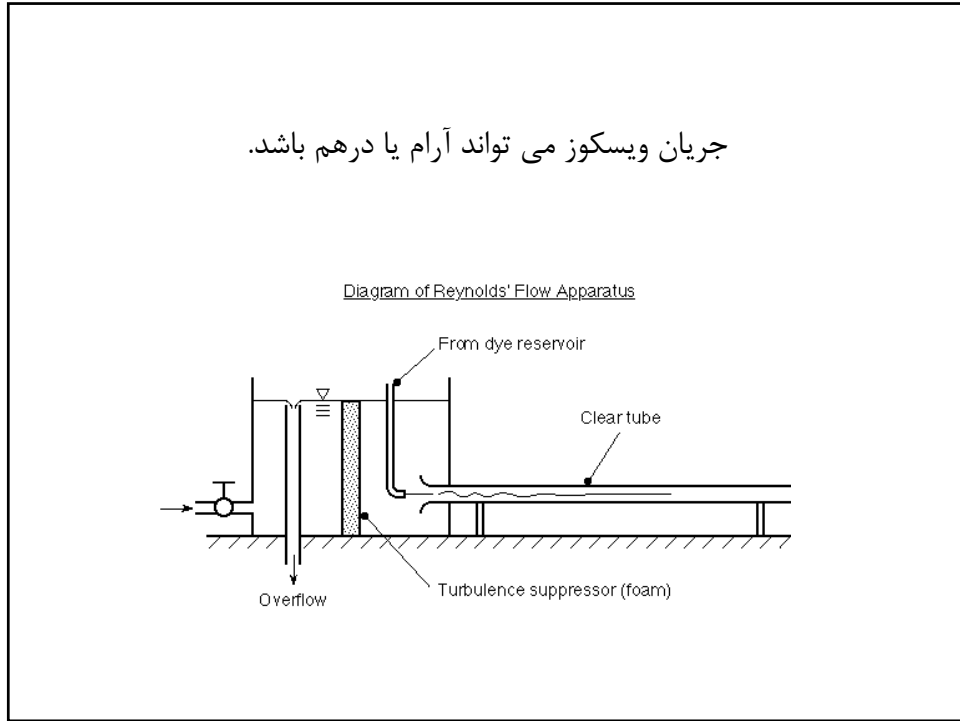
مثلاً در لایه مرزی باید ویسکوزیته را در نظر گرفت و یا در جریان درون لوله‌ها. دلیل این مساله این است که سیال در جداره می‌چسبد که به خاطر ویسکوزیته است.

در جریان ویسکوز هدر رفتن انرژی داریم.

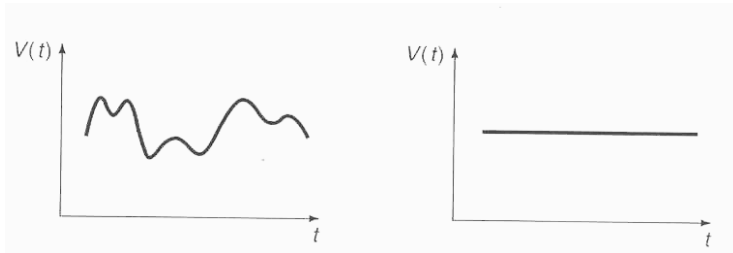
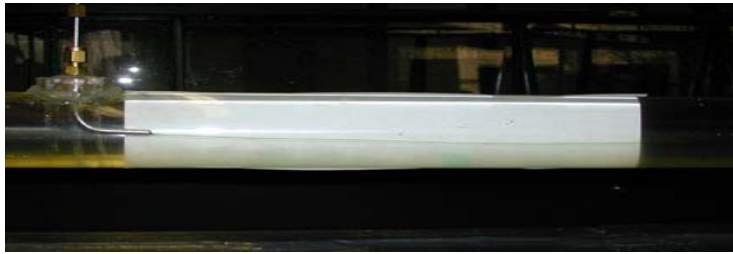




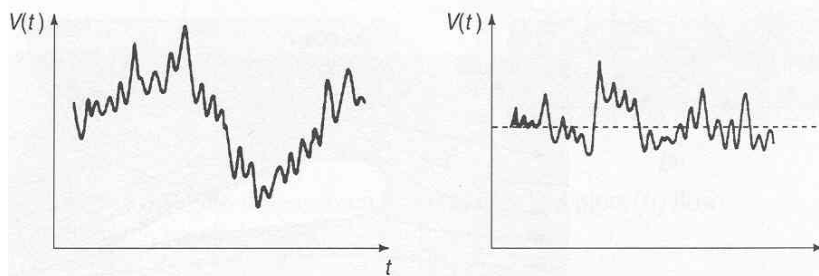
جریان ویسکوز می تواند آرام یا درهم باشد.



در جریان آرام (Laminar) ذره سیال در حال حرکت با ذرات اطراف خود مخلوط نمی شود.



در جریان درهم (Turbulent) ذرات سیال حرکات نامنظم دارند و مقادیر فشار و سرعت بطور اتفاقی تغییر می کنند.



### سه پارامتر مهم برای تشریح جریان:

**طول:** اگر بیشتر باشد، ممکن است در هم بشود، مثل قطر لوله یا ضخامت لایه مرزی

**سرعت:** اگر سرعت بیشتر باشد، جریان در هم می شود.

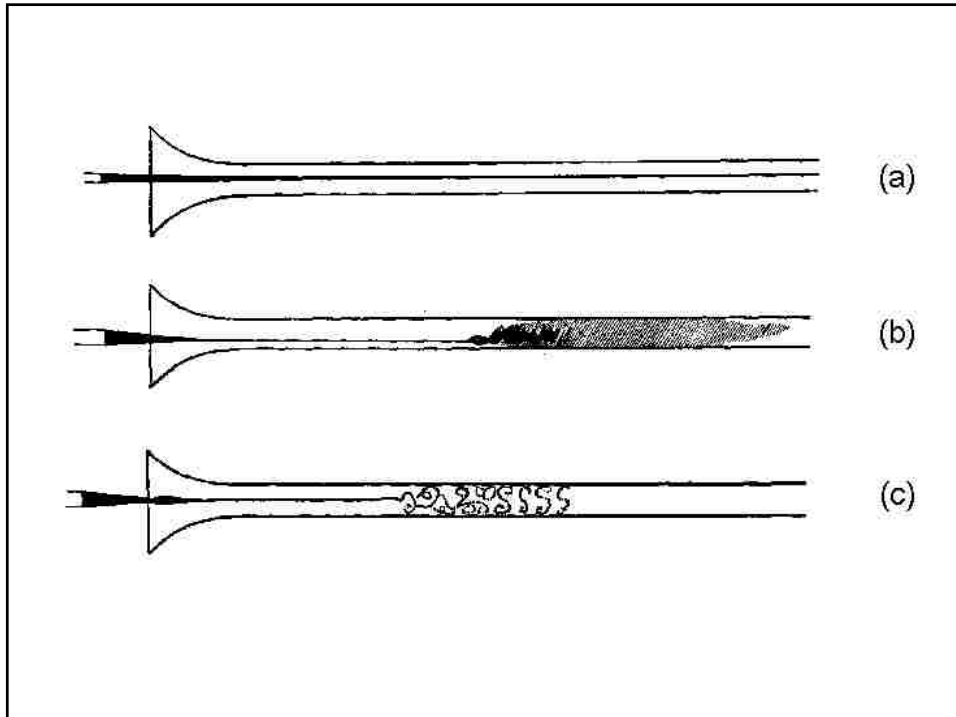
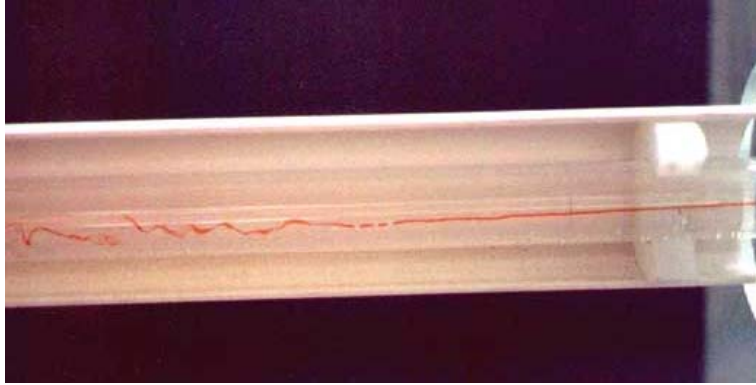
**ویسکوزیته سینماتیک:** اگر کمتر باشد، جریان در هم می شود.

$$Re = \frac{VL}{\nu}$$

اگر  $Re$  کم باشد، جریان آرام است و اگر  $Re$  زیاد باشد، درهم است.

مثلاً برای لوله ها اگر  $Re < 2100$  باشد، جریان آرام است و اگر  $Re > 2100$  باشد، جریان در هم است.

اگر  $Re$  نزدیک به مرز باشد، جریان ناپایدار یا واسطه داریم:



### جریان تراکم ناپذیر (Incompressible Flow):

اگر چگالی ذرات سیال در حال جریان ثابت بماند :  

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0$$

سیالات تراکم ناپذیرند. گازها هم در صورتیکه اختلاف فشار کمتر از ۱۰٪ باشد، تراکم ناپذیر فرض می‌شوند.

$$M = \frac{v}{c}$$

در جریان اگر  $M < 0.3$  باشد، گاز تراکم ناپذیر فرض می‌شود.

در جریان اگر  $M > 0.3$  باشد، گاز تراکم پذیر فرض می‌شود.

### معادله برنولی

برای بدست آوردن این معادله از نیروی ویسکوز صرفنظر می‌کنیم. این در حالتی است که نیروهای فشاری خیلی بیشتر از تنش برشی باشند ولی باید دقت داشت که در فواصل طولانی ممکن است این فرض صحیح نباشد و بنابراین باید معادله برنولی را با احتیاط استفاده کرد.

قانون دوم نیوتن:

$$p dA - \left( p + \frac{\partial p}{\partial s} ds \right) dA - \rho g ds dA \cos \theta = \rho ds dA . a_s$$

$$a_s = V \frac{\partial V}{\partial s} + \frac{\partial V}{\partial t}$$

$$S.S. \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

داریم :

$$dh = ds \cos \theta = \frac{\partial h}{\partial s} ds \Rightarrow \frac{\partial h}{\partial s} = \cos \theta$$

$$\div ds dA \Rightarrow -\frac{\partial P}{\partial S} - \rho g \frac{\partial h}{\partial s} = \rho V \frac{\partial V}{\partial s}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{V^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gh \right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{V^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gh = cte$$

بنابراین روی هر دو نقطه خط جریان می توان نوشت:

$$\frac{V_1^2}{2} + \frac{P_1}{\rho} + gh_1 = \frac{V_2^2}{2} + \frac{P_2}{\rho} + gh_2$$

این معادله برنولی است و برای بدست آوردن آن فرضهای زیر بکار رفته است:

- جریان غیر ویسکوز (بدون تنش برشی)

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad \text{- جریان پایا}$$

$$a_s = V \frac{\partial V}{\partial s} \quad \text{- جریان روی یک خط جریان}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial s} = 0 \quad \text{- چگالی ثابت}$$

- جریان غیر چرخشی

معمولاً این رابطه را بر  $g$  تقسیم می کنند:

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\rho g} + h_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\rho g} + h_2$$

مجموع سه جمله می شود بلندای کل Total head

$$\text{بلندای پیزومتریک} : \frac{p}{\rho g} + h$$

$$P : \text{فشار استاتیک}$$

$$\text{Stagnation Pressure} : p + \rho \frac{V^2}{2} \quad \text{فشار سکون}$$

**فشار استاتیک**  
 $p$

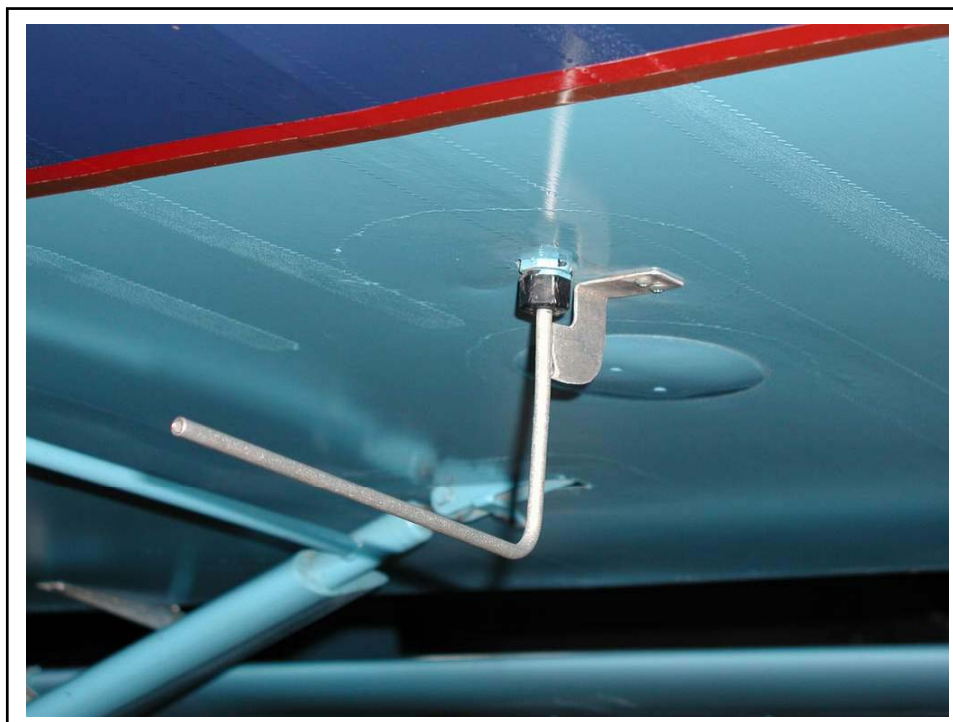
**فشار سکون (لوله پیتو)**  
 $p + \rho \frac{V^2}{2}$

**اختلاف بین فشار استاتیک و فشار سکون**  
 $\rho \frac{V^2}{2}$

**اندازه گیری سرعت سیال با استفاده از لوله پیتو**

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\rho g} = \frac{P_2}{\rho g}$$

$$V_1 = \sqrt{\frac{2}{\rho}(P_2 - P_1)}$$



کجا می‌توان از رابطه برنولی استفاده کرد؟

الف) در جریان های خارجی که از ویسکوزیته صرف نظر می‌شود.

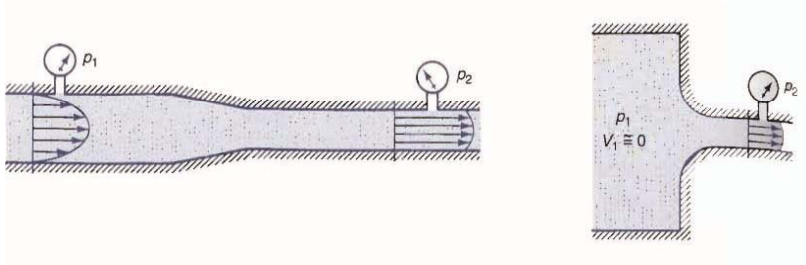
مثال: تعیین ارتفاعی که آب از لوله آتش نشانی پرتاب می‌شود.

تعیین نیروی وارده بر پنجره از سوی باد.

ب) در جریان های داخلی در فاصله کوتاه.

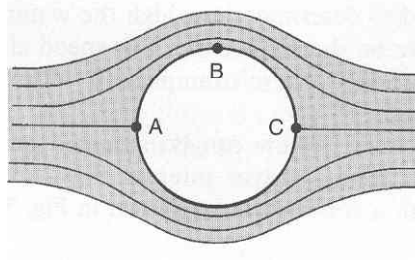
مثال: جریان در جایی که تغییر سطح مقطع داریم.



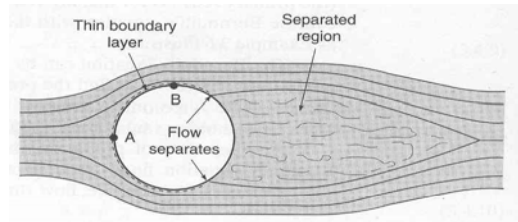


در این مثالها چون فاصله کم است از اتلاف انرژی بوسیله نیروی ویسکوز صرفنظر می‌شود و جریان غیر ویسکوز فرض می‌شود.

همیشه نمی‌توان جریان های خارجی را غیر ویسکوز فرض کرد. مثلا:



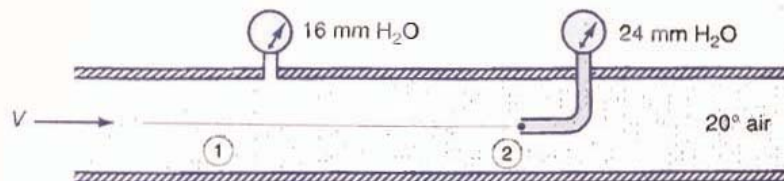
جریان ویسکوز پیش بینی می‌کند که در A و C سیال ساکن است و حداکثر فشار را دارد. در نقطه B سرعت حداکثر است و کمترین فشار را داریم.



در عمل یک لایه مرزی روی کره تشکیل می‌شود که باعث جدا شدن خطوط جریان در پشت کره می‌شود و بنابراین فشار نقطه A در نقطه C بازیابی نمی‌شود.

دلیل این است که به علت وجود لایه مرزی که خیلی آرام حرکت می‌کند سیال در نقطه B مومنتوم کافی ندارد تا خود را به نقطه C برساند و بنابراین در میان راه جدا می‌شود. در نتیجه فشار در C کمتر از A می‌شود.

مثال: بلندای فشار استاتیک بوسیله یک لوله پیتو اندازه گرفته می‌شود. با توجه به داده های موجود بر روی شکل، سرعت هوا را به دست آورید.



$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\rho g} = \frac{P_2}{\rho g} \Rightarrow V_1 \sqrt{\frac{2}{\rho} (P_2 - P_1)}$$

$$\frac{(101325 + 16 \times 10^{-3} \times 1000 \times 9.8)}{8.314 \times (273 + 20)} \times 29 = 1.2 \text{ Kg / m}^3$$

$$V_1 = \sqrt{\frac{2}{1.2} \times (24 - 16) \times 10^{-3} \times 1000 \times 9.81} = 11.44 \text{ m / s}$$

$\downarrow$                        $\downarrow$                        $\downarrow$                        $\downarrow$   
 mm H<sub>2</sub>O                      تبدیل                      ρ<sub>H<sub>2</sub>O</sub>                      g  
    به متر  


---

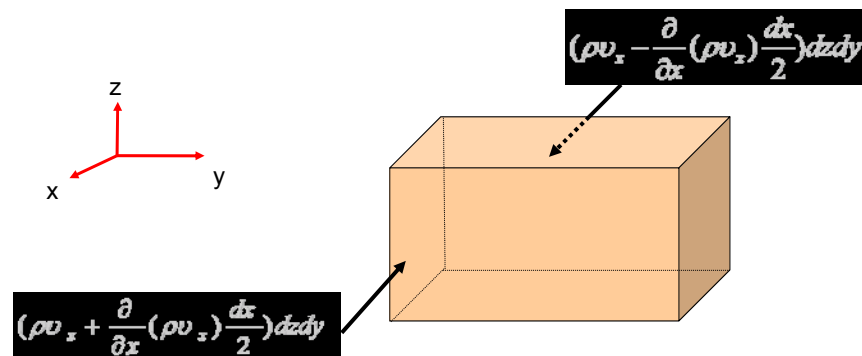
 $\downarrow$   
 ΔP

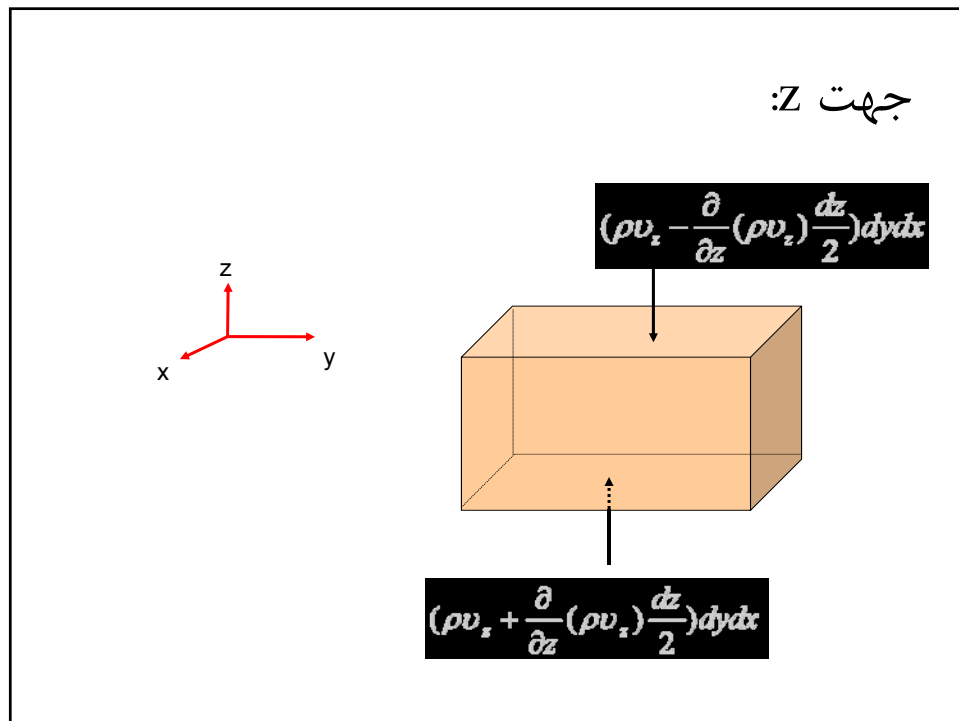
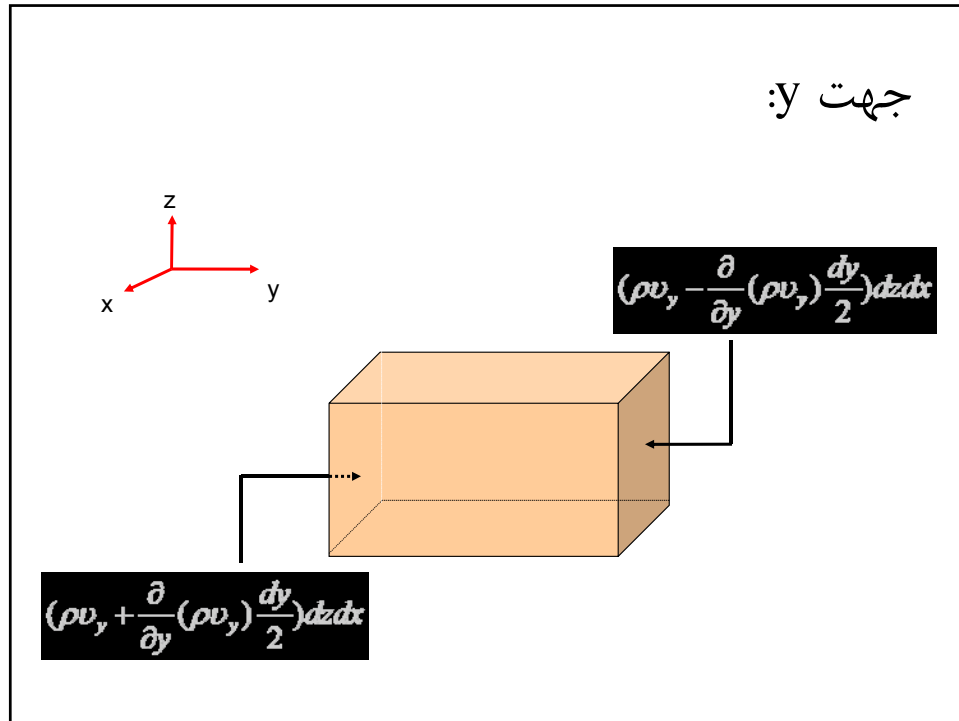
## فصل چهارم

### شکل دیفرانسیلی معادلات حرکت

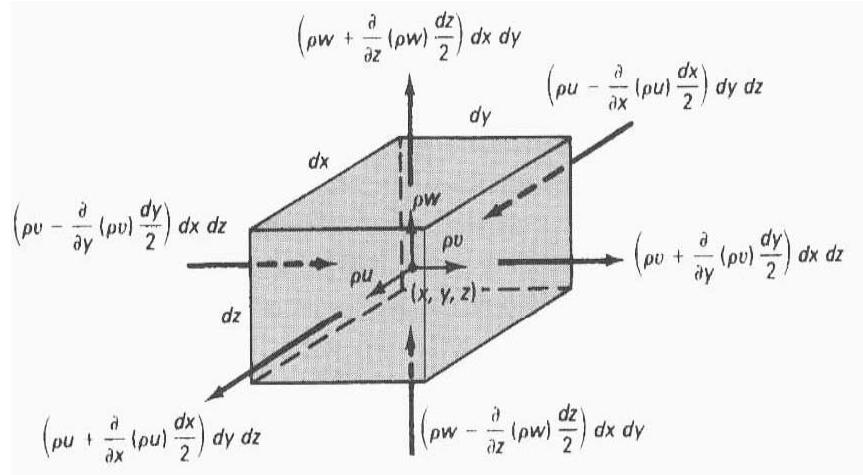
#### معادله پیوستگی

$$\dot{m}_{in} - \dot{m}_{out} = \frac{\partial}{\partial t} M_{element}$$





بنابراین در کل خواهیم داشت:



برای همه جهت ها می نویسیم:

$$\begin{aligned}
 & \left[ \rho V_x - \frac{\partial(\rho V_x)}{\partial x} \frac{dx}{2} \right] dydz - \left[ \rho V_x + \frac{\partial(\rho V_x)}{\partial x} \frac{dx}{2} \right] dydz \\
 & + \left[ \rho V_y - \frac{\partial(\rho V_y)}{\partial y} \frac{dy}{2} \right] dx dz - \left[ \rho V_y + \frac{\partial(\rho V_y)}{\partial y} \frac{dy}{2} \right] dx dz \\
 & + \left[ \rho V_z - \frac{\partial(\rho V_z)}{\partial z} \frac{dz}{2} \right] dx dy - \left[ \rho V_z + \frac{\partial(\rho V_z)}{\partial z} \frac{dz}{2} \right] dx dy \\
 & = \frac{\partial}{\partial t} (\rho dx dy dz) \\
 & \div dx dy dz \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} (\rho V_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho V_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho V_z) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}
 \end{aligned}$$

در صورتی که  $\rho$  ثابت نباشد:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + V_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + V_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + V_z \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = 0$$

با استفاده از تعریف مشتق کلی:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} \text{معادله دیفرانسیلی} \\ \text{پیوستگی} \end{array}$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k$$

$$\Rightarrow \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot V = 0$$

$$\text{here : } V = v_x i + v_y j + v_z k$$

برای سیال تراکم ناپذیر چگالی ثابت است:

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot V = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} \text{معادله پیوستگی برای} \\ \text{سیال تراکم ناپذیر} \end{array}$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad \text{کارتزین}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad \text{استوانه ای}$$

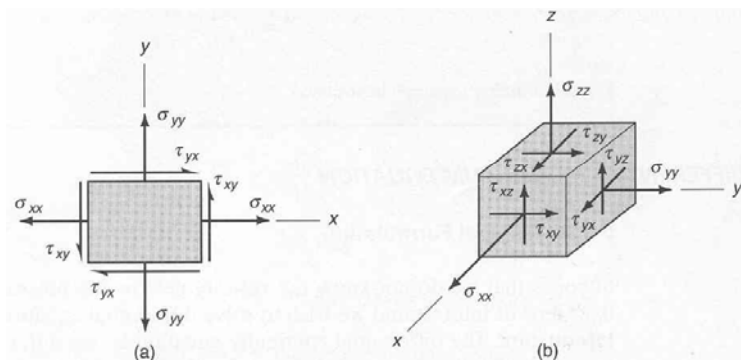
$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 V_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (V_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} = 0 \quad \text{گروی}$$

## معادله اندازه حرکت

برای تعیین پروفیل سرعت معادله پیوستگی کافی نیست چون ما سرعت را در سه جهت داریم ولی معادله پیوستگی فقط یکی است.

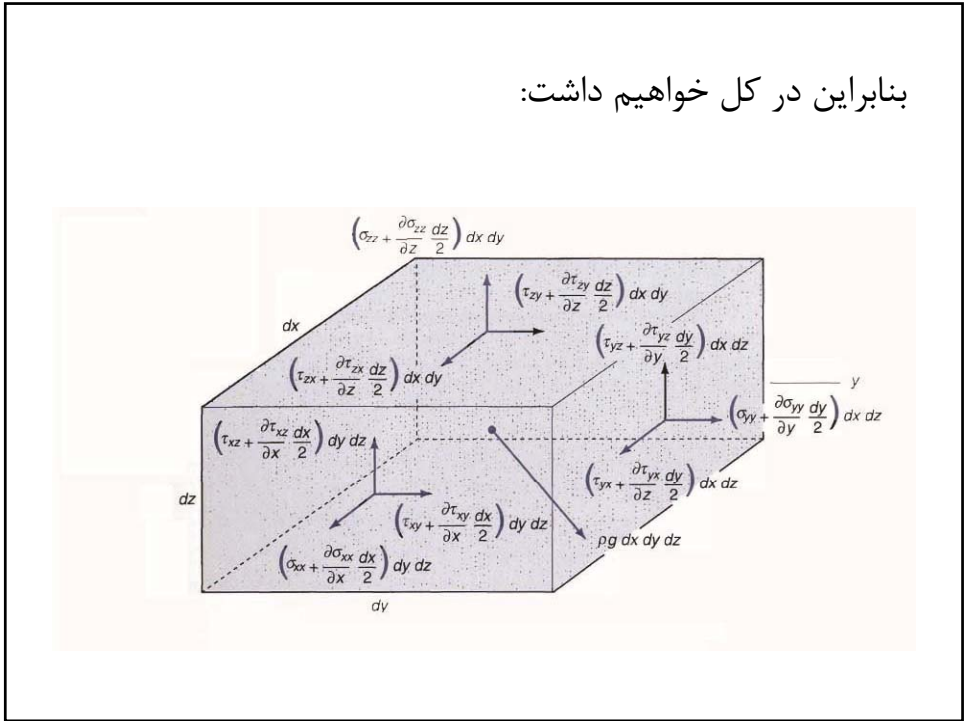
معادله اندازه حرکت یک معادله برداری است و بنابراین سه مؤلفه دارد و کمک مؤثری در پیدا کردن پروفیل سرعت و فشار است.

$\sigma_{xx}$  ← تنش قائم  
 $\tau_{xy}$  ← تنش برشی  
 جهت نیرو  
 سطحی که نیرو روی آن اثر می کند



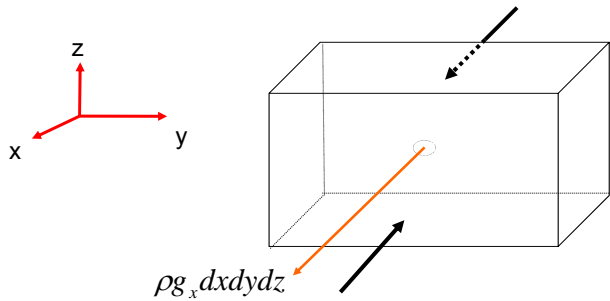


بنابراین در کل خواهیم داشت:



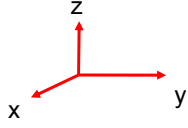
جهت X:

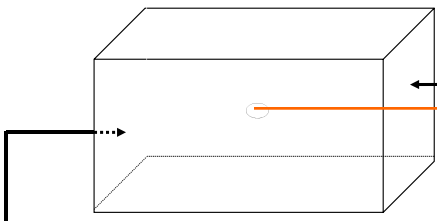
$$\left(\sigma_{xx} - \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \frac{dx}{2}\right) dz dy + \left(\tau_{yx} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{dy}{2}\right) dx dz + \left(\tau_{zx} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{dz}{2}\right) dx dy$$



$$\left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \frac{dx}{2}\right) dz dy + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{dy}{2}\right) dx dz + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{dz}{2}\right) dx dy$$

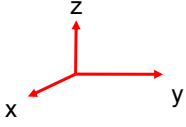
جهت  $y$ :

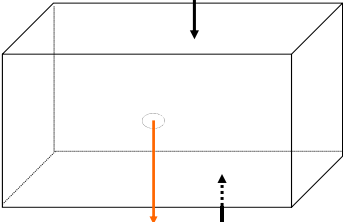


$$\left(\sigma_{yy} - \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \frac{dy}{2}\right) dz dx + \left(\tau_{xy} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \frac{dx}{2}\right) dy dz + \left(\tau_{zy} - \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \frac{dz}{2}\right) dy dx$$


$$\left(\sigma_{yy} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \frac{dy}{2}\right) dz dx + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \frac{dx}{2}\right) dy dz + \left(\tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \frac{dz}{2}\right) dy dx$$

جهت  $z$ :



$$\left(\sigma_{zz} - \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \frac{dz}{2}\right) dy dx + \left(\tau_{xz} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} \frac{dx}{2}\right) dz dy + \left(\tau_{yz} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \frac{dy}{2}\right) dz dx$$


$$\left(\sigma_{zz} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \frac{dz}{2}\right) dy dx + \left(\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} \frac{dx}{2}\right) dz dy + \left(\tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \frac{dy}{2}\right) dz dx$$

قانون دوم نیوتن را در جهت X می نویسیم:

$$\Sigma F_x = ma_x$$

$$\left( \sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \cdot \frac{dx}{2} \right) dydz + \left( \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \cdot \frac{dy}{2} \right) dx dz + \left( \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \cdot \frac{dz}{2} \right) dx dy$$

$$- \left( \sigma_{xx} - \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \cdot \frac{dx}{2} \right) dydz - \left( \tau_{yx} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \cdot \frac{dy}{2} \right) dx dz$$

$$- \left( \tau_{zx} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \cdot \frac{dz}{2} \right) dx dy + \rho g_x dx dy dz$$

$$= \rho dx dy dz \frac{DV_x}{Dt}$$

پس از ساده کردن و تقسیم بر  $dx dy dz$  داریم:

$$\rho \frac{DV_x}{Dt} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho g_x$$

به همین ترتیب برای جهت های Y و Z:

$$\rho \frac{DV_y}{Dt} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \rho g_y$$

$$\rho \frac{DV_z}{Dt} = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho g_z$$

تانسور تنش:

$$\tau = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

تانسور تنش متقارن است، یعنی:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

معمولاً تنش برش قائم را از فشار تفکیک می کنند:

$$\sigma_{xx} = -P + \tau_{xx}$$

در این صورت معادله اندازه حرکت بصورت زیر در می آید:

$$\rho \frac{DV_x}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) + \rho g_x$$

برای جهات دیگر هم به همین ترتیب بنابراین به شکل برداری می توانیم بنویسیم:

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \tau + \rho g$$

نیروی جاذبه بر واحد حجم سیال  
نیروی ویسکوز بر واحد حجم سیال  
نیروی فشار بر واحد حجم سیال  
جرم سیال در واحد حجم ضرب در شتاب

## معادله اوایلر

در صورتیکه جریان غیر ویسکوز باشد از نیروی ویسکوز صرفنظر می‌شود  
( $\tau_{ij}=0$ ) و معادله اوایلر بدست می‌آید:

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla p + \rho g$$

$$\rho \frac{DV_x}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x \quad \text{یا در سه جهت:}$$

$$\rho \frac{DV_y}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y$$

$$\rho \frac{DV_z}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z$$

در صورتیکه دانسیته ثابت فرض شود و S.S. می‌توان از رابطه اوایلر  
انتگرال گرفت و رابطه برنولی را بدست آورد.

$$\begin{aligned} \Rightarrow g_z &= -g \\ \text{نقطه روی} \rightarrow \text{Steady flow} \Rightarrow \frac{DV_z}{Dt} &= \cancel{\frac{DV_z}{Dt}} + V_x \cancel{\frac{\partial V_z}{\partial x}} + V_y \cancel{\frac{\partial V_z}{\partial y}} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \\ \text{جریان} \Rightarrow \rho V_z \frac{dV_z}{dz} &= -\frac{dp}{dz} - \rho g \\ \Rightarrow \rho dV_z \cdot V_z + dp + \rho g dz &= 0 \\ \downarrow \rho v dv \\ \text{Integratio n} \Rightarrow \frac{1}{2} \rho V^2 + P + \rho g z &= c \quad \text{رابطه برنولی} \end{aligned}$$

حالا معادله مومنوم در سه جهت داریم به اضافه معادله پیوستگی که جمعاً ۴ معادله می شود و مجهولات عبارتند از:  $p, v_x, v_y, v_z$ . بنابراین با B.C های مناسب می توان میدان های فشار و سرعت را بدست آورد.

## معادله نویه- استوکس (Navier-Stokes)

در صورتیکه :

الف) سیال نیوتنی باشد. (رابطه خطی بین تنش و گرادیان سرعت مثل: هوا-آب- روغن)

ب) سیال ایزوتروپیک باشد. (خواص سیال در همه جهات یکسان باشد)

با این فرضیات تنش ها به صورت زیر محاسبه می شوند:

$$\begin{array}{l} \sigma_{xx} = -p + 2\mu \frac{\partial V_x}{\partial x} + \lambda \nabla \cdot V \\ \sigma_{yy} = -p + 2\mu \frac{\partial V_y}{\partial y} + \lambda \nabla \cdot V \\ \sigma_{zz} = -p + 2\mu \frac{\partial V_z}{\partial z} + \lambda \nabla \cdot V \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left( \frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) \\ \tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu \left( \frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left( \frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y} \right) \end{array} \right.$$

فرض استوکس :  $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$  ← ضریب بوم و اسکوزینه

(برای بیشتر گازها بخصوص گازهای یک اتمی صادق است.)

برای مایعات  $\nabla \cdot V = 0$  است. پس:  $P = \frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$

با فرض استوکس برای گازها هم این رابطه صدق می کند.

با جایگزینی تنش‌ها از روابط بالا در معادلات اندازه حرکت خواهیم داشت:

$$\rho \frac{DV_x}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x + \mu \left( \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right) + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right)$$

$$\rho \frac{DV_y}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \rho g_y + \mu \left( \frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2} \right) + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right)$$

$$\rho \frac{DV_z}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z + \mu \left( \frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right) + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right)$$

در صورتیکه سیال تراکم ناپذیر باشد.  $\nabla \cdot V = 0$

$$\rho \frac{DV_x}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \mu \left( \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right)$$

$$\rho \frac{DV_y}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y + \mu \left( \frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2} \right)$$

$$\rho \frac{DV_z}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z + \mu \left( \frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right)$$

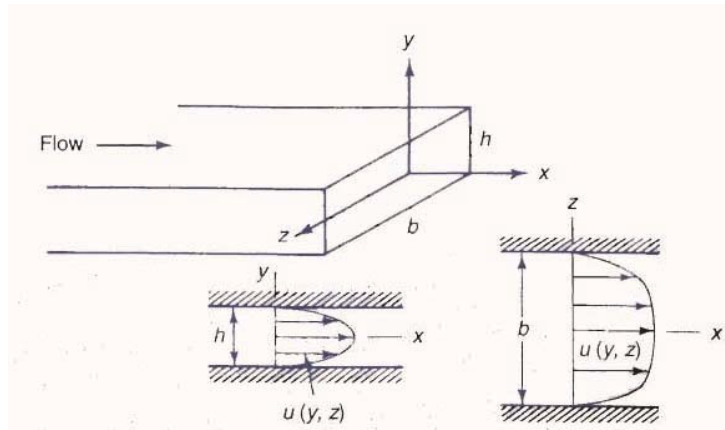
اینها را معادلات نویه-استوکس گویند. به شکل برداری می‌شود:

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 V + \rho g$$



مثال:

با توجه به شکل، معادلات نویه \_ استوکس را برای جهات مختلف به کار ببرید.



فرض کنیم که خطوط جریان موازی باشند.

$$V_y = V_z = 0, \quad V_x = V_x(y, z)$$

$$\begin{aligned} \frac{DV_x}{Dt} &= \frac{\partial V_x}{\partial t} + \cancel{V_x \frac{\partial V_x}{\partial x}} + \cancel{V_y \frac{\partial V_x}{\partial y}} + \cancel{V_z \frac{\partial V_x}{\partial z}} \\ &= \frac{\partial V_x}{\partial t} \end{aligned}$$

در جهت X:

$$\rho \frac{\partial V_x}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \cancel{\rho g_x} + \mu \left( \cancel{\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2}} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right)$$

$$\Rightarrow \rho \frac{\partial V_x}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right)$$

$$B.C. \quad V_x|_{wall} = 0 \quad \underline{\text{No slip at wall}}$$

↓  
عدم لغزش در دیواره

در جهت Y:

$$\frac{DV_y}{Dt} = 0, \quad g_y = -g$$

$$\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2} = 0$$

$$\Rightarrow 0 = -\frac{\partial P}{\partial y} - \rho g$$

در جهت Z:

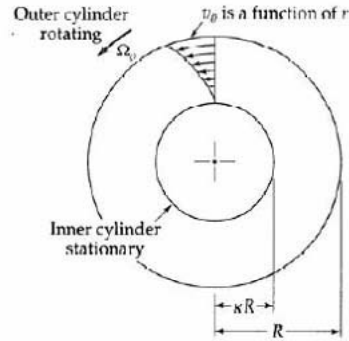
$$\frac{DV_z}{Dt} = 0, \quad g_z = 0$$

$$\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} = 0$$

$$\Rightarrow 0 = -\frac{\partial P}{\partial z}$$

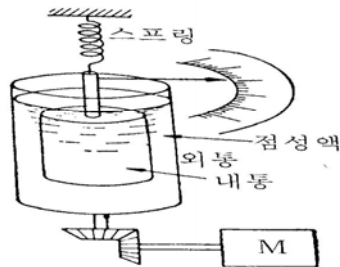
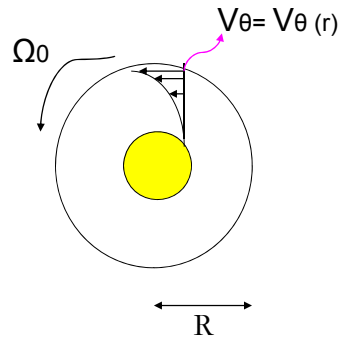
مثال:

استوانه داخلی ثابت است و استوانه خارجی با سرعت زاویه ای  $\Omega$  می چرخد.



از اثر انتهایی صرف نظر می شود:

$$v_r = v_z = 0$$



[그림 3-49] 회전원통식 점도계

در جهت r:

$$\rho \frac{DV_r}{Dt} - \rho \frac{V_\theta^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \rho g_r + \mu \left( \nabla^2 V_r - \frac{V_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} \right)$$

در جهت θ:

$$\rho \frac{DV_\theta}{Dt} + \rho \frac{V_r V_\theta}{r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho g_\theta + \mu \left( \nabla^2 V_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{V_\theta}{r^2} \right)$$

$$\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial r}$$

در جهت z:

$$\rho \frac{DV_z}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z + \rho \nabla^2 V_z$$

در جهت r:

$$-\rho \frac{V_\theta^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r}$$

در جهت θ:

$$0 = \mu \left( \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial r} - \frac{V_\theta}{r^2} \right)$$

$$0 = \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r V_\theta) \right]$$

در جهت z:

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z$$

برای بدست آوردن توزیع سرعت از معادله اندازه حرکت در جهت  $\theta$  استفاده می‌کنیم:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr}(rV_\theta) = C_1 \Rightarrow \frac{d}{dr}(rV_\theta) = C_1 r$$

$$\Rightarrow rV_\theta = \frac{1}{2} C_1 r^2 + C_2$$

$$\Rightarrow V_\theta = \frac{1}{2} C_1 r + \frac{C_2}{r}$$

$$B.C.1: r = KR, V_\theta = 0$$

$$B.C.2: r = R, V_\theta = R\Omega_0$$

$$B.C.1: r = KR, V_\theta = 0 \Rightarrow$$

$$0 = \frac{1}{2} C_1 KR + \frac{C_2}{KR} \Rightarrow \frac{1}{2} C_1 = -\frac{C_2}{K^2 R^2}$$

$$B.C.2: r = R, V_\theta = R\Omega_0 \Rightarrow$$

$$R\Omega_0 = \frac{1}{2} C_1 R + \frac{C_2}{R} \Rightarrow R\Omega_0 = -\frac{C_2}{k^2 R^2} R + \frac{C_2}{R}$$

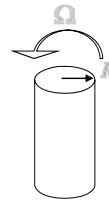
$$\Rightarrow C_2 \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = R^2 \Omega_0$$

$$\Rightarrow C_2 = \frac{kR^2 \Omega_0}{\left(k - \frac{1}{k}\right)} \Rightarrow \frac{1}{2} C_1 = -\frac{\Omega_0}{k\left(k - \frac{1}{k}\right)}$$

$$\Rightarrow V_\theta = R\Omega_0 \frac{\left(\frac{kR}{r} - \frac{r}{kR}\right)}{\left(k - \frac{1}{k}\right)}$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = -\mu \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{V_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right]$$

$$= -2\mu\Omega_0 R^2 \left( \frac{1}{r^2} \right) \left( \frac{k^2}{1-k^2} \right)$$



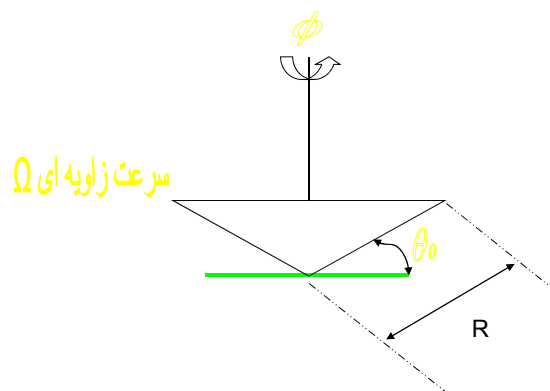
گشتاور وارده بر استوانه خارجی:

$$T = 2\pi R L (-\tau_{r\theta})|_{r=R} \cdot R$$

$$= 4\pi\mu L \Omega_0 R^2 \left( \frac{k^2}{1-k^2} \right)$$

با این رابطه می توان ویسکوزیته را اندازه گرفت.

مثال: ویسکومتر مخروط و صفحه



$$V_r = V_\theta = 0 \quad , \quad V_\phi = V_\phi(r, \theta)$$

در جهت  $r$ :

$$\rho \frac{DV_r}{Dt} - \rho \frac{V_\theta^2 + V_\phi^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \rho g_r + \mu \left( \nabla^2 V_r - \frac{2V_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} - \frac{2V_\theta \cot \theta}{r^2} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} \right)$$

$$\Rightarrow -\rho \frac{V_\phi^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r}$$

در جهت  $\theta$ :

$$\rho \frac{DV_\theta}{Dt} + \rho \frac{V_r V_\theta - V_\phi^2 \cot \theta}{r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho g_\theta + \mu \left( \nabla^2 V_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{V_\theta}{r^2 \sin \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} \right)$$

$$\Rightarrow -\rho \cot \theta \frac{V_\phi^2}{r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta}$$

در جهت  $\phi$ :

$$\rho \frac{DV_\phi}{Dt} + \rho \frac{V_\phi V_r}{r} + \rho \frac{V_\theta V_\phi \cot \theta}{r} = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \rho g_\phi$$

$$+ \mu \left( \nabla^2 V_\phi - \frac{V_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial V_r}{\partial \phi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial V_\theta}{\partial \phi} \right)$$

$$0 = \nabla^2 V_\phi - \frac{V_\phi}{r^2 \sin^2 \theta}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\nabla^2 V_\phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial V_\phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial V_\phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V_\phi}{\partial \phi^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial V_\phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial V_\phi}{\partial \theta} \right) - \frac{V_\phi}{\sin^2 \theta} = 0$$

$$V_\phi = R(r)T(\theta)$$

حل از طریق جداسازی متغیرها:

$$x = \cos \theta$$

تغییر متغیر:



## فصل پنجم

### شکل انتگرالی معادلات حرکت

کمیت‌هایی هستند که مقدار انتگرالی آنها مهم است:

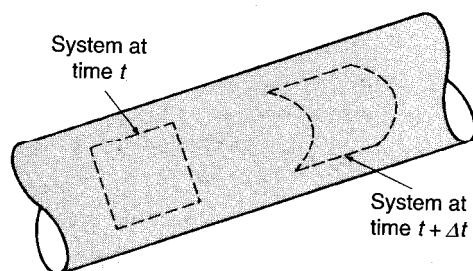
- شدت جریان حجمی انتگرال سرعت روی سطح است.
- مقدار انتقال حرارت از انتگرال شار حرارتی روی سطح به دست می‌آید.
- نیرو عبارت است از انتگرال تنش روی سطح.
- جرم انتگرال چگالی روی حجم است.
- انرژی جنبشی انتگرال  $V^2/2$  روی جرم سیال است.

در این بخش شکل انتگرالی قوانین زیر مورد بررسی قرار می گیرند:

- بقای جرم
- قانون اول ترمودینامیک
- قانون دوم نیوتن

قوانین مورد نظر برای یک سیستم ارائه شده اند.

سیستم عبارت است از مقدار مشخصی از ماده.



قانون بقای جرم:

$$\frac{D}{Dt} \int_{sys} \rho dV = 0$$

جرم سیستم ثابت است.

قانون اول ترمودینامیک:

شدت تغییر انرژی سیستم برابر است با اختلاف بین گرمای داده شده به سیستم و کار گرفته شده از آن.

$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{D}{Dt} \int_{sys} E \rho dV$$

$$E = U + \phi + K$$

قانون دوم نیوتن:

برآیند نیروهای وارد بر سیستم برابر با شدت تغییرات اندازه حرکت در سیستم است.

$$\sum F = \frac{D}{Dt} \int_{sys} v \rho dV$$

اگر چگالی و سرعت در تمام سیستم ثابت باشند:

$$\sum F = ma$$

در تمام قوانین گفته شده در مورد یک کمیت مقداری از سیستم صحبت می شود که آن را با  $N_{sys}$  نمایش می دهیم.

$$\frac{DN_{sys}}{Dt}$$

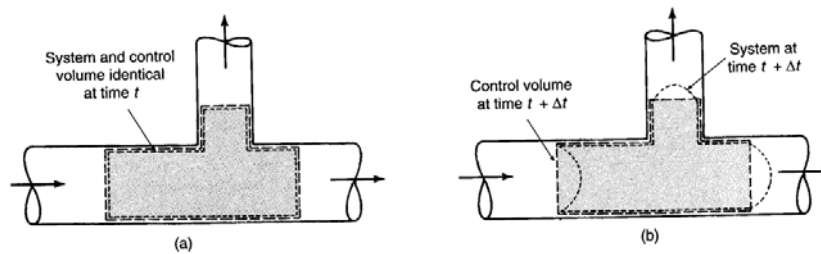
$$N_{sys} = \int_{sys} \rho dV \quad \text{جرم}$$

$$N_{sys} = \int_{sys} E \rho dV \quad \text{انرژی}$$

$$N_{sys} = \int_{sys} v \rho dV \quad \text{اندازه حرکت}$$

$$N_{sys} = \int_{sys} \eta \rho dV \quad \text{به طور کلی:}$$

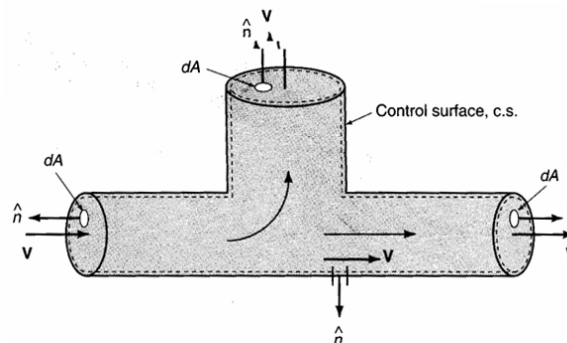
در بیشتر موارد آن چه مورد نظر است محدوده خاصی مکانی است که به آن حجم کنترل می گویند.  
تفاوت بین سیستم و حجم کنترل



## تبدیل معادلات سیستم به معادلات حجم کنترل

در این حالت باید مقادیری را که از سطح می گذرد نیز در نظر گرفت.

$$\text{flux across } dA = \rho \mathbf{v} \cdot \hat{n} dA$$

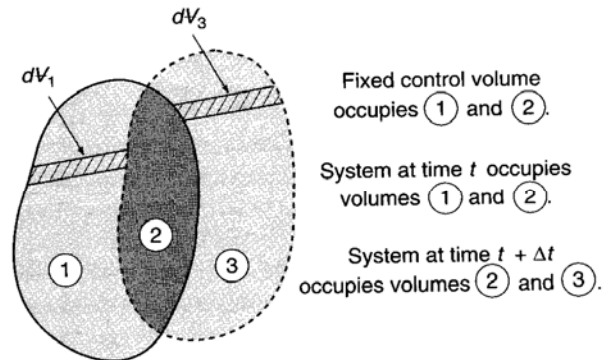


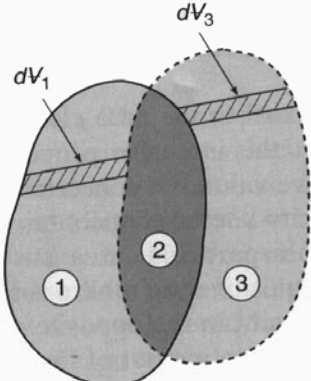
$$\text{flux across } dA = \eta \rho \hat{n} \cdot v dA$$

$$\text{net flux of property} = \int_{c.s.} \eta \rho \hat{n} \cdot v dA$$

مقدار انتگرال مثبت یعنی شار خروجی بیشتر از ورودی.

$$\frac{DN_{sys}}{Dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N_{sys}(t + \Delta t) - N_{sys}(t)}{\Delta t}$$

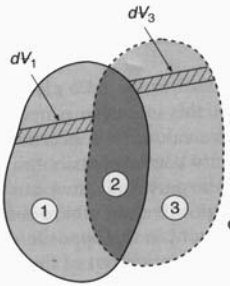




Fixed control volume occupies ① and ②.

System at time  $t$  occupies volumes ① and ②.

System at time  $t + \Delta t$  occupies volumes ② and ③.

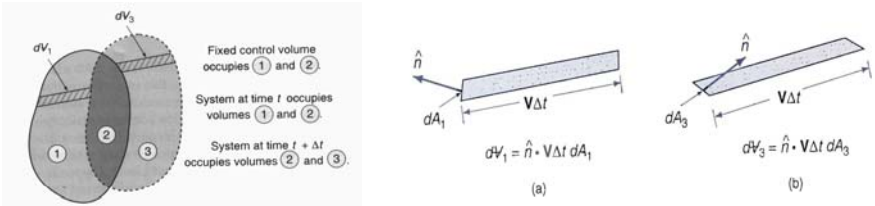
$$\begin{aligned} \frac{DN_{sys}}{Dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N_3(t + \Delta t) + N_2(t + \Delta t) - N_2(t) - N_1(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N_2(t + \Delta t) + N_1(t + \Delta t) - N_2(t) - N_1(t)}{\Delta t} \\ &\quad + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N_3(t + \Delta t) - N_1(t + \Delta t)}{\Delta t} \end{aligned}$$


Fixed control volume occupies ① and ②.

System at time  $t$  occupies volumes ① and ②.

System at time  $t + \Delta t$  occupies volumes ② and ③.

$$\begin{aligned} \frac{DN_{sys}}{Dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N_{c.v.}(t + \Delta t) - N_{c.v.}(t)}{\Delta t} \\ &\quad + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N_3(t + \Delta t) - N_1(t + \Delta t)}{\Delta t} \\ &= \frac{dN_{c.v.}}{dt} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N_3(t + \Delta t) - N_1(t + \Delta t)}{\Delta t} \end{aligned}$$

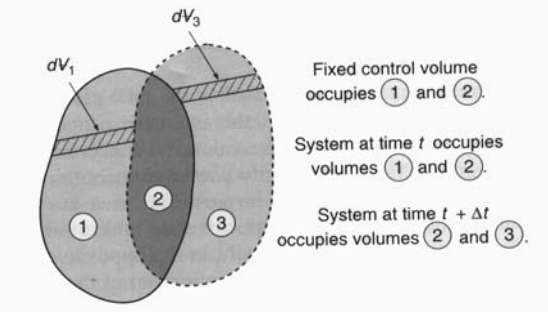


Fixed control volume occupies (1) and (2).  
 System at time  $t$  occupies volumes (1) and (2).  
 System at time  $t + \Delta t$  occupies volumes (2) and (3).

(a)  $dV_1 = \hat{n} \cdot \mathbf{V} \Delta t dA_1$

(b)  $dV_3 = \hat{n} \cdot \mathbf{V} \Delta t dA_3$

$$N_3(t + \Delta t) = \int_{A_3} \eta \rho \hat{n} \cdot \mathbf{v} \Delta t dA_3$$

$$N_1(t + \Delta t) = - \int_{A_1} \eta \rho \hat{n} \cdot \mathbf{v} \Delta t dA_1$$


Fixed control volume occupies (1) and (2).  
 System at time  $t$  occupies volumes (1) and (2).  
 System at time  $t + \Delta t$  occupies volumes (2) and (3).

$$N_3(t + \Delta t) = \int_{A_3} \eta \rho \hat{n} \cdot \mathbf{v} \Delta t dA_3$$

$$N_1(t + \Delta t) = - \int_{A_1} \eta \rho \hat{n} \cdot \mathbf{v} \Delta t dA_1$$

$$N_3(t + \Delta t) - N_1(t + \Delta t) = \int_{A_3} \eta \rho \hat{n} \cdot \mathbf{v} \Delta t dA_3 + \int_{A_1} \eta \rho \hat{n} \cdot \mathbf{v} \Delta t dA_1$$

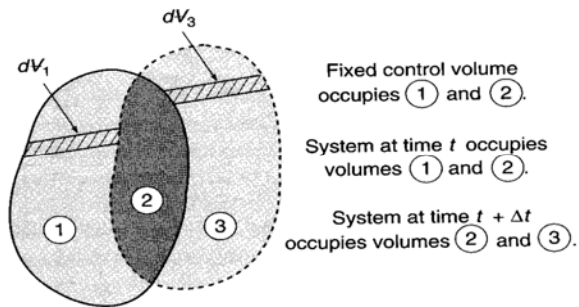
$$= \int_{c.s.} \eta \rho \hat{n} \cdot \mathbf{v} \Delta t dA$$



$$\begin{aligned}\frac{DN_{sys}}{Dt} &= \frac{dN_{c.v.}}{dt} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N_3(t + \Delta t) - N_1(t + \Delta t)}{\Delta t} \\ &= \frac{d}{dt} \int_{c.v.} \eta \rho dV + \int_{c.s.} \eta \rho \hat{n} \cdot v dA\end{aligned}$$

Reynolds Transport Theorem قانون انتقال رينولدز

$$\frac{DN_{sys}}{Dt} = \int_{c.v.} \frac{\partial}{\partial t} (\eta \rho) dV + \int_{c.s.} \eta \rho \hat{n} \cdot v dA$$



ساده کردن تبدیل معادلات سیستم به معادلات حجم کنترل

$$\frac{\partial}{\partial t}(\eta\rho) = 0 \quad \text{حالت پایا:}$$

$$\frac{DN_{sys}}{Dt} = \int_{c.s.} \eta \rho \hat{n} \cdot v dA$$

اگر فقط یک ورودی و فقط یک خروجی باشد:

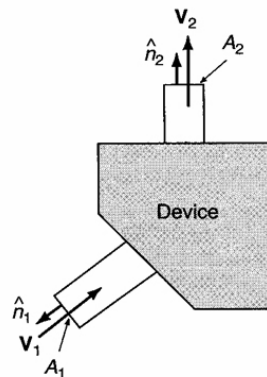
$$\frac{DN_{sys}}{Dt} = \int_{A_2} \eta_2 \rho_2 v_2 dA - \int_{A_1} \eta_1 \rho_1 v_1 dA$$

اگر فقط یک ورودی و فقط یک خروجی باشد:

$$\frac{DN_{sys}}{Dt} = \int_{A_2} \eta_2 \rho_2 v_2 dA - \int_{A_1} \eta_1 \rho_1 v_1 dA$$

در این حالت فرض شده جریانهای ورودی و خروجی عمود بر سطح های مربوطه هستند:

$$\hat{n} \cdot v_1 = -v_1 \quad \hat{n} \cdot v_2 = v_2$$



اگر فقط یک ورودی و فقط یک خروجی باشد:

$$\frac{DN_{sys}}{Dt} = \int_{A_2} \eta_2 \rho_2 v_2 dA - \int_{A_1} \eta_1 \rho_1 v_1 dA$$

اگر متغیرهای زیر انتگرال روی سطح مقدار ثابتی داشته باشند:

$$\frac{DN_{sys}}{Dt} = \eta_2 \rho_2 v_2 A_2 - \eta_1 \rho_1 v_1 A_1$$

اگر چند ورودی و خروجی باشد:

$$\frac{DN_{sys}}{Dt} = \sum_{i=1}^N \eta_i \rho_i v_i \cdot \hat{n}_i A_i$$

برای جریان ناپایا، یک ورودی و یک خروجی، مقادیر ثابت:

$$\frac{DN_{sys}}{Dt} = V_{c.v.} \frac{d(\eta\rho)}{dt} + \eta_2 \rho_2 v_2 A_2 - \eta_1 \rho_1 v_1 A_1$$

### قانون بقای جرم (موازنه جرم):

$$\frac{Dm_{sys}}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_{sys} \rho dV = 0$$

در این حالت  $\eta = 1$  است و معادله پیوستگی به دست می آید:

$$\frac{DN_{sys}}{Dt} = \int_{c.v.} \frac{\partial}{\partial t} (\eta \rho) dV + \int_{c.s.} \eta \rho \hat{n} \cdot v dA$$

$$0 = \int_{c.v.} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{c.s.} \rho \hat{n} \cdot v dA$$

اگر جریان حالت پایا باشد:

$$\int_{c.s.} \rho \hat{n} \cdot v dA = 0$$

در صورت وجود یک ورودی و یک خروجی با سرعت ثابت:

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2$$

در صورتی که چگالی هم ثابت باشد:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

معمولا سرعت یکنواخت نیست.

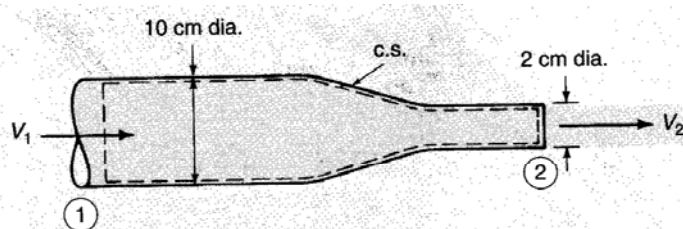
$$\dot{m} = \int_A \rho v_n dA$$

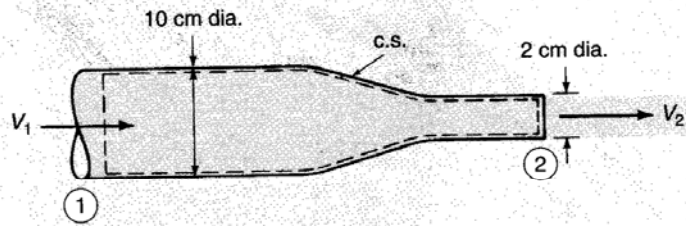
$$\dot{m} = \rho \bar{v} A$$

$$Q = \int_A v_n dA$$

$$Q = \bar{v} A$$

مثال: جریان آب با سرعت یکنواخت ۳ m/s به نازلی مطابق شکل وارد می شود. سرعت سیال را در خروجی نازل بیابید. شدت جریان حجمی چقدر است؟





$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

$$v_2 = v_1 \frac{A_1}{A_2} = 3 \frac{\pi \times 0.1^2 / 4}{\pi \times 0.02^2 / 4}$$

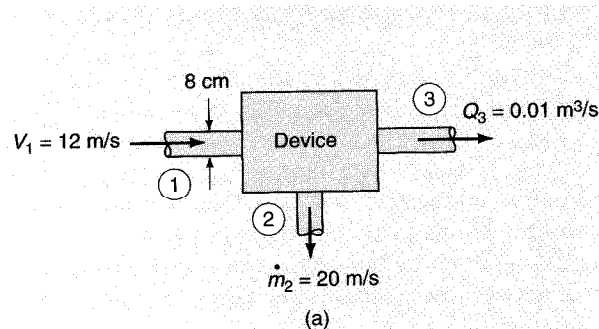
$$= 75 \text{ m}$$

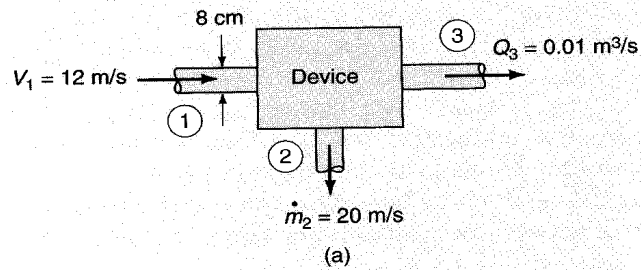
$$Q = A_1 v_1$$

$$= 3 \times \pi \times 0.1^2 / 4$$

$$= 0.0236 \text{ m}^3 / \text{s}$$

مثال: جریان آب به صورت نشان داده شده در شکل زیر به دستگاهی وارد و از آن خارج می شود. شدت تجمع جرم را در این دستگاه محاسبه کنید.





$$0 = \int_{c.v.} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{c.s.} \rho \hat{n} \cdot v dA$$

$$0 = \frac{dm}{dt} - \rho_1 A_1 v_1 + \rho_2 A_2 v_2 + \rho_3 A_3 v_3$$

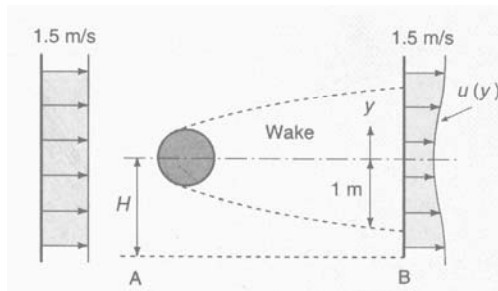
$$0 = \frac{dm}{dt} - 1000 \times \pi \times 0.04^2 \times 12 + 20 + 1000 \times 0.01$$

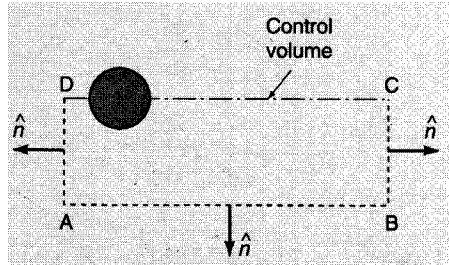
$$\frac{dm}{dt} = 30.3 \text{ kg / s}$$

مثال: جریان یکنواختی مطابق شکل به کره ای نزدیک می شود. توزیع سرعت سیال در نقطه نشان داده شده در پائین دست جریان به طور تقریبی عبارت است از:

$$u(y) = 1.25 + \frac{y^2}{4} \quad -1 < y < 1$$

مطلوب است شدت جریان جرمی که از سطح AB در واحد طول عبور می کند. فرض کنید چگالی  $1.23 \text{ kg/m}^3$  باشد.





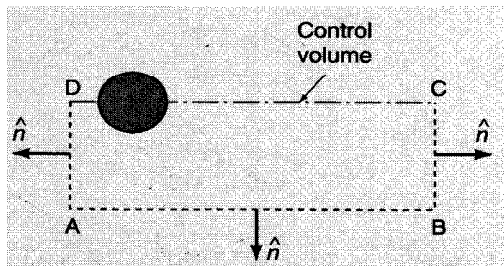
حجم کنترل: ABCD  
 سرعت روی سطح AD: ۱.۵ m/s  
 جریانی از CD عبور نمی کند به خاطر تقارن.

با فرض حالت پایا:

$$0 = \int_{c.s.} \rho v \cdot \hat{n} dA$$

$$0 = \dot{m}_{AB} + \int_0^1 1.23 \left( 1.25 + \frac{y^2}{4} \right) dy - 1.23 \times 1 \times 1.5$$

$$\dot{m}_{AB} = 0.205 \frac{kg}{s.m}$$





## معادله انرژی:

در مواردی کار (مثل تلمبه) یا گرمای تبادل شده را بخواهیم محاسبه کنیم به این معادله نیاز داریم.

وقتی اثرات ویسکوزیته قابل صرفنظر نباشند، برای ارتباط بین سرعت و فشار هم استفاده می شود.

$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{D}{Dt} \int_{sys} E \rho dV$$

$$E = U + gz + \frac{v^2}{2}$$

برای حجم کنترل:

$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{D}{Dt} \int_{sys} E \rho dV$$

در این حالت  $\eta = E$  است:

$$\frac{DN_{sys}}{Dt} = \int_{c.v.} \frac{\partial}{\partial t} (\eta \rho) dV + \int_{c.s.} \eta \rho \hat{n} \cdot v dA$$

$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{d}{dt} \int_{c.v.} E \rho dV + \int_{c.s.} \rho E v \cdot \hat{n} dA$$

## محاسبه کار:

کار نتیجه حرکت نیرو است:

$$\dot{W} = -F \cdot v_I$$

علامت منفی برای این است که اینجا فرض شده که این نیرو روی حجم کنترل کار انجام می دهد.

اگر نیرو حاصل از اعمال تنش روی سطح کنترل باشد:

$$\dot{W} = - \int_{c.s.} \tau \cdot v_I dA$$

$v_I$  سرعت نسبت به مختصات ثابت است.

$$v_I = v + v_{c.v.} + \Omega \times r$$

$v$  سرعت نسب به حجم کنترل است.

بنابراین کار می شود:

$$\dot{W} = - \int_{c.s.} \tau \cdot v dA + \dot{W}_I$$

$\dot{W}_I$  کار اینرسی است.

$$\dot{W}_I = - \int_{c.s.} \tau \cdot (v_{c.v.} + \Omega \times r) dA$$

تنش شامل تنش برشی و تنش عمودی می شود:  $\tau = -p\hat{n} + \tau_s$

بنابراین کار می شود:

$$\dot{W} = \int_{c.s.} p\hat{n} \cdot v dA - \int_{c.s.} \tau_s \cdot v dA + \dot{W}_I$$

$$\dot{W}_I = - \int_{c.s.} \tau \cdot (v_{c.v.} + \Omega \times r) dA$$

$$\dot{W} = \int_{c.s.} p\hat{n} \cdot v dA - \int_{c.s.} \tau_s \cdot v dA + \dot{W}_I$$

$$\dot{W} = \int_{c.s.} p\hat{n} \cdot v dA + \dot{W}_s + \dot{W}_{shear} + \dot{W}_I$$

کار کلی شامل:

کار جریان (کار فشار حجم)

کار محوری (shaft)

کار ناشی از مرز متحرک (مثل تسمه یا لوله)

کار حرکت حجم کنترل نسبت به مختصات ثابت.

قانون اول ترمودینامیک:

$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{d}{dt} \int_{c.v.} E \rho dV + \int_{c.s.} \rho E v \cdot \hat{n} dA$$

$$\dot{W} = \int_{c.s.} p \hat{n} \cdot v dA + \dot{W}_s + \dot{W}_{shear} + \dot{W}_I$$

$$\dot{Q} - \dot{W}_s - \dot{W}_{shear} - \dot{W}_I = \frac{d}{dt} \int_{c.v.} E \rho dV + \int_{c.s.} \left( E + \frac{p}{\rho} \right) \rho v \cdot \hat{n} dA$$

$$E = \frac{V_I^2}{2} + gz + u$$

$$\dot{Q} - \dot{W}_s - \dot{W}_{shear} - \dot{W}_I = \frac{d}{dt} \int_{c.v.} \left( \frac{V_I^2}{2} + gz + u \right) \rho dV + \int_{c.s.} \left( \frac{V_I^2}{2} + gz + u + \frac{p}{\rho} \right) \rho v \cdot \hat{n} dA$$

این شکل کلی معادله انرژی است.

$$-\dot{W}_s - \dot{W}_{shear} - \dot{W}_I =$$

$$\frac{d}{dt} \int_{c.v.} \left( \frac{V_I^2}{2} + gz \right) \rho dV + \int_{c.s.} \left( \frac{V_I^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} \right) \rho v \cdot \hat{n} dA + losses$$

$$losses = -\dot{Q} + \frac{d}{dt} \int_{c.v.} u \rho dV + \int_{c.s.} u \rho v \cdot \hat{n} dA$$

افت انرژی بر اثر عوامل زیر است:

- اصطکاک ناشی از ویسکوزیته باعث افزایش انرژی داخلی یا انتقال گرما می شود.
- تغییر در هندسه مسئله به طوری که منجر به جدا شدن بخشی از جریان گردد که بر اثر آن انرژی مفید مصرف می شود تا جریان دومی ایجاد گردد.

$$-\dot{W}_s - \dot{W}_{shear} - \dot{W}_I =$$

$$\frac{d}{dt} \int_{c.v.} \left( \frac{V_I^2}{2} + gz \right) \rho dV + \int_{c.s.} \left( \frac{V_I^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} \right) \rho v \cdot \hat{n} dA + losses$$

جریان یکنواخت پایا (Steady Uniform Flow):

- جریان با زمان تغییر نمی کند.
- یک ورودی و یک خروجی وجود دارد.
- توزیع پارامترها در مقاطع یکسان است.

$$W_{shear} = W_I = 0$$

$$-\dot{W}_s = \rho_2 v_2 A_2 \left( \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho_2} + gz_2 \right) - \rho_1 v_1 A_1 \left( \frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho_1} + gz_1 \right) + losses$$

با تقسیم بر  $mg$  داریم:

$$\dot{m} = \rho_2 v_2 A_2 = \rho_1 v_1 A_1$$

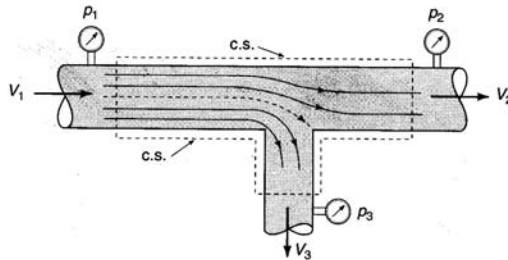
$$-\frac{\dot{W}_s}{\dot{m} g} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho_2 g} - \frac{p_1}{\rho_1 g} + z_2 - z_1 + h_f$$

$$h_f = \frac{\dot{Q}}{\dot{m} g} + \frac{u_2 - u_1}{g} = K \frac{v^2}{2g}$$

اگر از افت انرژی صرفنظر شود و کاری هم به سیال وارد نشود  
(یا از آن گرفته نشود) و سیال تراکم ناپذیر باشد معادله برنولی  
به دست می آید:

$$\frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 = \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1$$

کاربرد معادله انرژی به جریان دیک سه راهی (چند ورودی و خروجی).



$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + h_{f1-2}$$

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{v_3^2}{2g} + \frac{p_3}{\rho g} + z_3 + h_{f1-3}$$

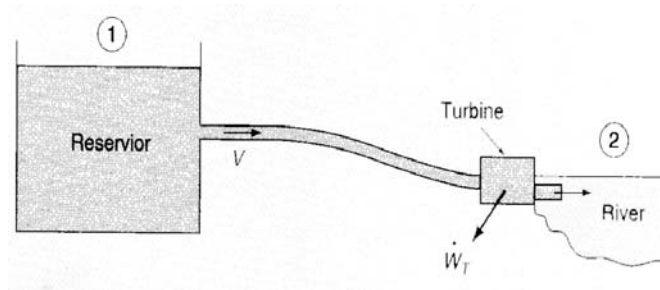
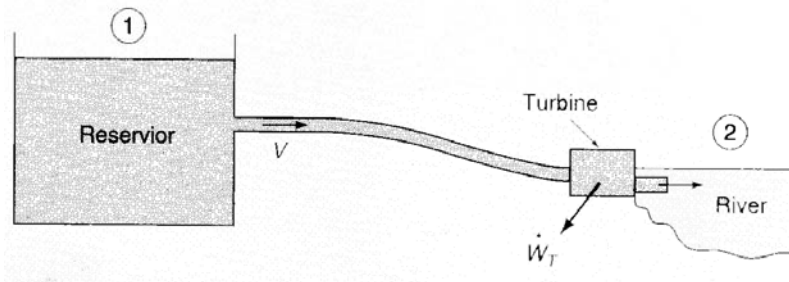
در صورت وجود تلمبه و توربین:

$$\frac{\dot{W}_s}{\dot{m} g} = \frac{\dot{W}_T - \dot{W}_P}{\dot{m} g} = h_T - h_P$$

$$h_P + \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = h_T + \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + h_f$$

$$\frac{(p_2 - p_1)}{\rho g} + \frac{(v_2^2 - v_1^2)}{2g} + (z_2 - z_1) = h_P - h_T - h_f$$

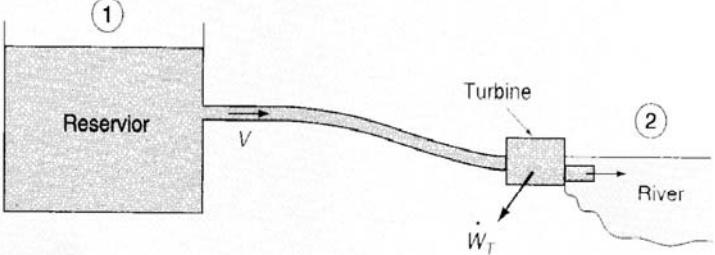
مثال: جریان آب از مخزنی از طریق لوله ای به قطر  $0.8\text{ m}$  به رودخانه سرزیر می گردد. یک توربین نیز در مسیر جریان قرار دارد. اگر سطح آب در مخزن  $30\text{ m}$  بالاتر از سطح آب رودخانه، شدت جریان آب  $3\text{ m}^3/\text{s}$  و بازده توربین  $80\%$  باشد، قدرت توربین را محاسبه نمایید. فرض کنید که ضریب اتلاف انرژی در لوله  $K=2$  است.



$$V = \frac{Q}{A} = \frac{3}{\pi \times 0.8^2 / 4} = 5.968 \text{ m/s}$$

$$h_p + \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = h_t + \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + K \frac{v^2}{2g}$$





$$30 = h_T + 2 \frac{5.968^2}{2 \times 9.81}$$

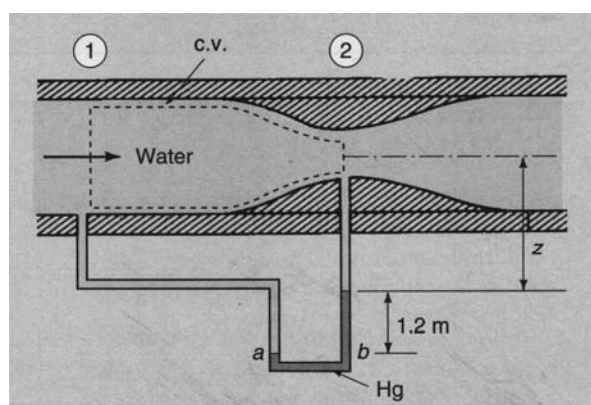
$$h_T = 26.4 \text{ m}$$

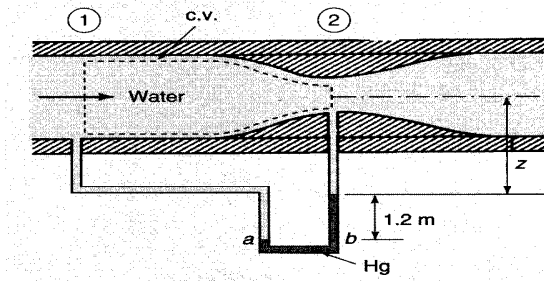
$$\dot{W}_T = \rho g h_T Q \eta_T$$

$$= 1000 \times 9.81 \times 26.4 \times 3 \times 0.8$$

$$= 622000 \text{ W} = 622 \text{ kW}$$

مثال: یک لوله وانتوری مطابق شکل زیر قطر لوله را از ۱۰ cm به ۵ cm کاهش می دهد. شدت جریان را در شرایط ایده آل محاسبه نمایید.





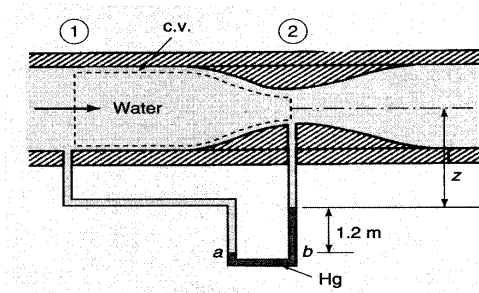
$$p_a = p_b$$

$$p_1 + \rho g(z + 1.2) = p_2 + \rho g z + 13.6 \rho g \times 1.2$$

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho g} = 15.12 \text{ m}$$

$$V_1 A_1 = V_2 A_2$$

$$V_2 = 4V_1$$



معادله انرژی:

$$0 = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} + \frac{p_2 - p_1}{\rho g} + (z_2 - z_1)$$

$$= \frac{16V_1^2 - V_1^2}{2g} - 15.12 + 0$$

$$\Rightarrow V_1 = 4.45 \text{ m/s}$$

$$\begin{aligned}
 Q &= A_1 V_1 \\
 &= \frac{\pi}{4} \times 0.1^2 \times 4.45 = 0.035 \text{ m}^3 / \text{s} \\
 \dot{m} &= \rho Q \\
 &= 1000 \times 0.035 = 35 \text{ kg} / \text{s}
 \end{aligned}$$

معادله اندازه حرکت (قانون دوم نیوتن):

$$\sum F = \frac{D}{Dt} \int_{sys} \rho v dV$$

در این حالت  $\eta = v$  است و معادله اندازه حرکت برای حجم کنترل به

$$\sum F = \frac{d}{dt} \int_{c.v.} \rho v dV + \int_{c.s.} \rho v (v \cdot \hat{n}) dA$$

صورت زیر می شود:

مقدار  $\sum F$  شامل تمام نیروهای وارد بر حجم کنترل می شود:

- نیروهای وارد بر سطح (فشار، تنش برشی)

- نیروهای بدنه (وزن)

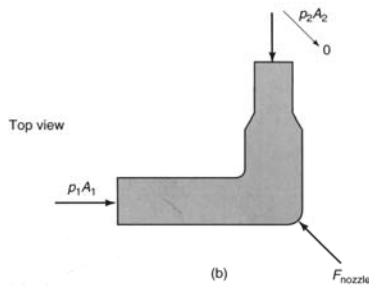
### جریان یکنواخت پایا:

اگر جریان های ورودی و خروجی به حجم کنترل در حالت پایا باشند و توزیع یکنواخت داشته باشند، معادله اندازه حرکت به

$$\sum F = \sum_{i=1}^N \rho_i A_i v_i \left( v_i \cdot \hat{n} \right) \quad \text{شکل زیر ساده می شود:}$$

$$v \cdot \hat{n} = v \quad \text{در ورودی:}$$

$$\text{در خروجی:} \\ v \cdot \hat{n} = -v$$



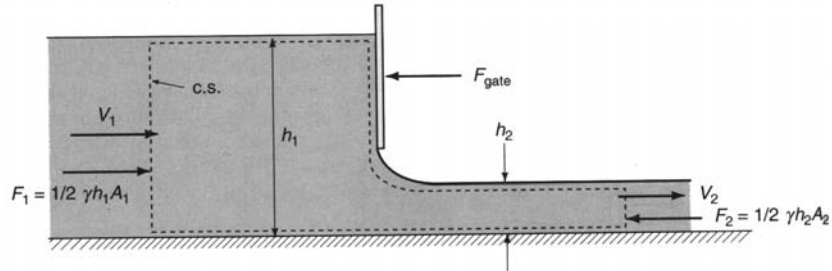
اگر فقط یک ورودی و یک خروجی داشته باشیم:

$$\sum F = \rho_2 A_2 v_2^2 - \rho_1 A_1 v_1^2 \quad \text{موازنه جرم:}$$

$$\sum F = \dot{m} (v_2 - v_1) \quad \text{بنابراین:}$$

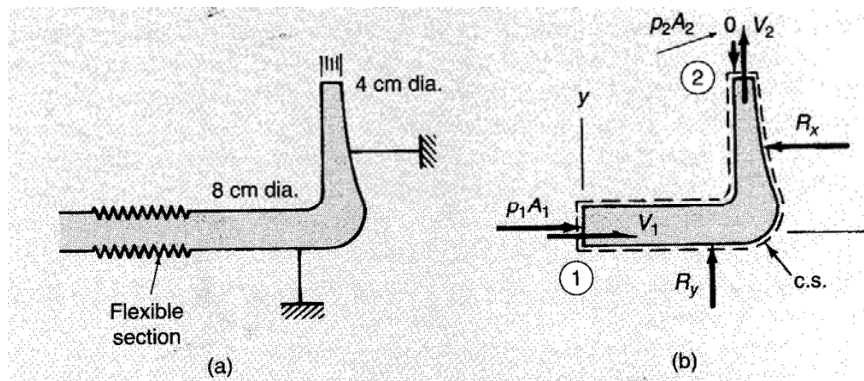
$$\dot{m} = \rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2$$

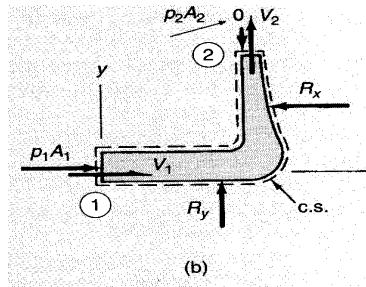
مثال:



$$\sum F_x = -F_{gate} + F_1 - F_2 = \dot{m}(v_2 - v_1)$$

مثال: آب با شدت جریان  $0.01 \text{ m}^3/\text{s}$  از درون لوله ای افقی وارد یک خم شده و به اتمسفر تخلیه می گردد. نیرویی که به هر یک از میله های نگهدارنده این لوله وارد می شود را محاسبه کنید. از نیروهای ویسکوز و بدنه صرف نظر کنید.





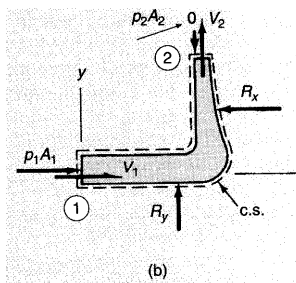
$$v_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{0.01}{\frac{\pi}{4} \times 0.08^2} = 1.99 \text{ m/s}$$

$$v_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{0.01}{\frac{\pi}{4} \times 0.04^2} = 7.96 \text{ m/s}$$

محاسبه  $p_1$ :

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g}$$

$$p_1 = \frac{\rho}{2}(v_2^2 - v_1^2) = \frac{1000}{2}(7.96^2 - 1.99^2) = 29700 \text{ Pa}$$

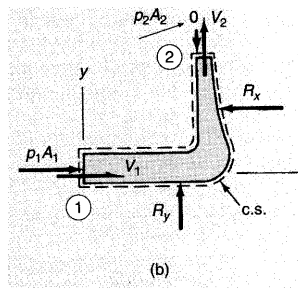


محاسبه  $R_x$  از معادله اندازه حرکت در جهت  $x$ :

$$p_1 A_1 - R_x = \dot{m}(v_{2x} - v_{1x})$$

$$29700 \times \frac{\pi}{4} \times 0.08^2 - R_x = 1000 \times 0.01(0 - 1.99)$$

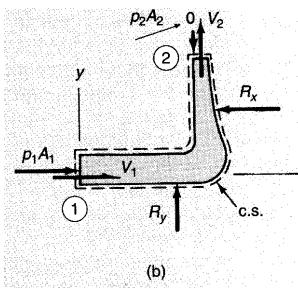
$$R_x = 169 \text{ N}$$



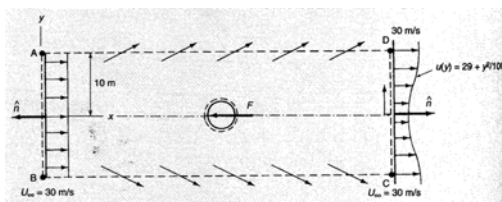
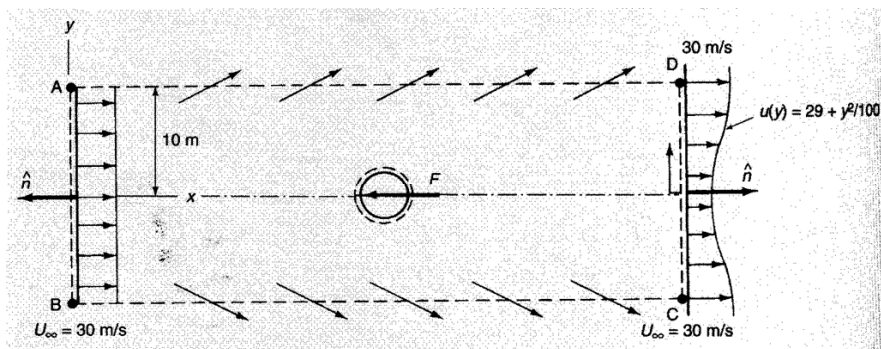
محاسبه  $R_y$  از معادله اندازه حرکت در جهت  $y$ :

$$R_y = \dot{m}(v_{2y} - v_{1y})$$

$$R_y = 1000 \times 0.01 \times (7.96 - 0) = 79.6 \text{ N}$$



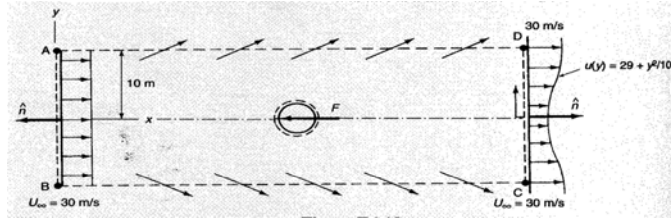
مثال: جریان هوا از روی استوانه ای مطابق شکل زیر عبور می کند. حجم کنترل شامل استوانه نمی شود. نیروی کشش وارد بر واحد طول استوانه را به دست آورید. چگالی هوا را  $1.23 \text{ kg/m}^3$  در نظر بگیرید.



همه هوایی که از سطح AB وارد می شود از سطح CD خارج نمی شود بلکه مقداری از هوا از سطوح BC و AD خارج می شود. موازنه اندازه حرکت برای حجم کنترل ABCD می شود:

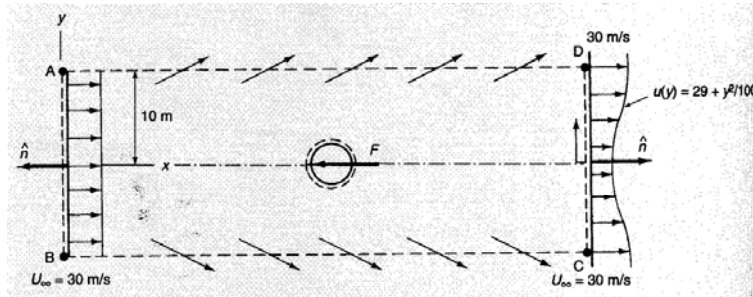
$$\begin{aligned}
 -F &= \int_{c.s.} \rho v_x v_x \hat{n} dA \\
 &= \int_{CD} \rho u^2 dA + u_\infty \dot{m}_{AD} + u_\infty \dot{m}_{BC} - \int_{AB} \rho u^2 dA \\
 &= 2 \int_0^{10} 1.23 \left( 29 + \frac{y^2}{100} \right)^2 dy + 2 \times 30 \dot{m}_{AD} - 1.23 \times 30^2 \times 20
 \end{aligned}$$





برای محاسبه  $m_{BC} = m_{AD}$  از موازنه جرم استفاده می کنیم:

$$\begin{aligned}
 0 &= \dot{m}_{AD} + \int_0^{10} \rho u(y) dy - \rho \times 10 \times 30 \\
 &= \dot{m}_{AD} + \int_0^{10} 1.23 \times \left( 29 - \frac{y^2}{100} \right) dy - 1.23 \times 10 \times 30 \\
 \dot{m}_{AD} &= 8.2 \text{ kg / s.m}
 \end{aligned}$$



بنابراین:

$$\begin{aligned}
 F &= -21170 - 492 + 22140 \\
 &= 480 \text{ N / m}
 \end{aligned}$$

## فصل ششم

### آنالیز بعدی

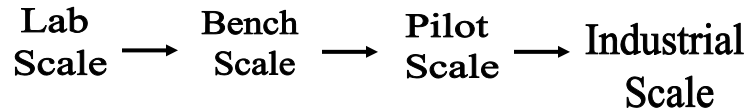
### آنالیز بعدی

مسائل کمی هستند که می‌توان آنها را فقط به کمک معادلات حرکت حل نمود.

اغلب لازم است که به کمک آزمایش رابطه بین متغیرهای مورد نظر را برقرار نمود.

لازم است که تعداد آزمایش‌ها را به حداقل رساند و برای این کار از آنالیز بعدی استفاده کرد.

## مراحل افزایش مقیاس



### How to be a Scientist or Engineer

*The steps in understanding and/or control any physical phenomena is to:*

- 1. Identify the relevant physical variables.*
- 2. Relate these variables using the known physical laws.*
- 3. Solve the resulting equations.*

**Secret #1: Usually not all of these are possible. Sometimes none are.**

## **ALL IS NOT LOST BECAUSE OF**

### **Secret #2: Dimensional Analysis**

#### *Rationale*

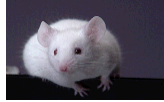
- Physical laws must be **independent** of arbitrarily chosen units of measure. **Nature does not care if we measure lengths in centimeters or inches or light-years or ...**
- Check your units! **All natural/physical relations must be dimensionally correct.**

### **Why are there no small animals in the polar regions?**

---

- Heat Loss  $\propto$  Surface Area ( $L^2$ )
- Mass  $\propto$  Volume ( $L^3$ )
- Heat Loss/Mass  $\propto$  Area/Volume  
 $= L^2 / L^3$   
 $= L^{-1}$

$$\begin{aligned}\text{Heat Loss/Mass} &\propto \text{Area/Volume} \\ &= L^2/L^3 \\ &= L^{-1}\end{aligned}$$



Mouse ( $L = 5 \text{ cm}$ )  
 $1/L = 1/(0.05 \text{ m})$   
 $= 20 \text{ m}^{-1}$

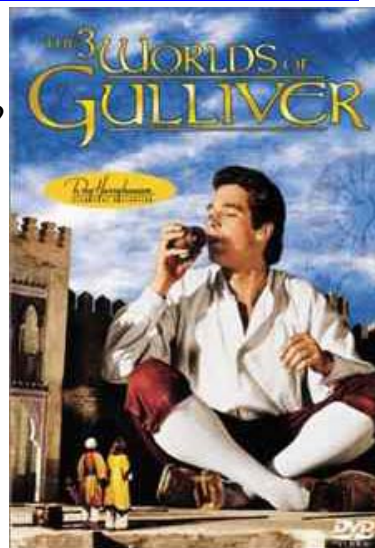


Polar Bear ( $L = 2 \text{ m}$ )  
 $1/L = 1/(2 \text{ m})$   
 $= 0.5 \text{ m}^{-1}$

**20 : 0.5 or 40 : 1**

## Gulliver's Travels: Dimensional Analysis

- Gulliver was 12x the Lilliputians
- How much should they feed him?  
12x their food ration?
- A persons food needs are related to their mass (volume) – This depends on the cube of the linear dimension.



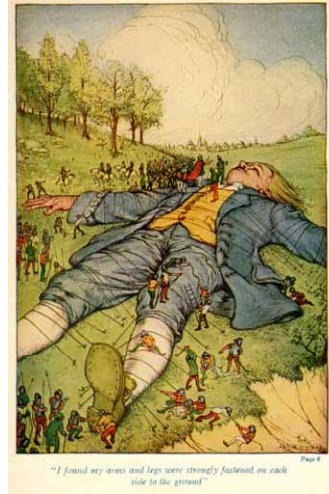
Let  $L_G$  and  $V_G$  denote Gulliver's linear and volume dimensions.  
Let  $L_L$  and  $V_L$  denote the Lilliputian's linear and volume dimensions.

Gulliver is 12x taller than the  
Lilliputians,  $L_G = 12 L_L$

Now  $V_G \propto (L_G)^3$  and  $V_L \propto (L_L)^3$ , so

$$\begin{aligned} V_G / V_L &= (L_G)^3 / (L_L)^3 \\ &= (12 L_L)^3 / (L_L)^3 \\ &= 12^3 \\ &= 1728 \end{aligned}$$

Gulliver needs to be fed 1728 times  
the amount of food each day as the  
Lilliputians.



"I found my arms and legs were strongly fastened on each side to the ground." Page 4

**This problem has direct relevance to drug dosages in humans**

تمامی جملات یک معادله باید دارای بعد یکسان باشند، مثلاً در رابطه  
برنولی:

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + Z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + Z_2$$

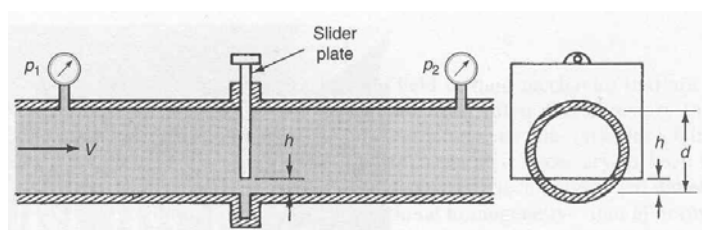
همه جملات دارای واحد طول هستند. اگر این معادله را مثلاً بر  $Z_1$   
تقسیم کنیم:

$$\frac{P_1}{\rho g Z_1} + \frac{V_1^2}{2g Z_1} + 1 = \left( \frac{V_2^2}{2g Z_2} + \frac{V_2^2}{\rho g Z_2} + 1 \right) \frac{Z_2}{Z_1}$$

این معادله بصورت بدون بعد در می‌آید و تمامی جملات آن بدون واحد  
هستند.

در آنالیز بعدی می‌خواهیم متغیرها را طوری با هم ترکیب کنیم که اعداد حاصل بدون بعد باشند و بعد با اعداد بدون بعد کار کنیم. در مطالعات سیستم‌های مختلف اغلب لازم است که اطلاعاتی در مورد اجسامی که بسیار بزرگ هستند بدست آوریم. در این صورت اگر بخواهیم روی مدل اصلی کار کنیم، هم کار مشکل می‌شود و هم هزینه زیادی در بر دارد. بجای آن می‌توان از مدل‌های کوچکتر در مقیاس آزمایشگاهی استفاده نمود و با استفاده از تشابه و اعداد بدون بعد نتایج را به مدل بزرگ تعمیم داد.

مثلاً فرض کنید می‌خواهیم افت فشار سیال را در یک شیر نیمه باز مطالعه کنیم:



$$\Delta P = f(V, \rho, \mu, d, h)$$

برای مطالعه اثر هر یک از این متغیرها باید همه را ثابت نگاه داشت و تغییر یک متغیر را روی  $\Delta P$  بررسی نمود.

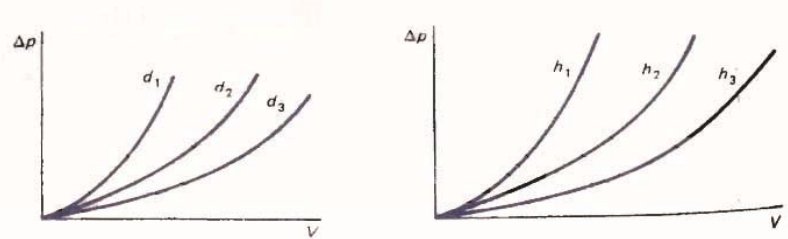
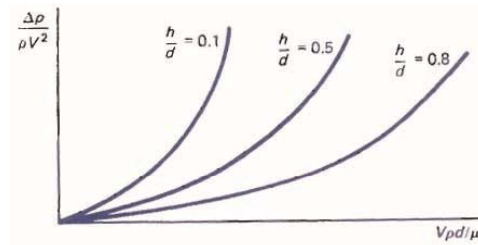


Figure 6.3 Pressure drop versus velocity curves: (a)  $\rho, \mu, h$  fixed; (b)  $\rho, \mu, d$  fixed.

حالا بجای این کار فرض کنید که پارامترها را طوری با هم ترکیب کنیم که اعداد بدون بعد بوجود بیآورند. مثلاً در این مورد:

$$\frac{\Delta P}{\rho V^2} = f\left(\frac{V\rho d}{\mu}, \frac{h}{D}\right)$$

این رابطه کلاً ساده تر از رابطه قبلی است و آزمایشها را کم می کند.



البته مهم است که چه پارامترهایی مؤثر هستند و باید در نظر گرفته شوند.



## مروری بر ابعاد

همه مقادیری که ما با آن سرو کار داریم، ترکیبی از طول- زمان- جرم و نیرو هستند و اینها با قانون دوم نیوتن به هم مربوط می شوند:

$$\sum F = ma \Rightarrow F = M \frac{L}{T^2}$$

T,L,M,F ابعاد نیرو، جرم، طول و زمان هستند. اگر ما سه تا از این ابعاد را اصل بگیریم، چهارمی برحسب آنها دیگر مشخص می شود. سیستم M-L-T را انتخاب می کنیم و نیرو را از روی آن تعریف می کنیم.

ابعاد دیگری هم هستند که در صورتیکه نیروهای الکترومغناطیک یا گرادیان دما را در نظر بگیریم، ظاهر می شوند که ما در اینجا کاری با آنها نداریم.

$$P = \rho RT \Rightarrow [RT] = [P / \rho]$$

$$= \frac{F}{L^2} \cdot \frac{L^3}{M} = \frac{ML/T^2}{L^2} \frac{L^3}{M} = \frac{L^3}{T^2}$$

تنها جایی که اثرات دمایی ممکن است در نظر گرفته شود، در جریان تراکم پذیر است که برای گازها با توجه به قانون گاز ایده ال به ابعاد موجود مرتبط می شود.

کمیت	نشانه	بعد
طول	l	L
زمان	t	T
جرم	m	M
نیرو	F	ML/T <sup>2</sup>
سرعت	V	L/T
شتاب	a	L/T <sup>2</sup>
سطح	A	L <sup>2</sup>
شدت جریان حجمی	Q	L <sup>3</sup> /T
شدت جریان جرمی	m	M/T
فشار- تنش	P, τ	M/LT <sup>2</sup>
چگالی	ρ	M/L <sup>3</sup>
ویسکوزیته	μ	M/LT
ویسکوزیته سینماتیک	ν	L <sup>2</sup> /T
کار	W	ML <sup>2</sup> /T <sup>2</sup>
توان- شدت جریان گرمایی	Q, W	ML <sup>2</sup> /T <sup>3</sup>
کشش سطحی	σ	M <sup>2</sup> /T
ضریب کشسانی	B	M/LT <sup>2</sup>

نحوه ساختن اعداد بدون بعد:

فرض کنید می خواهیم از ترکیب متغیرهای زیر یک عدد بدون بعد بسازیم:

σ کشش سطحی

v سرعت

ρ چگالی

l طول

$$\pi = \sigma^a v^b \rho^c l^d$$

بر حسب ابعاد می نویسیم:

$$\left(\frac{M}{T^2}\right)^a \left(\frac{L}{T}\right)^b \left(\frac{M}{L^3}\right)^c L^d = M^0 L^0 T^0$$

$$M : a + c = 0$$

$$L : b - 3c + d = 0$$

$$T : -2a - b = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -c \\ b = 2c \\ d = c \end{cases}$$

$$\pi = \sigma^{-c} v^{2c} \rho^c l^c = \left( \frac{\rho l v^2}{\sigma} \right)^c$$

C=1 انتخاب می کنیم چون عدد بدون بعد به هر توانی برسد باز هم بدون بعد است.

$$\Rightarrow \pi = \frac{\rho l v^2}{\sigma}$$

## قضیه باکینگهام $\pi$

اگر در یک مدل  $n$  متغیر داشته باشیم:

$$X_1 = f(x_2, x_3, \dots, x_n)$$

متغیر تابع      متغیرهای مستقل

و در این مسئله  $m$  بعد اولیه وجود داشته باشد، در این صورت می توان مدل را بر حسب  $n-m$  پارامتر بدون بعد بیان کرد:

$$\pi_1 = f(\pi_2, \pi_3, \dots, \pi_{n-m})$$

مراحل زیر برای بی بعد کردن معادلات بکار می‌روند:

الف) رابطه را به صورت یک متغیر تابع بر حسب  $n-1$  متغیر مستقل بنویسید.

ب) تعداد  $m$  متغیر را که ابعاد اصلی در آنها موجود باشند را تعیین کنید. خود این متغیرها نباید یک عدد بدون بعد تشکیل دهند. (متغیرهای تکرار شونده)

ج) با ترکیب متغیرهای تکرار شونده یا هر یک از متغیرهای باقیمانده یک عدد بدون بعد می‌سازیم.

د) رابطه بر حسب  $(n-m)$  متغیر بدون بعد می‌نویسیم.

مثال: می‌خواهیم نیروی کشش  $F_D$  وارد بر یک استوانه به قطر  $d$  و طول  $l$  را بررسی کنیم.

$$F_D = f(d, l, v, \mu, \rho)$$

اگر متغیری را کم و یا زیاد نوشته باشیم، در قسمت آزمایش مشخص می‌شود.

$$[F_D] = \frac{ML}{T^2} \quad [v] = \frac{L}{T} \quad [\mu] = \frac{M}{LT}$$

$$[d] = L \quad [l] = L \quad [\rho] = \frac{M}{L^3}$$

$n=6$  تعداد متغیرها

$m=3$  تعداد ابعاد

$n-m=3$  تعداد ابعاد بدون بعد

حالا باید متغیرهای تکرار شونده را تعیین کرد. این متغیرها را  $\rho, v, d$  در نظر می گیریم. اینها دارای هر سه بعد اصلی هستند و عدد بدون بعد نمی سازند. توجه کنید که مثلا  $l, d$  را نمی توانیم با هم تکرار شونده در نظر بگیریم، چون خودشان عدد بدون بعد می سازند.  
حالا اعداد بدون بعد را می سازیم.

$$\pi_1 = d^a v^b \rho^c F_D \Rightarrow \pi_1 = \frac{F_D}{\rho v^2 d^2}$$

$$\pi_2 = d^a v^b \rho^c l \Rightarrow \pi_2 = \frac{l}{d}$$

$$\pi_3 = d^a v^b \rho^c \mu \Rightarrow \pi_3 = \frac{\mu}{\rho v d}$$

حالا رابطه جدید بدون بعد را می نویسیم:

$$\pi_1 = f(\pi_2, \pi_3)$$

$$\text{or } \frac{F_D}{\rho v^2 d^2} = f\left(\frac{l}{d}, \frac{\mu}{\rho v d}\right)$$

اکنون به جای ۵ متغیر مستقل، فقط ۲ متغیر مستقل داریم.

## اعداد بدون بعد مهم

رابطه خیلی کلی برای افت فشار در جریان سیال:

$$\Delta p = f(l, v, \rho, \mu, g, \sigma, c)$$

قضیه  $\pi$ :

$$\frac{\Delta p}{v^2 \rho} = f\left(\frac{\rho v l}{\mu}, \frac{v^2}{lg}, \frac{v^2 \rho l}{\sigma}, \frac{v}{c}\right)$$

$$Eu = \frac{\Delta p}{v^2 \rho} \quad \text{عدد اویلر}$$

$$Re = \frac{\rho v l}{\mu} \quad \text{عدد رینولدز}$$

$$Fr = \frac{v}{\sqrt{lg}} \quad \text{عدد فراود}$$

$$M = \frac{v}{c} \quad \text{عدد ماخ}$$

$$We = \frac{v^2 \rho l}{\sigma} \quad \text{عدد وبر}$$

هر کدام از این اعداد نسبت دو نیرو هستند.

این نیروها عبارتند از:

$$F_p = \Delta p A \cong \Delta \rho l^2 \quad \text{نیروی فشاری}$$

$$F_I = \frac{mv \cdot dv}{dx} = \rho v^2 l^2 \quad \text{نیروی اینرسی}$$

$$F_\mu = \tau A = \mu \cdot \frac{dv}{dy} \cdot A = \nu l \mu \quad \text{نیروی ویسکوز}$$

$$F_g = mg = \rho l^3 \cdot g \quad \text{نیروی جاذبه}$$

$$F_B = BA = \rho c^2 l^2 \quad \text{نیروی تراکم پذیری}$$

$$F_\sigma = \sigma l \quad \text{نیروی کشش سطحی}$$

بنابراین:

وقتی افت فشار مهم باشد:

$$Eu = \frac{\text{نیروی فشاری}}{\text{نیروی اینرسی}} \quad Eu = \frac{\Delta p}{v^2 \rho} \quad (\text{اغلب جریان ها})$$

جریان هایی که نیروی ویسکوزیته در آنها مهم باشد:

$$Re = \frac{\text{نیروی اینرسی}}{\text{نیروی ویسکوز}} \quad Re = \frac{\rho v l}{\mu} \quad (\text{جریان های داخلی - لایه مرزی})$$

جریان هایی که تحت تأثیر نیروی جاذبه باشند:

$$Fr = \frac{\text{نیروی اینرسی}}{\text{نیروی جاذبه}} \quad Fr = \frac{v}{\sqrt{lg}} \quad (\text{جریان های سطح آزاد})$$

جریان هایی که تراکم پذیری در آنها مهم باشد.  
( $v > 0.3c$ )

$$M = \frac{\text{نیروی اینرسی}}{\text{نیروی تراکم پذیری}} \quad M = \frac{v}{c}$$

جریان هایی که تحت تأثیر نیروی کشش سطحی باشند.  
(جریان در سطح تماس)

$$We = \frac{\text{نیروی اینرسی}}{\text{نیروی کشش سطحی}} \quad We = \frac{v^2 \rho l}{\sigma}$$

## تشابه

وقتی عملی نباشد که معادلات به صورت تحلیلی یا عددی حل شوند و یا مدل اصلی خیلی بزرگ باشد، باید از مدل استفاده نمود و روابط ساده تری را بکار گرفت که اثر پارامترهای مهم را معلوم کند.



اگر بخواهیم روی مدل کار کنیم و نتایج را به مقیاس اصلی تعمیم دهیم، باید مطمئن بود که مقادیر اندازه گیری شده روی مدل را می توان استفاده کرد که مقادیر متناظر با آن را روی مقیاس اصلی پیش بینی نمود. در این صورت مدل اصلی و مدل آزمایشگاهی باید تشابه دینامیک داشته باشند، یعنی نیروهایی که روی این دو عمل می کند دارای نسبت یکسان باشند.

$$\frac{(F_1)_1}{(F_1)_2} = \frac{(F_p)_1}{(F_p)_2} = \frac{(F_\mu)_1}{(F_\mu)_2} = \frac{(F_g)_1}{(F_g)_2} = cte$$

$$or \quad \frac{(F_1)}{(F_p)_1} = \frac{(F_1)}{(F_p)_2} \quad , \quad \frac{(F_1)}{(F_\mu)_1} = \frac{(F_1)}{(F_\mu)_2} \quad , \quad \frac{(F_1)}{(F_g)_1} = \frac{(F_1)}{(F_g)_2}$$

$$Eu_1 = Eu_2 \quad , \quad Re_1 = Re_2 \quad , \quad Fr_1 = Fr_2$$

اگر رابطه بین نیروها به صورت زیر باشد:

$$F_I = f(F_p, F_\mu, F_g)$$

با استفاده از آنالیز بعدی می‌توان نوشت:

$$Eu = f(Re, Fr)$$

بنابراین می‌توان گفت که اگر عدد رینولدز و عدد فراود در مدل همان باشند که در مقیاس اصلی است آنگاه عدد اولر هم همان خواهد بود.

اگر نسبت سرعتها برابر باشند:

$$\frac{V_1}{V_2} = Cte$$

در این صورت تشابه سینتیکی داریم و در نتیجه توزیع خطوط جریان در مدل آزمایشگاهی و صنعتی یکسان خواهد بود (فقط در نسبت تشابه متفاوتند).

اگر نسبت طولها برابر باشند:

$$\frac{l_1}{l_2} = Cte$$

در این صورت تشابه هندسی داریم و در نتیجه مدل آزمایشگاهی و صنعتی شکل مشابه خواهند داشت.

برای آنکه تشابه کامل برقرار باشد باید:

الف) تشابه هندسی داشته باشیم.

ب) تشابه سینتیکی داشته باشیم.

ج) تشابه دینامیکی (در مورد اعداد بدون بعد مؤثر) داشته باشیم.

مثال:

یک تلمبه صنعتی باید به گونه ای طراحی شود که  $1.5 \text{ m}^3/\text{s}$  آب را به مقدار  $40 \text{ KPa}$  افزایش فشار دهد، قطر پروانه تلمبه  $40 \text{ Cm}$  است. برای مطالعه رفتار این تلمبه یک مدل آزمایشگاهی با قطر پروانه  $8 \text{ Cm}$  مورد استفاده قرار می گیرد. مایع آزمایشگاهی همان آب است. چه شدت جریانی از آب و چه اختلاف فشاری در مدل آزمایشگاهی باید بکار برد؟

تشابه دینامیکی

$$Re_1 = Re_2$$

$$\frac{V_1 d_1}{\mu_1} = \frac{V_2 d_2}{\mu_2} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{d_1}{d_2} = \frac{0.4}{0.08} = 5$$

$$Q = VA \quad \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{V_2 D_2^2}{V_1 D_1^2} = 5 \times \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow Q_2 = \frac{Q_1}{5} = \frac{1.5}{5} = 0.3 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Eu_1 = Eu_2$$

$$\left(\frac{\Delta P}{\rho V^2}\right)_1 = \left(\frac{\Delta P}{\rho V^2}\right)_2 \Rightarrow \Delta P_2 = \Delta P_1 \frac{V_2^2}{V_1^2}$$

$$= 400 \times 5^2 = 10000 \text{ KPa}$$

## بی بعد کردن معادلات:

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 V + \rho g \quad \text{معادله نویه- استوکس:}$$

$$l \Rightarrow x^* = x/l, y^* = y/l, z^* = z/l \quad \text{طول مشخصه:}$$

$$\rho \bar{V}^2 \Rightarrow P^* = P / \rho \bar{V}^2 \quad \text{فشار مشخصه:}$$

$$\bar{V} \Rightarrow V^* = V / \bar{V} \quad \text{سرعت مشخصه:}$$

$$l / \bar{V} \Rightarrow t^* = t / (l / \bar{V}) \quad \text{زمان مشخصه:}$$

$$\nabla^* = \frac{\partial}{\partial x^*} i + \frac{\partial}{\partial y^*} j + \frac{\partial}{\partial z^*} k$$

$$= l \frac{\partial}{\partial x} i + l \frac{\partial}{\partial y} j + l \frac{\partial}{\partial z} k = l \nabla$$

$$\rho \frac{D(\nabla^* \bar{V})}{D(t^* l / V)} = \frac{-1}{l} \nabla^* (p^* l \bar{V}^2) + \mu \frac{1}{l^2} \nabla^{*2} (V^* \bar{V}) + \rho g$$

$$\frac{DV^*}{Dt^*} = -\nabla^* P^* + \frac{\mu}{\rho l} \nabla^{*2} V^* + \frac{|g| l}{\bar{V}^2} \cdot \frac{g}{|g|}$$

$$\Rightarrow \frac{DV^*}{Dt^*} = -\nabla^* P^* + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^{*2} V^* + \frac{1}{\text{Fr}^2} \bar{u}$$

به همین ترتیب برای معادله پیوستگی :

$$\nabla^* \cdot V^* = 0$$

## فصل هفتم

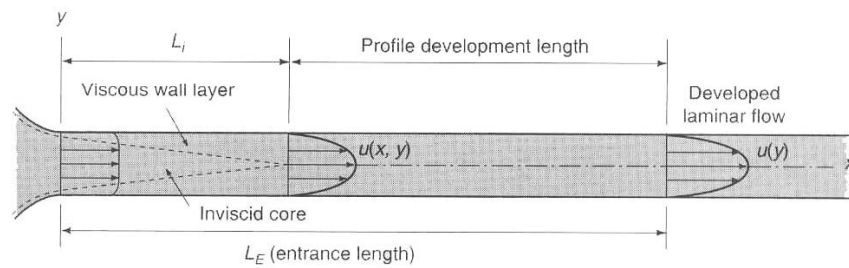
### جریان در لوله ها

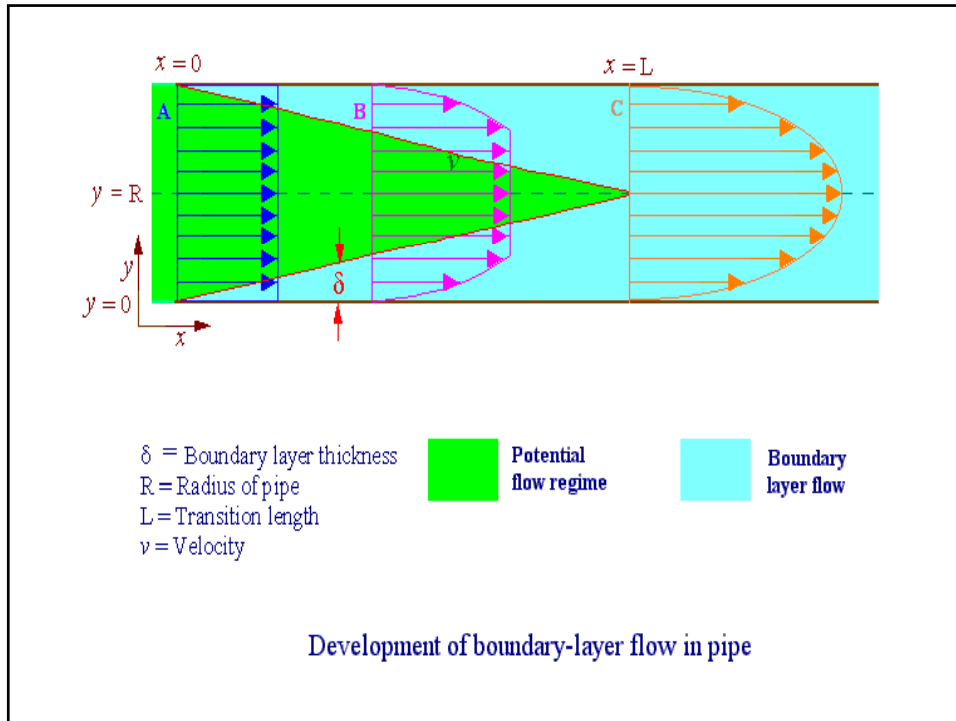
### جریان در لوله ها

جریان آرام  $Re < 2100$

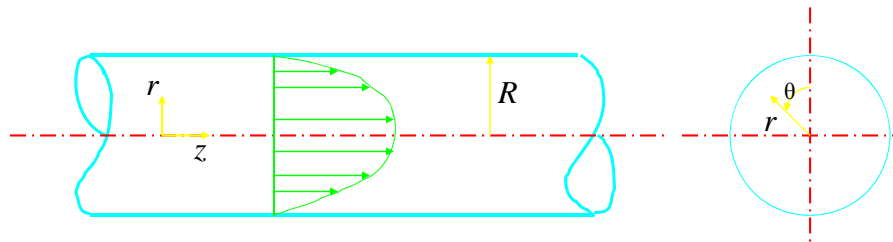
جریان در هم  $Re > 2100$

برای جریان آرام  $\frac{L_E}{D} = 0.058 Re$  برای جریان درهم  $\frac{L_E}{D} = 120$





حل معادله نویه - استوکس برای جریان کاملاً توسعه یافته درون لوله



$$\rho \left( \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right)$$

S.S.    خطوط جریان موازی چاره    جریان غیر چرخشی    جریان کاملاً توسعه یافته    جریان کاملاً توسعه یافته

$$= -\frac{\partial p}{\partial z} + \cancel{\rho g_z} + \mu \left( \frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right)$$



برای سادگی فرض می کنیم لوله افقی باشد، ولی اگر زاویه دار هم باشد فقط باید بجای P در معادلات بعدی پایه  $P+\rho gh$  بگذاریم.

$$\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right)$$

$$V_z = V_z(r) \quad \text{چون}$$

بنابراین  $\frac{\partial P}{\partial z}$  باید مقدار ثابتی باشد (در جریان توسعه یافته).

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dV_z}{dr} \right) = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\Delta p}{L}$$

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{dV_z}{dr} \right) = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\Delta P}{L} r$$

$$r \frac{dV_z}{dr} = \frac{\Delta p}{2 \mu L} r^2 + A$$

$$\frac{dV_z}{dr} = \frac{\Delta p}{2 \mu L} r + \frac{A}{r}$$

$$V_z = \frac{\Delta p}{4 \mu L} r^2 + A \ln r + B$$

$$B.C.1: \quad r=0, \frac{dV_z}{dr}=0 \Rightarrow A=0$$

$$B.C.2: \quad r=R, V_z=0 \Rightarrow 0 = \frac{\Delta P R^2}{4\mu L} + B$$

$$\Rightarrow B = -\frac{\Delta P R^2}{4\mu L}$$

$$V_z = \frac{\Delta P}{4\mu L} (r^2 - R^2) = \frac{R^2}{4\mu} \left( -\frac{\Delta P}{L} \right) \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right]$$

$$V_{z,\max} = V_z(r=0) = \frac{R^2}{4\mu} \left( -\frac{\Delta P}{L} \right)$$

$$\bar{V}_z = \frac{Q}{A} = \frac{\int_0^R V_z(r) 2\pi r dr}{\pi R^2} = \frac{R^2}{8\mu} \left( -\frac{\Delta P}{L} \right)$$

$$\bar{V}_z = \frac{1}{2} V_{z,\max}$$

## تعریف ضریب اصطکاک

$$\text{Fanning} \quad : \quad f_F = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho V^2} \Rightarrow \tau_w = \frac{1}{2} f_F \rho V^2$$

$$\tau_w = -\mu \left. \frac{dV_z}{dr} \right|_{r=R} = \frac{R}{2} \left( -\frac{\Delta P}{L} \right)$$

$$= \frac{1}{2} f_F \rho V^2$$

$$\Rightarrow -\Delta p = f_F \frac{L}{R} \rho V^2$$

$$h_f = \frac{-\Delta p}{\rho g} = \underbrace{4f_F}_{\downarrow} \frac{L}{D} \cdot \frac{V^2}{2g}$$

## معادله دارسی - ویسباخ

$$h_f = f \frac{L}{D} \cdot \frac{V^2}{2g}$$

$$\bar{V}_z = V = \frac{R^2}{8\mu} \frac{(-\Delta p)}{L} \Rightarrow h_f = \frac{-\Delta p}{\rho g} = \frac{32\mu LV}{\rho g D^2}$$

$$f \frac{L}{D} \cdot \frac{V^2}{2g} = \frac{32\mu LV}{\rho g D^2}$$

$$\Rightarrow f = \frac{64\mu}{\rho V D} = \frac{64}{\text{Re}}$$

برای جریان آرام

## جریان در هم در لوله ها

در اعداد رینولدز بالا جریان در هم می شود این جریان از نظر صنعتی اهمیت زیادی دارد، چون اغلب انتقال مایعات در هم است.  
در جریان در هم هیچکدام از مؤلفه های سرعت صفر نیست.



$$V = \bar{V} + V'$$

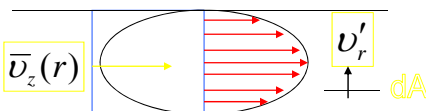
$T$  باید به اندازه کافی بزرگ باشد.

$$\bar{V} = \frac{1}{T} \int_0^T V(t) dt$$

در جریان توسعه یافته:

$$\bar{V}_r = \bar{V}_\theta = 0$$

ادی: تعداد زیادی از مولکولهای سیال که به صورت یک ذره واحد با هم حرکت می کنند.



در یک لحظه یک ادی سطح  $dA$  را قطع می کند و به لایه ای با سرعت بالاتر می رود، این باعث می شود که سرعت لایه بالاتر از خود را برای یک لحظه کندتر کند. (برعکس هم ممکن است).

نیروی (در جهت Z) که ناشی از این حرکت اتفاقی است عبارت است از:

$$dF = -\rho V'_r dA V'_z$$

علامت منفی برای این است که انتقال ادی ها اثر معکوس روی اندازه حرکت دارد.

$$\tau_{turb} = \frac{dF}{dA} = -\rho V'_r V'_z$$

$\tau_{turb}$  همیشه مثبت است، چون  $V'_r$  مثبت باعث  $V'_z$  منفی می شود و  $V'_r$  منفی باعث  $V'_z$  مثبت می شود.

$$\bar{\tau}_{turb} = -\rho \overline{V_r' V_z'}$$

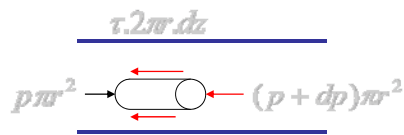
تنش برش ظاهری

$$\bar{\tau} = \bar{\tau}_{lam} + \bar{\tau}_{turb}$$

تنش برش کلی

$$= -\mu \frac{\partial \bar{V}_z}{\partial r} - \rho \overline{V_r' V_z'}$$

## رابطه تنش برشی با گرادیان فشار



$$p\pi r^2 - (p + dp)\pi r^2 - \tau \cdot 2\pi r dz = 0$$

$$\Rightarrow \tau = -\frac{r}{2} \frac{dp}{dz}$$

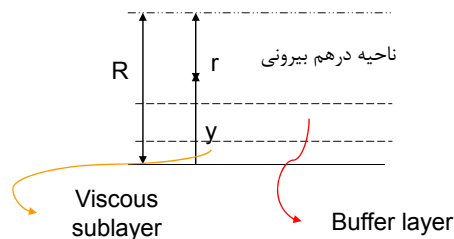
$$\Rightarrow \frac{r}{2} \cdot \frac{d\bar{p}}{dz} = \mu \frac{d\bar{u}}{dr} + \rho \overline{V_r' V_z'}$$

$\frac{d\bar{p}}{dz}$  ثابت است (چون جریان توسعه یافته است) و اگر  $\overline{V_r'V_z'}$  را به صورت تابعی از  $r$  بدانیم آنگاه پروفیل سرعت را می توان بدست آورد. بجای آنکه  $\overline{V_r'V_z'}$  را به صورت نامعلوم در نظر بگیریم معمولاً از eddy viscosity استفاده می شود.

$$\overline{V_r'V_z'} = -\eta \frac{d\bar{V}_z}{dr}$$

$$\Rightarrow \frac{r}{2} \frac{d\bar{p}}{dz} = \rho (v + \eta) \frac{dV_z}{dr}$$

چون به دست آوردن  $\eta$  به طور تحلیلی ممکن نیست ما از حل این معادله صرف نظر می کنیم و بجای آن از روابط تجربی برای توزیع سرعت در رژیم در هم استفاده می کنیم.



زیر لایه ویسکوز بسیار کوچک است فقط جریان آرام داریم و تنها تنش ویسکوز مؤثر است و ادی ها در این ناحیه بسیار کم هستند. لایه هم پوش هم بسیار نازک است در اینجا هم تنش ویسکوز مؤثر است و هم ادی ها حضور دارند.

در ناحیه در هم بیرونی فقط ادی ها هستند که مؤثرند و از اثرات ویسکوزیته مولکولی می توان صرف نظر کرد این ناحیه قسمت اعظم سطح مقطع لوله را اشغال می کند و این ناحیه کاملاً در هم است.

## توزیع عمومی سرعت در جریان در هم

برای معرفی توزیع سرعت این اعداد بدون بعد را معرفی می کنیم:

$$\text{سرعت اصطکاکی} \quad u^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$$

$$\text{سرعت بدون بعد} \quad u^+ = \frac{V_z}{u^*}$$

$$\text{فاصله از جداره لوله} \quad y = R - r$$

$$\text{فاصله بدون بعد} \quad y^+ = \frac{y u^* \rho}{\mu}$$

در زیر لایه ویسکوز داریم:

$$-\mu \frac{dv_z}{dr} = \tau_w$$

$$\frac{du^+}{dy^+} = 1 \Rightarrow u^+ = y^+ + c$$

$$B.C. : y^+ = 0, u^+ = 0 \Rightarrow u^+ = y^+$$



برای ناحیه در هم خارجی می توان شکل کلی معادله را با یک سری فرضیات بدست آورد ولی ثابتهای آنها را باید تجربی تعیین کرد.

$$u^+ = A \ln y^+ + B$$

برای لایه هم پوش همان شکل لایه در هم خارجی در نظر گرفته می شود و ثابتها فرق می کنند.

رابطه صفحه قبل به صورت زیر به دست می آید:

$$\frac{d\bar{v}_x}{dy} = f(\tau_0, \rho, y)$$

تنها ترکیبی از این متغیرها که بعد لازم را می دهد به صورت زیر است:

$$\frac{d\bar{v}_x}{dy} = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \cdot \frac{1}{y}$$

$$\frac{d\bar{v}_x}{dy} = \frac{v^*}{k} \cdot \frac{1}{y} \Rightarrow \bar{v}_x = \frac{v^*}{k} \ln y + \lambda'$$

$$\frac{\bar{v}_x}{v^*} = \frac{1}{k} \ln\left(\frac{y v^*}{v}\right) + \lambda$$

$$\text{Visc.} \quad u^+ = y^+ \quad y^+ < 5$$

$$\text{Buf.} \quad u^+ = 5.00 \ln y^+ - 3.05 \quad 5 < y^+ < 30$$

$$\text{Turb.} \quad u^+ = 2.5 \ln y^+ + 5.5 \quad 30 < y^+$$

روش دیگر این است که از توزیع سرعت قانون توانی استفاده کنیم.

$$\frac{\bar{V}}{V_{\max}} = \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{1/n}$$

Re	$4 \times 10^3$	$10^5$	$10^6$	$> 2 \times 10^6$
n	6	7	9	10

معمولاً  $n = 7$  در نظر گرفته می شود.

## محاسبه افت فشار در لوله ها

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}$$

معادله دارسی - ویسباخ

$$h_f = \frac{\Delta(P + \rho gh)}{\rho g}$$

آنالیز بعدی

$$\tilde{f} = f(\rho, \mu, V, D, \varepsilon)$$

$$f = f\left(\frac{\rho V D}{\mu}, \frac{\varepsilon}{D}\right)$$

رابطه بین ضریب اصطکاک و عدد رینولدز و زبری لوله در دیاگرامی بنام دیاگرام عددی نشان داده می شود. دیاگرام مودی بر مبنای معادله کولبروک تهیه شده است:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -0.86 \ln \left( \frac{\varepsilon / D}{3.7} + \frac{2.523}{\text{Re} \sqrt{f}} \right)$$

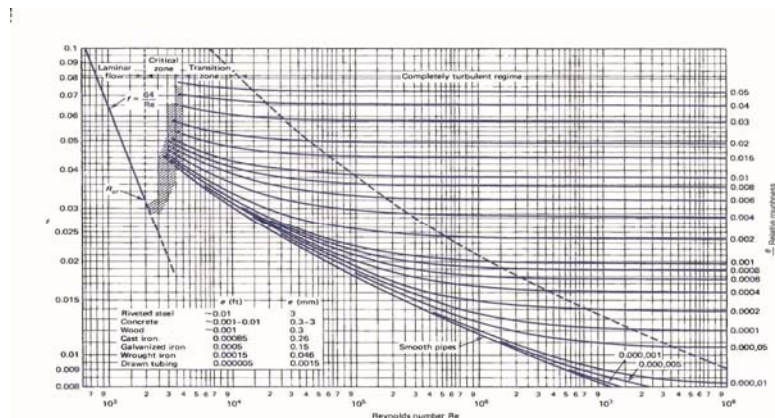


Figure 7.13 Moody diagram. (From L. F. Moody, *Trans. ASME*, Vol. 66, 1944.)

در بسیاری از مسائل می توان از رابطه زیر ضریب اصطکاک را محاسبه نمود بدون آنکه نیاز به حدس و خطا باشد:

$$f = \frac{1.325}{\left[ \ln \left( \frac{\varepsilon/D}{3.7} + \frac{5.74}{\text{Re}^{0.9}} \right) \right]^2} \quad 10^{-6} \leq \varepsilon/D \leq 10^{-2}$$

$$5 \times 10^3 \leq \text{Re} \leq 10^8$$

اگر سطح مقطع لوله دایره نباشد، در محاسبات باید از شعاع هیدرولیک استفاده کرد.

$$D_H = \frac{4A}{P}$$

→ مساحت جریان  
→ محیط خیس شده

به طور کلی سه دسته مسئله در مورد جریان در لوله ها داریم:

خواسته	معلومات	
$h_f$	$V, \varepsilon, D, Q$	-۱
$Q$	$h_L, V, \varepsilon, D$	-۲
$D$	$h_L, V, \varepsilon, Q$	-۳

نوع اول به راحتی و بدون نیاز به تکرار قابل محاسبه است، ولی مسائل نوع ۲ و ۳ نیاز به تکرار محاسبات دارند.

روابط سوامی و جین (Swamee & Jain) برای حل سه نوع مسئله  
فوق بدون آنکه نیاز به حدس و خطا باشد.

$$h_f = 1.07 \frac{Q^2 L}{g D^5} \left\{ \ln \left[ \frac{\varepsilon/D}{3.7} + 4.62 \left( \frac{\nu D}{Q} \right)^{0.9} \right] \right\}^{-2} \quad \begin{array}{l} 10^{-5} < \varepsilon/D < 10^{-2} \\ 10^3 < \text{Re} < 3 \times 10^8 \end{array}$$

$$Q = -0.965 \left( \frac{g D^5 h_f}{L} \right)^{0.5} \ln \left[ \frac{\varepsilon/D}{3.7} + \left( \frac{3.17 \nu^2 L}{g D^3 h_f} \right)^{0.5} \right] \quad \text{Re} > 2100$$

$$D = 0.55 \left[ \varepsilon^{1.25} \left( \frac{L Q^2}{g h_f} \right)^{4.75} + \nu Q^{9.4} \left( \frac{L}{g h_f} \right)^{5.2} \right]^{0.03} \quad \begin{array}{l} 10^{-5} < \varepsilon/D < 10^{-2} \\ 10^3 < \text{Re} < 3 \times 10^8 \end{array}$$

واحدهای بکار گرفته می‌توانند SI یا انگلیسی باشند.

مثال: با توجه به داده های ارائه شده برای یک لوله انتقال آب،  
افت فشار را برای لوله محاسبه کنید.

<i>water</i> 20° C	$\varepsilon = 0.046 \text{ mm}$
$L = 500 \text{ m}$	$Q = 0.003 \text{ m}^3/\text{s}$
$D = 4 \text{ cm}$	$\Delta p = ?$

حل:

عدد  $Re$  برابر است با:

$$\begin{aligned} Re &= \frac{VD}{\nu} \\ &= \frac{2.39 \times 0.04}{10^{-6}} = 9.6 \times 10^4 \end{aligned}$$

با توجه به مقادیر  $D$  و  $\varepsilon$  خواهیم داشت:

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{0.046}{40} = 0.00115$$

friction factor را از روی دیاگرام مودی می خوانیم:

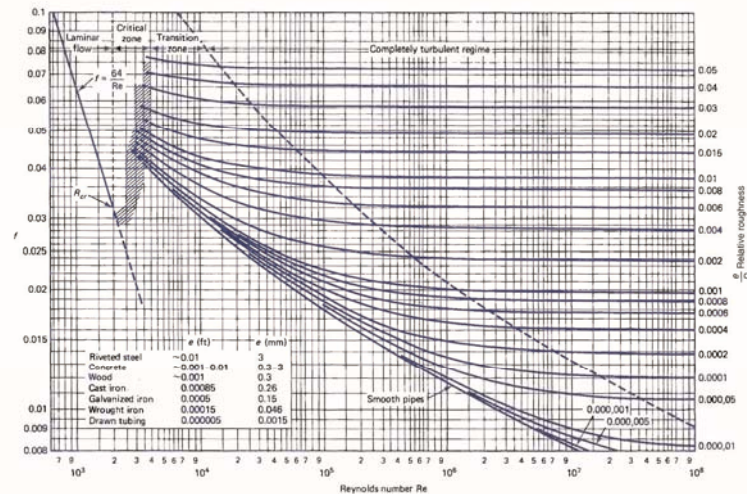


Figure 7.13 Moody diagram. (From L. F. Moody, *Trans. ASME*, Vol. 66, 1944.)

$$f = 0.023$$

افت head را بدین صورت محاسبه می کنیم:

$$h_f = f \frac{L V^2}{D 2g}$$

$$= 0.023 \frac{500}{0.04} \frac{2.39^2}{2 \times 9.81} = 84 m$$

چون friction factor به وسیله دو عدد شناخته می شود، تنها به دو عدد نیاز است.

افت فشار برابر است با:

$$\Delta p = \gamma h_f$$

$$= 9800 \times 84 = 820000 Pa \text{ or } 820 kPa$$

با استفاده از معادله صریح، داریم:

$$h_f = 1.07 \frac{0.003^2 \times 500}{9.81 \times (0.04)^5} \left\{ \ln \left[ \frac{0.00115}{3.7} + 4.62 \left( \frac{10^{-6} \times 0.04}{0.003} \right)^{0.9} \right] \right\}^{-2}$$

$$= 1.07 \times 4480 \times 0.01731 = 83 m$$

این مقدار با مقداری که از طریق دیاگرام مودی به دست آمده، تقریباً برابر است.

مثال: افت فشاری برابر  $700 \text{ kPa}$  در طول یک لوله افقی آهنی  $300$  متری با قطر  $10 \text{ cm}$  اندازه گیری شده است. این لوله نفت را با مشخصات زیر انتقال می دهد:

$$S.G. = 0.9, \nu = 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$$

شدت جریان را محاسبه کنید.

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{0.046}{100} = 0.00046$$

حل: زبری نسبی برابر است با:

با فرض جریان درهم (نیازی به استفاده از عدد  $Re$  نیست)، از دیاگرام

مودی می توان بدست آورد:

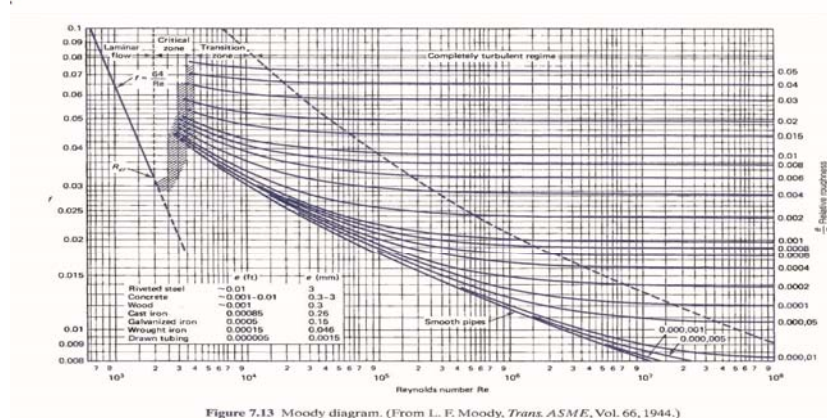


Figure 7.13 Moody diagram. (From L. F. Moody, *Trans. ASME*, Vol. 66, 1944.)

$$f = 0.0165$$



افت head به شکل زیر بدست می آید:

$$h_f = \frac{\Delta p}{\gamma}$$

$$= \frac{700000}{9800 \times 0.9} = 79.4 \text{ m}$$

سرعت از رابطه زیر بدست می آید:

$$V = \left( \frac{2gDh_f}{fL} \right)^{1/2}$$

$$= \left( \frac{2 \times 9.8 \times 0.1 \times 79.4}{0.0165 \times 300} \right)^{1/2} = 5.61 \text{ m/s}$$

عدد Re به صورت زیر محاسبه می شود:

$$Re = \frac{VD}{\nu}$$

$$= \frac{5.61 \times 0.1}{10^{-5}} = 5.61 \times 10^4$$

با استفاده از عدد Re و  $\epsilon/D = 0.00046$  friction factor دیاگرام مودی بدست می آید:

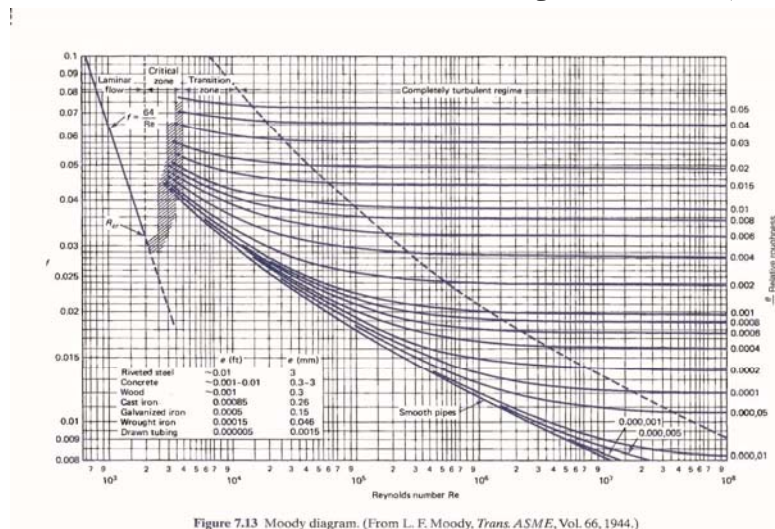


Figure 7.13 Moody diagram. (From L. F. Moody, *Trans. ASME*, Vol. 66, 1944.)

$$f = 0.023$$

مقدار اولیه  $f$  بدین ترتیب تصحیح می شود و سرعت دوباره از طریق رابطه زیر محاسبه می شود:

$$V = \left( \frac{2gDh_f}{fL} \right)^{1/2}$$

$$= \left( \frac{2 \times 9.8 \times 0.1 \times 79.4}{0.023 \times 300} \right)^{1/2} = 4.75 \text{ m/s}$$

بنابراین عدد  $Re$  برابر با مقدار زیر خواهد بود:

$$Re = \frac{4.75 \times 0.1}{10^{-5}} = 4.75 \times 10^4$$

با توجه به عدد  $Re$ ، از روی دیاگرام مودی  $f = 0.023$  خواهد شد که این مقدار قانع کننده خواهد بود. بنابراین شدت جریان به شکل زیر محاسبه می شود:

$$Q = VA$$

$$= 4.75 \times \pi \times 0.05^2 = 0.037 \text{ m}^3/\text{s}$$

با استفاده از معادله صریح، می توان مستقیماً شدت جریان را بدست آورد.

$$Q = -0.965 \left( \frac{9.8 \times 0.1^5 \times 79.4}{300} \right)^{0.5} \ln \left[ \frac{0.00046}{3.7} + \left( \frac{3.17 \times 10^{-10} \times 300}{9.8 \times 0.1^3 \times 79.4} \right)^{0.5} \right]$$

$$= -0.965 \times 5.096 \times 10^{-3} \times (7.655) = 0.038 \text{ m}^3/\text{s}$$

این عدد نسبت به عدد بدست آمده از دیاگرام مودی، کمتر از 2.5% خطا دارد.

مثال:

می خواهیم  $0.002 \text{ m}^3/\text{s}$  آب  $20^\circ\text{C}$  را از لوله ای به طول  $400 \text{ m}$  به گونه ای انتقال دهیم که افت head از  $30 \text{ m}$  بیشتر نشود. قطر لوله چه مقدار باید باشد؟

حل:

در این مساله قطر لوله مجهول است، بنابراین مساله به شکل حدس و خطا خواهد بود. سرعت متوسط بر اساس رابطه زیر تابع قطر است:

$$V = \frac{Q}{A}$$

$$= \frac{0.002}{\pi D^2/4} = \frac{0.00255}{D^2}$$

friction factor و قطر طبق رابطه زیر به هم مرتبطند:

$$h_f = f \frac{L V^2}{D 2g}$$

$$30 = f \frac{400 (0.00255/D^2)^2}{D \cdot 2 \times 9.8}$$

$$\therefore D^5 = 4.42 \times 10^{-10} f$$

عدد Re به صورت زیر است:

$$\varepsilon = 1.51 \times 10^{-6}$$

$$\text{Re} = \frac{VD}{\nu}$$

$$= \frac{0.00255 D}{D^2 \times 10^{-6}} = \frac{2550}{D}$$

حال مقداری را برای  $f$  حدس می زنیم و آن را با رابطه بالا و نیز دیاگرام مودی چک می کنیم. حدس اول برابر است با  $f = 0.03$  و تصحیح آن در جدول زیر مشخص شده است:

f	D (m)	Re	$\varepsilon/D$	f (from diagram)
0.03	0.0421	$6.06 \times 10^4$	0.000036	0.02
0.02	0.0388	$6.57 \times 10^4$	0.000039	0.02

به ازای  $f=0.02$  ،  $D=3.88$  می شود و از آنجا که این قطر یک مقدار استاندارد نیست، قطر را برابر  $D=4$  cm در نظر می گیریم.

این لوله افت head کمتر از  $h_L=30$ m که در مساله به آن اشاره شده است، خواهد داشت. می توان قطر بزرگتری را هم برای لوله تایین کرد که شرایط مساله را تامین کند، اما این مساله باعث افزایش قیمت خواهد شد.

با استفاده از معادله صریح می توان قطر را به صورت مستقیم به دست آورد.

$$D = 0.55 \left[ \left( 1.5 \times 10^{-6} \right)^{1.25} \left( \frac{400 \times 0.002^2}{9.81 \times 30} \right)^{4.75} + 10^{-6} \times 0.002^{9.4} \left( \frac{400}{9.81 \times 30} \right)^{5.2} \right]^{0.03}$$

$$= 0.55 \left[ 5.163 \times 10^{-33} + 2.102 \times 10^{-33} \right] 0.04 = 0.039 \text{ m}$$

بنابراین قطر انتخابی برای لوله خواهد بود. این عدد برابر با همان مقداری است که از دیاگرام مودی به دست آمد.

### مثال:

هوا در شرایط استاندارد از یک لوله افقی صاف به طول 500 m و مقطع مستطیلی 30cm × 20cm با شدت 0.24 m<sup>3</sup>/s انتقال می یابد. افت فشار را محاسبه کنید.

حل:

شعاع هیدرولیکی برابر است با:

$$V = \frac{Q}{A}$$

$$= \frac{0.24}{0.3 \times 0.2} = 4.0 \text{ m/s}$$

سرعت متوسط برابر است با:

$$R = \frac{A}{P}$$

$$= \frac{0.3 \times 0.2}{(0.3 + 0.2) \times 2} = 0.06 \text{ m}$$

عدد Re برابر خواهد بود با:

$$Re = \frac{4VR}{\nu}$$

$$= \frac{4 \times 4 \times 0.06}{1.6 \times 10^{-5}} = 6 \times 10^4$$

با استفاده از منحنی مربوط به لوله های صاف از دیاگرام مودی خواهیم داشت:

$$f = 0.0198$$

بنابراین:

$$h_f = f \frac{L V^2}{4R 2g}$$

$$= 0.0198 \frac{500}{4 \times 0.06} \frac{4^2}{2 \times 9.8} = 33.7 \text{ m}$$

افت فشار برابر خواهد بود با:

$$\Delta p = \rho g h_f$$

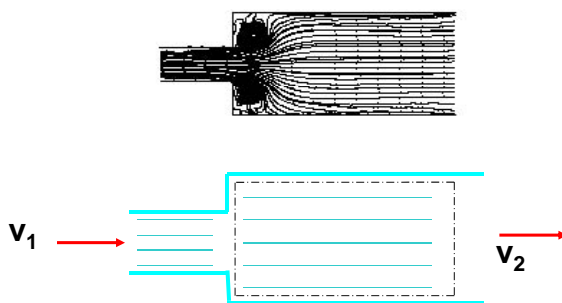
$$= 1.23 \times 9.8 \times 33.7 = 406 \text{ Pa}$$

## افت های فرعی

تا بحال افت فشار در لوله را ما بررسی کردیم اما سیستم های لوله کشی شامل شیر، زانویی، خم ها، تغییر اندازه و ... هم هستند. تمام اینها به دلیل تغییر جهت سرعت و یا تغییر خود سرعت باعث افت فشار می شوند به اینها افت های فرعی می گویند.

$$h_f = K \frac{V^2}{2g}$$

## محاسبه افت فشار برای انبساط ناگهانی



$$\begin{aligned} \sum F &= \dot{m}(V_2 - V_1) \\ (P_1 - P_2)A_2 &= \rho A_2 V_2 (V_2 - V_1) \\ \frac{P_1 - P_2}{\rho} &= V_2 (V_2 - V_1) \end{aligned}$$

معادله انرژی:

$$\frac{P_2 - P_1}{\rho g} + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} + Z_2 - Z_1 = h - h_f$$

$$h_f = \frac{P_1 - P_2}{\rho g} + \frac{V_1^2 - V_2^2}{2g}$$

$$= \frac{V_2(V_2 - V_1)}{g} - \frac{(V_2 + V_1)(V_2 - V_1)}{2g} = \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g}$$

موازنه جرم:

$$V_2 = \frac{A_1}{A_2} V_1 = \left( \frac{D_1}{D_2} \right)^2 V_1$$

$$\Rightarrow h_f = \left[ 1 - \left( \frac{D_1}{D_2} \right)^2 \right]^2 \frac{V_1^2}{2g}$$

این تنها حالتی است که می‌توان ضریب  $K$  را بطور تئوری تعیین نمود.  
برای حالت‌های دیگر روابط تجربی وجود دارند.



PIPE FRICTION DATA FOR CLEAN COMMERCIAL STEEL PIPE  
WITH FLOW IN ZONE OF COMPLETE TURBULENCE

Nominal Size	mm	15	20	25	32	40	50	65, 80	100	125	150	200, 250	300-400	450-600
	in.	½	¾	1	1¼	1½	2	2½, 3	4	5	6	8, 10	12-16	18-24
Friction Factor ( $f_f$ )		.027	.025	.023	.022	.021	.019	.018	.017	.016	.015	.014	.013	.012

FORMULAS FOR CALCULATING "K" FACTORS \*  
FOR VALVES AND FITTINGS WITH REDUCED PORT  
(Ref: Pages 2-11 and 3-4)

Formula 1

$$K_1 = \frac{0.8 \sin \frac{\theta}{2} (1 - \beta^2)}{\beta^4} = \frac{K_1}{\beta^4}$$

Formula 2

$$K_1 = \frac{0.5 (1 - \beta^2) \sqrt{\sin \frac{\theta}{2}}}{\beta^4} = \frac{K_1}{\beta^4}$$

Formula 3

$$K_1 = \frac{2.6 \sin \frac{\theta}{2} (1 - \beta^2)^2}{\beta^4} = \frac{K_1}{\beta^4}$$

Formula 4

$$K_1 = \frac{(1 - \beta^2)^2}{\beta^4} = \frac{K_1}{\beta^4}$$

Formula 5

$$K_1 = \frac{K_1}{\beta^4} + \text{Formula 1} + \text{Formula 3}$$

$$K_1 = \frac{K_1 + \sin \frac{\theta}{2} [0.8 (1 - \beta^2) + 2.6 (1 - \beta^2)^2]}{\beta^4}$$

Formula 6

$$K_2 = \frac{K_1}{\beta^4} + \text{Formula 2} + \text{Formula 4}$$

$$K_2 = \frac{K_1 + 0.5 \sqrt{\sin \frac{\theta}{2} (1 - \beta^2) + (1 - \beta^2)^2}}{\beta^4}$$

Formula 7

$$K_2 = \frac{K_1}{\beta^4} + \beta (\text{Formula 2} + \text{Formula 4}) \text{ when } \theta = 180^\circ$$

$$K_2 = \frac{K_1 + \beta [0.5 (1 - \beta^2) + (1 - \beta^2)^2]}{\beta^4}$$

$$\beta = \frac{d_1}{d_2}$$

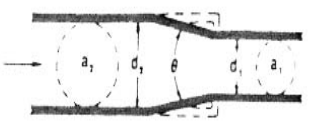
$$\beta^2 = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 = \frac{a_1}{a_2}$$

Subscript 1 defines dimensions and coefficients with reference to the smaller diameter.

Subscript 2 refers to the larger diameter.

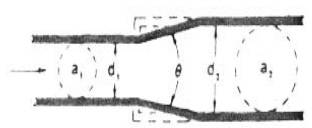
\*Use K furnished by valve or fitting supplier when available

**SUDDEN AND GRADUAL CONTRACTION**



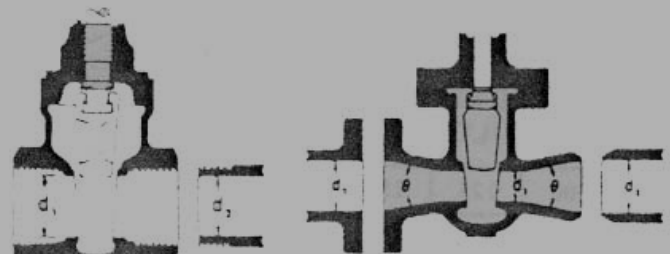
If:  $\theta \geq 45^\circ$  .....  $K_1 = \text{Formula 1}$   
 $45^\circ < \theta < 180^\circ$  ....  $K_2 = \text{Formula 2}$

**SUDDEN AND GRADUAL ENLARGEMENT**

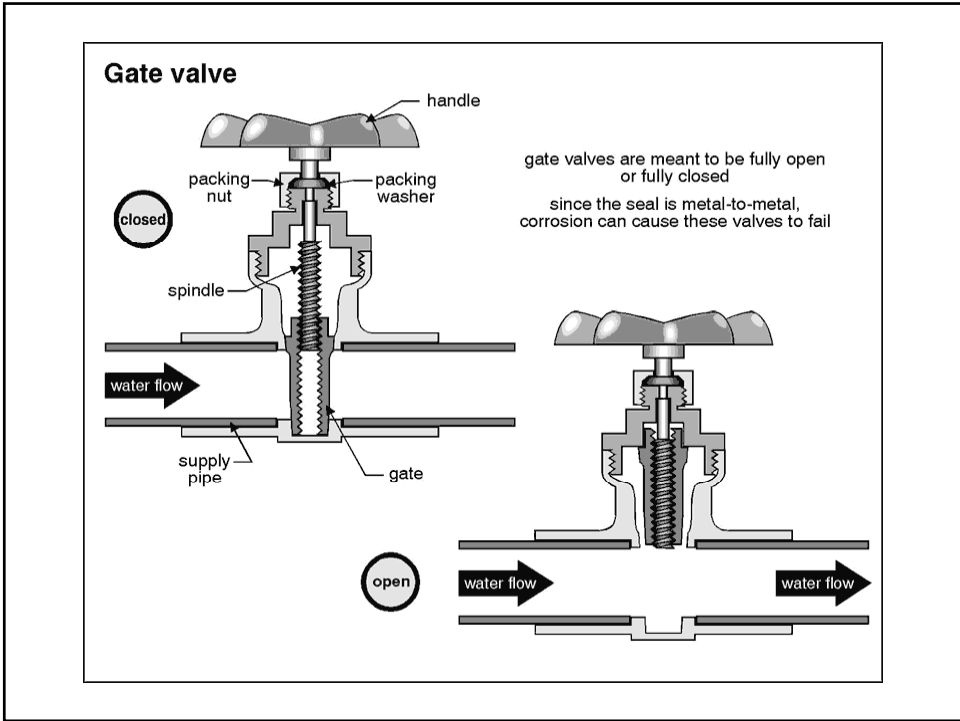


If:  $\theta < 45^\circ$  .....  $K_2 = \text{Formula 3}$   
 $45^\circ < \theta < 180^\circ$  ....  $K_2 = \text{Formula 4}$

**GATE VALVES**  
 Wedge Disc, Double Disc, or Plug Type

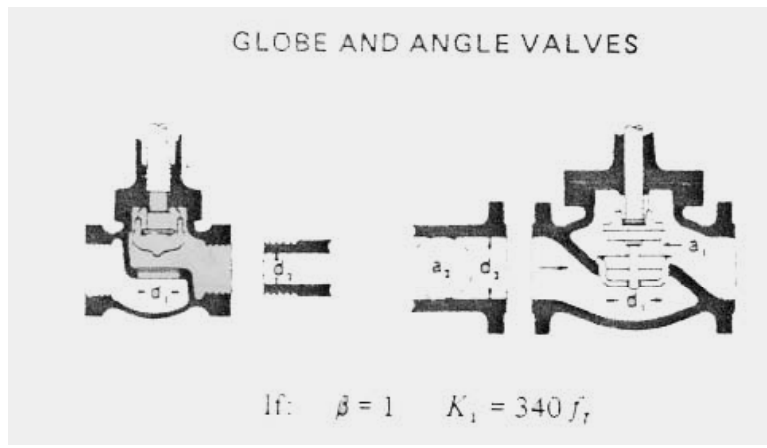


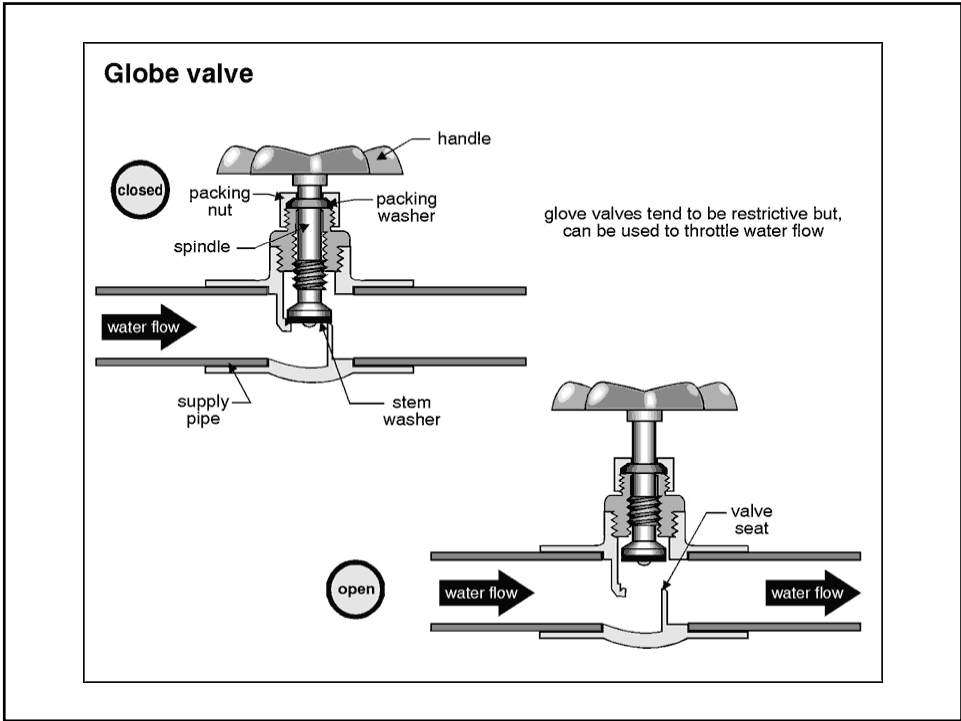
If:  $\beta = 1, \theta = 0$  .....  $K_1 = 8 f_T$   
 $\beta < 1$  and  $\theta < 45^\circ$  .....  $K_2 = \text{Formula 5}$   
 $\beta < 1$  and  $45^\circ < \theta < 180^\circ$  ....  $K_2 = \text{Formula 6}$



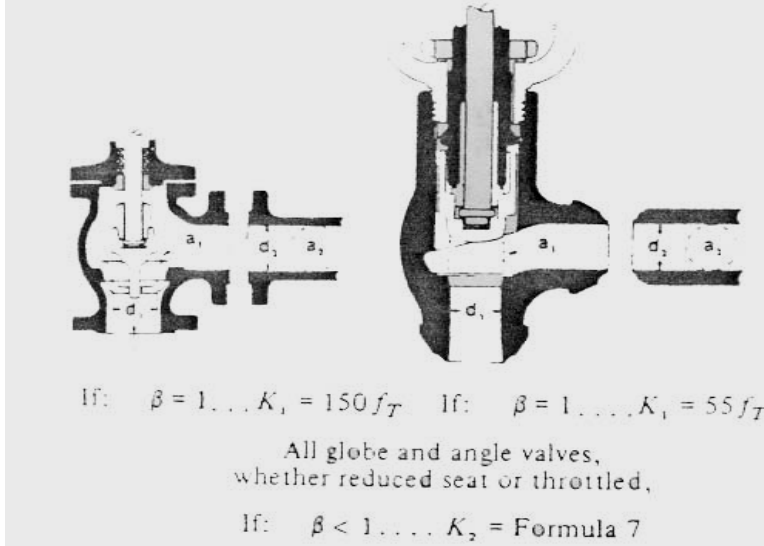


### Globe Valve

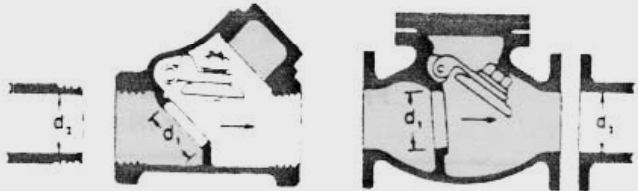




### Angle Valve



SWING CHECK VALVES

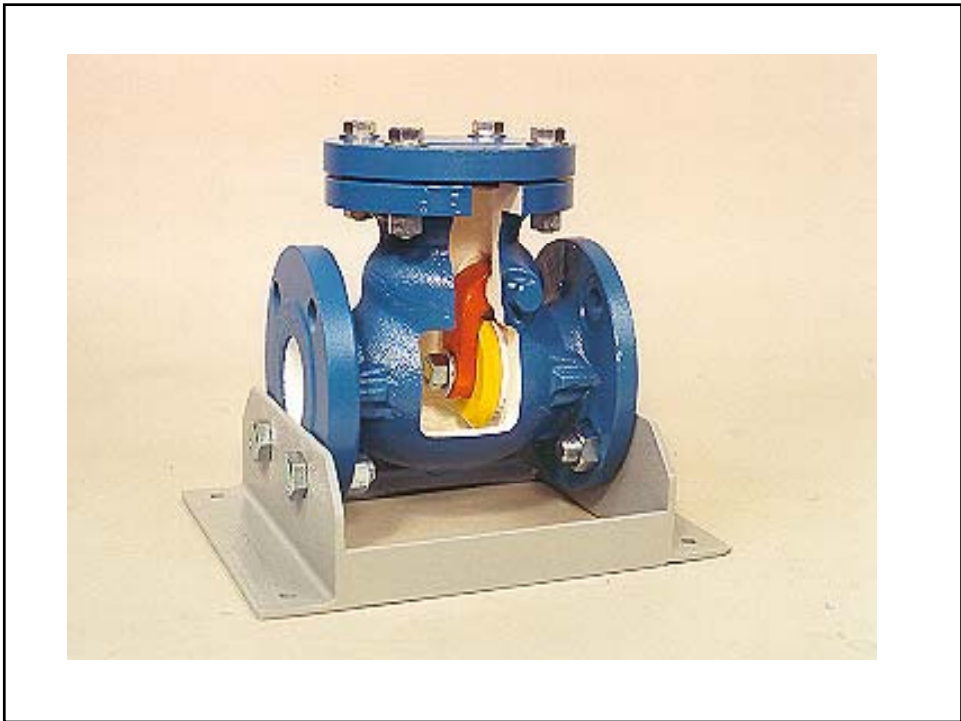


$K = 100 f_T$                        $K = 50 f_T$

Minimum pipe velocity (mps) for full disc lift

$= 45\sqrt{V}$                                $= 75\sqrt{V}$  except

U/L listed =  $120\sqrt{V}$





LIFT CHECK VALVES


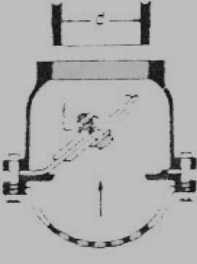
if:  $\beta = 1 \dots K_1 = 600 f_T$   
 $\beta < 1 \dots K_2 = \text{Formula 7}$

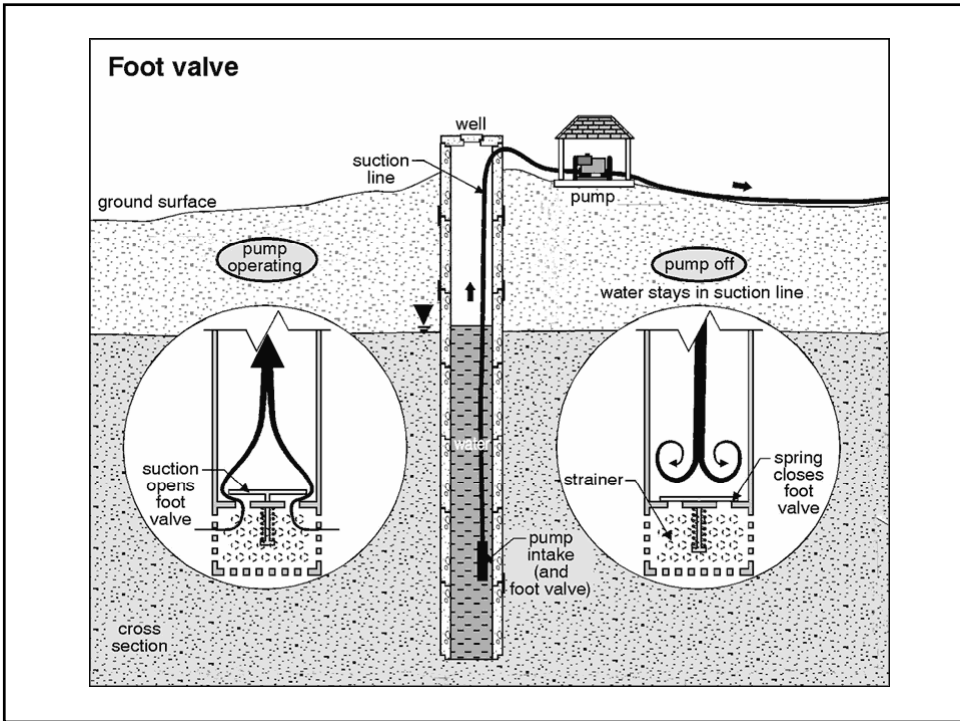
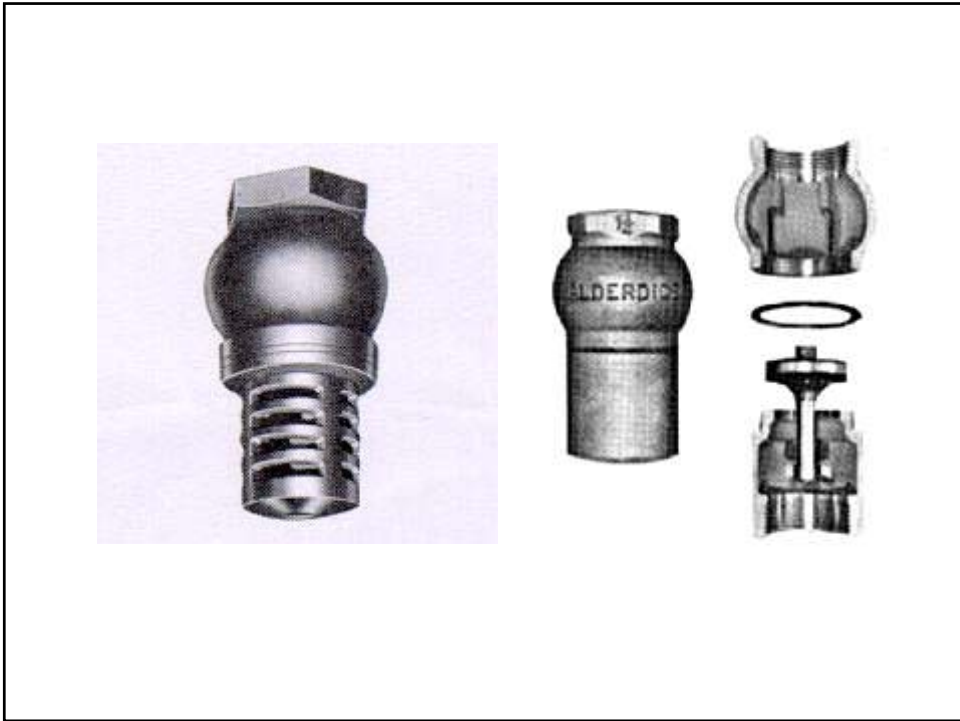
Minimum pipe velocity (mps) for full disc lift  
 $= 50 \beta \sqrt{V}$



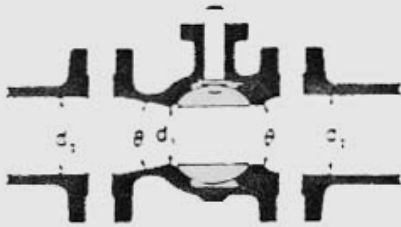


**FOOT VALVES WITH STRAINER**

<p><b>Poppet Disc</b></p>  <p><math>K = 420 f_T</math></p> <p>Minimum pipe velocity (mps) for full disc lift <math>= 20 \sqrt{f_T}</math></p>	<p><b>Hinged Disc</b></p>  <p><math>K = 75 f_T</math></p> <p>Minimum pipe velocity (mps) for full disc lift <math>= 45 \sqrt{f_T}</math></p>
--	--



**BALL VALVES**

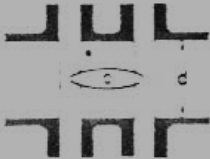


The diagram shows a cross-section of a ball valve with a spherical ball in the center. The flow path is indicated by arrows. The diameter of the pipe is labeled  $d_1$  on the left and  $d_2$  on the right. The diameter of the ball is labeled  $d$ . The angle between the flow direction and the centerline of the ball is labeled  $\theta$ . The flow coefficient  $K_v$  is defined for different valve positions:

If:  $\beta = 1, \theta = 0 \dots \dots \dots K_v = \beta / f_T$   
 $\beta < 1$  and  $\theta \leq 45^\circ \dots \dots \dots K_v = \text{Formula 5}$   
 $\beta < 1$  and  $45^\circ < \theta < 180^\circ \dots \dots K_v = \text{Formula 5}$

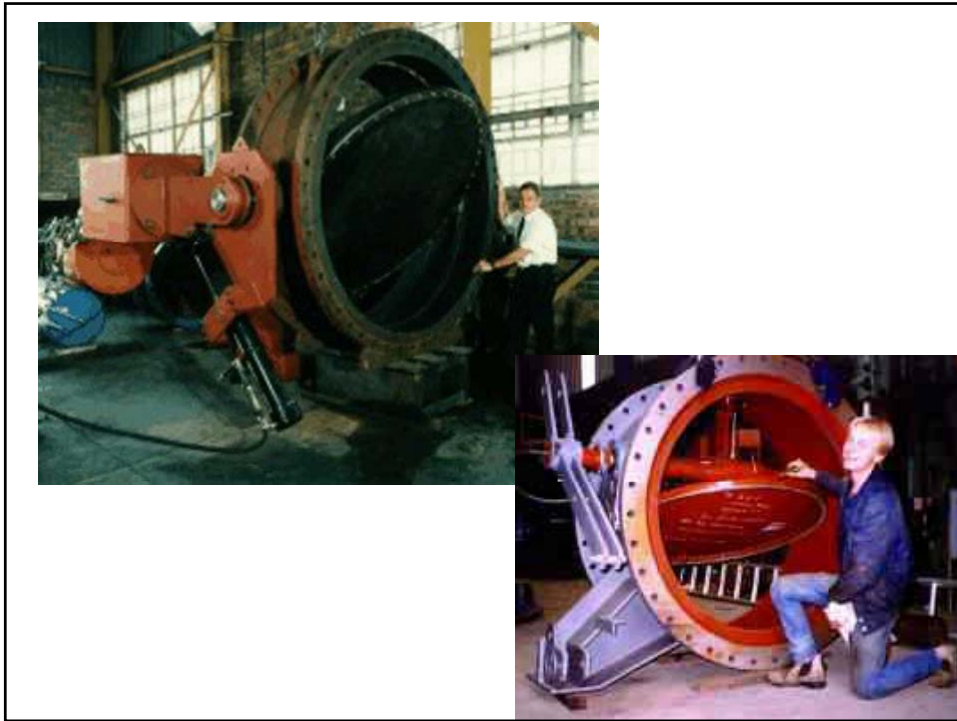


BUTTERFLY VALVES



Sizes 50 mm (2") to 200 mm (8") .....  $K = 45 f_T$   
Sizes 250 mm (10") to 350 mm (14") .....  $K = 35 f_T$   
Sizes 400 mm (16") to 600 mm (24") .....  $K = 25 f_T$





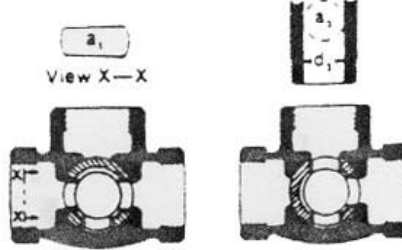
PLUG VALVES AND COCKS

Straight-Way



If:  $\beta = 1,$   
 $K_1 = 18 f_T$

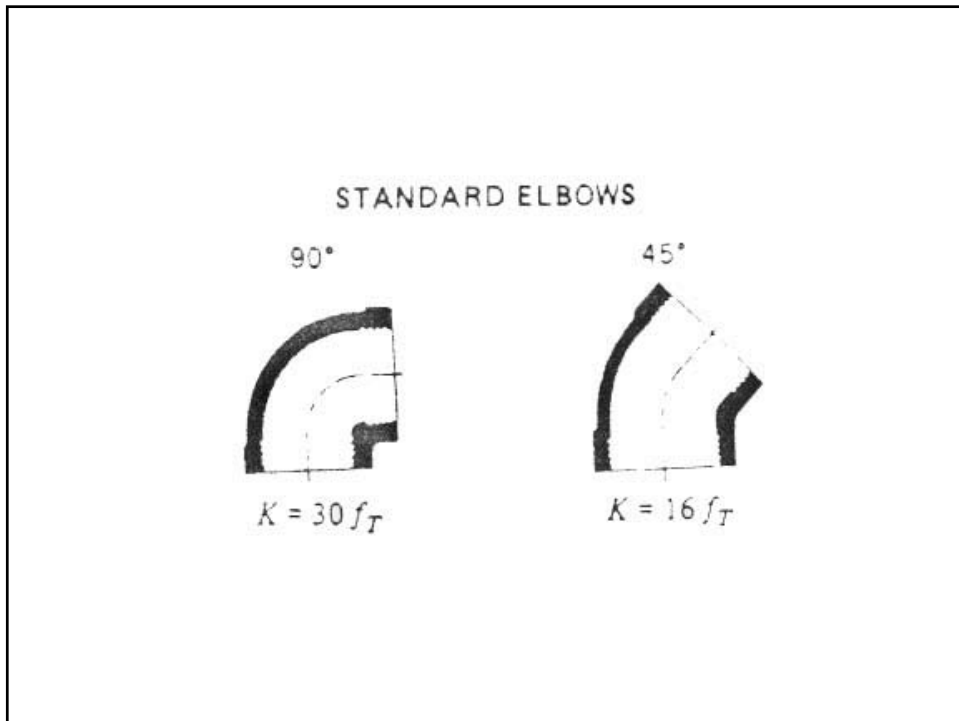
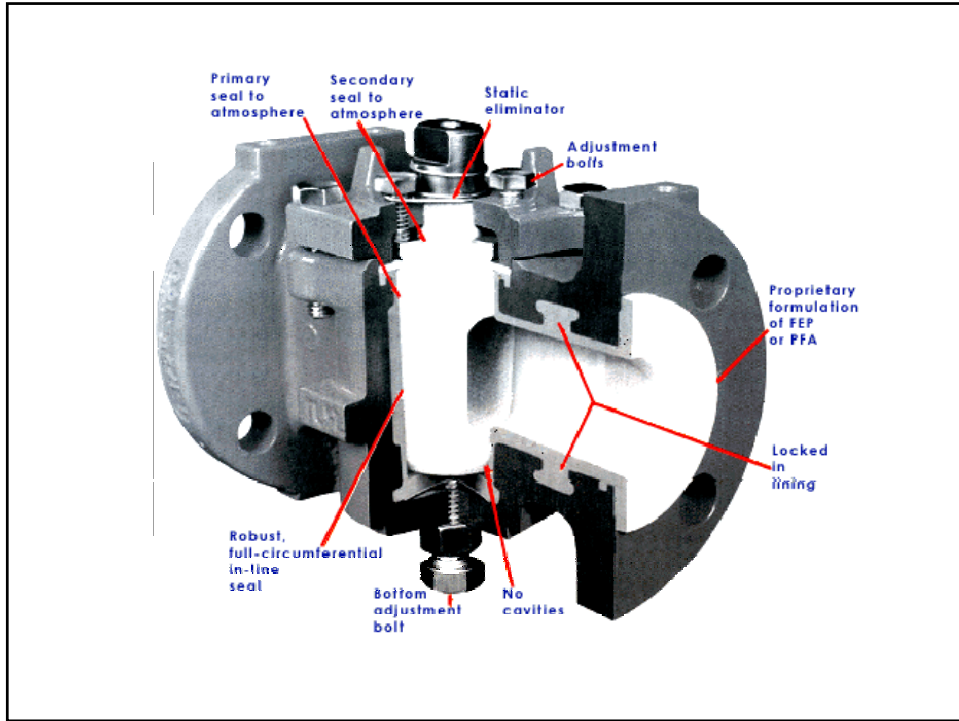
3-Way



If:  $\beta = 1,$   
 $K_1 = 30 f_T$

If:  $\beta = 1,$   
 $K_1 = 90 f_T$

If:  $\beta < 1$       $K_2 = \text{Formula 6}$



90° PIPE BENDS AND  
FLANGED OR BUTT-WELDING 90° ELBOWS



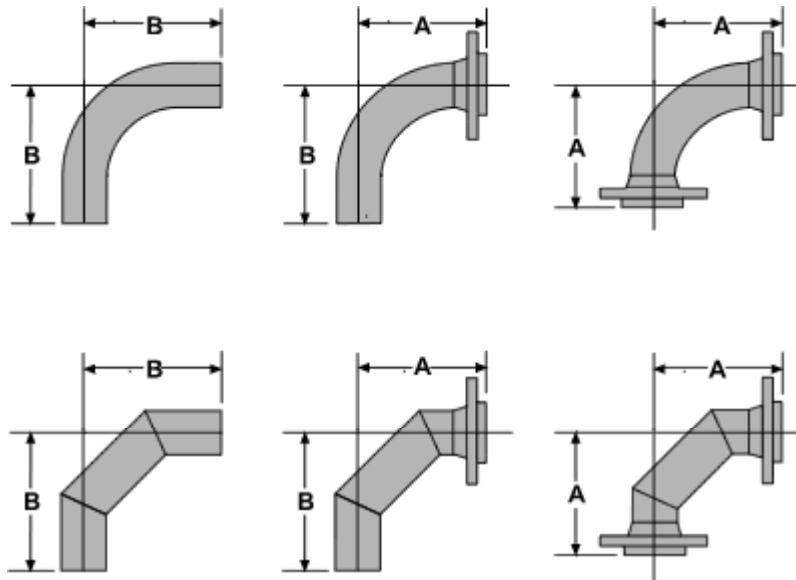
r/d	K	r/d	K
1	20 $f_T$	8	24 $f_T$
1.5	14 $f_T$	10	30 $f_T$
2	12 $f_T$	12	34 $f_T$
3	12 $f_T$	14	38 $f_T$
4	14 $f_T$	16	42 $f_T$
6	17 $f_T$	20	50 $f_T$

The resistance coefficient,  $K_B$ , for pipe bends other than 90° may be determined as follows:

$$K_B = (n - 1) \left( 0.25 \pi f_T \frac{r}{d} + 0.5 K \right) + K$$

$n$  = number of 90° bends

$K$  = resistance coefficient for one 90° bend (per table)





**PIPE ENTRANCE**

**Inward Projecting**

$K = 0.78$

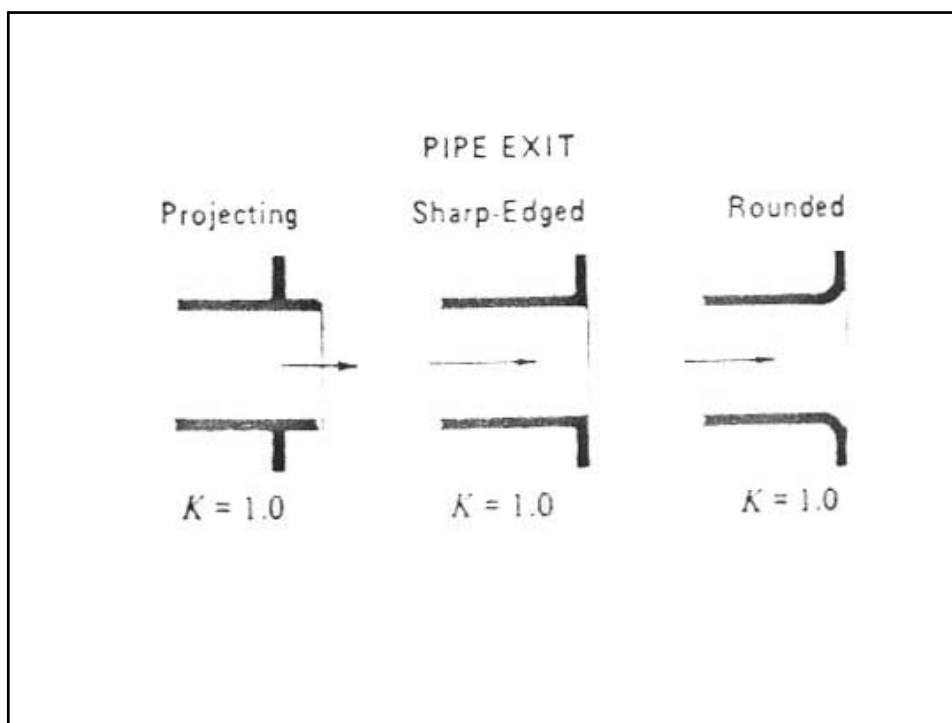
$r/d$	$K$
0.00*	0.5
0.02	0.28
0.04	0.24
0.06	0.15
0.10	0.09
0.15 & up	0.04

\* Sharp-edged

**Flush**

For  $K$ , see table





گاهی مرسوم است که بجای ضریب افت  $K$ ، طول معادل را می‌دهند.

$$K \frac{V^2}{2g} = f \frac{L_e}{D} \frac{V^2}{2g}$$

$$L_e = K \frac{D}{f}$$

مثلاً خروجی یک لوله به اتمسفر ( $K=1$ ) به قطر  $20\text{ cm}$  و با ضریب اصطکاکی برابر  $0.02$ ، قطر معادلی برابر با  $10\text{ m}$  از لوله را دارد.

برای سیستمی که طول آن حدود ۵۰ برابر قطر لوله باشد (طول متوسط)، افت فشارهای فرعی و افت فشار اصطکاکی خود لوله تقریباً یک اندازه هستند.

برای سیستمی با طول بسیار زیاد (حدود ۱۰۰ برابر قطر لوله)، افت های فرعی اغلب قابل صرف نظر هستند.

برای سیستمی با طول کوتاه، این افت های فرعی هستند که منبع اصلی افت فشار می شوند.

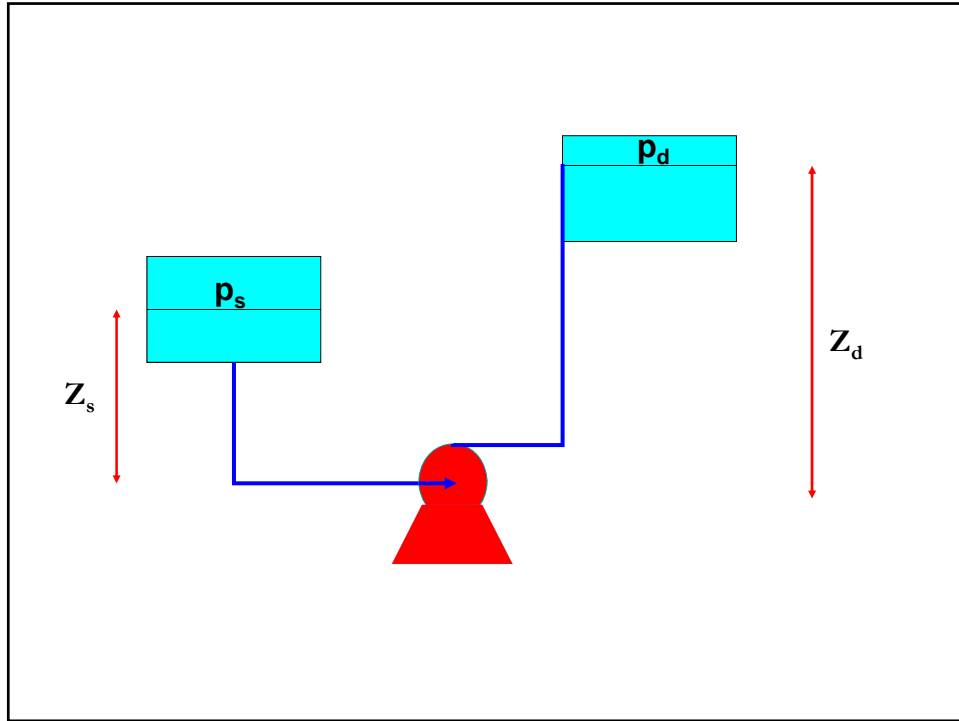
## فصل هشتم

### تلمبه کردن مایعات

### تلمبه کردن مایعات

برای انتقال دادن مایعات باید بر افت فشارهای مسیر غلبه کرد، برای این کار از تلمبه استفاده می‌شود. همچنین اگر بخواهیم مایع را به سطح بالاتر منتقل کنیم، استفاده از تلمبه ضروری است. بلندای یک تلمبه از رابطه انرژی بدست می‌آید.

$$\frac{P_2 - P_1}{\rho g} + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} + Z_2 - Z_1 = h_p - h_f$$



بلندای مکش:

$$h_s = \frac{P_s}{\rho g} + \cancel{\frac{V_s^2}{2g}} + Z_s - h_{fs}$$

بلندای تخلیه:

$$h_d = \frac{P_d}{\rho g} + \cancel{\frac{V_d^2}{2g}} + Z_d + h_{fd}$$

بلندای کل تلمبه:

$$\begin{aligned} h_p &= h_d - h_s \\ &= \left( \frac{P_d - P_s}{\rho g} \right) + \left( \frac{V_d^2 - V_s^2}{2g} \right) + (Z_d - Z_s) + (h_{fd} + h_{fs}) \end{aligned}$$

بلندای مکش مثبت (NPSH):

$$NPSH = \frac{P_s - P_v}{\rho g} + \frac{V_s^2}{2g} + Z_s - h_{fs}$$

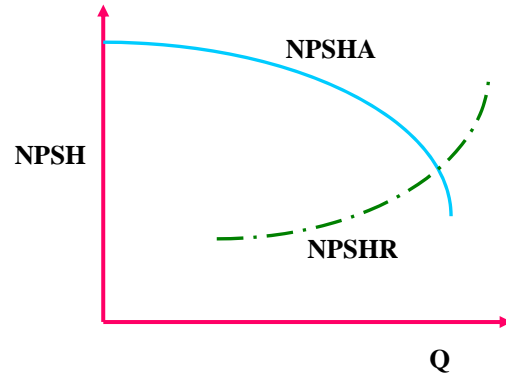
$$= h_s - \frac{P_v}{\rho g}$$

NPSH باید همیشه مثبت باشد. یعنی فشار مایع در مکش تلمبه باید بیشتر از فشار بخار مایع باشد تا اینکه مایع در مکش تلمبه تبخیر نگردد و باعث بوجود آمدن خلاء زایی نشود.

چون  $h_{fs}$  با افزایش شدت جریان زیاد می‌شود، بنابراین NPSH با افزایش شدت جریان کم می‌شود.

اگر مایع در حال جوش باشد،  $P_s = P_v$  می‌شود و بنابراین  $NPSH = Z_s - h_{fs}$  است. در این حالت مخزن مکش حتماً باید بالاتر از تلمبه باشد، چون  $Z_s$  نمی‌تواند منفی یا صفر شود.

اما اگر  $P_s > P_v$  باشد، ممکن است بتوان ارتفاع مخزن مکش را پایین تر از تلمبه هم در نظر گرفت.



NPSHA باید حداقل ۲ الی ۳ متر باشد ولی برای تلمبه های بزرگ این مقدار ممکن است تا ۱۵ متر هم برسد.

### منحنی بلندای مورد نیاز سیستم

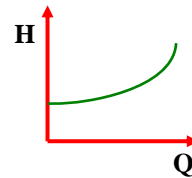
$$\frac{P_d - P_s}{\rho g} + \frac{V_d^2 - V_s^2}{2g} + Z_d - Z_s = h - (h_{fs} + h_{fd})$$

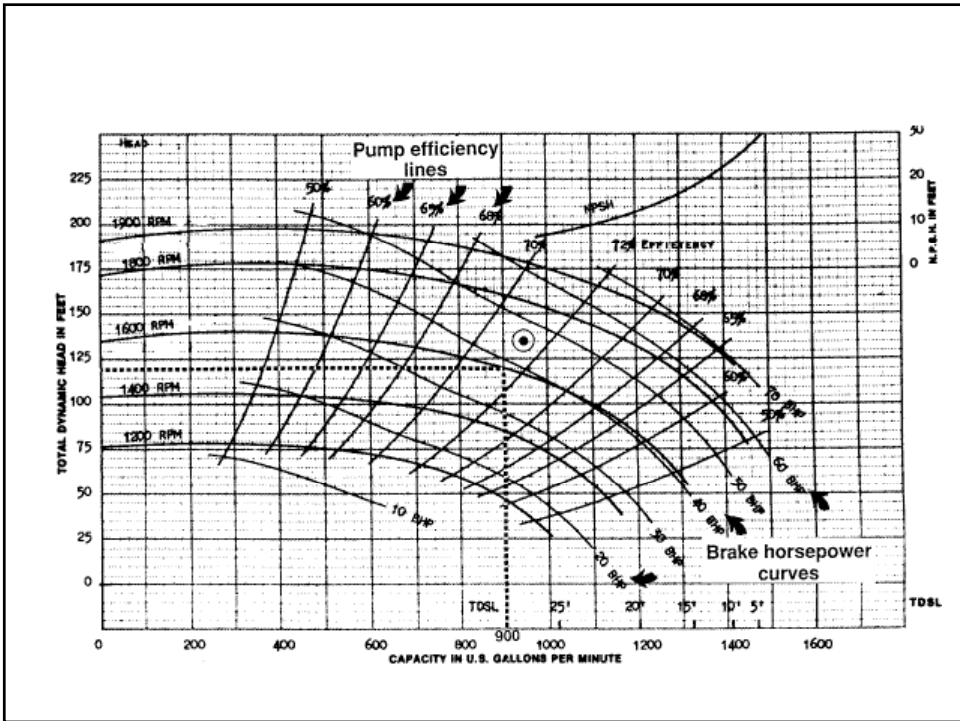
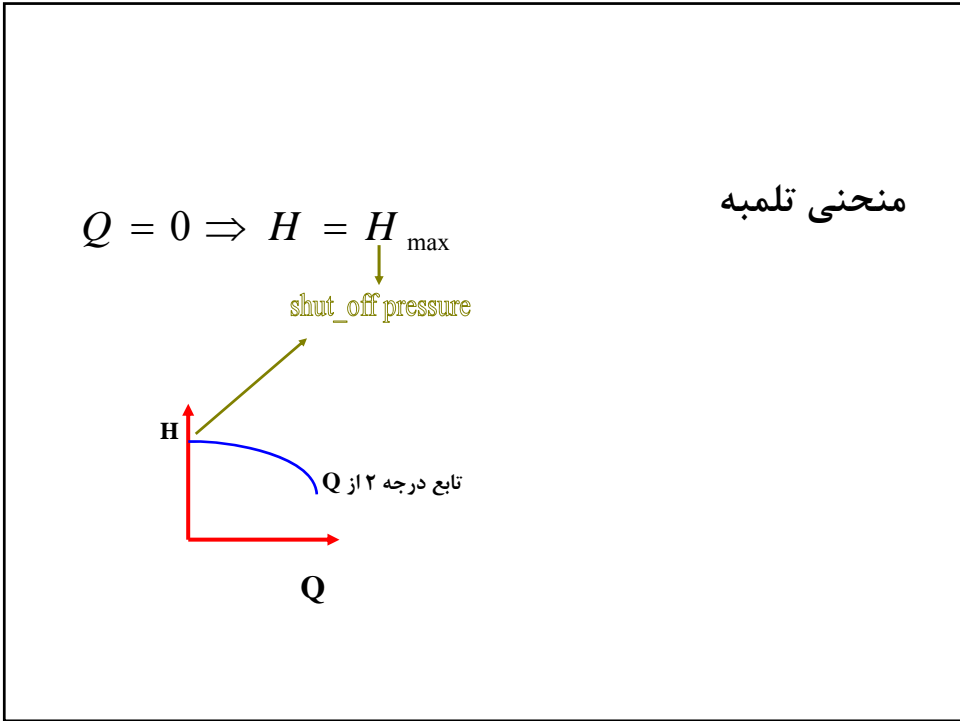
$$h_{sys} = \frac{P_d - P_s}{\rho g} + \frac{V_d^2 - V_s^2}{2g} + Z_d - Z_s + h_{fs} + h_{fd}$$

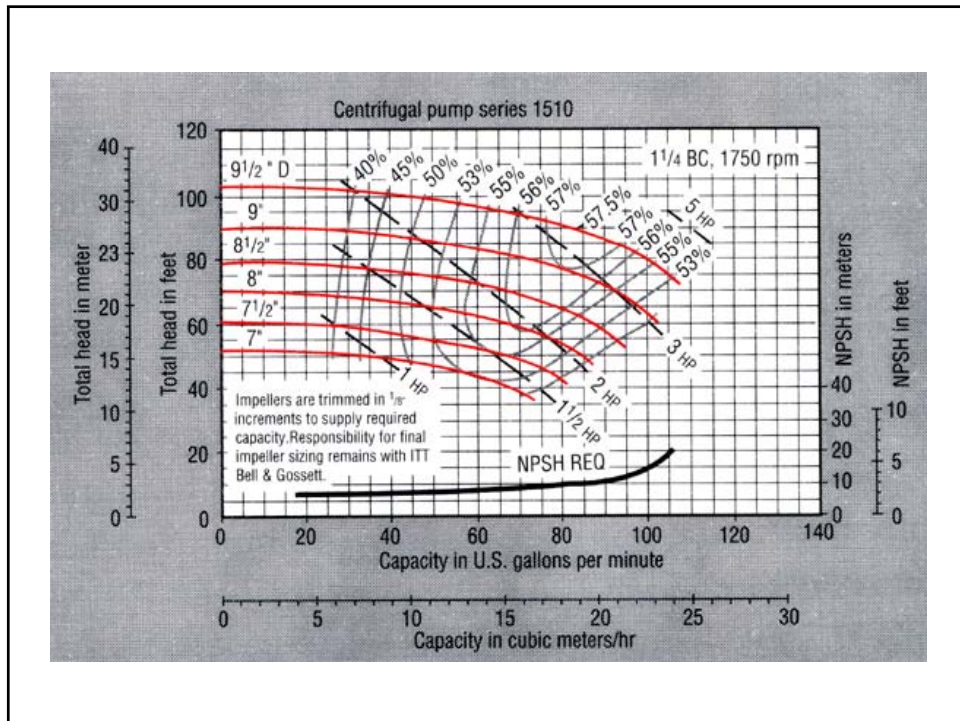
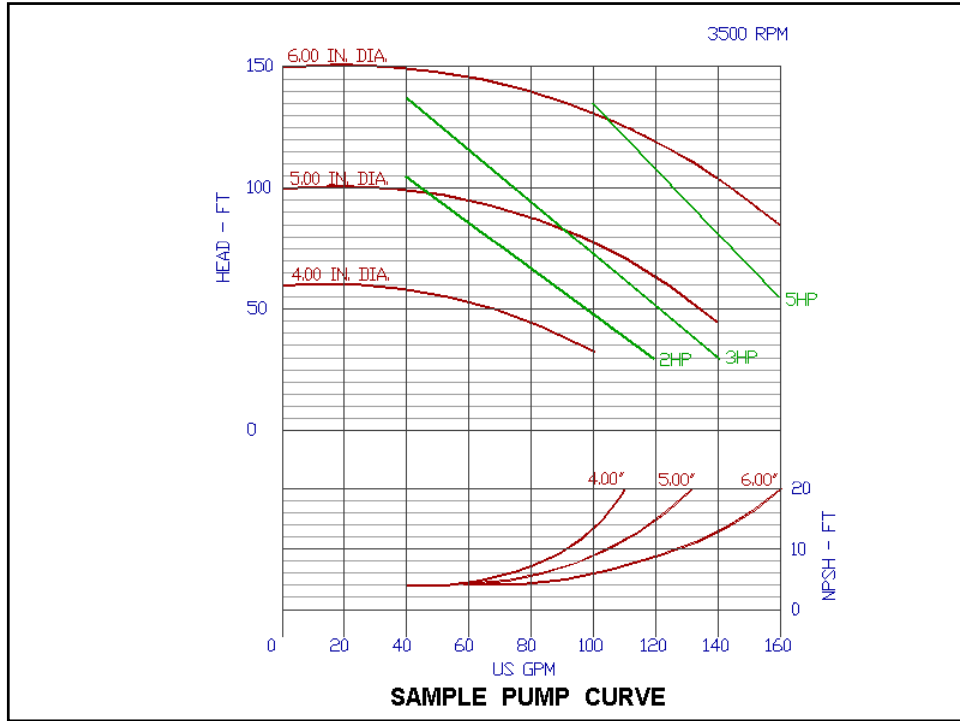
$$h_{fi} = \sum K_i \frac{V_i^2}{2g}$$

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{4}{\pi D^2} Q$$

$$\Rightarrow h_{sys} = \frac{(P_d - P_s)}{\rho g} + (Z_d - Z_s) + \frac{1}{2g} \left[ -\frac{16}{\pi^2 D_s^4} + \frac{16}{\pi^2 D_d^4} + \sum \frac{16K_i}{\pi^2 D_i^4} \right] Q^2$$





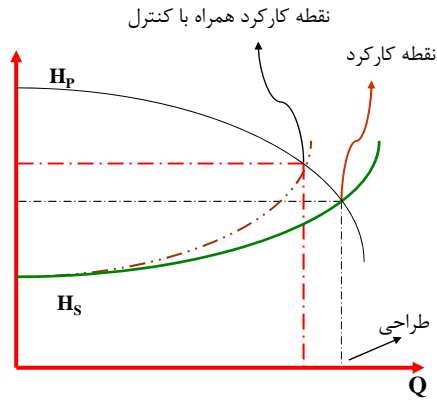




## نقطه کارکرد تلمبه

رابطه انرژی:  $H_P - H_S = 0$

or  $H_P = H_S$



طراحی تلمبه باید بر مبنای ۱۰٪ اضافه ظرفیت باشد. بنابراین در صورتی که لازم باشد که دبی اصلی از تلمبه گرفته شود، باید یک شیر کنترل جریان در خروجی در نظر گرفته شود. در این صورت منحنی سیستم منحنی قرمز می‌شود.

معمولاً Shut\_off pressure، حدود ۲۰٪ بیشتر از فشار معمولی کارکرد تلمبه است.

### قدرت تلمبه

$$P = \Delta P Q = \rho g H_P Q \longrightarrow \text{تئوری}$$

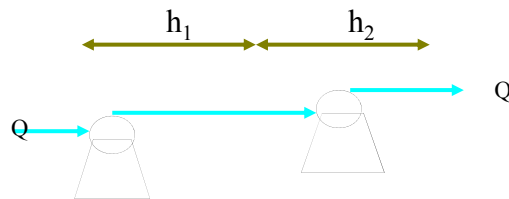
$$P_M = \frac{P}{\eta_M} = \frac{\rho g H_P Q}{\eta_P \eta_M} \longrightarrow \text{راندمان موتور برقی}$$

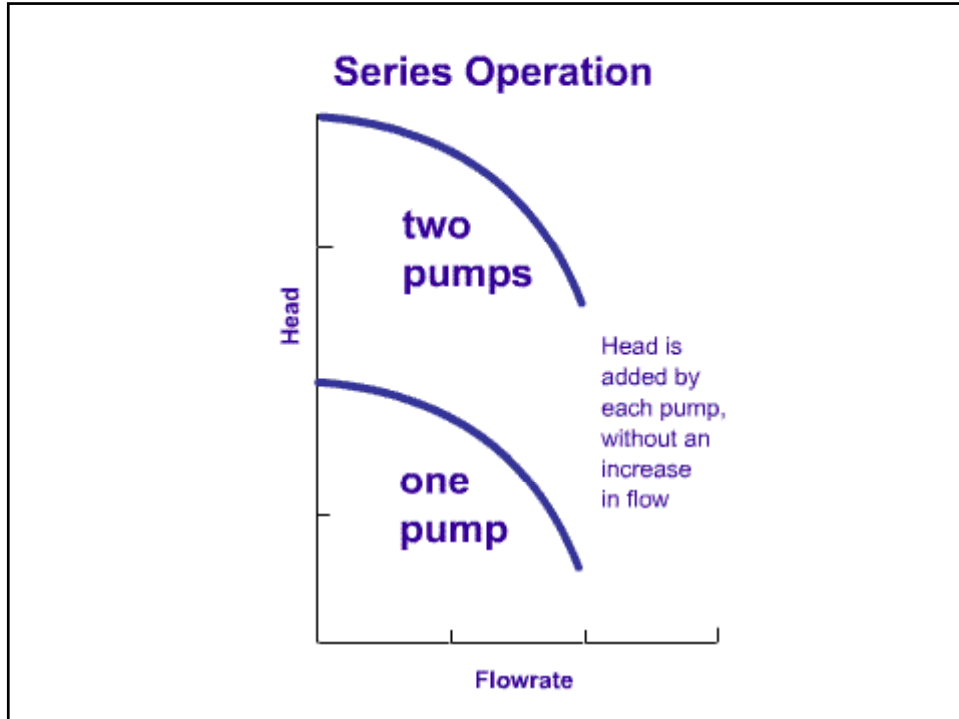
$$P_P = \frac{P}{\eta_P} = \frac{\rho g H_P Q}{\eta_P} \longrightarrow \text{راندمان پمپاژ حدود 70\% است.}$$

### تلمبه های متوالی

$$Q = Q_1 = Q_2$$

$$h = h_1 + h_2$$





### الف) روش جبری:

$h$  جدید برابر است با مجموع معادله های منحنی های دو پمپ، این منحنی جدید را با منحنی سیستم قطع می کنیم تا نقطه کارکرد بدست آید.

$$h_1 = f_1(Q)$$

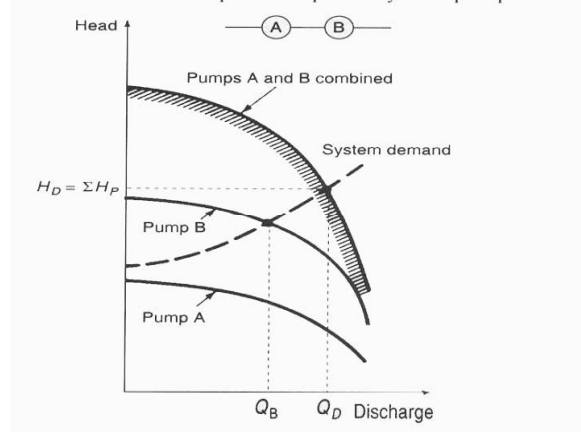
$$h_2 = f_2(Q)$$

$$h = f_1(Q) + f_2(Q)$$

$$h = 2h = 2f(Q) \longrightarrow \text{اگر هر دو تلمبه یکسان باشند.}$$

(ب) روش ترسیمی:

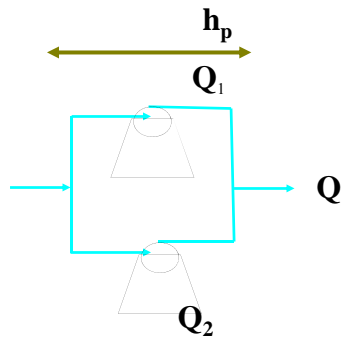
- یک  $Q$  حدس می‌زنیم.
- از روی شکل  $h_1$  و  $h_2$  و  $h_s$  را در یک  $Q$  معین بدست می‌آوریم.
- اگر  $h_1 + h_2 = h_s$  باشد، این نقطه کارکرد سیستم است. در غیر این صورت باید  $Q$  را تغییر دهیم.

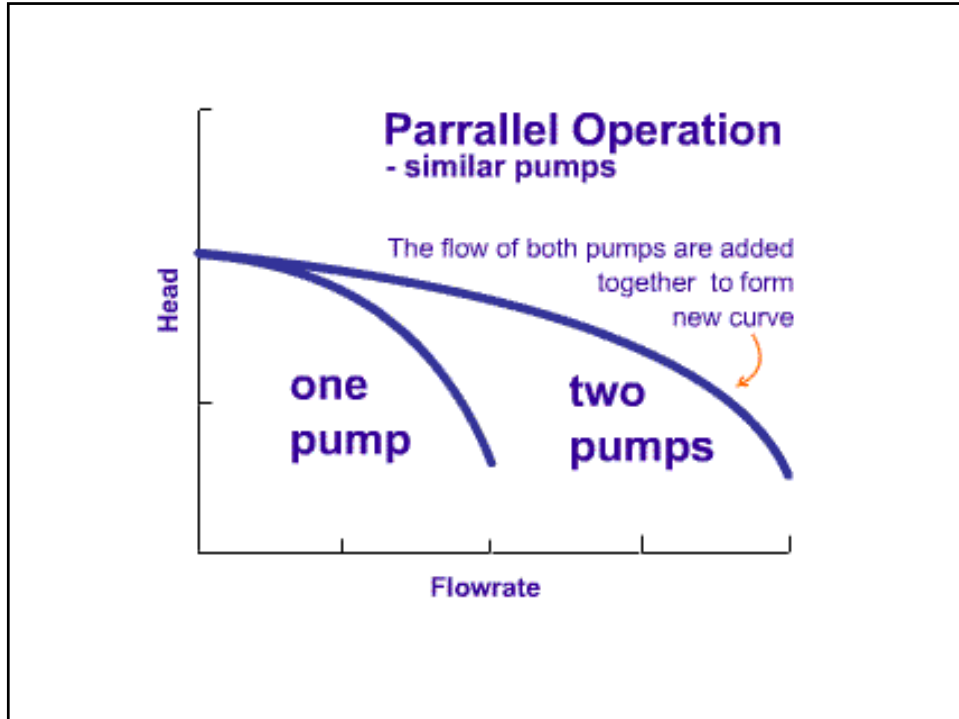


تلمبه های موازی

$$Q = Q_1 + Q_2$$

$$h = h_1 = h_2$$





### الف) روش جبری:

$Q_1$ ,  $Q_2$  را از معادله منحنی مشخصه تلمبه محاسبه می‌کنیم ( $h$  یکی است)، و سپس  $Q=Q_1+Q_2$  را بدست می‌آوریم. این منحنی مشخصه جدید است. آن را با منحنی سیستم قطع می‌دهیم تا نقطه کارکرد معلوم شود.

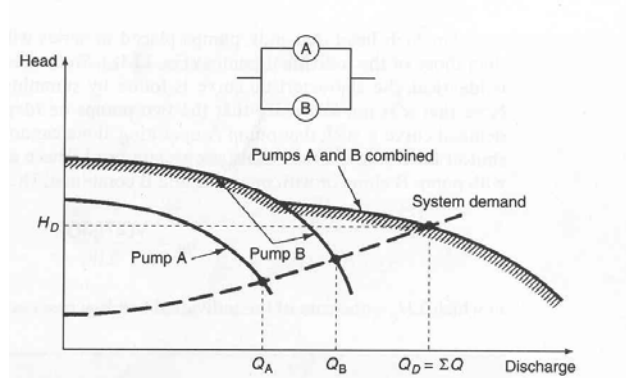
$$h_1 = f(Q) \rightarrow Q_1 = g_1(h)$$

$$h_2 = f_2(Q) \rightarrow Q_2 = g_2(h)$$

$$Q = g_1(h) + g_2(h)$$

### ب) روش ترسیمی:

- در یک  $h$  معین،  $Q_1, Q_2, Q_s$  را بدست می آوریم.
- اگر  $Q_s = Q_1 + Q_2$  باشد، این نقطه کارکرد سیستم است. در غیر این صورت  $h$  را تغییر می دهیم.



### آنالیز بعدی تلمبه های گریز از مرکز

کمیت های مؤثر در کار تلمبه ها:  $f(P, W, D, Q, \Delta P, \rho, \mu)$

کمیت	علامت	بعد
قدرت	P	$ML^2/T^3$
سرعت زاویه ای	W	$T^{-1}$
قطر پروانه	D	L
شدت جریان حجمی	Q	$L^3/T$
تغییر فشار	$\Delta P$	$M/LT^2$
ویسکوزیته سیال	$\rho$	$M/L^3$
چگالی سیال	$\mu$	$M/LT$

با استفاده از آنالیز بعدی داریم:

	<u>بدون بعد</u>	<u>با بعد</u>
ضریب قدرت	$C_p = \frac{P}{\rho \omega^3 D^5}$	$\frac{P}{N^3 D^5}$
ضریب فشار	$C_{\Delta p} = \frac{\Delta p}{\rho \omega^2 D^2} \left( C_H = \frac{gH}{\omega^2 D^2} \right)$	$\frac{H}{N^2 D^2}$
ضریب شلک جریان	$C_Q = \frac{Q}{\omega D^3}$	$\frac{Q}{ND^3}$
عدد رینولدز	$Re = \frac{\omega D^2 \rho}{\mu}$	$\Delta P = \rho g H \Rightarrow C_H = \frac{\rho g H}{\rho \omega^2 D^2} = \frac{gH}{\omega^2 D^2}$

ضریب دیگری که از ترکیب اعداد بدون بعد دیگر به دست می آید:

$$\frac{C_Q C_H}{C_P} = \frac{\rho g Q H}{P} = \eta_P$$

یعنی راندمان تلمبه هم یکی از پارامترهای تشابه است.

## سرعت ویژه

با استفاده از سرعت ویژه می‌توان یک دسته از تلمبه‌های هم شکل را مشخص نمود سرعت ویژه مربوط به کارکرد تلمبه در بیشترین راندمان است و با داشتن  $H, Q, \omega$  مشخص می‌گردد.

برای بدست آوردن  $\Omega_p$  ابتدا  $D$  را بین  $C_Q$  و  $C_H$  حذف می‌کنیم:

$$\frac{C_Q}{C_H^{3/2}} = \frac{\frac{Q}{\omega D^3}}{\frac{(gH)^{3/2}}{\omega^2 D^2}} = \frac{\omega^2 Q}{(gH)^{3/2}}$$

برای آنکه متناسب با سرعت باشد ریشه دوم می‌گیریم:

$$\Omega_p = \frac{\omega Q^{1/2}}{(gH)^{3/4}} \xrightarrow{\text{با بعد}} \frac{NQ^{1/2}}{H^{3/4}}$$

با استفاده از  $\Omega_p$  می‌توان نوع تلمبه را تعیین کرد. (انتخاب کرد)

$\Omega_p < 1$  radial flow جريان شعاعی

$1 < \Omega_p < 4$  mixed flow جريان مخلوط

$\Omega_p > 4$  axial flow جريان محوری



## تشابه تلمبه ها

روابط تشابه بین دو تلمبه که مشخصات هندسی یکسان دارند عبارتند از:

$$(C_P)_1 = (C_P)_2 \quad \text{or} \quad \frac{P_2}{P_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^3 \left( \frac{D_2}{D_1} \right)^5 \xrightarrow{\text{باید}} \frac{\rho_2}{\rho_1} \left( \frac{N_2}{N_1} \right)^3 \left( \frac{D_2}{D_1} \right)^5$$

$$(C_H)_1 = (C_H)_2 \quad \text{or} \quad \frac{H_2}{H_1} = \frac{g_1}{g_2} \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 \left( \frac{D_2}{D_1} \right)^2 \quad \left( \frac{N_2}{N_1} \right)^2 \left( \frac{D_2}{D_1} \right)^2$$

$$(C_Q)_1 = (C_Q)_2 \quad \text{or} \quad \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1} \left( \frac{D_2}{D_1} \right)^3 \quad \left( \frac{N_2}{N_1} \right) \left( \frac{D_2}{D_1} \right)^2$$

برای مقایسه NPSH هم می توان از ضریب بلندا استفاده کرد.

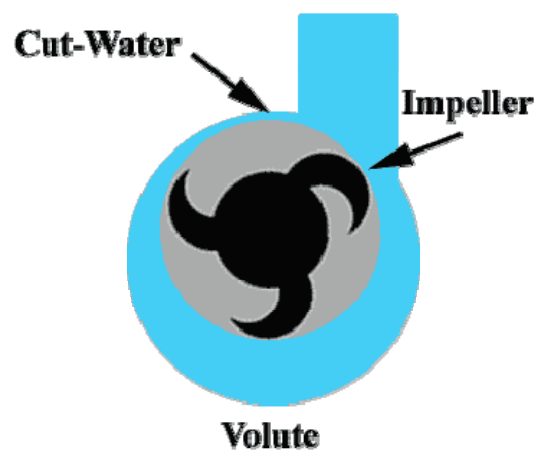
$$\frac{NPSH_2}{NPSH_1} = \left( \frac{N_2}{N_1} \right)^2 \left( \frac{D_2}{D_1} \right)^2$$

با استفاده از این روابط اگر منحنی مشخصه یک تلمبه موجود باشد، می توان منحنی مشخصه تلمبه مشابه دیگری که دارای پروانه با اندازه دیگری است با سرعت چرخش دیگری کار می کند یا مایع دیگری را تلمبه می کند را بدست آورد.

براساس آنالیز بالا، ممکن است گفته شود که  $\eta_2 = \eta_1$  باید باشد. ولی در اصل اینطور نیست، چون اثرات نیروی ویکسوز (عدد  $Re$ ) و زبری تلمبه به دلیل پیچیدگی در نظر گرفته نشده است. در این مورد از رابطه تجربی زیر استفاده می‌شود.

$$\frac{1-\eta_2}{1-\eta_1} = \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^{1/4}$$

### تلمبه های گریز از مرکز



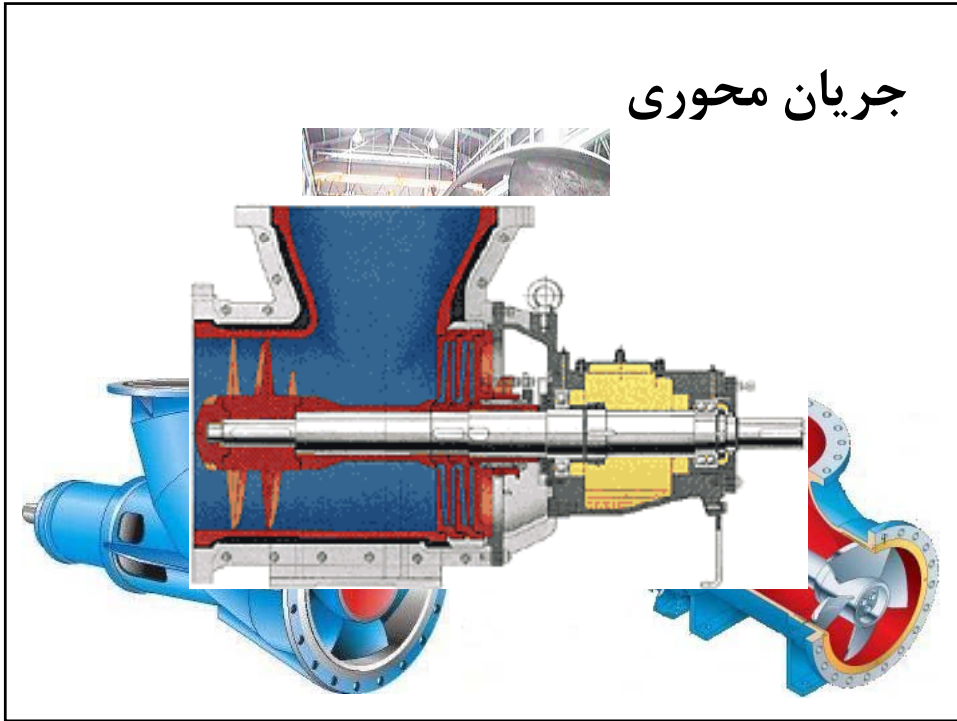
تلمبه های گریز از مرکز



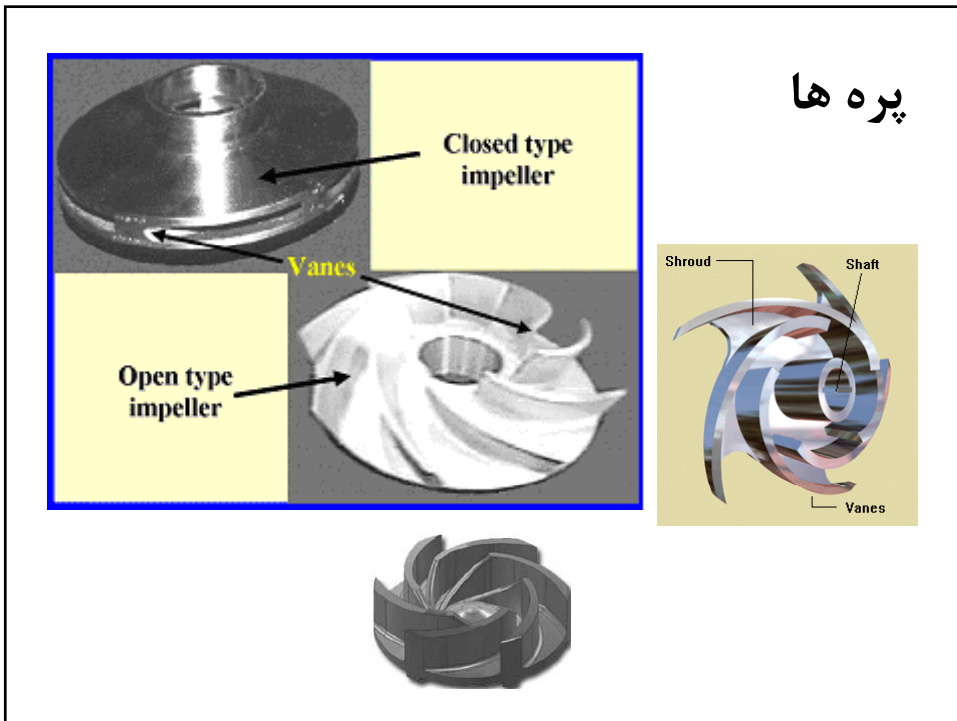
تلمبه های گریز از مرکز



# جریان محوری



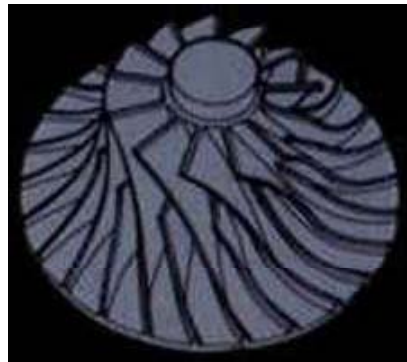
# پره ها



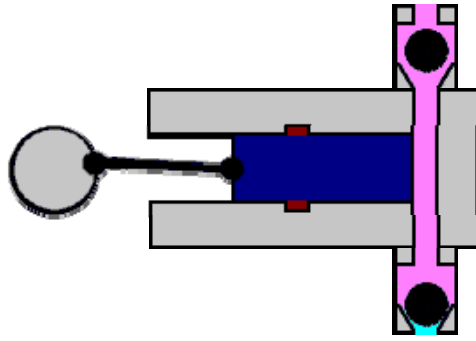
## پره ها



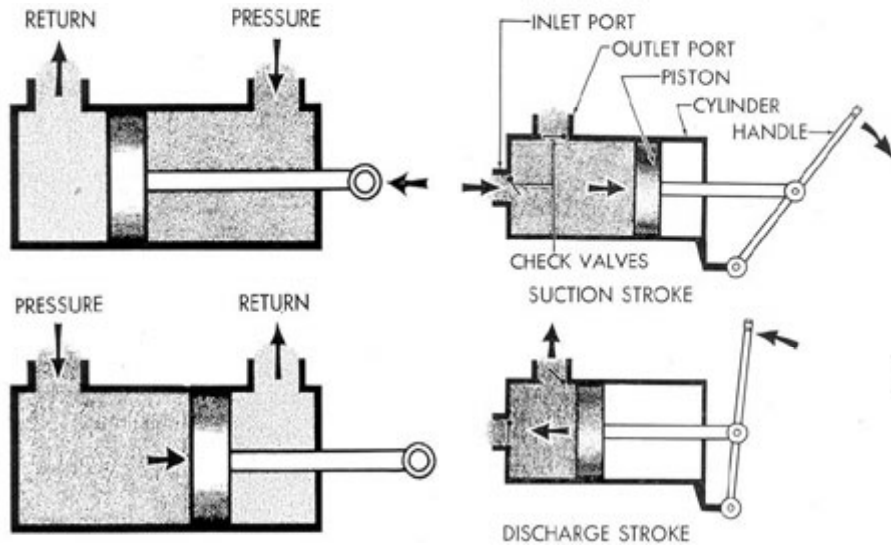
## پره جریان مخلوط



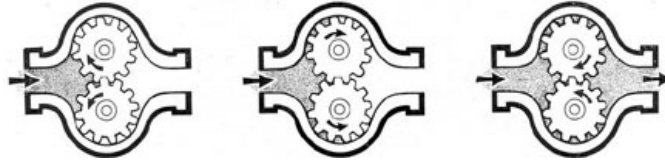
### تلمبه های جابجایی مثبت



### تلمبه های جابجایی مثبت



## تلمبه های جابجایی مثبت



## *Chapter 9*

### *Line Sizing Criteria*

#### *General:*

- *The fluid quantities to be used in determining line sizes shall be those called for by the maximum process design flow rates and in any case shall not be less than 110% of the unit design throughput. However, line sizes shall be in compliance with the equipment (pumps, exchangers, etc.) design capacity.*



## *Pipe Roughness*

<i>PIPE MATERIAL</i>	<i>ABSOLUTE ROUGHNESS (mm)</i>
Commercial steel	0.05
Cast Iron	0.26
Drawn Tubing	0.0015
Concrete/Cement Lining	0.30

## *Liquid line sizing criteria:*

### *1. Limiting Factor in line sizing:*

- Upper limit of the friction loss range*
- Maximum velocity*

*Liquid line sizing criteria:*

Service	Friction Loss Ranges (Bar/100 m)
Pump Suction	0.05 ~ 0.10
Pump Discharge	0.20 ~ 0.45
Cooling Water (header)	0.06 ~ 0.24
Cooling Water (branches)	0.30 ~ 0.45
Gravity Flow	0.035 (MAX.)

*2. Velocity limits depend on line diameter:*

		SUBCOOLED	BOILING
Pump suction:	up to 2"	0.3 ~ 0.6 m/s	Max. 0.5 m/s
	From 3" to 6"	0.6 ~ 1.0 m/s	Max. 0.9 m/s
	From 8" to 10"	0.8 ~ 1.5 m/s	Max. 1.2 m/s
	Over 12"	0.9 ~ 3.0 m/s	Max. 2.0 m/s
Pump suction:	up to 2"	0.6 ~ 1.2 m/s	Max. 1.0 m/s
	From 3" to 6"	1.0 ~ 2.4 m/s	Max. 2.0 m/s
	From 8" to 10"	1.5 ~ 2.8 m/s	Max. 2.4 m/s
	Over 12"	2.4 ~ 3.6 m/s	Max. 3.2 m/s

*Corrosive or erosive fluids:*

- *Velocity limits should be halved.*
- *In case of lower velocity*
  - *lower velocity shall be based upon for the design of such line.*

*Gas and steam lines sizing criteria*

Services	Friction loss ranges (bar/100m)	Velocity ranges (m/s)
<i>Gas and vapors</i>		
Less than 1 bar (a)	0.01 ~ 0.06	20 ~ 30
Up to 7 bar (g)	0.02 ~ 0.1	20 ~ 30
From 7 to 69 bar (g)	0.1 ~ 0.4	20 ~ 35
Over 69 bar (g)	0.7 % of the op. press.	20 ~ 40
<i>Steam (Saturated)</i>		
Less than 3.5 bar (a)	0.7 % of the op. press.	15.2 (d) <sup>0.5</sup>
From 3.5 to 17.2 bar (g)	0.1 ~ 0.3	12.0 (d) <sup>0.5</sup>
From 17.2 to 69 bar (g)	0.3 ~ 0.7	9.0 (d) <sup>0.5</sup>
<i>Steam (Super heated)</i>		
Less than 17.2 bar (a)	Same as gas and vapor	
Over 17.2 bar (g)	2.3 % of the op. press.	15.2 (d) <sup>0.5</sup>

## *Gas and steam line sizing criteria:*

### *1. Limiting Factor in line sizing:*

- *Upper limit of the friction loss range*
- *Maximum velocity*

### *2. Absolute maximum velocities limits:*

- *Gas and vapors and superheated steam  
less than 17.2 bar (g): 50% sonic*
  - *saturated steam and superheated steam  
above 17.2 bar (g):  $30.5 (d)^{0.5}$   
 $d = \text{Nominal pipe diameter (inches)}$   
*subject to the following absolute limitations**
- *Saturated steam: 50 m/s*
  - *Superheated steam: 75 m/s*

*It must be mentioned that:*

*Sonic or acoustic velocity:*

*- sonic velocity:  $91.2 \{(T/M.W)\}^{0.5}$*

*where:*

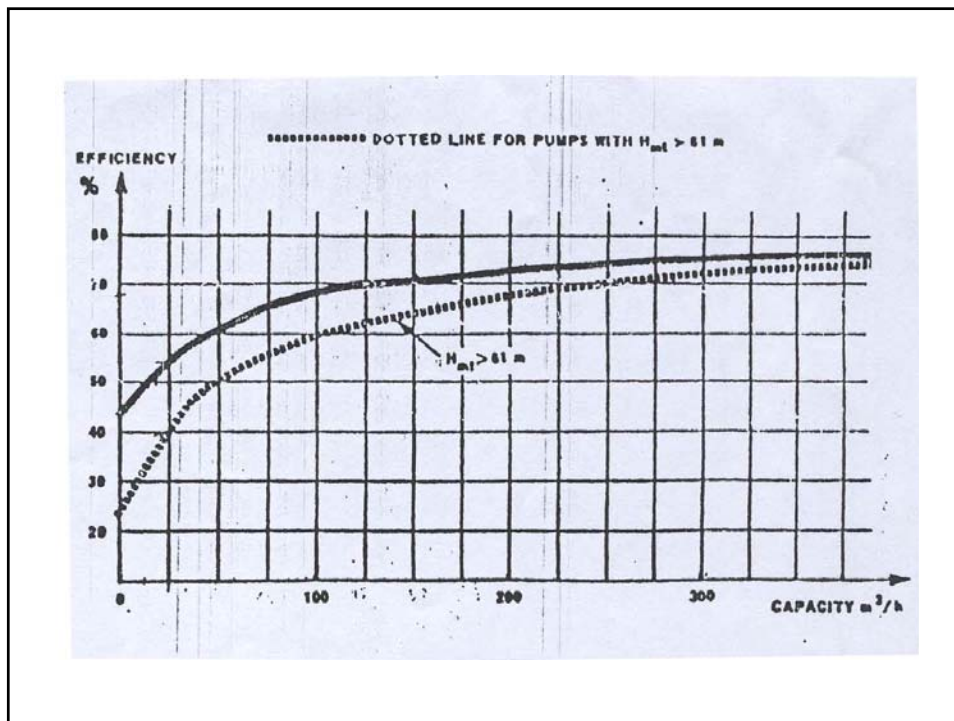
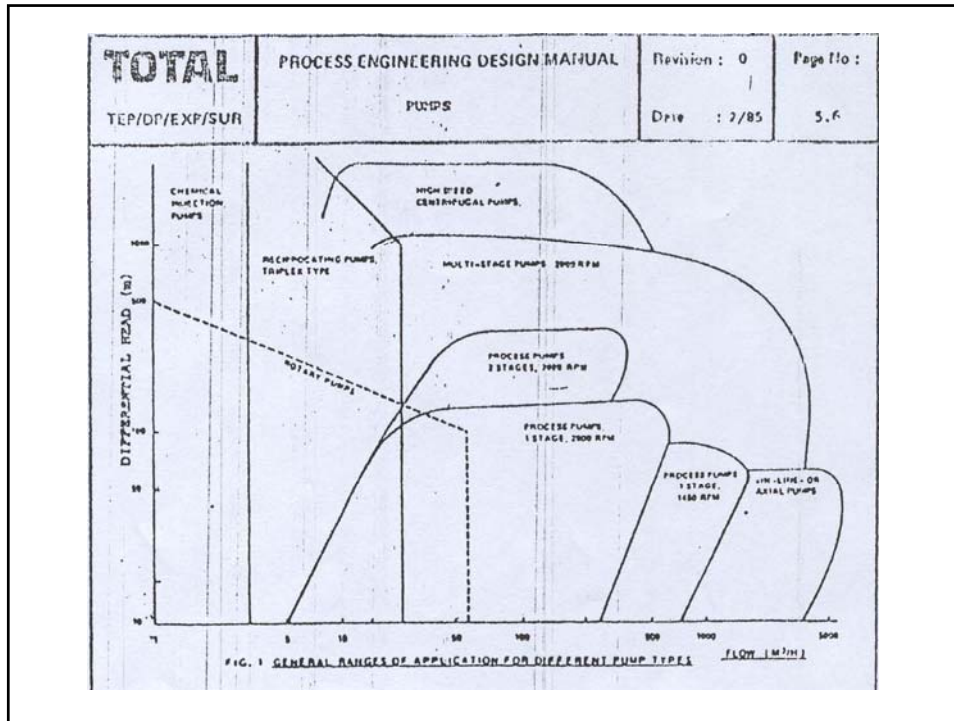
*T = fluid temperature (K)*

*M.W = fluid molecular weight*

## *Miscellaneous*

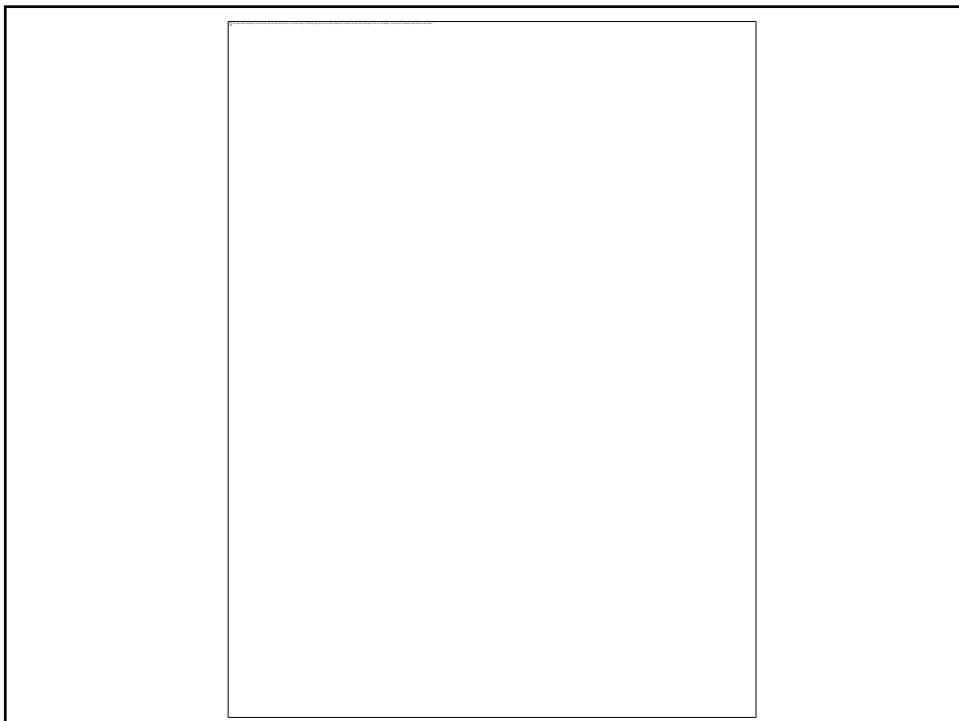
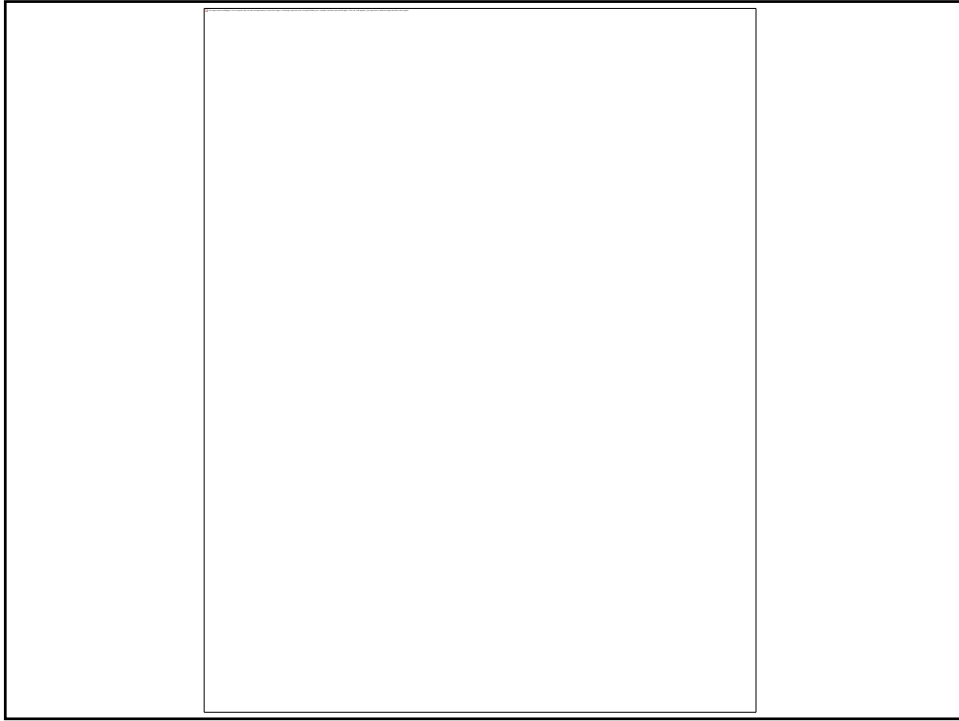
### *1. Two phase flow:*

- Special consideration to the type of flow*
  - The maximum limit shall be 4.5 bar/Km for pressure drop and  $122/(Dm)^{0.5}$  maximum average velocity*
- Dm = mixed phase density in Kg/m<sup>3</sup>*
- The maximum average fluid velocity for transfer lines between furnace and tower shall not be higher than  $V=73/(Dm)^{0.5}$  at operating conditions.*



# Examples of Pump Data sheets

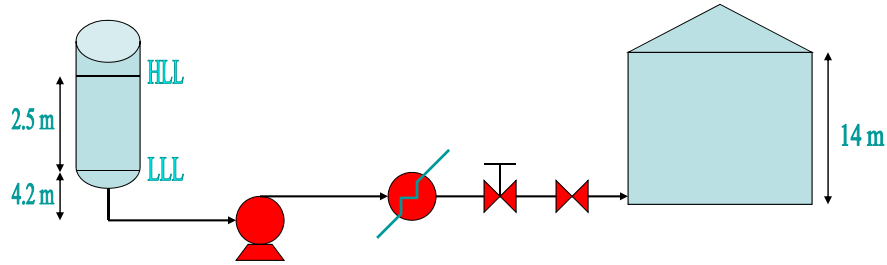
TOTAL C.P.P.		PROCESS DATA SHEET PUMP		Rev.:		
TEP/DOPI	Job:	Unit:				
	Service:	Item:				
1 FLUID HANDLED						
2	Fluid circulated					
3	Pumping temperature	°C				
4	Viscosity at P.T.	cp				
5	Vapor pressure at P.T.	bar a				
6	Specific gravity 15/4					
7	Specific gravity at P.T.					
8 OPERATING CONDITIONS						
9	Capacity	m <sup>3</sup> /h				
10	Discharge pressure	bar g				
11	Suction pressure	bar g				
12	Differential pressure	bar g				
13	Net differential head	m				
14	NPSH available	m				
15	Hydraulic horsepower	kW				
16 PUMP						
17	Type					
18	Design capacity	m <sup>3</sup> /h				
19	Efficiency	%				
20	Max. brake horsepower	kW				
21	Speed	U/min				
22	Material					
23 DRIVER						
24	Type					
25	Rating	kW				
26	Speed	U/min				
27	Operating head	U/min				
28	Connected head	kW				
29	Spine					
30 REMARKS						
31						
32						
33						
34						
35						
36						
37						
38						
39						
40						
41	REVISION	0	1	2	3	4
42	Date					
43	By					





*Example:*

*Indicate pressure, elevations and system sketch*



Fluid Pumped: Liquid: Crude Oil	Pump Type:
	Speed:
Pumping temperature T: 40 °C	Viscosity at P , T: 8.2 cP
Vapor pressure at T: 1.04 bar a	Specific gravity : 0.822 (ref. cond.)
Density at P , T: 805 kg/m <sup>3</sup>	Normal flow at P , T: 451 m <sup>3</sup> /h
Specific gravity at P , T: 0.805	Design margin: 25 %
	Design flow at P , T: 489 m <sup>3</sup> /h

<u>Suction pressure</u>		<u>Maximum discharge pressure</u>	
Min. origin pressure =	1.03 bar a	Max. suction pressure	5.03 bar a
Static head at LLL =	14.2 m	Normal pump $\Delta P \times 120\%$	3.8 bar
( $m \times sg \times 0.0981$ )	0.33 bar	Net	5.53 bar a
- $\Delta P$ suction line	0.1 bar	<u>Discharge pressure</u>	
Pump suction pressure	1.26	Delivery pressure	1.01 bar a
<u>Net positive suction head</u>		Static head	1.11 bar
Static head at LLL =	4.2 m	$\Delta P$ control valve (s)	0.7 bar
- Line loss =	1.27 m	$\Delta P$ exchanger (s)	0.7 bar
Vapor pressure correction		$\Delta P$ orifice (s)	-
Total available NPSH	2.93 m	$\Delta P$	-
<u>Maximum suction pressure</u>		$\Delta P$ line loss	0.42 bar
Vessel PSV setting	4.5 bar a	Other	0.5 bar
Static head at HLL	0.53 bar	Total discharge pressure	4.42 bar
Net	5.03 bar a		

<u>Maximum discharge pressure</u>	
Max. suction pressure	5.03 bar a
Normal pump $\Delta P \times 120\%$	3.8 bar
Net	5.53 bar a
<u>Discharge pressure</u>	
Delivery pressure	1.01 bar a
Static head	1.11 bar
$\Delta P$ control valve (s)	0.7 bar
$\Delta P$ exchanger (s)	0.7 bar
$\Delta P$ orifice (s)	-
$\Delta P$	-
$\Delta P$ line loss	0.42 bar
Other	0.5 bar
Total discharge pressure	4.42 bar

<u>Differential pressure</u>	
Suction pressure	1.26 bar a
Discharge pressure	4.42 bar
Pump $\Delta P$	3.16 bar
	40 m
<u>Power requirement</u>	
<u>Brake-horse power</u> = (fig. 2 for $\eta_p$ )	23 kw
Estimated motor size	30 kw
<u>Design operating load</u> (fig. 3 for $\eta_m$ )	34 kw
Estimated weight	4000 kg

می خواهیم یک مایع هیدروکربنی با چگالی  $820 \text{ kg/m}^3$  و ویسکوزیته  $8.5 \text{ cp}$  را توسط تلمبه ای با شدت  $25 \text{ ton/hr}$  انتقال دهیم. اندازه مناسب لوله مکش و تخلیه تلمبه را تعیین کنید.

$$Q = 25 \frac{\text{ton}}{\text{hr}} \times \frac{1000\text{kg}}{1\text{ton}} \times \frac{1\text{hr}}{3600\text{s}} \times \frac{1\text{m}^3}{820\text{kg}} = 8.47 \times 10^{-3} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

مکش

حدس

$$v = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$Q = vA = v \frac{\pi}{4} D^2 \Rightarrow D = 0.104 \text{ m}$$

$$D = 100 \text{ mm} \Rightarrow v = 1.08 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{Re} = \frac{\rho v D}{\mu} = \frac{820 \times 1.08 \times 0.1}{8.5 \times 10^{-3}} = 10419$$

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{4.6 \times 10^{-5}}{0.1} = 4.6 \times 10^{-4} \Rightarrow f = 0.03$$

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g} \Rightarrow \Delta p_f = f \frac{L}{D} \rho \frac{v^2}{2} = 0.031 \times \frac{100}{0.1} \times 820 \times \frac{1.08^2}{2}$$

$$= 14347 \text{ pa}$$

$$= 0.14 \frac{\text{Bar}}{100\text{m}}$$

Table : 0.05 – 0.1

## حدس بعدی

$$D = 125 \text{ mm} \Rightarrow v = 0.69 \frac{m}{s}$$

$$\text{Re} = 8321$$

$$f = 0.036$$

$$\Delta p_f = 0.056 \frac{\text{Bar}}{100 \text{ m}}$$

$$\text{Table : } \Delta p : 0.05 - 0.1 \frac{\text{Bar}}{100 \text{ m}}$$

$$v : 0.6 - 1.0 \frac{m}{s}$$

تخلیه

## حدس

$$D = 100 \text{ mm} \Rightarrow v = 1.08 \frac{m}{s}$$

$$\text{Re} = 10419$$

$$f = 0.03$$

$$\Delta p_f = 0.14 \frac{\text{Bar}}{100 \text{ m}}$$

$$\text{Table : } \Delta p : 0.2 - 0.45 \frac{\text{Bar}}{100 \text{ m}}$$

### حدس بعدی

$$D = 80 \text{ mm} \Rightarrow v = 1.69 \frac{m}{s}$$

$$Re = 13004$$

$$\frac{\varepsilon}{D} = 5.75 \times 10^{-4} \Rightarrow$$

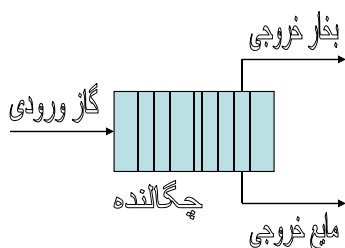
$$f = 0.03$$

$$\Delta p_f = 0.422 \frac{\text{Bar}}{100 m}$$

$$\text{Table : } \Delta p : 0.2 - 0.45 \frac{\text{Bar}}{100 m}$$

$$v : 1.0 - 2.4 \frac{m}{s}$$

در فرآیند تولید دی کلرو اتان از اتیلن، گاز خروجی از راکتور در تماس مستقیم با کلرید هیدروژن سرد میگردد و سپس با دمای  $95^\circ\text{C}$  و فشار 5 bar وارد یک چگالنده شده و تا دمای  $35^\circ\text{C}$  سرد می شود. گاز خروجی از این چگالنده به راکتور بازگردانده شده و مایع خروجی از آن برای خالص سازی به مرحله بعدی فرآیند منتقل می شود. مطلوبست تعیین اندازه لوله های فرآیندی ورودی و خروجی چگالنده.



داده های مورد نیاز عبارتند از:

- گاز ورودی: شدت جریان = 14240 kg/h  
چگالی = 5.2 kg/m<sup>3</sup>  
ویسکوزیته = 0.018 mPa.s
- بخار خروجی: شدت جریان = ۶۵۰۳ kg/h  
چگالی = 4.8 kg/m<sup>3</sup>  
ویسکوزیته = 0.013 mPa.s
- مایع خروجی: شدت جریان = 7737 kg/h  
چگالی = 1305 kg/m<sup>3</sup>  
ویسکوزیته = 0.9 cP

گاز ورودی

$$Q = 14240 \times \frac{1}{3600} \times \frac{1}{5.2} = 0.76 \frac{m^3}{s}$$

$$\text{Guess : } v = 25 \frac{m}{s} \Rightarrow D = 0.197 m$$

$$D = 200 mm \Rightarrow v = 24.2 \frac{m}{s}$$

$$Re = \frac{5.2 \times 24.2 \times 0.2}{0.018 \times 10^{-3}} = 1.4 \times 10^6$$

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{4.6 \times 10^{-5}}{0.2} = 2.3 \times 10^{-4} \Rightarrow f = 0.019$$

$$\Delta p_f = f \frac{L}{D} \rho \frac{v^2}{2} = 0.019 \times \frac{100}{0.2} \times 5.2 \times \frac{24.2^2}{2}$$

$$= 0.14 \frac{\text{Bar}}{100m}$$

$$\text{Table: } \Delta p_f = 0.02 - 0.1 \frac{\text{Bar}}{100m}$$

$$\text{The next guess: } D = 250 \text{ mm} \Rightarrow v = 15.5 \frac{m}{s}$$

$$\text{Table: } v = 20 - 30 \frac{m}{s}$$

بخار خروجی

$$Q = 6503 \times \frac{1}{3600} \times \frac{1}{4.8} = 0.376 \frac{m^3}{s}$$

$$\text{Guess: } v = 25 \frac{m}{s} \Rightarrow D = 0.138m$$

$$D = 150 \text{ mm} \Rightarrow v = 21.3 \frac{m}{s}$$

$$\text{Re} = 1.18 \times 10^6$$

$$\frac{\varepsilon}{D} = 3.07 \times 10^{-4} \Rightarrow$$

$$f = 0.016$$



$$\Delta p_f = f \frac{L}{D} \rho \frac{v^2}{2} = 0.12 \frac{\text{Bar}}{100m}$$

$$\text{Table : } \Delta p_f = 0.02 - 0.1 \frac{\text{Bar}}{100m}$$

$$\text{The next guess : } D = 200 \text{ mm} \Rightarrow v = 12 \frac{m}{s}$$

$$\text{Table : } v = 20 - 30 \frac{m}{s}$$

مايع خروجی =

ورودی به پمپ است + در حال جوش یا نزدیک به جوش است

$$Q = 7737 \times \frac{1}{3600} \times \frac{1}{1305} = 1.65 \times 10^{-3}$$

$$\text{Guess : } v = 1 \frac{m}{s} \Rightarrow D = 0.046 m$$

$$D = 50 \text{ mm} \Rightarrow v = 0.84 \frac{m}{s}$$

$$\text{Table : } v : \text{max.} = 0.5 \frac{m}{s}$$

*The next guess :  $D = 65\text{ mm} \Rightarrow v = 0.497 \frac{m}{s}$*

$$\text{Re} = 46842$$

$$\frac{\varepsilon}{D} = 7.08 \times 10^{-4} \Rightarrow$$

$$f = 0.024$$

$$\Delta p_f = f \frac{L}{D} \rho \frac{v^2}{2} = 0.059 \frac{\text{Bar}}{100\text{ m}}$$

$$\text{Table : } \Delta p = 0.05 - 0.1 \frac{\text{Bar}}{100\text{ m}}$$