مقاومت مصالح (ویژه کنکور کارشناسی ارشد عمران)

۱- مقدمه ۲
۲- تنش و کرنش ۳
۳- بارگذاری محوری ۶
۳-۱- تغییرشکل محوری میله های مایل ۱۳
۴- تغییر شکل محوری سازه های نامعین ۲۱
۵- ضریب پواسون ۲۲
۶- حرارت ۲۸
۷- دایره مور تنش (2D) ۳۱
۸- دایره مورتنش (3D) ۳۷
۹- دایره مورکرنش ۴۰
۱۰- گلبرگ کرنش ۴۱
۱۱- مخازن ۴۲
۱۲- پیچش ۴۵
۱۲-۱- مقاطع جدارنازک ۴۸
۱۳- خمش ۶۲
۱۳-۱- شعاع انحنا ۶۲
۱۳-۲- مقاطع مرکب ۶۶
۱۳-۳- خمش دو محوره ۷۱
۱۳-۴- سهم لنگر ۷۶
۱۳-۵- تیر با طول نامحدود ۷۷
۱۳-۶- ترکیب خمش و پیچش ۷۸
۱۳-۷- آنالیز ابعادی ۷۹
۱۳-۸- هسته خمش ۹۴
۱۴- بارگذاری عرضی (برش) ۹۶
۱۴-۱- جریان برش ۱۰۷
۱۴-۲- مرکز برش ۱۰۷
۱۵- مدل سازی با فنر ۱۱۰
16- انرژی ۱۱۶
۱۷- کمانش ۱۲۵

۱-مقدمه

داوطلب گرامی ضمن آرزوی پیروزی برای شما قبل از استفاده از جزوه مطالب زیر را مطالعه بفرمایید:

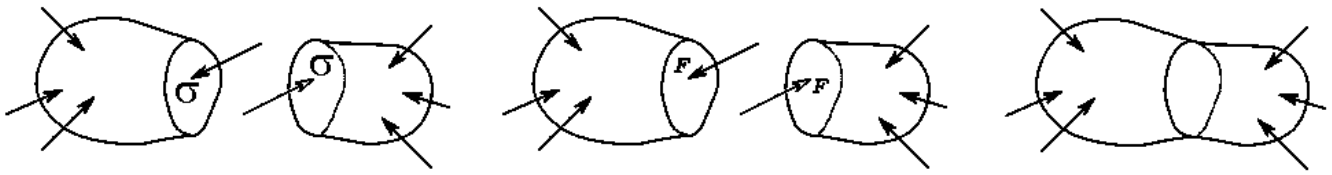
- ✓ این جزوه جهت تدریس سرکلاسی و افزایش سرعت تدریس تهیه شده و بنابراین کامل نیست! برخی از مطالب توضیح داده نشده و پاسخ برخی تستها ناقص است. داوطلبان کنکور بهتر است از منابع مختلفی که موجود است نیز استفاده کنند (کتاب مقاومت مصالح جانستون و نیز کتاب جامع مقاومت مصالح دکتر فنایی انتشارات راهیان ارشد کتب مناسبی هستند. اولی کتاب مرجع و دومی کتاب تست است).
- ✓ این جزوه در فرصت های مناسب ویرایش و کامل تر خواهد شد (تاریخ ویرایش جزوه در قسمت فوقانی صفحات درج شده است).
- ✓ استفاده از جزوه با ذکر منبع آن (www.hoseinzadeh.info) بلامانع است.
- ✓ مسلما جزوه خالی از اشتباه نیست. در صورتی که به اشتباهی برخوردید، ممنون می شوم که از طریق سایت اطلاع دهید تا در ویراش بعدی اصلاح شود.
- ✓ علاوه بر این جزوه، جزوات بتن، فولاد، و تحلیل و همچنین پاسخ تشریحی تستهای کنکور سراسری و آزاد ۱۳۹۰ برای این دروس و نیز کتب مفید دیگر را می توانید از سایت اینجانب (www.hoseinzadeh.info) دانلود نمایید.

حسین زاده

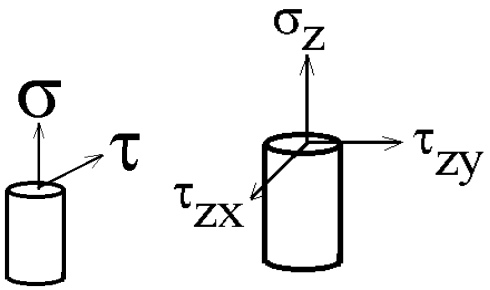
۱۳۹۰/۲/۱۰

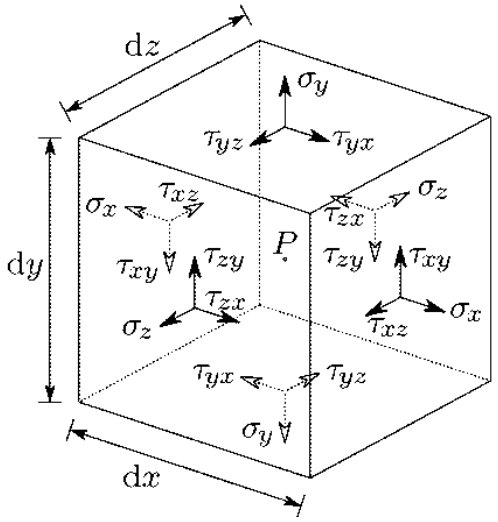
۲-تنش و کرنش

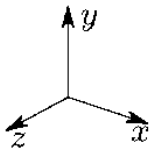
تنش= نیرو بر واحد سطح (مانند فشار) $\sigma = \frac{F}{A}$



تنش را می توان به صورت بردار نشان داد:







تانسور تنش: $\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$

نکته: تنها ۶ تنش مستقل داریم: $\{\sigma_x\}$, $\{\sigma_y\}$, $\{\sigma_z\}$, $\{\tau_{xy} = \tau_{yx}\}$, $\{\tau_{xz} = \tau_{zx}\}$, $\{\tau_{yz} = \tau_{zy}\}$

تفاوت تنش با فشار: فشار همیشه برسطح عمود است---- تنش می‌تواند مولفه مماس بر سطح نیز داشته باشد.

فشار بر سطح خارجی جسم اثر می‌کند----- تنش معمولا در داخل جسم بررسی می‌شود.

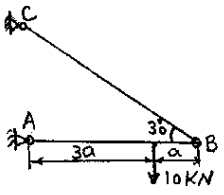
فشار اسکالر است (فقط مقدار دارد)----- تنش بردار است (مقدار وجهت دارد)

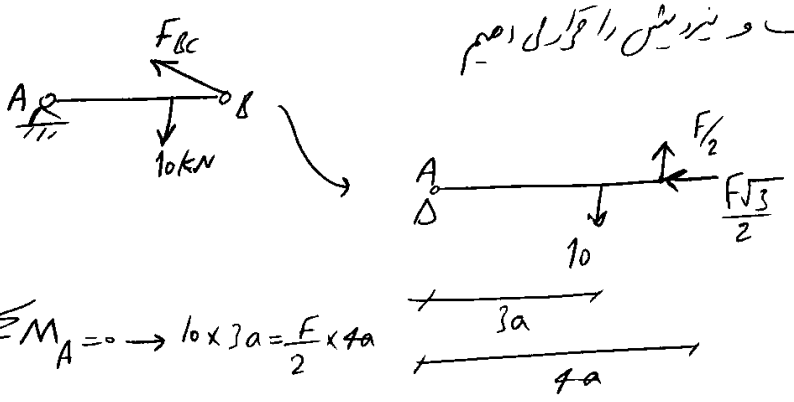
واحد هر دو نیرو بر واحد سطح است.

مثال (سراسری ۸۷)

۵۱- در شکل روبرو اگر سطح مقطع میله‌ها هر کدام $10\,cm^2$ باشد تنش در میله BC بر حسب MPa چقدر است؟

۱) ۷/۵
۲) ۱۰
۳) ۱۵
۴) ۲۰





مثال (سراسری ۸۶)

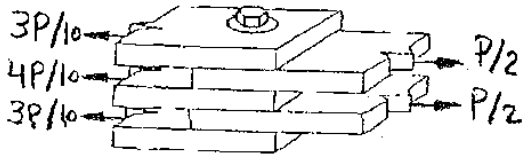
۴۹- در اتصال زیر مطابق شکل ۵ ورق فولادی که ضخامت هر یک t می‌باشد با یک پیچ با سطح مقطع A به همدیگر متصل شده‌اند و نیروی P را باید انتقال دهند. تنش برشی ماکزیمم در پیچ کدام است؟

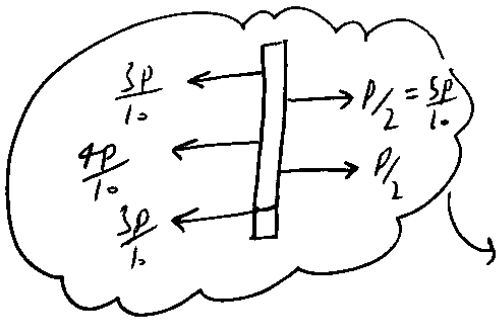
۱) $\frac{1}{4}(\frac{P}{A})$

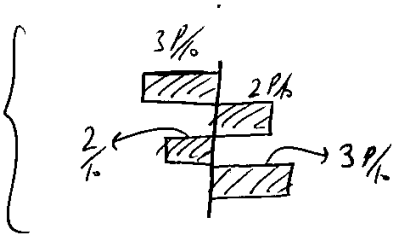
۲) $\frac{3}{10}(\frac{P}{A})$

۳) $\frac{2}{10}(\frac{P}{A})$

۴) $\frac{1}{2}(\frac{P}{A})$

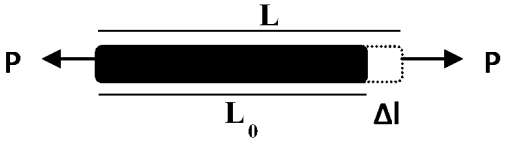






حداکثر نیروی برشی در پیچ برابر $V = \frac{3P}{10}$ است ←

$\tau = \frac{V}{A} = \frac{3P}{10A}$

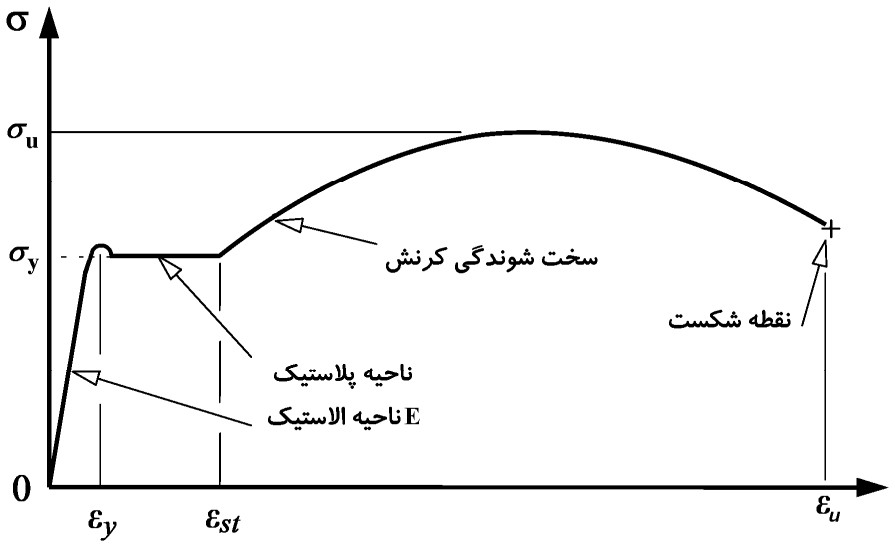


$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{L_0}$$

کرنش مهندسی: $\varepsilon = \frac{L - L_0}{L_0}$

کرنش واقعی: $\varepsilon = \int_{L_0}^{L} \frac{dL}{L} = \mathrm{Ln}\frac{L}{L_0}$

نمودار تنش کرنش:

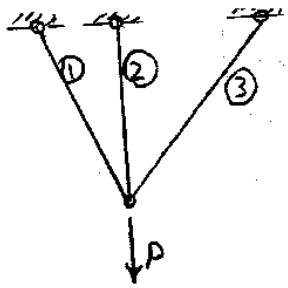


مدول ارتجاعی یا مدول کشسانی یا مدول الاستیسیته : $\sigma = E\varepsilon$

ضریب اطمینان: $S.F. = \dfrac{\text{تنش نهایی}}{\text{تنش مجاز}} = \dfrac{\sigma_Y}{\sigma_{\text{مجاز}}}$

مثال (سراسری ۸۷)

۵۹- در شکل روبرو طراحی چنان انجام شده که زیر اثر بار P تنش در میله‌های ۱ ، ۲ ، ۳ به ترتیب $0/7\sigma_\omega$ ، $0/9\sigma_\omega$ و $0/5\sigma_\omega$ است. ضریب اطمینان $\frac{5}{3}$ می‌باشد. بار P در چه ضریبی ضرب شود تا یکی از میله‌ها به تسلیم برسد؟



۱) $\frac{3}{5}$

۲) ۱/۵

۳) $\frac{5}{3}$

۴) $\frac{5}{2/7}$

منظور از سه تای تنش مجاز است اگر به جای P ، $\frac{1}{0.9}P$ را ایجاد کنیم تنش میله ۱ و ۳ می‌رسد و اگر به جای P ، $\frac{5}{3}\times\left(\frac{1}{0.9}P\right)$ را ایجاد کنیم تنش در میله ۱ و ۳ به تنش تسلیم می‌رسد

$$\frac{5}{3}\times\frac{1}{0.9}=\frac{5}{2.7}$$

۳-بارگذاری محوری

اگر P,L,E,A **در طول عضو ثابت باشند، خواهیم داشت:**

$$F = K.(\Delta L) \rightarrow P = \left(\frac{EA}{L}\right).(\Delta L) \rightarrow \Delta L = \frac{PL}{EA}$$

اگر P,L,E,A **در طول عضو متغیر باشند، خواهیم داشت:**

$$\Delta L = \sum \frac{PL}{EA} = \int_0^L \frac{P}{EA} dL$$

حرکت اجسام صلب در صورتی که نوع تغییر شکل مشخص باشد

مثال (سراسری ۸۵)

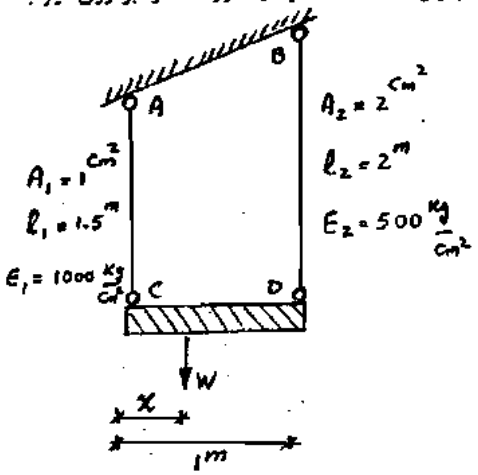
تیر صلب CD توسط دو میله AC و BD آویزان شده است. موقعیت وزنه W را بر روی تیر به گونه‌ای تعیین نمائید، که تیر در وضعیت افقی باقی بماند.

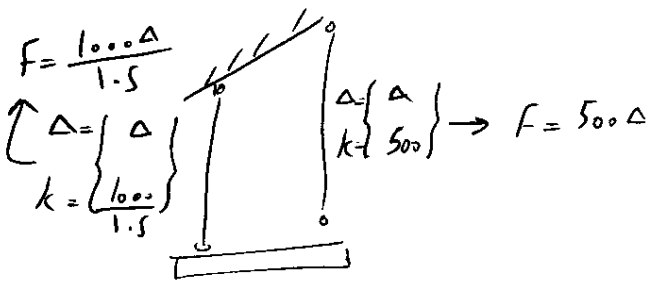
۱) $\frac{۱}{۲}$m

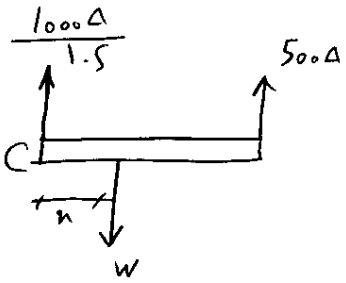
۲) $\frac{۳}{۵}$m

۳) $\frac{۱}{۳}$m

۴) $\frac{۳}{۷}$m



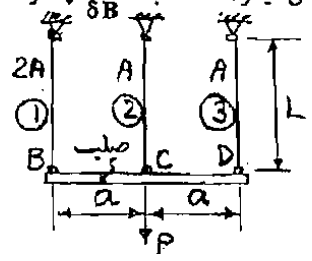




$$\begin{cases} \sum F_y = 0 \rightarrow \frac{1750\Delta}{1.5} - W = 0 \rightarrow \Delta = \frac{1.5W}{1750} \\ \sum M_C = 0 \rightarrow 500\Delta \times L - W \times x = 0 \rightarrow \frac{500 \times 1.5W}{1750} = W \times x \end{cases} \rightarrow \boxed{x = \frac{3}{7}}$$

سراسری ۸۴

۴۲- **در شکل روبرو طول و جنس هر سه میله یکسان ولی سطح مقطع میله (۱) دو برابر هر کدام از میله‌های دیگر است. نسبت $\frac{\delta D}{\delta B}$ چقدر است؟**

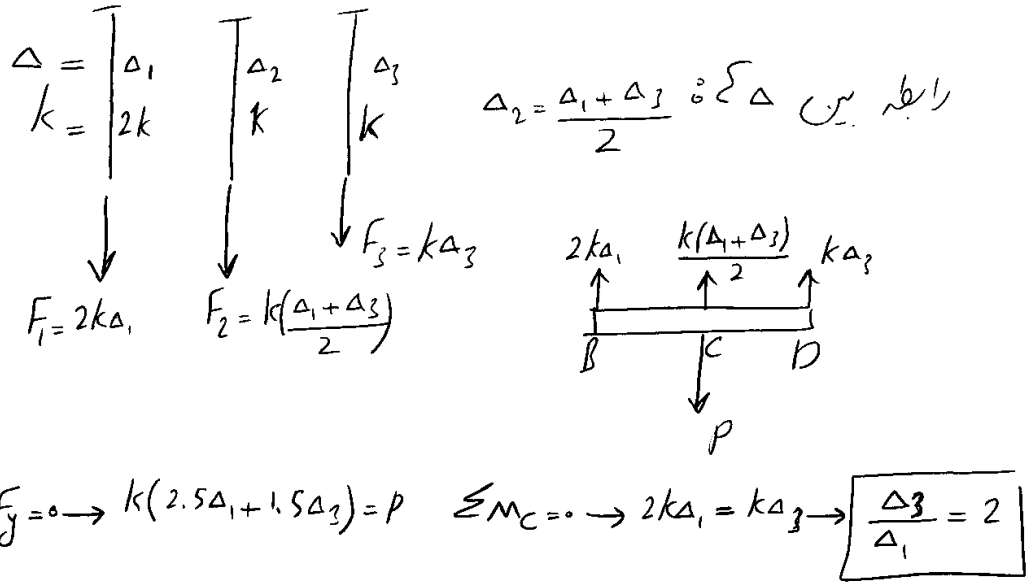


۱) ۰٫۵

۲) ۱

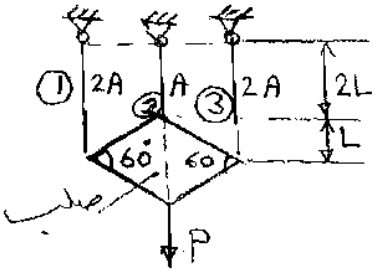
۳) ۱٫۵

۴) ۲



مثال (سراسری ۸۶)

۴۴- جسم صلبی به شکل لوزی که از وزن آن صرفنظر می‌شود از سه رأس به سه میله آویزان شده که جنس آنها یکسان است. نیروی P به رأس چهارم لوزی آویزان است نیروی وارد به هر میله چقدر است؟

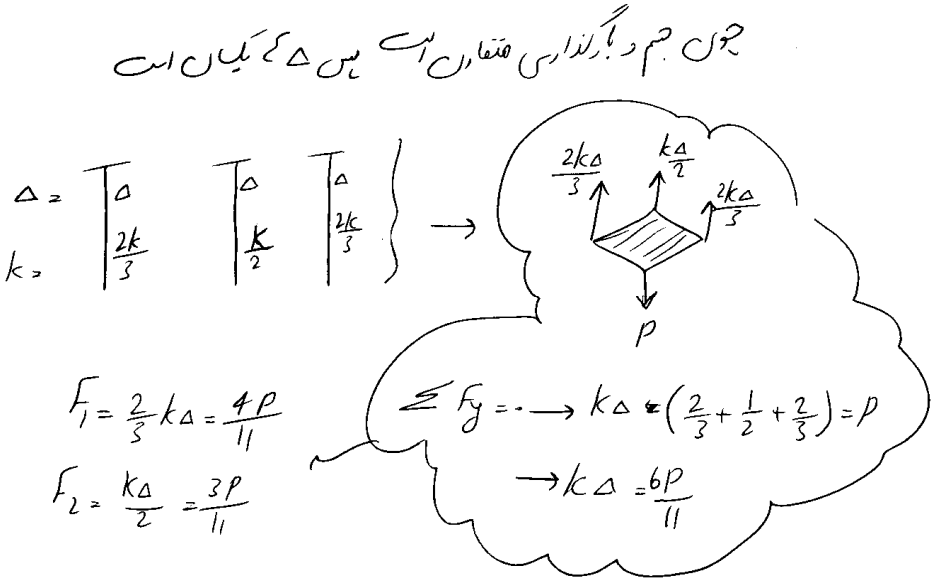


۱) $F_1 = F_2 = F_3 = \frac{P}{3}$

۲) $F_2 = P, F_1 = F_3 = 0$

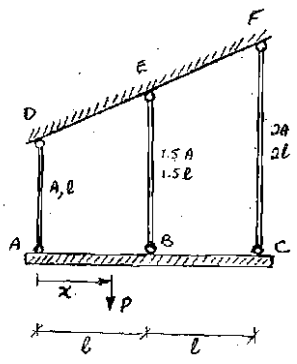
۳) $F_1 = F_3 = \frac{P}{4}, F_2 = \frac{P}{2}$

۴) $F_1 = F_3 = \frac{4P}{11}, F_2 = \frac{3P}{11}$



مثال (سراسری ۸۶)

۴۵- تیر صلب ABC توسط ۳ میله مطابق شکل آویزان شده است. موقعیت بار P را بگونه‌ای تعیین نمائید، که تیر در وضعیت کاملاً افقی که از ابتدا قرار داشته است باقی بماند.

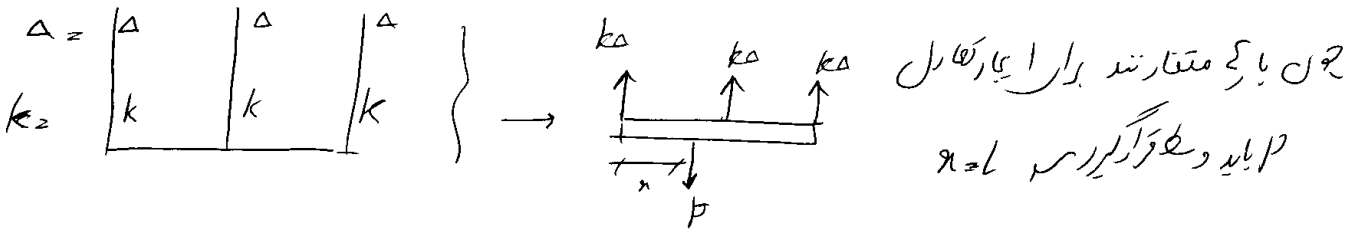


۱) $x = l$

۲) $x = \frac{l}{2}$

۳) $x = \frac{2l}{3}$

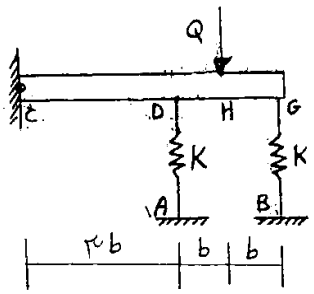
۴) $x = \frac{\Delta l}{3}$



چون بارها متقارنند برای ایجاد تعادل
P باید در وسط تیر در $x=l$ باشد

مثال (سراسری ۸۸)

۵۲- در سازه شکل زیر نسبت Q به خیز H را حساب کنید. تیر CG صلب است.

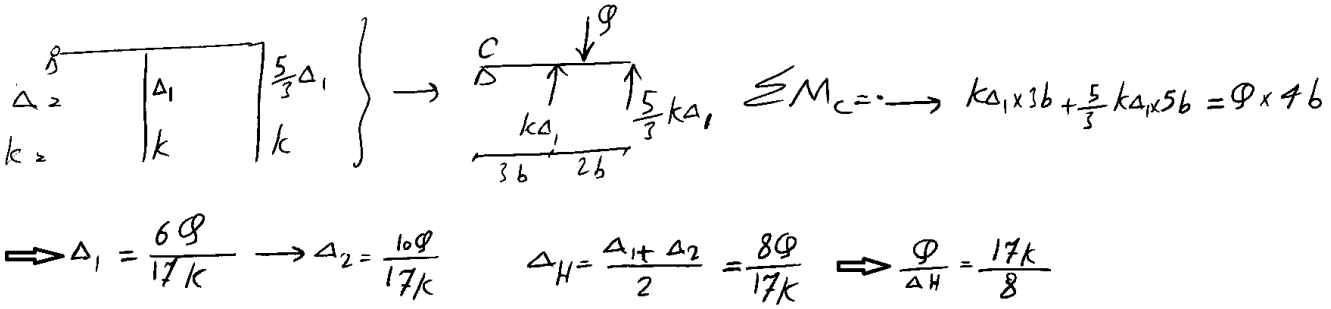


۱) $\frac{۱۸}{۸}K$

۲) $\frac{۱۷}{۸}K$

۳) $\frac{۱۶}{۸}K$

۴) $\frac{۱۵}{۸}K$

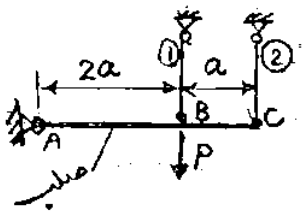


$\Sigma M_C = 0 \longrightarrow k\Delta_1 \times 3b + \frac{5}{3}k\Delta_1 \times 5b = \varphi \times 4b$

$\Rightarrow \Delta_1 = \frac{6\varphi}{17k} \longrightarrow \Delta_2 = \frac{10\varphi}{17k}$ $\quad \Delta_H = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} = \frac{8\varphi}{17k} \Rightarrow \frac{\varphi}{\Delta_H} = \frac{17k}{8}$

مثال (سراسری ۸۵)

۴۷- در شکل روبرو دو میله ۱ و ۲ از یک جنس، با یک سطح مقطع و با یک طول می‌باشند. چه نسبتی بین نیروی وارد به این میله‌ها وجود دارد $\left(\frac{P_1}{P_2}\right)$؟

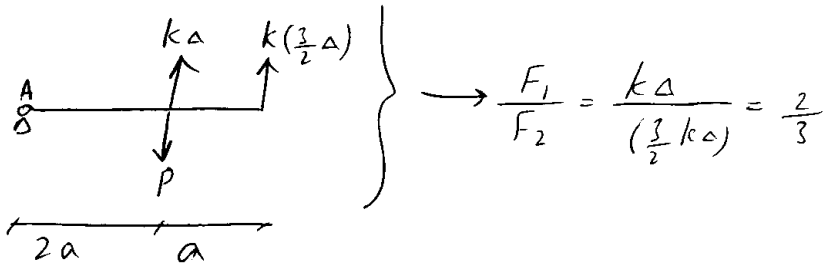


۱) ۱

۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۲}{۳}$

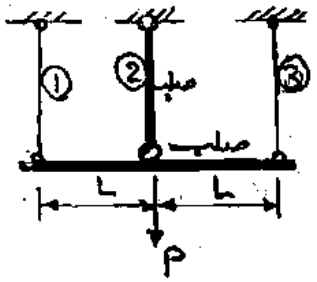
۴) ∞



$\frac{F_1}{F_2} = \frac{k\Delta}{\frac{3}{2}k\Delta} = \frac{2}{3}$

مثال (سراسری ۸۵)

در شکل روبرو میله افقی و میله قائم وسطی صلب هستند. نیروی وارد به هرمیله قائم چقدر است؟



۱) $P_1 = P_2 = P_3 = \frac{P}{3}$

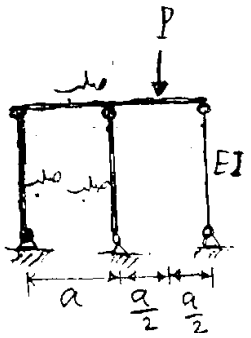
۲) $P_1 = P_3 = \frac{P}{4}$, $P_2 = \frac{P}{2}$

۳) $P_1 = P_2 = \frac{P}{2}$; $P_3 = 0$

۴) $P_1 = P_2 = 0$, $P_3 = P$

مثال (سراسری ۸۸)

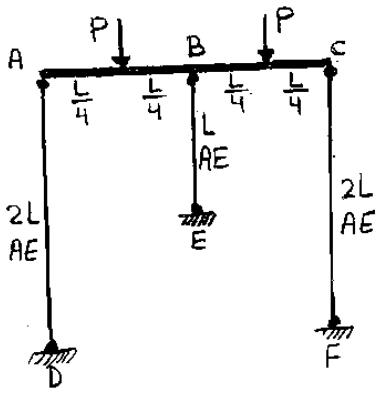
۵۴- در شکل روبه‌رو میله افقی و دو میله‌ی سمت چپ صلب می‌باشند. میله‌ی سمت راست دارای طول L و سطح مقطع A و مدول ارتجاعی E می‌باشد. نیروی وارد بدان چقدر است؟



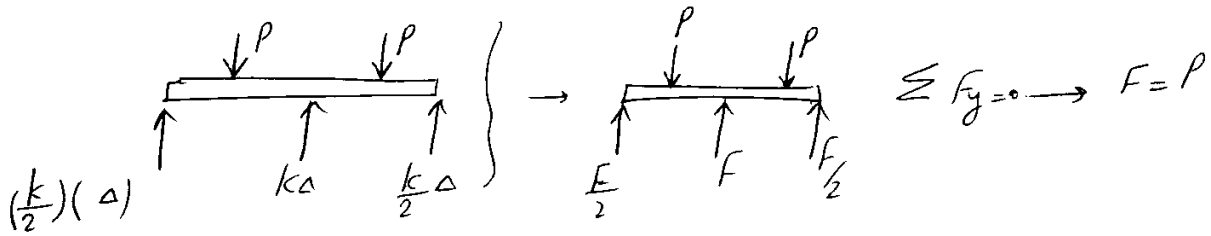
۱) صفر
۲) $\frac{PL}{AE}$
۳) $\frac{PL}{2AE}$
۴) $\frac{PL}{3AE}$

مثال (سراسری ۸۶)

۴۸- نیرو در عضو BE کدام است؟ (قطعه ABC، صلب می‌باشد.)

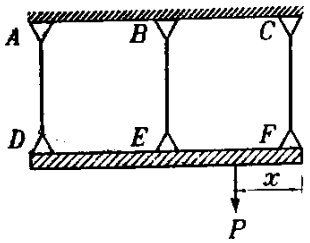


۱) P
۲) $\frac{P}{2}$
۳) $\frac{2P}{3}$
۴) $\frac{4P}{10}$

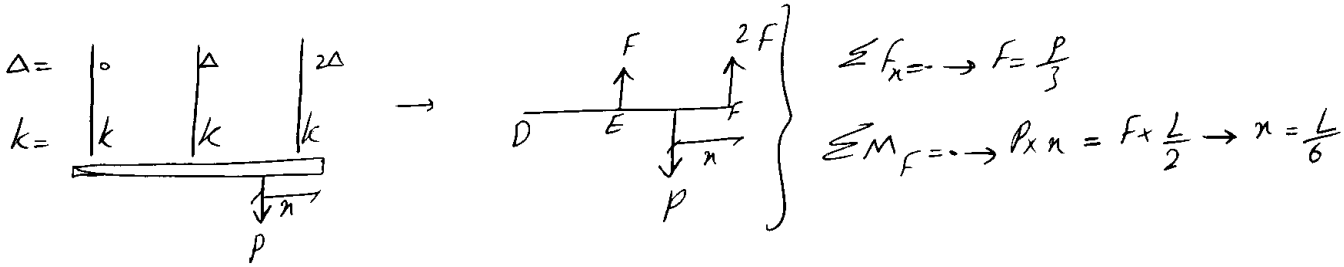


مثال

مطابق شکل داده شده تیر صلبی به طول L و وزن ناچیز توسط سه سیم یکسان نگه داشته می‌شود. حداقل مقدار x برای آنکه هر سه سیم کشیده باقی بمانند کدامست؟

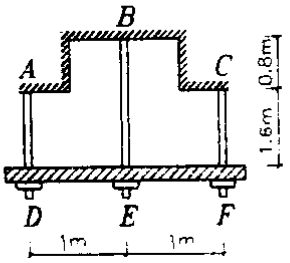


۱) $\frac{L}{3}$
۲) $\frac{L}{4}$
۳) $\frac{L}{6}$
۴) $\frac{L}{8}$

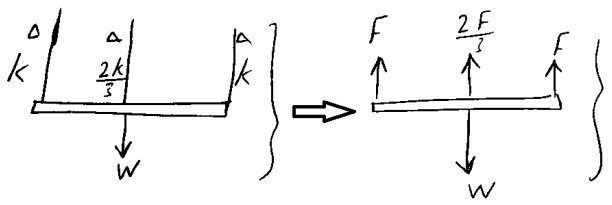


مثال

در شکل زیر وزن قطعه صلب، $۴۰kN$ و سطح مقطع میله‌های فولادی متصل به این قطعه برابر $۲cm^۲$ می‌باشد. تنش در میله وسط چقدر است؟



۱) $۵۰MPa$ ۲) $۶۰MPa$ ۳) $۷۵MPa$ ۴) $۹۰MPa$



شکل و بارگذاری متقارن است پس ۴ کابل است

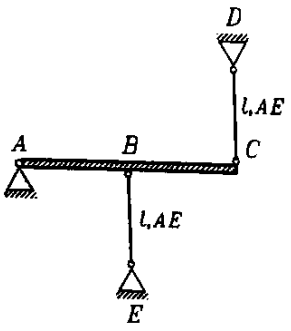
$\rightarrow \sum F_y = ۰ \rightarrow F = \frac{3W}{8}$

$\rightarrow$ تنش در میله $= \frac{\frac{2F}{3}}{A} = \frac{\frac{2}{3} \times \frac{3W}{8}}{2} = \frac{W}{8} = ۵ \frac{kN}{cm^۲} = ۵۰MPa$

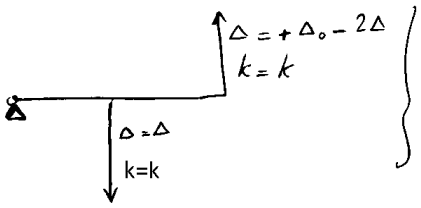
مثال

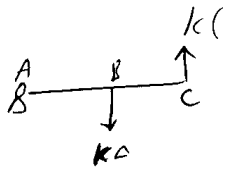
در سازه زیر که به علت خطای ساخت، عضو CD به اندازه $\Delta_۰$ کوتاهتر ساخته شده است، نیروی کششی ایجاد شده در این عضو پس از نصب سازه چقدر است؟

$(AB = BC = l)$



۱) $\frac{AE\Delta_۰}{۵l}$ ۲) $\frac{۲AE\Delta_۰}{۵l}$ ۳) $\frac{۳AE\Delta_۰}{۵l}$ ۴) $\frac{۴AE\Delta_۰}{۵l}$





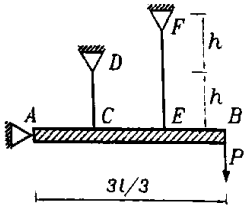
$\sum M_A = ۰ \rightarrow k\Delta = ۲[k(\Delta_۰ - ۲\Delta)]$

$\rightarrow \Delta = \frac{۲\Delta_۰}{۵} \rightarrow F_{CD} = k(\Delta_۰ - ۲\Delta) = \frac{k\Delta_۰}{۵}$

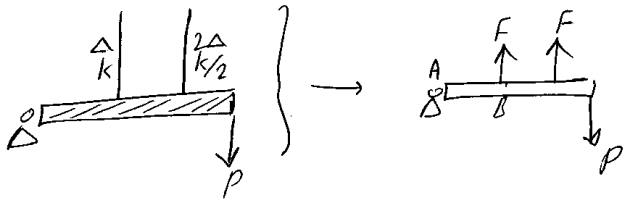
$= \frac{EA\Delta_۰}{۵L}$

مثال

در سازه زیر دو کابل هم جنس با سطح مقطع یکسان در نقاط C و E به قطعه صلب AB متصل شده‌اند و نیروی P بر انتهای قطعه صلب وارد می‌شود. با صرفنظر کردن از وزن سازه نیروی کشش کابل کوتاهتر چقدر است؟



۱) $\frac{P}{۳}$ ۲) $\frac{۲P}{۳}$ ۳) P ۴) $\frac{۴P}{۳}$



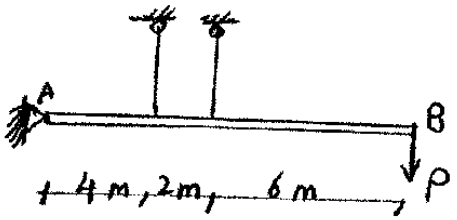
$\sum M_A = 0 \Rightarrow F \times \frac{L}{3} + F \times \frac{2L}{3} = P \times L \rightarrow F = P$

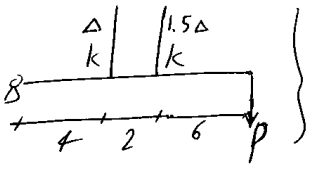
نیروی هر دو کابل برابر

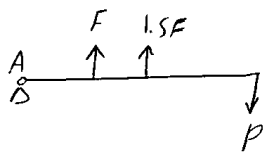
سراسری ۸۹

۵۳- مطابق شکل تیر صلب **AB** توسط دو میله که دارای سطح مقطع $20\ cm^2$ و تنش مجاز $36 kg/cm^2$ می‌باشند، نگهداری شده و نیروی **P** به آن وارد می‌شود.
مقدار بار مجاز **P** وارد بر سازه بر حسب **kg** چقدر است؟

۱) ۲۵۰
۲) ۵۲۰
۳) ۸۷۰
۴) ۷۸۰







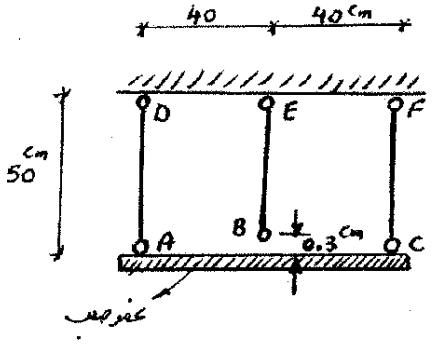
$\sum M_A = 0 \rightarrow F \times 4 + 1.5F \times 6 = P \times 12 \rightarrow F = \frac{12P}{13}$

نیروی میله سمت راستی بیشتر است $(1.5F)$
بنابراین اول سمت راستی خراب می‌شود

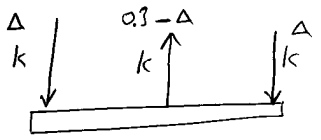
$$\frac{\left[1.5F = \frac{18P}{13}\right]}{20} < 36 \rightarrow P < \frac{36 \times 20 \times 13}{18} = 520$$

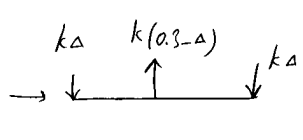
سراسری ۸۹

۵۰- در سازه شکل مقابل برای اتصال سه میله عمودی به صفحه صلب، نقطه **B** به اندازه $0/3\ cm$ کوتاه می‌باشد. در صورتی که عضو **BE** تحت کشش به صفحه صلب متصل شود، نیروی داخلی هر یک از اعضاء را بر حسب **kg** بدست آورید. سطح مقطع و مدول ارتجاعی هر سه میله عمودی به ترتیب برابر $5cm^2$، $4 \times 10^5 \frac{kg}{cm^2}$ می‌باشد.



۱) $F_{AD} = F_{CF} = 2000$, $F_{BE} = 4000$
۲) $F_{AD} = F_{CF} = 4000$, $F_{BE} = 8000$
۳) $F_{AD} = F_{CF} = 8000$, $F_{BE} = 16000$
۴) $F_{AD} = F_{CF} = 1000$, $F_{BE} = 2000$





$\sum F_y = 0 \rightarrow 2k\Delta = k(0.3 - \Delta) \rightarrow \boxed{\Delta = 0.1}$

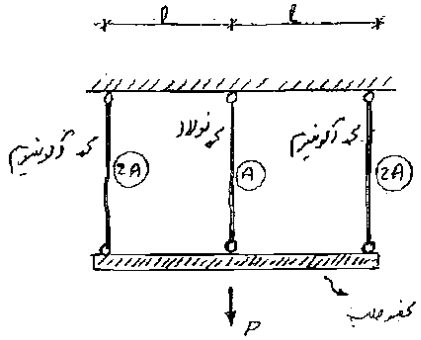
$\rightarrow F_{AD} = F_{FC} = k\Delta = \frac{EA}{L} \times 0.1$

$= \frac{4 \times 10^5 \times 5}{50} \times 0.1 = 4000$

$F_{BE} = k(0.3 - \Delta) = \frac{4 \times 10^5 \times 5}{50} \times (0.3 - 0.1) = 8000$

مثال (سراسری ۸۶)

۴۱- مطلوبست تعیین نیروهای داخلی در هر یک از اعضاء قائم شکل مقابل. کل سیستم تحت اثر نیروی P قرار گرفته است.
($E_s = 3E_a$ فولاد) (آلومینیم

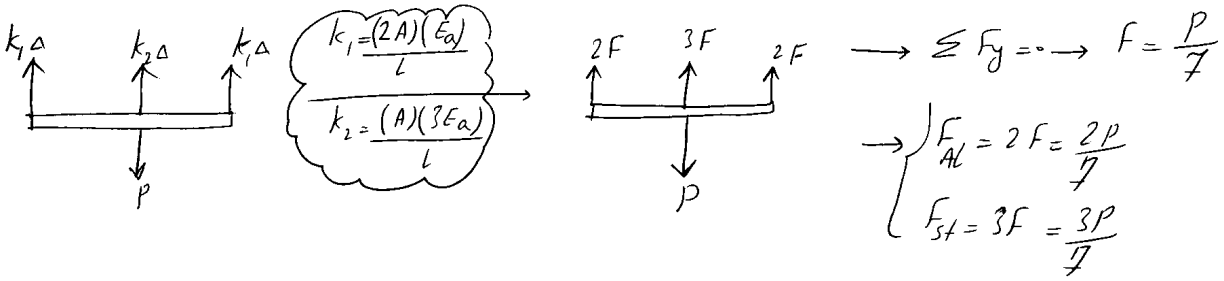


۱) $F_{Al} = \frac{2}{5}P \quad , \quad F_{st} = \frac{1}{5}P$

۲) $F_{Al} = \frac{1}{5}P \quad , \quad F_{st} = \frac{3}{5}P$

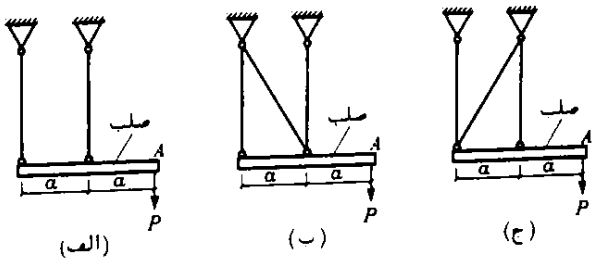
۳) $F_{Al} = \frac{3}{7}P \quad , \quad F_{st} = \frac{1}{7}P$

۴) $F_{Al} = \frac{2}{7}P \quad , \quad F_{st} = \frac{3}{7}P$



سراسری ۸۰

در سه شکل زیر، میله‌ها همه از یک جنس و با یک سطح مقطع می‌باشند. کدام عبارت در مورد تغییرمکان نقطه A زیر اثر بار P، صادق است؟



۱) در هر سه شکل نقطهٔ A فقط به طرف پایین تغییرمکان می‌دهد.

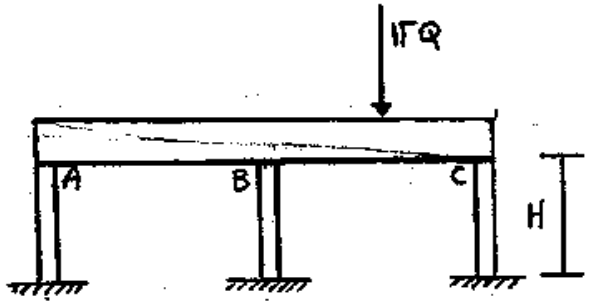
۲) در شکل الف نقطهٔ A تغییرمکان افقی ندارد و تغییر مکانهای افقی نقطهٔ A در دو شکل دیگر مخالف همدیگر است.

۳) در شکل الف نقطهٔ A فقط تغییرمکان بطرف پایین دارد و در دو شکل دیگر نقطه A به‌طرف پایین و به‌طرف چپ حرکت می‌کند.

۴) در شکل الف نقطه A تغییرمکان افقی دارد و در دو شکل دیگر که میله مایل وجود دارد و مانند بادبند عمل می‌کند نقطه A تغییرمکان افقی ندارد.

مثال (سراسری ۸۷)

۵۶- تیر صلب ABC بر روی سه ستون کوتاه کشسان همانند قرار دارد. کدام نیروی محوری ستون صحیح است؟

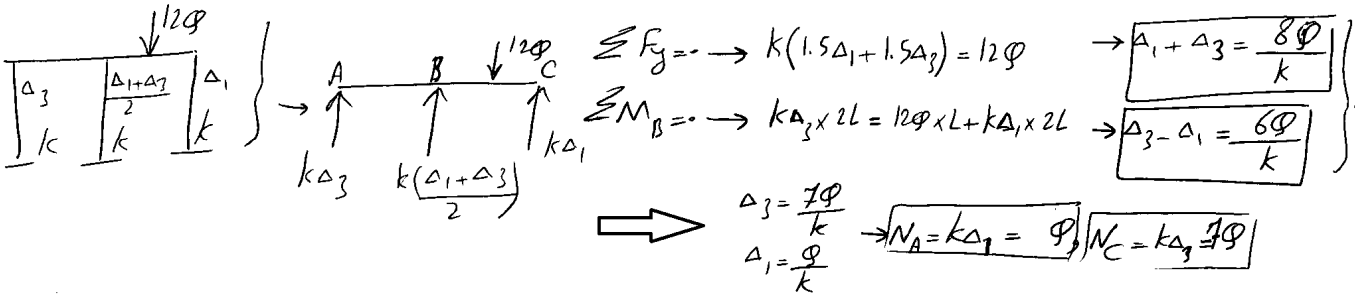


۱) $N_A = 2Q$

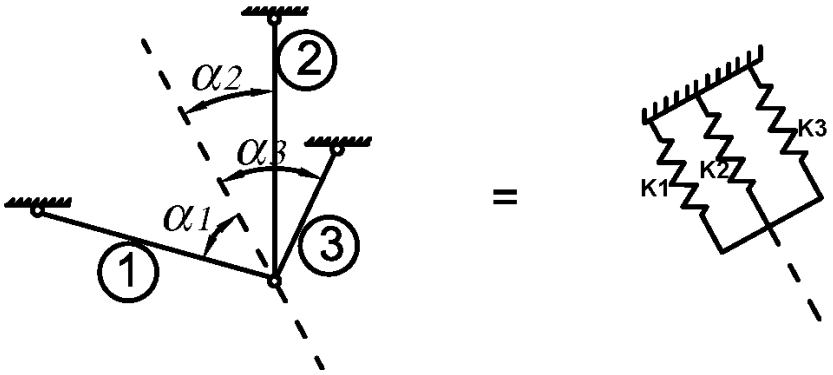
۲) $N_A = 3Q$

۳) $N_C = 6Q$

۴) $N_C = 7Q$



۳-۱ -تغییرشکل محوری میله های مایل



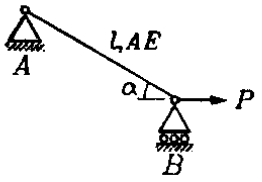
$$K1 = \frac{E1A1}{L1}(\cos\alpha_1)^2$$

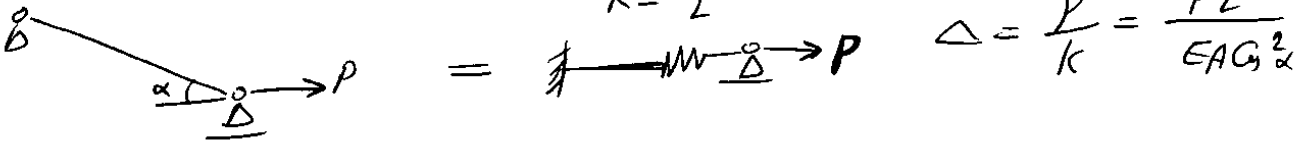
مثال

در سازه داده شده تغییرمکان تکیه‌گاه B چقدر است؟

۱) $\frac{Pl\cos\alpha}{AE}$ ۲) $\frac{Pl\cos^2\alpha}{AE}$

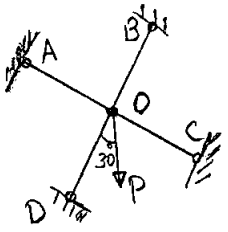
۳) $\frac{Pl}{AE\cos\alpha}$ ۴) $\frac{Pl}{AE\cos^2\alpha}$ ✓





مثال (سراسری ۸۸)

۵۳- چهار میله هم صفحه OA، OB، OC و OD هر کدام به طول L، سطح مقطع A و مدول الاستسیته E و در O به هم مفصل شده‌اند. زاویه‌های تشکیل شده در O قائمه‌اند. تغییر مکان O برابر است با:

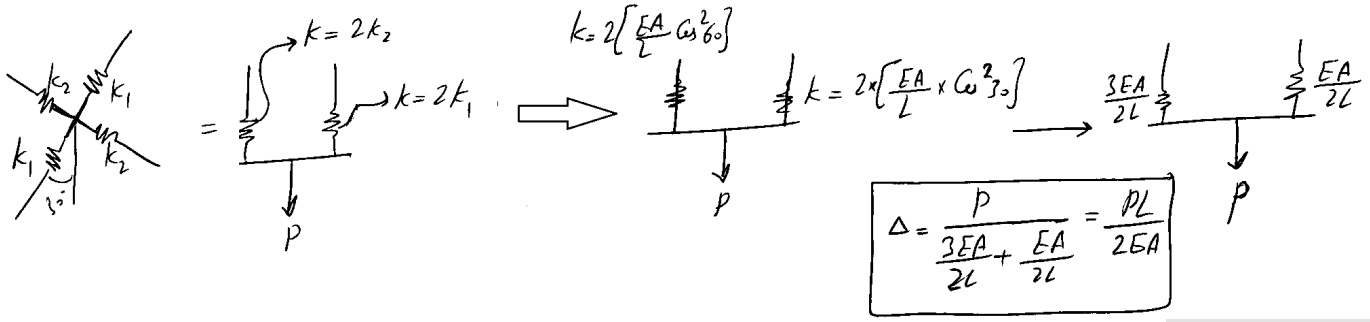


۱) O فقط در امتداد قائم به مقدار $\frac{PL}{2AE}$ حرکت می‌کند. ✓

۲) O فقط در امتداد قائم به اندازه‌ی $\frac{PL}{AE}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ حرکت می‌کند.

۳) O در امتداد قائم به مقدار $\frac{PL}{2AE}$ و در امتداد افقی به مقدار $\frac{PL}{4AE}$ حرکت می‌کند.

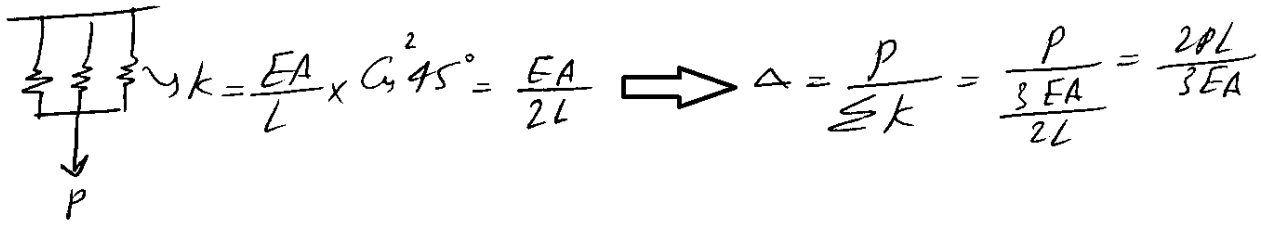
۴) O در امتداد قائم به اندازه $\frac{PL}{AE}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ و در امتداد افقی به مقدار $\frac{PL}{AE\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ حرکت می‌کند.



مثال (سراسری ۸۸)

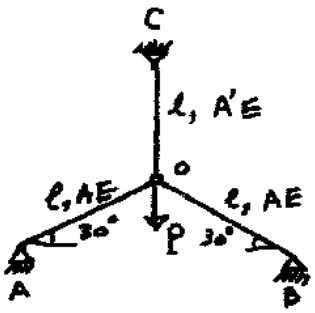
۵۵- دستگاهی توسط سه رشته سیم متشابه به طول هر یک l توسط قلاب مشترکی از سقف آویزان است. امتداد هر سیم با سقف زاویه 45° ساخته و تصاویر سه سیم بر روی سقف زاویای 120° با یکدیگر دارند. سطح مقطع سیم برابر A و مدول ارتجاعی آن E است. اگر وزن دستگاه W باشد، جابه‌جایی قائم قلاب (محل تقارب سه سیم) چقدر است؟ (سه رشته سیم هرمی ساخته‌اند که قاعده آن مثلث متساوی‌الاضلاع در تراز سقف می‌باشد و بار به رأس آن وارد می‌شود.)

۱) $\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{Pl}{EA}$ ۲) $\frac{2}{3}\frac{Pl}{EA}$ ✓ ۳) $\sqrt{2}\frac{Pl}{EA}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{Pl}{EA}$



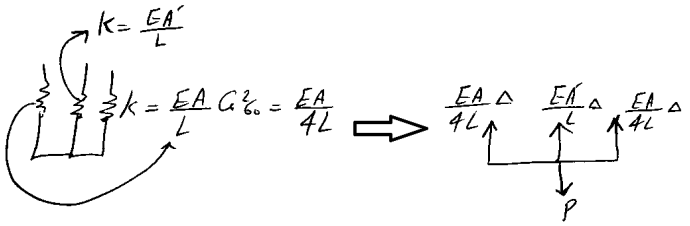
مثال (آزاد ۸۴)

۴۳- در سازه زیر اگر نیروی میله ها مساوی باشند نسبت $\frac{A'}{A}$ چقدر است؟



۱) $\sqrt{2}$
۲) 1
۳) $\frac{1}{2}$
۴) 2

نیروی میله ها را تعیین کرده و برابر هم قرار می دهیم:



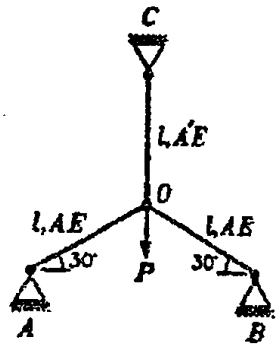
$$F_{AO}=\frac{EA\Delta}{4L}\times\frac{1}{C_{60}}=\frac{EA\Delta}{2L}$$

$$F_{OC}=\frac{EA'}{L}\Delta$$

$$\rightarrow F_{AO}=F_{OC}\Rightarrow\frac{EA\Delta}{2L}=\frac{EA'}{L}\Delta\rightarrow\boxed{\frac{A'}{A}=\frac{1}{2}}$$

آزاد۸۹

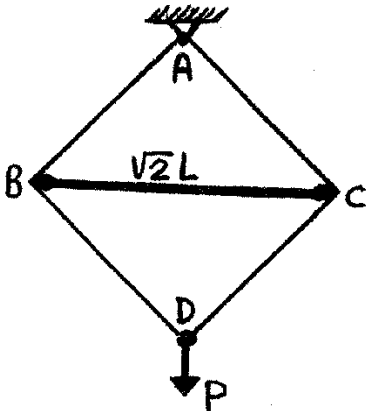
۴۷- در خرپای زیر اگر نیروی میله‌ها مساوی باشند نسبت $\frac{A'}{A}$ چقدر است؟



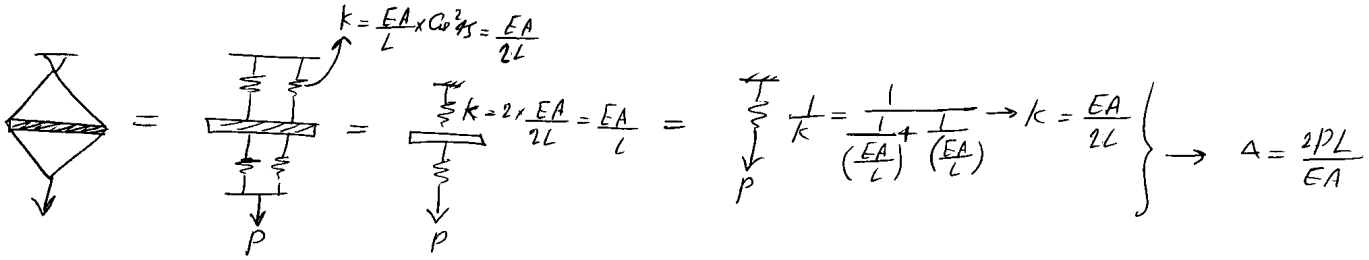
۱) $\sqrt{2}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) $\frac{1}{2}$

سراسری ۸۹

۵۴- در سازه نشان داده شده میله BC صلب است. جا به جایی نقطه D کدام است؟ (AE و L برای کلیه اعضای مورب ثابت است).

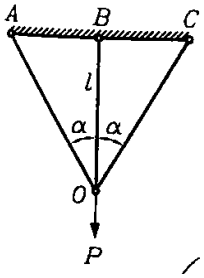


۱) $\frac{PL}{AE}$ ۲) $\frac{2PL}{AE}$ ۳) $\frac{PL}{2AE}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}PL}{AE}$



مثال

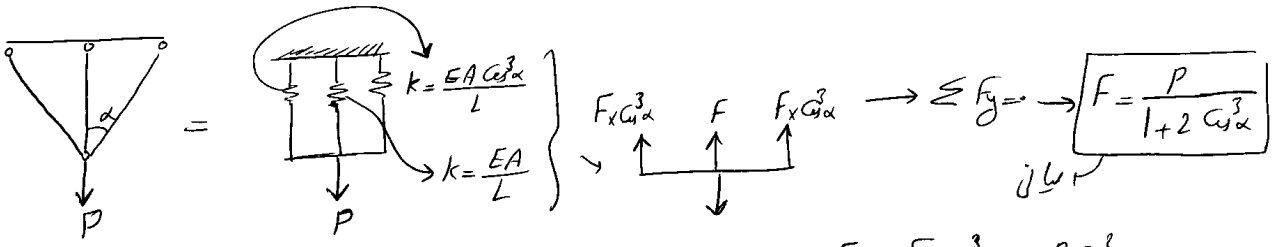
در خرپای زیر نیروی میله وسط چقدر است؟ $(AE = const)$



۱) $\frac{P}{1+2\cos\alpha}$ ۲) $\frac{P\cos^2\alpha}{1+2\cos\alpha}$ ۳) $\frac{P}{1+2\cos^2\alpha}$ ۴) $\frac{P\cos^2\alpha}{1+2\cos^2\alpha}$

در تست قبل نیروی میله‌های کناری چقدر است؟

۱) $\frac{P}{1+2\cos\alpha}$ ۲) $\frac{P\cos^2\alpha}{1+2\cos\alpha}$ ۳) $\frac{P}{1+2\cos^2\alpha}$ ۴) $\frac{P\cos^2\alpha}{1+2\cos^2\alpha}$

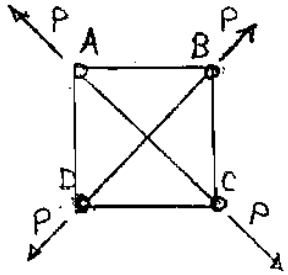


مولفه قائم میله کناری $F=F\times\cos^3\alpha=\frac{P\cos^3\alpha}{1+2\cos^3\alpha}$

نیروی کلی میله کناری $F=\frac{F_{قائم}}{\cos\alpha}=\frac{P\cos^2\alpha}{1+2\cos^3\alpha}$

مثال (سراسری ۸۶)

۴۶- در شکل روبرو طول میله‌های افقی و قائم با هم برابرند و میله‌های مایل (به زاویه ۴۵ درجه) از روی هم بدون اتصال عبور کرده‌اند. سطح مقطع و جنس تمام میله‌ها یکسان است. نیروی داخلی میله‌ها چقدر است؟



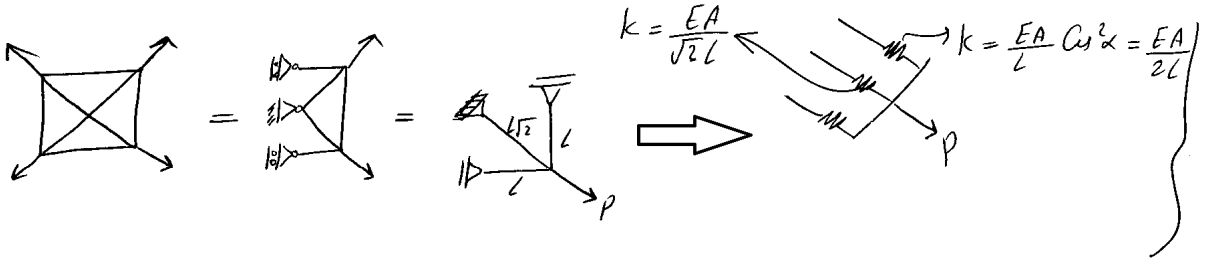
۱) نیروی همهٔ میله‌ها برابر و مساوی $P(\sqrt{2}-1)$ است.

۲) نیروی میله‌های افقی و قائم $\frac{P}{4\sqrt{2}}$ و نیروی میله‌های مایل $\frac{P}{2}$ است.

۳) نیروی میله‌های افقی و قائم صفر و نیروی میله‌های مایل P است.

۴) نیروی میله‌های افقی و قائم $\frac{P}{2\sqrt{2}}$ و نیروی میله‌های مایل $\frac{P}{2}$ است.

با توجه به تقارن:

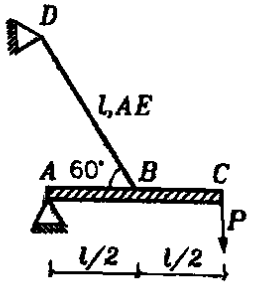


مایل $F=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}\times P=\frac{1}{1+\sqrt{2}}P=(\sqrt{2}-1)P$ افقی و قائم $F=\left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}\times P\right)\times\frac{1}{\cos 45^\circ}=\frac{1}{1+\sqrt{2}}P=(\sqrt{2}-1)P$

مثال

در سازه زیر که میله صلب ABC توسط کابل BD مهار شده‌است

تغییرمکان C چقدر است؟

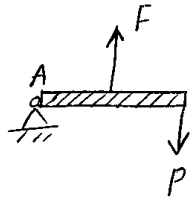


۱) $\frac{8\sqrt{3}Pl}{3AE}$

۲) $\frac{8Pl}{3AE}$

۳) $\frac{4Pl}{AE}$

۴) $\frac{16Pl}{3AE}$ ✓

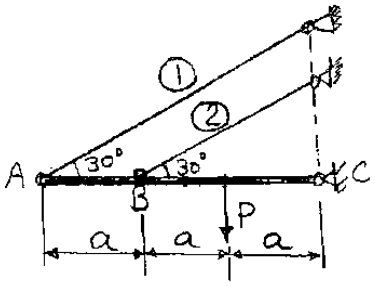


$\sum M_A=0\rightarrow F=2P \qquad F=k\Delta_B\rightarrow 2P=\frac{EA}{L}\times\cos^2 30^\circ\times\Delta_B$

$2P=\frac{3EA}{4L}\times\Delta_B\rightarrow\boxed{\Delta_B=\frac{8PL}{3EA}}\Rightarrow\Delta_C=2\Delta_B=\frac{16PL}{3EA}$

مثال (سراسری ۸۶)

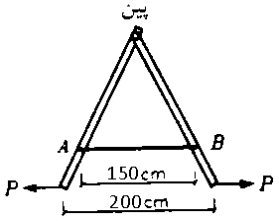
۴۳- اگر نیروهای داخلی میله‌های ۱ و ۲ به ترتیب F_1 و F_2 باشد نسبت $\frac{F_1}{F_2}$ چقدر است؟



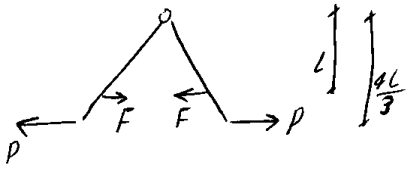
۱) ۰/۵
۲) ۰/۶۶۷
۳) ۱
۴) ۱/۵

سراسری ۸۰

سطح مقطع کابل AB، ۱/۵۰ سانتیمتر مربع و مدول الاستیسیته آن $۱۰ \times ۱۰^۴ kg/cm^۲$ می‌باشد. چنانچه تغییر طول آن ۲ میلیمتر باشد نیروی P کدام است؟ (بر حسب کیلوگرم)



۱) ۸۵
۲) ۱۵۰
۳) ۲۱۰
۴) ۳۰۰

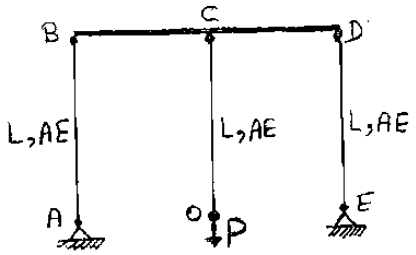


$$F = \Delta\left(\frac{EA}{L}\right) = 0.2 \times \left(\frac{10 \times 10^4 \times 1.5}{150}\right) = 200\,kg$$

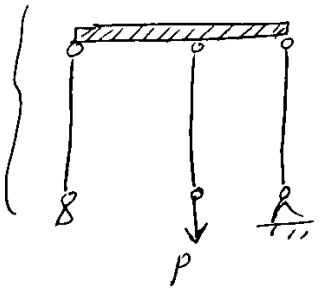
$$P \times \frac{4L}{3} = F \times L \rightarrow P = \frac{F \times 3}{4} = 150\,kg$$

سراسری ۸۶

۴۷- تغییر مکان نقطه O در صورت صلب بودن عضو BCD چقدر است؟



۱) $\frac{PL}{AE}$
۲) $\frac{۳PL}{۲AE}$
۳) $\frac{PL}{۲AE}$
۴) $\frac{PL}{۲AE}$



با توجه به تقارن نیروی میله‌های کناری $\frac{P}{2}$ است

$$\Delta_{\text{میله کناری}} = \frac{PL}{2EA}$$

$$\Delta_{\text{میله وسط}} = \frac{PL}{EA}$$

$$\Delta_{\text{کل}} = \frac{PL}{2EA} + \frac{PL}{EA} = \frac{3PL}{2EA}$$

سراسری ۸۷

۵۲- تغییر طول میله‌ای بطول L و به مدول ارتجاعی E زیر اثر نیروی محوری کششی F چقدر است؟(مساحت مقطع میله متغیر است در یک طرف میله $A_۰$ و در طرف دیگر $۲A_۰$ است و تغییرات مساحت در طول میله خطی است.)

۱) $\frac{FL}{۲A_۰E}$
۲) $\frac{FL}{A_۰E}\text{Ln}۲$
۳) $\frac{۲FL}{۳A_۰E}$
۴) $\frac{FL}{A_۰E}\text{Ln}۳$

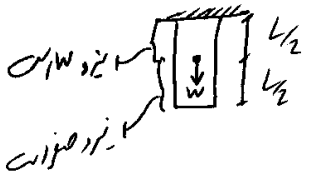
$$\Delta = \int_0^L \frac{P\,dx}{EA} = \frac{P}{E}\int_0^L \frac{dx}{\left(A + \frac{x}{L}A_0\right)} = \frac{PL}{EA_0}\int_0^L \frac{dx}{L+x_0}$$

$$= \frac{PL}{EA_0}\left[Ln(L+x_0)\right]_0^L = \frac{PL}{EA_0}\left[Ln(2L) - Ln(L)\right] = \frac{PL}{EA_0}Ln2$$

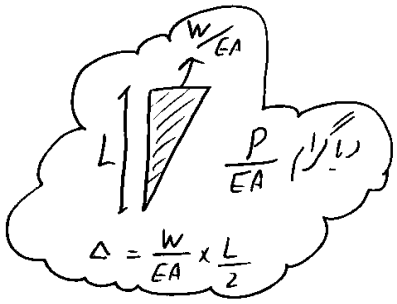
آزاد ۸۶

۱۱- تغییر مکان انتهای یک میله استوانه ای به وزن W و طول l که از تکیه گاه خود آویزان است چقدر است؟ (AE = const)

۱) $\frac{Wl}{2AE}$ ۲) $\frac{Wl}{3AE}$ ۳) $\frac{Wl}{4AE}$ ۴) $\frac{Wl}{AE}$



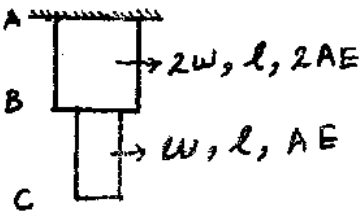
$$\Delta = \frac{W \times L/2}{EA} = \frac{WL}{2EA}$$

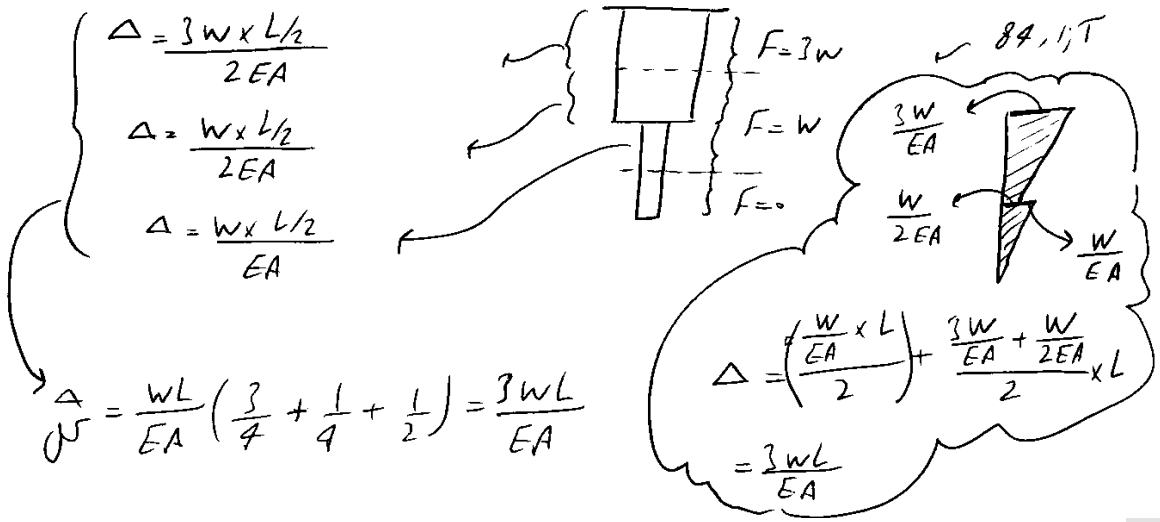


مثال (آزاد ۸۴)

۲۱- در میله مقابل تغییر مکان C چندر است؟

۱) $\frac{3Wl}{2AE}$
۲) $\frac{Wl}{2AE}$
۳) $\frac{3Wl}{4AE}$
۴) $\frac{Wl}{AE}$





$$\Delta = \frac{3w \times L/2}{2EA}$$

$$\Delta = \frac{w \times L/2}{2EA}$$

$$\Delta = \frac{w \times L/2}{EA}$$

$$\Delta = \frac{WL}{EA}\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) = \frac{3WL}{EA}$$

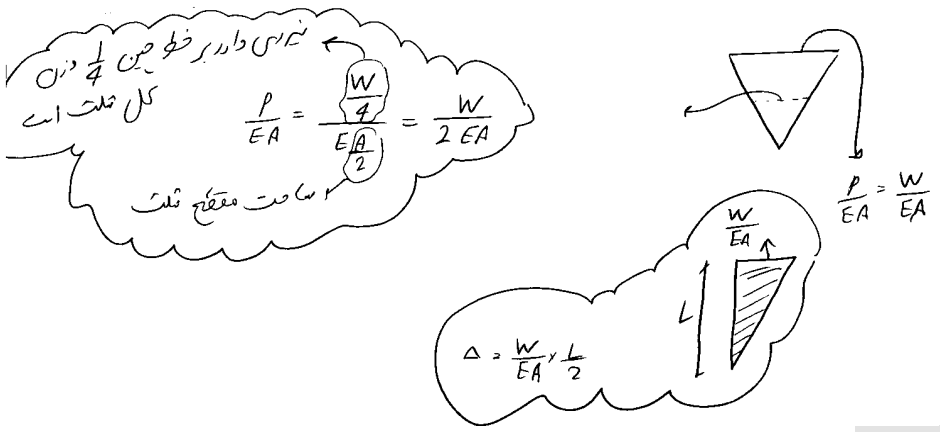
$$\Delta = \left(\frac{\frac{w}{EA} \times L}{2}\right) + \frac{\frac{3w}{EA} + \frac{w}{2EA}}{2} \times L$$

$$= \frac{3wL}{EA}$$

مثال

صفحه مثلثی شکل متقارنی به‌طول l و ضخامت ثابت از قاعده آن به مساحت A_0 آویزان است. تغییرمکان انتهای صفحه تحت اثر وزنش چقدر است؟

۱) $\frac{Wl}{A_0E}$ ۲) $\frac{Wl}{2A_0E}$ ۳) $\frac{Wl}{3A_0E}$ ۴) $\frac{Wl}{4A_0E}$



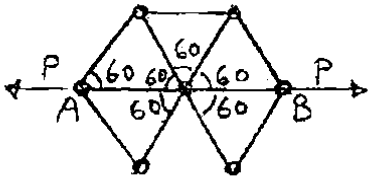
آزاد ۸۶

۴۱- تغییر مکان انتهای یک میله استوانه ای به وزن W و طول l که از تکیه گاه خود آویزان است چقدر است؟ (AE = const)

۱) $\frac{Wl}{2AE}$ ۲) $\frac{Wl}{3AE}$ ۳) $\frac{Wl}{4AE}$ ۴) $\frac{Wl}{AE}$

سراسری ۸۴

۴۱- در شکل روبرو گلیه میله‌ها به طول L ، به سطح مقطع A ، به مدول ارتجاعی E می‌باشند. تغییر مکان نسبی A به B چقدر است؟

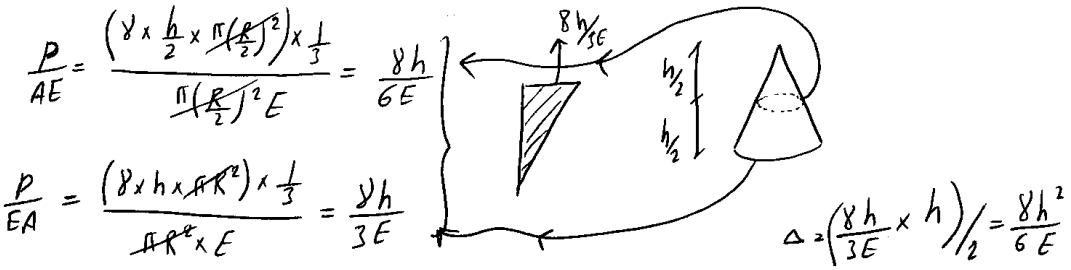


۱) $\frac{PL}{EA}$
۲) $\frac{2PL}{EA}$
۳) $\frac{7PL}{EA}$
۴) $\frac{11PL}{EA}$

سراسری ۸۹

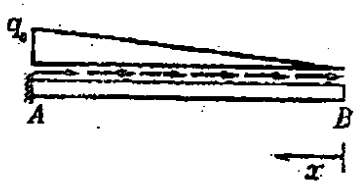
۴۹- تغییر مکان محوری رأس مخروطی توپر به ارتفاع h و شعاع قاعده R ، وزن مخصوص γ و مدول الاستیسیته E را تحت وزن مخروط به دست آورید.

۱) $\frac{\gamma Rh}{6E}$ ۲) $\frac{\gamma h^2}{3E}$ ۳) $\frac{\gamma Rh}{3E}$ ۴) $\frac{\gamma h^2}{6E}$



آزاد۸۹

۴۲- در تیر زیر که تحت اثر تنش طولی $q(x)=q_0\frac{x}{l}$ می‌باشد تغییر طول تیر چقدر است؟



۱) $\frac{q_0 l^2}{8AE}$

۲) $\frac{q_0 l^2}{2AE}$

۳) $\frac{q_0 l^2}{3AE}$

۴) $\frac{q_0 l^2}{6AE}$

آزاد۸۹

۴۳- میله‌ای با سطح مقطع متغیر در انتهای آزاد آن تحت اثر نیروی کششی محوری قرار می‌گیرد؛ بطوریکه جابجایی هر نقطه از آن بصورت $\Delta(x)=kx^3$ می‌باشد که x فاصله از تکیه‌گاه است. اگر جابجایی انتهای میله برابر Δ_0 باشد معادله کرنش میله کدام است؟ (طول میله l می‌باشد)

۱) $\frac{3\Delta_0}{l^3}x^2$

۲) $\frac{6\Delta_0}{l^2}x$

۳) $\frac{\Delta_0}{l^4}x^3$

۴) $\frac{\Delta_0}{4l^5}x^4$

٤-تغییر شکل محوری سازه های نامعین

مثال (سراسری ۸۷)

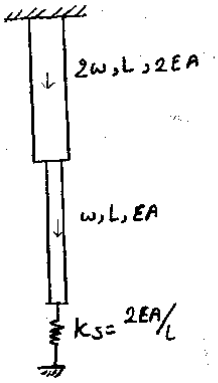
۵۴- در سیستم نشان داده شده در شکل روبرو، مطلوبست نیروی فنر (ω و ۲ω وزن قطعات نشان داده شده در شکل می‌باشد)

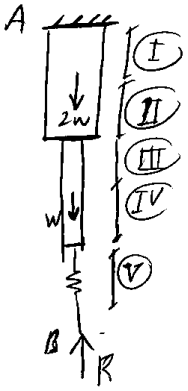
۱) 3ω

۲) $\frac{3}{4}\omega$

۳) $\frac{1}{2}\omega$

۴) $\frac{1}{3}\omega$



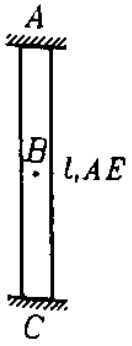


$\Delta_B = 0$

$$\rightarrow \underbrace{\frac{(R-3w)\,L/2}{2EA}}_{I} + \underbrace{\frac{(R-w)\,L/2}{2EA}}_{II} + \underbrace{\frac{(R-w)\,L/2}{EA}}_{III} + \underbrace{\frac{RL/2}{EA}}_{IV} + \underbrace{\frac{R}{\left(\frac{2EA}{L}\right)}}_{V} = 0 \qquad k = \frac{2EA}{L}$$

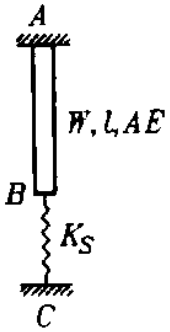
$$\rightarrow \frac{RL}{EA}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) - \frac{3wL}{2EA} = 0 \rightarrow \boxed{R = \frac{3w}{4}}$$

مثال



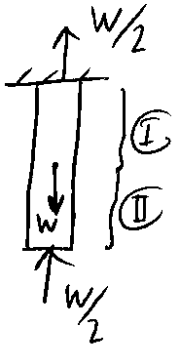
۱) $\frac{Wl}{2AE}$ ۲) $\frac{Wl}{4AE}$ ۳) $\frac{Wl}{8AE}$ ۴) $\frac{Wl}{16AE}$

در میله داده شده میزان فشردگی فنر چقدر است؟



۱) $\frac{W}{K_S + \frac{AE}{l}}$ ۲) $\frac{W}{2\left(K_S + \frac{AE}{l}\right)}$ ۳) $\frac{W}{K_S + \frac{2AE}{l}}$ ۴) $\frac{W}{\frac{K_S}{2} + \frac{2AE}{l}}$

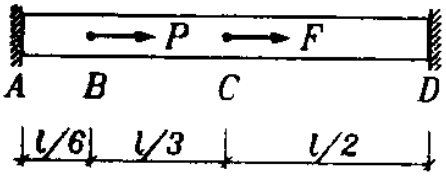
با توجه به تقارن لکس العمل ها برابرند



$$\uparrow \Delta_B = \frac{\left(\frac{W}{2} - W\right) \times L/2}{EA} = \frac{-WL}{4EA}$$

(آزاد ۸۵)

در میله زیر نیروی F چقدر باشد تا فاصله نقاط B و C تغییر نکند؟ $(AE = const)$



۱) $\frac{P}{3}$ ✓

۲) $\frac{P}{2}$

۳) $\frac{2P}{3}$

۴) P

$$\Delta_B = \Delta_C \Rightarrow \frac{P(L/6)}{EA} = \frac{F(L/2)}{EA} \rightarrow F = \frac{P}{3}$$

(سراسری ۸۷)

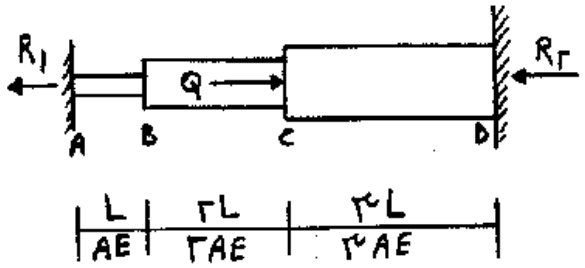
۵۵- کدام رابطه بین واکنش‌های سازه بر قرار است؟

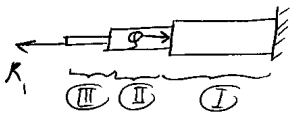
۱) $R_2 = R_1$

۲) $R_2 = 2R_1$

۳) $R_2 = 3R_1$

۴) $R_2 = 4R_1$





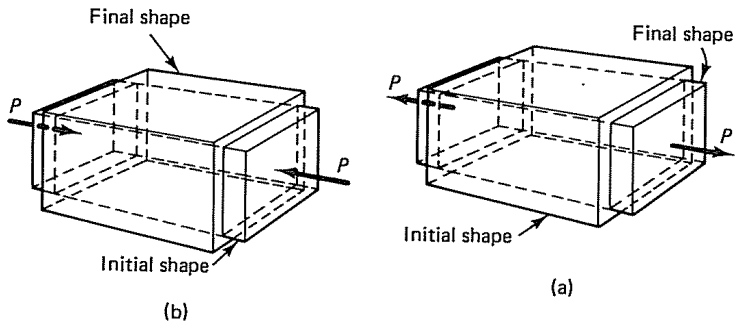
$$\Delta_A = \frac{R_1 L}{EA} + \frac{R_1(2L)}{2EA} + \frac{(R_1 - Q)3L}{3EA} = 0$$

$$\rightarrow \frac{R_1 L}{EA}(1+1+1) - \frac{QL}{EA} = 0 \rightarrow R_1 = \frac{Q}{3}$$

$$\rightarrow R_2 = Q - R_1 = \frac{2Q}{3}$$

$$R_2 = 2R_1$$

۵-ضریب پواسون



$$\nu = \left| \frac{\text{lateral strain}}{\text{axial strain}} \right| = -\frac{\text{lateral strain}}{\text{axial strain}}$$

محدوده ضریب پواسون: $0 \le \nu \le \frac{1}{2}$

برای مواد تراکم ناپذیر ν برابر 0.5 می باشد.

اگر عضوی تحت اثر تنشهای چند جهته باشد: $\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_z}{E}$

سراسری ۷۹

ورقی به ابعاد $۲۰cm \times ۲۰$ تحت تنش در دو جهت مطابق شکل قرار دارد. اگر دایره‌ای به قطر $۱۰cm$ را در مرکز این ورق داشته‌باشیم، پس از اعمال تنشها این دایره چه وضعیتی را پیدا می‌کند؟

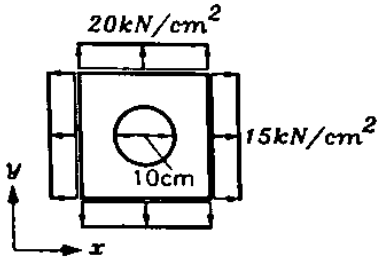
$(E = ۲ \times ۱۰^۴ \frac{kN}{cm^۲}$ ،$\nu = ۰/۳)$

۱) دایره‌ای به قطر $۱۰/۰۰۶۱۲۵cm$

۲) دایره‌ای به قطر $۱۰/۰۰۸۷۵cm$

۳) بیضی به قطرهای $۱۰/۰۰۷۵cm$ و $۱۰/۰۱cm$ در جهت محور X و Y به ترتیب

۴) بیضی با قطر $۱۰/۰۰۴۵cm$ و $۱۰/۰۰۷۷۵$ در جهت محور X و Y به‌ترتیب

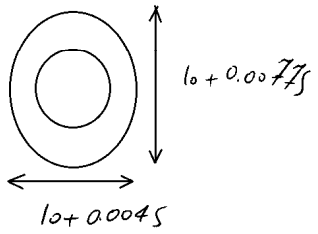


$$\varepsilon_x = \frac{15}{2\times10^4} - 0.3\times\frac{20}{2\times10^4} = 4.5\times10^{-4}$$

$$\varepsilon_y = \frac{20}{2\times10^4} - 0.3\times\frac{15}{2\times10^4} = 7.75\times10^{-4}$$

$$\Delta x = 4.5\times10^{-4}\times 10 = 0.0045cm$$

$$\Delta y = 7.75\times10^{-4}\times 10 = 0.00775cm$$

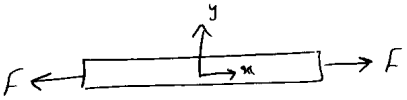


مثال

میله‌ای به‌طول $۲۰cm$ و قطر $۴cm$ که تحت اثر نیروی محوری کششی ۴ تن است افزایش طول $۰/۰۳cm$ و کاهش قطر $۰/۰۰۱۸cm$ دارد. ضریب پواسون میله چقدر است؟

۱) ۰/۲۵ ۲) ۰/۳ ✓ ۳) ۰/۳۳ ۴) ۰/۳۵

$L = 20$, $D = 4$, $F = 4000$ | $\Delta L = 0.03$, $\Delta D = 0.0018$



$$\nu = \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = \frac{(0.0018/4)}{(0.03/20)} = 0.3$$

کرنش سطحی: $\varepsilon_A = \varepsilon_x + \varepsilon_y$

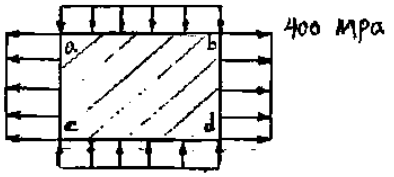
کرنش حجمی، ضریب انبساط حجمی (ضریب بالک):

$$\varepsilon_V = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1-2\nu}{E}\left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right)$$

نکته: تغییر حجم نسبی المان تنها به مجموع تنش های اصلی وارد شده دارد.

سراسری ۸۱

۴۴- یک ورق فولادی به مساحت $۱۵۰cm^۲$ و ضخامت $۱cm$ تحت اثر تنش‌های یکنواختی مطابق شکل قرار گرفته است. مقدار تغییر مساحت بر حسب $mm^۲$ کدام است؟ ($E = ۲۰۰Gpa$ ،$\nu = ۰/۳$)



۱) ۴/۸۰

۲) ۵/۸۲

۳) ۱۰/۵

۴) ۱۱/۲۵

$$\Delta A=(\varepsilon_x+\varepsilon_y)A \longrightarrow \Delta A=\left[\left(\frac{\sigma_x}{E}-\nu\frac{\sigma_y}{E}\right)+\left(\frac{\sigma_y}{E}-\nu\frac{\sigma_x}{E}\right)\right]A=\left[\frac{\sigma_x}{E}(1-\nu)+\frac{\sigma_y}{E}(1-\nu)\right]A$$

$$=\left[\frac{400}{200000}(0.7)+\frac{-200}{200000}(0.7)\right]\times 150=0.105\,cm=10.5mm^2$$

مثال

در حالت تنش مسطح در صفحات اصلی xy، ε_z برابر کدام گزینه است؟

۱) $\frac{-\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x+\varepsilon_y)$ ✓

۲) $\frac{-\nu}{2(1-\nu)}(\varepsilon_x+\varepsilon_y)$

۳) $-\nu(\varepsilon_x+\varepsilon_y)$

۴) $\frac{-\nu}{2}(\varepsilon_x+\varepsilon_y)$

$\varepsilon_z=0-\nu\left(\frac{\sigma_x}{E}+\frac{\sigma_y}{E}\right)$ ← $\sigma_z=0$ یعنی تنش مسطح

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x&=\frac{\sigma_x}{E}-\nu\frac{\sigma_y}{E}\\ \varepsilon_y&=\frac{\sigma_y}{E}-\nu\frac{\sigma_x}{E}\end{aligned}\right\}\xrightarrow{\text{با توجه به گزینه‌ها باید این رو را با هم جمع کنیم}}\varepsilon_x+\varepsilon_y=\left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{E}\right)(1-\nu)\longrightarrow\varepsilon_z=-\nu\frac{(\varepsilon_x+\varepsilon_y)}{1-\nu}$$

مثال

تانسور تنش در نقطه‌ای از یک سازه بصورت $[\sigma_{ij}]=\begin{bmatrix}10 & \tau_{xy} & 0\\ \tau_{xy} & 20 & 0\\ 0 & 0 & \sigma_z\end{bmatrix}MPa$ می‌باشد. σ_z چقدر باشد تا در راستای zها حالت کرنش مسطح پیش بیاید؟ $(\nu=0/2)$

۱) $6MPa$

۲) $30MPa$

۳) $90MPa$

۴) با مشخص نبودن مقدار τ_{xy} محاسبه σ_z ممکن نیست.

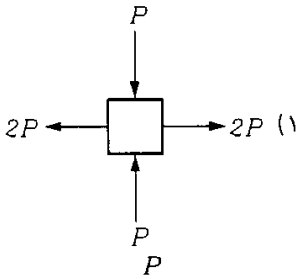
مثال: کرنش مسطح یعنی $\varepsilon_z=0$

$$\varepsilon_z=\frac{\sigma_z}{E}-0.2\times\frac{20}{E}-0.2\times\frac{10}{E}=0\longrightarrow\boxed{\sigma_z=6MPa}$$

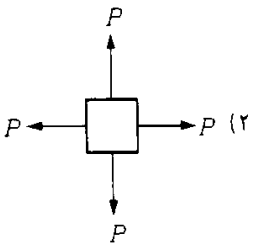
مثال

درکدامیک از المانهای زیر تغییر حجم المان ماکزیمم است؟

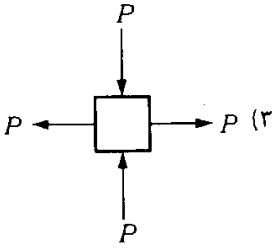
۱)



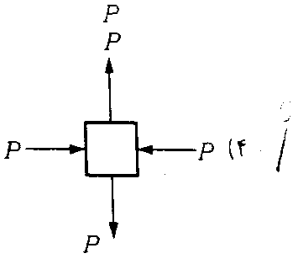
۲)



۳)



۴)



$$\Delta V = (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) V \longrightarrow \Delta V = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)\frac{(1-2\nu)}{E} \times V$$

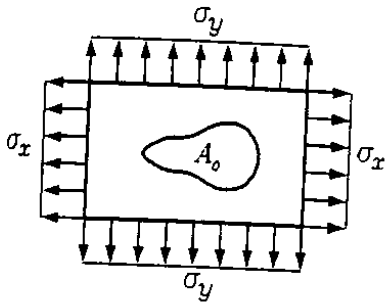
نکته: هرقدر که جمع تنش‌ها ($\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z$) از آن بیشتر باشد تغییر حجم آن بیشتر است

$\Sigma P = P+P = 2P$ ←(2 ✓ $\quad \Sigma P = (2P-P) = P$ ←(1

$\Sigma P = P-P = 0$ ←(4 $\quad \Sigma P = (P-P) = 0$ ←(3

مثال

تغییر سطح شکل رسم شده بر روی صفحه مستطیلی زیر چقدر است؟ (سطح اولیه شکل A_0، مدول یانگ E و ضریب پواسون ν می‌باشد)



۱) $\frac{1-\nu}{2E}(\sigma_x+\sigma_y)A_0$

۲) $\frac{1-2\nu}{2E}(\sigma_x+\sigma_y)A_0$

۳) ✓ $\frac{1-\nu}{E}(\sigma_x+\sigma_y)A_0$

۴) $\frac{(1-2\nu)}{E}(\sigma_x+\sigma_y)A_0$

$$\Delta A = (\varepsilon_x + \varepsilon_y)A_0 = \left(\frac{\sigma_x - \nu\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_y - \nu\sigma_x}{E}\right)A_0 \Rightarrow \Delta A = (\sigma_x + \sigma_y)\left(\frac{1-\nu}{E}\right)$$

مثال

یک میله با مقطع مربعی و سطح مقطع A تحت اثر بار محوری P قرار دارد.

تغییر سطح مقطع این میله چقدر است؟

۱) $\frac{\nu P}{E}$ $\quad$ ۲) ✓ $\frac{2\nu P}{E}$ $\quad$ ۳) $\sqrt{\frac{\nu PA}{E}}$ $\quad$ ۴) $2\sqrt{\frac{\nu PA}{E}}$

$$\Delta A = (\varepsilon_x + \varepsilon_y)A = \left(-\nu\frac{P}{EA} - \nu\frac{P}{EA}\right)A = -\frac{2\nu P}{E}$$

مثال

در حالت تنش مسطح در صفحه xy کدامیک از گزینه‌ها شرط کافی برای صفر شدن ε_z است؟

۱) $\tau_{xy} = 0$

۲) $\tau_{xy} = 0$ و $\sigma_y = \sigma_x$

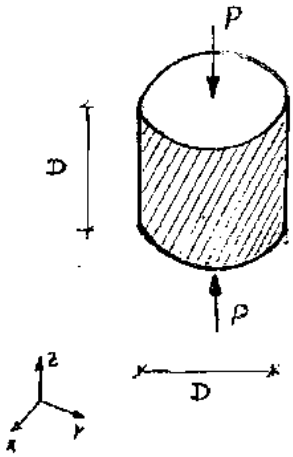
۳) $\tau_{xy} = 0$ و $\sigma_y = -\sigma_x$

۴) ✓ $\sigma_y = -\sigma_x$

در تنش مسطح داریم: $\sigma_z = 0$ $\quad$ برای این ε_z برابر است با: $\varepsilon_z = 0 - \nu\frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E} \xrightarrow{\varepsilon_z = 0} \sigma_x = -\sigma_y$

مثال (سراسری ۸۶)

۵۱- نمونه استوانه‌ای شکل مقابل با قطر و ارتفاع D زیر اثر نیروی محوری P که بطور یکنواخت در مقطع تقسیم شده از بالا و پایین قرار گرفته است. در صورتی‌که از تغییر شکل جانبی استوانه جلوگیری شود، مطلوبست تغییر طول استوانه:



۱) $\Delta_z = \frac{4P}{\pi D^2 E}\cdot\frac{1-\nu-2\nu^2}{1-\nu}$

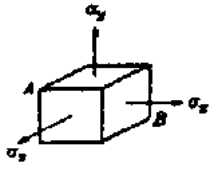
۲) $\Delta_z = \frac{4P}{\pi D^2 E}\cdot\frac{1-\nu}{1-\nu-2\nu^2}$

۳) $\Delta_z = \frac{4P}{\pi D E}\cdot\frac{1-\nu-2\nu^2}{1-\nu}$

۴) $\Delta_z = \frac{4P}{\pi D E}\cdot\frac{1-\nu}{1-\nu-2\nu^2}$

مثال (آزاد ۸۸)

۵۵- در المان مکعبی زیر تغییر سطح جانبی المان چقدر است؟ (بعد المان a، مدول یانگ E و ضریب پواسون ν می باشد).



۱) $\frac{4(1-2\nu)a^2}{E}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)$

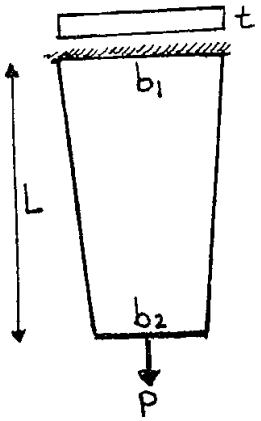
۲) $\frac{4(1-\nu)a^2}{E}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)$

۳) $\frac{8(1-2\nu)a^2}{E}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)$

۴) $\frac{8(1-\nu)a^2}{E}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)$

سراسری ۸۸

یک ورق فولادی با ضریب ارتجاعی E، ضریب پوآسون ν، ضخامت ثابت t و عرض متغیر نشان داده شده در شکل که از وزن آن صرفنظر گردیده است تحت اثر نیروی محوری P قرار گرفته است. تغییر حجم آن چقدر است؟



۱) $\frac{PL}{E}(1-\nu)$

۲) $\frac{PL}{E}(1-2\nu)$

۳) $\frac{PL}{2E}(1-\nu)$

۴) $\frac{(b_1+b_2)PL}{2Et}(1-2\nu)$

مثال (آزاد ۸۷)

۴۱- یک میله منشوری به حجم V_0 تحت اثر نیروی فشاری در راستای طولی آن قرار دارد. اگر ضریب پواسون ماده برابر ν و قدر مطلق کرنش طولی برابر ε باشد، حجم نهایی میله چقدر خواهد شد؟

۱) $(1+\varepsilon)(1-2\nu\varepsilon)V_0$

۲) $(1+\varepsilon)(1-\nu\varepsilon)^2 V_0$

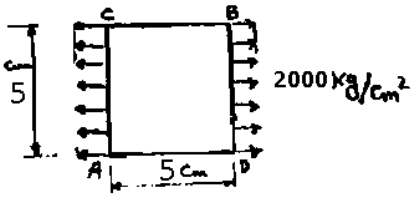
۳) $(1-\varepsilon)(1+2\nu\varepsilon)^2 V_0$

۴) $(1-\varepsilon)(1-2\nu\varepsilon)V_0$

نحوه تعیین تغییر قطر: $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c.dc = a.da + b.db \rightarrow dc = \frac{a.da+b.db}{c} = \frac{a.da+b.db}{\sqrt{a^2+b^2}}$

سراسری ۸۱

۳۵- ورقی مطابق شکل، تحت تنش تک محوری قرارگرفته است، تغییر قطر AB چند cm است؟ ($\nu = ۰/۳ ، E = ۲ \times ۱۰^۶ \ kg/cm^۲$)



۱) $۲/۴۷ \times ۱۰^{-۳}$

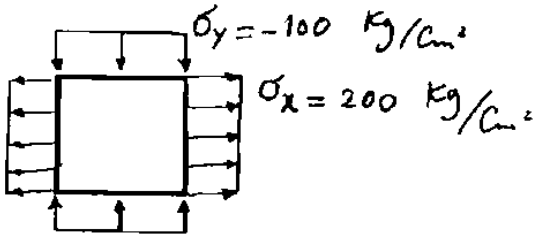
۲) $۳/۵۴ \times ۱۰^{-۳}$

۳) ۵×۱۰^{-۳}

۴) $۷/۷۰ \times ۱۰^{-۳}$

سراسری ۸۳

۵۲- صفحه ای مربع شکل به اضلاع ۱۰ سانتیمتر تحت تاثیر تنشهای σ_x و σ_y مطابق شکل قرار دارد. تغییر طول قطر این صفحه چقدر است؟ ($\nu = ۰/۲, E = ۲ \times ۱۰^۶ kg/cm^۲$)



۱) $۱/۲۳ \times ۱۰^{-۲} cm$

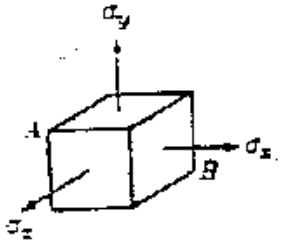
۲) $۲/۴۷ \times ۱۰^{-۲} cm$

۳) $۴/۹۴ \times ۱۰^{-۲} cm$

۴) $۷/۴۱ \times ۱۰^{-۲} cm$

مثال (آزاد ۸۷)

۱۵- در المان مکعبی زیر تغییر طول قطر AB چقدر است؟ (بعد المان a، مدول یانگ E و ضریب پواسون ν می باشد)



۱) $\frac{\sqrt{۳}(۱-\nu)a}{۳E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$

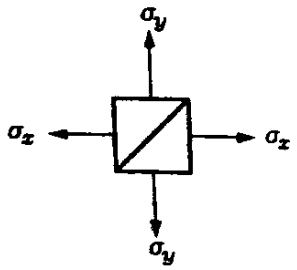
۲) $\frac{\sqrt{۳}(۱-\nu)a}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$

۳) $\frac{\sqrt{۳}(۱-۲\nu)a}{۳E}(\sigma_x - \sigma_y + \sigma_z)$

۴) $\frac{\sqrt{۳}(۱-۲\nu)a}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$

مثال

تغییر طول قطر المان مربعی شکل زیر (به ضلع a) چقدر است؟



۱) $\sqrt{۲}a(۱-\nu)\frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{E}$

۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}a(۱-\nu)\frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{E}$ ✓

۳) $a(۱-\nu)\frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{E}$

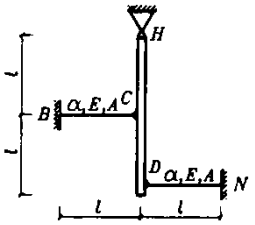
۴) $\frac{a}{۲}(۱-\nu)\frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{E}$

٦-حرارت

$$\varepsilon = \alpha.\Delta T \rightarrow \Delta L = \alpha.\Delta T.L$$

سراسری ۸۰

در شکل مقابل میله صلب HD توسط میله‌های مشابه BC و DN نگهداری شده‌است. اگر درجه حرارت میله BC به اندازه $+\Delta T$ افزایش یابد، عکس‌العمل تکیه‌گاه H کدام است؟



۱) $H_x = ۰/۴\Delta TEA\alpha$

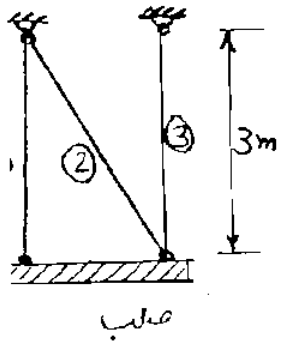
۲) $H_x = ۰/۵\Delta TEA\alpha$

۳) $H_x = \Delta TEA\alpha$

۴) $H_x = ۲\Delta TEA\alpha$

سراسری ۸۲

۴۵- تنش در میله های شکل روبرو به شرح زیر است:
$\sigma_۲ = ۰$ و $\sigma_۱ = \sigma_۳ = ۱۰۰\text{MPa}$
درجه حرارت هر سه میله ۲۰ درجه سانتیگراد افزایش می یابد، تنش در هر میله بر حسب MPa چقدراست؟
$\alpha = ۱۱\times۱۰^{-۶}/^{\circ}\text{C}$, $\text{E} = ۲\times۱۰^{۵}\ \text{MPa}$



۱) $\sigma_۲ = ۰$ و $\sigma_۱ = \sigma_۳ = ۱۰۰$

۲) $\sigma_۲ = ۴۴$ و $\sigma_۱ = \sigma_۳ = ۱۴۴$

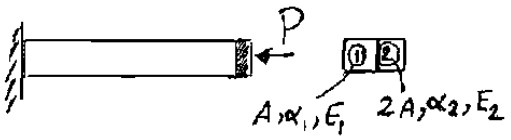
۳) $\sigma_۲ = -۴۴$ و $\sigma_۱ = \sigma_۳ = ۵۶$

۴) $\sigma_۲ = -۵۶$ و $\sigma_۱ = ۰$ و $\sigma_۳ = ۱۴۴$

سراسری ۸۳

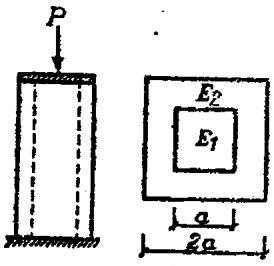
۶۰- مطابق شکل دو میله ۱ و ۲ بدون اتصال بهم و به جایی توسط نیروی p وارد بر صفحه صلب به دیوار تکیه داده شده اند. با کاهش دمای سیستم به اندازه T، میله ۱ و با افزایش دمای آن به اندازه T ۳ میله ۲ رها خواهد شد. $\frac{E_۱}{E_۲}$ چقدر است؟ صفحه صلب همواره همودبر محور طولی میله ها باقی می ماند.

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۳



آزاد۸۹

٤٦-اگر دمای ستون مربعی زیر به میزان T افزایش یابد نیروی فشاری P بصورت مساوی توسط مقاطع اول و دوم تحمل می‌شود. دمای ستون چگونه تغییر می‌کند تا تمام نیروی فشاری P را مقطع اول تحمل کند؟ ($E_۱=4E_۲$)



۱) به میزان ٦T کاهش یابد

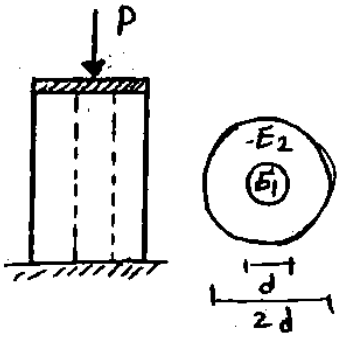
۲) به میزان ٦T افزایش یابد.

۳) به میزان ۸T کاهش یابد.

٤) به میزان ۸T افزایش یابد.

آزاد ۸۵

۷۲- اگر دمای ستون زیر به میزان T افزایش یابد قسمت داخلی مقطع ۳۰ درصد نیروی فشاری P را تحمل می کند و اگر به میزان 3T کاهش یابد قسمت خارجی مقطع ۳۰ درصد نیروی فشاری P را تحمل می کند. نسبت $\frac{E_1}{E_2}$ چقدر است؟



۱) ۱/۵ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۴/۵

$(\alpha_1 \neq \alpha_2)$ معلوم است ضرایب حرارتی دو جسم متفاوت است

حالت اول → $\Delta_1 = \frac{-0.3PL}{E_1A_1} + \alpha_1 TL$ ، $\Delta_2 = -\frac{0.7PL}{E_2A_2} + \alpha_2 TL$ ، $A_2 = 3A_1$ ⇨ (I) $\frac{-0.3PL}{E_1A_1} + \alpha_1 TL = \frac{-0.7PL}{3E_2A_1} + \alpha_2 TL$

حالت دوم → $\Delta_1 = \frac{-0.7PL}{E_1A_1} - 3\alpha_1 TL$ ، $\Delta_2 = \frac{-0.3PL}{3E_2A_1} - 3\alpha_2 TL$ ⇨ (II) $\frac{-0.7PL}{E_1A_1} - 3\alpha_1 TL = \frac{-0.3PL}{3E_2A_1} - 3\alpha_2 TL$

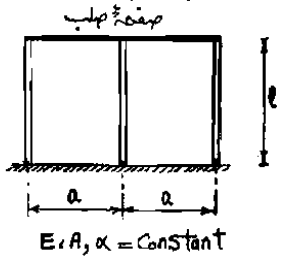
(I) → $\alpha_1 TL - \alpha_2 TL = \frac{0.3PL}{E_1A_1} - \frac{0.7PL}{3E_2A_1}$

جاگذاری رابطه اول در دوم

$\frac{-0.7PL}{E_1A_1} + \frac{0.3PL}{3E_2A_1} = 3\left(\frac{0.3PL}{E_1A_1} - \frac{0.7PL}{3E_2A_1}\right) \rightarrow \frac{-0.7}{E_1} + \frac{0.1}{E_2} = \frac{0.9}{E_1} - \frac{0.7}{E_2} \rightarrow \boxed{\frac{E_1}{E_2} = 2}$

سراسری ۸۱

۴۲- صفحهٔ صلبی بر سه میله با شرایط یکسان و مطابق شکل اتکاء دارد. چنانچه میلهٔ وسطی به اندازهٔ ΔT گرم شود، تنش در میله‌های کناری کدام است؟



۱) $\alpha . E . \Delta T$

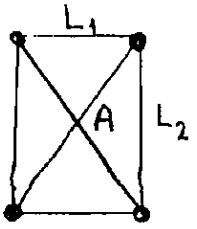
۲) $\frac{1}{2}\alpha . E . \Delta T$

۳) $\frac{1}{3}\alpha . E . \Delta T$

۴) $\frac{2}{3}\alpha . E . \Delta T$

سراسری ۸۳

۴۸- در شکل روبرو جنس و سطح مقطع همه میله ها یکی است. دو میله مایل در A بهم اتصالی ندارند. در اثر افزایش درجه حرارت چه تنشی در میله ها بوجودمی آید؟



۱)تنشی ایجاد نمی شود.

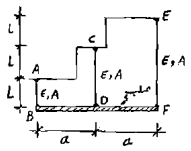
۲)در تمام میله ها تنش فشاری ایجاد می شود.

۳) در میله های مایل تنش کششی و در بقیه میله ها تنش فشاری ایجاد می شود.

۴) در میله های مایل تنش فشاری و در بقیه میله ها تنش کششی ایجاد می شود.

مثال (سراسری ۸۴)

در شکل مقابل چنانچه حرارت میله CD به اندازه ΔT افزایش یابد، میزان تغییر مکان نقطه D چقدر می‌باشد؟



۱) $\alpha L\Delta T$

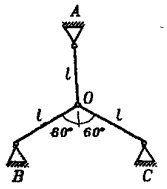
۲) $\frac{1}{3}\alpha L\Delta T$

۳) $2\alpha L\Delta T$

۴) $\frac{2}{3}\alpha L\Delta T$

مثال

در خرپای زیر اگر دمای میله‌های OB و OC به‌میزان ΔT کاهش یابد و دمای میله OA به‌میزان $2\Delta T$ افزایش یابد چه نیرویی در میله OA بوجود می‌آید؟ (ضریب انبساط حرارتی اعضا α می‌باشد و $AE = const$)



۱) $AE\alpha\Delta T$

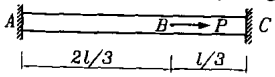
۲) $\frac{4}{3}AE\alpha\Delta T$

۳) $2AE\alpha\Delta T$

۴) ۰ ✓

مثال

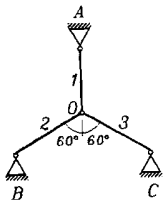
میله زیر را باید حداقل چند درجه سانتی‌گراد گرم کرد تا هیچ نقطه‌ای از آن تحت کشش نباشد؟ (سطح مقطع میله A، مدول الاستیسیته E و ضریب انبساط حرارتی α می‌باشد)



۱) $\frac{P}{AE\alpha}$ ۲) $\frac{P}{2AE\alpha}$ ۳) $\frac{P}{3AE\alpha}$ ✓ ۴) $\frac{P}{4AE\alpha}$

مثال

در خرپای زیر اگر دمای همهٔ اعضا به میزان ΔT افزایش یابد و ضریب انبساط حرارتی اعضا α باشد نیروی اعضای ۱ و ۲ و ۳ چقدر خواهد شد؟ ($OA = OB = OC = l$ و $AE = const$)



۱) $F_1 = F_2 = F_3 = -\frac{2}{3}AE\alpha\Delta T$

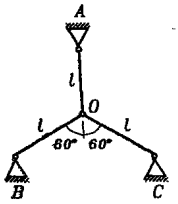
۲) $F_1 = F_2 = F_3 = -AE\alpha\Delta T$ ✓

۳) $F_1 = F_2 = F_3 = -\frac{4}{3}AE\alpha\Delta T$

۴) $F_1 = F_2 = F_3 = -\frac{3}{2}AE\alpha\Delta T$

مثال (آزاد ۸۸)

در خرپای زیر اگر دمای میله‌های OB و OC به‌میزان ΔT کاهش یابد و دمای میله OA به‌میزان $2\Delta T$ افزایش یابد چه نیرویی در میله OA بوجود می‌آید؟ (ضریب انبساط حرارتی اعضا α می‌باشد و $AE = const$)



۱) $AE\alpha\Delta T$

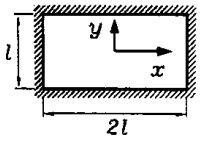
۲) $\frac{4}{3}AE\alpha\Delta T$

۳) $2AE\alpha\Delta T$ ✓

۴) ۰

مثال (آزاد ۸۸)

در صفحه زیر که توسط تکیه‌گاه‌های صلب نگه داشته شده است، اگر دما به میزان ΔT کاهش یابد تنش کششی ایجاد شده چقدر است؟



۱) $E\alpha\Delta T$

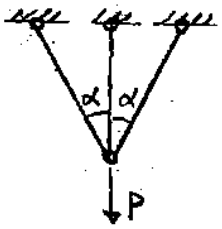
۲) $\frac{E\alpha\Delta T}{1-\nu}$ ✓

۳) $\frac{E\alpha\Delta T}{1+\nu}$

۴) $(1+\nu)E\alpha\Delta T$

(سراسری ۸۵)

سه میله با سطح مقطع و جنس یکسان مطابق شکل روبرو زیر اثر نیروی P قرار گرفته‌اند. برای آنکه نیروی هر سه میله برابر شود باید:



۱) حرارت سازه را کاهش داد.

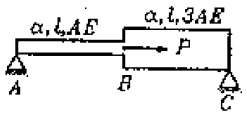
۲) حرارت سازه را افزایش داد.

۳) نیروها از ابتدا برابرند و نیاز به تغییر درجه حرارت نیست.

۴) با تغییر درجه حرارت امکان ندارد نیروی هر سه میله مساوی شود.

مثال (آزاد ۸۶)

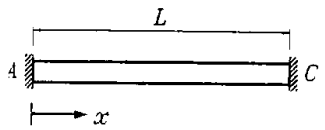
۴۳- در میله زیر برای آنکه تنش در میله AB صفر شود دمای میله چقدر باید افزایش یابد؟



۱) $\frac{P}{6AE\alpha}$ ۲) $\frac{P}{4AE\alpha}$ ۳) $\frac{P}{3AE\alpha}$ ۴) $\frac{P}{2AE\alpha}$

مثال

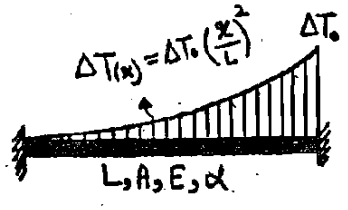
اگر در طول تیر زیر گرادیان حرارتی $T(x) = T_0(\frac{x}{L})^2$ بوجود بیاید تنشهای تکیه‌گاهی چقدر خواهد بود؟



۱) $E\alpha T_0$ ۲) $\frac{1}{2}E\alpha T_0$ ۳) $\frac{1}{3}E\alpha T_0$ ✓ ۴) $\frac{1}{4}E\alpha T_0$

سراسری ۸۵

۵۶- **میله‌ای را که بین** دو تکیه گاه ثابت قرار دارد مطابق شکل بطور یکنواخت حرارت داده ایم، مقدار تنش عمودی در میله برابر با:



۱) $E\alpha\Delta T_0$

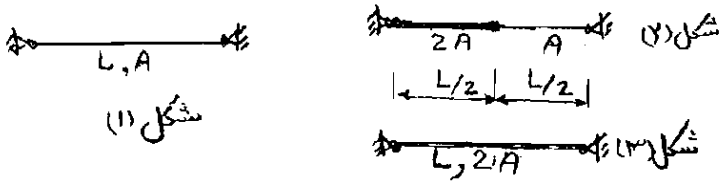
۲) $\frac{E\alpha\Delta T_0}{2}$

۳) $\frac{E\alpha\Delta T_0}{3}$

۴) $\frac{E\alpha\Delta T_0}{4}$

سراسری ۸۲

۳۲- در میله های شکل زیر که از یک جنس می باشند درجه حرارت ΔT افزایش می یابد. تنش ماگزیمم در کدام میله بیشتر است؟



۱) شکل ۱

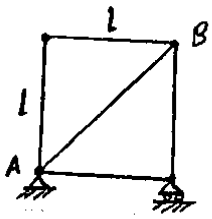
۲) شکل ۲

۳) شکل ۳

۴) تنش هر سه میله مساوی است.

آزاد ۸۵

۸۸- اگر تمام اعضای خرپای روبرو به اندازه ΔT گرم شوند نیروی عضو AB چقدر خواهد بود؟ سطح مقطع همه اعضا A و ضریب انبساط حرارتی α است.



۱) $\alpha l\sqrt{2}\,\Delta T$ ۲) 0 ۳) $\sqrt{2}\,EA\alpha\Delta T$ ۴) $EA\alpha\Delta T$

۷-دایره مور تنش (2D)

-زاویه ها در دایره مور دو برابر هستند

- هر صفحه تنش یک نقطه در دایره مور می باشد.

- تنش برشی اگر ساعت گرد باشد مثبت خواهد بود.

نکته

- مجموع تنش های محوری در دوصفحه عمود بر هم، با چرخاندن المان ثابت می ماند.

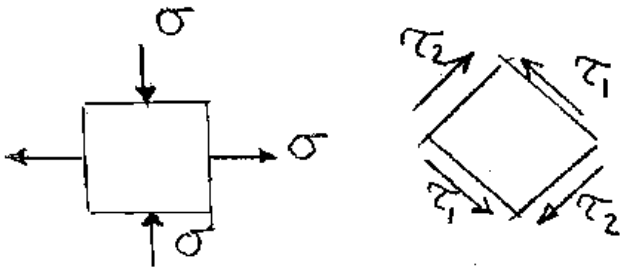
- مقدار $\sigma_x+\sigma_y-\tau_{xy}^2$ در رو صفحه عمود بر هم، با چرخاندن المان ثابت می ماند.

- $\sigma_1+\sigma_2=\sigma_x+\sigma_y$

- $\sigma_1\times\sigma_2=\sigma_x\times\sigma_y-\tau_{xy}^2$

مثال (سراسری ۸۶)

۵۰- دو شکل روبرو تنش‌ها را در یک نقطه نشان می‌دهند اضلاع دو المان ۴۵ درجه نسبت بهم زاویه دارند. در حقیقت دو المان معادل هستند بنابراین:

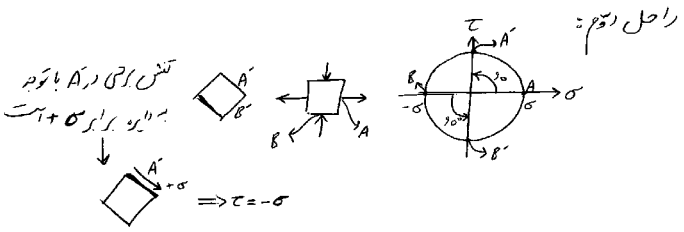


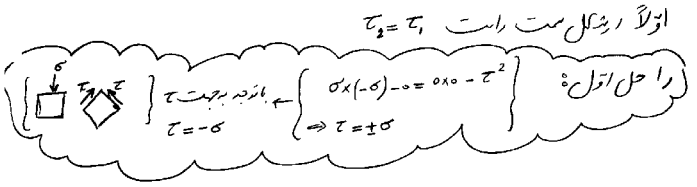
۱) $\tau_1=\tau_2=0$

۲) $\tau_1=\tau_2=\sigma$

۳) $\tau_1=\tau_2=2\sigma$

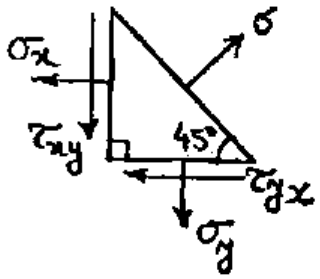
۴) $\tau_1=\tau_2=-\sigma$





(سراسری ۸۵)

۵۳- در نقطه‌ای از یک سازه تنش‌ها مطابق شکل روبرو است. $\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$ چقدر است؟

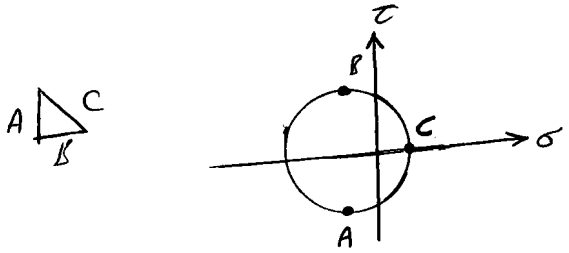


۱) ۱

۲) $\sqrt{۲}$

۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۴) هر مقداری امکان دارد.



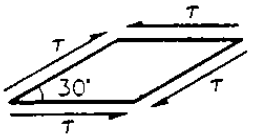
$\sigma_A = \sigma_B \rightarrow \frac{\sigma_A}{\sigma_B} = 1$

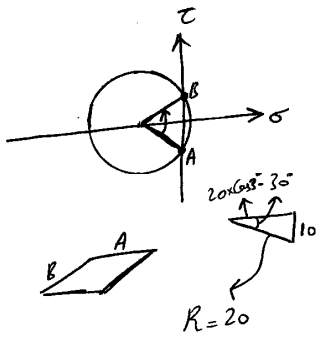
سراسری ۸۰

در یک نقطه از سازه‌ای، المانی مطابق شکل نشان داده شده‌است. روی صفحات نشان داده شده، تنش برشی مساوی $۱۰ MPa$ و تنش عمودی صفر است. مقادیر تنشهای اصلی $\sigma_۱$ و $\sigma_۲$ برحسب MPa چقدر است؟ (در این نقطه تنش مسطح است)

۱) ۱۰ و ۱۰−　　۲) ۲۰ و ۰

۳) ۱۶٫۹۳ و ۱۰٫۶۵　　۴) $۱۰\sqrt{۳}+۲۰$ و $۱۰\sqrt{۳}-۲۰$





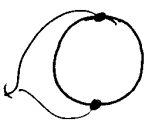
$\sigma_{max} = 20 - 20\times\cos 30° = 20 - 10\sqrt{3}$
$\sigma_{min} = -20 - 20\times\cos 30° = -20 - 10\sqrt{3}$
→ قدر مطلق است بزرگترین کدام است

مثال (سراسری ۸۵)

۵۴- در نقطه‌ای از یک جسم، مولفه‌های تنش بصورت $\sigma_x = ۶$ ، $\tau_{xy} = \tau_{yx} = ۴$ و سایر مولفه‌ها برابر صفر می‌باشند. روی صفحه‌ای که از آن نقطه می‌گذرد و مولفه تنش برشی مقدار ماکزیمم را دارد مقدار مؤلفه تنش عمودی چقدر می‌باشد؟

۱) ۰　　۲) ۳　　۳) ۲-　　۴) ۸

وقتی تنش برشی ماکزیمم است

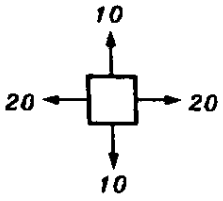


این نقاط را داریم که در آنها $\sigma = \sigma_x = \sigma_y$ بنابراین

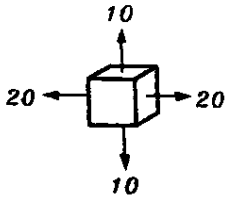
$\begin{cases} ۶+۰ = \sigma+\sigma \rightarrow \sigma = ۳ \\ ۶\times۰ - ۴^۲ = \sigma^۲ - \tau^۲ \rightarrow \tau = ۵ \end{cases}$

مثال

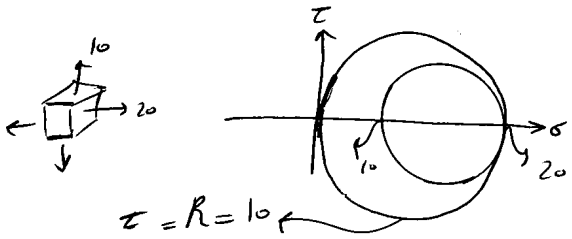
در المان زیر تنش برشی ماکزیمم چقدر است؟

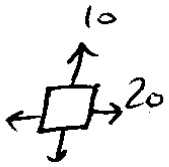


۱) ۵ ✓ ۲) ۱۰ ۳) ۱۵ ۴) ۲۰



۱) ۵ ۲) ۱۰ ✓ ۳) ۱۵ ۴) ۲۰





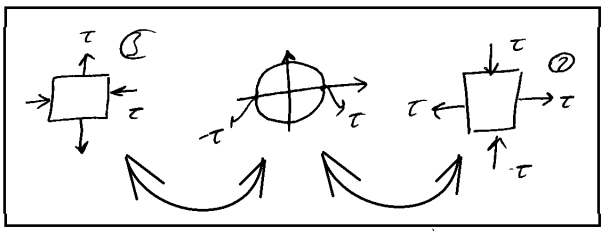
$10+20 = 2\sigma \rightarrow \sigma = 15$

$10 \times 20 = \sigma^2 - \tau^2 \rightarrow \tau = 5$

مثال

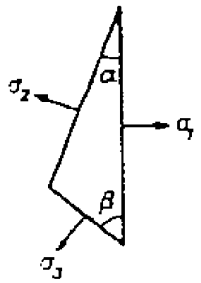
کدامیک از تانسورهای زیر می‌تواند مربوط به حالت برش محض باشد؟

۱) $\begin{bmatrix} 0 & \tau \\ \tau & 0 \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} \tau & 0 \\ 0 & -\tau \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} -\tau & 0 \\ 0 & \tau \end{bmatrix}$ ۴) همه موارد ✓



مثال (آزاد ۸۷)

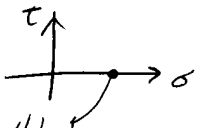
تست- در المان زیر که تنشهای برشی روی صفحات نشان داده شده صفر است، کدام گزینه صحیح می باشد؟



۱) $\sigma_1 = \frac{\sigma_2}{Sin\alpha} = \frac{\sigma_3}{Sin\beta}$ ۲) $\sigma_1 = \sigma_2 Sin\alpha = \sigma_3 Sin\beta$

۳) $\frac{\sigma_1}{Sin(\alpha+\beta)} = \frac{\sigma_2}{Sin\alpha} = \frac{\sigma_3}{Sin\beta}$ ۴) $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$

تنها راه اینکه هر سه صفحه بدون تنش برشی باشند این است که دایره مور آن یک دایره با شعاع صفر باشد



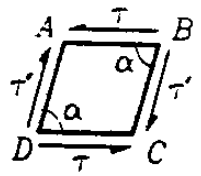
$\Rightarrow \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$

دایره‌ای با شعاع صفر

مثال

اگر به جای المان مربعی، المان لوزی مطابق شکل زیر در نظر گرفته شود،

رابطه $\tau = \tau'$ به چه رابطه‌ای تغییر می‌کند؟



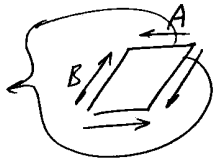
۱) $\tau = \tau' \sin\alpha$

۲) $\tau' = \tau \sin\alpha$

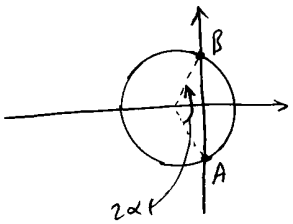
۳) $\tau' = \tau \sin^2\alpha$

۴) ✓ رابطه تغییر نمی‌کند.

مثال



تنش محوری صفر است پس:



$\tau_A = \tau_B$

مثال

اگر در نقطه‌ای از یک سازه تحت اثر بارگذاری مؤلفه‌های تنش بصورت $\tau_{xy} = -۳۰$ و $\sigma_x = ۲\sigma_y = ۲۰$ باشد، در این نقطه مجموع تنشهای اصلی چقدر است؟

۱) ۴

۲) ۱۰

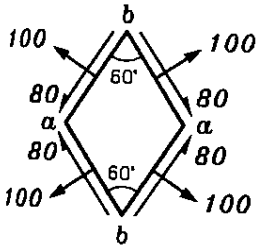
۳) ۲۰

۴) ✓ ۳۰

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_x + \sigma_y = 20 + 10 = 30$$

مثال

۱۳۲ـ در المان تنش زیر مقادیر تنشهای اصلی چقدر است؟

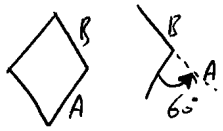


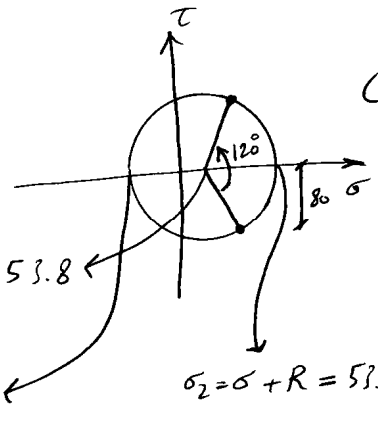
۱) ۱۳۱ و ۵۳/۸−

۲) ۱۵۰ و ۵۰−

۳) ✓ ۱۴۶/۲ و ۳۸/۶−

۴) ۱۵۲/۴ و ۳۲/۴−





چون زاویه ۶۰° نیست، مانند مثال قبل نمی‌توان از روابط استفاده کرد و باید از دایره مور استفاده کرد:

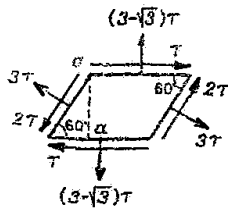
$\sigma = 100 - 80 \times \cot(60) = 53.8$

$\sigma_1 = \sigma - R = 53.8 - \frac{80}{\sin 60^\circ} = -38.57$

$\sigma_2 = \sigma + R = 53.8 + \frac{80}{\sin 60} = 146.17$

آزاد۸۹

۴۴- در المان تنش زیر مقدار تنش نرمال در صفحهٔ قائم a-a چقدر است؟



۱) $(2+\sqrt{3})\tau$

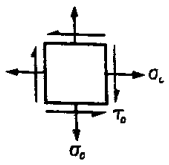
۲) $(1+\sqrt{3})\tau$

۳) $(3+\sqrt{3})\tau$

۴) $(4+\sqrt{3})\tau$

مثال

۱۲۹ـ در المان تنش زیر مقادیر تنشهای اصلی چقدر است؟



۱) $\sigma_0 - \frac{\tau_0}{2}$ و $\sigma_0 + \frac{\tau_0}{2}$
۲) $\sigma_0 - \tau_0$ و $\sigma_0 + \tau_0$
۳) τ_0 و $2\sigma_0 - \tau_0$
۴) σ_0 و σ_0

تنش‌های اصلی $\tau = 0$ است بنابراین اگر σ_1 و σ_2 تنش‌های اصلی باشند

$$\begin{cases} \sigma_0 + \sigma_0 = \sigma_1 + \sigma_2 \rightarrow \sigma_1 = 2\sigma_0 - \sigma_2 \\ \sigma_0^2 - \tau_0^2 = \sigma_1 \sigma_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \rightarrow \sigma_0^2 - \tau_0^2 = (2\sigma_0 - \sigma_2)\sigma_2 \\ \rightarrow \sigma_0^2 - 2\sigma_0\sigma_2 + \sigma_2^2 = \tau_0^2 \rightarrow (\sigma_0 - \sigma_2)^2 = \tau_0^2 \end{cases}$$

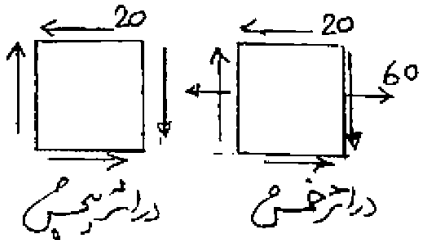
$$\rightarrow \sigma_0 - \sigma_2 = \pm\tau_0 \rightarrow \boxed{\sigma_2 = \sigma_0 \pm \tau_0} \rightarrow \text{گزینه ۲}$$

سراسری ۸۸

۵۹- در یک نقطه از سازه‌ای در اثر پیچش تنش برشی ۲۰ MPa و در اثر خمش تنش برشی ۲۰ MPa و تنش عمودی ۶۰ MPa مطابق شکل موجود است.

بزرگترین تنش برشی و تنش‌های اصلی بر حسب MPa چقدر است؟

۱) ۴۰ برشی و ۶۰ کششی و ۲۰ فشاری
۲) ۴۰ برشی و ۴۰ کششی و ۴۰ فشاری
۳) ۴۰ برشی و ۲۰ کششی و فشاری
۴) ۵۰ برشی و ۸۰ کششی و ۲۰ فشاری

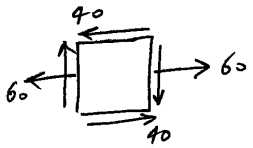


برای محاسبه تنش برشی $(\sigma = \sigma_1 = \sigma_2)$

تنش‌های اصلی $(\tau = 0)$

$$\begin{cases} 60 + 0 = 2\sigma \rightarrow \sigma = 30 \\ 60 \times 0 - 40^2 = \sigma^2 - \tau^2 \end{cases} \rightarrow \tau = 50 \Leftarrow \begin{cases} 60 + 0 = \sigma_1 + \sigma_2 \rightarrow \text{باتوجه به گزینه‌ها تنها گزینه ۴ صحیح است} \\ 60 \times 0 - 40^2 = \sigma_1 \times \sigma_2 \end{cases}$$

$80 - 20 = 60$



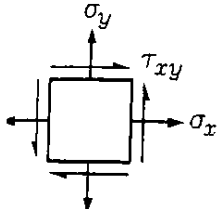
سراسری ۸۸

۵۷- در نقطه‌ای بر روی سطح بدنه جسمی کرنش‌های اصلی منطبق بر سطح عاری از بار جانبی خارجی برابر $\varepsilon_1 = +3/5 \times 10^{-4}$ و $\varepsilon_2 = +1 \times 10^{-4}$ اندازه‌گیری شده است. اگر مدول برشی برابر $G = 8GPa$ و ضریب پواسون برابر ۰/۲۵ باشد، مقدار حداکثر تنش برشی در نقطه مزبور برحسب MPa چقدر است؟

۱) ۴ ۲) ۲/۸ ۳) ۲ ۴) ۱

مثال

در یک المان تنش دو بعدی مانند شکل زیر حاصل $\sigma_x + \sigma_y$ چقدر خواهد شد؟



۱) σ_{max}
۲) σ_{min}
۳) $\sigma_{max} + \sigma_{min}$
۴) $\sigma_{max} - \sigma_{min}$

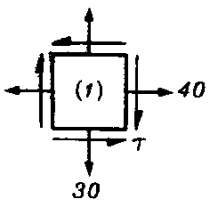
مثال

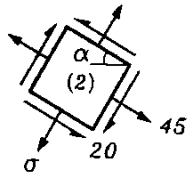
در تست قبل حاصل $\sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2$ چقدر خواهد شد؟

۱) $\sigma_{max} \times \sigma_{min}$
۲) $\sigma_{max}^2 + \sigma_{min}^2$
۳) $\sigma_{max}^2 - \sigma_{min}^2$
۴) $(\sigma_{max} - \sigma_{min})^2$

مثال

در شکل زیر اگر المان اول را به میزان α در جهت ساعتگرد بچرخانیم المان دوم حاصل می‌شود. مقادیر σ و τ بترتیب کدامند؟





۱) $\sigma = ۲۰$ و $\tau = ۲۶/۵$

۲) $\sigma = ۲۵$ و $\tau = ۲۱/۸$ ✓

۳) $\sigma = ۳۰$ و $\tau = ۱۵/۸$

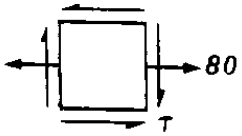
۴) بدون اینکه زاویه α مشخص باشد نمی‌توان مقادیر σ و τ را محاسبه کرد.

$40 + 30 = 45 + \sigma \rightarrow \sigma = 25$

$40 \times 30 - \tau^2 = 45 \times 25 - 20^2 \Rightarrow \tau = 21.8$

مثال

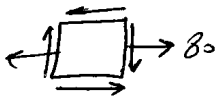
۱۲۸ـ تنشهای وارده در یک نقطه از سازه‌ای در المان تنش زیر نشان داده شده است. اگر اگر مقدار تنش اصلی کششی برابر $۱۴۰ MPa$ باشد، تنش برشی ماکزیمم چقدر است؟



۱) $۸۰ MPa$ ۲) $۱۰۰ MPa$ ✓

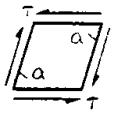
۳) $۱۲۰ MPa$ ۴) بستگی به مقدار τ دار

$80 + 0 = 140 + \sigma_2 \rightarrow \sigma_2 = -60 \rightarrow \tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{140 - (-60)}{2} = 100$



مثال

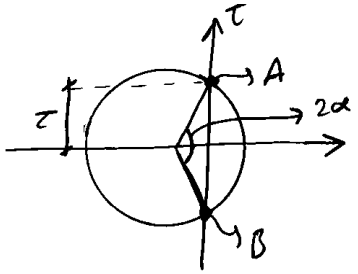
در یک نقطه از سازه‌ای، المان تنش مطابق شکل زیر است. مقدار تنش برشی ماکزیمم چقدر است؟



۱) τ ۲) $\tau \sin \alpha$

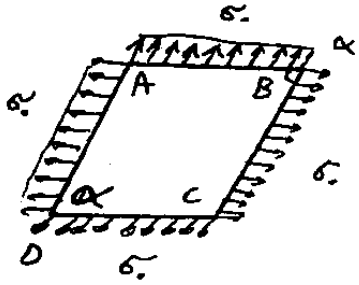
۳) $\frac{\tau}{\sin \alpha}$ ✓ ۴) $\tau \tan \frac{\alpha}{2}$

$\tau_{max} = R = \frac{\tau}{\sin \alpha}$ تنش برشی ماکزیمم برابر شعاع دایره است



آزاد ۸۵

۷۱- مطابق شکل زیر المان متوازی الاضلاع ABCD تحت اثر تنش کششی σ_0 می باشد. تنش برشی ماکزیمم در صفحه این المان چقدر است؟

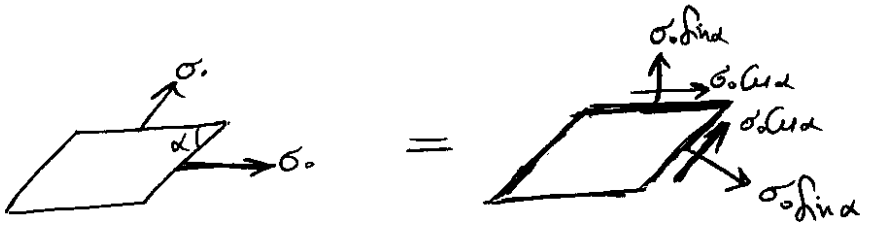


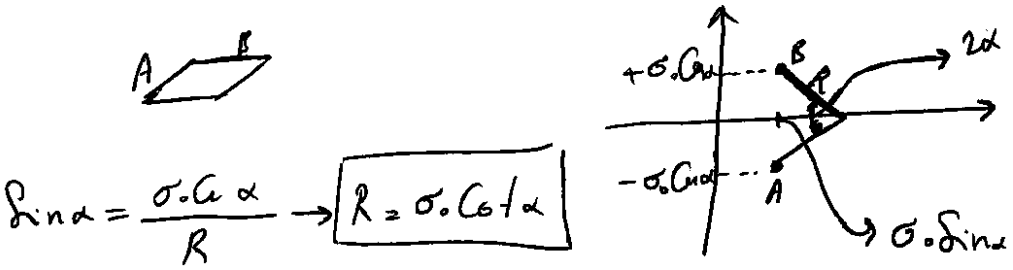
۱) $\sigma_0 Cos\alpha$

۲) $\sigma_0 Cos^2 \alpha$

۳) $\sigma_0 Cotg^2 \alpha$

۴) $\sigma_0 Cotg\alpha$



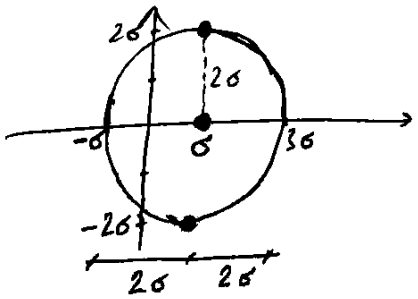


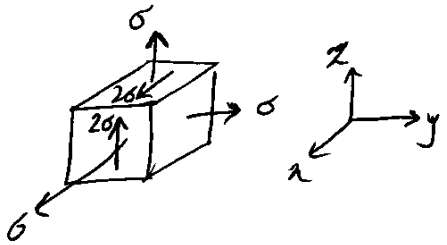
$$\sin\alpha = \frac{\sigma_0 \cos\alpha}{R} \rightarrow \boxed{R = \sigma_0 \cos\alpha}$$

آزاد ۸۳

۴۲- تانسور تنش در نقطه ای از سازه بصورت $[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 2\sigma \\ 0 & \sigma & 0 \\ 2\sigma & 0 & \sigma \end{bmatrix}$ می باشد. تنشهای اصلی در آن نقطه کدامند؟

۱) $3\sigma, \sigma_9 - \sigma$ ۲) $\sigma, 0, \sigma$ ۳) σ, σ, σ ۴) $2\sigma, 2\sigma_9 - \sigma$



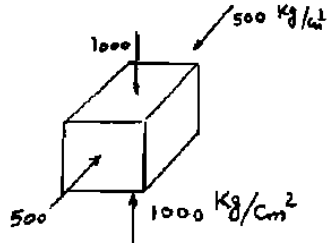


۸-دایره مورتنش (3D)

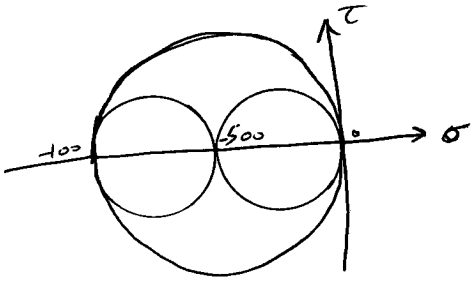
سراسری ۸۱

۴۳- به یک المان مکعبی شکل از یک جسم، تنشهای محوری دوبعدی مطابق شکل اعمال شده است. حداکثر تنش برشی در این مکعب چند کیلوگرم بر سانتی‌متر مکعب می‌باشد؟

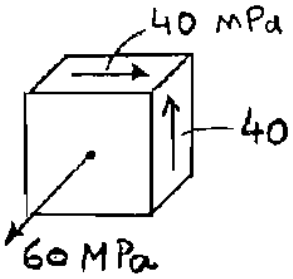
۱) ۲۵۰
۲) ۵۰۰
۳) ۷۵۰
۴) ۱۰۰۰



$$\tau = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} = \frac{0 - (-1000)}{2} = 500$$



سراسری ۸۲



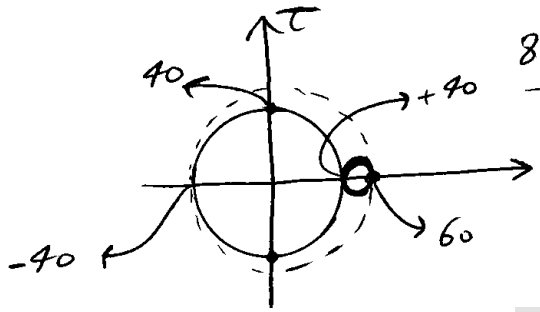
۳۹- در المان شکل روبرو تنش های اصلی بر حسب MPa چقدر می باشند؟

۱) ۸۰ ، صفر، ۲۰-

۲) ۶۰ ، ۴۰ ، ۴۰-

۳) ۶۰ ، ۴۰ ، ۴۰

۴) ۸۰ ، ۶۰ ، صفر



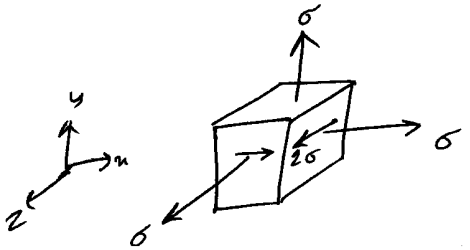
سراسری 82

گزینه ۲

مثال (آزاد ۸۳)

۴۲- تانسور تنش در نقطه ای از سازه بصورت $[\sigma_{ij}]=\begin{bmatrix}\sigma & 0 & 2\sigma\\ 0 & \sigma & 0\\ 2\sigma & 0 & \sigma\end{bmatrix}$ می باشد. تنشهای اصلی در آن نقطه کدامند؟

۱) $3\sigma,\sigma_0-\sigma$ ۲) $\sigma,0,\sigma$ ۳) σ,σ,σ ۴) $2\sigma,2\sigma_0-\sigma$



(گزینه ۱)

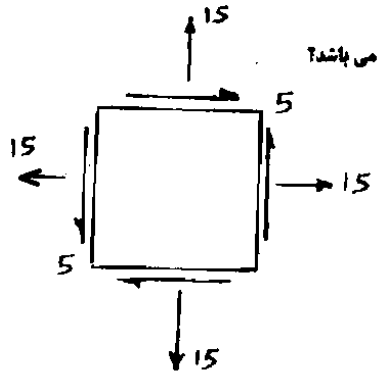
در صفحه xz

$\begin{cases}\sigma_1+\sigma_2=2\sigma\\ \sigma_1\sigma_2=\sigma^2-4\sigma^2=-3\sigma^2\end{cases}$ ← $\begin{cases}\sigma_1=3\sigma\\ \sigma_2=-\sigma\end{cases}$

$\sigma_2=\sigma$

سراسری ۸۳

۵۶- وضعیت تنش در یک المان مطابق شکل روبرو می باشد. مقدار تنش برشی حداکثر مطلق در نقطه مورد نظر چه مقدار می باشد؟



۱) ۰

۲) ۵

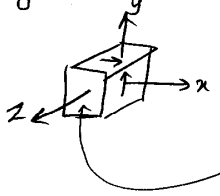
۳) ۱۵

۴) ۱۰

تنش برشی حداکثر مطلق را خواسته است (بعدی)

$\begin{cases}\sigma_1+\sigma_2=50\\ \sigma_1\sigma_2=15^2-5^2=200\end{cases}\rightarrow \sigma_1=10,\ \sigma_2=20 \rightarrow \tau_{max}=\frac{20-0}{2}=10$

نکته: در تست‌های المان 3D معمولاً یکی از صفحات، صفحه اصلی است یعنی در یکی از صفحات تنش برشی صفر است

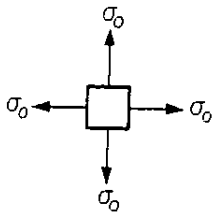


✓ در این صورت تنش‌های اصلی در صفحه دیده را با فرمول‌های $\begin{cases}\sigma_x+\sigma_y=\sigma_1+\sigma_2\\ \sigma_x\sigma_y-\tau_{xy}^2=\sigma_1\sigma_2\end{cases}$ حساب می‌کنیم

نکته: اگر تنش‌های اصلی را داشته باشیم $\tau_{max}=\frac{\sigma_{max}-\sigma_{min}}{2}$

مثال

در المان زیر تنش برشی ماکزیمم در صفحه المان و تنش برشی ماکزیمم واقعی کدامند؟

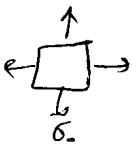


۱) σ_0 و σ_0

۲) ۰ و σ_0

۳) ✓ ۰ و $\frac{\sigma_0}{2}$

۴) $\frac{\sigma_0}{2}$ و $\frac{\sigma_0}{2}$



در صفحه المان ✓ $\tau_{max}=\frac{\sigma_0-\sigma_0}{2}=0$

واقعی ✓ $\tau_{max}=\frac{\sigma_0-0}{2}=\frac{\sigma_0}{2}$

مثال

تانسور تنش در نقطه‌ای از یک سازه بصورت $[\sigma_{ij}]=\begin{bmatrix}25 & 15 & 0\\ 15 & 25 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} MPa$ می‌باشد.

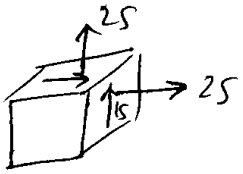
در این نقطه مقدار تنش برشی ماکزیمم چقدر است؟

۱) $10MPa$

۲) $15MPa$

۳) ✓ $20MPa$

۴) $25MPa$



$\begin{cases}\sigma_1+\sigma_2=50\\ \sigma_1\sigma_2=25^2-15^2=400\end{cases}\Leftarrow\begin{cases}\sigma_1=40\\ \sigma_2=10\end{cases}\Rightarrow\tau_{max}=\frac{40-0}{2}=20$

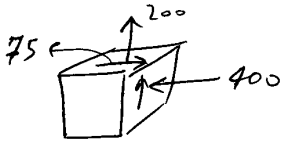
۹-دایره مورکرنش

تنها تفاوت آن با تنش: کرنش برشی را در دایره دو برابر درنظر می گیریم

سراسری ۸۲

۴۳- در صورتی که در یک وضعیت کرنش صفحه ای $\varepsilon_x = -400*10^{-6}$ ، $\varepsilon_y = 200*10^{-6}$ و $\gamma_{xy} = 150*10^{-6}$ باشد، مطلوبست محاسبه حداکثر کرنش برشی مطلق.

۱) $100*10^{-6}$ ۲) $200*10^{-6}$ ۳) $76*10^{-6}$ ۴) $618*10^{-6}$



باید کرنش ها را اصلاح کنیم

$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = -200$

$\varepsilon_1 \varepsilon_2 = -80000 - 75^2 = 85625$ → $\varepsilon_1 = 209.23$, $\varepsilon_2 = -409.23$

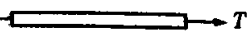
$\gamma_{max} = \left(\frac{209.23 - (-409.23)}{2}\right) \times 2 = 618.46$

مثال

میله‌ای تحت اثر نیروی محوری کششی T قرار دارد. اگر کرنش محوری ε_x و ضریب پواسون ν باشد کرنش برشی ماکزیمم در میله چقدر است؟

$\begin{cases} \varepsilon_x = \varepsilon_x \\ \varepsilon_y = -\nu \varepsilon_x \end{cases}$

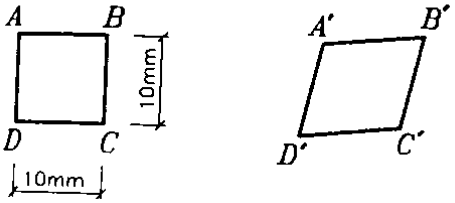
$\gamma_{max} = 2\left(\frac{\varepsilon_x + \nu \varepsilon_x}{2}\right) = \varepsilon_x + \nu \varepsilon_x$



۱) $\frac{\varepsilon_x(1-\nu)}{2}$ ۲) $\frac{\varepsilon_x(1+\nu)}{2}$ ✓ ۳) $\varepsilon_x(1-\nu)$ ۴) $\varepsilon_x(1+\nu)$

مثال

در شکل زیر المان مربع پس از بارگذاری به المان متوازی‌الاضلاع تبدیل می‌شود، بصورتیکه ضلع AB به میزان ۸ میکرومتر و ضلع AD به میزان ۴ میکرومتر افزایش طول می‌یابد، همچنین زاویه رأس A به میزان 3×10^{-4} رادیان بطور متقارن افزایش می‌یابد. کرنش برشی ماکزیمم چقدر است؟



۱) 250μ ۲) $360/6\mu$ ۳) 500μ ✓ ۴) $721/1\mu$

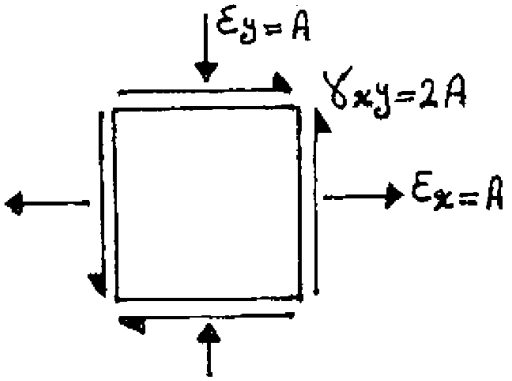
$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{8\times10^{-6}}{10^{-2}} = 8\times10^{-4} \\ \varepsilon_y = \frac{4\times10^{-6}}{10^{-2}} = 4\times10^{-4} \\ \gamma_{xy} = 3\times10^{-4} \rightarrow \varepsilon_{xy} = 1.5\times10^{-4} \end{cases}$ ⇒ $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 12$, $\varepsilon_1 \varepsilon_2 = 32 - 1.5^2 = 23$ ⇒ $\varepsilon_1 = 8.5$, $\varepsilon_2 = 3.5$ ⇒ $\gamma = \left(\frac{8.5-3.5}{2}\right) \times 2 = 5$

راحل دوم ⇒ $\gamma = 2R = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \times 2 = 5$

سراسری ۸۸

۵۸- در المان نشان داده شده، در حالت تنجش مسطح، حداکثر کرنش (تنجش) برشی کدام است؟

۱) $2\sqrt{2}A$
۲) $\sqrt{2}A$
۳) $2A$
۴) $2\sqrt{3}A$



$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_1+\varepsilon_2 &= 0\\ \varepsilon_1\varepsilon_2 &= -A^2 - A^2 = -2A^2\end{aligned}\right\}$$

$$\rightarrow \varepsilon_1 = \sqrt{2}A$$
$$\varepsilon_2 = -\sqrt{2}A$$

$$\rightarrow \gamma_{max} = 2\left(\frac{\sqrt{2}A+\sqrt{2}A}{2}\right) = 2\sqrt{2}A$$

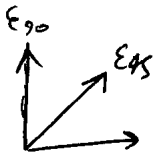
۱۰-گلبرگ کرنش

$$\varepsilon_0 + \varepsilon_{90} + \gamma_{xy} = 2\varepsilon_{45}$$

مثال

کرنشهای اندازه‌گیری شده در راستای ۰° و ۴۵° و ۹۰° در یک نقطه از سازه تحت اثر یک بارگذاری بترتیب برابر $-\varepsilon_0$ و $6\varepsilon_0$ و $5\varepsilon_0$ می‌باشد. در این نقطه کرنشهای اصلی کدامند؟

۱) $5\varepsilon_0$ و $-\varepsilon_0$
۲) $6\varepsilon_0$ و $-2\varepsilon_0$
۳) $7\varepsilon_0$ و $-3\varepsilon_0$
۴) $8\varepsilon_0$ و $-4\varepsilon_0$



$$\varepsilon_{45} = \frac{\varepsilon_0+\varepsilon_{90}}{2} + \frac{\gamma_{xy}}{2} \Rightarrow 6\varepsilon_0 = \frac{-\varepsilon_0+5\varepsilon_0}{2} + \frac{\gamma_{xy}}{2} \rightarrow \gamma_{xy} = 8\varepsilon_0$$

$$\left\{\begin{aligned}\varepsilon_x &= -\varepsilon_0\\ \varepsilon_y &= +5\varepsilon_0\\ \gamma_{xy} &= 8\varepsilon_0\end{aligned}\right. \longrightarrow \left.\begin{aligned}\varepsilon_1+\varepsilon_2 &= 4\varepsilon_0\\ \varepsilon_1\varepsilon_2 &= -5\varepsilon_0^2 - 16\varepsilon_0^2 = -21\varepsilon_0^2\end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{aligned}\varepsilon_1 &= -3\varepsilon_0\\ \varepsilon_2 &= 7\varepsilon_0\end{aligned}$$

$$\varepsilon_{max} = \underbrace{\frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2}}_{\text{مرکز دایره}} + \underbrace{\sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}}_{\text{شعاع}} = 7\varepsilon_0$$

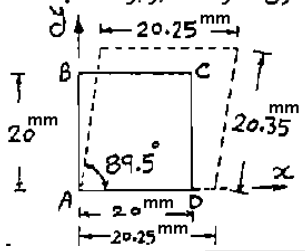
راحل دوم:

$\varepsilon_{min} =$ = − = $= -3\varepsilon_0$

سراسری ۸۲

۴۰- صفحه مربع شکل ABCD به صورت خط چین تغییر شکل نموده است. کرنش محوری ایجاد شده در طول قطر AC برابر است با:

۱) ۰,۰۱۶۶
۲) ۰,۰۲۳۱
۳) ۰,۰۳۲۱
۴) ۰,۰۱۹۴



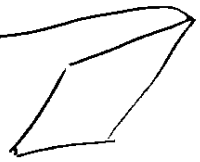
$$\varepsilon_x = \frac{0.25}{20} = 0.0125$$

$$\varepsilon_y = \frac{(20.35 \times \cos 0.5^\circ - 20)}{20} = 0.0175$$

$$\gamma_{xy} = \frac{0.5 \times 2\pi}{360} = 0.00827$$

$$\varepsilon_{45^\circ} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \gamma_{xy}}{2} = 0.01913$$

راحل دوم:



مختصات این نقطه را با هندسه بدست آورید

$$\varepsilon = \frac{AC \text{ طول جدید} - 20\sqrt{2}}{20\sqrt{2}} = 0.019422$$

۱۱- مخازن

سراسری ۸۰

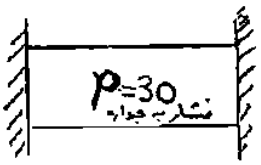
استوانه جدار نازک طویلی به قطر $100mm$ و ضخامت ۳ میلیمتر، تحت اثر فشار داخلی $6MPa$ قرارگرفته‌است. تنش طولی ایجاد شده در آن چند MPa است؟ $(\nu = 0,3)$

۱) صفر ۲) ۳۰ ۳) ۵۰ ۴) ۱۰۰

گزینه ۲

سراسری ۸۱

۳۷- استوانه جدارنازکی ازطرف دو قاعده بین دو تکیه‌گاه صلب مطابق شکل مقابل قرار گرفته است . قطر استوانه ۸۰cm ، ضخامت جداره آن ۲cm، $p = ۳۰ \frac{kg}{cm^۲}$ و $\nu = ۰/۳$ می‌باشد. تنش‌های مماسی و طولی برحسب $\frac{kg}{cm^۲}$ بترتیب کدام است ؟

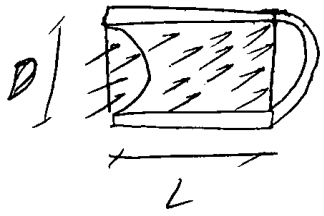


۱) ۶۰۰ و ۱۸۰

۲) ۶۰۰ و صفر

۳) ۶۰۰ و ۳۰۰

۴) ۹۰ و ۳۰۰



$$\sigma_c = \frac{F}{2Lt} = \frac{(PL \times 2R)}{2Lt} = \frac{PR}{t} \Rightarrow \sigma_c = \frac{30 \times 40}{2} = 600$$

$$\varepsilon_l = 0 \rightarrow \frac{\sigma_l}{E} - \nu\frac{\sigma_c}{E} = \frac{\sigma_l}{E} - \frac{0.3 \times 600}{E} = 0 \rightarrow \boxed{\sigma_l = 180}$$

سراسری ۸۳

۴۶- یک لوله طویل و مستقیم انتقال گاز در داخل زمین و زیر اثر فشار داخلی $۱۰ kg/cm^۲$ قرار گرفته است. قطر لوله ۵۰ سانتیمتر و ضخامت جدار آن یک سانتیمتر است. تنش طولی در آن چند کیلوگرم بر سانتیمتر مربع است. $E = ۲ \times ۱۰^۶ kg/cm^۲$ ، $\nu = ۰/۳$

۱)صفر ۲) ۱۵۰ ۳) ۲۵۰ ۴) ۵۰۰

از آنجا که طول لوله بینهایت است و در داخل خاک قرار دارد، تغییرطول آن باید صفر باشد:

$$\sigma_c = \frac{PR}{t} \Rightarrow \sigma_c = \frac{10 \times 50}{2} = 250$$

$$\varepsilon_l = 0 \rightarrow \frac{\sigma_l}{E} - \nu\frac{\sigma_c}{E} = \frac{\sigma_l}{E} - \frac{0.3 \times 250}{E} = 0 \rightarrow \boxed{\sigma_l = 75}$$

(در گزینه ها نیست)

سراسری ۷۷

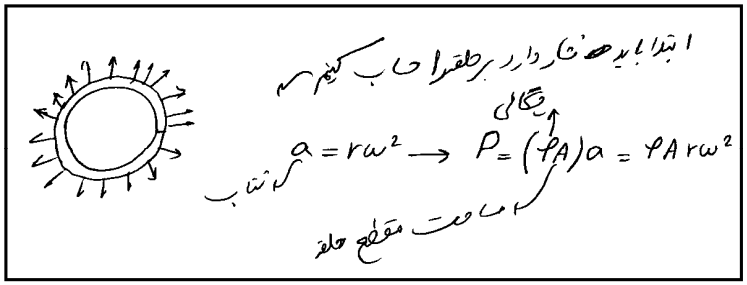
۴ـ اگر قطر یک مخزن استوانه‌ای جدار نازک با ضخامت ثابت و رفتار خطی که تحت فشار V اتمسفر قرارگرفته‌است دو برابر شود تنش کششی در جدار آن ...

۱) بوجود نمی‌آید ۲) تفاوتی نمی‌کند. ۳) دو برابر می‌شود. ۴) نصف می‌شود.

آزاد۸۶

۴۷- حلقه ای به شعاع r و چگالی ρ حول محور ثابتی که از مرکز آن می گذرد با سرعت زاویه ای w می چرخد. تنش محیطی ایجاد شده در حلقه چقدر است؟

۱) $2\rho r^2 w^2$ ۲) $\rho r^2 w^2$ ۳) $\frac{1}{\pi}\rho r^2 w^2$ ۴) $\Pi \rho r^2 w^2$



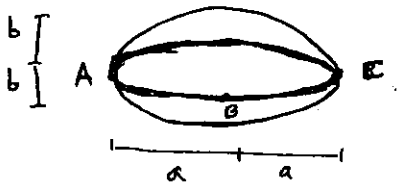
آزاد ۸۵

۶۳- حلقه ای به شعاع r و چگالی ρ حول محور ثابتی که از مرکز آن می گذرد با سرعت زاویه ای W می چرخد. تنش محیطی ایجاد شده در حلقه چقدر است؟

۱) $\frac{1}{\pi}\rho r^2 w^2$ ۲) $\rho r^2 w^2$ ۳) $2\rho r^2 w^2$ ۴) $\pi \rho r^2 w^2$

آزاد ۸۵

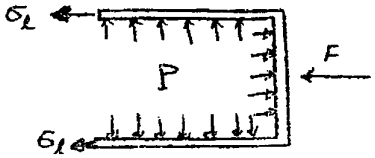
۶۲- در مخزن بیضوی زیر که حاصل دوران بیضی موجود در صفحه حول قطر AC می باشد تحت اثر فشار داخلی P تنش کششی افقی در B چقدر است؟ (ضخامت مخزن ثابت و برابر t می باشد.)



۱) $\frac{Pb}{2t}$ ۲) $\frac{Pa}{2t}$ ۳) $\frac{Pa^2}{2bt}$ ۴) $\frac{Pb^2}{2at}$

آزاد ۸۵

۶۵- در شکل زیر فاصله دو دیوار دقیقاً مساوی طول مخزن در فشار صفر است. اگر فشار گاز داخل مخزن به P رسانده شود چه نیروی بین مخزن و دیوار رد و بدل می‌شود؟ (شعاع داخلی مخزن r و ضریب پواسون ν می‌باشد).

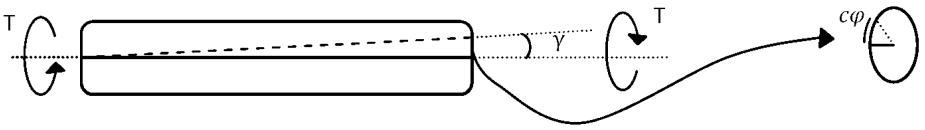


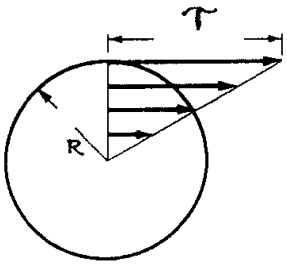
۱) $F = \pi r^2 P$ ۲) $F = (1-\nu)\pi r^2 P$

۳) $F = (1-2\nu)\pi r^2 P$ ۴) $F = (1-\nu^2)\pi r^2 P$

۱۲-پیچش

مقاطع دایروی:





$$\tau = \frac{Tr}{J}$$

$$\varphi = \frac{TL}{GJ}$$

مقاومت پیچشی= $\frac{\tau_y J}{r}$

سختی پیچشی= $\frac{GJ}{L}$

T: لنگر پیچشی

J: ممان پیچشی مقطع

L: طول عضو

G: مدول برشی $(G = \frac{E}{2(1+\upsilon)})$

φ: زاویه پیچش

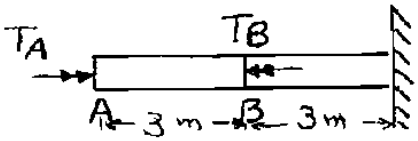
-مواد شکل پذیر در پیچش در صفحه عمود بر امتداد خود خراب می شوند.

-مواد ترد در پیچش در صفحه ای که با محور طولی زاویه ۴۵ درجه می سازدعمود بر امتداد خود خراب می شوند.

سراسری ۸۲

۳۶- میله فولادی با مقطع دایره ای به قطر ۶۰ mm مطابق شکل تحت لنگرهای پیچشی در نقاط A و B قرار گرفته است. لنگر پیچشی اعمال شده در نقطه B برابر است با ۸π کیلونیوتن متر. اگر دوران مقطع B صفر باشد دوران مقطع A چقدر است؟ $G = ۸\times۱۰^{۴}$ MPa

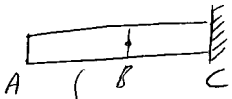
۱) ۰,۴۹۴Rad
۲) ۰,۵۳۸Rad
۳) ۰,۶۷۲Rad
۴) ۰,۷۴۱Rad



$\Delta_B = 0 \longrightarrow F_{BC} = 0 \longrightarrow T_A = T_B = 8\pi \times 10^3$

مانند نیروی محوری عمل می کنیم ؛

$\varphi_A = \frac{T_A L}{GJ} = \frac{8\pi \times 3 \times 10^3}{8\times10^{10} \times \frac{\pi}{2} \times 0.03^2} = 0.141 \text{ rad}$



$J = \frac{\pi}{2} \times 0.03^4$

سراسری ۸۳

۵۸- اگر در داخل تیر طره ای استوانه ای شکل به قطر ۲۰^{cm} که ممان پیچشی $\pi(t-m)$ در انتهای آن اثر می کند، سوراخی هم مرکز در طول تیر ایجاد نماییم بطوریکه زاویه پیچشی آن ۵٪ افزایش یابد، حداکثر تنش برشی ایجاد شده در تیر چه مقدار می گردد؟

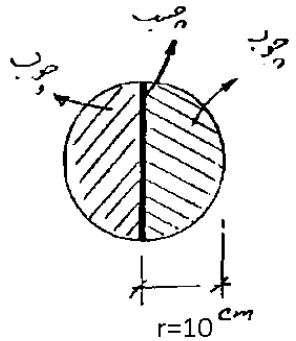
۱) $۱۰۰ \frac{kg}{cm^2}$
۲) $۱۹۰ \frac{kg}{cm^2}$
۳) $۲۰۰ \frac{kg}{cm^2}$
۴) $۲۱۰ \frac{kg}{cm^2}$

$\frac{J_1}{J_2} = 1.05$ زاویه پیچش برابر است با $\phi = \frac{TL}{GJ}$ که ۵٪ افزایش یافته است بنابراین

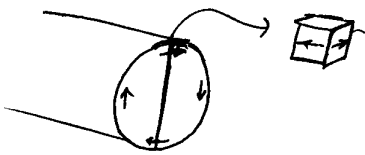
$\tau = \frac{TR}{J}$ بنابراین مقدار تنش حداکثر نیز ۵٪ افزایش می یابد ⟸ $\tau = 1.05 \times \frac{\pi \times 10^5 \times 10}{\frac{\pi}{2} \times 10^4} = 210$

سراسری ۸۳

۵۴- مضوی با مقطع دایره ای مطابق شکل تحت کوپل پیچشی T قرار گرفته است. مقطع عضو از دو نیم دایره با جنس چوب که توسط چسب به یکدیگر متصل شده تشکیل شده است در صورتی که تنش مجاز چوب $10 kg/cm^2$ و تنش مجاز چسب $4 kg/cm^2$ باشد. مطلوب است حداکثر کوپل پیچشی مجاز مقطع $J = 7854 cm^4$



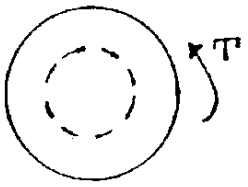
۱) ۱۲۵۷ kg.cm
۲) ۳۱۴۲ kg.cm
۳) ۷۸۵۴ kg.cm
۴) ۱۹۶۳۵ kg.cm



این دو تنش با هم برابرند $\tau_{\text{چسب}} = \frac{TR}{J} = \frac{T \times 10}{7854} < 4 \rightarrow T_{\text{مجاز}} = 3141.6 kg.cm$

سراسری ۸۳

۵۵- چه سهمی از کوپل پیچشی T توسط بخش مرکزی مقطع که دارای نصف مساحت دایره است تحمل می کردد؟

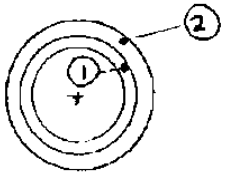


۱) $\frac{1}{2}$
۲) $\frac{3}{4}$
۳) $\frac{1}{4}$
۴) $\frac{1}{16}$

$A_1 = A/2 \rightarrow \pi r^2 = \frac{\pi R^2}{2} \Rightarrow r = R/\sqrt{2} \Rightarrow \frac{J \text{ مرکزی}}{J \text{ کل}} = \frac{\frac{\pi}{2} \times r^4}{\frac{\pi}{2} \times R^4} = \frac{1}{4}$ سهم مساحت که برابر J می باشد:

سراسری ۸۳

۴۵- میله ای از دو جنس مطابق شکل تشکیل یافته است بطوری که $G_2 = 2G_1$. شعاع دایره ها بترتیب ۲۰،۲۵ و ۱۸ میلیمتر می باشد. زیر اثر پیچش نسبت تنش جنس ۲ به تنش جنس ۱ چقدر است؟

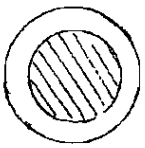


۱) ۱/۲۵ ۲) ۲ ۳) ۲/۵ ۴) $\frac{۲۵}{۹}$

اگر جنس میله یکنواخت بود در دو قسمت $\frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{25}{20}$ و وقتی G و E ثابت باشند، مقدار تنش هم به همان نسبت تغییر می کند بنابراین $\frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{R_2 \times G_2}{R_1 \times G_1} = \frac{25 \times 2G_1}{20 \times G_1} = 2.5$

سراسری ۸۴

۵۹- میله‌ای توپر به مقطع دایره به شعاع R زیر اثر لنگر پیچشی T است. مساحت هاشور خورده داخلی به شعاع چقدر باشد تا لنگر پیچشی $\frac{T}{2}$ در آن قرار گیرد؟



۱) $\frac{R}{2}$

۲) $\frac{R}{\sqrt[4]{2}} = ۰/۷۹۴\,R$

۳) $\frac{R}{\sqrt[4]{2}} = ۰/۸۴۱\,R$

۴) $\frac{R}{\sqrt{2}} = ۰/۷۰۷\,R$

$$\frac{J_{\text{هاشور}}}{J_{\text{کل}}} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{\frac{\pi}{2}r^4}{\frac{\pi}{2}R^4} = \frac{1}{2} \rightarrow r = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

سراسری۸۵

۵۸- دو میله A و B به مقطع دایره موجود است. طول و قطر میله A دو برابر طول و قطر میله B می‌باشد. لنگر پیچشی 2T به میله A و لنگر پیچشی T به میله B وارد می‌شود. نسبت تنش‌های برشی ماکزیمم میله‌ها چقدر است $\left(\frac{\tau_{max\,A}}{\tau_{max\,B}}\right)$؟

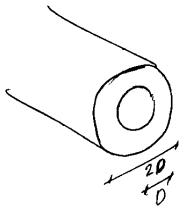
۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{8}$ ۴) $\frac{1}{4}$

$$\frac{\tau_A}{\tau_B} = \frac{(2T)(2L)/\left(\frac{\pi}{2}\times(2R)^4\right)}{T\times L/\left(\frac{\pi}{2}\times R^4\right)} = \frac{1}{4}$$

آزاد ۸۳

۲۳- محور فولادی توپری به قطر D را داخل محور فولادی دیگری به قطر داخلی D و قطر خارجی 2D قرار می دهیم و دو محور را به صفحه صلبی جوش می دهیم به صورتیکه در پیچش، پیچش هردو محور مقدار یکسانی است. تحت اثر کوپل پیچشی T نسبت تنش برشی ماکزیمم محور توخالی به محور توپر چقدر است.

۱) 1.5 ۲) 2 ۳) 3.5 ۴) 7.5



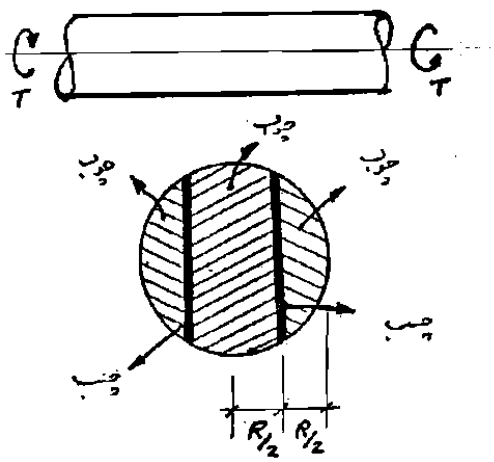
$$\tau_1 = \frac{TR}{J}$$
$$\tau_2 = \frac{T(2R)}{J}$$

سراسری۸۵

۶- عضوی مطابق شکل تحت کوپل پیچشی T قراردارد. مقطع از سه قسمت چوبی که توسط چسب به یکدیگر متصل شده‌اند، تشکیل یافته است. مطلوبست حداکثر کوپل پیچشی قابل تحمل توسط آن:

تنش مجاز برشی چسب = $\tau\ \frac{kg}{cm^2}$

تنش مجاز برشی چوب= $۵\tau\ \frac{kg}{cm^2}$



۱) $۲\frac{J}{R}.\tau$

۲) $\frac{۲}{۳}.\frac{J}{R}.\tau$

۳) $\frac{۵}{\sqrt{۳}}.\frac{J}{R}.\tau$

۴) $\frac{۲}{\sqrt{۳}}.\frac{J}{R}.\tau$

سراسری۷۴

۴ـ کدامیک از گزینه‌های زیر صحیح می‌باشد؟

۱) میله‌ای از مصالح ترد در پیچش خالص در مقطعی با شیب ۴۵° نسبت به محور طولی و در کشش در مقطعی عمود بر محور طولی دچار گسیختگی می‌گردد.

۲) میله‌ای از مصالح نرم در کشش در مقطعی عمود بر محور میله و در پیچش خالص در مقطعی با شیب ۴۵° نسبت به محور طولی دچار گسیختگی می‌گردد.

۳) میله‌های ساخته شده از مصالح نرم در کشش تحت زاویه ۶۰° نسبت به محور طولی و در پیچش در مقطعی عمود بر محور طولی گسیخته می‌گردند.

۴) هیچکدام از موارد بالا.

آزاد۸۹

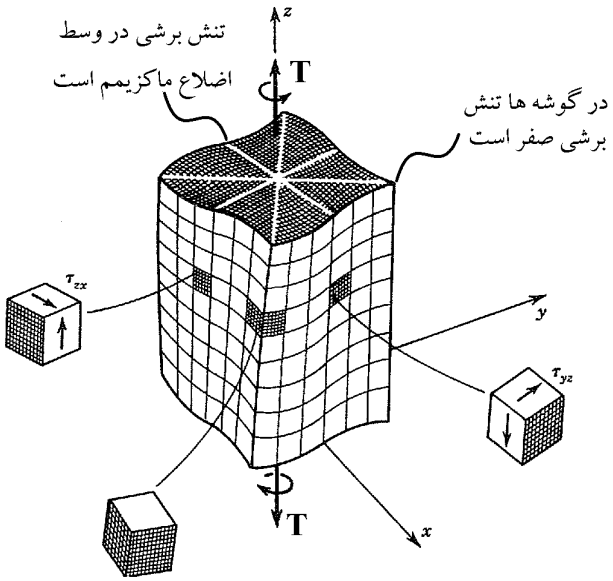
۵۱- یک میله فولادی به قطر d_1 درون یک لوله توخالی برنجی به قطر داخلی d_1 و قطر خارجی d_2 قرار داده شده است و میله یکپارچه‌ای بدست آمده است. برای اینکه تحت اثر یک لنگر پیچشی، میله و لوله لنگرهای پیچشی یکسانی را تحمل کنند، نسبت $\frac{d_2}{d_1}$ چقدر باید باشد؟ $(G_{St}=2G_{Br})$

۱) $\sqrt[4]{3}$ ۲) $\sqrt[4]{2}$

۳) $\sqrt[4]{6}$ ۴) $\sqrt{2}$

مقاطع غیر دایروی:

-مقاطع پس از پیچش مسطح باقی نمی مانند و اگر در مقابل تابیدگی مقید شده باشند علاوه بر تنش های برش، تنش های طولی نیز خواهیم داشت.



-تنش های برشی در گوشه های تیز صفر است

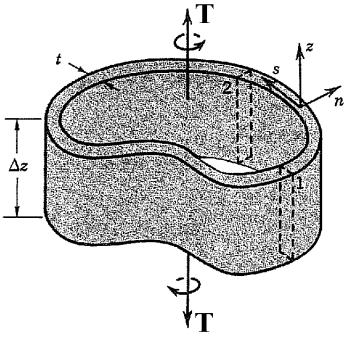
-تنش برشی ماکزیمم معمولا در وسط اضلاع اتفاق می افتد

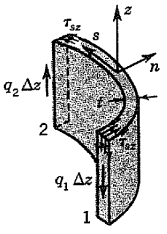
۱۲-۱-مقاطع جدارنازک

مقاطع جدار نازک بسته:

A_m: مساحت محصور در خط مرکزی

P: محیط



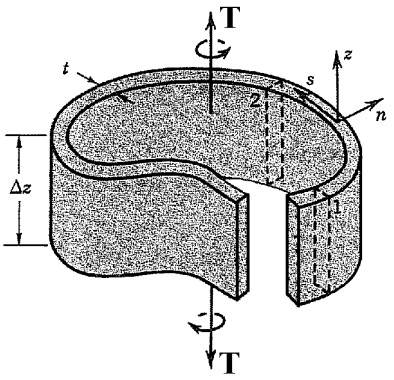


$$\tau=\frac{T}{2A_m t}$$

$$J=\frac{4A_m^2}{\int\frac{ds}{t}}=\frac{4A_m^2 t}{P}$$

-در جدارنازک بسته هرچه شکل مقطع به دایره نزدیکتر باشد مقدار تنش پیچشی کاهش و مقاومت پیچشی افزایش می یابد

مقاطع جدار نازک باز:

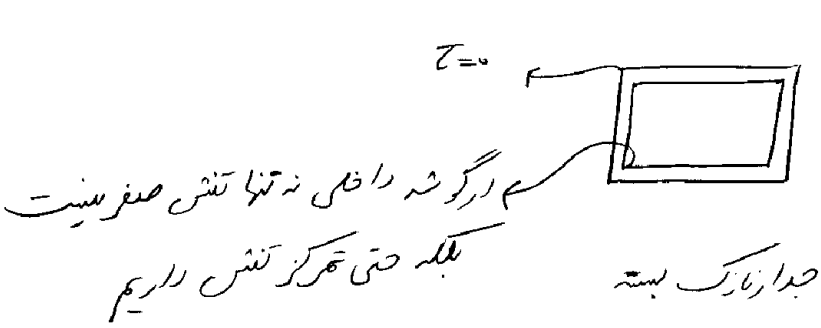


$$\tau=\frac{3Tt_i}{\sum L_i t_i^3}=\frac{3T}{Lt^2}$$

$$J=\sum\frac{L_i t_i^3}{3}$$

- در جدارنازک باز مقدار تنش پیچشی و مقاومت پیچشی ربطی به شکل مقطع ندارد

نکته:

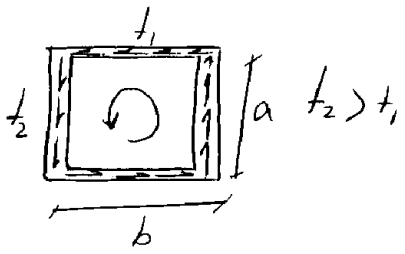


✓ در گوشه داخلی نه تنها تنش صفر نیست بلکه حتی تمرکز تنش داریم

جدار نازک با ضخامت های مختلف:

$$\tau_{max}=\frac{T}{2A_m t_1}$$

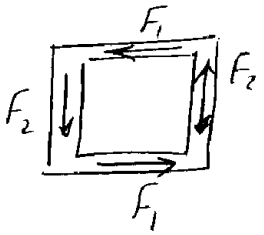
✓ تنش در جدار نازک تر بیشتر است



$$\frac{\tau_1}{t_1}=\frac{\tau_2}{t_2}$$ ✓

سئوال: اگر تنش ها را با یک نیروی F معادل کنیم مقدار F_1 و F_2 چقدر است؟

$$F_1=\tau_1\times(bt_1)$$



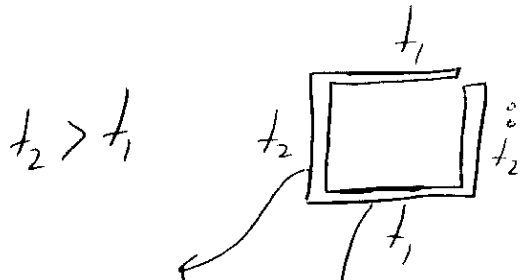
سئوال: ممان پیچشی که این نیروها ایجاد می کنند چقدر است؟

$$M=F_1\times a=\tau_1(bt_1)a$$

$$=\left(\frac{T}{2A_m t_1}\right)(bt_1)a=\frac{T}{2(ab)}(ab)=\frac{T}{2}$$

یادآوری: در جدار نازک بسته ممان اینرسی را نمی توان به نسبت J بدست آورد چون فرمول J برای ضخامت های مختلف نداریم بلکه J برای کل مقطع است $\left(J=\frac{4A_m^2 t}{p}\right)$

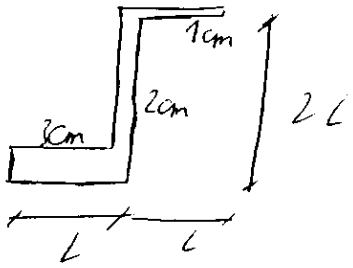
حداکثر تنش برشی در جدار نازک باز با ضخامت‌های مختلف:



$$\tau = \frac{T t_2}{\frac{1}{3} L t_2^3} \qquad \tau = \frac{T t_1}{\frac{1}{3} L t_1^3}$$

برعکس جدار نازک بسته که تنش ماکزیمم در نازک‌ترین جدار اتفاق می‌افتد در جدار نازک باز تنش ماکزیمم در ضخیم‌ترین جدار اتفاق می‌افتد

مثال: سطح مقطع 3 سانتی از T اشکال شده حداکثر تنش برشی در اثر T چقدر است؟

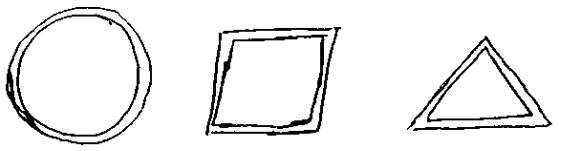


به دست آوردن J سطح می‌پردازیم

$$J = \frac{\frac{1}{3}(3^3 \times L)}{\frac{1}{3}(3^3 \times L + 2^3 \times (2L) + 1^3 \times L)}$$

$$= \frac{9T}{26}$$

مقاومت پیچشی کدام مقطع بیشتر است؟



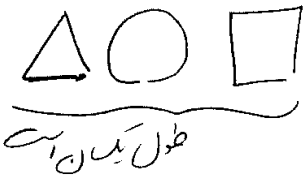
پاسخ: در مقاطع جدار نازک بسته

هرچه شکل مقطع به دایره نزدیک‌تر باشد مقاومت آن بیشتر است

دایره > مربع > مثلث

طول همه یکی است

سوال: مقاومت پیچشی کدام مقطع بیشتر است؟

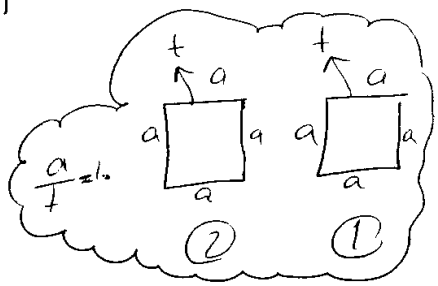


پاسخ: مقاومت هر سه یکسان است

طول یکسان است

(در مقاطع جدارنازک باز شکل مقطع مهم نیست و تنها طول آن مهم است)

سوال: مقاومت پیچشی کدام بیشتر است؟



$$T_1 = \frac{\tau(2t^2)}{3} = \frac{\tau(4at^2)}{3} = \tau\left(\frac{40}{3}t^3\right) = 133\,t^3$$

$$T_2 = \tau(2A_m t) = \tau(2a^2 t) = \tau(200t^3) = 200\,t^3 \checkmark$$

نتیجه: مقاطع بسته مقاومت بالاتری دارند

$$\frac{T_{\text{بسته}}}{\tau_{\text{نازک}}} = \frac{\frac{1}{3}(20)t^2}{\frac{1}{3}(2a)t^2} = 1$$

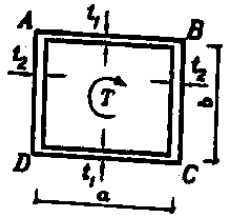
سه نازک بسته ← $T = \tau(2At) =$ خواص پیچشی

سه نازک باز ← $T = \tau\left(\frac{1}{3}Lt^2\right) =$ خواص پیچشی

سه دایره ← $T = \frac{\tau J}{R} =$

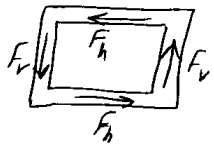
آزاد ۸۶

۴۵- در مقطع قوطی شکل زیر سهم وجه های افقی مقطع در تحمل پیچش چند برابر سهم وجه های قائم مقطع می باشد؟



۴) سهم وجه های افقی و قائم در تحمل پیچش برابر است.

۱) $\frac{a}{b}$ ۲) $\frac{t_1}{t_2}$ ۳) $\frac{at_1}{bt_2}$



برش در جدار افقی $\rightarrow \tau_h = \frac{T}{2A_m t_1} \rightarrow f_h = \tau_h \times (at_1) = \frac{Ta}{2A_m}$

برش در جدار قائم $\rightarrow \tau_v = \frac{T}{2A_m t_2} \rightarrow F_v = \tau_v (bt_2) = \frac{Tb}{2A_m}$

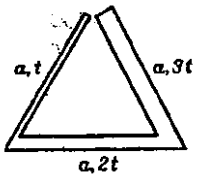
$\Rightarrow$ سهم افقی از $T = F_h \times b = \frac{Tab}{2A_m}$

سهم قائم از $T = F_v \times a = \frac{Tab}{2A_m}$

$\rightarrow$ سهم یکسان دارند

آزاد ۸۶

۴۶- در مقطع جدار نازک مثلثی زیر تنش برشی ماکزیمم تحت اثر لنگر پیچشی T چقدر است؟



۱) $\frac{T}{3at^2}$ ۲) $\frac{T}{6at^2}$ ۳) $\frac{T}{4at^2}$ ۴) $\frac{T}{12at^2}$

$\tau_{max} = \frac{T \times (3t)}{\frac{1}{3}(at^3 + a(2t)^3 + a(3t)^3)} = \frac{T}{6at^2}$ در جدار نازک باز تنش برشی حداکثر در ضخیم ترین قسمت خواهد بود

آزاد ۸۹

۴۸- در استوانه جدار نازک به شعاع متوسط R و ضخامت t تنش کششی و فشاری ماکزیمم تحت اثر لنگر پیچشی T چقدر است؟

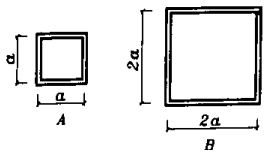
۱) 0 و 0 ۲) $\frac{T}{2\pi R^2 t}$ و $\frac{T}{2\pi R^2 t}$

۳) $\frac{T}{2\pi R^2 t}$ و $\frac{T}{4\pi R^2 t}$ ۴) $\frac{T}{4\pi R^2 t}$ و $\frac{T}{4\pi R^2 t}$

سراسری ۸۰

مقطع A جدار نازک بسته با ضخامت یکسان t و مقطع B جدار نازک باز با ضخامت یکسان t می‌باشد. اگر $t = \frac{a}{20}$ باشد، در مقابل یک لنگر پیچشی یکنواخت، تنش برشی در B، ..... برابر تنش برشی در A است.

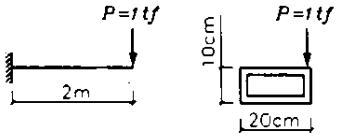
۱) ۱ ۲) ۲۰ ۳) ۴ ۴) ۱۵



$\tau_B = \frac{T}{\frac{1}{3}(8a \times (\frac{a}{20})^2)} = \frac{150T}{a^3}$ $\tau_A = \frac{T}{2a^2(\frac{a}{20})} = \frac{10T}{a^3}$ $\Rightarrow \frac{\tau_B}{\tau_A} = 15$

سراسری ۷۹

تیر طره‌ای با مقطع قوطی شکل تحت تاثیر نیروی $P = 1tf$ با خروج از مرکزیت $10cm$، مطابق شکل مفروض است و $t = 1cm$. ماکزیمم تنش برشی ایجاد شده در تیر چقدر است؟ (ناشی از برش و پیچش تنها)



۱) $\tau = 147/18 \frac{kgf}{cm^2}$ ۲) $\tau = 117/94 \frac{kgf}{cm^2}$

۳) $\tau = 88/21 \frac{kgf}{cm^2}$ ۴) $\tau = 58/97 \frac{kgf}{cm^2}$

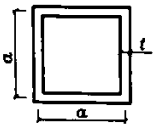
$\tau_V = \frac{VQ}{It} = \frac{1000 \times (20 \times 1 \times 4.5 + 2(4 \times 1 \times 2))}{\frac{1}{12}(20 \times 10^3 - 18 \times 8^3) \times 2} = 58.97 \ kg/cm^2$

$\tau_T = \frac{T}{2tA} = \frac{(1000 \times 10)}{2 \times 1 \times (19 \times 9)} = 29.24$

$\tau = 88.21$

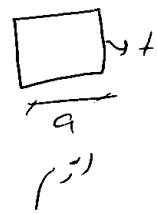
سراسری ۸۰

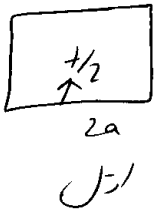
دو مقطع جدار نازک بسته (مطابق شکل روبرو) هستند، که طول ضلع مقطع اول دو برابر مقطع دوم و ضخامت جدار مقطع اول نصف مقطع دوم می‌باشد. اگر $\alpha = \frac{\text{مقاومت پیچشی مقطع اول}}{\text{مقاومت پیچشی مقطع دوم}}$ و $\beta = \frac{\text{صلبیت پیچشی مقطع اول}}{\text{صلبیت پیچشی مقطع دوم}}$ باشد، مقادیر α و β به‌ترتیب کدام است؟



۱) ۱ و ۱
۲) ۲ و ۴
۳) ۲ و ۲
۴) ۲ و ۸

$\tau(2tA_m) =$ مقاومت پیچشی



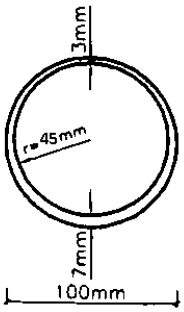


$\Rightarrow \alpha = \frac{2(\frac{t}{2})(2a)^2}{2ta^2} = 2$

$\beta = \frac{J_1}{J_2} = \frac{(4A_m^2 t/p)_1}{(4A_m^2 t/p)_2} = \frac{((2a)^4 t/2)/8a}{(a^4 \times t)/4a} = 4$

سراسری ۸۱

چنانچه لنگر پیچشی برابر با $۲۰۰ N.m$ بر یک لوله جداره نازک با سطح مقطع نشان داده شده با ضخامت متغیر وارد شود حداکثر تنش برشی در مقطع چند مگا پاسگال (MPa) خواهد بود؟



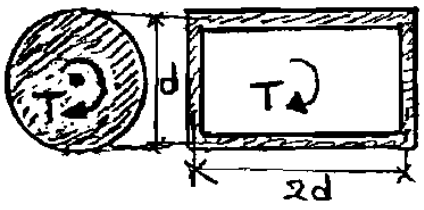
۱) ۴٫۷
۲) ۵٫۲۴
۳) ۷٫۸۳
۴) ۱۰٫۹۷

شعاع میانگین $= 4.5 + \frac{\frac{0.3}{2} + \frac{0.7}{2}}{2} = 4.75$ cm

$\tau = \frac{T}{2A_m t} = \frac{20000}{2(4.75^2 \times \pi) \times 0.5} = 470 \frac{N}{cm^2} = 4.7 MPa$

سراسری ۸۵

۵- در صورتی‌که تنش برشی در هر دو مقطع نشان داده شده یکسان باشند حداقل ضخامت (t_{min}) مقطع مستطیلی چقدر است؟



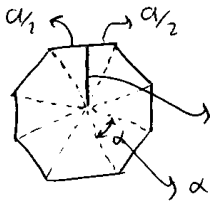
۱) $\frac{\pi d}{۱۲۸}$
۲) $\frac{\pi d}{۶۴}$
۳) $\frac{\pi d}{۳۲}$
۴) $\frac{\pi d}{۱۶}$

$\tau_{دایره} = \frac{T(d/2)}{\frac{\pi}{2}(\frac{d}{2})^4} = \frac{16T}{\pi d^3}$ $\quad \tau_{مستطیل} = \frac{T}{2(d \times 2d)t} = \frac{T}{4td^2}$ $\Rightarrow \tau_1 = \tau_2 \rightarrow \frac{16}{\pi d^3} = \frac{1}{4td^2} \rightarrow t = \frac{\pi d}{64}$

سراسری ۸۳

۵- تنش برشی در میله ای تو خالی جدار نازک با ضخامت t و مقطع n ضلعی منتظم تحت اثر پیچش T چقدر است؟ طول هر ضلع n ضلعی برابر a می باشد.

۱) $\frac{2T\tan\frac{\pi}{n}}{na^2t}$ ۲) $\frac{4\pi T}{n^2a^2t}$ ۳) $\frac{2T\sin\frac{\pi}{n}}{na^2t}$ ۴) $\frac{2T\sin\frac{2\pi}{n}}{na^2t}$



$h=\frac{a}{2}\times\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{a}{2}\cot\left(\frac{\pi}{n}\right)$, $\alpha=\frac{2\pi}{n}$ ⟵ مثلث

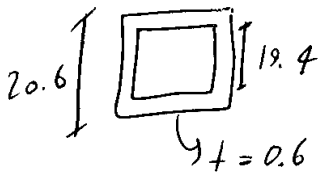
$\longrightarrow A_i=\frac{h\times a}{2}=\frac{a^2}{4}\cot\left(\frac{\pi}{n}\right)$ ⟵ کل مقطع

$\Rightarrow$ کل مساحت $=nA_i=\frac{na^2}{4}\cot\left(\frac{\pi}{n}\right)\Rightarrow\tau=\frac{T}{2A_mt}=\frac{T}{2\frac{na^2}{4}\cot\left(\frac{\pi}{n}\right)t}=\frac{2T\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}{na^2t}$

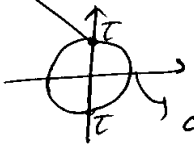
سراسری ۸۸

۶۰- میله‌ای با مقطع قوطی زیر اثر پیچش به مقدار $2\ t.m$ قرار گرفته است.
قوطی دارای ضلع خارجی $20/6\ cm$ و ضلع داخلی $19/4\ cm$ است.
تنش عمودی ایجاد شده در آن بر حسب $\frac{kg}{cm^2}$ چقدر است؟

۱) $\pm 208/3$ ۲) ± 50
۳) صفر ۴) $\pm 416/7$



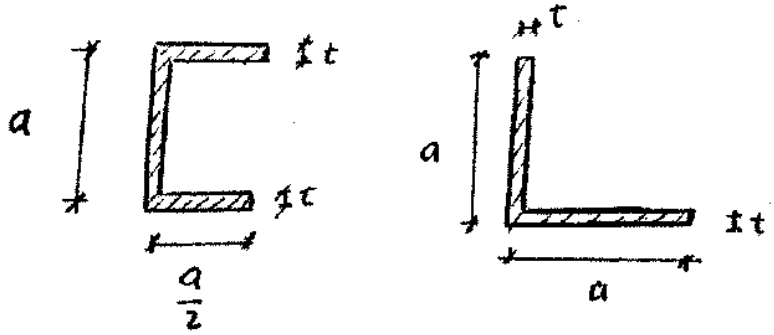
$\tau=\frac{2\times10^5}{2\times20^2\times0.6}=416.66\ kg/cm^2$



$\sigma=\tau=416.66$ ⟵ برای تنش عمودی خواسته است

سراسری۸۹

۵۱- چه رابطه‌ای بین ظرفیت پیچیش مقاطع جدار نازک داده شده، برقرار است؟

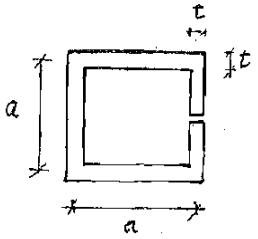


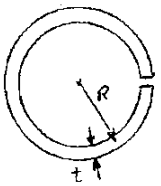
۱) ظرفیت پیچشی هر دو مقطع یکسان است
۲) رابطه‌ای بین ظرفیت پیچشی دو مقطع وجود ندارد
۳) ظرفیت پیچشی مقطع نبشی دو برابر مقطع ناودانی است
۴) ظرفیت پیچشی مقطع ناودانی دو برابر مقطع نبشی است

گزینه ۱

سراسری۸۶

۵۳- مطلوبست تعیین نسبت $\frac{a}{R}$ برای آنکه ظرفیت پیچشی دو مقطع مقابل یکسان باشد:





۱) $\frac{a}{R}=\pi$

۲) $\frac{a}{R}=\frac{\pi}{۲}$

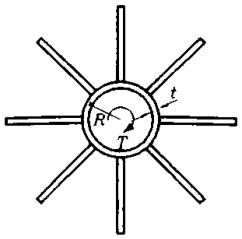
۳) $\frac{a}{R}=۲\pi$

۴) $\frac{a}{R}=\frac{۳\pi}{۲}$

$\frac{1}{3}(4a)t^2=\frac{1}{3}(2\pi R)t^2 \rightarrow \frac{a}{R}=\frac{\pi}{2}$

سراسری۷۷

۵- میله‌ای با سطح مقطع نشان داده شده در شکل تحت‌تأثیر لنگر پیچشی T قرار دارد. شعاع متوسط دایره R و ضخامت آن t می‌باشد. ضخامت هر یک از ورقهای اتصالی به دایره جدار نازک t و طول آن $۲\pi R$ می‌باشد. چنانچه نسبت $\frac{R}{t}=۱۰$ باشد، چند درصد لنگر پیچشی T توسط جدارهٔ نازک دایره‌ای شکل تحمل خواهد شد؟



۱) ٪۹۱٫۲

۲) ٪۹۵٫۳

۳) ٪۹۷٫۴

۴) ٪۹۹٫۲

لنگر پیچشی به نسبت J بین اعضا تقسیم می‌شود

شعاع

$J_{\text{دایره}}=\left(\frac{\pi}{2}R^4\right)=4\left(\frac{\pi}{2}R^3\right)dR=2\pi R^3 t$

$J_{\text{جدار نازک}}=\beta\left[\frac{1}{3}Lt^3\right]=\frac{8}{3}\times(2\pi R)(t)^3=\frac{16\pi R t^3}{3}$

β تعداد میله‌ها

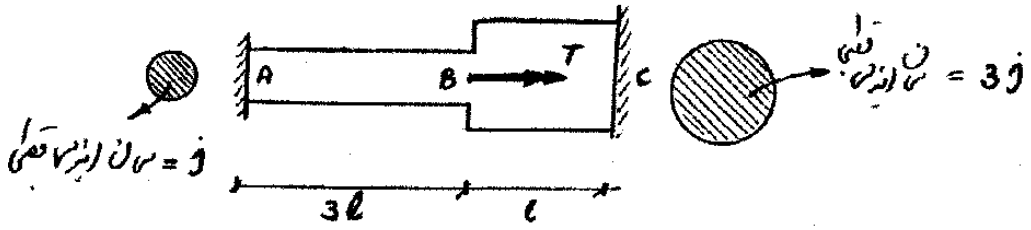
$\text{سهم دایره}=\frac{J_{\text{دایره}}}{J_{\text{دایره}}+J_{\text{میله‌ها}}}=\frac{2\pi R^3 t}{2\pi R^3 t+\frac{16}{3}\pi R t^3}$

$\frac{R}{t}=10 \rightarrow \text{سهم دایره}=0.974$

تحلیل سازه های تحت پیچش

سراسری۸۹

۵۲- عضو با مقطع دایروی مطابق شکل تحت کوپل پیچشی T در نقطه B قرار دارد.
مطلوبست تعیین عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی در نقاط A و C.



۱) $T_A=\frac{۹T}{۱۰}$ و $T_C=\frac{T}{۱۰}$

۲) $T_A=\frac{۳T}{۱۰}$ و $T_C=\frac{۷T}{۱۰}$

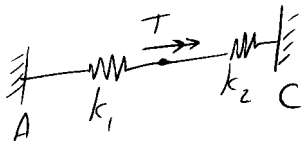
۳) $T_A=\frac{T}{۱۰}$ و $T_C=\frac{۹T}{۱۰}$

۴) $T_A=\frac{۷T}{۱۰}$ و $T_C=\frac{۳T}{۱۰}$

$k_1 = \frac{GJ}{3L}$ ، $k_2 = \frac{G(3J)}{L}$ ⟹ $k_2 = 9k_1$

بنابراین $\frac{9}{10}$ سهم به C می‌رسد و یک سهم به A (جمع سهم‌ها ۱۰ است)

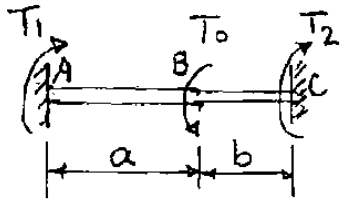
$T_A = \frac{T}{10}$ ، $T_C = \frac{9T}{10}$

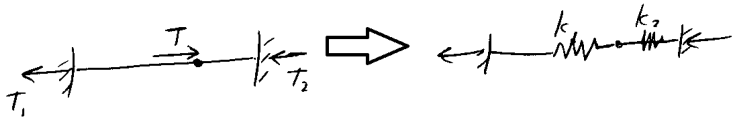


سراسری ۸۴

۴۵- در شکل روبرو قسمت AB با مقطع دایره به شعاع R و قسمت BC با مقطع مربع به شعاع $a = R\sqrt{2}$ می‌باشد. برای اینکه $T_1 = T_2$ باشد، نسبت $\frac{a}{b}$ کدام است؟ ($J_\epsilon = 0/141\, a^4$ برای مربع)

۱) ۲/۷۸۵
۲) ۱/۳۹
۳) ۱
۴) ۰/۳۵۹



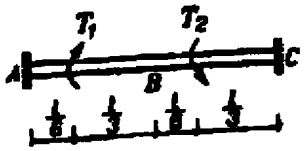


در این گونه مسائل مانند تیری محوری عمل می‌کنیم برای اینکه تکیه‌گاه‌ها سهم مساوی داشته باشند باید $k_2 = k_1$ باشد

$\left(\frac{GJ_\epsilon}{L}\right)_1 = \left(\frac{GJ}{L}\right)_2 \Rightarrow \frac{\frac{\pi}{2}R^4}{a} = \frac{0.141(R\sqrt{2})^4}{b} \Rightarrow \frac{a}{b} = 2.785$

آزاد ۸۸

۵۱- در تیر زیر نسبت $\frac{T_1}{T_2}$ چقدر باشد تا پیچش وسط تیر صفر شود؟ (GJ = Const)

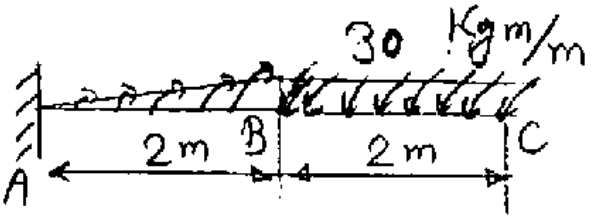


۱) 3
۲) 2
۳) $\frac{1}{2}$
۴) $\frac{1}{3}$

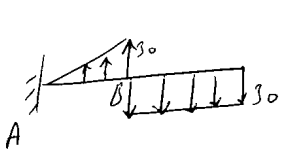
۱) $\sqrt[3]{3}$
۲) $\sqrt{2}$
۳) $\sqrt[4]{6}$
۴) $\sqrt{2}$

سراسری ۸۸

۶۲- میله‌ای به قطر 4 cm زیر اثر لنگر پیچشی مطابق شکل روبه‌رو قرار گرفته است. تنش برشی ماکزیمم بر حسب $\frac{kg}{cm^2}$ در آن چندر است؟ لنگر پیچشی در نیمه‌ی سمت راست با شدت ثابت ۳۰ $\frac{kgm}{m}$ و در نیمه سمت چپ شدت آن به طور خطی از ۳۰ $\frac{kgm}{m}$ به صفر می‌رسد.



۱) $\frac{750}{\pi}$
۲) ۱۵۰۰
۳) صفر
۴) $\frac{1500}{\pi}$



A یا B گزینه T

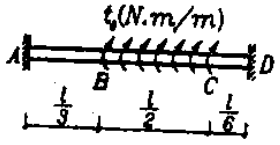
$T_B = 30\times 2 = 60$ ✓

$T_A = 30\times 2 - \frac{30\times 2}{2} = 30$

$\Rightarrow \tau_{max} = \frac{T_B R}{J} = \frac{6000\times 2}{\frac{\pi}{2}\times 2^4} = \frac{1500}{\pi}$

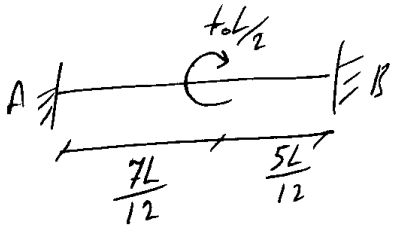
آزاد ۸۶

۴۸- در تیر زیر زاویه پیچش وسط تیر چقدر است؟ (GJ = con s t)

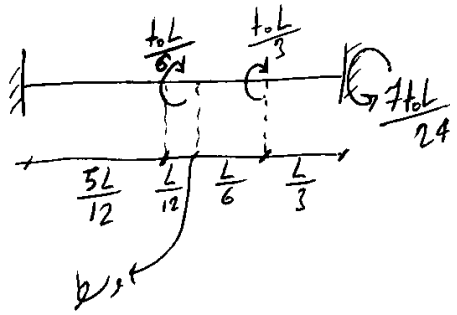


۱) $\frac{11t_0l^2}{144GJ}$ ۲) $\frac{7t_0l^2}{144GJ}$ ۳) $\frac{13t_0l^2}{144GJ}$ ۴) $\frac{17t_0l^2}{144GJ}$

ابتدا کمی العجل ها رسم کنید و ... را پیدا کنید ✓



$\begin{matrix}\varphi A = 5\\ \varphi B = 7\end{matrix}\Big\} \rightarrow T_A = \frac{5}{12}\times\frac{t_0L}{2} = \frac{5t_0L}{24} \rightarrow T_B = \frac{7t_0L}{24}$

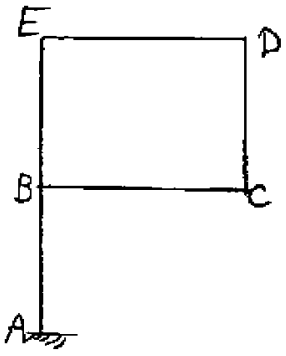


اگر فرض کنیم $T = \frac{t_0L}{2}$ ⇐ ۱۰

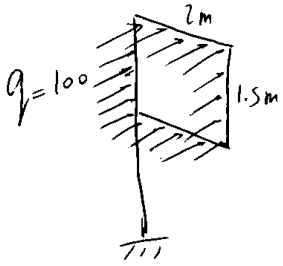
$\varphi_b = \frac{\sum TL}{GJ} = \frac{1}{GJ}\left(\frac{7t_0L}{24}\times\frac{L}{2} - \frac{t_0L}{3}\times\frac{L}{6}\right) = \frac{13}{144}\frac{t_0L^2}{JG}$

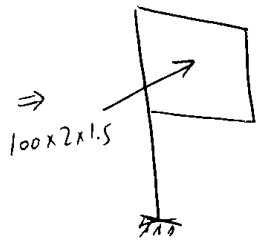
سراسری ۸۸

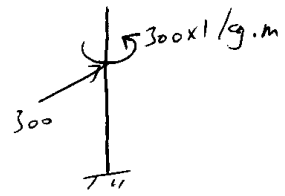
۶۱- صفحه BCDE به میله AE که دارای مقطع دایره توپر به شعاع ۵ cm است کاملاً متصل است و عمود بر آن صفحه یاد وارد می‌شود. به طوری که نیروی وارده صد کیلوگرم بر هر متر مربع است. BC = ۲ m و CD = ۱/۵ m می‌باشد. مقدار تنش برشی ماکزیمم حاصل از فقط پیچش در AB بر حسب $\frac{kg}{cm^2}$ برابر است با:



۱) $\frac{۴۸۰}{\pi}$
۲) ۹۶۰π
۳) ۴۸π
۴) $\frac{۹۶۰}{\pi}$







$\tau = \frac{(30000)\times 5}{\frac{\pi}{2}\times 5^4} = \frac{480}{\pi}$

سراسری۸۶

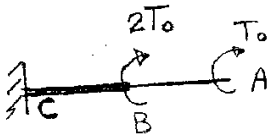
۵۲- در شکل روبرو AB و BC دارای مقطع دایره به قطر D و ۲D می‌باشند: نسبت تنش‌های برشی ماگزیمم در قسمت AB به قسمت BC $\left[\frac{(\tau AB)max}{(\tau BC)max}\right]$ چقدر است؟

۱) ۱

۲) ۲

۳) $\frac{۸}{۳}$

۴) $\frac{۴}{۳}$



$$\tau_{AB}=\frac{T_0 R}{\frac{\pi}{2}R^4} \qquad \tau_{BC}=\frac{3T_0(2R)}{\frac{\pi}{2}(2R)^3} \longrightarrow \frac{\tau_{AB}}{\tau_{BC}}=\frac{4}{3}$$

سراسری۸۶

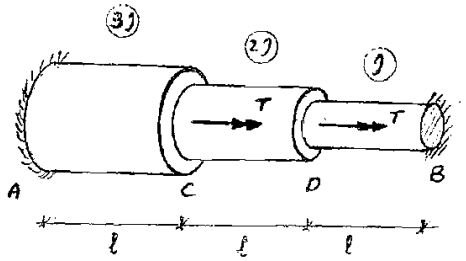
۵۴- عضو شکل مقابل با مقطع دایره‌ای پله‌ای تحت اثـــر دو لنگر پیچشی T در نقاط C و D قـرار گرفته است. نقاط A و B بصورت گیردار می‌باشند. مطلوبست عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی نقاط A و B:

۱) $T_A=\frac{۵}{۷}T \quad , \quad T_B=\frac{۹}{۷}T$

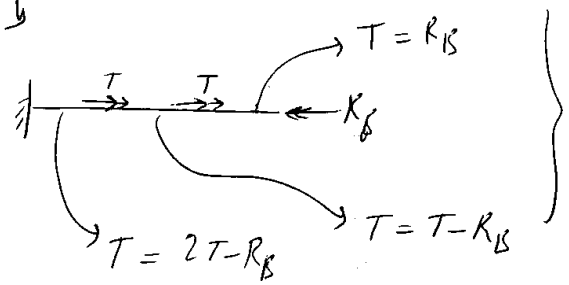
۲) $T_A=\frac{۹}{۷}T \quad , \quad T_B=\frac{۵}{۷}T$

۳) $T_A=\frac{۷}{۱۱}T \quad , \quad T_B=\frac{۱۵}{۱۱}T$

۴) $T_A=\frac{۱۵}{۱۱}T \quad , \quad T_B=\frac{۷}{۱۱}T$

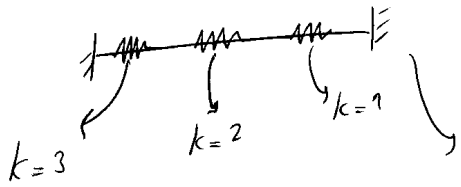


چون به جای یک نیرو سه 2 نیرو داریم روش سختی طولانی تر است از روش نیرویی میتوان حل کرد

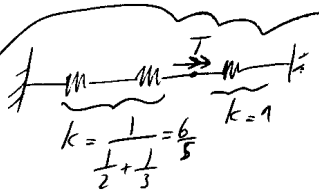


$$\Theta_B=\frac{(2T-R_B)L}{(3J)G}+\frac{(T-R_B)L}{(2J)G}+\frac{-R_B L}{JL}$$

$$\Rightarrow R_B=\frac{7T}{11}$$

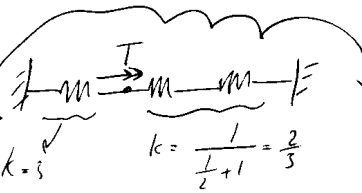


$k=\frac{GJ}{L}$



$$k=\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}=\frac{6}{5}$$

$$R_B=T\times\frac{1}{1+\frac{6}{5}}=\frac{5}{11}T \rightarrow R_A=\frac{6T}{11}$$



$$R_A=\frac{3}{3+\frac{2}{3}}T=\frac{9T}{11} \rightarrow R_B=\frac{2T}{11}$$

$$R_B=\frac{5T}{11}+\frac{2T}{11}=\frac{7T}{11}$$

$$R_A=\frac{6T}{11}+\frac{9T}{11}=\frac{15T}{11}$$

سراسری۸۶

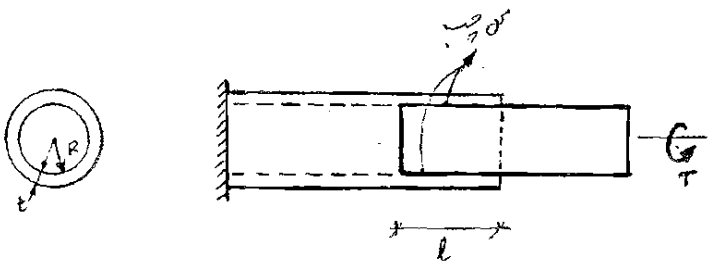
۵۵- یک مقطع توپر دایره‌ای با شعاع R توسط چسب با تنش برشی مجاز τ در داخل مقطع توخالی در طول l متصل شده است. مطلوبست محاسبه طول l بطوریکه لنگر پیچشی T را بتوان از مقطع توپر به مقطع توخالی منتقل کرد.

۱) $l=\frac{T}{\pi R^2.\tau}$

۲) $l=\frac{T}{2\pi R.\tau}$

۳) $l=\frac{T}{2\pi R^2.\tau}$

۴) $l=\frac{T}{\pi R.\tau}$

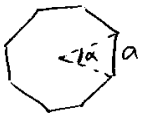


$T=\left[\left(\text{محیط دایره}\right)\times\text{تنش برشی}\times\tau\right]\times R=\left[(2\pi R)\times\tau\right]\times R=2\pi R^2 l\tau \Rightarrow l=\frac{T}{2\pi R^2\tau}$

آزاد ۸۸

۴۸- یک مقطع n ضلعی منتظم جدار نازک تحت اثر پیچشی قرار دارد. اگر مقطع از حالت بسته به حالت باز تغییر کند تنش برشی ماکزیمم مقطع چند برابر خواهد شد؟ (طول هر ضلع مقطع a و ضخامت مقطع t می باشد.)

۱) $1.5\frac{a}{t}Cotg\frac{\pi}{2n}$ ۲) $1.5\frac{a}{t}Cotg\frac{\pi}{n}$ ۳) $\frac{3a}{t}Cotg\frac{\pi}{n}$ ۴) $\frac{3a}{t}Cotg\frac{\pi}{2n}$



$\frac{\alpha}{2}$ ، $\frac{a}{2}\times Cot\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

$A_m=n\times\left[\frac{\frac{a}{2}\times Cot\left(\frac{\alpha}{2}\right)\times a}{2}\right]=\frac{na^2}{4}Cot\frac{\alpha}{2}$

$\tau_{بسته}=\frac{T}{2A_m t}=\frac{T}{2\left(\frac{na^2}{4}Cot\frac{\alpha}{2}\right)t}=\frac{2T}{na^2Cot\left(\frac{\alpha}{2}\right)t}$

$\tau_{باز}=\frac{T}{\frac{1}{3}Lt^2}=\frac{T}{\frac{1}{3}(na)t^2}=\frac{3T}{nat^2}$

$\Rightarrow \frac{\tau_{باز}}{\tau_{بسته}}=\frac{\frac{3}{nat^2}}{\frac{2}{na^2Cot\frac{\alpha}{2}t}}=\frac{3a}{t}Cot\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{3a}{t}Cot\left(\frac{\pi}{n}\right)$

آزاد۸۹

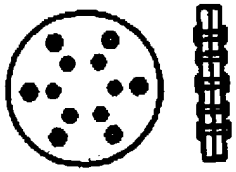
۵۰- در یک مقطع n ضلعی منتظم جدار نازک بسته تحت اثر پیچش قرار دارد. اگر مقطع از حالت بسته به حالت باز تغییر کند زاویه پیچش مقطع چند برابر خواهد شد؟ (طول هر ضلع a و ضخامت مقطع t می‌باشد).

۱) $\frac{4}{3}(\frac{a}{t})^2\cot g^2\frac{\pi}{2n}$ ۲) $\frac{3}{4}(\frac{a}{t})^2\cot g^2\frac{\pi}{2n}$

۳) $\frac{3}{4}(\frac{a}{t})^2\cot g^2\frac{\pi}{n}$ ۴) $\frac{4}{3}(\frac{a}{t})^2\cot g^2\frac{\pi}{n}$

آزاد ۸۸

۴۹- در اتصال فلنجی زیر دو نوع پیچ با تنشهای مجاز τ_1 و τ_2 در فواصل R_1 و R_2 از مرکز اتصال قرار دارند. برای اینکه این اتصال فلنجی حداکثر لنگر پیچشی را منتقل کند نسبت $\frac{R_1}{R_2}$ چقدر باید باشد؟ (مدول برشی پیچ‌ها به ترتیب برابر G_1 و G_2 است.)



۱) $\frac{G_1\tau_1}{G_2\tau_2}$ ۲) $\frac{G_2\tau_2}{G_1\tau_1}$ ۳) $\frac{G_2\tau_1}{G_1\tau_2}$ ۴) $\frac{G_1\tau_2}{G_2\tau_1}$

برای بهینه بودن هرد پیچ خارجی و داخلی باید هردو با تنش برشی این طراحی کنیم که زودتر خراب شود و کیفیت ارزش

چون G ها متفاوت است ابتدا مانند مقطع خشتی باید مقطع معادل بازیم سپس اگر G خارجی کوچکتر است باید مساحت آن را افزایش دهیم سپس در نهایت آن کل را حساب کنیم

τ_2 G_2 τ_1 G_1

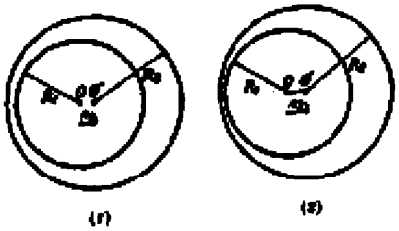
② τ پیچ خارجی $= \frac{TR_2}{J_{کل}} \times \frac{G_2}{G_1} (\tau_1 \Rightarrow T(\frac{\tau_2 G_1 J}{R_2 G_2}$

① τ داخلی $= \frac{TR_1}{J} (\tau_1 \Rightarrow T(\frac{\tau_1 J}{R_1}$

$\Rightarrow \frac{\tau_2 G_1 J}{R_2 G_2} = \frac{\tau_1 J}{R_1} \rightarrow \boxed{\frac{R_1}{R_2} = \frac{G_2 \tau_1}{G_1 \tau_2}}$

آزاد ۸۸

۵۰- اگر فاصله مراکز دوایر داخلی و خارجی در میل‌گردانهای جدار نازک زیر به ترتیب برابر e_1 و e_2 باشد مقاومت پیچشی میل‌گردان اول چند برابر میل‌گردان دوم است؟



(۱) (۲)

۱) $\frac{R_2 - R_1 - e_1}{R_2 - R_1 - e_2}$ ۲) $\frac{R_1 + R_2 - e_1}{R_1 + R_2 - e_2}$ ۳) $\frac{R_1 + R_2 + e_1}{R_1 + R_2 + e_2}$ ۴) $\frac{R_2 - R_1 + e_1}{R_2 - R_1 + e_2}$

$\tau = \frac{T}{2A_m t} \rightarrow T_1 = \tau(2A_m t_1)$

$T_2 = \tau(2A_m t_2)$

$\rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{t_1}{t_2}$

وقت شود که مساحت محصور در هر دو شکل یکسان است $A_{m1} = A_{m2}$

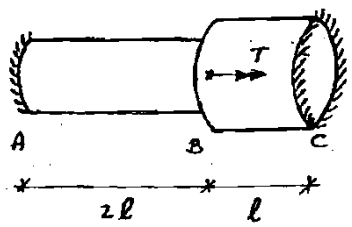
$t_1 = R_2 - R_1 - e_1 \rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{R_2 - R_1 - e_1}{R_2 - R_1 - e_2}$

سراسری ۸۵

۵۰- عضوی با مقطع دایروی مطابق شکل تحت کوپل پیچشی T در مقطع B می‌باشد. مطلوبست تعیین عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی در نقاط A و C (نقاط A و C بصورت گیردار کامل می‌باشند)

J= ممان اینرسی قطبی مقطع در ناحیه AB

۴J= ممان اینرسی قطبی در ناحیه BC

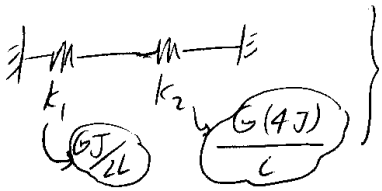


۱) $T_A = \frac{T}{9}$, $T_B = \frac{8T}{9}$

۲) $T_A = \frac{6T}{7}$, $T_B = \frac{T}{7}$

۳) $T_A = \frac{8T}{9}$, $T_B = \frac{T}{9}$

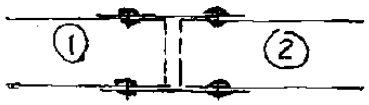
۴) $T_A = \frac{T}{7}$, $T_B = \frac{6T}{7}$



$$\rightarrow T_A = \frac{\frac{1}{2}T}{\frac{1}{2}+4} = \frac{T}{9} \rightarrow T_B = \frac{8T}{9}$$

سراسری ۸۴

۴۴- انتهای دو لوله ۱ و ۲ به قطر خارجی ۸۰ cm مطابق شکل روبرو در داخل لوله‌ای به قطر داخلی ۸۰ cm قرار گرفته‌اند. هر کدام از لوله‌های ۱ و ۲ با ۲۰ عدد پیچ به قطر ۲ cm بهم وصل شده‌اند. اگر لنگر پیچشی ۲۰tm به مجموعه وارد شود تنش برشی در پیچ‌ها چقدر است؟



۱) ۷۹۶

۲) ۳۹۸

۳) ۱۹۹

۴) ۹۹/۵

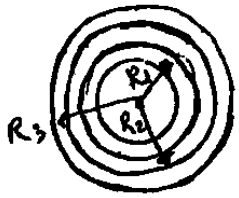
لنگر پیچشی که هر پیچ باید تحمل کند

$T_i = f \times R \Rightarrow$ کل $T = 20 \times f \times R \Rightarrow$ هر پیچ $f = \frac{T}{20R} = \frac{20\times10^5}{20\times80}$

$$\Rightarrow \tau = \frac{f}{A_{\text{پیچ}}} = \frac{20\times10^5}{20\times80\times(\pi\times1^2)} = 397.88\ kg/cm^2$$

آزاد ۸۵

۶۵- در مقطع لوله ای یکپارچه زیر که از سه نوع فلز با ضخامت های یکسان t تشکیل شده است تحت اثر یک لنگر پیچشی، لنگر پیچشی تحمل شده توسط قسمتهای مختلف مقطع یکسان است. کدام رابطه زیر صحیح می باشد؟
(R_i شعاع متوسط قسمت i ام است و $t << R_i$)



۱) $G_1R_1 = G_2R_2 = G_3R_3$

۲) $G_1R_1^3 = G_2R_2^3 = G_3R_3^3$

۳) $\frac{G_1}{R_1} = \frac{G_2}{R_2} = \frac{G_3}{R_3}$

۴) $\frac{G_1}{R_1^3} = \frac{G_2}{R_2^3} = \frac{G_3}{R_3^3}$

سختی پیچشی دو مقطع برابر است ←

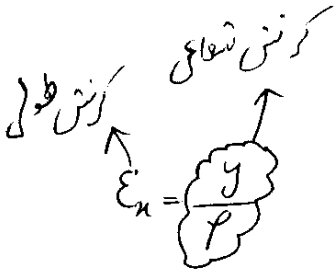
$$\left(\frac{GJ}{L}\right)_1 = \left(\frac{GJ}{L}\right)_2 \rightarrow \frac{G_1(2\pi R_1^3 t)}{L} = \frac{G_2(2\pi R_2^3 t)}{L} = \frac{G_3(2\pi R_3^3 t)}{L}$$

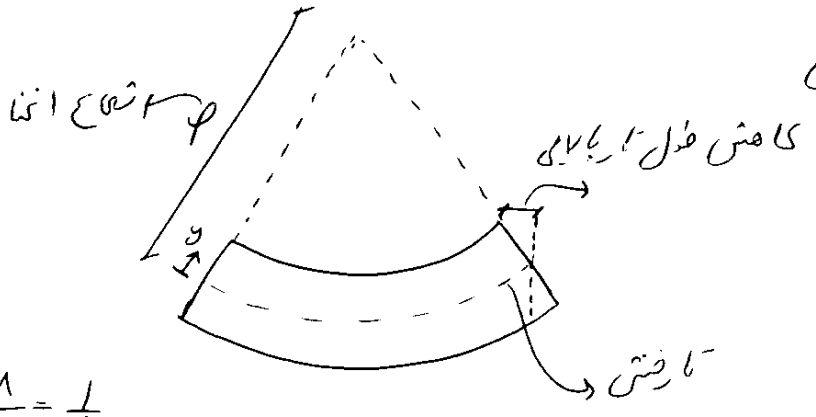
اول $J = \left(\frac{\pi}{2}R^4\right)' = 2\pi R^3 t$

$$G_1R_1^3 = G_2R_2^3 = G_3R_3^3$$

۱۳-خمش

۱۳-۱-شعاع انحنا



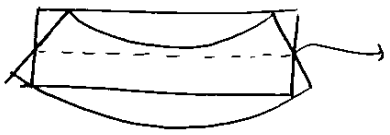


$$\left.\begin{array}{l}\sigma_x = \frac{y}{\rho}E \\ \sigma_x = \frac{My}{I}\end{array}\right\} \rightarrow \frac{M}{EI} = \frac{1}{\rho}$$

$\left.\begin{array}{l}\rho : \text{شعاع انحنا} \leftarrow \text{هرچه کمتر شود به معنی افزایش لنگر } M \text{ است} \\ \frac{1}{\rho} : \text{انحنا}\end{array}\right\}$

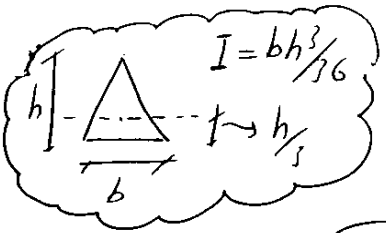
✓ نکته: در هر قسمتی از تیر که مقدار لنگر ثابت است ρ ثابت خواهد بود و تغییر شکل تیر به صورت کمانی از دایره خواهد بود

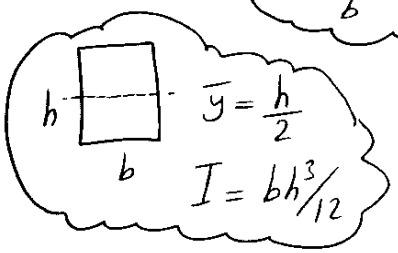
✓ تار خنثی ← تقاطعی از مقطع که در اثر لنگر تغییر طول نمی‌دهند

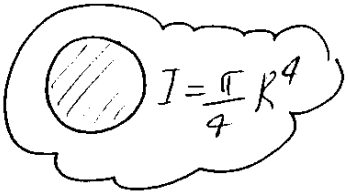


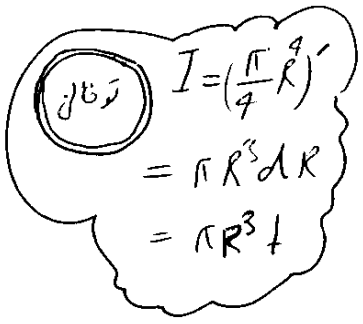
✓ نحوه محاسبه تار خنثی ← ✓ برابر مرکز سطح مقطع است

✓ اگر مقطع مرکب باشد (از اشکال مختلف) باید ابتدا آن را تبدیل کرد









سراسری ۸۱

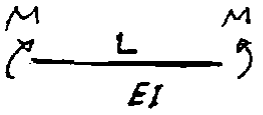
۳۴- لنگر خمشی لازم جهت خم‌کردن میله‌ای به طول L وصلبیت خمشی EI بصورت ربع دایره چقدر است ؟

۱) $\frac{\pi EI}{L}$

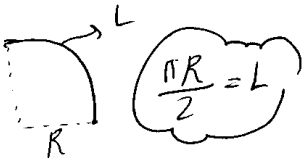
۲) $\frac{2EI}{L}$

۳) $\frac{\pi EI}{2L}$

۴) $\frac{4PL}{AE}$

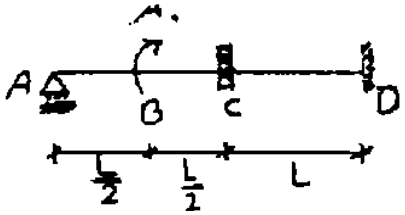


$\frac{M}{EI} = \frac{1}{\rho} \Rightarrow \frac{M}{EI} = \frac{1}{\frac{2L}{\pi}} \rightarrow M = \frac{\pi EI}{2L}$



آزاد ۸۷

منحنی تغییرشکل نشان داده شده در کدام قسمت به صورت کمانی از دایره است؟



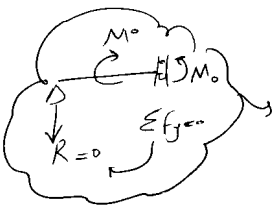
۱) فقط AB

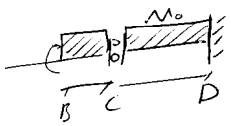
۲) فقط CD

۳) AB و BC

۴) BC و CD

هرجا که مقدار لنگر ثابت باشد سه تقاع انحنا نیز ثابت خواهد بود چون $\frac{M}{EI} = \frac{1}{R}$ بنابراین باید دیاگرام لنگر را رسم کنیم

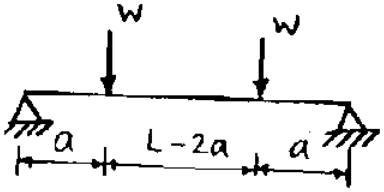




BC, CD

سراسری ۸۳

۵۱- در تیر متقارن شکل زیر، دقیقترین منحنی که می تواند تغییر شکل تیر را ما بین دو نیروی متمرکز W نشان دهد، کدام است؟



۱)دایره

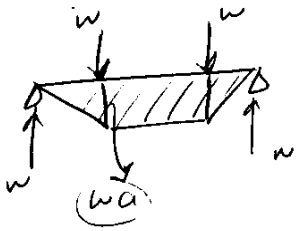
۲)خط

۳)منحنی درجه ۳

۴)بیضی با فاصله کانونی کم

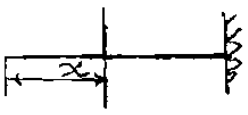
EI=ثابت

چون مقدار M ثابت است ← دایره خواهد بود



سراسری ۸۴

۵۴- تغییر شکل تیر روبرو چنان است که انحنای آن متناسب با طول تغییر می‌کند یعنی $\frac{1}{\rho} = kx$ ، بار وارد بر تیر چیست؟



۱) بار متمرکز در انتهای آزاد

۲) لنگر متمرکز در انتهای آزاد

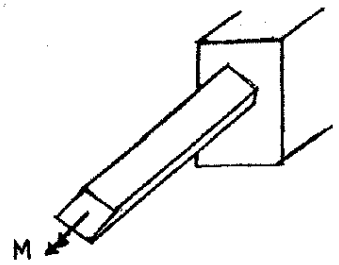
۳) بار گسترده در سرتاسر تیر با شدت یکنواخت

۴) بار گسترده خطی با شدت صفر در انتهای آزاد

سراسری ۸۹

۴۷- چنانچه اضلاع مقطع چهارگوش مربع شکل برابر a باشد، انحنای ایجاد شده در اثر لنگر M را محاسبه کنید. (مدول ارتجاعی مقطع E می‌باشد.)

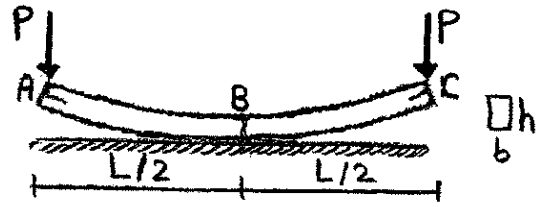
۱) $\frac{۳a^۲M}{AE}$ ۲) $\frac{۵M}{۱۲Ea^۴}$ ۳) $\frac{۱۲M}{Ea^۴}$ ۴) $\frac{۵Ea^۴}{۱۲M}$



سراسری ۸۹

۵۵- در تیر مورد نظر انحناء اولیه آن بدون بار در نقطه B برابر با $R_۱$ می‌باشد. مقدار نیروی لازم P چقدر باشد تا انحناء در B صفر شود؟

۱) $\frac{Ebh^۲}{۶LR_۱}$ ۲) $\frac{Ebh^۳}{۱۲LR_۱}$ ۳) $\frac{Ebh^۳}{۳LR_۱}$ ۴) $\frac{Ebh^۲}{۲۴LR_۱}$



آزاد ۸۳

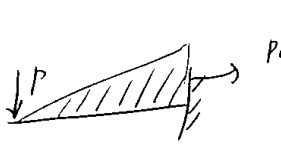
۲۱- یک صفحه فولادی به عرض 12cm و ضخامت 2cm را تحت اثر خمش محض بصورت قوسی از دایره به شعاع 10m خم می کنیم. تنش خمشی ماکزیمم صفحه چقدر است؟ $(E = ۲\times۱۰^۶ \ kg/cm^۲)$

۱) 1000 kg/cm² ۲) 500 kg/cm² ۳) 2000 kg/cm² ۴) 1500 kg/cm²

سراسری۸۸

۶۳- اگر در انتهای تیر کنسول به طول l جابه‌جایی قائم بر اثر بار متمرکز قائم در انتها برابر Δ باشد، انحنای حداکثر ایجاد شده در تیر چقدر می‌باشد؟ l ، Δ = ۰/۰۱ l است.

۱) $\frac{۰/۰۱}{۶l}$ ۲) $\frac{۰/۰۱}{۳l}$ ۳) $\frac{۰/۰۱}{l}$ ۴) $\frac{۰/۰۳}{l}$



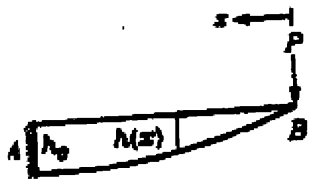
انحنای حداکثر در محل گیردار حداکثر است و برابر PL می‌شود

$\frac{M}{EI}=\frac{1}{R} \rightarrow \frac{PL}{EI}=\frac{1}{R}$ → باید P را بیابیم ⇒ $\Delta=\frac{PL^3}{3EI}=0.01L \rightarrow P=\frac{0.03\,EI}{L^2}$

$\rightarrow \frac{1}{R}=\frac{0.03}{L}$

آزاد ۸۸

۶۵- تیر طره زیر تحت اثر بار P بصورت یک قوس دایره خم می شود. معادله h (x) (ارتفاع مقطع) کدام است؟



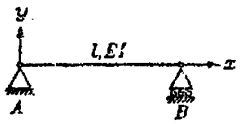
۱) $h(x)=h_0\sqrt{\frac{x}{l}}$ ۲) $h(x)=h_0\sqrt[3]{\frac{x^2}{l^2}}$ ۳) $h(x)=h_0\sqrt[3]{\frac{x}{l}}$ ۴) $h(x)=h_0\left(\frac{x}{l}\right)$

$\frac{1}{\varphi}=\frac{M}{EI} \rightarrow$ ثابت است $\frac{M}{EI} \rightarrow \frac{P\times x}{E\left(\frac{b\,h^3}{12}\right)}=$ ثابت $=\frac{PL}{E\frac{b\,h_0^3}{12}} \rightarrow \frac{x}{h^3}=\frac{L}{h_0^3} \rightarrow h=h_0\sqrt[3]{\frac{x}{L}}$

ثابت است

آزاد۸۹

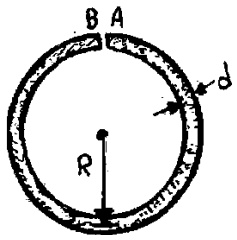
۵۴- تغییر مکان تیر زیر تحت اثر بارگذاری ۱ بصورت $y(x)=\frac{M}{6EIl}(x^3-3lx^2+2l^2x)$ و تحت اثر بارگذاری ۲ بصورت $y(x)=\frac{M}{6EIl}(x^3-l^2x)$ می‌باشد. اگر بارگذاریهای ۱ و ۲ بصورت همزمان بر تیر AB وارد شود انحنای وسط تیر چقدر خواهد شد؟



۱) $\frac{2M}{EI}$ ۲) $\frac{M}{EI}$ ۳) ۰ ۴) $\frac{M}{2EI}$

سراسری۸۵

۴۱- یک سیم مسی به قطر d به شکل یک دایره به گونه‌ای خم شده است که دو انتهای آن درست در تماس با یکدیگر نگه داشته شده‌اند. در صورتی‌که حداکثر کرنش مجاز مس ε باشد، کمترین طول (L) مورد نیاز برای این حالت برابر است با:



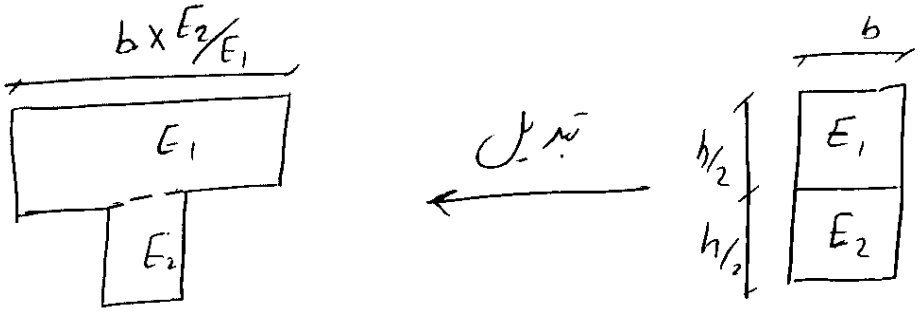
۱) $\frac{\pi d}{۲\varepsilon}$
۲) $\frac{\pi d}{\varepsilon}$
۳) $\frac{۲\pi d}{\varepsilon}$
۴) $\frac{۴\pi d}{\varepsilon}$

حداکثر کرنش مجاز: ε

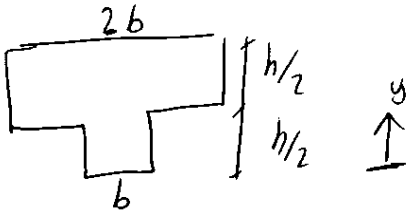
کرنش $=\frac{y}{\varphi}=\frac{d/2}{R}$ $\rightarrow \frac{d/2}{R}<\varepsilon \rightarrow R>\frac{d}{2\varepsilon} \rightarrow \frac{L}{2\pi}>\frac{d}{2\varepsilon} \rightarrow L>\frac{\pi d}{\varepsilon}$

۱۳-۲-مقاطع مرکب

عضو مرکب:

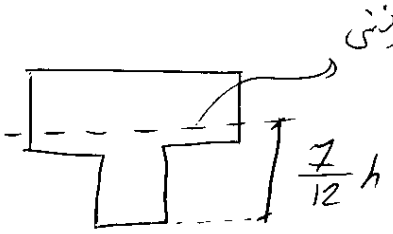


پس از تبدیل تا رفتنی را برای تیر مثلاً اگر $E_2 = 2E_1$ باشد خواهیم داشت:



$$\bar{y} = \frac{(2b \times h/2) \times \frac{3h}{4} + (b \times h/2) \times h/4}{2b \times \frac{h}{2} + b \times \frac{h}{2}}$$

$$= \frac{7}{12}h$$



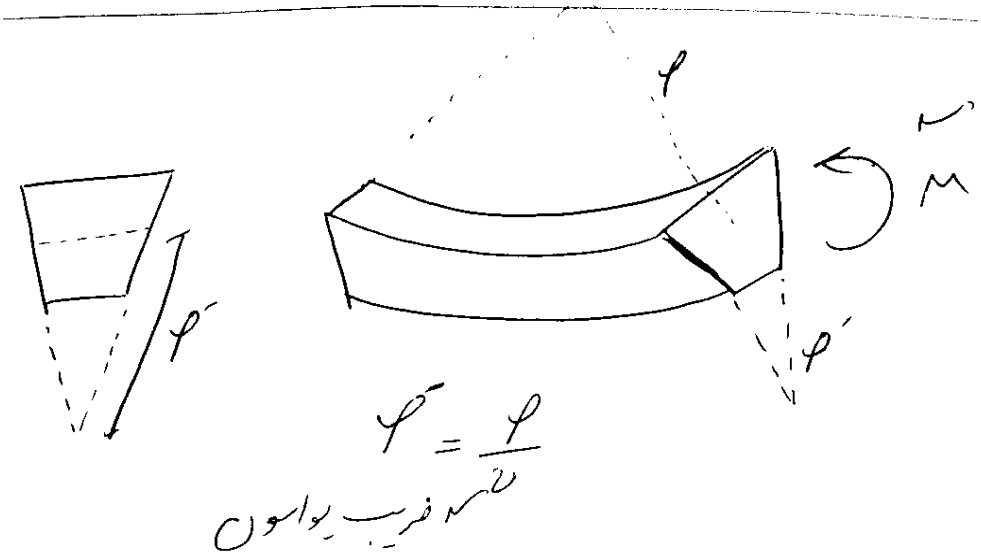
سؤال: تنش در اثر M را در بالا و پایین چقدر است؟

پس از محاسبه تنش در مقطع تبدیل یافته باید آن را به نسبت تبدیل شده ضرب کرد.

$$\sigma_{top} = \left[\frac{M \times \frac{5}{12}h}{I}\right] \times (2)$$

$$\sigma_{bot} = \left[\frac{M \times \frac{7}{12}h}{I}\right] \times 1$$

$\times \left(\frac{E_2}{E_1}\right)$



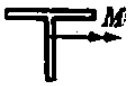
شکل انحنا عرضی تیر

$$\varphi' = \frac{\varphi}{n}$$

n ضریب پواسون

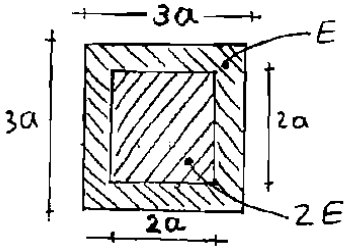
آزاد ۸۶

۵۰- در کدامیک از مقاطع زیر تحت اثر لنگر خمشی M ارتفاع مقطع کاهش می یابد؟

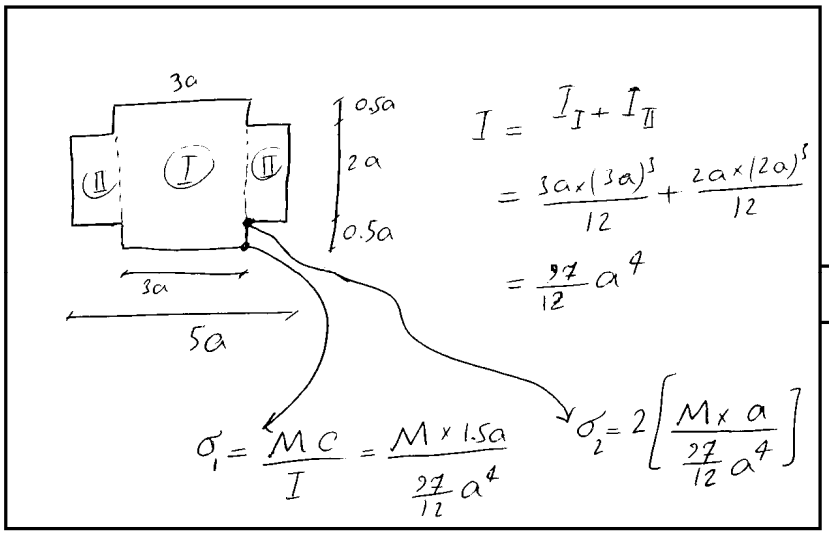
۱)
۲)
۳)
۴) 

سراسری ۸۱

۳۸- در تیر مرکب شکل زیر چنانچه حداکثر تنش مجاز برای هر دو نوع مصالح مساوی σ_a باشد، حداکثر لنگر خمشی مجاز چقدر است؟

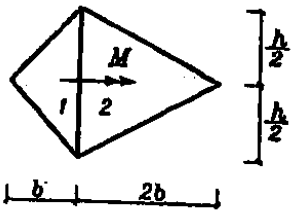


۱) $\frac{8}{97} a^3 \sigma_a$
۲) $\frac{6}{97} a^3 \sigma_a$
۳) $\frac{8}{81} a^3 \sigma_a$
۴) $\frac{6}{81} a^3 \sigma_a$

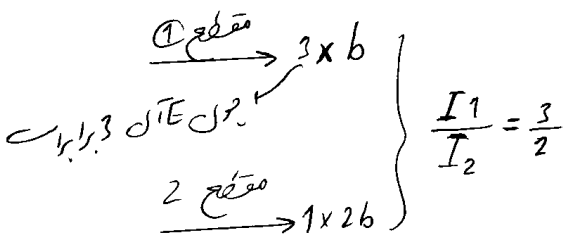


آزاد ۸۶

۵۲- در تیر زیر لنگر تحمل شده توسط مقطع اول چند برابر مقطع دوم می باشد؟
$(E_1 = 3E_2)$

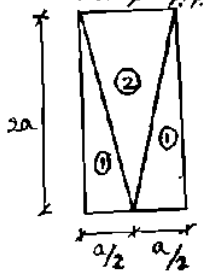


۱) $\frac{3}{4}$
۲) $\frac{3}{2}$
۳) 3
۴) 6



سراسری ۸۲

۴۲- در یک تیر با مقطع مقابل، اگر مدول الاستیسته ناحیه ۲ مقطع را دو برابر کنیم، تغییر شکل حداکثر چند برابر خواهد شد؟



۱) ۰,۶۶۷
۲) ۰,۶۹۲
۳) ۰,۷۴۵
۴) ۰,۵

نکته: با توجه به فرمول کی $\Delta = \frac{PL^3}{3EI}$ ، $\Delta = \frac{5}{384}\frac{qL^4}{EI}$ سخیزها I رابطه عکس دارد

$$\frac{\Delta_2}{\Delta_1} = \frac{I_1}{I_2} = \frac{I_1(\square)}{I_2(\square)} \Rightarrow I_1 = \frac{a(2a)^3}{12} = \frac{2a^4}{3}$$

برای محاسبه I_2 باید کار را شروع کنیم

$$\bar{y} = \frac{2\left(\frac{\frac{a}{2}\times 2a}{2}\right)\times\frac{2(2a)}{3} + (a\times 2a)\times a}{\left(\frac{\frac{a}{2}\times 2a}{2}\right) + (a\times 2a)} = \frac{10a}{9}$$

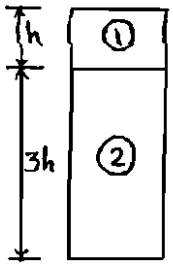
$\frac{10a}{9}$

$$I = \underbrace{\left[\frac{a\times(2a)^3}{12} + (a\times 2a)\times\left(\frac{a}{9}\right)^2\right]}_{\text{مستطیل}} + 2\underbrace{\left[\frac{\frac{a}{2}\times(2a)^3}{36} + \left(\frac{\frac{a}{2}\times 2a}{2}\right)\times\left(\frac{2(2a)}{3} - \frac{10a}{9}\right)^2\right]}_{\text{مثلث}} = \frac{26}{27}a^4$$

$$\rightarrow \frac{\Delta_2}{\Delta_1} = \frac{2a^4/3}{\frac{26}{27}a^4} = \frac{9}{13} = 0.692$$

سراسری ۸۳

۵۹- تیر مرکبی با مقطع نشان داده شده تحت اثر ممان خمشی منفی قرار گرفته است. هر گاه $E_2 = 3E_1$ باشد نسبت بیشترین تنش کششی به بیشترین تنش فشاری چقدر است؟

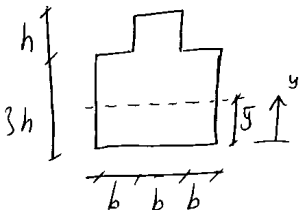


۱) ۰/۷۶

۲) ۰/۶۵

۳) ۰/۴۵

۴) ۱/۳۵



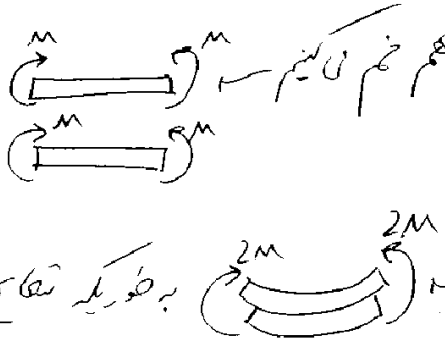
$$\bar{y} = \frac{\overbrace{hb}^{A_1}\times 3.5h + \overbrace{(3h)(3b)}^{A_2}\times 1.5h}{\underbrace{hb}_{A_1} + \underbrace{(3h)(3b)}_{A_2}} = \frac{17}{10}h$$

چون نسبت تنش ها را خواسته نیازی به محاسبه I نیست چون I حذف می شود

$$\sigma_{top} = \frac{M\times(4h - \frac{17h}{10})}{I} \quad \sigma_{bot} = 3\left[\frac{M\times\frac{17h}{10}}{I}\right] \Rightarrow \frac{\sigma_{کششی}}{\sigma_{فشاری}} = \frac{4h - 17h/10}{3\times 17h/10} = 0.451$$

نکته: اگر لنگرهای مختلف به تیر وارد شوند و نتیجه نهایی خواسته شود، به جای جمع لنگرها می‌توان $\frac{1}{\rho}$ را با هم جمع کرد (به ویژه اگر EI در طول‌های مختلف تغییر کند)

مثال: ابتدا دو تیر شبیه را با هم خم می‌کنیم سپس آن‌ها را به هم می‌چسبانیم سپس لنگر $2M$ به طوری که تقعر تیر ρ_1 می‌باشد



حال اگر لنگر $2M$ را حذف کنیم (یا برابر با یکدیگر) شعاع جدید چقدر؟

مقاطع مستطیلی هستند

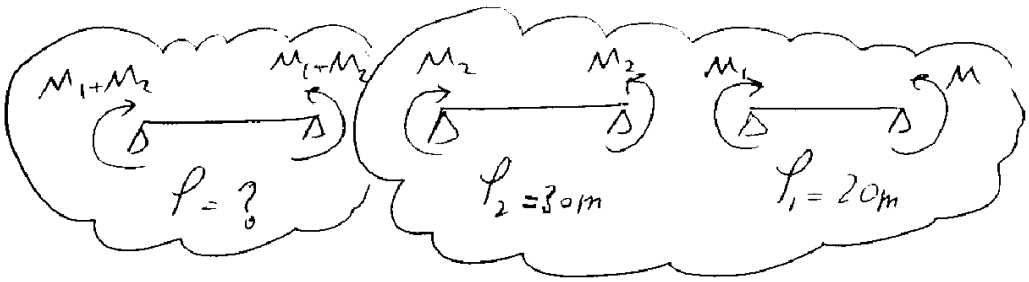
$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{M}{EI_1} \quad \text{مقطع تک}$$

$$\frac{1}{\rho_2} = \frac{-2M}{E(8I_1)} = \frac{-M}{4EI_1}$$

$$\rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{M}{EI_1} \cdot \frac{-M}{4EI_1} = \frac{3}{4\rho_1}$$

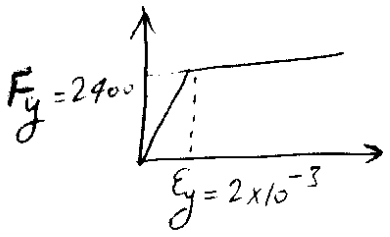
جدید

مثال:



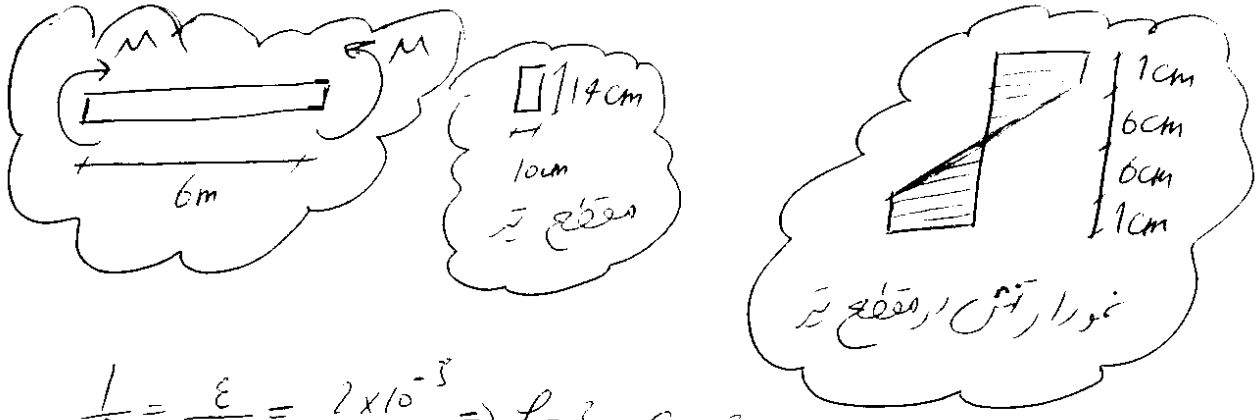
$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{20} + \frac{1}{30} \rightarrow \rho = 12\,m$$

مثال: اگر تنش-کرنش ماده خطی نباشد و به صورت



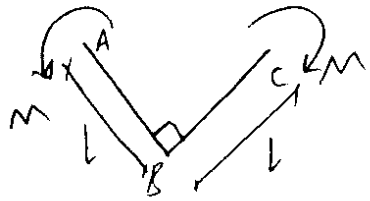
باشد و تیر ساخته شده از این ماده

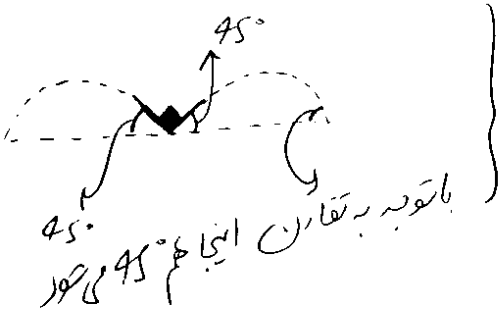
مطابق شکل زیر تحت اثر لنگر M قرار گیرد، تقاضای انحنا را بدست آورید



$$\frac{1}{\rho} = \frac{\varepsilon}{c} = \frac{2\times10^{-3}}{6} \Rightarrow \rho = 3000\,cm = 30m$$

سؤال: مقدار M چقدر باشد تا نقاط A و B و C در یک امتداد قرار گیرند؟

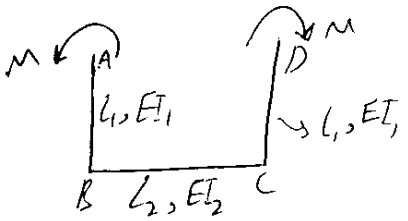


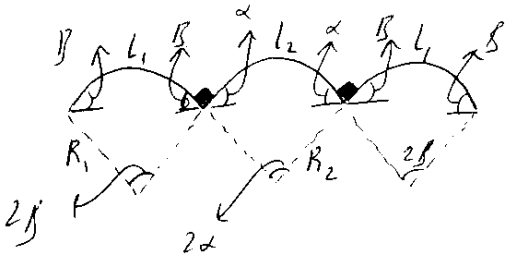


$$R = \frac{L}{(\pi/2)} = \frac{2L}{\pi}$$

$$\Rightarrow \frac{M}{EI} = \left(\frac{1}{R} = \frac{\pi}{2L}\right) \Rightarrow M = \frac{\pi EI}{2L}$$

آزاد 86 : مقدار M چقدر باشد تا ABCD در یک امتداد قرار گیرند؟





$$\alpha+\beta=\pi^c \rightarrow \begin{cases} R_1=\frac{L_1}{2\beta} \rightarrow \beta=\frac{L_1}{2R_1} \\ R_2=\frac{L_2}{2\alpha} \rightarrow \alpha=\frac{L_2}{2R_2} \end{cases} \rightarrow \frac{L_1}{2R_1}+\frac{L_2}{2R_2}=\frac{\pi}{2}$$

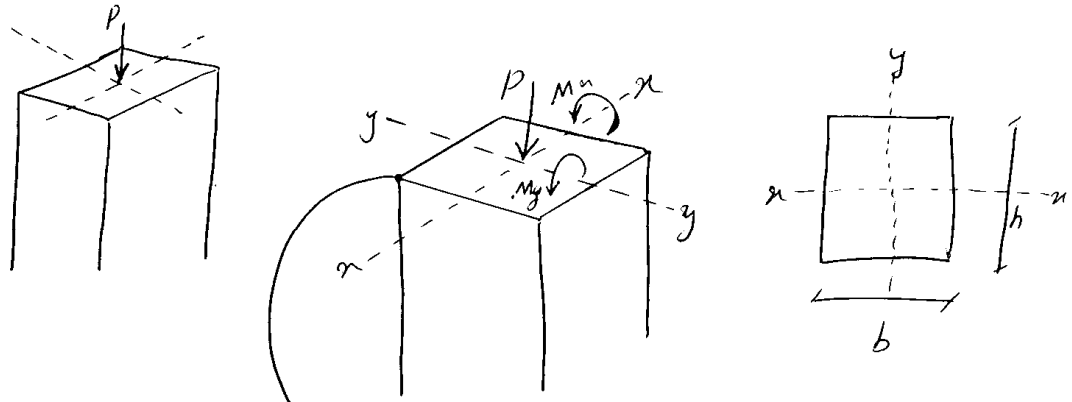
$$\rightarrow \frac{1}{2}\times\left(\frac{M}{EI_1}\right)\times L_1+\frac{1}{2}\left(\frac{M}{EI_2}\right)\times L_2=\frac{\pi}{2} \rightarrow M=\frac{\pi}{\frac{L_1}{EI_1}+\frac{L_2}{EI_2}}$$

(ABS) یک صفحه فولادی به عرض 120cm و ضخامت 2^{cm} را به شکل زیر برای به شعاع 1000m خم می کنیم، تنش خمشی ماکزیمم چقدر است؟ ($E=2\times10^6 kg/cm^2$)

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{\rho=1000}=\frac{M}{EI} \\ \sigma=\frac{Mc}{I} \end{array}\right\} \rightarrow \sigma=\frac{1}{1000}\times c\times E=\frac{1\times 2\times10^6}{1000}=2000\ kg/cm^2$$

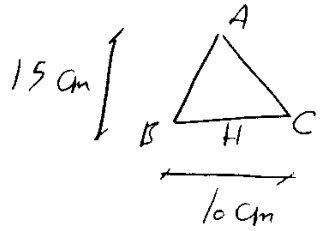
۱۳-۳-خمش دو محوره

خمش دو محوره: اگر لنگرهای $P+M_x+M_y$ را داشته باشیم



$$\sigma=\frac{P}{A}+\frac{M_x\,h/2}{I_x}+\frac{M_y\,b/2}{I_y}$$

آزاد ۸۵ : مقطع مثلثی تحت اثر بار بردن محور P قرار دارد، کرنش‌های قائم در نقاط A، H (وسط BC) به ترتیب $200\mu m/m$ و $500\mu m/m$ می‌باشد، بار P چند است؟ $E=2\times10^6$



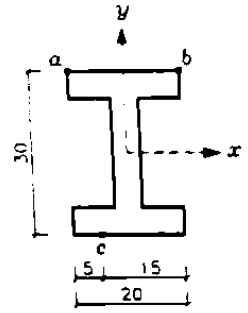
نکته: کرنش‌های ناشی از خمش در مرکز سطح جسم صفر است

$$\varepsilon_{\text{مرکز سطح}} = \varepsilon_H + \frac{\varepsilon_A - \varepsilon_H}{3} = 200 + \frac{300}{3} = 300\mu m$$

$$\longrightarrow P = \sigma A = (\varepsilon E)A = (300\times10^{-6}\times 2\times10^{6})\times\frac{10\times15}{2} = 45000\,kg = 45\,ton$$

سراسری ۸۰

مقادیر کرنش عمودی در نقاط a و b و c در مقطع تیری به شکل روبرو بدین ترتیب، $\varepsilon_a = ۱/۵\times۱۰^{-۳}$ و $\varepsilon_b = -۲/۵\times۱۰^{-۳}$ و $\varepsilon_c = ۳/۵\times۱۰^{-۳}$ محاسبه شده‌اند. اندازه لنگرهای M_x (لنگر حول محور x) و M_y (حول محور y) چه ارتباطی با یکدیگر دارند؟ ($EI_x = ۱۰۰EI$ و $EI_y = EI$)

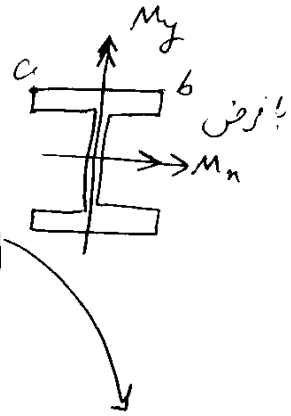


۱) $|M_x| = ۵۰|M_y|$

۲) $|M_x| = ۶۶/۷|M_y|$

۳) $|M_x| = ۱۰۰|M_y|$

۴) $|M_x| = ۱۳۳/۳|M_y|$



با فرض

$$E\varepsilon_a = \sigma_a \Rightarrow \frac{P}{A} - \frac{M_x\times15}{100} - \frac{M_y\times10}{1} = 1.5\times10^{-3}E$$

$$E\varepsilon_b = \sigma_b \Rightarrow \frac{P}{A} - \frac{M_x\times15}{100} + \frac{M_y\times10}{1} = -2.5\times10^{-3}E$$

$$E\varepsilon_c = \sigma_c \Rightarrow \frac{P}{A} + \frac{M_x\times15}{100} - \frac{M_y\times5}{1} = 3.5\times10^{-3}E$$

با کم کردن دو رابطه $\frac{P}{A}$ را حذف می‌کنیم

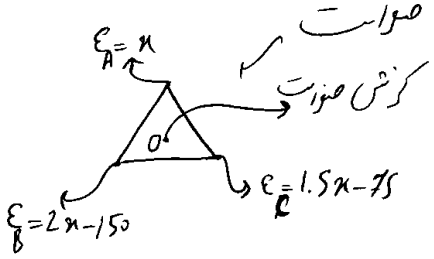
عادله‌ی دوم - عادله‌ی اول $\Rightarrow -20M_y = 4\times10^{-3}E$

$$\boxed{M_y = -2\times10^{-4}E}$$

آزاد ۸۵

۷۶- در یک مقطع مثلثی کرنشهای قائم در گوشه های A و B و C به ترتیب برابر x و 2x-150 و 1.5x-75 بر حسب میکرو استرین می باشد. X چقدر باشد تا مقطع تحت اثر خمش قرار داشته باشد؟

۱) x = 150 ۲) x = 50 ۳) x ≠ 50 ۴) x ≠ 150



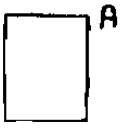
برای خمش خالص کرنش محوری برابر صفر است

کرنش صفر است

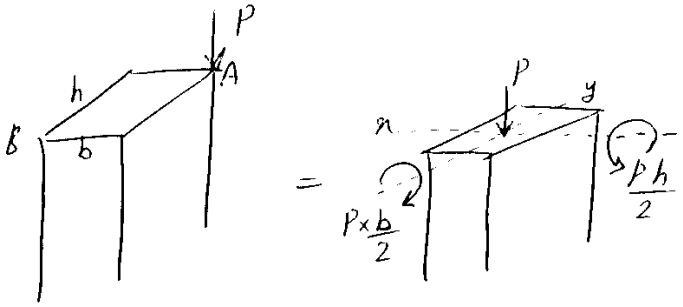
$$\Rightarrow \varepsilon_O = \frac{\varepsilon_A+\varepsilon_B+\varepsilon_C}{3} = \frac{4.5x-225}{3} = 0 \longrightarrow x = \frac{225}{4.5} = 50$$

سراسری ۸۳

۴۱- مقطع یک عضو سازه ای مربع مستطیل مطابق شکل روبرو می باشد. برآیند تنش ها در مقطع یک نیروی عمودی فشاری در A می باشد. قدر مطلق تنش فشاری چند برابر تنش کششی است؟



۱) $\frac{۱۳}{۱۱}$ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۱/۴



ماکزیمم تنش فشاری در نقطه A و تنش کششی در نقطه B اتفاق می افتد:

$$\sigma_A = \frac{P}{bh} + \frac{M_x}{\frac{bh^2}{6}} + \frac{M_y}{\frac{hb^2}{6}} = \frac{P}{bh} + \frac{P\times h/2}{\frac{bh^2}{6}} + \frac{P\times b/2}{\frac{hb^2}{6}} = \frac{P}{bh}(1+3+3) = \frac{7P}{bh}$$

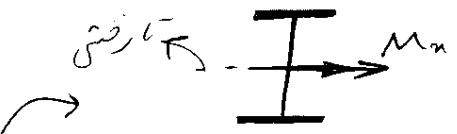
$$\sigma_B = \frac{P}{bh} - \frac{M_x}{\frac{bh^2}{6}} + \frac{M_y}{\frac{hb^2}{6}} = \frac{P}{bh}(1-3-3) = \frac{-5P}{bh} \longrightarrow \frac{\sigma_A}{\sigma_B} = \frac{7}{5} = 1.4$$

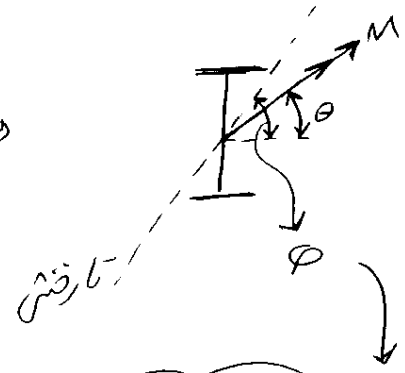
نکته: خمش دومحوره و تارخشی

همانند دایره مورکر تنش که اصلی (Max, Min) داریم، هر مقطع دومحوره اصلی عمود بر هم دارد که I_x و I_y در آن‌ها Max و Min است

اگر M بریکی از محورهای اصلی وارد شود تارخشی همان محور خنثی خواهد بود

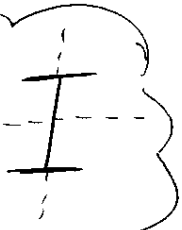
اگر M بر محور اصلی وارد نشود ← محور خنثی و محور خنثی یکی نخواهد بود.





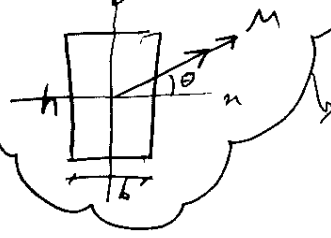
اگر M روی یکی از این دو محور وارد شود، تارخشی به سمت محور ضعیف متمایل می‌شود

$$tg\varphi = \frac{I_x}{I_y} tg\theta$$



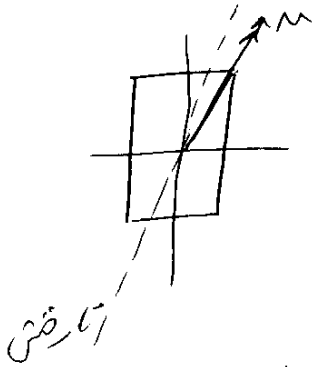
نکته: همانند دایره مورکر $\sigma_1+\sigma_2$ (جمع تنش‌ها ثابت بود) مقدار I_x+I_y همیشه ثابت است.

برای ۲۸: در یک مقطع تنها M در راستای وارد شود تا تنش خنثی ماکزیمم شود



$$\begin{cases} M_x = M\cos\theta \\ M_y = M\sin\theta \end{cases} \rightarrow \sigma = \frac{6M_x}{bh^2} + \frac{6M_y}{hb^2} = \frac{6M}{bh}\left(\frac{\cos\theta}{h} + \frac{\sin\theta}{b}\right)$$

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = 0 \rightarrow \frac{-\sin\theta}{h} + \frac{\cos\theta}{b} = 0 \rightarrow tg\theta = \frac{h}{b}$$ در راستای قطر



ارشال قبل زاویه تارخنثی با محور خنثی؟

$$tg\varphi = \frac{I_x}{I_y} tg\theta = \frac{h^2}{b^2} tg\theta$$

$$\rightarrow tg\varphi = \frac{h^3}{b^3} \rightarrow \varphi = Arctg\left(\frac{h^3}{b^3}\right)$$

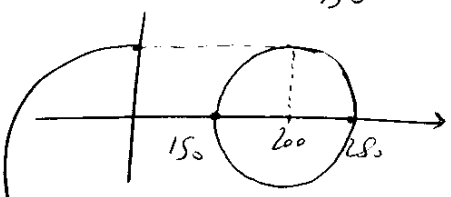
آزاد 85 اریک نبشی $I_x = I_y = 200^{cm^4}$ است. اگر همان نیرو حول یکی از محورهای اصلی $I = 150^{cm^4}$ باشد، نوع این محور و مقدار I_{xy} چقدر است؟

1) ضعیف، $I_{xy} = 75$ قوی، $I_{xy} = 50$

2) قوی، $I_{xy} = 75$ ضعیف $I_{xy} = 50$ ✓

$$I_x + I_y = 400 \rightarrow I_1 + I_2 = 400 \rightarrow I_2 = 250$$

150



$I_{xy} = R = 50$

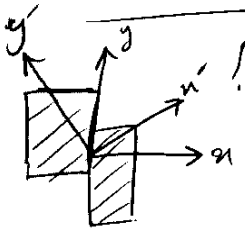
بنابراین I_1 محور ضعیف است ←

سرانس 76: اگر

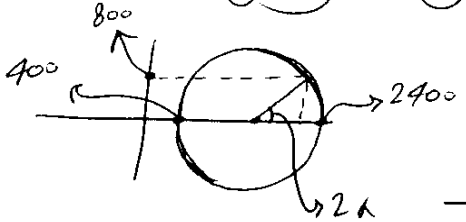
$|I_{xy}| = 800$

$I_{min} = 400$

$I_{max} = 2400$



مقدار $\frac{I_x}{I_y}$ ؟ و زاویه دوران محور x و y نسبت به محور اصلی!



$$tg2\alpha = \frac{800}{2000} \rightarrow \alpha = 26.6^\circ$$

$$\frac{I_x}{I_y} = \frac{600+1400}{-600+1400} = 2.5$$

آزاد۸۹

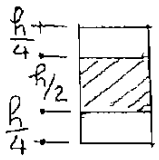
۵۵- در مقطع دایروی زیر نیروی محوری کششی P در نقطه A به فاصله e از بالای مقطع روی قطر قائم مقطع اعمال شده است. قطر مقطع چقدر باشد تا تنش فشاری در پایین مقطع ماکزیمم شود؟

۱) 2.4e
۲) 4.2e
۳) 3e
۴) 4e

۱۳-٤-سهم لنگر

سراسری ۸۴

۴۸- مقطع تیری به شکل مستطیل است. اگر زیراثر لنگر خمشی M قرار گیرد چه مقداری از لنگر توسط تنش‌های به وجود آمده در مساحت هاشور خورده ایجاد می‌شود؟

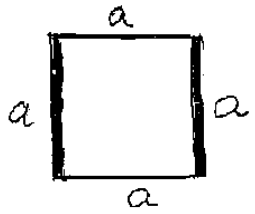


۱) $\frac{M}{2}$
۲) $\frac{M}{4}$
۳) $\frac{M}{8}$
۴) $\frac{M}{16}$

$$\frac{I_{\text{هاشور}}}{I_{\text{کل}}} = \frac{\left[\frac{b\left(\frac{h}{2}\right)^3}{12}\right]}{\left[\frac{bh^3}{12}\right]} = \frac{1}{8} \longrightarrow \text{سهم قسمت هاشورخورده از لنگر} = \frac{M}{8}$$

سراسری ۸۴

۴۹- شکل روبرو مقطع تیری است که جدارهای افقی به ضخامت t_1 و جدارهای قائم به ضخامت t_2 می‌باشند. t_1 و t_2 بسیار کم هستند. نسبت $\frac{t_2}{t_1}$ چقدر باشد تا نصف لنگر خمشی در جدارهای قائم و نصف آن در جدارهای افقی قرار گیرد؟



۱) ۴
۲) ۳
۳) ۲
۴) ۱

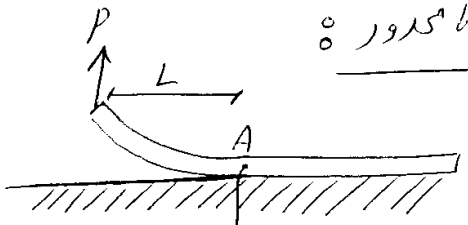
$$I \text{ جدارکی قائم} = I \text{ جدارکی افقی} \Rightarrow 2\left[at_1 \times \left(\frac{a}{2}\right)^2\right] = 2\times\left[\frac{a^3 t_2}{12}\right] \Rightarrow \frac{a^3 t_1}{2} = \frac{a^3 t_2}{6} \Rightarrow \frac{t_2}{t_1} = 3$$

آزاد۸۹

۵۲- یک مقطع لوله‌ای شکل به شعاع متوسط r و ضخامت t تحت اثر لنگر خمشی M قرار دارد. برآیند نیروهای وارد بر مقطع در بالای محور خنثی چقدر است؟

۱) $\frac{M}{\pi r}$
۲) $\frac{2M}{\pi r}$
۳) $\frac{4M}{3\pi r}$
۴) $\frac{5M}{3\pi r}$

۱۳-۵-تیر با طول نامحدود



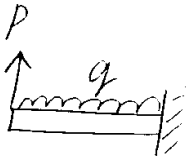
تیر با طول نامحدود :

نکته :

θ انتها را اینجا صفر است (تیر افقی می شود)

بنابراین کافی است که M نقطه A را برابر صفر قرار دهیم

از طرفی θ_A برابر صفر است و باید تکیه گاه گیردار فرض شود

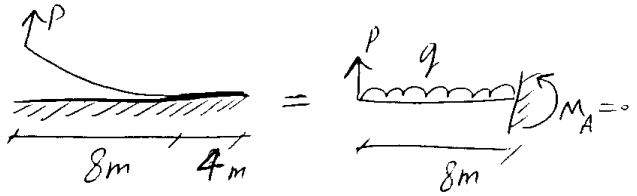
روش حل : تیر فوق را به صورت  فرض می کنیم و M_A را برابر صفر

فرض می کنیم

سراسری ۸۸

۶۷- یک شاخه تیرآهن ۱۲ متری با وزن ۲۴۰۰ N روی زمین سفت و صلب قرار دارد. اگر یک انتهای آن به بالا کشیده شود به طوری که ۸ متر از تیر از زمین جدا شود نیروی لازم چند نیوتن می‌باشد؟ $E = ۲۰۰\ GPa$ و $I = ۲۰۰۰\ cm^۴$ می‌باشد.

۱) ۸۰۰ ۲) ۶۶۷ ۳) ۶۰۰ ۴) ۱۶۰۰



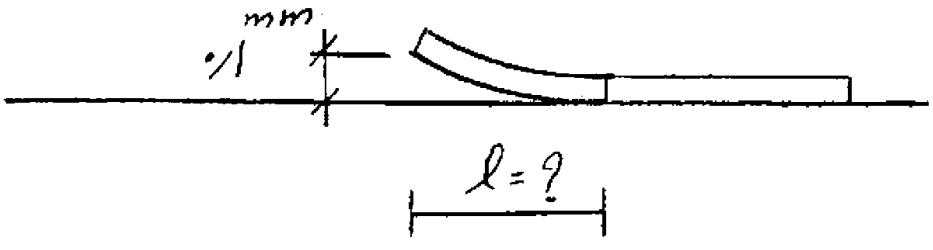
وزن واحد طول $= \frac{\text{وزن تیر}}{\text{طول تیر}}$

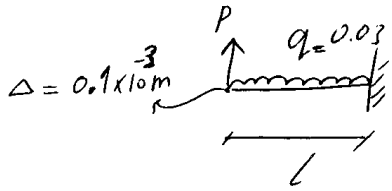
$$q = \frac{2400}{12} = 200 \Rightarrow P\times 8 - \frac{q\times 8^2}{2} = 0 \rightarrow P\times 8 = \frac{200\times 8^2}{2} \Rightarrow P = 800\ N$$

سراسری ۸۸

۸- تیری که طول آن به حد کافی طولانی است بر روی زمین صلب قرار گرفته است. اگر انتهای آن را به اندازهٔ ۰/۱ میلی‌متر بالا ببریم، طولی که از آن بر حسب متر (m) از زمین جدا می‌شود، چقدر است؟ (وزن تیر ۰/۲ تن بر متر و $EI = ۲۰۰ t.m^۲$ می‌باشد.)

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۱/۵
۴) ۳





اول از لنگر باید صرف شود

$P \times L = \frac{0.03 \times L^2}{2}$

P و L مجهول هستند

اول Δ را برابر

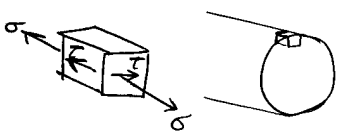
$0.1 \times 10^{-3} = \frac{P L^3}{3 \times 200 EI} - \frac{0.03 \times L^4}{8 \times 200 EI}$ ⇒ $L = 2\,m,\ P = 0.03\,ton$

۱۳-۶-ترکیب خمش و پیچش

سراسری۸۵

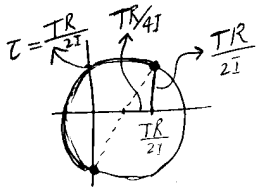
۵۱- به میله‌ای به مقطع دایره لنگر پیچشی T و لنگر خمشی M وارد می‌شود بطوریکه $M = \frac{T}{2}$. اگرلنگر پیچشی نصف شود و لنگر خمشی دو برابر گردد τ_{max} در میله چه تغییری می‌کند؟

۱) تغییری نمی‌کند. ۲) $\sqrt{5}$ برابر می‌شود. ۳) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$ برابر می‌شود. ۴) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ برابر می‌شود.



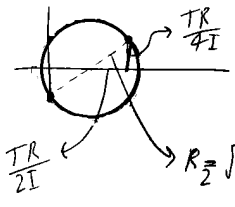
$\begin{cases} \tau = \frac{TR}{J} = \frac{TR}{2I} \\ \sigma = \frac{(M=\frac{T}{2})R}{I} = \frac{TR}{2I} \end{cases}$

حالت اول:



$\tau_{max} = R_1 = \sqrt{\left(\frac{TR}{2I}\right)^2 + \left(\frac{TR}{4I}\right)^2}$

حالت دوم:



$\begin{cases} \tau = \frac{(T/2)R}{J} = \frac{TR}{4I} \\ \sigma = \frac{(M=T)R}{I} = \frac{TR}{I} \end{cases}$

بنابراین τ_{max} تغییر می‌کند

سراسری ۸۲

۳۴- میله ای که مقطع آن دایره ای است زیر اثر لنگر پیچشی T دارای تنش برشی ماگزیمم ۴۰ MPa می باشد. اگر همین میله زیر اثر لنگر خمشی M که مقدار آن مساوی T است قرار گیرد تنش برشی ماگزیمم آن چقدر می شود؟

۱) ۸۰ ۲) ۲۰ ۳) $۴۰\sqrt{۲}$ ۴) ۴۰

سراسری ۸۷

۶۰- میله‌ای دارای مقطعی به شکل لوله با ضخامت کم t و بشعاع R است. یک بار زیر اثر لنگر خمشی M و بار دوم زیر اثر لنگر پیچشی T=M قرار می‌گیرد.نسبت تنش فشاری ایجاد شده در حالت اول به حالت دوم چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

در حالت اول:

$\sigma_1 = \frac{MR}{\frac{\pi}{4}R^4} = \frac{4M}{\pi R^3}$

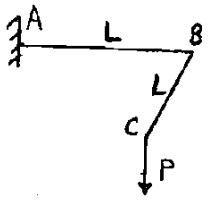
در حالت دوم:

$\tau = \frac{MR}{\frac{\pi}{2}R^4} = \frac{2M}{\pi R^3} \longrightarrow \sigma_2 = \tau = \frac{2M}{\pi R^3}$

$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = 2$

سراسری۸۵

۴۴- در شکل روبرو ABC در صفحهٔ افق است و P قائم می‌باشد. AB و BC میله‌هایی یکسان به مقطع دایره می‌باشند. اگر $\delta_B = \frac{pL^3}{3EI}, G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{E}{2/6}$ باشد. تغییر مکان نقطه C برابر است با:



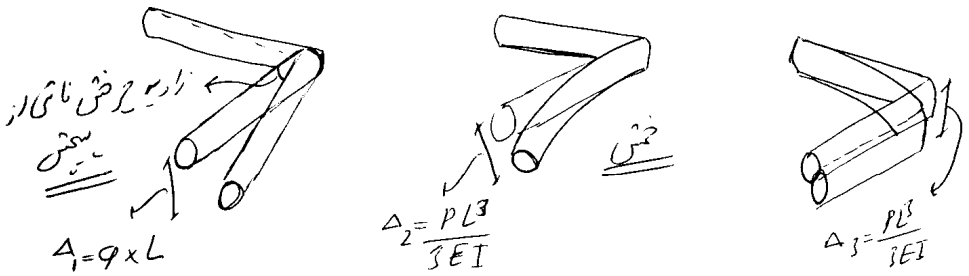
۱) $\frac{PL^3}{EI}$

۲) $\frac{2PL^3}{3EI}$

۳) $\frac{9/8PL^3}{3EI}$

۴) $\frac{5/9pL^3}{3EI}$

Δ_C ناشی از پیچش AB و خمش BC می‌باشد



$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = \left(\frac{TL}{GJ}\right) \times L + 2 \times \left[\frac{PL^3}{3EI}\right] = \frac{PL}{\frac{E(2I)}{2.6}} \times L + \frac{2PL^3}{3EI} = \frac{5.9PL^3}{3EI}$$

سراسری ۸۰

میله‌ای به قطر d زیر اثر لنگر پیچشی T_W قرار می‌گیرد و در آن تنش برشی τ_W به‌وجود می‌آید. اگر این میله زیر اثر لنگر خمشی M_W قرار گیرد، در آن تنش عمودی σ_W به‌وجود می‌آید. با فرض اینکه $\tau_W = 0/6\sigma_W$ باشد، مقدار α در رابطهٔ $T_W = \alpha M_W$، کدام است؟

۱) ۰/۸ ۲) ۱/۲ ۳) ۰/۳ ۴) ۰/۶

$$\tau_W = \frac{T_W R}{\frac{\pi}{2}R^4} = \frac{2T_W}{\pi R^3} \quad \sigma_W = \frac{M_W R}{\frac{\pi}{4}R^4} = \frac{4M_W}{\pi R^3} \Rightarrow \frac{\tau_W}{\sigma_W} = 0.6 \Rightarrow \frac{2T_W}{4M_W} = 0.6 \rightarrow T_W = 1.2M_W$$

۱۳-۷-آنالیز ابعادی

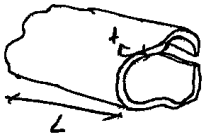
آزاد ۸۸

۷۳- اگر در یک مقطع جدار نازک باز ابعاد مقطع α برابر و ضخامت مقطع $\frac{1}{\alpha}$ برابر شود، مقاومت پیچشی و سختی پیچشی مقطع به ترتیب چند برابر خواهد شد؟

۱) $\frac{1}{\alpha}$ برابر و $\frac{1}{\alpha}$ برابر ۲) $\frac{1}{\alpha}$ برابر و $\frac{1}{\alpha^2}$ برابر ۳) $\frac{1}{\alpha^2}$ برابر و $\frac{1}{\alpha}$ برابر ۴) $\frac{1}{\alpha^2}$ برابر و $\frac{1}{\alpha^2}$ برابر

$T = \frac{1}{3}\alpha t^2 \tau \rightarrow T \downarrow \frac{1}{\alpha}$ برابر

$\frac{GJ}{L} = \frac{\frac{1}{3}\alpha t^3}{L}$ برابر α برابر $\frac{1}{\alpha}$ برابر $\rightarrow \frac{GJ}{L} \rightarrow \frac{1}{\alpha^2}$



آزاد ۸۵

۷۳- اگر در یک مقطع جدار نازک باز ابعاد مقطع α برابر و ضخامت مقطع $\frac{1}{\alpha}$ برابر شود، مقاومت پیچشی و سختی پیچشی مقطع به ترتیب چند برابر خواهد شد؟

۱) $\frac{1}{\alpha}$ برابر و $\frac{1}{\alpha}$ برابر ۲) $\frac{1}{\alpha}$ برابر و $\frac{1}{\alpha^2}$ برابر ۳) $\frac{1}{\alpha^2}$ برابر و $\frac{1}{\alpha}$ برابر ۴) $\frac{1}{\alpha^2}$ برابر و $\frac{1}{\alpha^2}$ برابر

۵۲- در یک پوسته که تحت اثر بار متمرکز P در وسط آن است اگر همه ابعاد پوسته α برابر شود لنگر خمشی و تنش خمشی ماکزیمم پوسته به ترتیب چند برابر خواهد شد؟

۱) α برابر و $\frac{1}{\alpha}$ برابر ۲) α برابر و $\frac{1}{\alpha^3}$ برابر ۳) α^2 برابر و $\frac{1}{\alpha^3}$ برابر ۴) α برابر و $\frac{1}{\alpha^2}$ برابر

آزاد ۸۵

۷۷- در یک پوسته که تحت اثر وزن خود است اگر همه ابعاد پوسته α برابر شود انحناء ماکزیمم پوسته چند برابر خواهد شد؟

۱) α برابر ۲) $\frac{1}{\alpha}$ برابر ۳) $\frac{1}{\alpha^2}$ برابر ۴) تغییر نمی کند

$$\text{انحنا} = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} = \frac{P.L}{EI}$$

$P \rightarrow$ برابر α^3

$L \rightarrow$ برابر α

$I \rightarrow$ برابر α^4

$\longrightarrow$ ثابت $\frac{}{}$ انحنا

آزاد ۸۴

۲۶- در یک پوسته که تحت اثر وزن خود است اگر همه ابعاد پوسته α برابر شود، تنش خمشی ماکزیمم پوسته چند برابر خواهد شد؟

۱) $\frac{1}{\alpha^2}$ ۲) α ۳) $\frac{1}{\alpha}$ ۴) α^2

$$\sigma = \frac{6(PL)}{bh^2} = \frac{6(\alpha^3)(\alpha)}{(\alpha)(\alpha^2)} = \alpha$$

مثال: اگر پوسته فوق تحت بار متمرکز P قرار داشته باشد و ابعاد α برابر شود، σ و M و Δ چند برابر می شوند؟

$M = P \times L \longrightarrow \alpha$

$\sigma = \frac{(PL)C}{I_y} \xrightarrow{L^4} \frac{1}{\alpha^2}$

$\Delta = \frac{PL^3}{3EI} \xrightarrow{\text{ثابت } E} \frac{PL^3}{I_y} \xrightarrow{L^4} \frac{1}{\alpha}$

آزاد۸۳

۲۵- در یک پوسته که تحت اثر وزن خود است اگر همه ابعاد پوسته α برابر شود، تنش خمشی ماکزیمم پوسته چند برابر خواهد شد؟

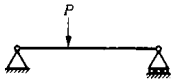
۱) $\frac{1}{\alpha^2}$ ۲) α^2 ۳) $\frac{1}{\alpha}$ ۴) α

سراسری ۸۰

اگر تمام ابعاد تیر (در شکل روبرو) α برابر شوند، تغییرمکان ماکزیمم آن چه تغییری می‌کند؟

۱) تغییری نمی‌کند. ۲) α برابر می‌شود.

۳) α برابر کوچک می‌شود. ۴) در $\frac{1}{\alpha^2}$ ضرب می‌شود.



$\Delta = \frac{PL^3}{3EI} \rightarrow \frac{L^3}{L^4} = \frac{1}{L} \rightarrow$ با برکوچک می‌شود

آزاد۸۹

۴۹- اگر در یک عضو تحت پیچش فقط ابعاد مقطع α برابر شود (طول عضو ثابت بماند) مقاومت پیچشی و سختی پیچشی عضو بترتیب چند برابر خواهد شد؟

۱) α^2 برابر و α^4 برابر ۲) α^2 برابر و α^3 برابر

۳) α^3 برابر و α^3 برابر ۴) α^3 برابر و α^4 برابر

آزاد۸۹

۵۳- در یک پوسته که تحت اثر بار متمرکز P در وسط آن است اگر همه ابعاد پوسته α برابر شود شیب و تغییرمکان ماکزیمم پوسته بترتیب چند برابر خواهد شد؟

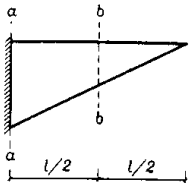
۱) $\frac{1}{\alpha^2}$ برابر و $\frac{1}{\alpha}$ برابر ۲) $\frac{1}{\alpha}$ برابر و $\frac{1}{\alpha}$ برابر

۳) $\frac{1}{\alpha^2}$ برابر و $\frac{1}{\alpha^2}$ برابر ۴) $\frac{1}{\alpha}$ برابر و $\frac{1}{\alpha^2}$ برابر

سراسری ۸۰

تیر شکل داده شده با پهنای ثابت و ارتفاع متغیر (خطی) تحت اثر وزن خود قرار گرفته است.

کدام رابطه در مورد تنشهای حداکثر، در مقاطع $a-a$ و $b-b$ درست است؟

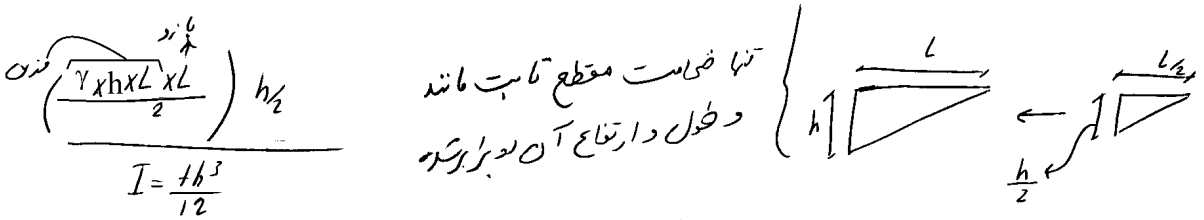


۱) $\sigma_{a-a} = \frac{1}{2}\sigma_{b-b}$

۲) $\sigma_{a-a} = \sigma_{b-b}$

۳) $\sigma_{a-a} = 2\sigma_{b-b}$

۴) $\sigma_{a-a} = 4\sigma_{b-b}$

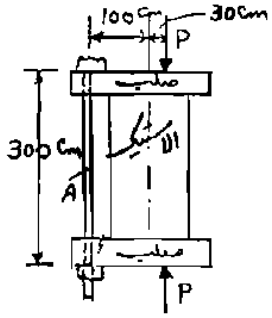


تنها ضلعت مقطع ثابت ماند و طول و ارتفاع آن دو برابر شود

$\sigma = \frac{Mc}{I} \rightarrow \sigma \cong \frac{L \times h \times L \times h}{h^3}$ → 2 برابر می‌شود

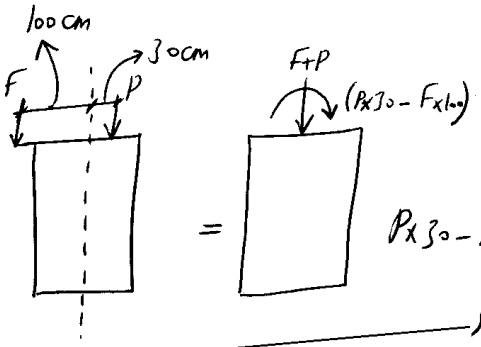
سراسری ۸۱

۳۳- در دوطرف یک مکعب مستطیل الاستیک دو جسم صلب قرار گرفته و بار $P = 20t$ به اجسام صلب وارد می‌شود. پیچ A بطول سه متر و به گام یک میلیمتر (فاصله دندانه‌ها) مطابق شکل دو جسم صلب را بهم وصل می‌کند . از حالت تماس بدون تنش ، مهره را چند دور باید پیچاند تا تنش وارد به جسم الاستیک یکنواخت باشد؟ ($E = 2\times10^6 \frac{kg}{cm^2}$ و $A = 5\ cm^2$ سطح مقطع پیچ)



۱) ۱/۲
۲) ۱/۸
۳) ۶
۴) با دوران مهره نمی‌توان تنش در مکعب مستطیل را یکنواخت کرد.

در این سوال چون مشخصات قسمت الاستیک داده نشده است (A و E و σ) فرض بر این است که تغییر طول آن در مقایسه با تغییر طول میله A ناچیز است



روش حل: ابتدا از تعادل مقدار F را بدست می‌آوریم

از آنجا که مقدار لنگر باید صفر باشد (مسئله گفته)

$$Px30 - Fx100 = 0 \longrightarrow F = 0.3P = 6\ ton$$

بنابراین برای ضمن لنگر باید میله A به اندازه $F = 6\ ton$ تحت کشش قرار گیرد

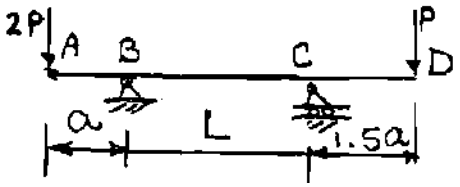
$$\Delta_{\text{میله } A} = \frac{FL}{EA} = \frac{(6000)\times300}{2\times10^6\times5} = 0.18\ cm = 1.8\ mm$$

چون فاصله دندانه‌ها (گام پیچ) 1mm است

پس باید 1.8 دور بچرخانیم

سراسری ۸۱

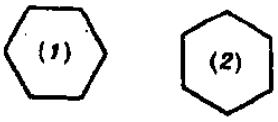
۳۱- در شکل مقابل ، سطح مقطع در تمام طول تیر ، ثابت است . نسبت $\frac{(\tau_{max})_{AB}}{(\tau_{max})_{CD}}$ و $\frac{(\sigma_{max})_{AB}}{(\sigma_{max})_{CD}}$ بترتیب کدام است ؟



۱) ۱ و $\frac{2}{3}$
۲) ۲ و ۱/۵
۳) ۱ و ۱
۴) ۲ و $\frac{4}{3}$

آزاد ۸۶

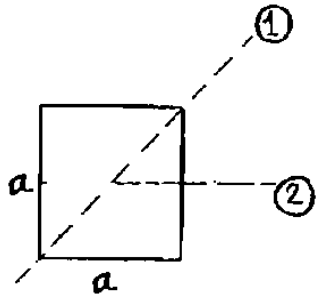
۵۱- مقاطع تیرهای دوسر ساده ۱ و۲، شش ضلعی های منتظم یکسان بصورت زیر می باشد. نسبت تغییر مکان و تنش ماکزیمم تیر اول به تیر دوم برای یک بارگذاری یکسان کدام است؟



۱) ۱ و $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۲) ۱ و ۱ ۳) $\sqrt{2}$ و ۱ ۴) $\sqrt{2}$ و $\frac{\sqrt{3}}{2}$

سراسری ۸۲

۴۴- مدول مقطع مربع نسبت به یک قطر چند برابر مدول مقطع آن نسبت به محور موازی ضلع آنست؟



۱) ۱
۲) $\sqrt{2}$
۳) $\frac{1}{\sqrt{2}}$
۴) $\frac{1}{2}$

مدول مقطع یعنی $S = \frac{I}{c}$

حول محور 2-2 $\rightarrow I = \frac{bh^3}{12} = \frac{a^4}{12}$

حول محور 1-1 $\rightarrow I = \frac{a^4}{12}$

نکته: اگر در یک مقطع $I_x = I_y$ بود حول هر محور دیگری که از مرکز سطح مقطع بگذرد مقدار I ثابت است

$$S_{2-2} = \frac{\frac{a^4}{12}}{\left(\frac{a}{2}\right)} = \frac{a^4}{6}$$

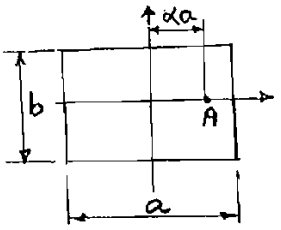
$$S_{1-1} = \frac{\frac{a^4}{12}}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{\sqrt{2}\,a^4}{12}$$

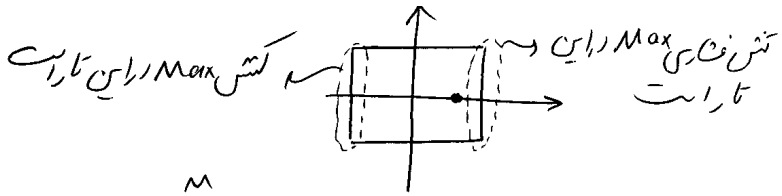
$$\rightarrow \frac{S_{1-1}}{S_{2-2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

سراسری ۸۲

۳۷- یک عضو کوتاه فشاری به مقطع مربع مستطیل است. نیروی P در نقطهٔ A وارد می شود. α چقدر باشد تا تنش فشاری دو برابر تنش کششی گردد؟

۱) $\frac{1}{2}$
۲) $\frac{1}{3}$
۳) $\frac{1}{4}$
۴) $\frac{2}{3}$



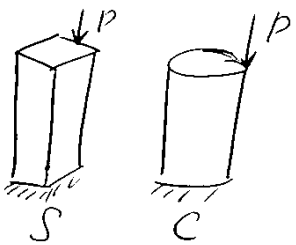


$$\sigma_{\text{فشاری}} = \frac{P}{ab} + \frac{(P\alpha a)\frac{a}{2}}{\frac{ba^3}{12}} = \frac{P}{ab}(1+6\alpha) \qquad \sigma_{\text{کشی}} = \frac{-P}{ab} + \frac{(P\alpha a)\frac{a}{2}}{\frac{ba^3}{12}} = \frac{P}{ab}(-1+6\alpha)$$

$$\frac{\sigma_{\text{فشاری}}}{\sigma_{\text{کشی}}} = 2 \Rightarrow \frac{1+6\alpha}{-1+6\alpha} = 2 \rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$

سراسری 78

مساحت مقاطع را برابر نسبت تنش فشاری ماکزیمم در دو مقطع که؟ $\frac{\sigma_S}{\sigma_C} = ?$

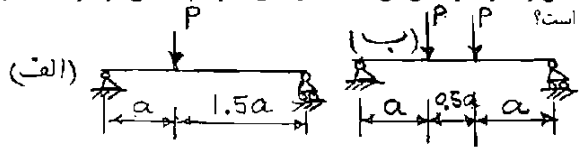


$$\sigma_S = \frac{P}{A} + \frac{6(Ph/2)}{bh^2} \qquad \sigma_C = \frac{P}{A} + \frac{(Pr)r}{\frac{\pi}{4}r^4}$$

$$\rightarrow \frac{\sigma_S}{\sigma_C} = \frac{\frac{P}{A} + \frac{3P}{A}}{\frac{P}{A} + 4\frac{P}{A}} = \frac{4}{5}$$

سراسری ۸۲

۳۵- تیرهای شکل زیر از یک جنس و با یک سطح مقطع و با رفتار خطی می باشند. اگر تنش ماگزیمم خمشی در تیر الف مساوی ۶۰ MPa باشد، تنش ماگزیمم در تیر (ب) چند MPa است؟

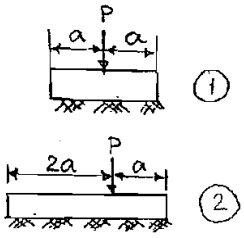


۱) ۱۰۰
۲) ۱۲۰
۳) ۱۵۰
۴) ۶۰

$$\sigma_{الف} = \frac{\left(\frac{P \times 1.5a \times a}{2.5a}\right) \times c}{I} \quad \sigma_{ب} = \frac{(P \times a) \times c}{I} \quad \rightarrow \sigma_{الف} = \sigma_{ب} \times \frac{1.5}{2.5} \Rightarrow \text{پس اگر } \sigma_{الف} \text{ برابر ۶۰ باشد} \Rightarrow \sigma_{ب} = 60 \times \frac{2.5}{1.5} = 100$$

سراسری ۸۴

۵۸- بعد دیگر پی‌های نشان داده شده در شکل روبرو مساویست. تنش‌های ماگزیمم وارد بر خاک به ترتیب σ_1 و σ_2 فرض می‌شود، نسبت $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ چیست؟



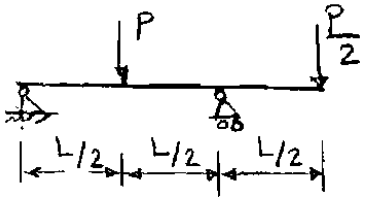
۱) ۱
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) ۱٫۵
۴) $\frac{۳}{۴}$

فرض کنیم که b بعد دیگر پاشد

$$\sigma_1 = \frac{P}{2ab} \quad \sigma_2 = \frac{P}{3ab} + \frac{(P \times 0.5a) \times 1.5a}{\frac{(3a)^3 b}{12}} = \frac{2P}{3ab} \rightarrow \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{3}{4}$$

سراسری ۸۳

۴۳- مقطع تیر شکل روبرو مربع مستطیل می باشد. تنش مجاز فشاری چند برابر تنش مجاز کششی باشد تا با افزایش P هر دو تنش با هم به مقدار مجاز برسند؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) $\frac{۱}{۴}$

ابتدا باید تنش کششی و فشاری را بیابیم

دیاگرام لنگر

$-\frac{PL}{4}$

$+\frac{PL}{8}$

M^- دو برابر M^+ است

$\sigma = \frac{Mc}{I}$ و M با c رابطه دارد

یعنی در این نقطه که M^- ماکزیمم است هم

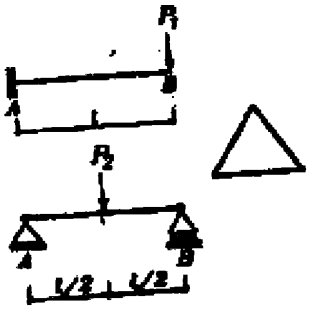
تنش فشاری را هم کششی پس مقدار مجاز برای هر دو تنش فشاری و کششی باید یکسان باشد

نکته: اگر مقطع تیر نوک مثلثی بود ← σ_2 در برابر σ_1 ← تارخنثی ← σ_2 در این صورت

چون لنگر (منفی) ماکزیمم است ← تنش کششی در برابر فشاری خواهد بود ← گزینه 2 صحیح خواهد بود.

آزاد ۸۸

۵۳- دو تیر زیر دارای مقطع مثلثی مطابق شکل می باشند. بار P_2 چقدر باشد تا تنش خمشی کششی ماکزیمم دو تیر مساوی شوند؟



۱) $2P_1$ ۲) $4P_1$ ۳) $8P_1$ ۴) $16P_1$

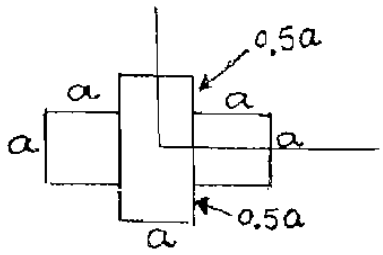
تیر اول ← لنگر ← تنش کششی $\sigma_1 = \frac{M_x \frac{2h}{3}}{I} = \frac{2P_1Lh}{3I}$

$\rightarrow \frac{2P_1Lh}{3I} = \frac{P_2Lh}{12I} \rightarrow P_2 = 8P_1$

تیر دوم ← لنگر ← تنش کششی $\sigma_2 = \frac{M_x \frac{h}{3}}{I} = \frac{(\frac{P_2L}{4}) \times \frac{h}{3}}{I} = \frac{P_2Lh}{12I}$

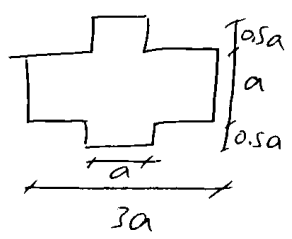
سراسری ۸۴

۴۶- مقطع تیری مطابق شکل از چسبانیدن سه قسمت بهم تشکیل شده است. اگر لنگر خمشی M حول محور افقی تنش ماکزیمم σ_1 و لنگر خمشی M حول محور قائم تنش ماکزیمم σ_2 را ایجاد کند، نسبت $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ چیست؟



۱) $\frac{۱۵}{۲۸}$
۲) $\frac{۲}{۳}$
۳) $\frac{۲۸}{۱۵}$
۴) $\frac{۳}{۲}$

σ_1 حول محور افقی $= \frac{M(a)}{\frac{a(2a)^3}{12} + 2\left[\frac{a^3 \times a}{12}\right]} = \frac{6M}{5a^2}$



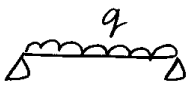
σ_2 حول محور قائم $= \frac{M(1.5a)}{\frac{a(3a)^3}{12} + 2\left[\frac{0.5a(a)^3}{12}\right]} = \frac{9M}{14a^2} \rightarrow \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{6 \times 14}{9 \times 5} = \frac{28}{15}$

سراسری ۸۴

۵۶- دو تیر سادهٔ آلومینیمی و فولادی با ابعاد یکسان زیراثر وزن خود قرار دارند. نسبت $\frac{\sigma_a}{\sigma_s}$ چیست؟

$(E_s = 3E_a = 2/1\times10^6 \frac{kg}{cm^2}\ ,\ \gamma_s = 3\gamma_a = 7/8 \frac{t}{m^3})$

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{9}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{1}{3}$



منظور از تیر ساده تیری است که وقت اثر وزن خودش بارگسترده یکنواخت دارد

آلومینیم $q_a = \gamma_a \times A = \frac{7.8}{3}\times A \Rightarrow M_a = \frac{q_a L^2}{8} = \frac{(\frac{7.8}{3})AL^2}{8} \Rightarrow \sigma_a = \frac{Mc}{I}$

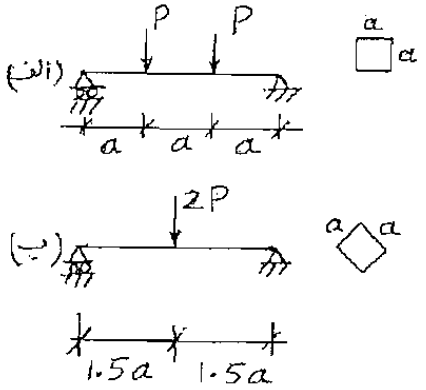
فولاد $q_s = \gamma_s \times A = 7.8\times A \Rightarrow M_s = \frac{7.8AL^2}{8} \Rightarrow \sigma_s = \frac{Mc}{I}$

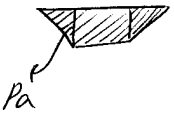
$\frac{\sigma_a}{\sigma_s} = \frac{1}{3}$ ، چون مقطع یکسان است مقادیر A, I, c برای هر دو یکسان است

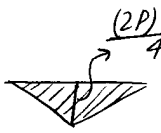
سراسری ۸۴

۵۰- تیرهای «الف» و «ب» با مقطع مشخص در شکل مقابل موجود می‌باشند. نسبت تنش ماکزیمم خمشی تیر «ب» به تیر «الف» کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$
۲) $2\sqrt{2}$
۳) $3\sqrt{2}$
۴) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$



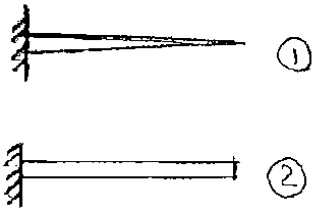
(الف) $M =$  $\Rightarrow M_{max} = Pa \quad \sigma_{الف} = \frac{6M}{a^3} = \frac{6Pa}{a^3} = \frac{6P}{a^2}$

(ب) $M =$  $\Rightarrow M_{max} = \frac{3Pa}{2} \quad \sigma_{ب} = \frac{M(\frac{a\sqrt{2}}{2})}{\frac{a^4}{12}} = \frac{6\sqrt{2}M}{a^3} = \frac{9\sqrt{2}P}{a^2}$

$\frac{\sigma_{ب}}{\sigma_{الف}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

سراسری ۸۴

۴۷- دو تیر ۱-و-۲-دارای طول و پهنای یکسان می‌باشند، ارتفاع هر دو تیر در تکیه‌گاه یکی است ولی تیر یک با ارتفاع متغیر با تغییرات خطی و تیر دو با ارتفاع ثابت است. زیراثر بار گستردهٔ یکنواخت، نسبت $\frac{\sigma_{1max}}{\sigma_{2max}}$ در وسط طول تیرها چقدر است؟



۱) ۴
۲) ۲
۳) ۱
۴) $\frac{1}{2}$

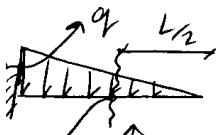
$$\sigma_1 = \frac{M c_1}{I_1} = \frac{6M}{b(\frac{h}{2})^2} = \frac{24M}{bh^2}$$
$$\sigma_2 = \frac{M c_2}{I_2} = \frac{6M}{bh^2}$$

مقدار با گیردار ثابت است پس تنش در دو مقطع یکسان است

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = 4$$

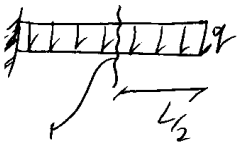
نکته: اگر گشتاور تحت اثر وزن خود تیر باشد:

تیر ① گشتاور حول مقطع متغیر است



$$M_1 = \left[\frac{(\frac{q}{2})(\frac{L}{2})}{2}\right] \times \frac{(\frac{L}{2})}{3}$$

وزن تیر به صورت مثلثی خواهد بود



تیر ② $\Rightarrow M_1 = \frac{qL^2}{48}$

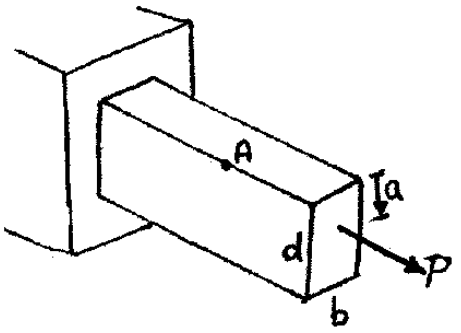
$$M_2 = \frac{qL^2}{8}$$

$$M_2 = \left[q \times \frac{L}{2}\right] \times \frac{\frac{L}{2}}{2}$$

$$\sigma_1 = \frac{M_1 c_2}{I_1} = \frac{6M_1}{b(h/2)^2} = \frac{24M_1}{bh^2}$$
$$\sigma_2 = \frac{M_2 c_2}{I_2} = \frac{6M}{bh^3} = \frac{6M_2}{bh^2}$$
$$\rightarrow \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{4M_1}{M_2} = \frac{2}{3}$$

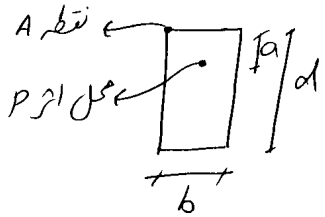
سراسری ۸۹

۴۶- نیروی متمرکز P در عمق a از مقطع تیر نشان داده شده اثر می‌کند. ارتفاع مقطع را به گونه‌ای تعیین کنید که تنش در نقطه A حداکثر باشد؟



۱) b
۲) ۲a
۳) $\frac{bd}{2a}$
۴) ۳a

$$\sigma_A = \frac{P}{bd} + \frac{Mc}{I} = \frac{P}{bd} + \frac{[P \times (\frac{d}{2} - a)]\, d/2}{\frac{bd^3}{12}}$$



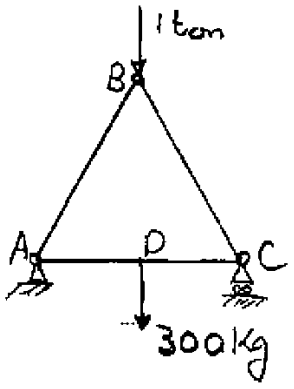
$$= \left(\frac{P}{bd} + \frac{3P}{bd} - \frac{6Pa}{bd^2}\right)$$ این مقدار باید Max خود باشد $\rightarrow \left(\frac{P}{b}\right)\left(\frac{4}{d} - \frac{6a}{d^2}\right)$

نسبت به d

مشتق می‌گیریم $\Rightarrow \frac{-4}{d^2} + \frac{12a}{d^3} = 0 \rightarrow \boxed{d = 3a}$

سراسری ۸۸

۶۵- در شکل روبه‌رو هر سه میله به مقطع مربع به طول ضلع ۶ cm می‌باشند. جنس هر سه میله از فولاد و طول هر کدام ۴ متر است. تنش خمشی در مقطع D در وسط ضلع AC چقدر است؟ (بر حسب کیلوگرم بر سانتی‌متر مربع)

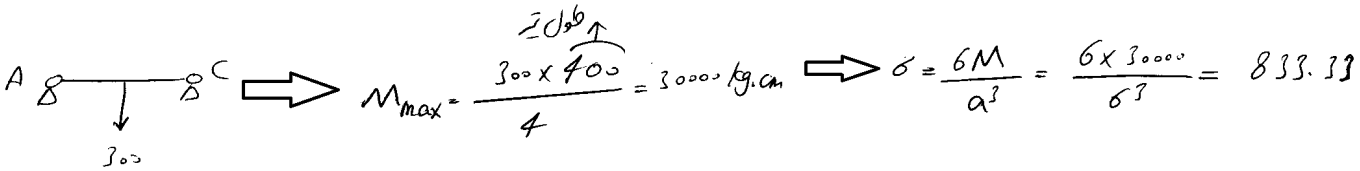


۱) ± ۸۳۳

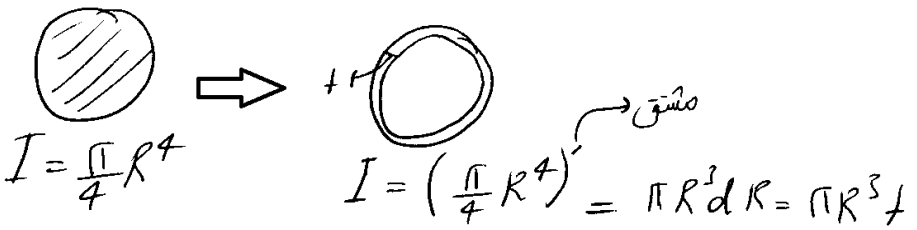
۲) ± ۵۵۵

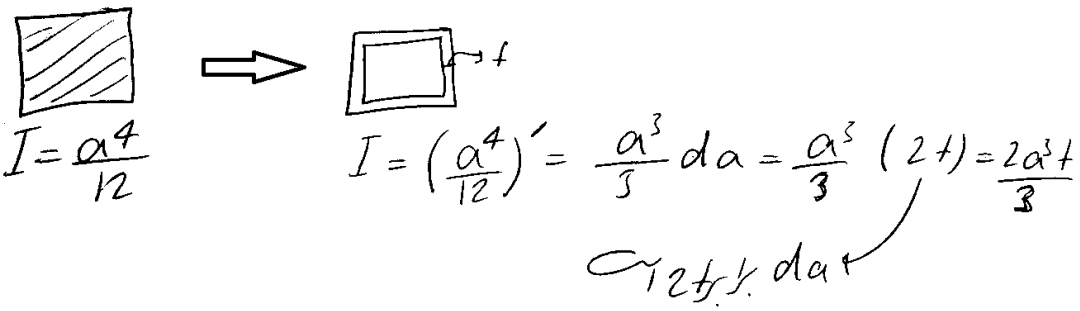
۳) ± ۳۶۱۱

۴) ± ۱۲۵۰



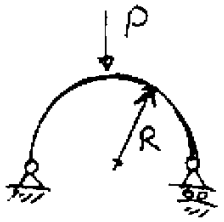
نکته: همان اینرسی اضافی نازک (دایره و مربع)





سراسری ۸۸

۶۴- قوسی به شکل نیم دایره مطابق شکل، زیر اثر نیروی قائم P در رأس می‌باشد. مقطع قوس به شکل دایره به شعاع r می‌باشد. ماگزیمم تنش خمشی در آن چه مقدار است؟

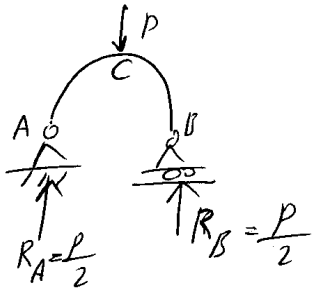


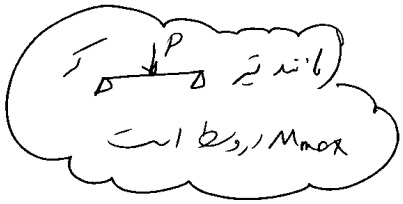
۱) $\frac{PR}{2\pi r^3}$

۲) $\frac{2PR}{\pi r^3}$

۳) $\frac{PR}{\pi r^3}$

۴) $\frac{PR}{2\pi r^4}$





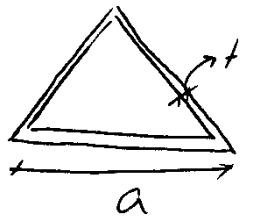
لنگر ماکزیمم در وسط اتفاق می افتد

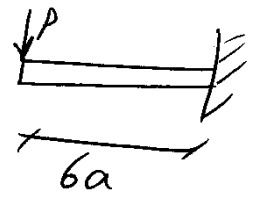
$$M_C = R_B \times R = \frac{PR}{2} \Rightarrow \sigma = \frac{MR}{\frac{\pi}{4}R^4} = \frac{(\frac{PR}{2})R}{\frac{\pi}{4}R^4} = \frac{2P}{\pi R^2}$$

سراسری ۸۸

۶۶- مقدار جابه‌جایی قائم انتهای تیر کنسول به طول $6a$ بر اثر بار قائم P در انتهای آن کدام است؟ (مقطع تیر قوطی به شکل مثلث متساوی‌الاضلاع با هر ضلع به طول a و ضخامت جداره t می‌باشد و مدول ارتجاعی نیز برابر E است.)

۱) $144\sqrt{3}\frac{P}{Et}$ ۲) $144\frac{P}{Et}$ ۳) $288\frac{P}{Et}$ ۴) $216\sqrt{3}\frac{P}{Et}$

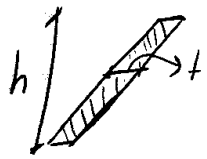




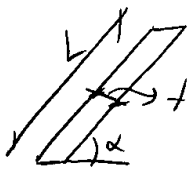
$\Delta = \frac{PL^3}{3EI}$: کانتیلیور

فقط باید I را حساب کنیم

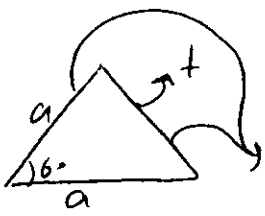
✓ همان اینرسی اعضای مستطیلی مورب سر



$$I = \frac{th^3}{12}$$



$$I = \frac{tL^3}{12} \times (\sin\alpha)^2$$



$$I = 2\left[\frac{ta^3}{12} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + (at)\left[\frac{a\sqrt{3}}{2} \times \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)\right]^2\right] + at \times \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{a^3t}{4}$$

$$\xrightarrow{Ad^2} \Delta = \frac{P \times (6a)^3}{3 \times a^3 t/4 E} = \frac{288P}{Et}$$

سراسری ۸۷

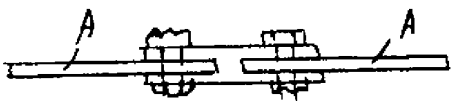
۵۸- در شکل روبرو کل نیروی وارد به هر ورق **A** مساوی **F** است. نیروی وارد به پیچ‌های **a** و **b** که با قطر یکسان هستند چقدر است؟

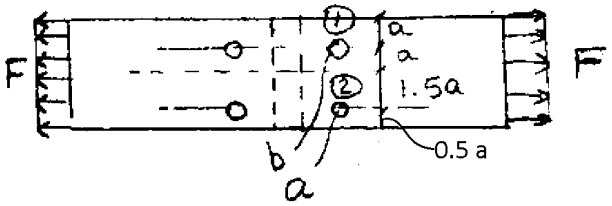
۱) $F_a = F_b = F$

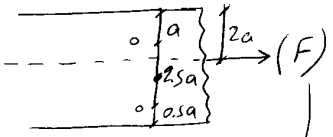
۲) $F_a = F_b = \frac{F}{2}$

۳) $F_b = 0/6F \ , \ F_a = 0/4F$

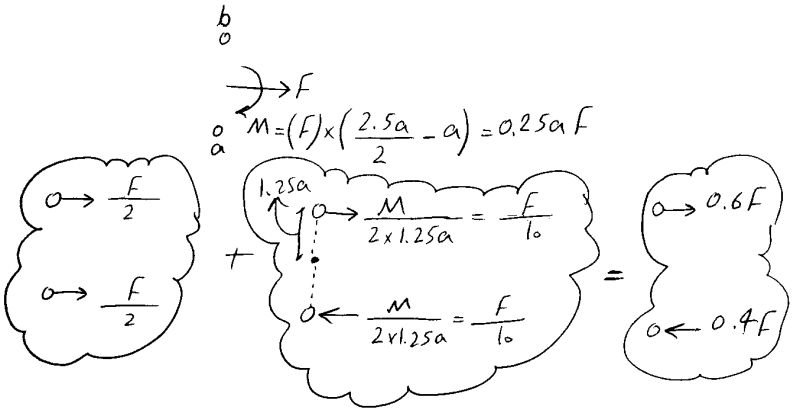
۴) $F_b = 0/4F \ , \ F_a = 0/6F$







۲ برابر مرکز سطح پیچ‌ها وارد نشده است. اگر به مرکز سطح پیچ‌ها وارد می‌شد نیروی هر پیچ برابر $\frac{F}{2}$ می‌بود.



سراسری۸۷

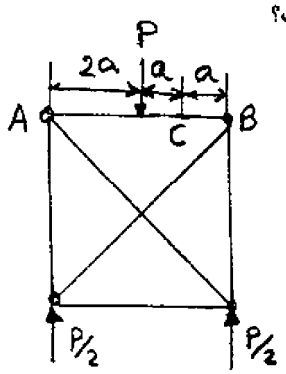
۶۱- در خرپای شکل روبرو میلهٔ **AB** به مقطع مربع و به طول ضلع **b** است. تنش خمشی در نقطه **C** چقدر است؟

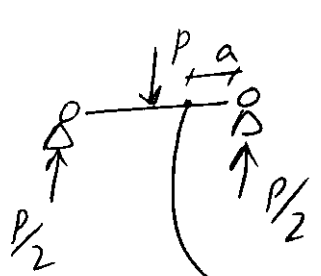
۱) $\frac{3pa}{b^3}$

۲) $\frac{p}{b^2}$

۳) $\frac{3pa}{2b^3}$

۴) $\frac{p}{2b^2}$



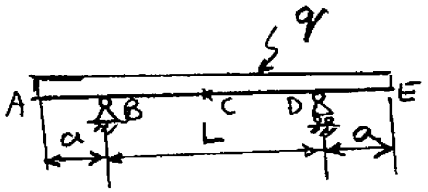


AB رو سر مفصل است بنابراین جدا کردیم.

$$M_C = \frac{P}{2} \times a = \frac{Pa}{2} \rightarrow \sigma = \frac{6M}{b^3} = \frac{3Pa}{b^3}$$

سراسری۸۷

۶۲- تیر شکل روبرو دارای مقطعی ثابت و قرینه نسبت به محورهای افقی و قائم است. تنش خمشی در نقاط C،B و D برابر است. $\frac{a}{L}$ چقدر است؟



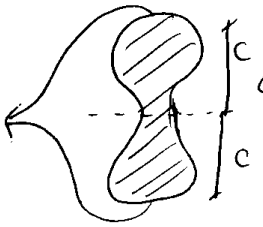
۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۴}$

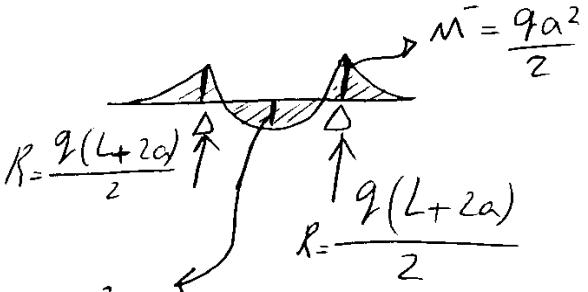
۴) $\frac{۱}{۴}$

مقطع نسبت به محور افقی متقارن است یعنی



تنش فشاری و کششی ناشی از خمش در این نقاط یکسان است چون $\frac{MC}{I}$

بنابراین اگر تنش خمشی یکسان باشد بدین معنی است که خمش (لنگر) در نقاط B,C,D یکسان است



$$M^+ = \underbrace{\frac{-q(a+\frac{L}{2})^2}{2}}_{\text{لنگر در گستره}} + \underbrace{\frac{q(L+2a)}{2}}_{R} \times \frac{L}{2} = q(a+\frac{L}{2})\left[\frac{-(a+\frac{L}{2})}{2} + \frac{L}{2}\right] =$$

$$= q(a+\frac{L}{2})\left(\frac{\frac{L}{2}-a}{2}\right) = \frac{q}{2}\left(\frac{L^2}{4} - a^2\right) \Rightarrow M^- = M^+ \Rightarrow \frac{qa^2}{2} = \frac{q}{2}\left(\frac{L^2}{4} - a^2\right)$$

$$\Rightarrow 8a^2 = L^2 \rightarrow \frac{a}{L} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

سراسری۸۷

۶۳- دو تیر زیر اثر لنگر خمشی مقاومت مساوی دارند. تیر اول دارای مقطع دایره به شعاع R و تیر دوم به مقطع مستطیل به پهنای b و به ارتفاع ۲b است. نسبت $\frac{b}{R}$ چقدر است؟

۱) $\frac{۳\pi}{۲}$

۲) $\frac{\sqrt{۳\pi}}{۲}$

۳) $\frac{\sqrt[۳]{۲\pi}}{۲}$

۴) $\frac{\sqrt[۴]{۳\pi}}{۲}$

مقاومت خمشی = $\frac{\sigma I}{c} \Rightarrow$ تنش مجاز

$M_{\text{مربع}} = \sigma\left(\frac{(2b)^2 b}{6}\right) = \frac{2\sigma b^3}{3}$

$M_{\text{دایره}} = \sigma\left(\frac{\frac{\pi}{4}R^4}{R}\right) = \frac{\pi\sigma R^3}{4}$

$M_{\text{مربع}} = M_{\text{دایره}} \Rightarrow \frac{2\sigma b^3}{3} = \frac{\pi\sigma R^3}{4} \rightarrow \frac{b}{R} = \frac{\sqrt[3]{3\pi}}{2}$

سراسری ۸۷

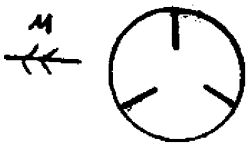
۶۴- مقطع تیری شامل لوله‌ای با شعاع a و ضخامت t همراه سه تقویت کننده به صورت ورق با عرض $\frac{a}{2}$ و ضخامت t می‌باشد به طوری‌که ورق‌ها در داخل لوله به جداره آن به طور عمود بر جداره اتصال یافته و امتداد آن‌ها با یکدیگر زاویه ۱۲۰ درجه می‌سازند. تنش حداکثر در تیر بر اثر لنگر خمشی M را بدست آورید.

۱) $\frac{0/2M}{ta^2}$

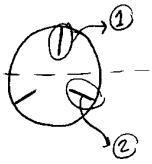
۲) $\frac{0/25M}{ta^2}$

۳) $\frac{0/3M}{ta^2}$

۴) $\frac{M}{\pi ta^2}$

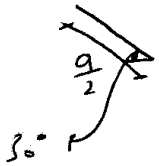


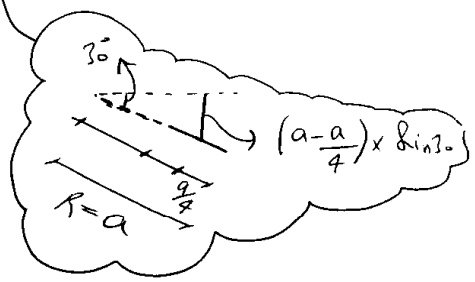
$\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{MR}{I}$ ← تنها مشکل محاسبه I است



$I_1 = \underbrace{\frac{t(\frac{a}{2})^3}{12}}_{\text{حول محور خودش}} + \underbrace{\left[t(\frac{a}{2})\right] \times \left(a-\frac{a}{4}\right)^2}_{Ad^2} = \frac{7}{24}ta^3$

$I_2 = \frac{t(\frac{a}{2})^3}{12} \times (\sin 30)^2 + \underbrace{\left[t(\frac{a}{2}) \times \left(\left(a-\frac{a}{4}\right)\times \sin 30^\circ\right)^2\right]}_{Ad^2} = \frac{7}{96}ta^3$





$I_{کل} = \underbrace{\pi R^3 t}_{\text{لوله}} + I_1 + 2I_2 = \pi a^3 t + \frac{7}{24}ta^3 + \frac{7}{48}ta^3 = a^3t\left(\pi + \frac{7}{16}\right) = 3.57a^3t$

$\sigma = Ma/I = 0.28M/(a^2t)$

گزینه ۲ صحیح است

سراسری ۸۶

۵۶- اگر σ_1 تنش ماگزیمم خمشی در تیر شکل الف و σ_2 تنش ماگزیمم خمشی در تیر شکل ب باشد نسبت $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ چقدر است؟

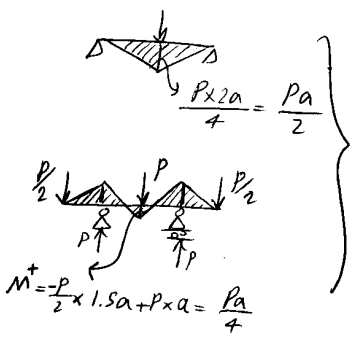
(مقطع هر دو تیر یکی است)

۱) $\frac{1}{3}$

۲) $\frac{1}{2}$

۳) ۱

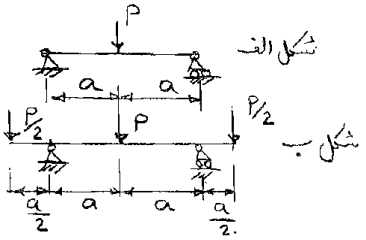
۴) ۲



$\frac{P \times 2a}{4} = \frac{Pa}{2}$

$M^+ = -\frac{P}{2} \times 1.5a + P \times a = \frac{Pa}{4}$

$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = 2$



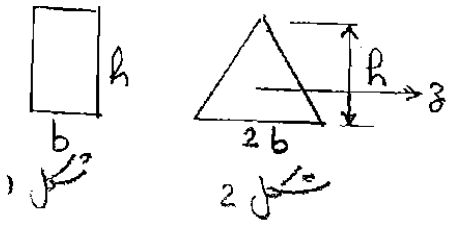
شکل الف

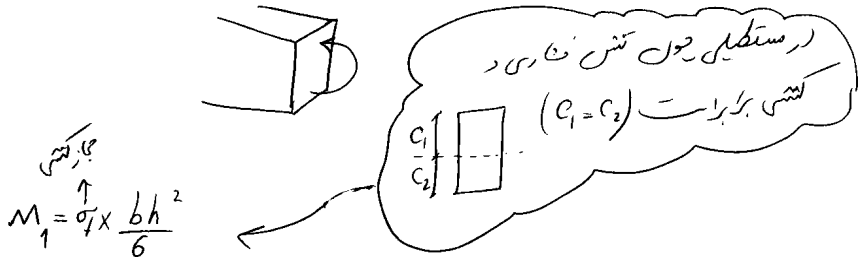
شکل ب

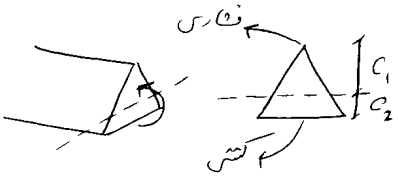
سراسری۸۶

۵۷- دو مقطع شکل روبرو از ماده‌ای هستند که تنش مجاز فشاری آن دو برابر تنش کششی مجاز آن است. نسبت لنگر خمشی مثبت مجاز وارد به دو مقطع $(\frac{M_1}{M_2})$ چقدر است؟ (برای مثلث $I_z = ۲bx\frac{h^۳}{۳۶}$)

۱) $\frac{۱}{۴}$
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) ۱
۴) ۲







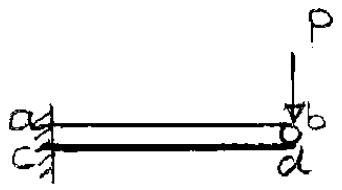
در حالتی تنش فشاری دو برابر تنش کششی خواهد بود چون $c_1 = 2c_2$
با این فرق نمی‌کند که فشار را چک کنیم یا کشش را

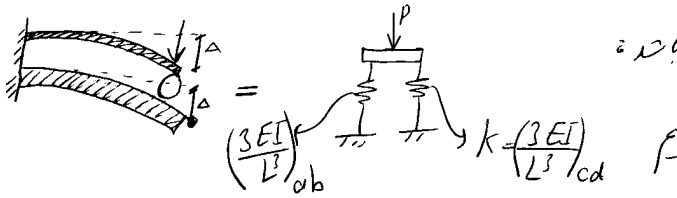
$$M_2 = \frac{\sigma_t\left(\frac{2bh^3}{36}\right)}{c_2} = \frac{\sigma_t\frac{2bh^3}{56}}{(\frac{h}{3})} = \sigma_t\frac{bh^2}{6} \rightarrow M_1 = M_2$$

سراسری۸۶

۶۰- تیر یک سرگیردار ab توسط غلتکی روی تیر یک سرگیردار cd تکیه می‌کند و نیروی p مطابق شکل در نقطهٔ b اثر می‌کند.مقطع هر دو تیر مستطیل با پهنای مساوی است ولی ارتفاع مقطع تیر cd دو برابر ارتفاع مقطع تیر ab است. $\frac{(\sigma_{ab})_{max.}}{(\sigma_{cd})_{max}}$ چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{۱}{۴}$
۳) ۱
۴) ۲





غلتک باعث می‌شود که Δ هر دو تیر یکسان باشد
چون Δ که برابرند نیرو به نسبت سختی تقسیم می‌شود و چون ارتفاع cd دو برابر است

$$\left.\begin{array}{l} I_{cd} = (2^3)\times I_{ab} \\ \rightarrow I_{cd} = 8\,I_{ab} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{M_{ab}}{M_{cd}} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{\sigma_{ab}}{\sigma_{cd}} = 4\left(\frac{M_{ab}}{M_{cd}}\right) = 4\times\frac{1}{8} = \frac{1}{2} \Leftarrow d_{cd} = 2d_{ab}$$ از طرفی از آنجا که $\sigma = \frac{6M}{bd^2}$ و با این که d^2 رابطه عکس دارد و چون

سراسری۸۵

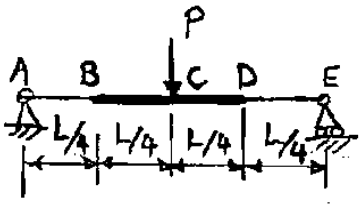
۴۳- تیر شکل روبرو به مقطع مستطیل به پهنای ثابت است که ارتفاع قسمت BD دو برابر ارتفاع قسمت‌های دیگر می‌باشد. اگر تمرکز تنش صرفنظر شود تنش ماگزیمم مقطع C چند برابر تنش ماگزیمم مقطع B است؟

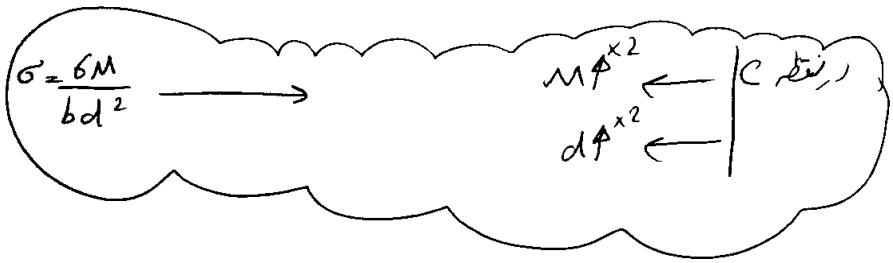
۱) ۱

۲) ۲

۳) $\frac{۱}{۲}$

۴) $\frac{۱}{۴}$



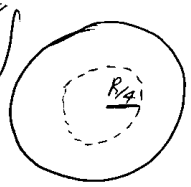


بنابراین $\frac{\sigma_C}{\sigma_B} = \frac{2}{2^2} = \frac{1}{2}$

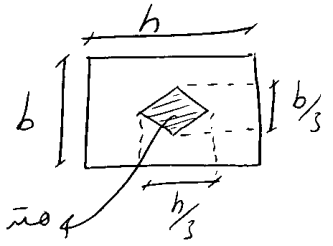
۱۳-۸-هسته خمش

هسته خمش: مجموعه نقاطی است که اگر بار به آنها اثر کند همه خش بر مقطع مماس می‌شود.

برای مقطع دایره‌ای شکل:

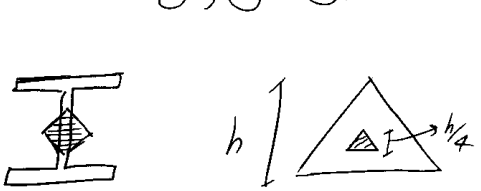


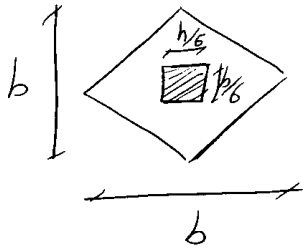
اگر بارهای داخل خط چین وارد شود هیچ نقطه‌ای به کشش نمی‌افتد و همه جا تنش فشاری داریم

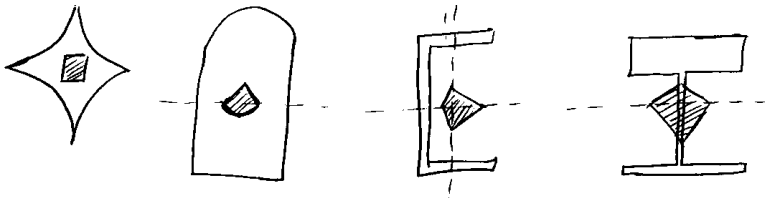


✓ اگر نیروی P روی یکی از اضلاع هسته حرکت کند تنش در راس مقابل آن صفر خواهد بود

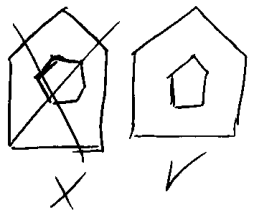
✓ اگر نیروی P بر راس هسته وارد شود تنش ر ضلع مقابل آن راس صفر است.





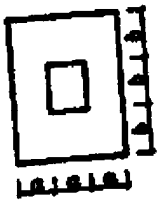


در یک h ضلعی اگر n فرد باشد شکل هسته و مقطع یکی است.



آزاد ۸۸

۵۴- هسته مقطع مستطیلی توخالی زیر کدام است؟ (a < b)



۱) یک لوزی با قطر کوچک $\frac{10a}{9}$ و قطر بزرگ $\frac{10b}{9}$

۲) یک لوزی با قطر کوچک $\frac{14a}{9}$ و قطر بزرگ $\frac{14b}{9}$

۳) یک مستطیل به ابعاد $\frac{10a}{9}$ و $\frac{10b}{9}$

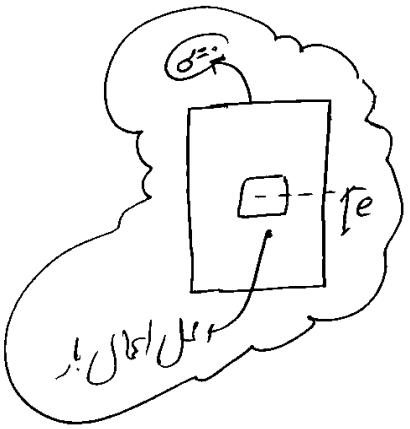
۴) یک مستطیل به ابعاد $\frac{14a}{9}$ و $\frac{14b}{9}$

$A = 3a \times 3b - ab = 8ab$ ت

$$I_x = \frac{3a(3b)^3}{12} - \frac{ab^3}{12} = \frac{20ab^3}{3}$$

$$\sigma = \frac{P}{8ab} - \frac{(Pe) \times 1.5b}{\frac{20ab^3}{3}} = 0 \longrightarrow \frac{P}{ab}\left(\frac{1}{8} - \frac{4.5e}{20b}\right) = 0$$

$$\longrightarrow e = \frac{20b}{8 \times 4.5} = \frac{5b}{9} \longrightarrow \text{قطر بزرگ لوزی} = 2e = \frac{10b}{9}$$

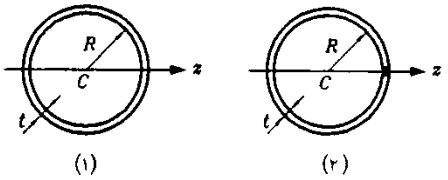


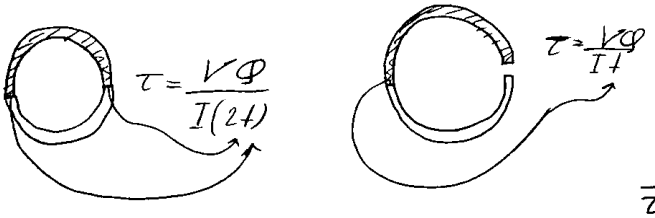
۱۴-بارگذاری عرضی (برش)

سراسری ۸۰

نیروی برشی قائم V در مرکز برش دو مقطع (۱) و (۲) وارد می‌شود. شکل (۱) لولهٔ بسته و شکل (۲) لوله‌ای است که روی محور z، جدار آن به هم چسبیده نیست. نسبت تنش برشی ماکزیمم در شکل (۱) به تنش برشی ماکزیمم در شکل (۲) کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{4}$



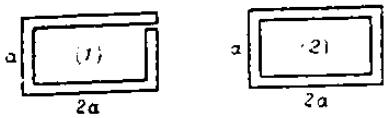


چون گفته V در مرکز برش وارد می‌شود بنابراین برش خالص داریم

در هر دو شکل Q و I و V ثابت است بنابراین $\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{1}{2}$

آزاد ۸۷

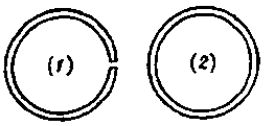
۵۸- تحت اثر برش قائم یکسان که در مرکز برش اثر می کند نسبت تنش برشی ماکزیمم مقطع باز اول به مقطع بسته دوم در شکلهای زیر چقدر است؟ (t = Const , t << a)



۱) ۰/۹ ۲) ۱/۵ ۳) ۱/۶۷ ۴) ۱/۸

آزاد ۸۶

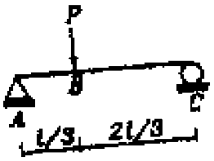
۵۷- تحت اثر برش قائم یکسان که در مرکز برش اثر می کند نسبت تنش برشی ماکزیمم مقطع باز اول به مقطع بسته دوم در شکلهای زیر چقدر است؟ (شعاع مقاطع R و ضخامت آنها ثابت و برابر t است و t << R)



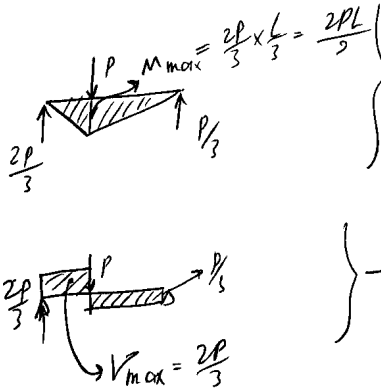
۱) $\frac{1}{2}$ ۲) 2 ۳) 1 ۴) 4

آزاد ۸۸

۵۶- در تیر زیر که مقطع آن مستطیلی است، تنش خمشی ماکزیمم ۲۰ برابر تنش برشی ماکزیمم است. نسبت طول مقطع به ارتفاع آن $\left(\frac{l}{h}\right)$ کدام است؟



۱) 10 ۲) 15 ۳) 20 ۴) 25



سراسری ۷۹

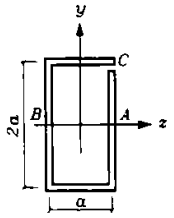
مقطع جدار نازک شکل داده شده در نقطهٔ C باز می‌باشد. ضخامت جدار ثابت است. نیروی برشی در امتداد محور y می‌باشد و از مرکز برش عبور می‌کند. نسبت تنش‌های برشی در نقاط A و B چقدر است؟ $(\frac{\tau_A}{\tau_B})$

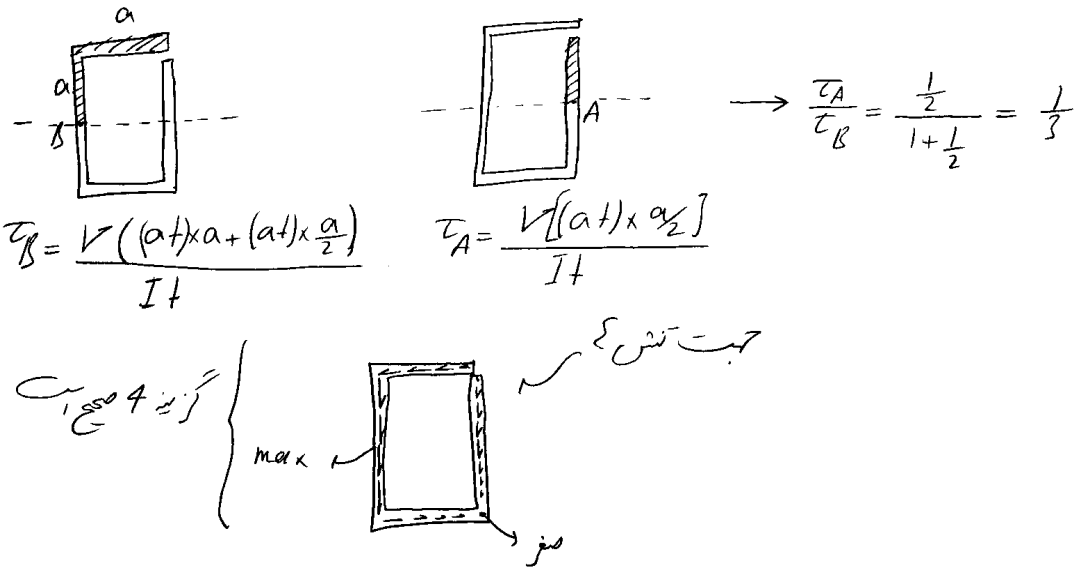
۱) ۱- (جهت تنش‌ها مختلف است)

۲) $\frac{۱}{۳}$- (جهت تنش‌ها مختلف است)

۳) ۱ (جهت تنش‌ها یکی است)

۴) $\frac{۱}{۳}$ (جهت تنش‌ها یکی است)





سراسری ۸۱

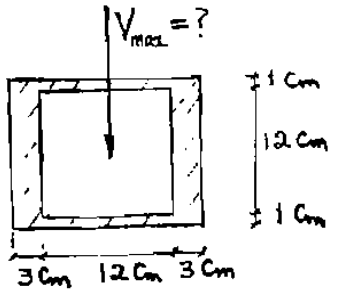
۴۵- در مقطع شکل مقابل، چنانچه تنش مجاز برشی مصالح متشکله $۹۶۰ \frac{kg}{cm^۲}$ باشد، ظرفیت برش قائم بر حسب ton کدام است؟

۱) ۴۸/۱

۲) ۵۸/۸

۳) ۶۱/۵

۴) ۱۱۸/۲



$\tau = \frac{VQ}{It}$ ⇨ ظرفیت برشی $= \frac{\tau(It)}{Q} = \frac{960\left(\frac{18\times 14^3}{12} - \frac{12\times 12^3}{12}\right)\times 6}{2\times(6\times 3)\times 3 + 18\times 1\times 6.5} = 61132.8\,kg = 61.5\,ton$

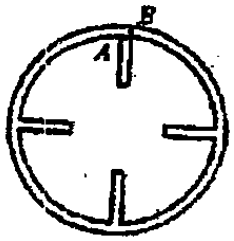
مقدار فوق بر اساس تنش خرابی در میانه مقطع می باشد. از آنجا که ضخامت جدار در بالها کمتر است، باید تنش بالها را هم چک کنیم:

ظرفیت برشی $= \frac{\tau(It)}{Q} = \frac{960\,(I)\times 2}{12\times 1\times 6.5} = 58781\,kg = 58.8\,ton$

بنابراین گزینه ۲ صحیح است

آزاد۸۹

۵۶- در مقطع زیر که ضخامت حلقه t_1 و ضخامت داخلی t_2 باشد، نسبت $\frac{\tau_A}{\tau_B}$ کدامست؟

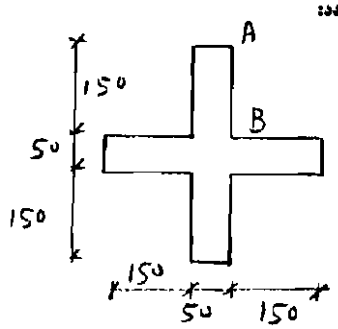


۱) $\frac{2t_1}{t_2}$ ۲) $\frac{t_1}{t_2}$

۳) $\frac{t_2}{t_2}$ ۴) $\frac{2t_2}{t_1}$

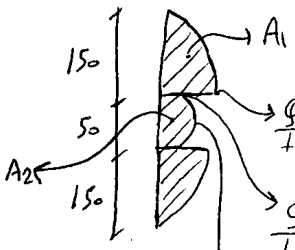
سراسری ۸۳

۵۷- مقطع صلیبی مطابق شکل روبرو تحت اثر نیروی برشی V قرار دارد. چه سهمی از این نیرو توسط جان AB تحمل می گردد:



۱) ٪۲۵
۲) ٪۳۵
۳) ٪۳۹
۴) ٪۴۴

سهم برش برخلاف سهم خمش و پیچش که به بعد I و J بستگی دارد، شکل است!



ابتدا دیاگرام $\frac{Q}{I}$ را رسم می‌کنیم ←

$\frac{Q}{I} = \frac{(150 \times 50 \times 100)}{50} = 15000\ mm^2$

$\frac{Q}{I} = \frac{(150 \times 50 \times 100)}{350} = 2142.8$

$\frac{Q}{I} = \frac{(150 * 50 \times 100 + 25 \times 350 \times 12.5)}{350} = 2455.3$

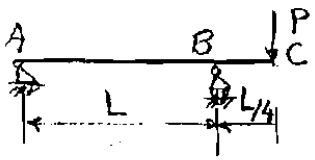
سهم هر قسمت برابر است با: $\left(\frac{\text{مساحت هر قسمت}}{\text{مساحت کل}}\right)$

$A_1 = \frac{2}{3} \times 15000 \times 150 \times 50 = 1500000$

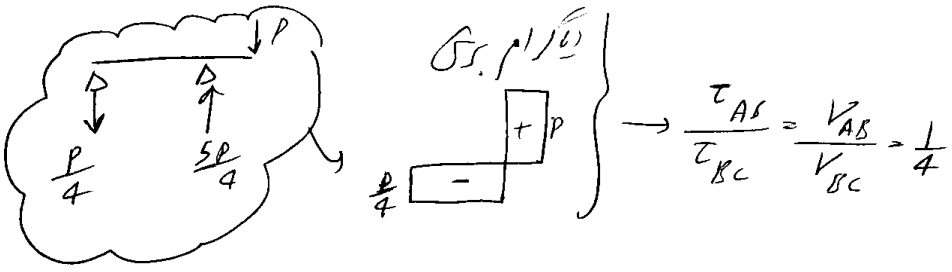
$A_2 = 2142.8 \times 50 \times 350 + (2455.3 - 2142.8) \times 50 \times 350 \times \frac{2}{3} = 822896 \longrightarrow A_1 \text{ سهم} = \frac{1500000}{(15000000 \times 2) + 822896} = 0.37$

سراسری ۸۳

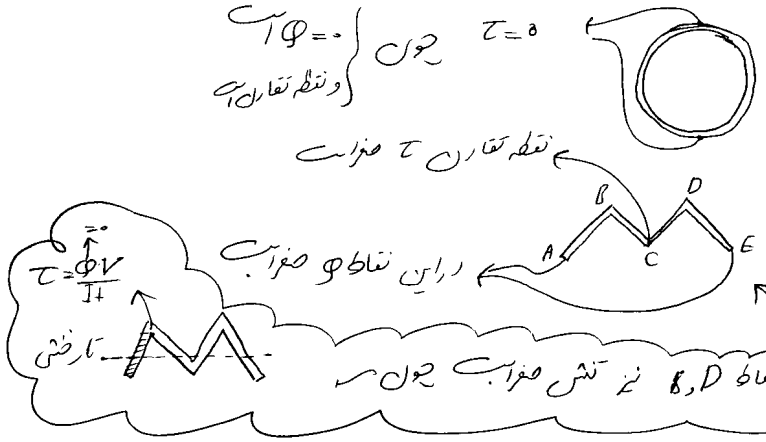
۴۲- مقطع تیر شکل روبرو I می باشد. نسبت تنش برشی ماکزیمم در قسمت AB به تنش برشی ماکزیمم در قسمت BC چقدر است؟

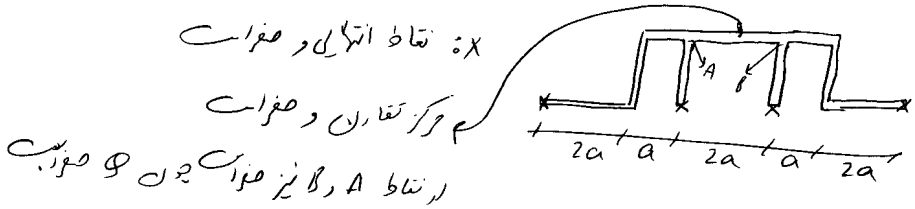


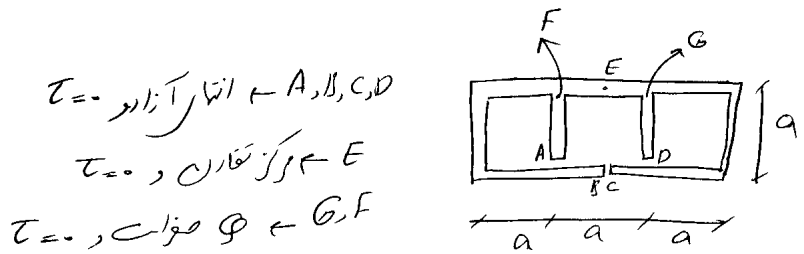
۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{5}$

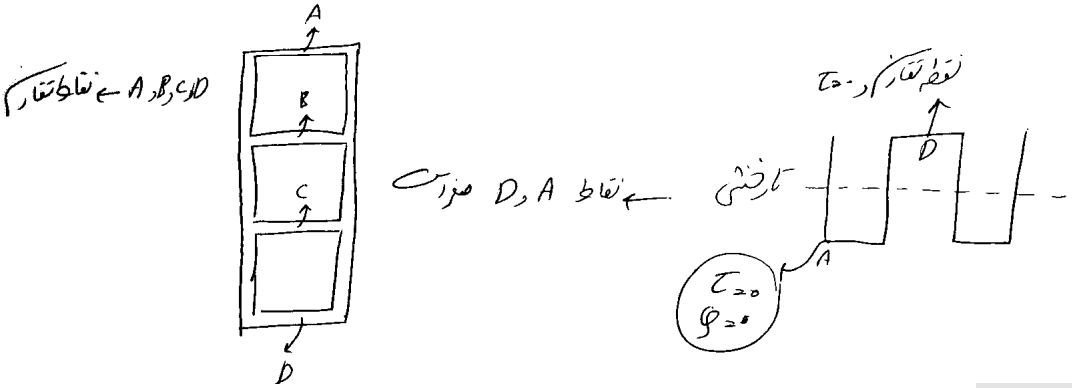


نکته: در شکل‌های زیر نقاطی را که τ در آن‌ها صفر است تعیین کنید:



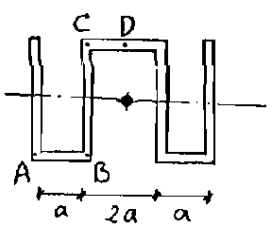






سراسری ۸۳

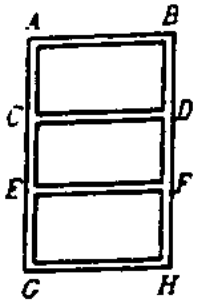
۴۹- در مقطع متقارن شکل زیر نیروی برشی موازی BC می باشد. تنش برشی در کدام یک از نقاط اشاره شده صفر خواهد بود(ضخامت ثابت است).



۱) D,B
۲) D,A
۳) C,B
۴) C,A

آزاد ۸۷

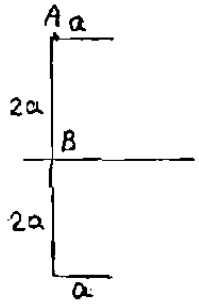
۵۷- در چند نقطه از مقطع زیر تحت اثر برش قائم V تنش برشی برابر صفر است؟ (ضخامت مقطع ثابت است.)



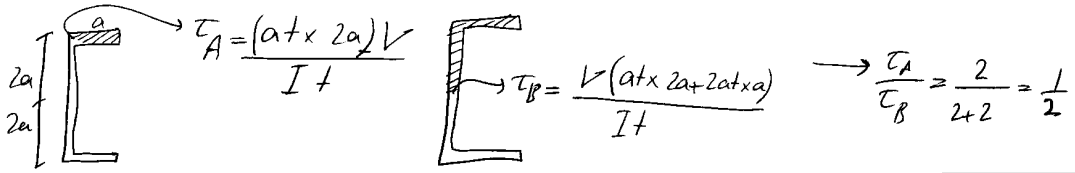
۱) صفر
۲) ۲
۳) ۴
۴) ۶

سراسری ۸۴

۵۱- ناودانی مطابق شکل روبرو به ضخامت ثابت و کم t است. اگر نیروی برشی V در جهت محور قائم بدان وارد شود، نسبت $\frac{\tau_A}{\tau_B}$ چقدر است؟

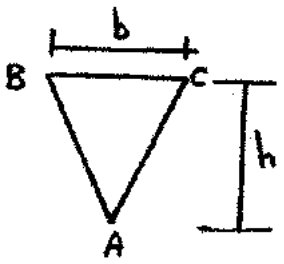


۱) ۱
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۱}{۳}$
۴) $\frac{۲}{۳}$



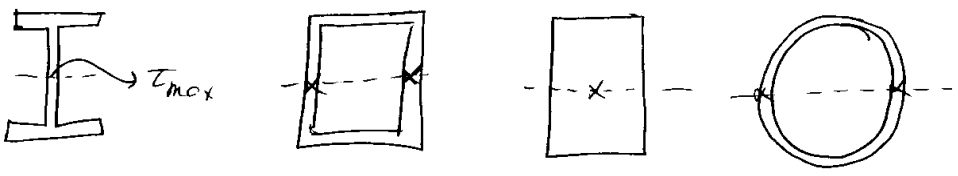
سراسری ۸۹

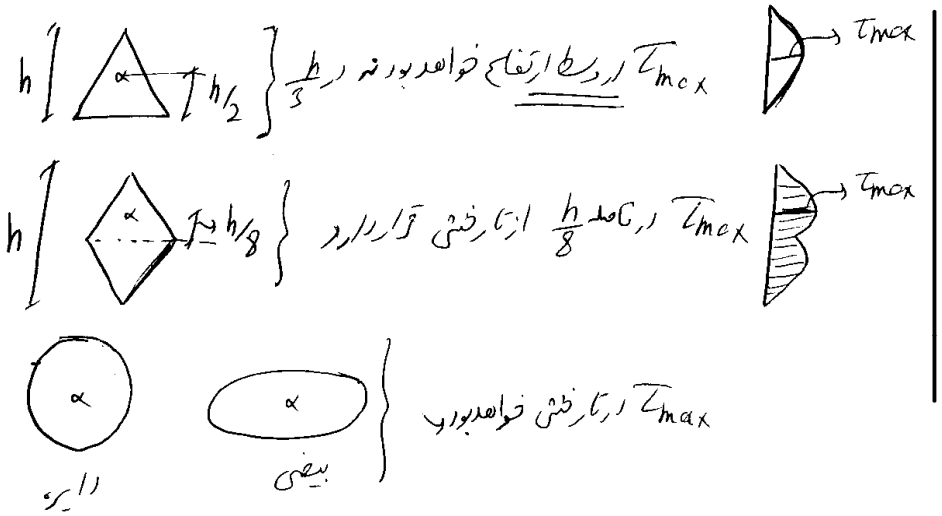
۴۸- چنانچه نیروی برشی وارده بر مقطع مثلثی شکل نشان داده شده برابر V باشد، تنش برشی حداکثر در چه فاصله‌ای از نقطه A در روی مقطع ایجاد می‌شود؟



۱) $\frac{h}{۲}$
۲) $\frac{h}{۳}$
۳) $\frac{h}{۴}$
۴) $\frac{۲h}{۳}$

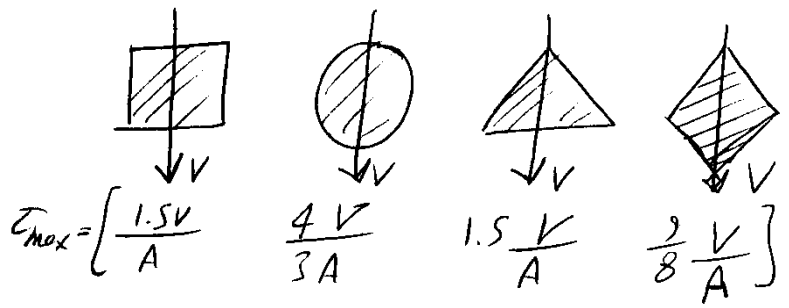
تنش برشی حداکثر: اگر ضخامت جداره ثابت باشد τ_{max} در راستای تقارن اتفاق می‌افتد.





نکته: در محل تنش برشی ماکزیمم داریم: $\frac{d\varphi}{\varphi}=\frac{dt}{t}$

$\tau=\frac{V\varphi}{It} \rightarrow d\tau=\cdots \rightarrow d\left(\frac{V\varphi}{It}\right)=\cdots \rightarrow \frac{td\varphi-\varphi dt}{t^2}=\cdots \rightarrow$



آزاد۸۹

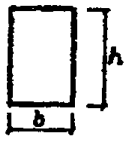
۵۷- اگر برش تعیین کننده طراحی باشد کدام یک از مقاطع زیر اقتصادی‌تر است؟

۱) مستطیل ۲) مثلث

۳) دایره ۴) لوزی

آزاد ۸۹

۵۸- مقطع مستطیلی زیر که در آن مدول بانگ قسمت فشاری n برابر مدول یانگ قسمت کششی مقطع است ($E_c=nE_t$) تحت اثر برش قائم V قرار دارد. تنش برشی ماکزیمم مقطع چقدر است؟

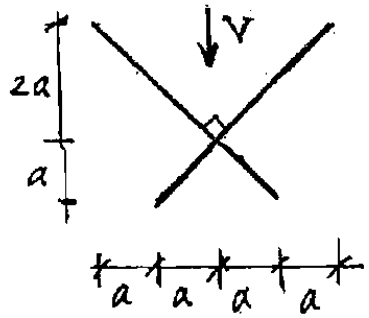


۱) $\frac{3}{\sqrt{n}+1}\frac{V}{bh}$ ۲) $1.5\sqrt{n}\frac{V}{bh}$

۳) $1.5\frac{V}{bh}$ ۴) $\frac{1.5}{\sqrt{n}}\frac{V}{bh}$

سراسری ۸۴

۵۲- مقطع تیری فلزی مطابق شکل از ورق با ضخامت نازک t ساخته شده است. بر اثر برش V، حداکثر تنش برشی در ورق‌ها چقدر است؟



۱) $\frac{V}{۶at}$

۲) $\frac{V}{۴\sqrt{۲}at}$

۳) $\frac{V}{۴at}$

۴) $\frac{V}{۳\sqrt{۲}at}$

چون ضخامت ثابت است τ_{max} در تار خنثی اتفاق می‌افتد

$$\tau_{max}=\frac{V\left(1.5a\sqrt{2}\times t\times\frac{1.5a}{2}\right)}{2\left[\frac{t\times(3a\sqrt{2})^3}{12}\times(\sin 45)^2\right]t}=\frac{V}{4at}$$

سراسری ۸۴

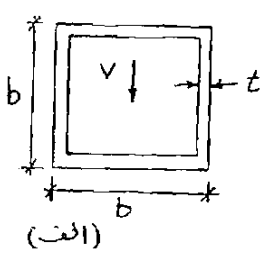
۵۳- با توجه به مقاطع نشان داده شده نسبت تنش برشی ماکزیمم مقطع شکل «ب» به تنش برشی ماکزیمم مقطع شکل «الف» برابر است با:

۱) ۱

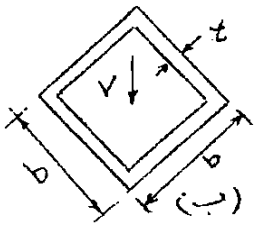
۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$

۳) $\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$

۴) $\frac{۴\sqrt{۲}}{۳}$



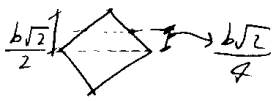
(الف)



(ب)

$$\tau_{الف}=\frac{V\left(bt\times\frac{b}{2}+2\left(\frac{bt}{2}\times\frac{b}{4}\right)\right)}{I\times 2t}=\frac{0.375Vb^2}{I}$$

$$\tau_{ب}=\frac{V\left(2\left(bt\times\frac{b\sqrt{2}}{4}\right)\right)}{I\times 2(t)}=\frac{0.25Vb^2}{I\sqrt{2}}$$



نکته: چون □ دوگود تقارن عمود بر هم دارد I آن با چرخش مقطع تغییر نمی‌کند

برای I در دو شکل یکسان است

$$\frac{\tau_{ب}}{\tau_{الف}}=\frac{0.25}{0.375\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

سراسری ۸۸

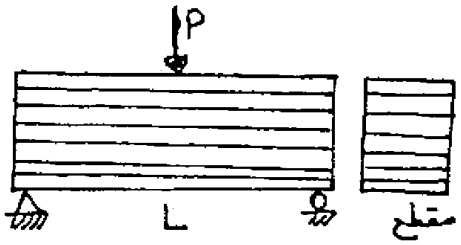
۶۸- n تیر با مقطع مستطیلی شکل که سطح مقطع هر یک از آنها A می‌باشد را یکبار بدون استفاده از چسب روی هم گذاشته و بار دیگر آنها را روی هم گذاشته و می‌چسبانیم. مقاومت برشی مجموعه تیرها در حالت دوم چند برابر اول است؟ (مقاومت برشی چسب از مقاومت برشی جنس تیر بیشتر است).

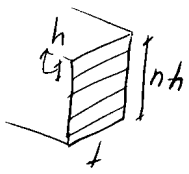
۱) ۲

۲) ۱/۵n

۳) ۱

۴) n





$\tau = \frac{V(It)}{\theta}$ مقاومت برشی

با برش مقاومت تغییر می‌کند

با جسب $\longrightarrow V = \frac{\tau(nht)}{1.5}$

بدون جسب $\longrightarrow V = n\left[\frac{\tau(ht)}{1.5}\right]$

سراسری ۸۵

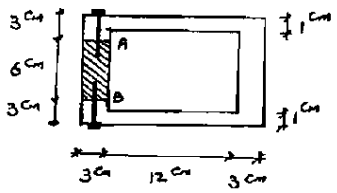
۵۱- مقطع شکل مقابل از قطعات چوبی که توسط پیچ در محل های B و A متصل شده اند، تشکیل یافته است. در صورتی که فواصل پیچ ها در طول عضو برابر **۱۰cm** و نیروی برشی مجاز هر پیچ **۱۰۰۰kg** باشد، مطلوبست حداکثر نیروی برشی مجاز قابل تحمل توسط مقطع: (I= ممان اینرسی مقطع)

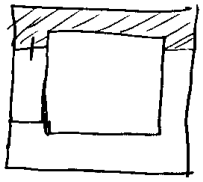
۱) $0/68I(kg)$

۲) $1/01(kg)$

۳) $1/36I(kg)$

۴) $2/72I(kg)$

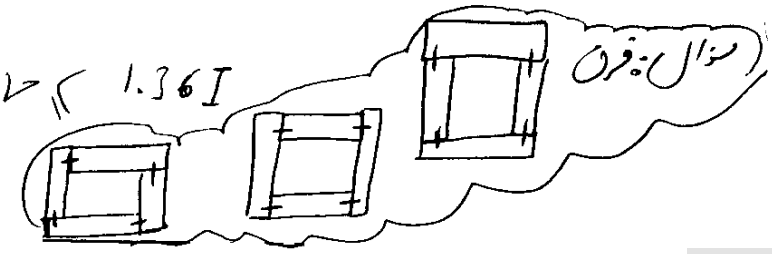




$\tau_A = \frac{V(12\times1\times5.5 + 2(3\times3\times4.5))}{I\times6} \longrightarrow \tau_A = \frac{24.5V}{I}\ kg/cm^2$

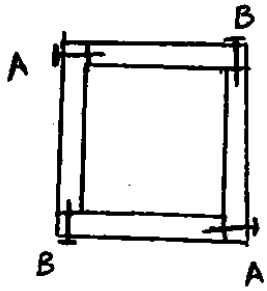
نیروی هر پیچ $= \tau_A \times$ (سطح تاثیر هر پیچ) $= \frac{24.5V}{I}(3\times10) = \frac{735V}{I}$

$\frac{735}{I}V \leq 1000 \Rightarrow V \leq 1.36I$

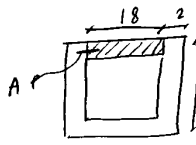


آزاد ۸۵

مطابق شکل زیر از اتصال چهار الوار به ابعاد 2cm × 20 cm تیری با مقطع جعبه ای ساخته شده است. اگر تیر تحت اثر برش قائم ۰/۵ تن قرار بگیرد و نیروی برشی مجاز هر میخ 200 کیلوگرم نیرو باشد حداکثر فاصلهٔ بین میخهای A چقدر می تواند باشد؟



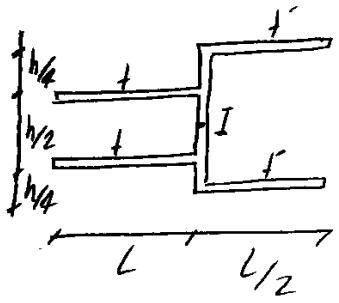
۱) ۱۷ cm ۲) ۱۹/۶ cm ۳) ۲۴ cm ۴) ۲۱/۶ cm



$\tau_A = \frac{VQ}{It} = \frac{(500)(18\times2\times10)}{\left(\frac{22^4}{12} - \frac{18^4}{12}\right)\times2\times2} = 4.2$ (I)

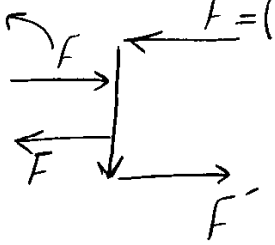
$\{$نیروی هر میخ $= \tau_A \times (2\times S)\} < 200 \longrightarrow S < \frac{200}{2\times\tau_A} = 24\,cm$ (فواصل میخ S)

مثال: اگر مرکز برش در I باشد رابطه بین t و t' چیست؟



$$= \left(\frac{tL}{2}\right)\left(\frac{V\varphi}{It}\right)$$

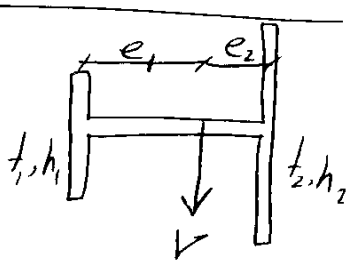
$$F' = \left(\frac{t'L}{2\times 2}\right)\left(\frac{V\varphi'}{It'}\right)$$



$$F' \times \frac{h}{2} = F\frac{h}{4}$$

$$\rightarrow \quad \frac{t'L}{2\times 2}\left(\frac{V\varphi'}{It'}\right)\times\frac{h}{2} = \left(\frac{tL}{2}\right)\left(\frac{V\varphi}{It}\right)\times\frac{h}{4}$$

$$\rightarrow \frac{t'\varphi'}{8} = \frac{t\varphi}{8} \rightarrow \frac{t'}{t} = \frac{\varphi}{\varphi'} = \frac{(t\times L\times h/4)}{(t'\times\frac{L}{2}\times\frac{h}{2})} = 1$$



$e_1 = ?$ (مرکز برش)

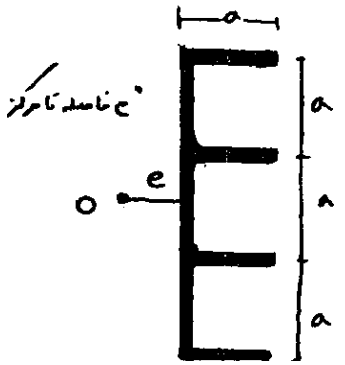
F_1

$$F_2 = \frac{t_2 h_2}{2}\left(\frac{V\left(t_2\left(\frac{h_1}{2}\right)\times\frac{h_1}{4}\right)}{It_2}\right)$$

$$F_1 = \frac{t_1 h_1}{2}\left(\frac{V\left(t_1(h_1/2)\times\frac{h_1}{4}\right)}{It_1}\right)$$

$$F_1 e_1 = F_2 e_2 \rightarrow \frac{t_1 h_1^3}{2} e_1 = \frac{t_2 h_2^3}{2} e_2 \rightarrow e_1 = \frac{h_2^3 t_2}{h_1^3 t_1 + h_2^3 t_2}$$

آزاد ۸۴



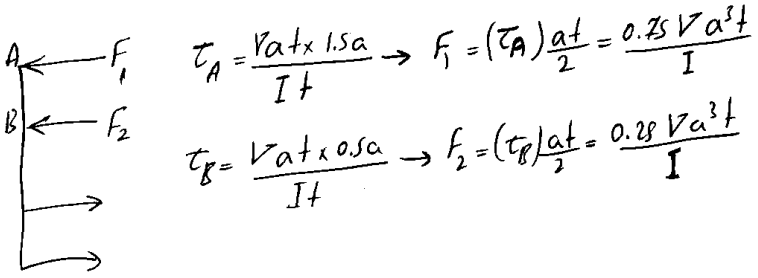
۲۷- مرکز برش مقطع زیر در چه فاصله ای از جان مقطع قرار دارد؟ (ضخامت ثابت و برابر t می باشد.)

۱) 0.28 a

۲) 0.4 a

۳) 0.46 a

۴) 0.34 a



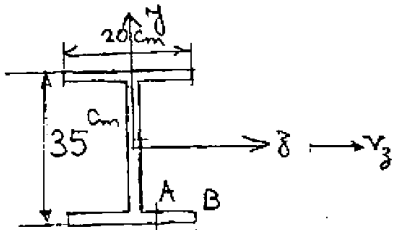
$$\rightarrow V \times e = F_1 \times 3a + F_2 \times a \Rightarrow Ve = \frac{Va^4t}{I}(2.25 + 0.25) = \frac{5}{2}\frac{Va^4t}{I} \rightarrow \boxed{e = \frac{30}{87}a} = 0.34a$$

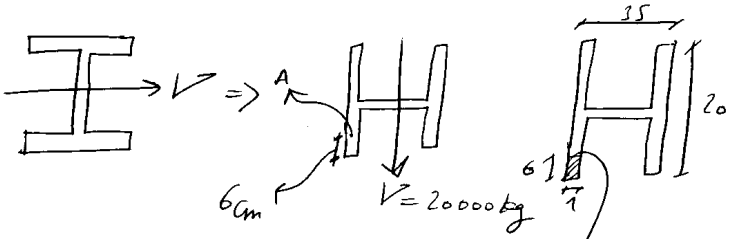
$$\rightarrow e = \frac{5}{2}\frac{a^4t}{I} = \frac{5}{2}\frac{a^4t}{\frac{(3a)^3t}{12} + 2\left[at \times (1.5a)^2 + at \times (0.5a)^2\right]} = \frac{5 \times 12}{2 \times 87}a$$

سراسری ۸۸

۶۹- در شکل روبه‌رو محورهای y و z **محورهای تقارن** هستند. **اگر** $V_z = ۲۰\ ton$ باشد. تنش برشی در نقطه‌ی A بر حسب $\frac{kg}{cm^2}$ چقدر است؟ ضخامت جان و بال‌ها، همه جا یک **سانتی‌متر** و **AB = ۶cm** می‌باشد.

۱) ۵۰۰
۲) ۳۱۵
۳) ۶۳۰
۴) ۷۵۰



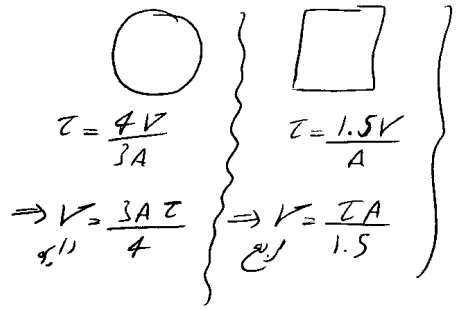


$$\tau = \frac{20000 \times (6 \times 1 \times (10 - 3))}{\left(I = 2 \times \frac{20^3 \times 1}{12}\right) \times \frac{1}{1}} = 630$$

سراسری ۸۸

۷۰- **مقطع** یک تیر به شکل دایره و مقطع تیر دیگری به شکل مربع است. **مساحت مقطع** هر دو تیر مساوی است. **نسبت مقاومت برشی** تیر اول به تیر دوم برابر است با: (راهنمایی: حداکثر تنش برشی در مقطع دایره با **سطح مقطع A** تحت **برش V برابر** $\frac{۴}{۳}\frac{V}{A}$ می‌باشد.)

۱) $\frac{۸}{۹}$
۲) $\frac{۴}{۳}$
۳) ۱
۴) $\frac{۹}{۸}$



سراسری ۸۷

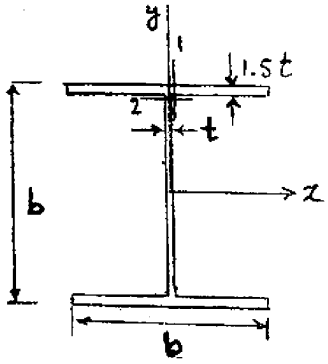
۶۸- شکل روبرو مقطع تیری را نشان می‌دهد که زیر اثر نیروی برشی V در امتداد y قرار دارد. اگر τ_1 تنش برشی افقی در محل اتصال بال و جان روی بال و τ_2 تنش برشی قائم در محل اتصال بال و جان روی جان باشد و مقدار t نسبت به b کوچک فرض شود نسبت $\frac{\tau_1}{\tau_2}$ کدام است؟

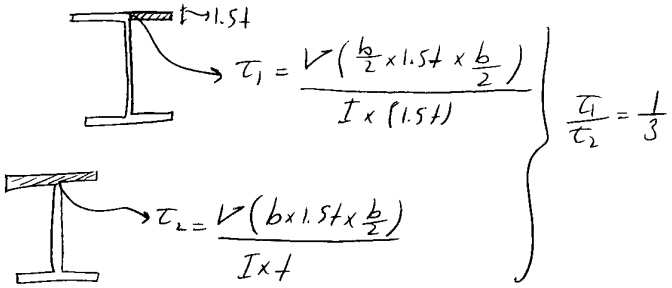
۱) ۱

۲) $\frac{۲}{۳}$

۳) $\frac{۱}{۲}$

۴) $\frac{۱}{۳}$

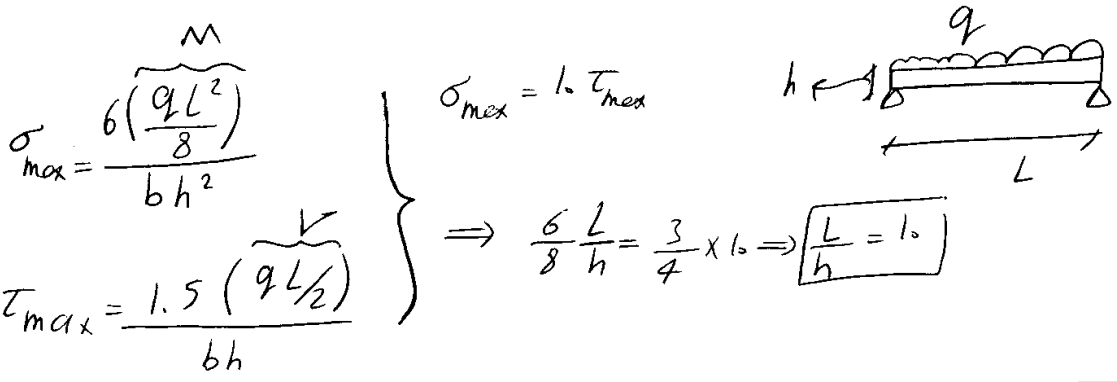




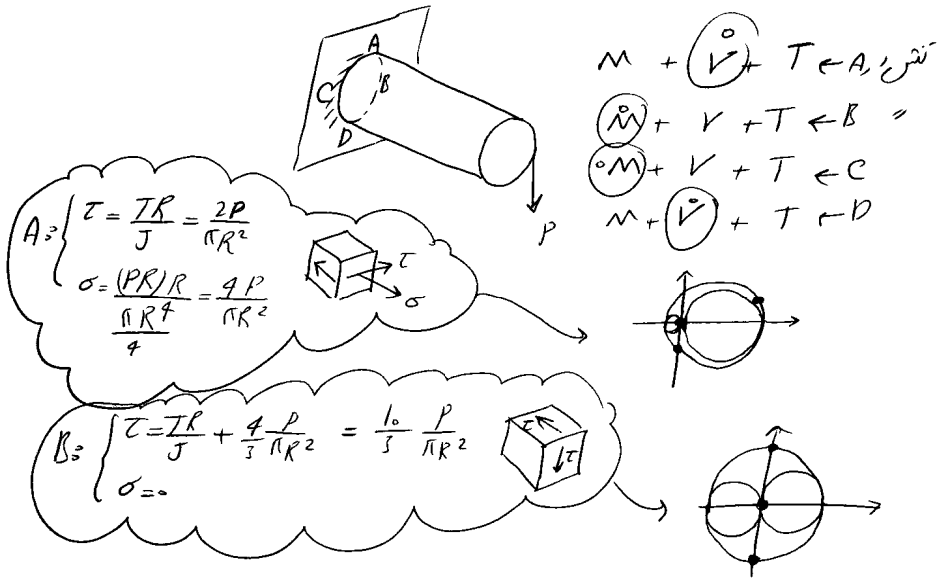
سراسری ۸۷

۶۶- بر تیر ساده‌ای به طول L بار یکنواختی به شدت q در تمام طول وارد می‌شود. مقطع تیر مستطیل به پهنای b و به ارتفاع h است. نسبت $\frac{L}{h}$ چقدر باشد که تنش خمشی ماکزیمم ده برابر تنش برشی ماکزیمم شود؟

۱) ۲۰ ۲) ۱۰ ۳) ۵ ۴) ۱

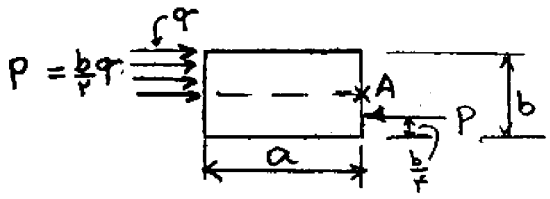


مثال



سراسری ۸۷

۶۵- مکعب مستطیلی مطابق شکل روبرو زیر اثر نیرو قرار گرفته است. تنش برشی در A چقدر است؟ ابعاد مکعب مستطیل a، b و c است.

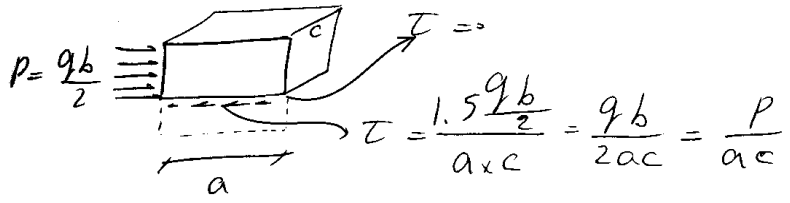


۱) $\frac{p}{ab}$

۲) $\frac{p}{ac}$

۳) $\frac{p}{bc}$

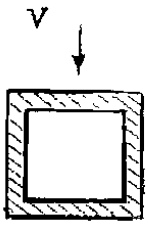
۴) صفر

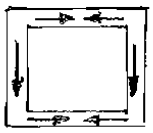


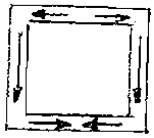
۱۴-۱-جریان برش

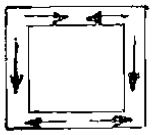
سراسری۸۶

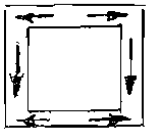
۵۸- برای مقطع شکل مقابل که تحت نیروی برشی قائم V می‌باشد، کدام‌یک از جریان‌های برشی در مقطع صحیح می‌باشد؟



۱) 

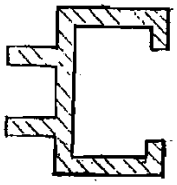
۲) 

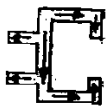
۳) 

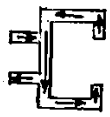
۴) 

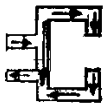
سراسری ۸۵

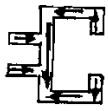
۵۲- برای مقطع شکل مقابل که تحت نیروی برشی قائم V می‌باشد، کدام‌یک از جریان‌های برش صحیح است؟



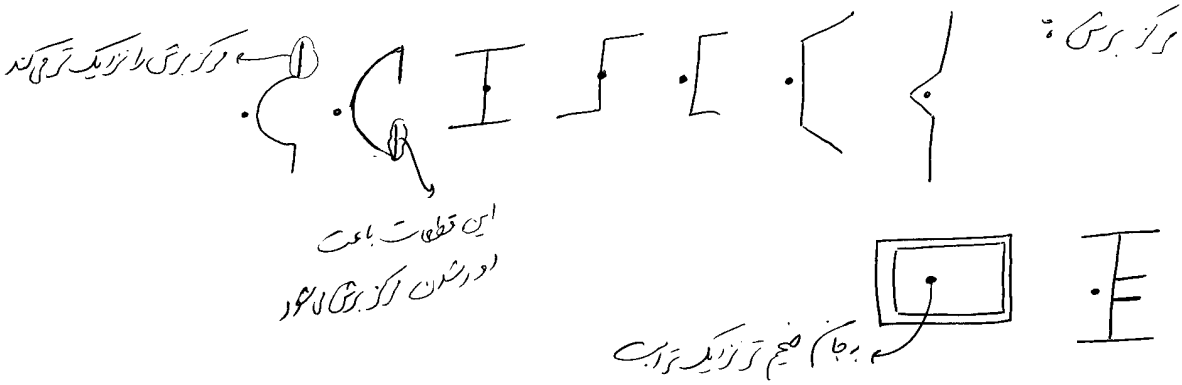
۱) 

۲) 

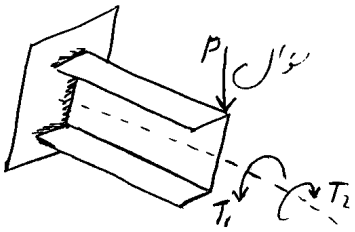
۳) 

۴) 

۱۴-۲-مرکز برش



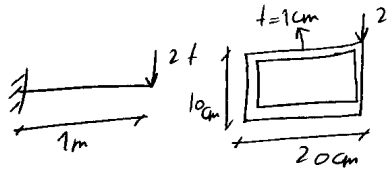
سوال



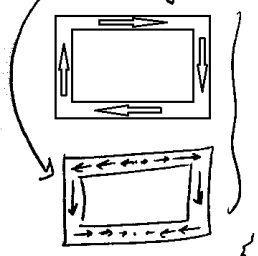
نیروی محوری در کابل نشده در این صورت پیچش مقطع به صورت چه صورت خواهد بود (T_1 یا T_2 ؟)

پاسخ: T_1

حل: تنش برشی ماکزیمم در مقطع زیر:

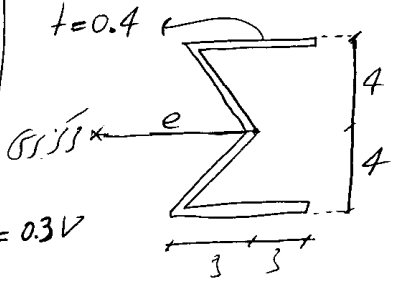


$$\tau = \frac{VQ}{It} + \frac{T}{2A_m t} = \frac{2000\times(20\times1\times4.5+2\times4\times2)}{\left(\frac{20\times10^3}{12}-\frac{18\times8^3}{12}\right)\times2} + \frac{2000\times10}{2(19\times2)(1)} = 176.6$$



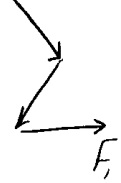
تنش ماکزیمم

مثال فاصله e را حساب کنید



میانگین تنش

$$F_1 = \frac{6\times0.4}{2}\left(\frac{V(6\times0.4)\times3.8}{I\times0.4}\right) = 0.3V$$

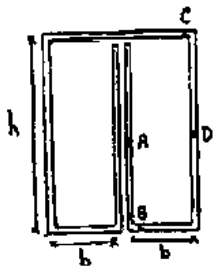


$$I = 2\times\left(0.4\times6\times3.8^2 + \frac{0.4\times5^3}{3}\times\left(\frac{4}{5}\right)^2\right) = 90.65$$

$$F_1\times7.6 = V\times e \rightarrow e = \frac{F_1\times7.6}{V} = \frac{0.3V\times7.6}{V} = 2.28\text{cm}$$

سراسری ۸۱

۳۶- در کدام نقطه از مقطع زیر که ضخامت یکنواختی دارد، مقدار تنش برشی برابر با صفر است؟

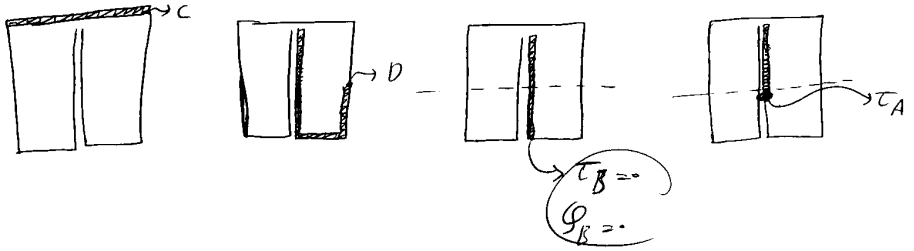


۱) D

۲) A

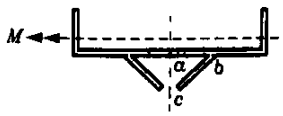
۳) C

۴) B



سراسری ۷۸

۴- مرکز پیچش مقطع شکل زیر کدام نقطه است؟



۱) a

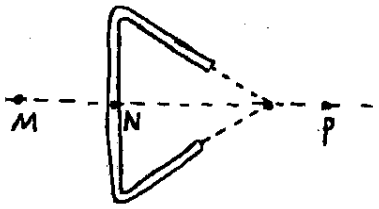
۲) b

۳) c

۴) بر مرکز مقطع منطبق است که هیچ کدام از نقاط a، b و c نیست.

آزاد ۸۳

۲۶- در مقطع زیر محل مرکز برش کجاست؟



۱) M

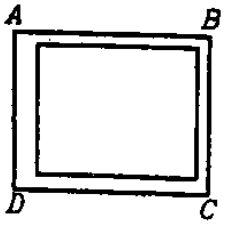
۲) N

۳) P

۴) بسته به ابعاد مقطع هرکدام از گزینه ها می تواند صحیح باشد.

آزاد ۸۶

۵۴- در مقطع قوطی شکل زیر محل مرکز برش کجاست؟



۱) در داخل مقطع و نزدیک به جان ضخیمتر می باشد.

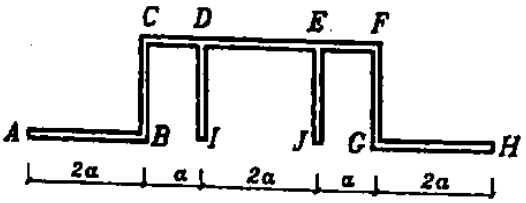
۲) در داخل مقطع و نزدیک به جان نازکتر می باشد.

۳) در خارج مقطع و نزدیک به جان ضخیمتر می باشد.

۴) در خارج مقطع و نزدیک به جان نازکتر می باشد.

آزاد ۸۶

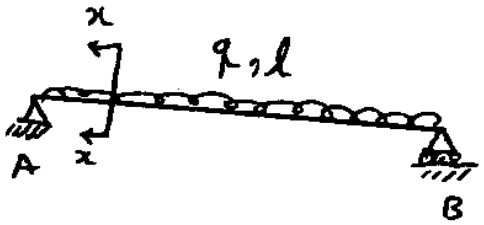
۵۵- در چند نقطه از مقطع زیر تحت اثر برش قائم V تنش برشی برابر صفر است؟
(ضخامت مقطع ثابت است)



۱) ۵ ۲) ۳ ۳) ۷ ۴) ۱

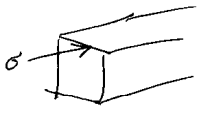
آزاد ۸۵

۶۸- در تیر مستطیلی زیر تنش برشی ماکزیمم در بالاترین نقطه مقطع (0) چقدر است؟
(مقطع x – x در فاصله $\frac{l}{4}$ از تکیه گاه A می باشد.)

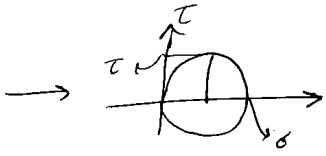


۱) $\frac{9ql^2}{32bh^2}$ ۲) $\frac{19ql^2}{16bh^2}$ ۳) $\frac{9ql^2}{64bh^2}$ ۴) 0

در بالاترین نقطه تنش برشی ناشی از برش صفر است و تنها تنش خمشی داریم



$$\sigma = \frac{6M}{bh^2} \Rightarrow M = \left(\frac{9L}{2} \times \frac{L}{4}\right) - \frac{9\left(\frac{L}{4}\right)^2}{2} = \frac{39L^2}{32} \rightarrow \boxed{\sigma = \frac{6 \times 39L^2}{32bh^2} = \frac{99L^2}{16bh^2}}$$

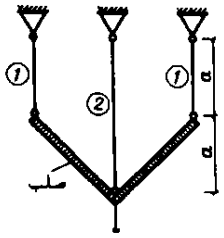


$$\boxed{\tau_{max} = \frac{\sigma}{2} = \frac{99L^2}{32bh^2}}$$

۱۵-مدل سازی با فنر

سراسری ۸۰

جنس میله‌های ۱ و ۲ یکسان و سطح مقطع آنها مساوی است. زیر اثر بار P نیروهای F_1 و F_2 وارد بر میله‌های (۱) و (۲) چقدر است؟

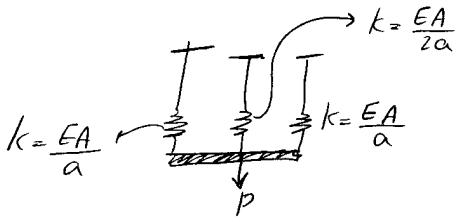


۱) $F_1 = F_2 = \frac{P}{3}$

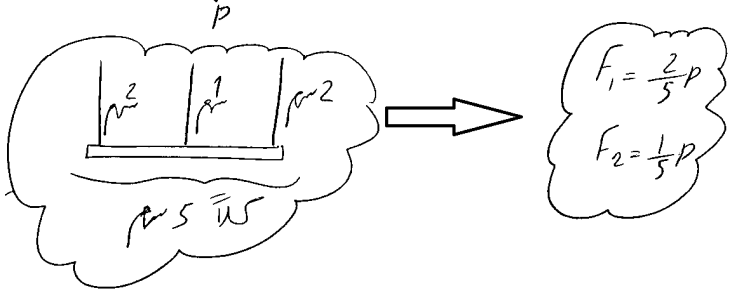
۲) $F_2 = P \ , \ F_1 = 0$

۳) $F_2 = \frac{P}{2} \ , \ F_1 = \frac{P}{4}$

۴) $F_2 = 0/2P \ , \ F_1 = 0/4P$

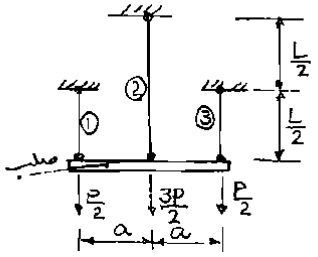


با توجه به تقارن میله صلب حرکت قائم خواهد داشت بنابراین نیروی P به نسبت سختی تقسیم می‌شود



سراسری ۸۱

۳۹- در شکل مقابل میله‌های ۱، ۲ و ۳ با جنس و سطح مقطع یکسان تحت اثر نیروهای وارده قرارگرفته‌اند. نیروی وارده به هرکدام از میله‌ها چقدر است؟

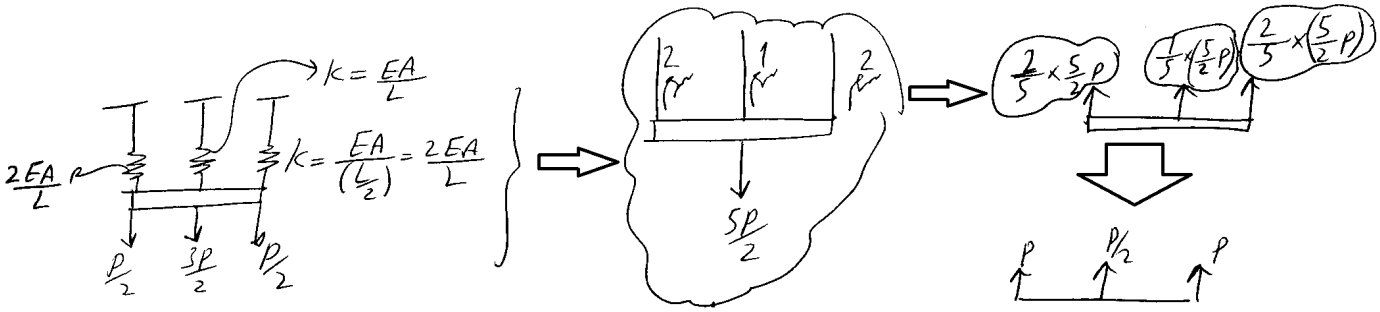


۱) $P \ , \ 0/5P \ , \ P$

۲) $\frac{P}{2} \ , \ \frac{3P}{2} \ , \ \frac{P}{2}$

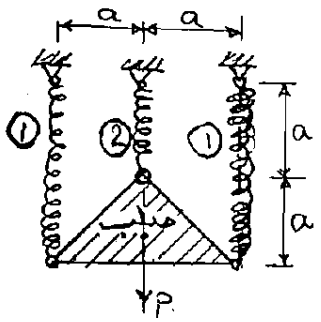
۳) $\frac{5P}{8} \ , \ \frac{5P}{4} \ , \ \frac{5P}{8}$

۴) $\frac{5P}{6} \ , \ \frac{5P}{6} \ , \ \frac{5P}{6}$



سراسری ۸۲

۳۸- در شکل روبرو سختی هر سه فنر مساوی است. نیروی وارد به هر فنر چقدر است؟



۱) $F_1 = F_2 = \frac{P}{3}$

۲) $F_1 = 0 \ , \ F_2 = P$

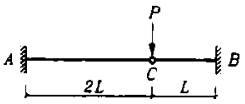
۳) $F_1 = \frac{P}{4} \ , \ F_2 = \frac{P}{2}$

۴) $F_1 = \frac{P}{6} \ , \ F_2 = \frac{2P}{3}$

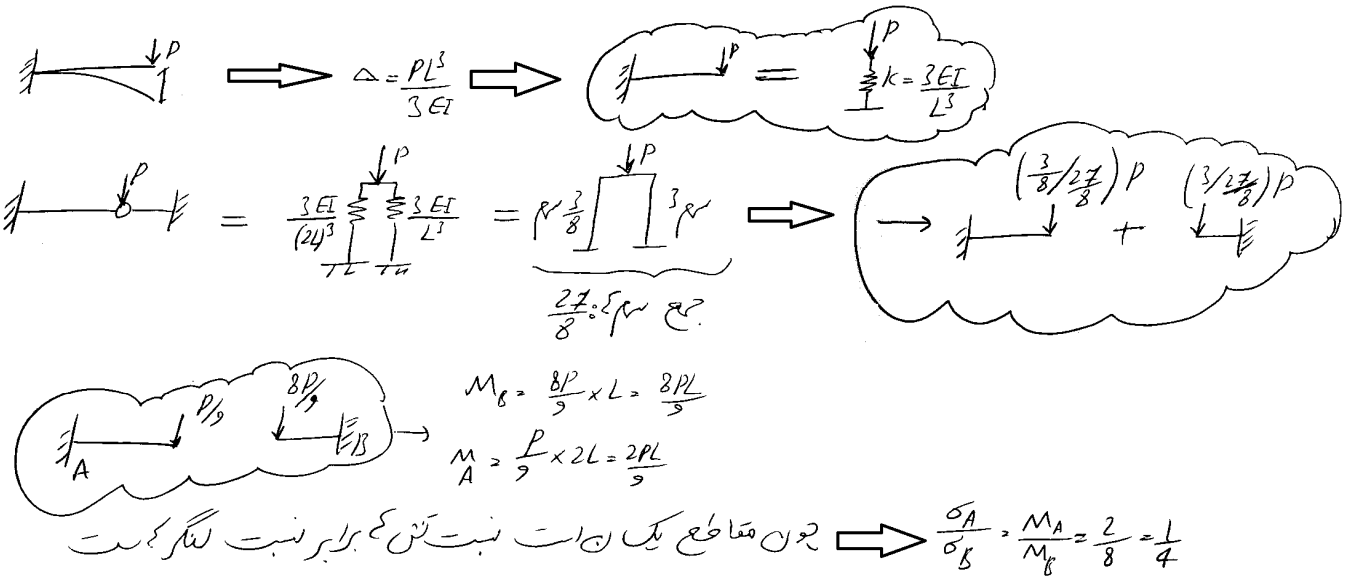
چون سختی که برابر است بر هرکدام $\frac{P}{3}$ می‌رسد

سراسری ۸۰

مقطع تیر (شکل روبرو) ثابت است. نسبت تنش عمودی ماکزیمم در مقطع A به تنش عمودی ماکزیمم در مقطع B (منظور تنش خمشی)، چقدر است؟



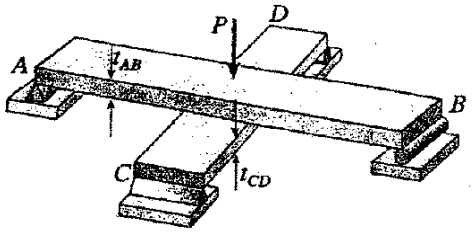
۱) $\frac{1}{4}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۱۶



چون مقاطع یک بر است نسبت تنش‌ها برابر نسبت لنگرهاست $\Rightarrow \frac{\sigma_A}{\sigma_B} = \frac{M_A}{M_B} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

سراسری ۸۹

تیرهای **AB** و **CD** از یک جنس و با عرض یکسان مطابق شکل عمود بر همدیگر در یک صفحه روی همدیگر قرار گرفته‌اند. قبل از اعمال بار **P** هیچ نیروی در تیرها وجود ندارد (از وزن آنها صرفنظر می‌شود) در صورتیکه $L_{AB} > L_{CD}$ باشد، نسبت t_{AB} / t_{CD} چقدر باشد تا اینکه عکس‌العمل‌های هر چهار تکیه‌گاه برابر شوند؟

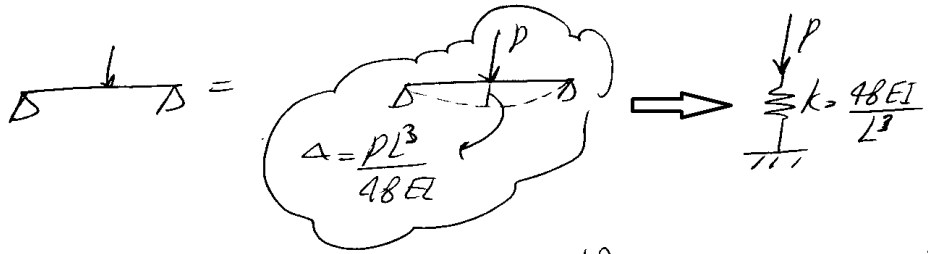


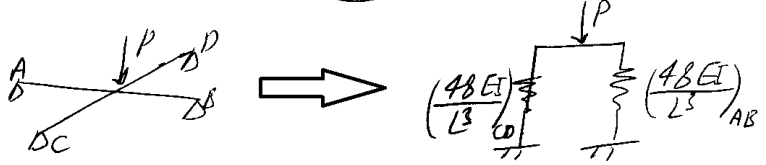
۱) $\frac{t_{AB}}{t_{CD}} = \frac{L_{CD}}{L_{AB}}$

۲) $\frac{t_{AB}}{t_{CD}} = \frac{L_{AB}}{2L_{CD}}$

۳) $\frac{t_{AB}}{t_{CD}} = \frac{2L_{AB}}{L_{CD}}$

۴) $\frac{t_{AB}}{t_{CD}} = \frac{L_{AB}}{L_{CD}}$





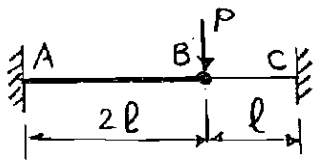
مشاهده کنید که عکس العمل‌ها یک‌اند پس سهم‌ها باید برابر باشد

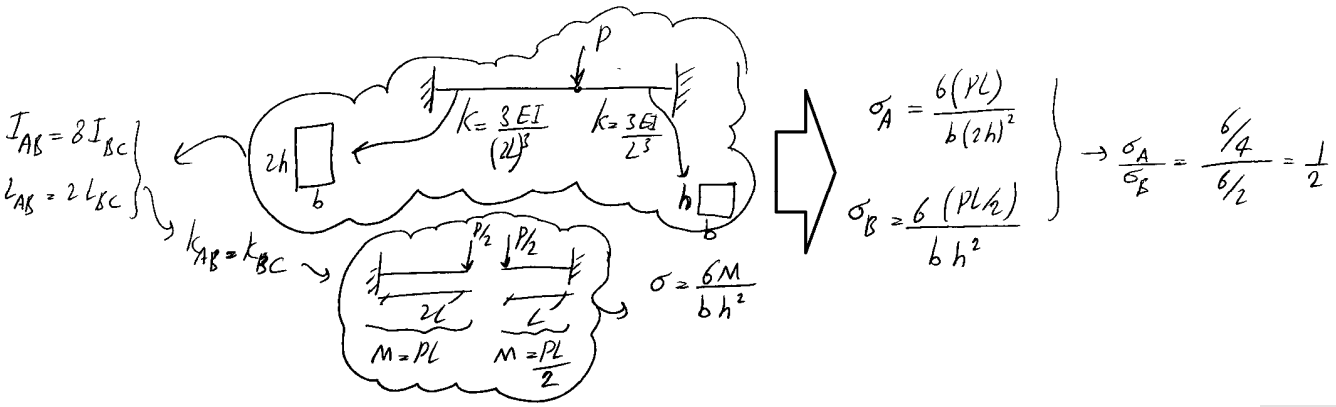
$$\left(\frac{48E\frac{bt^3}{12}}{L^3}\right)_{AB} = \left(\frac{48E\frac{bt^3}{12}}{L^3}\right)_{CD} \Rightarrow \left(\frac{t}{L}\right)_{AB} = \left(\frac{t}{L}\right)_{CD} \rightarrow \frac{t_{AB}}{t_{CD}} = \frac{L_{AB}}{L_{CD}}$$

سراسری۸۲

۳۳- مقطع تیر شکل زیر مربع مستطیل به پهنای ثابت است ولی ارتفاع مقطع در قسمت AB دو برابر قسمت BC می باشد،نسبت $\frac{\sigma_{A\max}}{\sigma_{C\max}}$ چقدر است؟

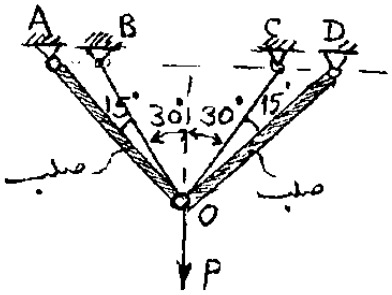
۱) ۱
۲) ۲
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) $\frac{۱}{۴}$





سراسری۸۳

۴۷- در شکل روبرو میله های OB و OC الاستیک و یکسان می باشند. نیروی وارد به میله ها کدام است؟



۱)نیروهای هر کدام از میله ها $\frac{P}{\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}$

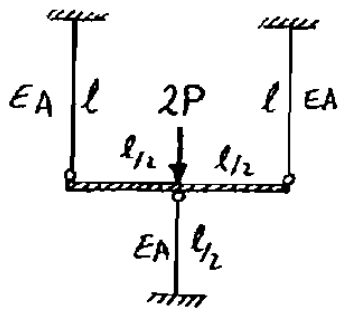
۲) میله های الاستیک $\frac{P}{۲\sqrt{۳}}$ ، میله های صلب $\frac{P}{۲\sqrt{۲}}$

۳) میله های الاستیک $\frac{P}{\sqrt{۳}}$ ، میله های صلب صفر

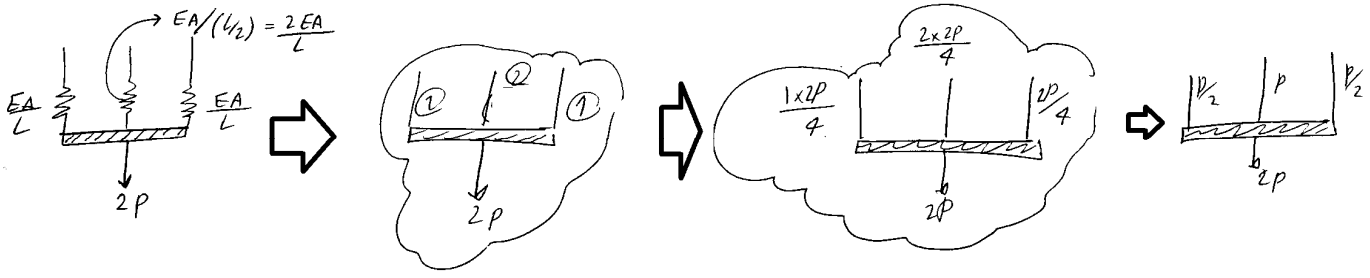
۴)میله های الاستیک صفر، میله های صلب $\frac{P\sqrt{۲}}{۲}$

سراسری۸۳

۵۰- میله صلب ABC توسط سه میله مطابق شکل نگاه داشته شده است، نیروی سه میله به ترتیب برابر است با:

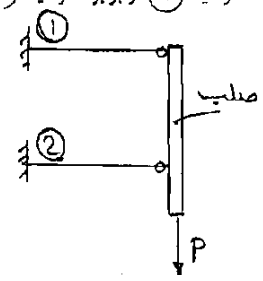


۱) $\frac{P}{۳},\frac{۴P}{۳},\frac{P}{۳}$
۲) $\frac{۲P}{۳},\frac{۲P}{۳},\frac{۲P}{۳}$
۳) $\frac{۳P}{۴},\frac{P}{۲},\frac{۳P}{۴}$
۴) $\frac{P}{۲},P,\frac{P}{۲}$



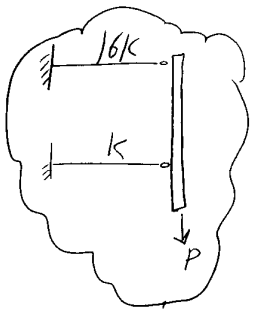
سراسری۸۴

۵۷- دو میله (۱) و (۲) از یک جنس و با یک طول و هر دو با مقطع دایره می‌باشند، به طوری که قطر میله (۱) دو برابر قطر میله (۲) است.



نسبت $\frac{\sigma_{1max}}{\sigma_{2max}}$ چقدر است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) $\frac{۱}{۸}$



سختی خمشی را باید در نظر بگیریم $\left(\frac{3EI}{L^3}\right)$ از آنجایی که تکیه میله بالایی دو برابر است

پس I آن نیز 2^4 برابر است

$\downarrow \frac{16P}{17} \rightarrow \sigma_1 = \frac{\left(\frac{16P}{17}L\right)(2R)}{\frac{\pi}{4}(2R)^4}$

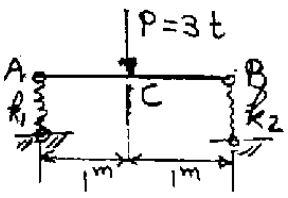
$\downarrow \frac{P}{17} \rightarrow \sigma_2 = \frac{\left(\frac{P}{17}L\right)R}{\frac{\pi}{4}R^4}$

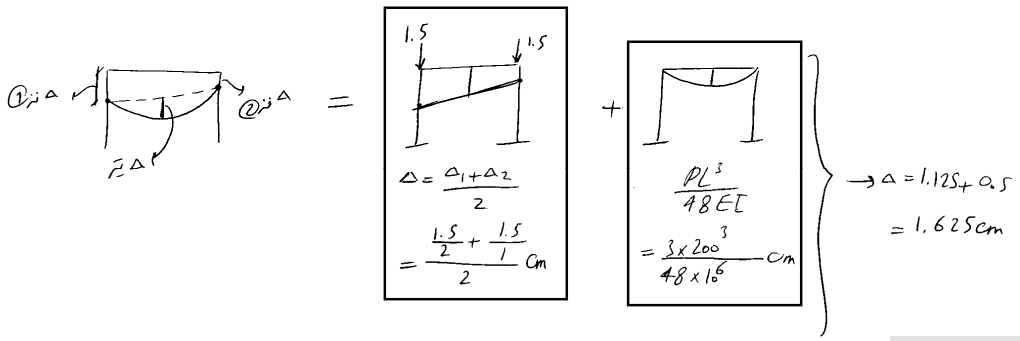
$\rightarrow \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = 2$

سراسری۸۹

۵۶- تیر شکل روبه‌رو روی دو فنر F_1 و F_2 قرار گرفته است به طوری که $k_1 = ۲ \frac{t}{cm}$ و $k_2 = ۱ \frac{t}{cm}$ است. اگر تغییر مکان وسط تیری بر روی دو تکیه‌گاه ساده مساوی $\frac{PL^3}{۴۸EI}$ باشد، تغییر مکان C وسط تیر نشان داده شده چند سانتی‌متر است؟ $EI = ۱۰^9\ kgcm^2$

۱) ۱/۶۲۵
۲) ۱/۲۵
۳) ۱/۱۲۵
۴) ۲/۲۵

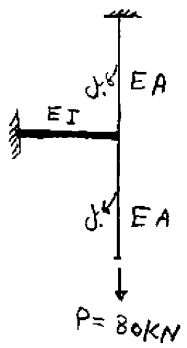


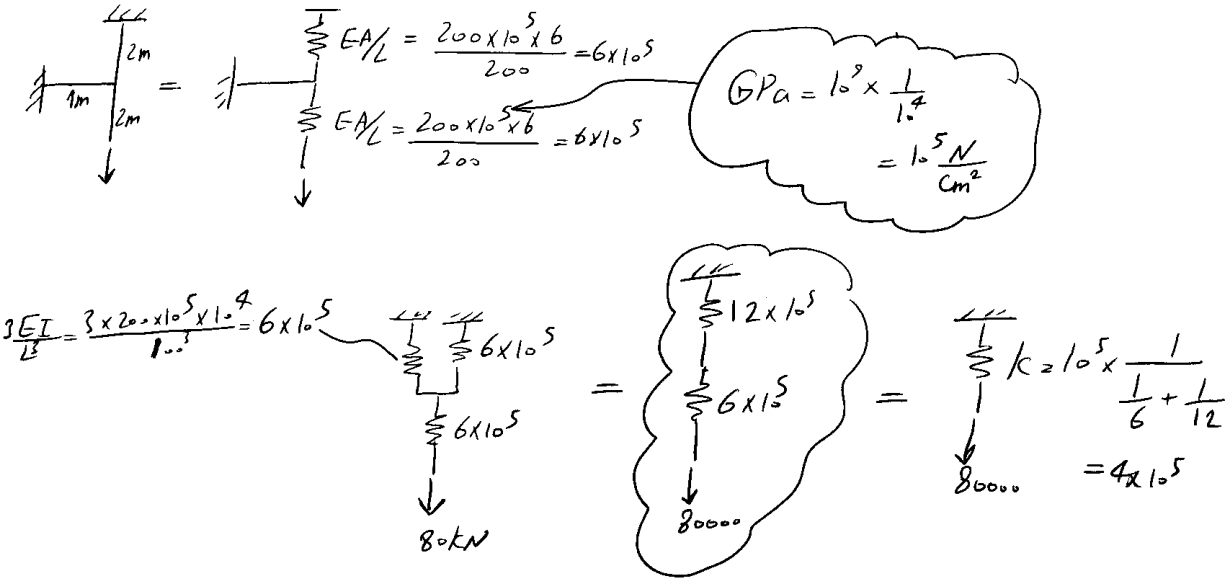


سراسری۸۹

۵۷- بار $P = ۸۰\ kN$ به انتهای کابل به طول ۲ متر مطابق شکل وارد می‌شود. انتهای کابل مزبور به انتهای یک تیر کنسول به طول یک متر بسته شده و همچنین کابل دیگری به طول ۲ متر نیز انتهای تیر را به سقف بسته است. $E = ۲۰۰\ GPa$ و ممان اینرسی تیر برابر $۱۰۰۰۰\ cm^4$ و سطح مقطع هر کابل برابر $۶\ cm^2$ می‌باشد. مقدار جابه‌جایی قائم محل اعمال بار $P = ۸۰kN$ بر حسب mm چقدر است؟

۱) ۴
۲) ۲
۳) ۱
۴) $\frac{۴}{۹}$



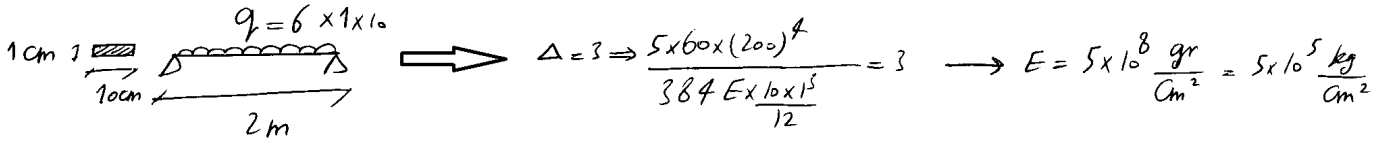


$$\longrightarrow \Delta = \frac{80000}{4\times10^5} = 0.2\,cm = 2mm$$

سراسری۸۶

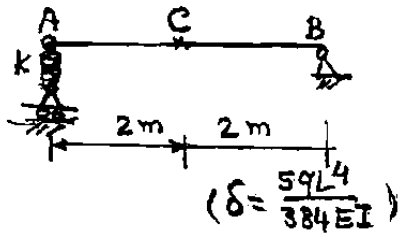
۵۹- نواری فلزی بطول ۲ متر و به پهنای ۱۰ cm و به ضخامت یک سانتی‌متر را که وزن مخصوص آن $۶\frac{grf}{cm^۳}$ می‌باشد روی دو تکیه‌گاه در دو انتهای آن قرار داده‌ایم. جابجایی آن در وسط که از رابطهٔ $\frac{۵qL^۴}{۳۸۴EI}$ بدست می‌آید مساوی سه سانتی‌متر شده است. مقدار E چقدر است؟ (بر حسب $\frac{kgf}{cm^۲}$)

۱) $۰/۲۵\times۱۰^۴$ ۲) $۰/۵\times۱۰^۶$ ۳) ۴×۱۰^۴ ۴) $۱۰^۸$



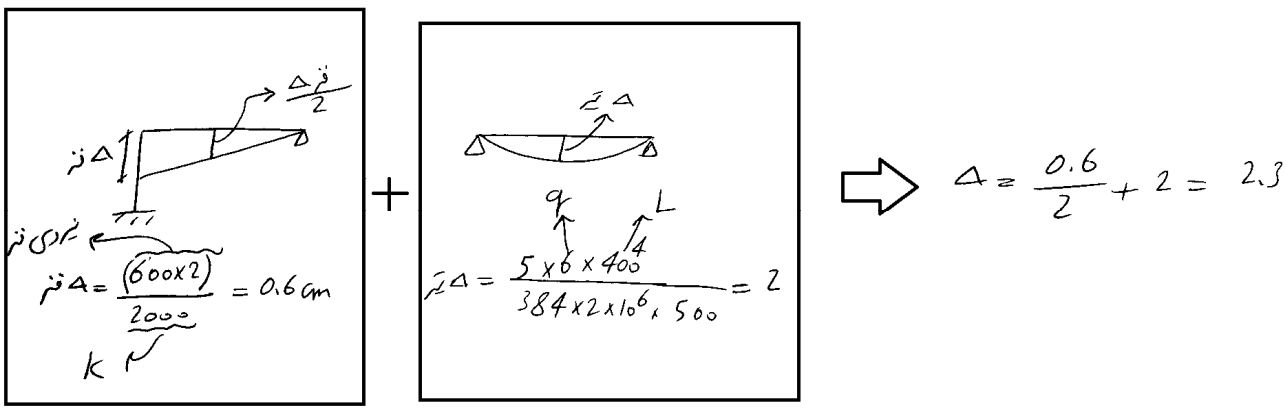
سراسری۸۵

۴۲- بر تیر شکل روبرو بارگسترده‌ای به شدت $۶۰۰\frac{kg}{m}$ وارد می‌شود. ضریب فنر $k = ۲۰۰۰\frac{kg}{cm}$، $I = ۵۰۰cm^۴$ و $E = ۲\times۱۰^۶\frac{kg}{cm^۲}$. تغییر مکان وسط دهانه بر حسب cm چقدر است؟

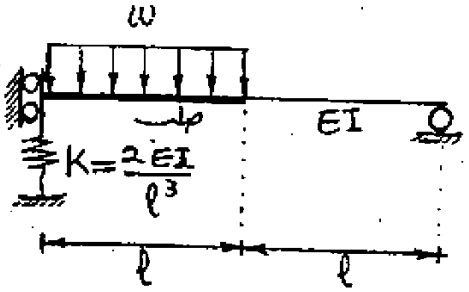


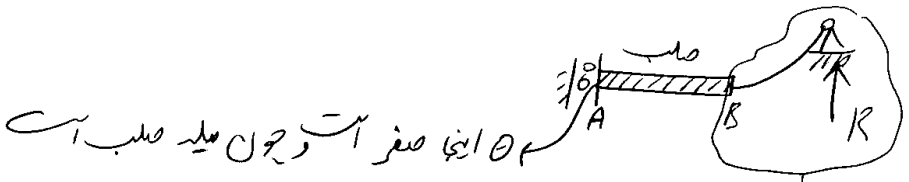
(δ تغییر مکان وسط دهانه تیر ساده AB تحت بار گسترده q می‌باشد).

۱) ۲٫۶
۲) ۲٫۳
۳) ۲
۴) ۱٫۷



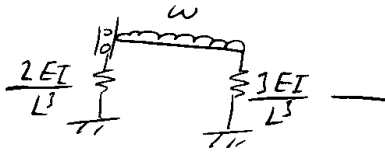
۷۲- در تیر شکل مقابل، نیرو در فنر کدام است؟
۱) ۰/۵ wl
۲) ۰/۳ wl
۳) ۰/۴ wl
۴) ۰/۲ wl





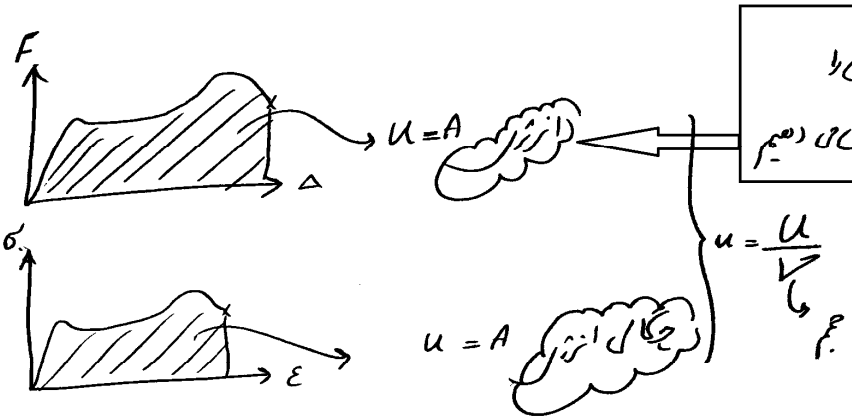
θ_A اینجا صفر است و چون میله صلب است
پس θ_B نیز صفر است

θ_B صفر است و این قسمت مانند یک تیر ساده است



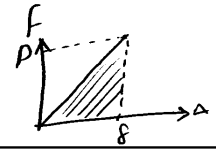
$\longrightarrow$ نیروی فنر چپ $= \frac{2}{2+3} \times (w \times L) = \frac{2wL}{5} = 0.4wL$

انرژی



مساحت زیر نمودار نیرو-تغییر مکان را انرژی کرنش می نامیم و با U نشان می دهیم

چگالی انرژی = انرژی در واحد حجم



اگر رفتار اره خطی باشد $U = \frac{P\delta}{2}$

انرژی ذخیره شده در تیر را به دو طریق می توان محاسبه کرد
۱- کار انجام شده توسط نیروهای خارجی
۲- کار انجام شده توسط نیروهای داخلی

مثال برای ① ←

$$\Rightarrow U = \frac{P\Delta}{2} = \frac{P}{2}\left(\frac{PL^3}{3EI}\right) = \frac{P^2L^3}{6EI}$$

$$\Rightarrow U = \frac{P\Delta}{2} = \frac{P}{2}\left(\frac{PL}{EA}\right) = \frac{P^2L}{2EA}$$

$$\Rightarrow U = \left[\frac{P\Delta}{2}\right] + \left[\frac{PL\theta}{2}\right] = \left[\frac{P}{2}\left(\frac{PL^3}{3EI} + \frac{(PL)L^2}{2EI}\right)\right] + \left[\frac{PL}{2}\left(\frac{PL^2}{2EI} + \frac{(PL)L}{EI}\right)\right] = \frac{7P^2L^3}{6EI}$$

مثال برای ②

انرژی ناشی از نیروی محوری $U = \int_0^L \frac{(\sigma A)(\varepsilon dx)}{2} = \int_0^L \frac{A\sigma\varepsilon}{2}dx = \int_0^L \frac{A\sigma^2}{2E}dx = \int_0^L \frac{P^2}{2EA}dx$

مساحت مقطع عضو

انرژی ناشی از خمش $U = \int_0^L \frac{M\,d\theta}{2} = \int_0^L \frac{M}{2}\left(\frac{M}{EI}dx\right) = \int_0^L \frac{M^2}{2EI}dx$

$$\Rightarrow M = Px \Rightarrow U = \int_0^L \frac{(Px)^2}{2EI}dx = \frac{P^2x^3}{6EI}\Big|_0^L = \frac{P^2L^3}{6EI}$$

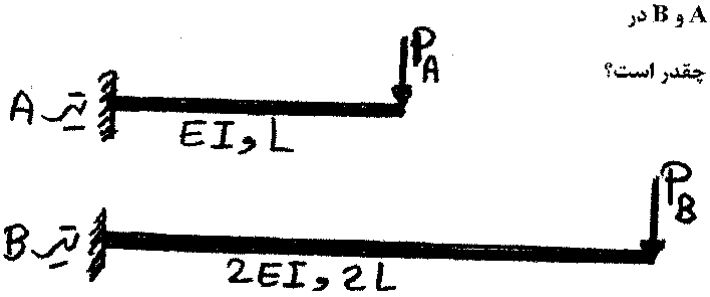
$$\Rightarrow M = PL + Px \Rightarrow U = \int_0^L \frac{(PL+Px)^2}{2EI}dx = \frac{P^2L^2x}{2EI} + \frac{P^2x^3}{6EI} + \frac{P^2Lx^2}{2EI}\Big|_0^L = \frac{7P^2L^3}{6EI}$$

$$\Rightarrow U = \int_0^L \frac{P^2}{2EA}dx = \frac{P^2L}{2EA}$$

سراسری۸۹

۶۳- اگر انرژی ذخیره شده در تیرهای A و B در اثر خمش برابر باشد، نسبت $\frac{P_A}{P_B}$ چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) ۱
۳) ۲
۴) $\sqrt{۲}$



$$U_A = \frac{P_A \times \Delta_A}{2} = \frac{P_A\left(\frac{P_A L^3}{3EI}\right)}{2} = \frac{P_A^2 L^3}{6EI}$$

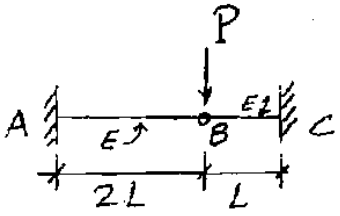
$$U_B = \frac{P_B \times \Delta_B}{2} = \frac{P_B\left(\frac{P_B (2L)^3}{3(2EI)}\right)}{2} = \frac{2P_B^2 L^3}{3EI}$$

$$U_B = U_A \Rightarrow \frac{P_A^2}{6} = \frac{2P_B^2}{3} \Rightarrow \frac{P_A}{P_B} = 2$$

سراسری۸۴

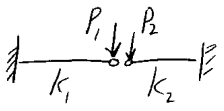
۵۵- چنانچه مقطع تیر شکل مقابل مربع مستطیل با پهنای ثابت باشد و انرژی ذخیره شده در قسمت AB برابر انرژی ذخیره شده در قسمت BC باشد، آنگاه ارتفاع مقطع در قسمت AB چند برابر قسمت BC می‌باشد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۴
۴) ۸



$$U_{AB} = U_{BC} \Rightarrow \frac{P_1^2 (2L)^3}{6EI_1} = \frac{P_2^2 (L)^3}{6EI_2}$$

$$\rightarrow \frac{8P_1^2}{I_1} = \frac{P_2^2}{I_2}$$



ازطرفی P_1 و P_2 برحسب سختی تقسیم می‌شود

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{k_1}{k_2} = \frac{EI_1/(2L)^3}{EI_2/L^3} = \frac{I_1}{8I_2}$$

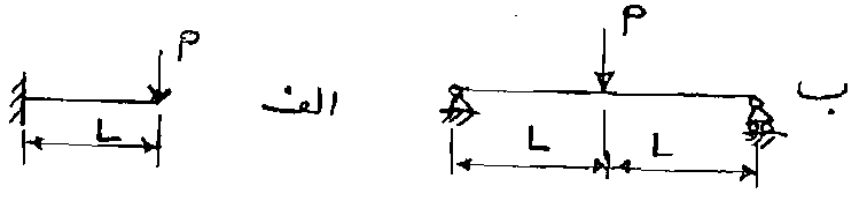
$$\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^2 = \frac{I_1}{8I_2} \qquad \frac{P_1}{P_2} = \frac{I_1}{8I_2}$$

$$\left(\frac{I_1}{8I_2}\right)^2 = \frac{I_1}{8I_2} \rightarrow \frac{I_1}{I_2} = 1$$

سراسری۸۲

۳۱- سطح مقطع و جنس تیرهای شکل های زیر یکی است. اگر انرژی کرنش (تنجش) ذخیره شده در شکل الف مساوی U باشد، انرژی کرنش شکل ب چقدر است؟

۱) U
۲) ۲U
۳) $\frac{U}{۲}$
۴) ۴U

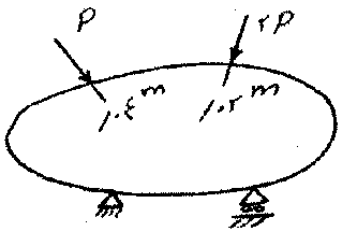


$$U_{\text{الف}} = \frac{P^2 L^3}{6EI} \qquad U_{\text{ب}} = P \times \frac{P(2L)^3}{48EI} \times \frac{1}{2} = \frac{PL^3}{12EI}$$

$$\rightarrow U_{\text{ب}} = \frac{U_{\text{الف}}}{2} = \frac{U}{2}$$

سراسری۸۹

۶۰- سازه‌ی الاستیک خطی مطابق شکل مفروض است. اگر انرژی تغییر شکل این سازه را برحسب نیروهای وارده P بیان کنیم، $U = U(p)$ کدام رابطه صحیح است؟



۱) $\frac{\partial U}{\partial p} = 0/05m$

۲) $\frac{\partial U}{\partial p} = 0/04m$

۳) $\frac{\partial U}{\partial p} = 0/06m$

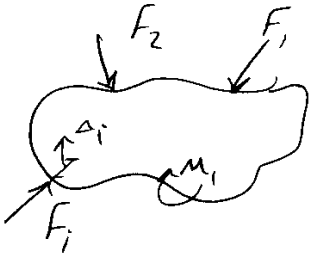
۴) $\frac{\partial U}{\partial p} = 0/08m$

۴ قضیه کاستیانو: ✓ این قضیه برای هر دو نوع سازه خطی و غیرخطی کاربرد دارد

قضیه اول: (خطی و غیرخطی)

$\frac{\partial U}{\partial \Delta_i} = F_i$

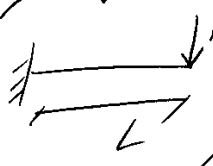
اگر U انرژی سازه بر اثر نیروهایی داده باشد



قضیه دوم: (فقط برای خطی)

$\frac{\partial U}{\partial F_i} = \Delta_i$

برای مثال برای تیر طره به شکل



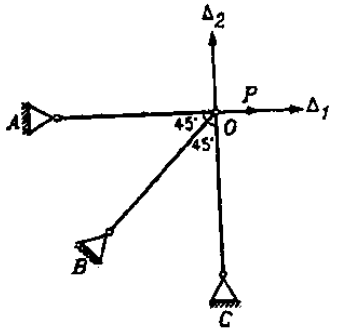
$U = \frac{P^2 L^3}{6EI}$

$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{2PL^3}{6EI} = \frac{PL^3}{3EI}$

$U = \sum \frac{P\Delta}{2} = \left(\frac{P \times 0.04}{2}\right) + \left(\frac{2P \times 0.02}{2}\right) = 0.04P \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial P} = 0.04m$

آزاد ۸۶

۵۹- انرژی کرنشی خرپای زیر بصورت $V = \frac{AE}{4l}(3\Delta_1^2 + 3\Delta_2^2 + 2\Delta_1\Delta_2)$ می باشد که Δ_1 و Δ_2 به ترتیب تغییر مکان افقی و قائم مفصل O هستند. قدر مطلق نسبت $\frac{\Delta_1}{\Delta_2}$ برای بارگذاری داده شده چقدر است؟

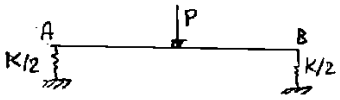


۱) ۳/۵ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۲/۵

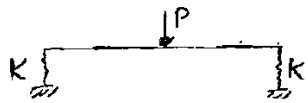
سراسری۸۵

در کدام یک از سازه‌های زیر انرژی پیشتری ذخیره می‌شود؟ (EI در کلیه تیرها یکسان است.) P در وسط قرار دارد.

۱)

۲) 

۳)

۴) 

$$U_1 = \frac{P_x\left(\Delta_{\text{زیر}} + \frac{\Delta_{\text{فنر}}}{2}\right)}{2} = \frac{P}{2}\left(\Delta_{\text{زیر}} + \frac{F}{2K}\right)$$

$$U_2 = \frac{P}{2}\left(\Delta_{\text{زیر}} + \Delta_{\text{فنر}}\right) = \frac{P}{2}\left(\Delta_{\text{زیر}} + \frac{F}{K/2}\right)$$

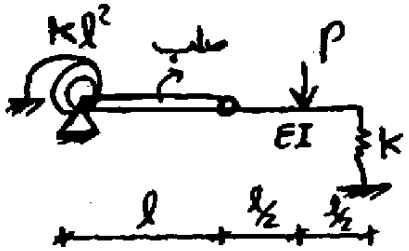
$$U_3 = \frac{P}{2}\left(\Delta_{\text{زیر}} + \frac{\Delta_{\text{فنر}} + \Delta_{\text{فنر}}}{2}\right) = \frac{P}{2}\left(\Delta_{\text{زیر}} + \frac{F/K + F/K/2}{2}\right)$$

$$U_4 = \frac{P}{2}\left(\Delta_{\text{زیر}} + \Delta_{\text{فنر}}\right) = \frac{P}{2}\left(\Delta_{\text{زیر}} + \frac{F}{K}\right)$$

از همه بیشتر است

آزاد ۸۸

۷۲- انرژی کرنشی سازه نشان داده شده چقدر است؟

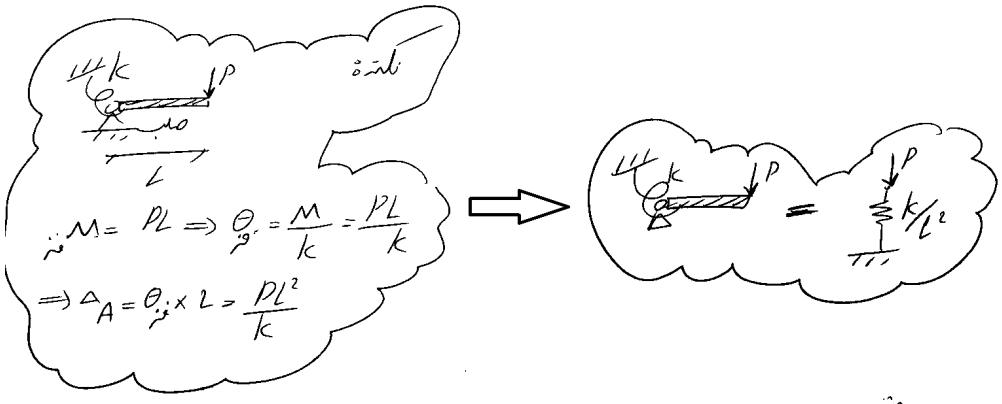


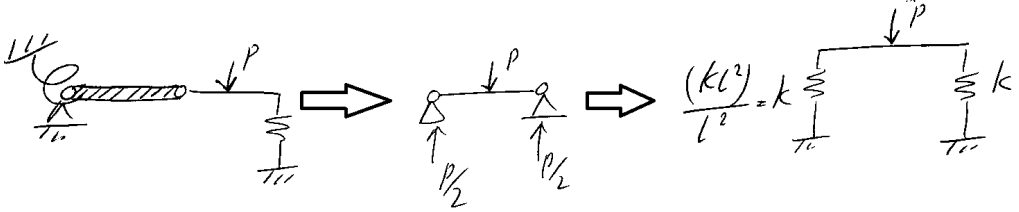
۱) $\frac{P^2l^3}{48EI} + \frac{P^2}{K}$

۲) $\frac{P^2l^3}{3EI} + \frac{P^2}{4K}$

۳) $\frac{P^2l^3}{96EI} + \frac{P^2}{K}$

۴) $\frac{P^2l^3}{96EI} + \frac{P^2}{4K}$



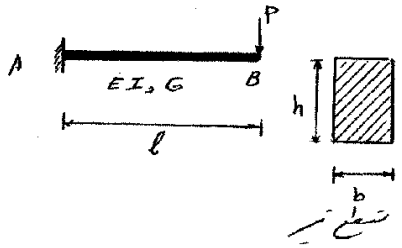


$$\Delta = \Delta_{\text{فنر}} + \frac{Pl^3}{48EI} = \frac{P}{2K} + \frac{Pl^3}{48EI} \rightarrow U = \frac{P\Delta}{2} = \frac{P^2}{4K} + \frac{P^2l^3}{96EI}$$

سراسری ۸۹

۵۸- تغییر مکان قائم نقطه B با در نظر گرفتن انرژی برشی و خمشی نسبت به حالتی که فقط انرژی خمشی در نظر گرفته شود چند درصد افزایش می‌یابد؟ فرض کنید $(\frac{E}{G}=2/4 \ , \ \frac{l}{h}=10)$

۱) ٪۱/۰۰۷۲
۲) ٪۰/۷۲
۳) ٪۱/۰۷۲
۴) ٪۱/۷۲



$$\Delta_{\text{برشی}}=\frac{\partial U_{\text{برشی}}}{\partial P}=\frac{\partial\left(1.2\int\frac{V^2 dx}{2GA}=\frac{1.2\,P^2L}{2Gbh}\right)}{\partial P}=\frac{1.2PL}{Gbh}$$

$$\Delta_{\text{خمشی}}=\frac{\partial U_{\text{خمشی}}}{\partial P}=\frac{\partial\left(\int\frac{M^2dx}{2EI}\right)}{\partial P}=\frac{\partial\left(\int\frac{P_x^2dx}{2EI}\right)}{\partial P}=\frac{\partial\left(P^2L^3/6A\right)}{\partial P}\rightarrow \Delta_{\text{خمشی}}=\frac{PL^3}{3EI}=\frac{PL^3}{3E\frac{bh^3}{12}}$$

$$\Delta_{\text{کل}}=\frac{1.2PL}{Gbh}+\frac{PL^3}{3E\frac{bh^3}{12}}=\frac{1.2\times2.4P(10h)}{Ebh}+\frac{4P(10h)^3}{Ebh^3}\rightarrow \Delta_{\text{کل}}=\frac{28.8P}{Eb}+\frac{4000P}{Eb}$$

$G=E/2.4$ ، $L=10h$

$$\Rightarrow \text{درصد افزایش}=100\left(\frac{\Delta_{\text{کل}}-\Delta_{\text{خمشی}}}{\Delta_{\text{کل}}}\right)=100\left(\frac{4028.8-4000}{4028.8}\right)=0.714\%$$

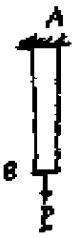
آزاد ۸۶

۵۸- در یک سازه تحت اثر وزن خود اگر همه ابعاد سازه α برابر شود چگالی انرژی کرنشی سازه چند برابر می شود؟

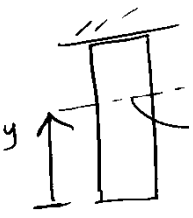
۱) α^2 برابر
۲) α^4 برابر
۳) α برابر
۴) چگالی انرژی کرنشی ثابت می ماند.

آزاد ۸۸

۵۹- انرژی کرنشی میله استوانه ای زیر که تحت اثر وزن W و نیروی متمرکز P در انتهای آن قرار دارد چقدر است؟



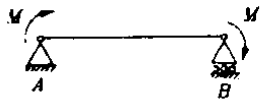
۱) $\frac{P^2l}{2AE}+\frac{PWl}{4AE}+\frac{W^2l}{6AE}$
۲) $\frac{P^2l}{2AE}+\frac{PWl}{6AE}+\frac{W^2l}{6AE}$
۳) $\frac{P^2l}{2AE}+\frac{PWl}{2AE}+\frac{W^2l}{6AE}$
۴) $\frac{P^2l}{2AE}+\frac{W^2l}{6AE}$



$$U=\int\frac{p^2dy}{2EA}=\frac{1}{2EA}\int\left(P+W\frac{y}{L}\right)^2dy=\frac{1}{2EA}\int\left(P^2+\left(\frac{W}{L}\right)^2y^2+\frac{2PW}{L}y\right)dy$$
$$=\frac{1}{2EA}\left(P^2L+\frac{W^2L}{3}+\frac{2PWL}{2}\right)$$

آزاد ۸۷

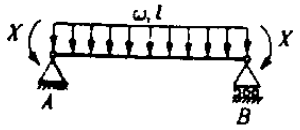
۵۹- انرژی کرنشی تیر زیر چقدر است؟ (طول تیر l و صلبیت خمشی آن EI است.)



۱) $\frac{M^2 l}{6EI}$ ۲) $\frac{Ml^2}{3EI}$ ۳) $\frac{M^2 l}{4EI}$ ۴) $\frac{M^2 l}{12EI}$

آزاد ۸۷

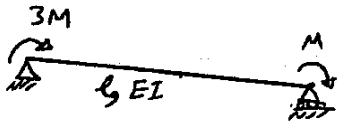
۶۰- x چقدر باشد تا انرژی کرنشی تیر زیر مینیمم شود؟ (EI = Con st)



۱) $\frac{wl^2}{2}$ ۲) $\frac{wl^2}{4}$ ۳) $\frac{wl^2}{12}$ ۴) $\frac{wl^2}{8}$

آزاد ۸۵

۶۹- انرژی کرنشی تیر زیر چقدر است؟



۱) $\frac{4M^2 l}{3EI}$ ۲) $\frac{7M^2 l}{3EI}$ ۳) $\frac{7M^2 l}{6EI}$ ۴) $\frac{8M^2 l}{3EI}$

$$3M = \left(4\theta_A + 2\theta_B\right)\frac{EI}{L} \quad (I)$$

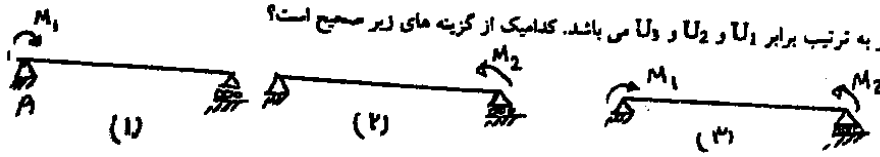
$$M = \left(2\theta_A + 4\theta_B\right)\frac{EI}{L} \quad (II)$$

$$(I) - 2\times(II) \rightarrow M = \left(0 - 6\theta_B\right)\frac{EI}{L} \rightarrow \boxed{\theta_B = -\frac{ML}{6EI}}$$

$$(II) \rightarrow M = \left(\frac{2\theta_A EI}{L}\right) - \frac{2M}{3} \rightarrow \boxed{\theta_A = \frac{5ML}{6EI}} \rightarrow U = \frac{1}{2}\left(3M\theta_A + M\theta_B\right) = \frac{L}{2EI}\left(\frac{15M^2}{6} - \frac{M^2}{6}\right) = \frac{7M^2 L}{6EI}$$

آزاد ۸۵

۷۹- انرژی کرنشی تیرهای ۱ و ۲ و ۳ در شکل زیر به ترتیب برابر U_1 و U_2 و U_3 می باشد. کدامیک از گزینه های زیر صحیح است؟ (طول تیرها l و صلبیت خمشی آنها EI است.)



۱) $U_3 = U_1 + U_2$ ۲) $U_3 < U_1 + U_2$ ۳) $U_3 > U_1 + U_2$ ۴) هیچکدام

$$U_1 = \frac{1}{2}M_1\left(\frac{M_1 L}{3EI}\right) = \frac{M_1^2 L}{6EI} \qquad \theta_A$$

$$U_2 = \frac{M_2^2 L}{6EI}$$

در رابطه جدید هم θ_A و هم θ_B افزایش می یابند

با برین $\leftarrow U_3 > U_1 + U_2$

$$M_1 = 4\theta_1 + 2\theta_2$$
$$-M_2 = 2\theta_1 + 4\theta_2$$

$$\rightarrow \begin{cases} \theta_1 = \frac{M_1 L}{3EI} + \frac{M_2 L}{6EI} \\ \theta_2 = \frac{-M_2 L}{3EI} - \frac{M_1 L}{6EI} \end{cases}$$

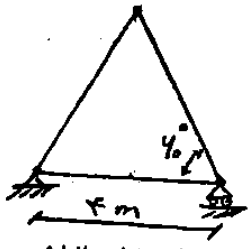
راحل رتبق با رابطه

$$\rightarrow U_3 = \frac{M_1\theta_1 - M_2\theta_2}{2} = \frac{M_1^2 L}{2EI}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) + \frac{M_2^2 L}{2EI}\left(\frac{+1}{3} + \frac{1}{6}\right) + \frac{M_1 M_2 L}{2EI}\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right)$$

$$= \frac{M_1^2 L}{6EI} + \frac{M_2^2 L}{6EI} + \frac{M_1 M_2 L}{6EI}$$

آزاد ۸۵

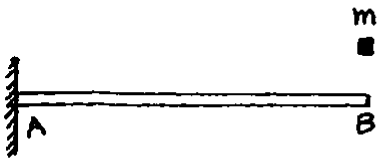
۸۹- در خرپای روبرو اگر دمای تمام اعضاء از ۱۰ درجه به ۲۰ درجه افزایش یابد انرژی کرنشی آن چقدر تغییر می کند؟ سطح مقطع تمام اعضاء ۱۰ سانتی متر مربع و $E = 2 \times 10^6\ kg/cm^2$ می باشد.



۱) ٤ برابر می شود. ۲) تغییر نمی کند چون سازه معین است. ۳) ۲ برابر می شود. ٤) بی نهایت افزایش می یابد.

آزاد ۸۴

۸۸- ماکزیمم تغییر شکل تیر زیر اگر وزنه m به جرم 10 kg از فاصله ۱۰ سانتی متری انتهای تیر سقوط کند چقدر است؟ $(l = 100\ cm,\ EI = 10^7\ kg.cm^2)$



۱) 0.33 cm
۲) 2.94 cm
۳) 1.72 cm
۴) 3.12 cm

توجه شود که mg از جنس نیرو است
و جزو واحد E سمت kg/cm^2 (یا N/cm^2) است
مقدار mg نیز باید برحسب kg باشد

انرژی پتانسیل = mgh

انرژی تغییر شکل = $\frac{P \times \Delta}{2} = \frac{(k\Delta)\Delta}{2}$

$mgh \uparrow$

$10 \times (10 + \Delta y) = k \times \frac{\Delta y^2}{2} \rightarrow 100 - 10\Delta y = 15\Delta y^2 \rightarrow \Delta y = \begin{cases} 2.94\ cm \\ -2.27\ cm \end{cases}$

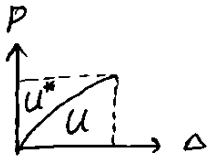
ارتفاع سقوط

$k = \frac{3EI}{L^3} = 30$

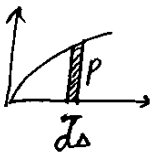
آزاد ۸۴

۸۹- برای یک تیر الاستیک انرژی کرنشی تیر را با U و انرژی مکمل را با U^* نشان می دهیم. کدام عبارت زیر تغییر مکان در راستای نیروی P را نشان می دهد؟

۱) $\frac{\partial U^*}{\partial P}$
۲) $\frac{\partial U}{\partial P}$
۳) $\frac{\partial}{\partial P}(U + U^*)$
۴) $\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial P}(U + U^*)$

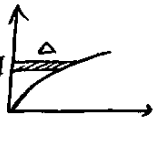


$U = \int P d\Delta$



$\rightarrow \frac{\partial U}{\partial \Delta} = P$

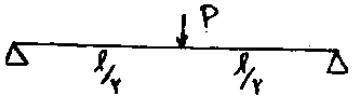
$U^* = \int \Delta dP$



$\rightarrow \frac{\partial U^*}{\partial P} = \Delta$

آزاد ۸۴

۳۶- انرژی پتانسیل نیروی P در تیر ساده زیر کدام است؟



۱) $\frac{P^2l^3}{144EI}$ ۲) $\frac{P^2l^3}{64EI}$ ۳) $\frac{P^2l^3}{96EI}$ ۴) $\frac{P^2l^3}{48EI}$

آزاد۸۹

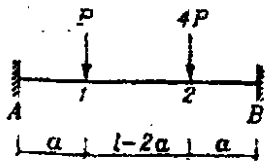
۵۹- در انتهای یک تیر طره با مقطع دایروی لنگر خمشی M اعمال می‌شود. اگر این لنگر بصورت پیچشی در انتهای تیر اعمال شود انرژی کرنشی ذخیره شده در تیر چند برابر می‌شود؟ ($\nu = 0.2$)

۱) ۱/۲ ۲) ۱/۶

۳) ۲ ۴) ۲/۴

آزاد۸۹

۶۰- در تیر زیر تغییرمکان نقاط ۱ و ۲ تحت بار قائم P در نقطه ۱ بترتیب برابر Δ و $\frac{\Delta}{4}$ می‌باشد. اگر بارهای قائم P و 4P بطور همزمان در نقاط ۱ و ۲ وارد شوند انرژی کرنشی نیز چقدر می‌شود؟

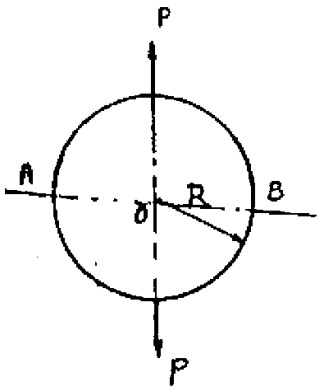


۱) $۸/۵\ P\Delta$ ۲) $۶/۵\ P\Delta$

۳) $۹/۵\ P\Delta$ ۴) $۷/۵\ P\Delta$

سراسری ۸۸

۸۷- M_A کدام است؟ (صلبیت خمشی، برشی و محوری ثابت است.)

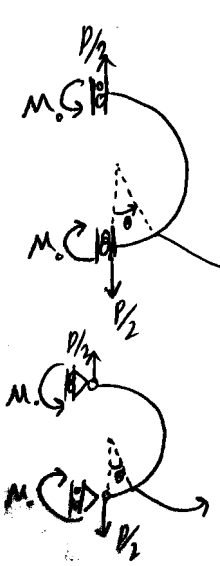


۱) $-\frac{PR}{\pi}$

۲) $\frac{PR}{۲}$

۳) $\frac{PR}{\pi}$

۴) $PR(\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{\pi})$



M را طوری تعیین می‌کنیم که θ صفر شود (با استفاده از کاستیلیانو)

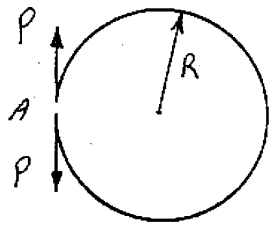
$$M_\theta = M_\circ - \frac{P}{2}(R\sin\theta) \rightarrow \theta = \frac{\partial U}{\partial M_\circ} = 0 \rightarrow \int \frac{M^2}{2EI}\,dx$$

$$\rightarrow \frac{\partial U}{\partial M} = 0 \left\{ \begin{array}{l} U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI}\,dx \end{array} \right. \rightarrow \int_0^L \frac{2MM'}{2EI}\,dx = 0 \rightarrow \int_0^L \frac{(M_\circ - \frac{P}{2}(R\sin\theta))\times 1\,dx}{EI}$$

$$\frac{1}{EI}\int_0^{\pi/2}\left(M_\circ - \frac{PR\sin\theta}{2}\right)R\,d\theta = 0 \rightarrow \left[M_\circ\theta R + \frac{PR^2\cos\theta}{2}\right]_0^{\pi/2} = 0 \Rightarrow \boxed{M_\circ = \frac{PR}{\pi}}$$

سراسری ۸۸

۸۵- حلقهٔ دایره شکلی در نقطهٔ A بریده شده و تحت اثر دو نیروی مساوی با علامت مخالف P قرار گرفته است. بین دو انتهای بریده شده چقدر فاصله، ایجاد می‌شود؟ (صلبیت خمشی حلقه را EI فرض کنید و از اثرات برش و نیروی محوری صرفنظر نمائید.)



۱) $\frac{۴\pi PR^۲}{EI}$

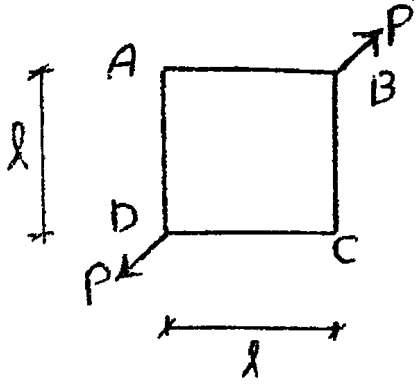
۲) $\frac{۲\pi PR^۲}{EI}$

۳) $\frac{۳\pi PR^۲}{EI}$

۴) $\frac{\pi PR^۲}{EI}$

آزاد ۸۹

۸۰- در سازه مربعی شکل نشان داده شده لنگر در نقطه A و B کدام است؟ (EI ثابت)



۱) $M_A = \frac{Pl}{8}$ ، $M_B = \frac{Pl}{4}$

۲) $M_A = M_B = \frac{Pl}{8}$

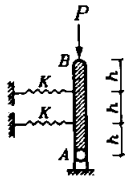
۳) $M_A = \frac{\sqrt{2}}{8}Pl$ ، $M_B = \frac{\sqrt{2}}{4}Pl$

۴) $M_A = M_B = \frac{\sqrt{2}}{8}Pl$

۱۷-کمانش

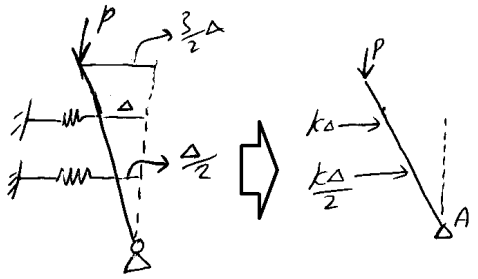
سراسری ۷۹

مطلوبست محاسبه و تعیین بار بحرانی سازه در شکل مقابل:



۱) $\frac{5Kh}{3}$ ۲) $\frac{4Kh}{3}$

۳) $2Kh$ ۴) $\frac{Kh}{2}$



ابتدا تغییر شکل سازه را تصور می‌کنیم ؛

$\sum M_A = 0 \rightarrow k\Delta \times 2h + \frac{k\Delta}{2} \times h - P \times \frac{3\Delta}{2} = 0$

$\rightarrow P = \frac{5kh}{3}$

سراسری ۸۰

سه ستون دو سر مفصل که جنس و طول یکسانی دارند، می‌توانند در هر جهتی کمانش کنند. با توجه به اینکه سطح مقطع ستونها مثلث متساوی الاضلاع، دایره و مربع می‌باشند و مساحت مقطع هر سه ستون با هم مساوی است، کدام مقطع دارای بار بحرانی بیشتری است؟

۱) مثلثی ۲) دایره‌ای

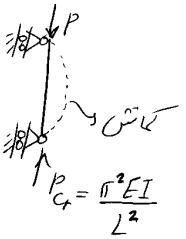
۳) مربعی ۴) فرقی نمی‌کند

هر مقطعی که I بیشتری داشته باشد دیرتر کمانش می‌کند

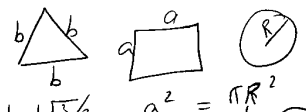
مثلث $I = \frac{bh^3}{36} = \frac{b(b\sqrt{3}/2)^3}{36} = b^4\left(\frac{\sqrt{3}}{24}\right)$

مربع $I = \frac{a^4}{12}$

دایره $I = \frac{\pi}{4}R^4$



مساحت‌ها برابر است بنابراین



$\frac{b \times b\sqrt{3}/2}{2} = a^2 = \pi R^2$

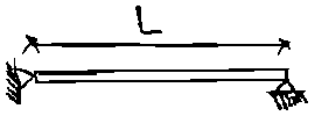
دایره $I = \frac{\pi}{4}\left(\frac{a^2}{\pi}\right)^2 = \frac{a^4}{4\pi}$

مثلث $I = \left(\frac{16}{5}a^4\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{24}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{5}a^4$

بنابراین بار بحرانی مثلث از همه بیشتر است $I_{\text{مثلث}} > I_{\text{دایره}} > I_{\text{مربع}}$

سراسری ۸۱

۴۰- مقدار تغییرات درجه حرارتی (ΔT) که قادر است ستون دو سر مفصلی بطول L و ضریب انبساطی α را به حد کمانش برساند ، کدام است؟



۱) $\frac{\pi^2 EI}{\alpha L^2}$ ۲) $\frac{2\pi^2 I}{A\alpha L^2}$

۳) $\frac{\pi^2 I}{A\alpha L^2}$ ۴) $\frac{\pi^2 I}{2A\alpha L^2}$

زمانی کمانش که بعلت حرارت در مقطع ایجاد می‌گردد

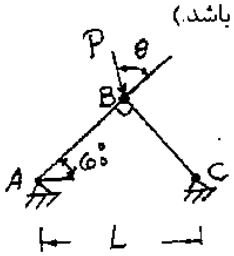
$P = (\alpha \Delta T L)\frac{EA}{L}$

$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$ ← نیروی کمانشی

$\rightarrow \alpha \Delta T k \frac{EA}{k} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \rightarrow \Delta T = \frac{\pi^2 EI}{\alpha L^2 A}$

سراسری ۸۲

۴۱- خرپای ABC از دو میله باریک با مقطع و جنس یکسان تشکیل شده است. با فرض اینکه فرو ریختن خرپا در اثر کمانش اعضای آن صورت گیرد، تحت چه زاویه «θ» می توان بیشترین بار P را بر خرپا وارد نمود؟ (با فرض اینکه $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ باشد.)



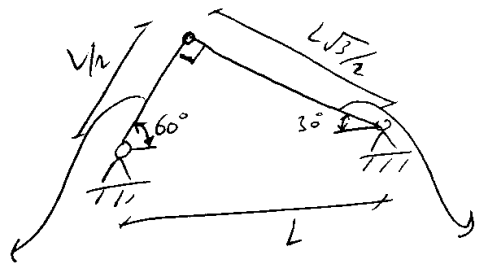
۱) $\tan\theta = \sqrt{3}$

۲) $\cot\theta = \sqrt{3}$

۳) $\tan\theta = \frac{1}{3}$

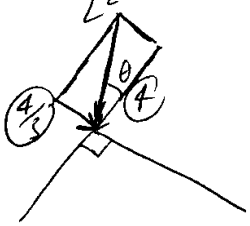
۴) $\cot\theta = \frac{1}{3}$

بار P باید طوری وارد شود تا هر دو میله همزمان به کمانش برسند



$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}L\right)^2} = \frac{4\pi^2 EI}{3L^2}$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{\left(\frac{L}{2}\right)^2} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2}$$



$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{4/3}{4}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \longrightarrow \tan\theta = \frac{1}{3}$$

سراسری ۸۴

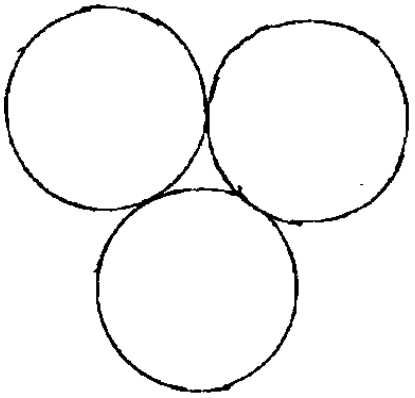
۶۰- شعاع ژیراسیون مقطع تیر یا ستونی که از اتصال سه لوله متشابه مطابق شکل درست شده چند برابر شعاع ژیراسیون هر یک از لوله‌ها می‌باشد؟ (فرض می‌شود که جداره لوله‌ها ضخامت اندکی در مقایسه با شعاع آنها داشته باشد.)

۱) ۱٫۵۳

۲) ۲٫۶۵

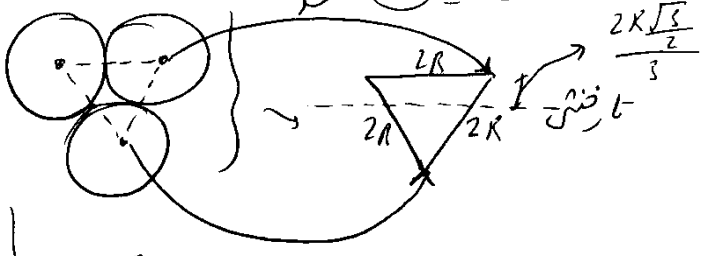
۳) ۱٫۲۹

۴) ۲٫۱۶



$$r = \sqrt{\frac{I}{A}}$$

شعاع ژیراسیون سه



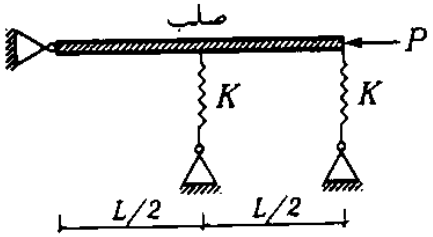
$$I = 3\left(\pi R^3 t\right) + 2\underbrace{\left[2\pi R t \times \left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2\right]}_{Ad^2}$$

$$+\left[2\pi R t \times \left(\frac{2R\sqrt{3}}{3}\right)^2\right] = 7\pi R^3 t$$

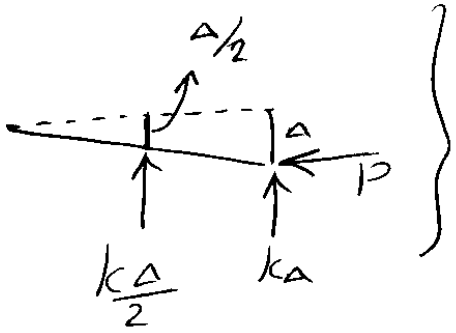
$$\longrightarrow r = \sqrt{\frac{7\pi R^3 t}{3(2\pi R t)}} = \sqrt{\frac{7}{6}}R$$

سراسری۷۴

۲- بار بحرانی شکل مقابل چقدر است؟



۱) KL ۲) $\frac{5KL}{4}$ ۳) $\frac{3KL}{4}$ ۴) ∞

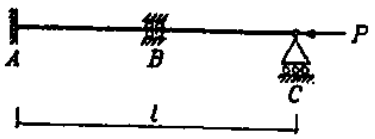


$\rightarrow P\Delta = \frac{k\Delta}{2}\times\frac{L}{2} + k\Delta\times L$

$\rightarrow P = \frac{5kL}{4}$

آزاد ۸۶

۶۰- در سازه زیر تکیه گاه میانی B را در چه فاصله ای از تکیه گاه A قرار دهیم تا بار بحرانی سازه ماکزیمم شود؟ (EI = con st)

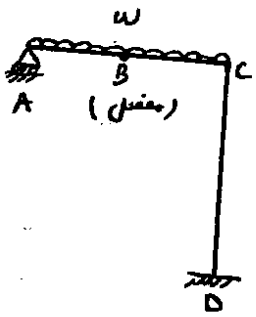


۱) $0/66\,l$ ۲) $0/5\,l$ ۳) $0/42\,l$ ۴) $0/58\,l$

آزاد ۸۵

۷۰- بار گسترده بحرانی قاب زیر چقدر است؟

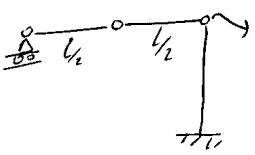
$(AB = BC = \frac{l}{2}\ ,\ CD = l\ ,\ EI = Const)$



۱) $\frac{\pi^2 EI}{3l^3}$ ۲) $\frac{4\pi^2 EI}{3l^3}$ ۳) $\frac{9\pi^2 EI}{3l^3}$ ۴) $\frac{16\pi^2 EI}{3l^3}$

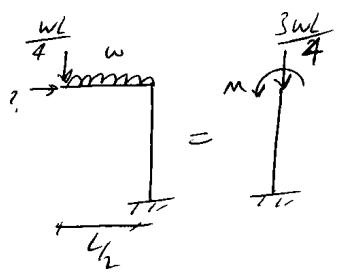
ستون ناقد بار جانبی است و انتهای آن آزاد است ← آزاد است

اینجا را مفصل می‌کنیم اگر نابایدار شد یعنی می‌تواند جلو آمدگی انتهای ستون را بگیرد ← $k=2$



نکته: M تاثیری در بار بحرانی ندارد

کل بار محوری که به ستون می‌رسد



$\frac{3wL}{4} < \frac{\pi^2 EI}{(2L)^2} \rightarrow \boxed{w < \frac{\pi^2 EI}{3L^3}}$

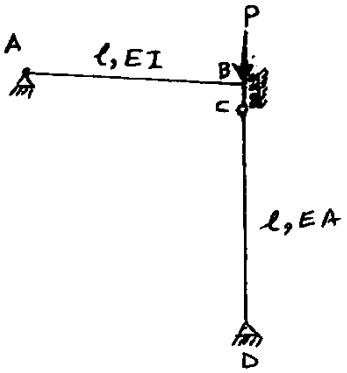
آزاد ۸۵

۸۰- در ستون زیر بار لشاری P چنان است که همواره امتداد آن از تکیه گاه A می گذرد. بار بحرانی ستون چقدر است؟

۱) $\frac{\pi^2 EI}{2l^2}$ ۲) $\frac{\pi^2 EI}{l^2}$ ۳) $\frac{\pi^2 EI}{3l^2}$ ۴) $\frac{\pi^2 EI}{4l^2}$

آزاد ۸۴

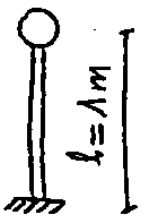
۳۰- بار بحرانی سازه زیر چقدر است؟ ($I_{AB} = 2AI^2$ و بار بحرانی ستون CD برابر P_E می باشد.)



۱) P_E
۲) $3P_E$
۳) $7P_E$
۴) $5P_E$

آزاد ۸۳

۳۰- یک مخزن آب به وزن یک تن در بالای یک ستون قرار دارد. ضریب اطمینان سازه در مقابل کمانش چقدر است؟ ($EI = 4\times10^8 kg.cm^2$)



$\ell = 8^m$

۱) 1.44
۲) 1.54
۳) 1.64
۴) 1.74

ضریب اطمینان = $\frac{\text{بار بحرانی}}{\text{بار موجود}} = \frac{\frac{\pi^2 EI}{(2L)^2}}{1000} = \frac{\pi^2 \times 4\times10^8}{1600^2 \times 1000} = 1.54$