تنظیم: محمد حاج صادقی

استاد: دکتر عرفانی



مقاومت مصالح :

منابع :

گیت ا.. عادلی ، بیر جانسون ، پوپوف

**سرفصل منابع :**

1_ تنش

2_ کرنش ← 35~45 ٪

3_ روابط تنش و کرنش

4_ نیروی محوری و روابط میله ها

5_ تنش حرارتی *

6_ نیروی برشی

7_ تنش پیچشی

8_ خمش

مفهوم تنش :

* فشار : نیروهای گسترده سطحی خارجی ( فشار باد ، فشار سیال )

* تنش : نیروهای گسترده سطحی داخلی ( همواره باید در مقاطع داخلی جستجو کرد )

1_ تنش در سطح آزاد اجسام همواره مساوی صفر است ( تنشی وجود ندارد . ) * تنش روی جسم زیر باد

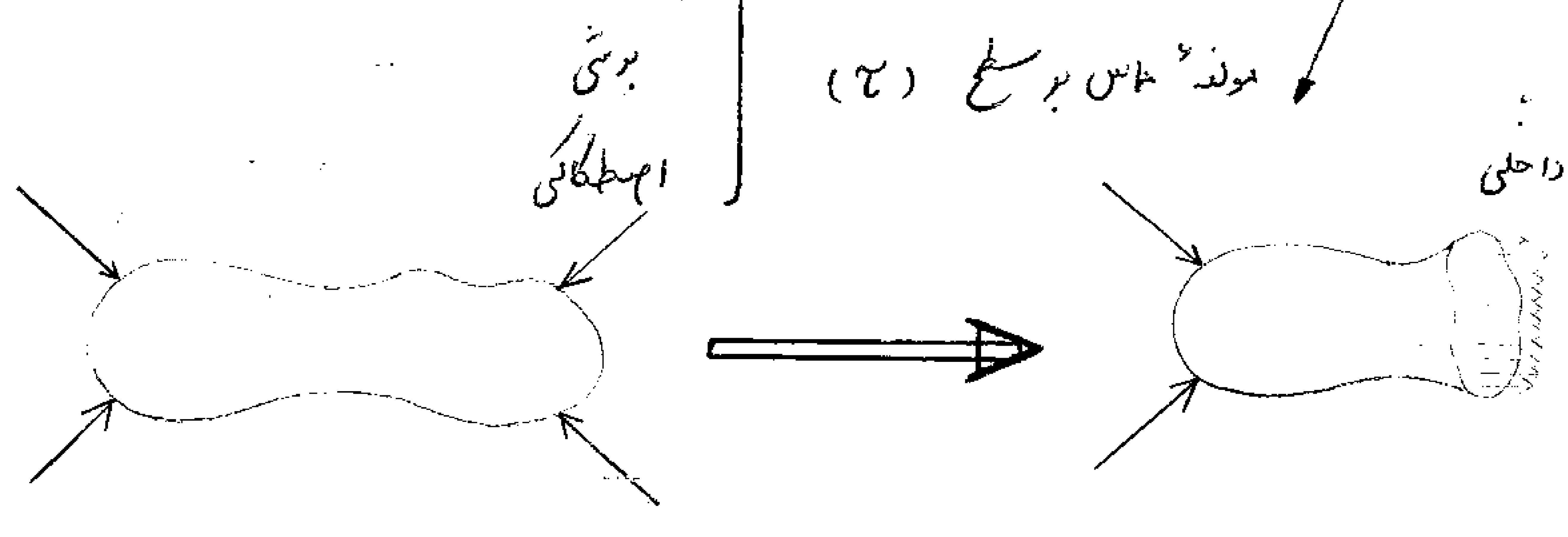
2_ فشار معمولاً عمود بر سطح خارجی است و تنش می تواند عمود نباشد * به نظر می رسد برای این حالت مفهوم فشار صدق نمی کند

بنابراین تنش موثر بر یک سطح همواره دارای دو مولفه است

مولفه های تنش

مولفه قائم بر سطح ( $\sigma$ ) : تنش قائم ، نرمال ، عمودی ، محوری ، طولی

مولفه مماس بر سطح ( $\tau$ ) : تنش مماسی ، برشی ، اصطکاکی



نیروهای گسترده سطحی داخلی

تنش

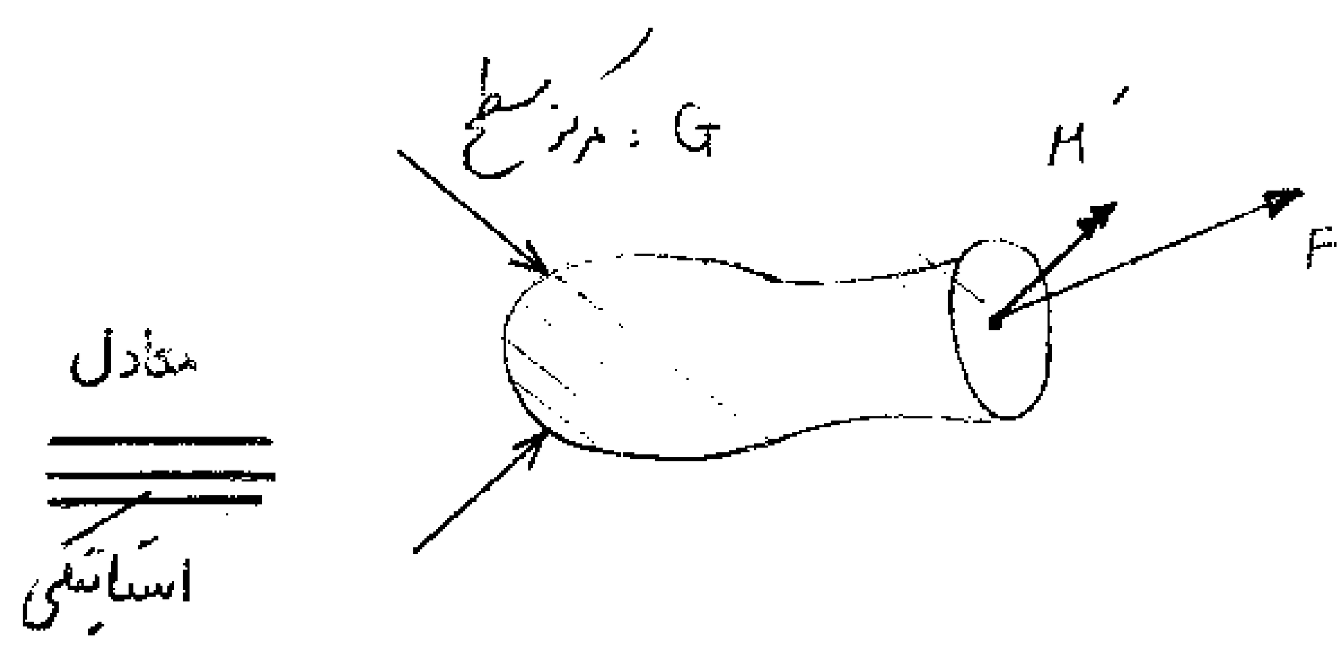
تنظیم: محمد حاج صادقی

استاد: دکتر عرفانی

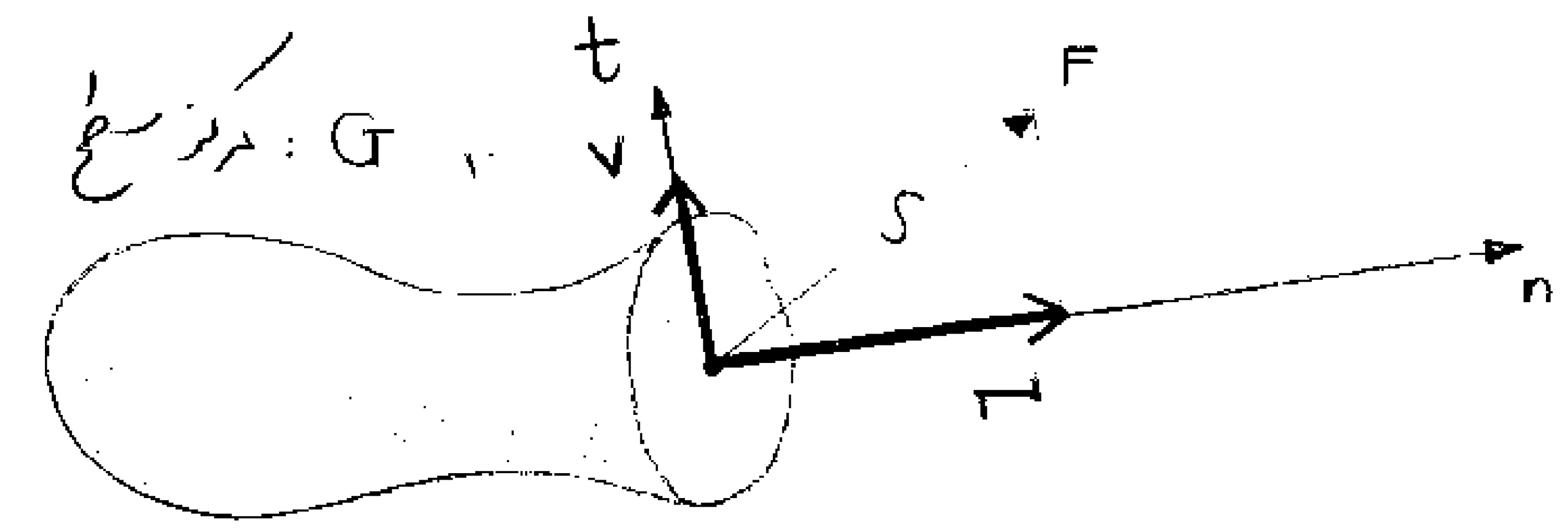
$$10^3\ kgf = 1\ tonf$$
$$1\ N \cong 10^{-1}\ kgf$$

| MKS | SI |
|---|---|
| $kgf/cm^2$ | $N/m^2 = pa$ |
| $tonf/m^2$ | $N/mm^2 = 10^6\ pa = 1\ Mpa$ |
| $kgf/cm^2 = 10\ tonf/m^2$ | $kN/m^2 = kpa$ |

$$\boxed{1\ Mpa \cong 10\ kgf/cm^2}$$

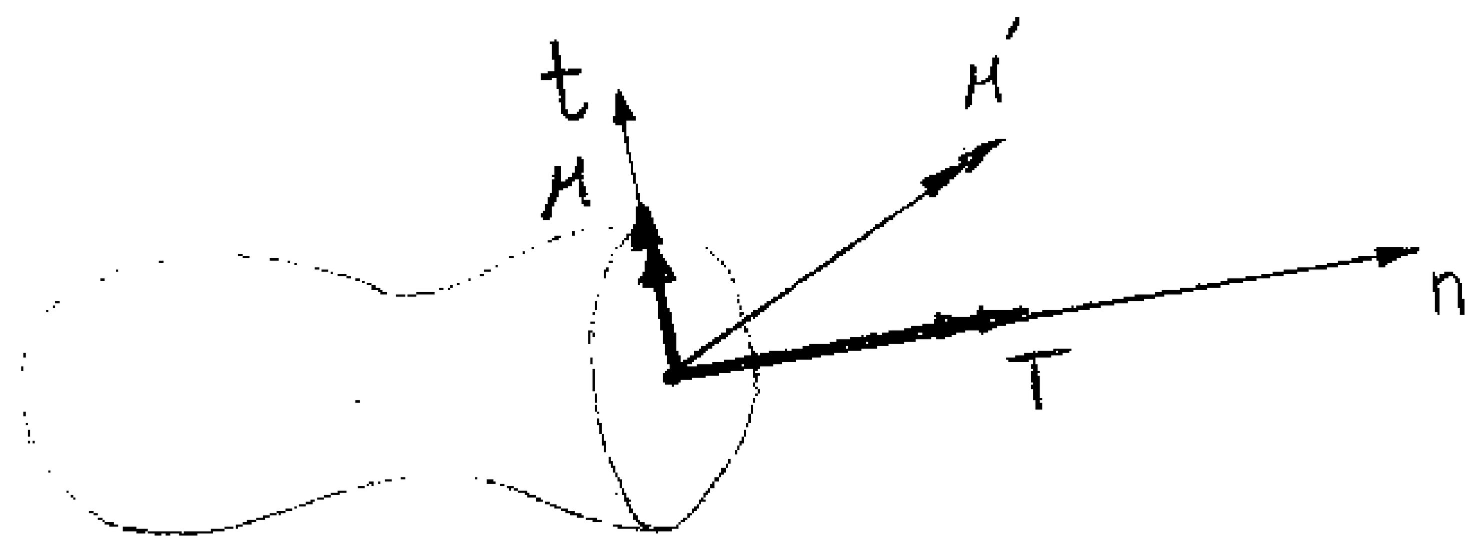



با استفاده از معادلات تعادل نیروهای داخلی حاصل شده و سپس با استفاده از فرضیات ساده شده می توان توزیع تنش را بدست آورد.



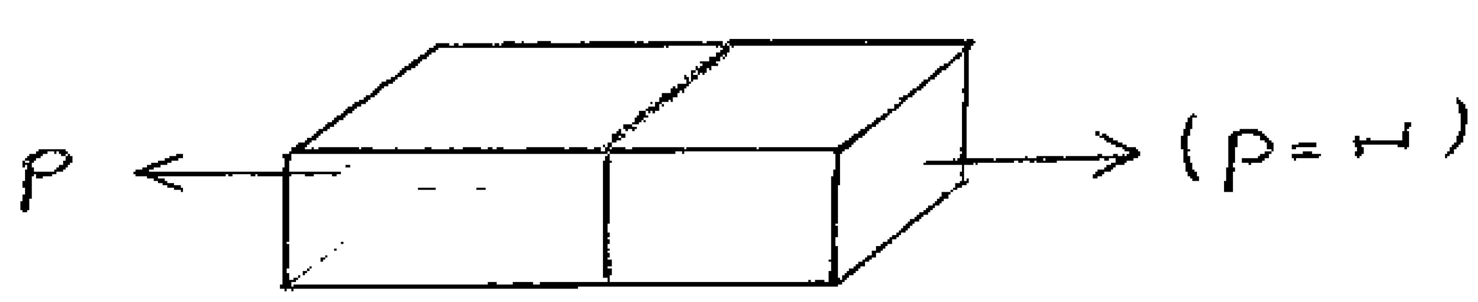

N: نیروی محوری

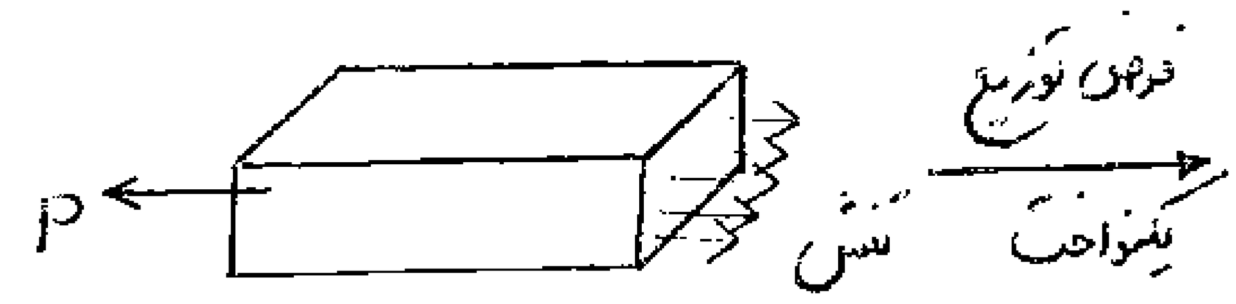
V: نیروی برشی




T: لنگر پیچشی

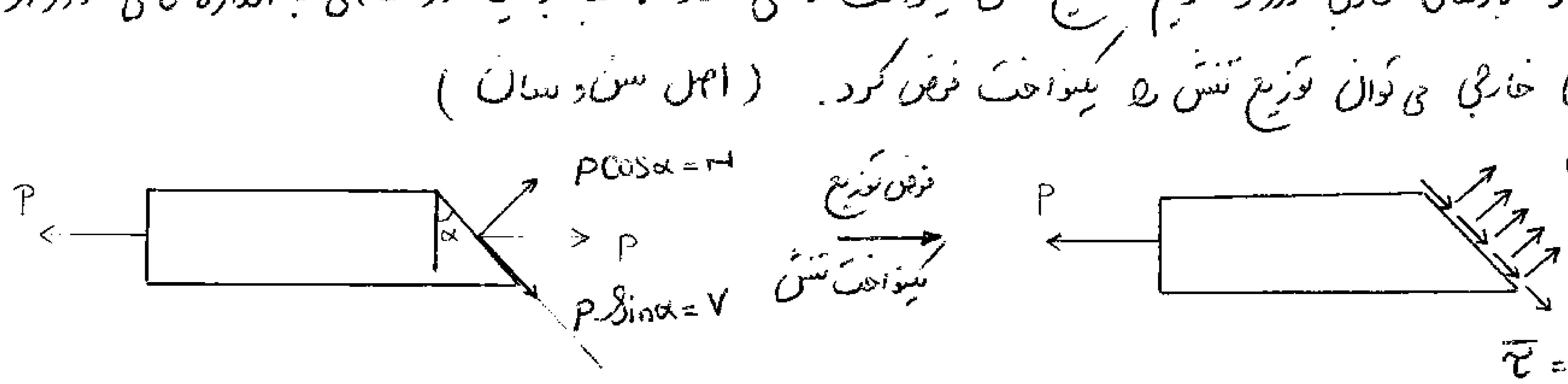
M: لنگر خمشی




$$\sigma = \frac{P}{A}$$

* هرچه از محل اثر بارهای خارجی دورتر شویم توزیع تنش یکنواخت تر می شود، بنابراین در مقاطعی به اندازه کافی دور از محل اثر بارهای خارجی می توان توزیع تنش را یکنواخت فرض کرد. (اصل سن ونان)




$$\sigma = \frac{P\cos\alpha}{A/\cos\alpha}$$

$$\tau = \frac{P\sin\alpha}{A/\cos\alpha}$$

$$* \rightarrow \sigma = \frac{P}{A}\cos^2\alpha\ *$$

$$* \rightarrow \tau = \frac{P}{A}\sin\alpha\cos\alpha\ *$$

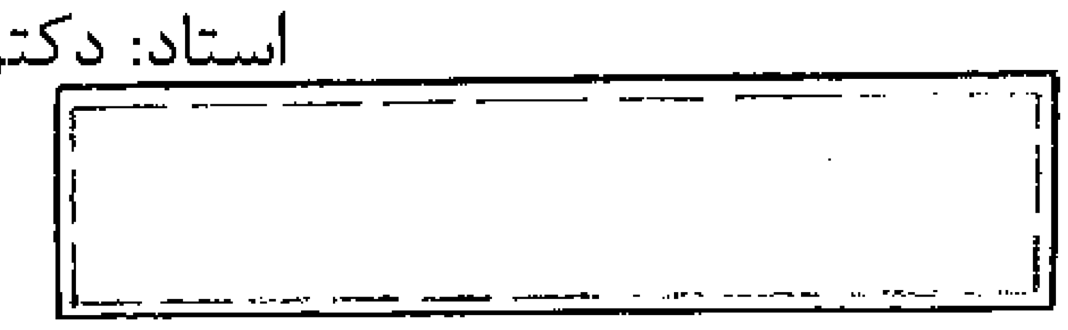
فرض توزیع یکنواخت تنش برشی به هیچ وجه معتبر نیست و این تنش برشی، متوسط برشی است.

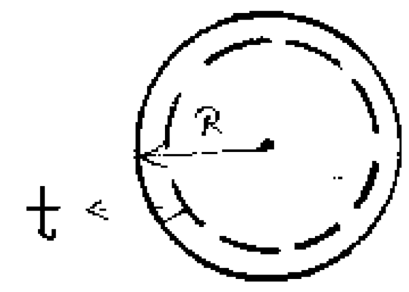
$$* \ \alpha = 0 \rightarrow \left| \begin{array}{l} \sigma_{max} = \frac{P}{A} \\ \tau = 0 \end{array}\right.$$

$$* \ \alpha = \frac{\pi}{4} \rightarrow \left| \begin{array}{l} \sigma = \frac{P}{2A} \\ \tau_{max} = \frac{P}{2A} \end{array}\right.$$

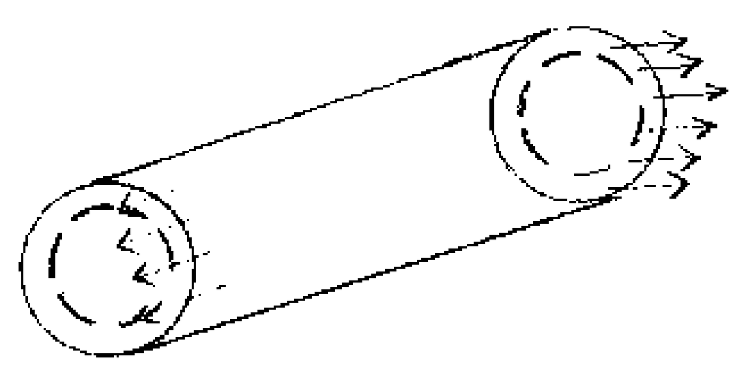
لوله استوانه ای کم فشار — تنظیم: محمد حاج صادقی

استاد: دکتر عرفانی





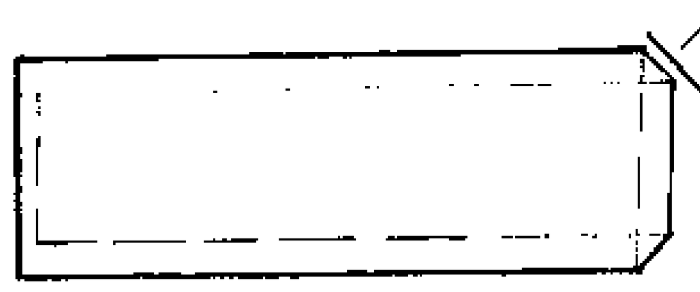
$t \ll R$ جدار نازک



$\sigma_\ell =$ تنش های طولی

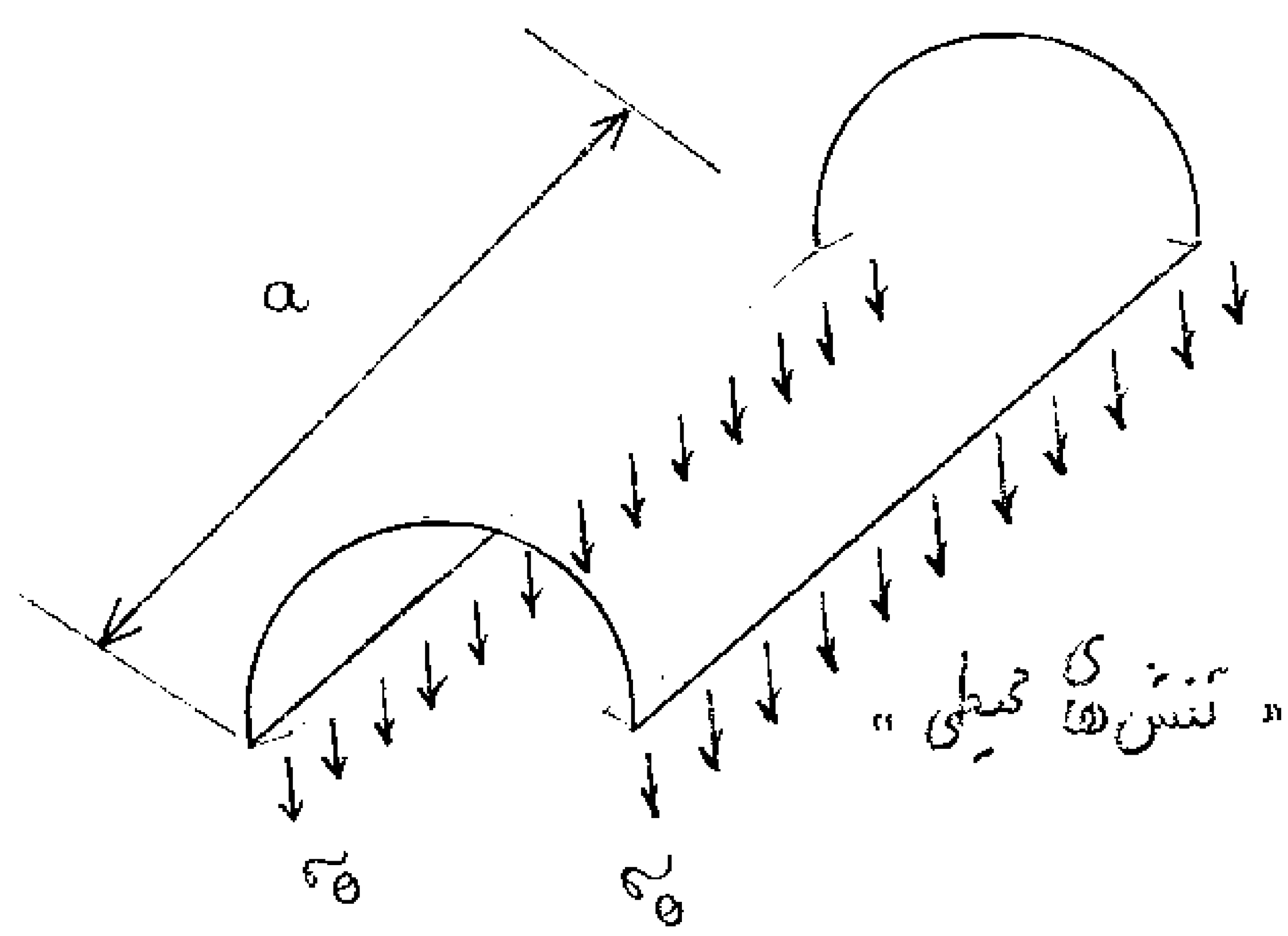
$\Sigma F_x = 0 \longrightarrow \sigma_\ell \times 2\pi \times R \times t = \omega \pi R^2$

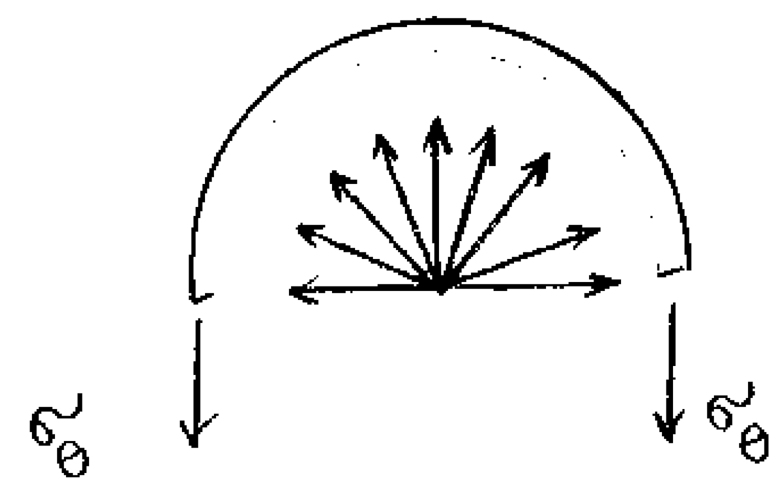
$\sigma_\ell = \dfrac{\omega R}{2t}$ ✳ $\boxed{\sigma_\ell = \dfrac{R}{2t}\,\omega}$ ✳



$\sigma = \sigma_\ell \cos^2\alpha$ ✳

$\tau = \sigma_\ell \sin\alpha \cos\alpha$ ✳



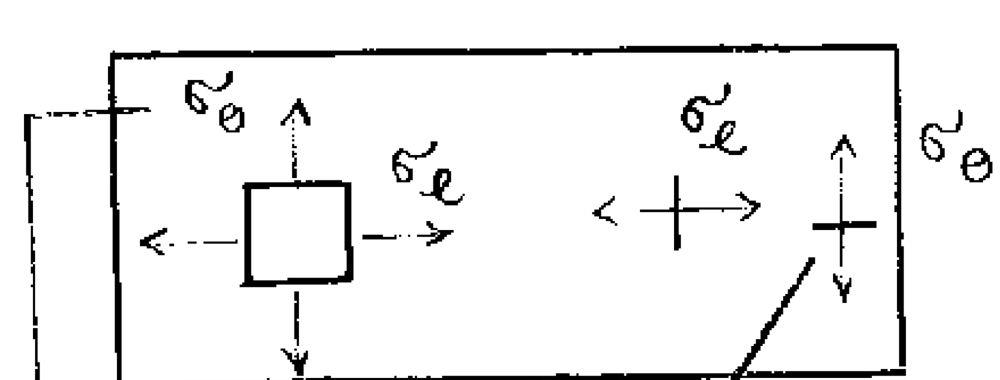

$\Sigma F_y = 0 \longrightarrow \sigma_\theta \,.\, a \,.\, t \,.\, 2 = \omega \times a \times 2 \times R$

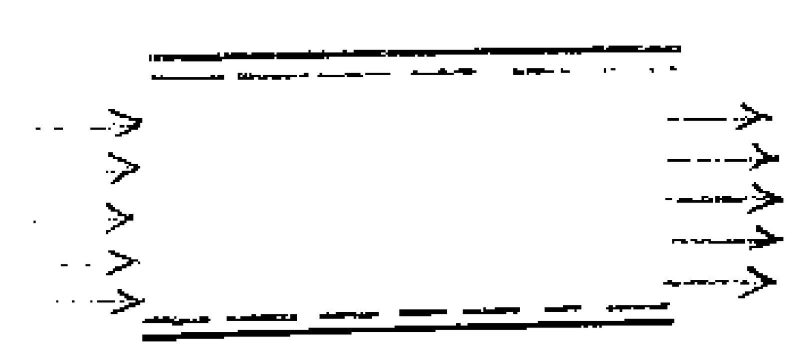
$\boxed{\sigma_\theta = \dfrac{R}{t}\,\omega}$

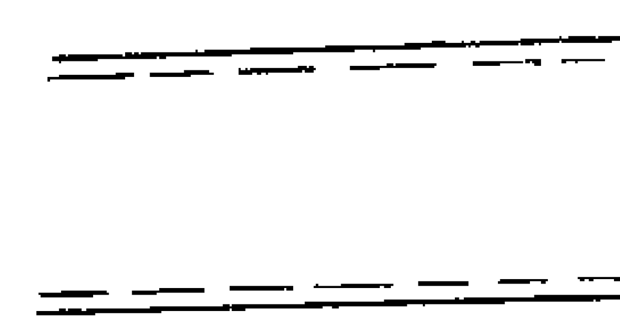
نیروی موثر بر یک سطح در یک امتداد معین از فشار سیال = فشار سیال × تصویر سطح عمود بر امتداد مورد نظر

✳ $\sigma_\theta$ حاصل از شرایط فوق در فواصل میانی دو درپوش معتبر است هر چه به درپوشها نزدیک شویم از شدت $\sigma_\theta$ کاسته می شود.

مانند شیلنگ





« امتداد شکاف احتمالی لوله »

لوله کم فشار دو سر آزاد

$\sigma_\theta = \dfrac{R}{t}\,\omega$

$\sigma_\ell = 0$

✳ لوله کم فشار با طول بی نهایت ✳

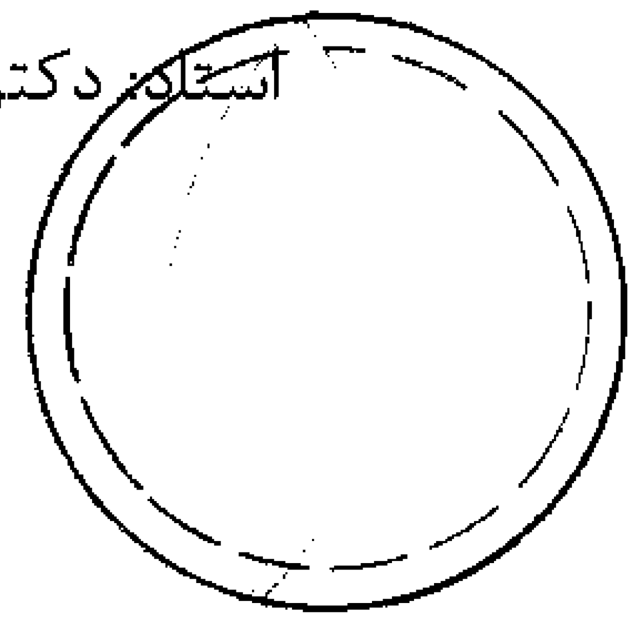
$\sigma_\theta = \dfrac{R}{t}\,\omega$

$\sigma_\ell = ?$ در یک برش ها

تنظیم: محمد حاجی‌صادقی

استاد: دکتر عرفانی

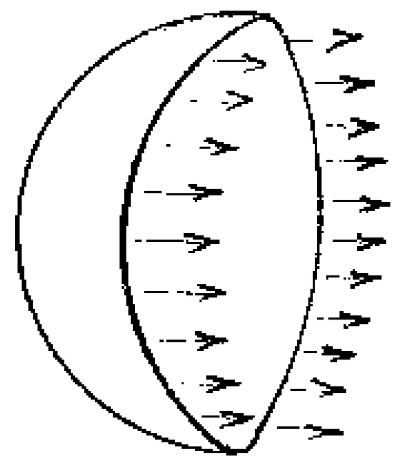
کره تحت فشار



$R$ : شعاع

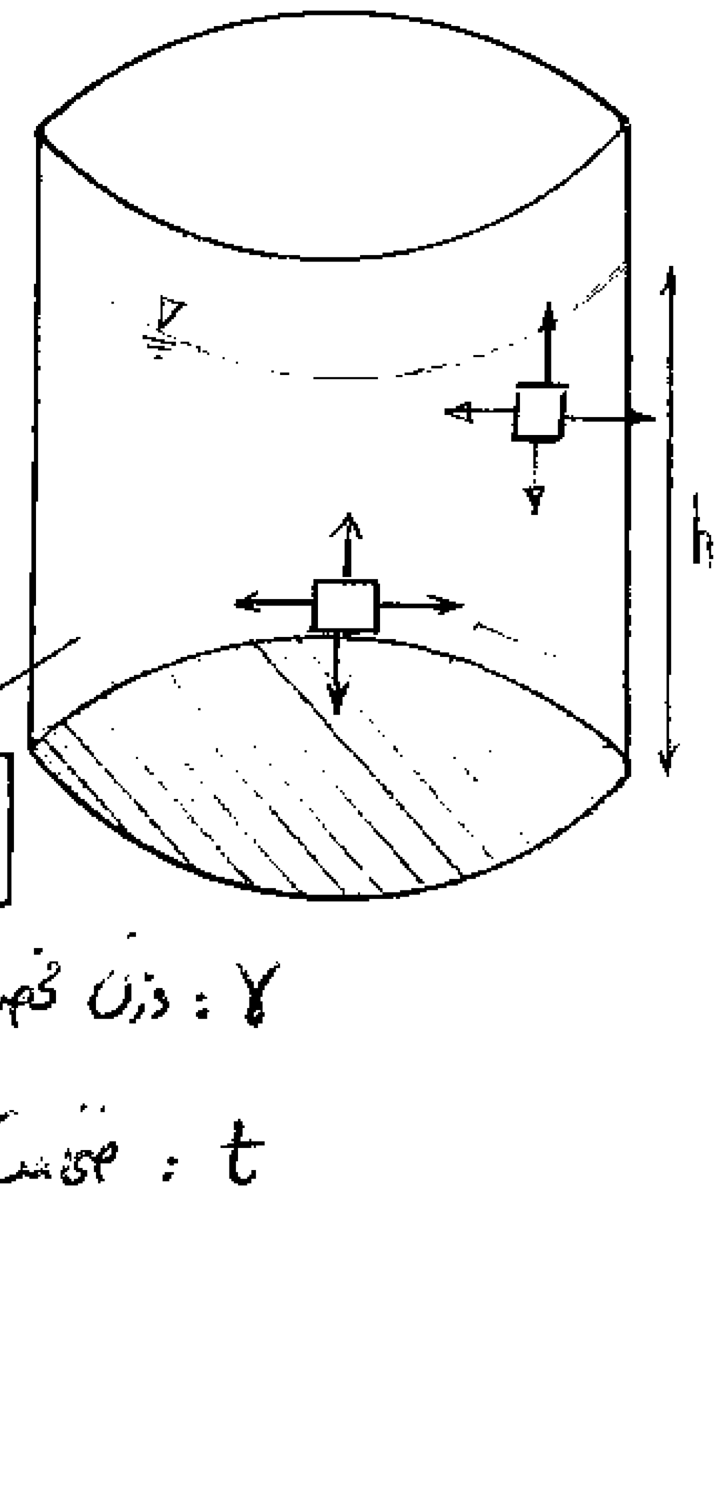
$t$ : ضخامت

فشار داخلی : $\omega$



$$\sigma = \frac{R}{2t}\,\omega \longleftarrow \Sigma F_x = 0 \qquad (2\pi R t\,\sigma_\ell = \omega\,\pi R^2)$$

* تنش‌های برشی اساساً از عدم تقارن‌ها حاصل می‌شوند، هر چه سیستم متقارن‌تر باشد تنش‌های برشی کاهش می‌یابند




$\sigma_\ell = 0$

$\sigma_\theta = \frac{R}{t}\gamma y$

تکیه‌گاه

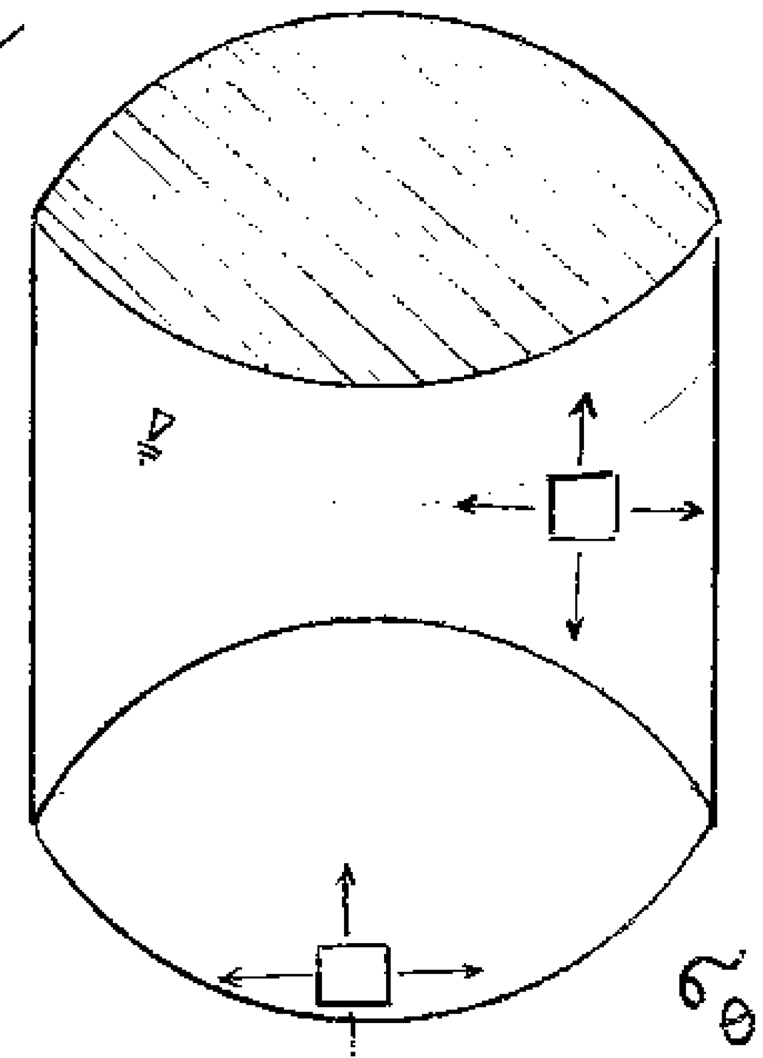
$\sigma_{\theta_{max}} = \frac{R}{t}\gamma h$

$\sigma_\ell = 0$

$\gamma$ : وزن مخصوص مایع

$t$ : ضخامت

تکیه‌گاه



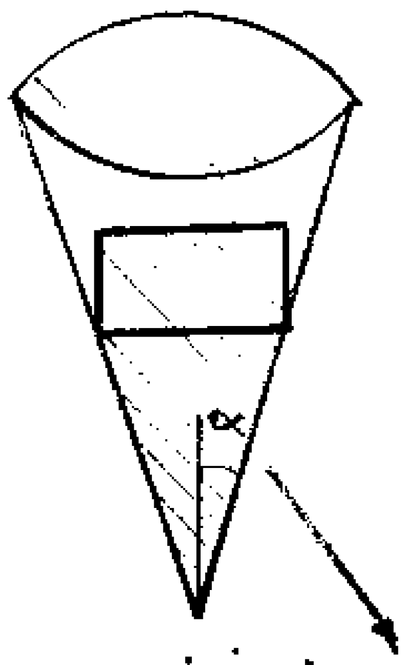
$\sigma_\theta = \frac{R}{t}\gamma y$

$\sigma_\theta = \frac{R}{t}\gamma h$

$$\gamma h \times \pi \times R^2 = 2\pi R t\,\sigma_\ell$$

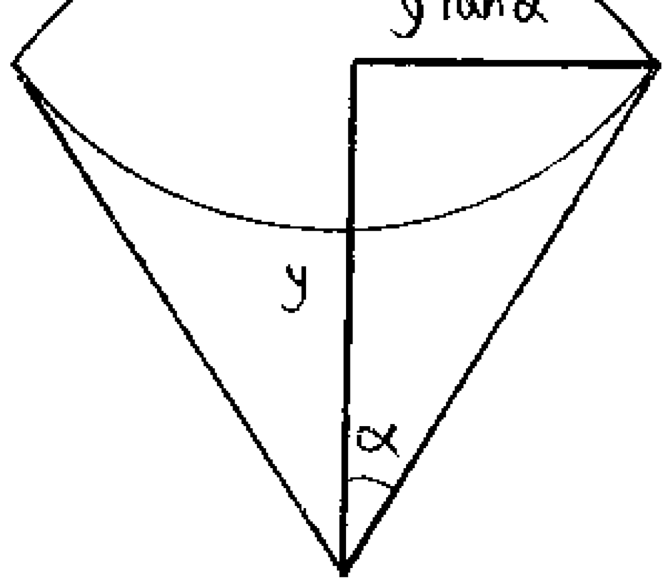
$$* \;\sigma_\ell = \frac{R}{2t}\gamma h$$

تکیه‌گاه




وزن موثر بر فشار

( تنش $\sigma_\ell$ )




$$\Sigma F_x = 0$$

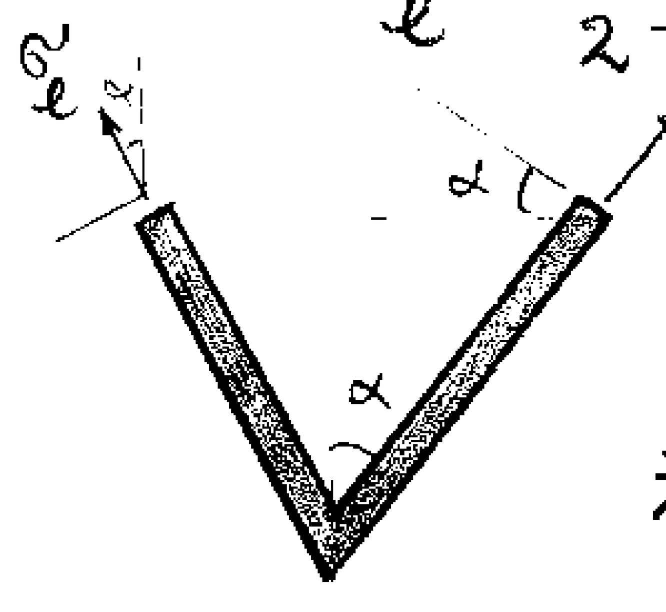
$$\Sigma F_y = 0 \longrightarrow \sigma_\ell \times 2\pi \times y\tan\alpha \times t \times \cos\alpha$$

$$= \tfrac{1}{3}\, y\,\pi\,(y\tan\alpha)^2\gamma + (h-y)\gamma\,\pi(y\tan\alpha)^2$$

$$\sigma_\ell = \frac{\gamma\tan\alpha}{2\,t\cos\alpha}\left(hy - \frac{2}{3}y^2\right)$$

$\sigma_\theta = ?$

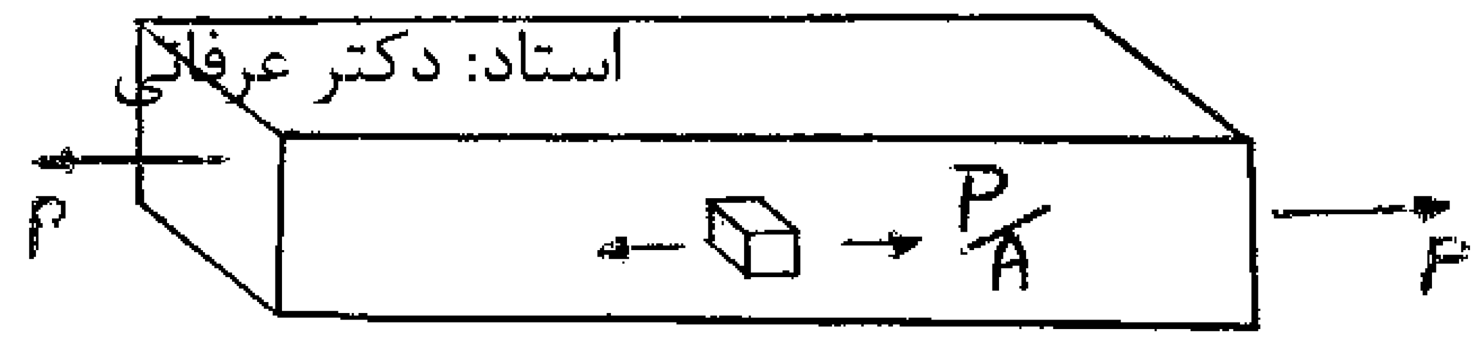
$\boxed{\text{« سیستم بر عکس »}}$




برای مخروط $\sigma_\ell$ در هر شرایطی جواب می‌دهد.

$$* \;\sigma_\ell = \frac{1}{3}\gamma\tan\alpha\,\frac{(h^3 + 2y^3)}{2y\,t\cos\alpha}\; *$$

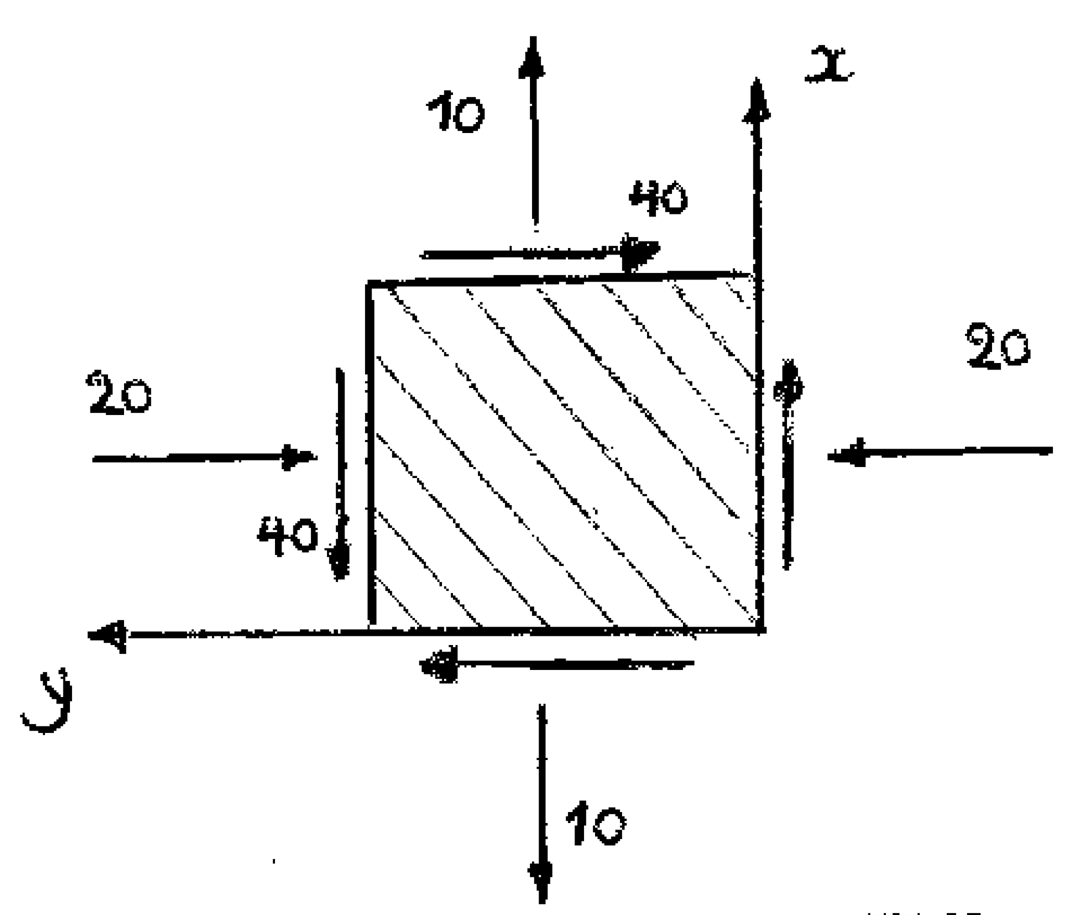
تنظیم: محمد حاج صادقی
استاد: دکتر عرفانی




$$T=\begin{bmatrix} P/A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

در تانسور تنش کششی مثبت است که در وجه مثبت المان (وجوه دور از مبداء) در جهت مثبت محورهای مختصات اثر کند (دستگاه مختصات ها باید راستگرد باشد)

* کششی مثبت است که در جهت مثبت در صفحهٔ مثبت عمل کند. *




$$T^{\langle xy\rangle}=\begin{bmatrix} \sigma_x(\sigma_{xx}) & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y(\sigma_{yy}) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 10 & -40 \\ -40 & -20 \end{bmatrix}$$

تعادل المان تنش

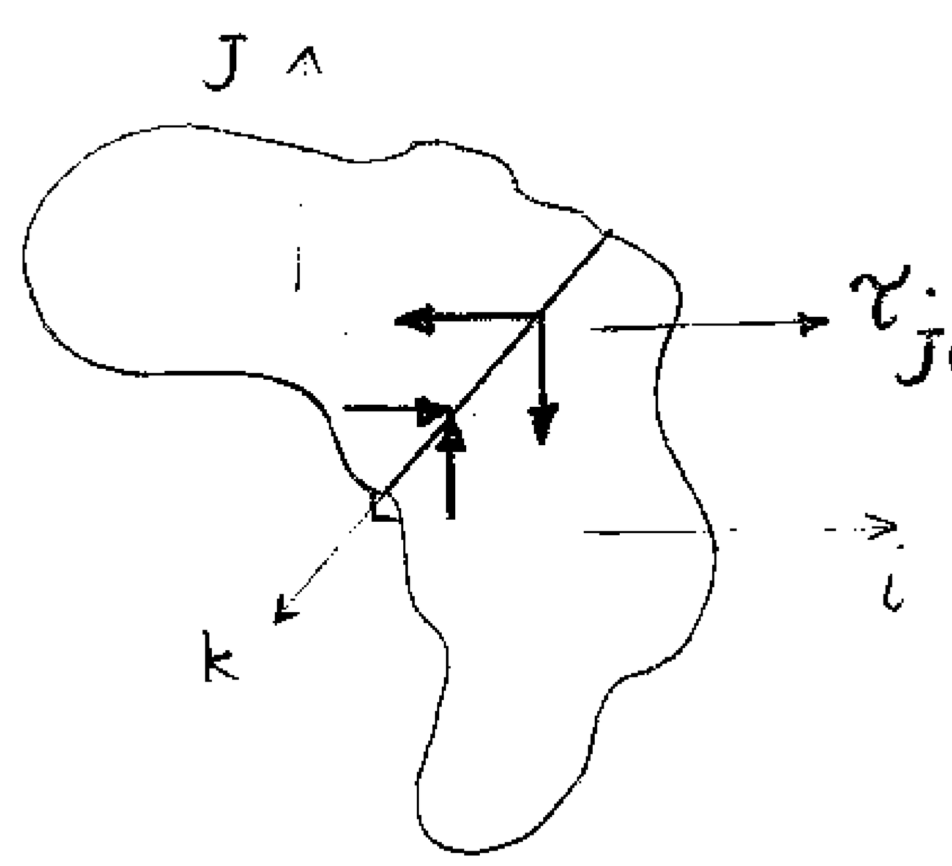
$$\Sigma F=0 \longrightarrow \checkmark$$

$$\Sigma M=0 \longrightarrow \begin{cases} \tau_{xy}=\tau_{yx} \\ \tau_{zx}=\tau_{xz} \\ \tau_{yz}=\tau_{zy} \end{cases} \Longrightarrow \tau_{ij}=\tau_{ji}$$ (اصل کوشی) *

* * اصل کوشی تأمین کنندهٔ تعادل دورانی المان تنش می باشد. *

الف - تانسور تنش همواره متقارن است. یعنی در یک نقطه و تحت یک بارگذاری مشخص فقط $\boxed{\text{6 مولفهٔ مستقل تنش}}$ وجود دارد.

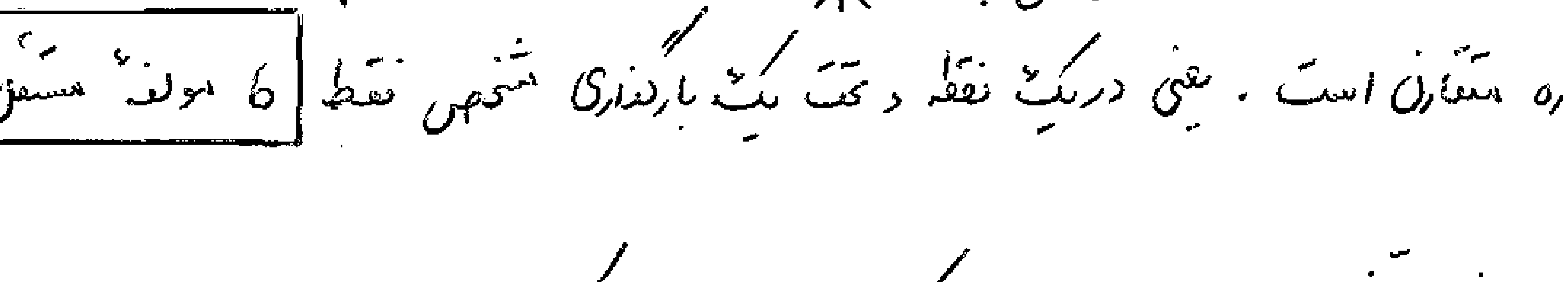
طبق اصل کوشی تنش های برشی موثر بر دو وجه عمود بر هم که عمود بر فصل مشترک آن دو وجه اثر می کنند همواره با هم برابرند و یا به هم نزدیک شده و یا از هم دور می شوند.




$\tau_{ji}=\tau_{ij}$

* طبق اصل کوشی در گوشه های محدب مقاطع تنش برشی همواره صفر است. *

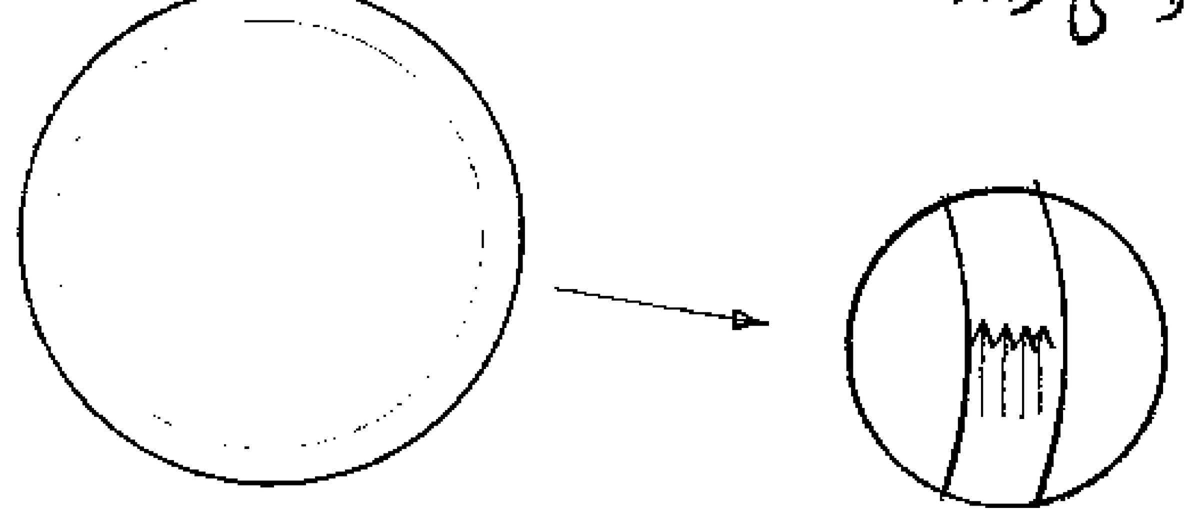
* در نقاط نزدیک مرز مقاطع تنش برشی در آن‌ها وجود باید موازات مرز مقطع باشند. (زاویهٔ کوچکتر از $180^\circ$)

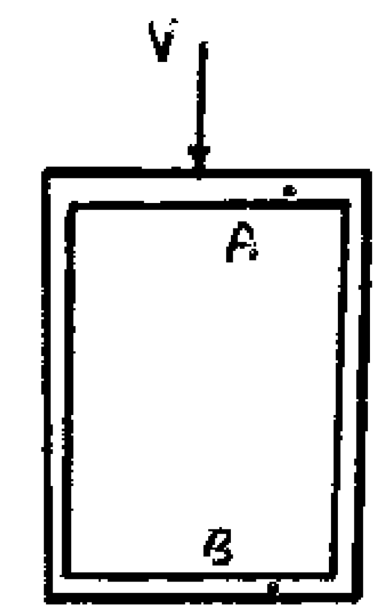



* چون در سطح خارجی تنش وجود ندارد (گرنزها) در نتیجه طبق اصل کوشی برش‌ها نیز نباید وجود داشته باشند.

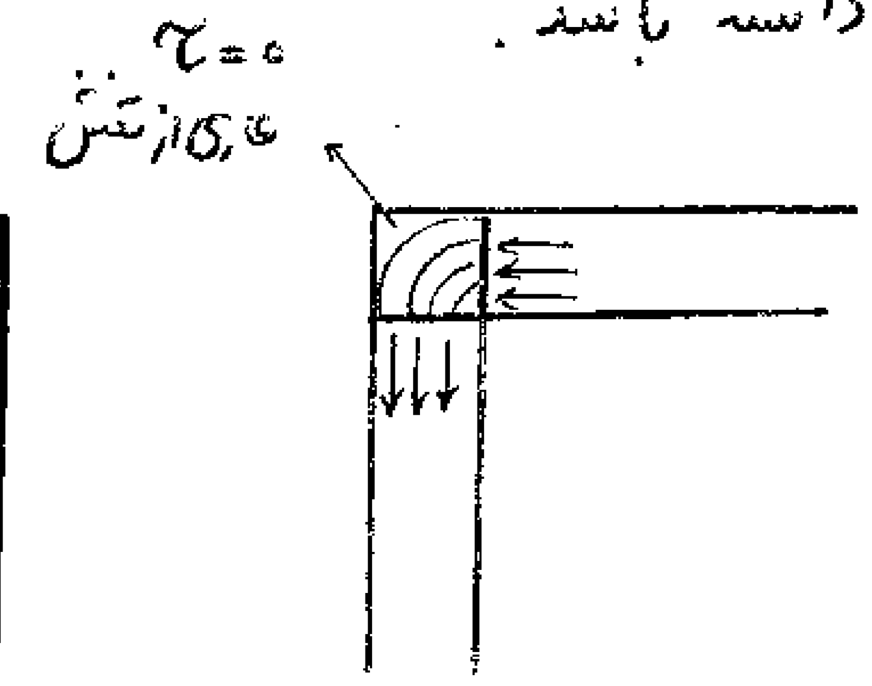
تنظیم: محمد حاج صادقی
استاد: دکتر عرفانی

در مقاطع جدار نازک تنش برشی در صورت وجود باید به موازات جدار مقطع باشد و نمی‌تواند مولفه عمود بر جدار مقطع داشته باشد.



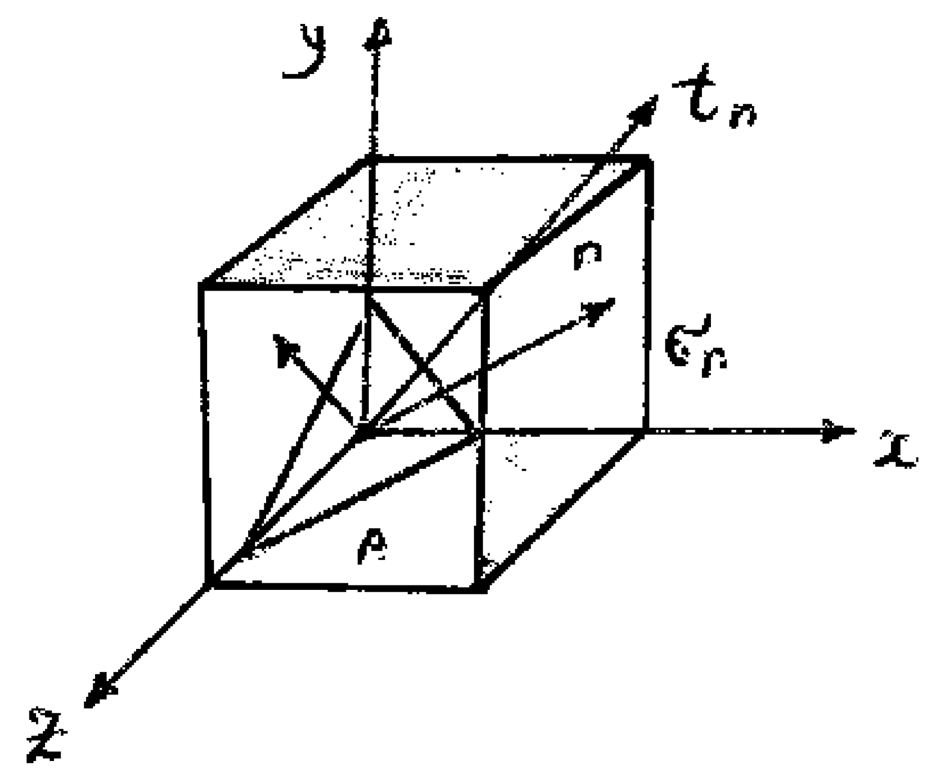



(تنش برشی قائم ندارد)




تبدیل سه بعدی تنش:

در این قسمت با فرض معلوم بودن مولفه های تانسور تنش در یک نقطه می خواهیم مولفه های تنش در روی یک وجه مایل گذرنده از آن نقطه را بدست آوریم:




$* \; T^{\langle xyz \rangle}$

$n^{\langle xyz \rangle} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}$ $\longrightarrow$ $t_n = ?$ تعادل المان چهاروجهی تنش

$\Sigma F = 0 \longrightarrow t_n = T \cdot n$

$\Sigma M = 0 \longrightarrow \checkmark$

$n$ : بردار نرمال یک سطح مورد نظر

$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{nx} \\ \sigma_{ny} \\ \sigma_{nz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}$$

$t_n = T \cdot n$

ضرب داخلی

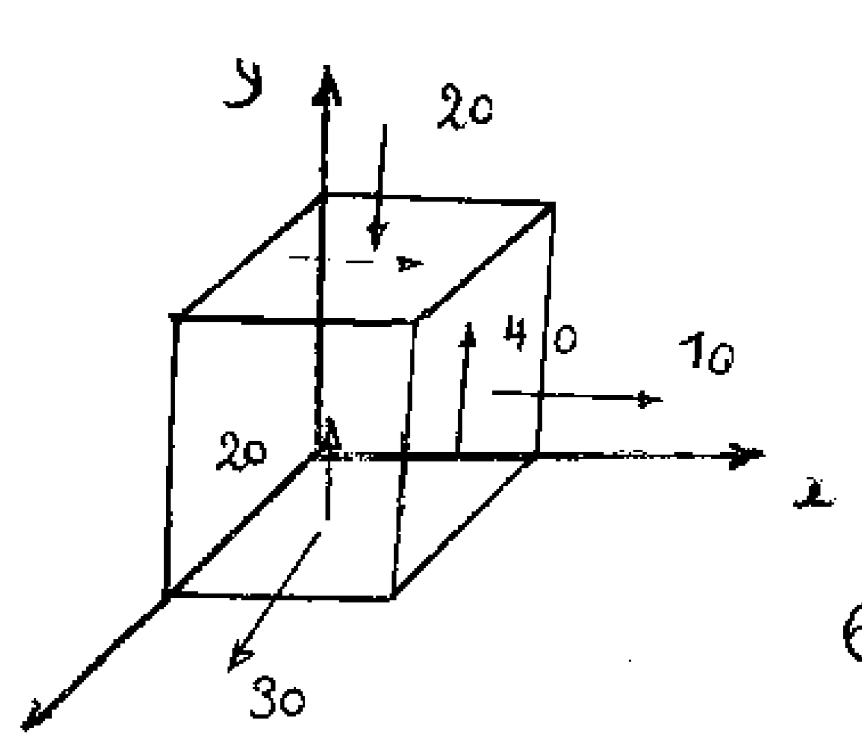
$\sigma_n$ : تصویر $t_n$ روی $n$ $= n \cdot t_n = [n] \cdot [t_n] = n^T t_n$ $\rightarrow \boxed{\sigma_n = n^T T \cdot n}$ *

$\boxed{\vec{\tau} = t_n - \sigma_n \cdot n}$

$\sigma_n = [n^T][T][n]$

بردار تنش قائم $= \sigma_n \cdot n$

مطلوب است در المان تنش مطابق شکل تنش قائم و نیز برشی موثر بر وجهی که با اضلاع المان زاویه یکسان می سازد.




$$T = \begin{bmatrix} 10 & 40 & 0 \\ 40 & -20 & 20 \\ 0 & 20 & 30 \end{bmatrix}, \quad n = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Big/ \sqrt{3}, \quad t_n = T \cdot n = \begin{bmatrix} 50 \\ 40 \\ 50 \end{bmatrix} \Big/ \sqrt{3}$$

$$\sigma_n = 140/3 \qquad \vec{\tau} = t_n - \sigma_n \cdot n = \begin{bmatrix} 50 - 140/3 \\ 40 - 140/3 \\ 50 - 140/3 \end{bmatrix} \Big/ \sqrt{3} = \begin{bmatrix} 10 \\ -20 \\ 10 \end{bmatrix} \Big/ 3\sqrt{3}$$

$$\tau = |\vec{\tau}| = \frac{10\sqrt{6}}{3\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{2}}{3}$$

## صفحات اصلی تنش :

* صفحه ای است که تنش های برشی روی آن صفر است. *

فرض می کنیم صفحه ای با نرمال $n$ همان صفحه اصلی تنش می باشد در این صورت باید داشته باشیم :

تنظیم: محمد حاج صادقی
استاد: دکتر عرفانی

$\rightarrow t_n = T \cdot n$

$\sigma_n = n \cdot t_n = n^T T n$

$\vec{\sigma}_n = \sigma_n \cdot n$

$\vec{\tau}_{nt} = t_n - \vec{\sigma}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$T \cdot n - \sigma_n \cdot n = (T - \sigma_n I)\, n = 0$

$I$ ← ماتریس قطری واحد

$$\begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_n & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_n & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\sigma_n$ ← تنش قائم موثر بر صفحه اصلی تنش

* تنش اصلی

$n$ ← بردار نرمال بر صفحه اصلی تنش

* امتداد اصلی تنش

از ماتریس های بالا 3 معادله و 4 مجهول بدست می آید که با معادله $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$ قابل حل می شود.

برای بدست آوردن تنش اصلی $\sigma_n$ و امتداد اصلی $n$ کافی است دترمینان ماتریس ضرایب فوق را مساوی صفر قرار دهیم :

یک سری ضرایب

$$\rightarrow \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_n & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_n & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_n \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \sigma_n^3 - J_1 \sigma_n^2 + J_2 \sigma_n - J_3 = 0$$

* $J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \longrightarrow \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$

$J_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_x \sigma_z - (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)$

$\longrightarrow \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_1 \sigma_3$ دترمینان ماتریس اصلی همان $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$ می باشد

* $J_3 = |T| \longrightarrow \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$

از معادله درجه 3 بالا $\sigma_1$ و $\sigma_2$ و $\sigma_3$ بدست می آید. ←

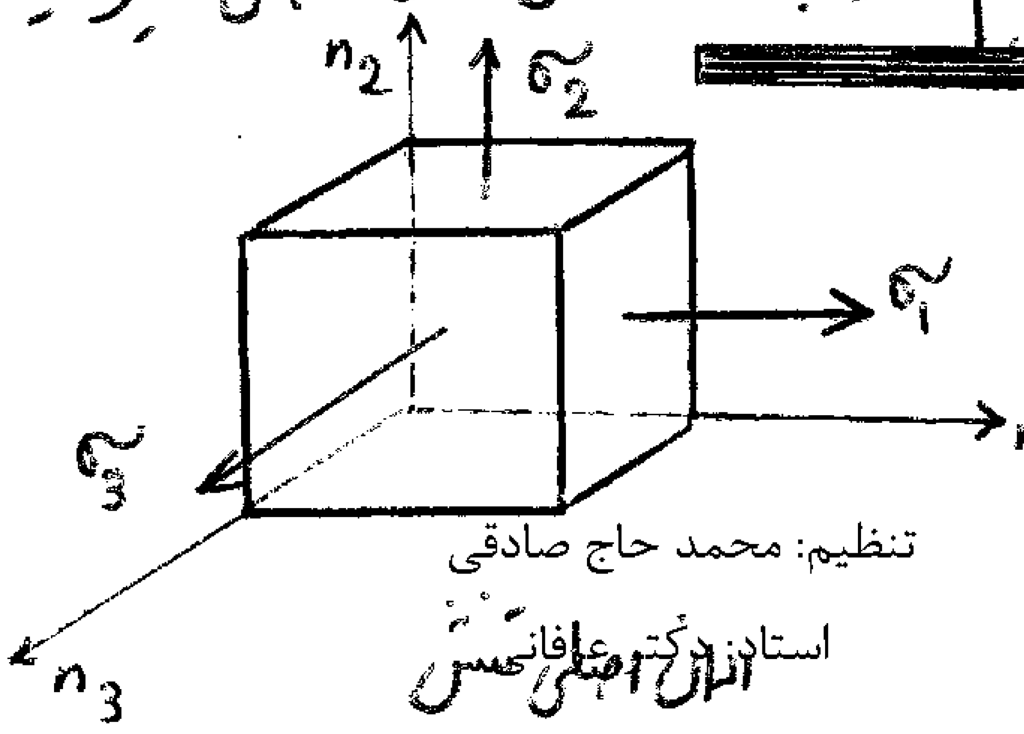
$n_1 \leftarrow \sigma_1$ (امتدادهای اصلی تنش)

$n_2 \leftarrow \sigma_2$

$n_3 \leftarrow \sigma_3$

* این مساله در ریاضیات همان مساله مقادیر ویژه می باشد، در واقع تنش های اصلی **مقادیر ویژه** تانسور تنش است و امتدادهای اصلی **بردارهای ویژه** تانسور تنش می باشد.

* می‌توان از مسائل مقادیر ویژه نتیجه گرفت که تنش های اصلی، صفحات اصلی و امتدادهای اصلی در هر نقطه تحت یک بارگذاری شده مشخص، منحصر به فرد بوده و تعداد آن ها 3 بوده، امتدادهای اصلی دو به دو بر هم عمود بوده و تنش های اصلی غیر یکسان می باشند.




المان اصلی تنش

$$T^{\langle 123\rangle} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$ تانسور اصلی تنش

با توجه به منحصر به فرد بودن $\sigma_1$ ، $\sigma_2$ و $\sigma_3$ سه پارامتر $J_1$ ، $J_2$ و $J_3$ را ثابت های تنش در یک نقطه و تحت یک بارگذاری مشخص می نامند.

نتایج: ←

1- تحت یک بارگذاری مشخص و در یک نقطه از یک جسم مجموع تنش های قائم سه صفحه دو به دو متعامد دلخواه مقداری است ثابت به نام تنش حجمی

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma_{x'} + \sigma_{y'} + \sigma_{z'} = \text{تنش حجمی} = ct.$$

2- در یک نقطه و تحت یک بارگذاری مشخص دترمینان هر تانسور تنش دلخواهی مقداری است ثابت:

$$|T| = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = ct.$$

این مسأله ها بیشتر به صورت دو بعدی کاربرد دارد.

اگر در یک نقطه تانسور تنش $T^{\langle xyz\rangle} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 20 \\ 0 & \sigma_y & -10 \\ 20 & -10 & 10 \end{bmatrix}$ باشد و در آن نقطه یک سطح آزاد نیز داشته باشیم مطلوب است یقین $\sigma_y = ?$

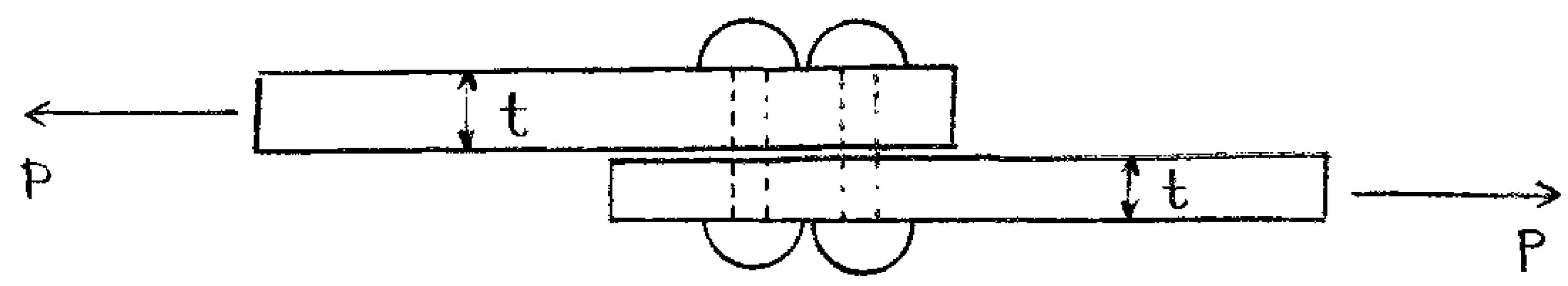
سطح آزاد ← تنش نداریم

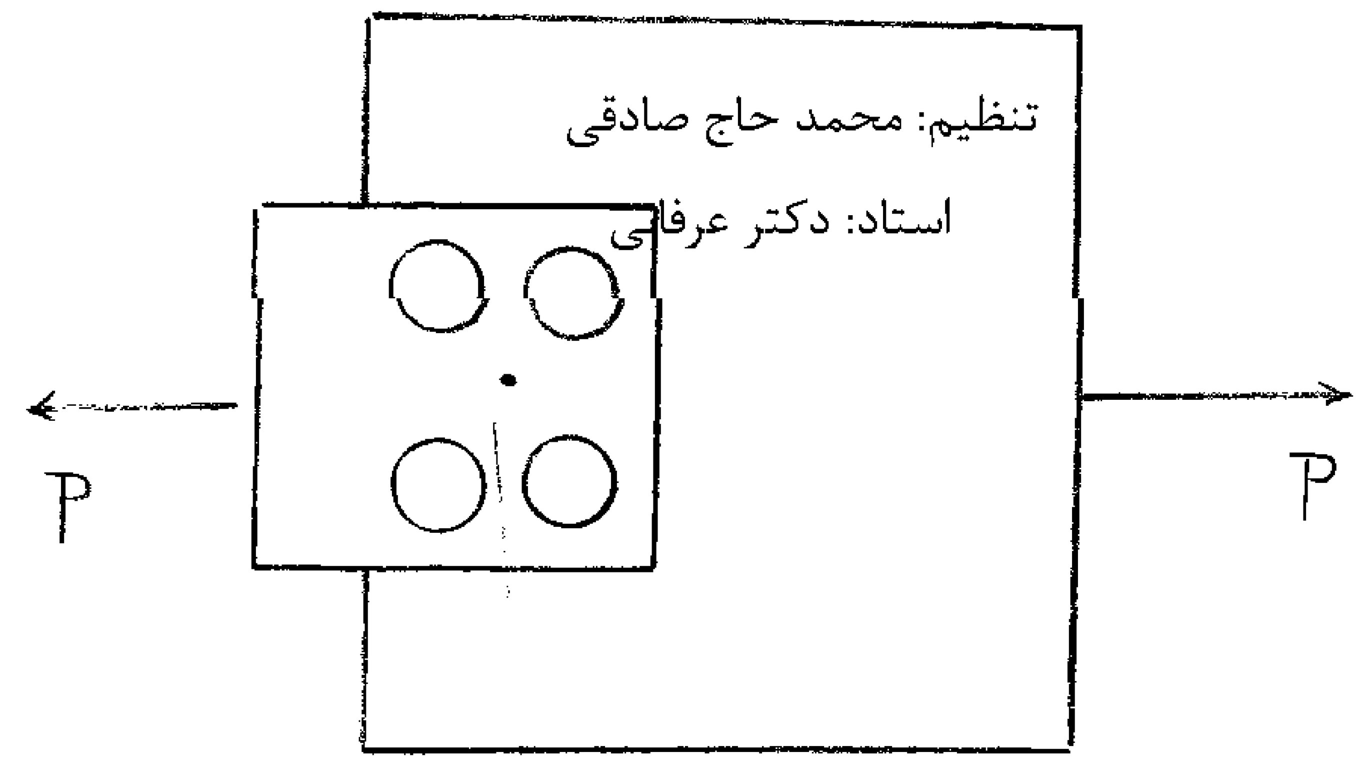
1- قائم

2- برشی ⇐ صفحه اصلی

* $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = 0 \longrightarrow |T| = 0 \longrightarrow 10[10\sigma_y - 100] + 20[-20\sigma_y] = 0$

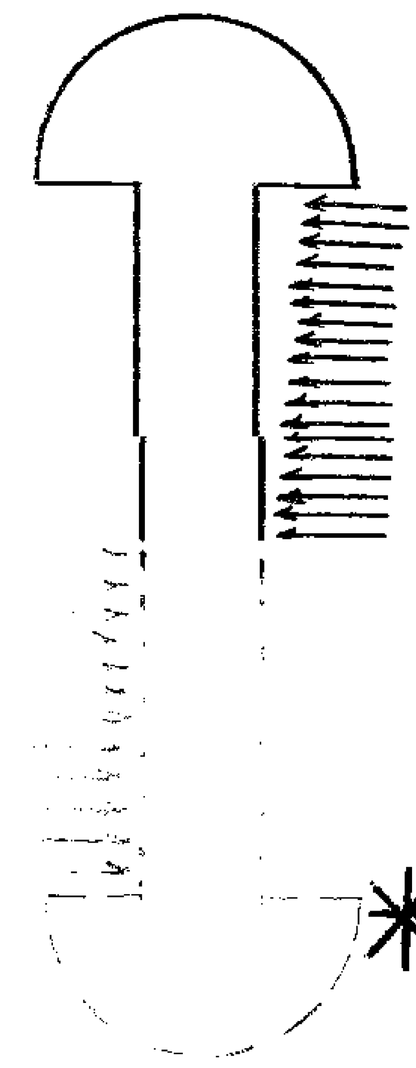
$$-1000 = 300\sigma_y \longrightarrow \sigma_y = \frac{-10}{3}$$




تنظیم: محمد حاج صادقی

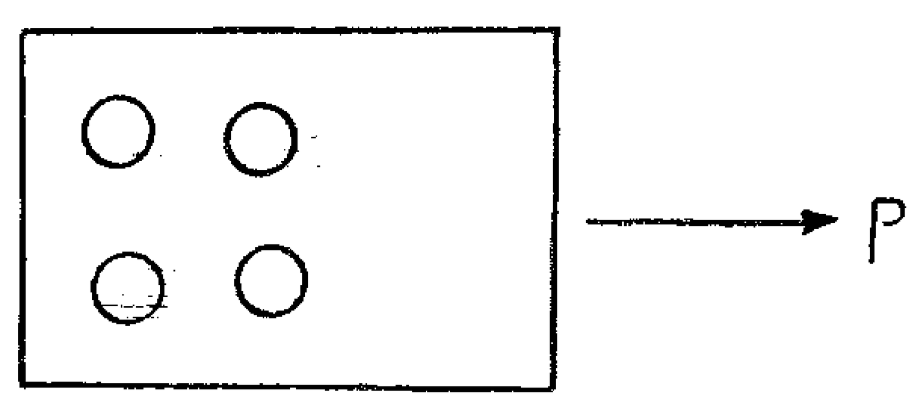
استاد: دکتر عرفانی



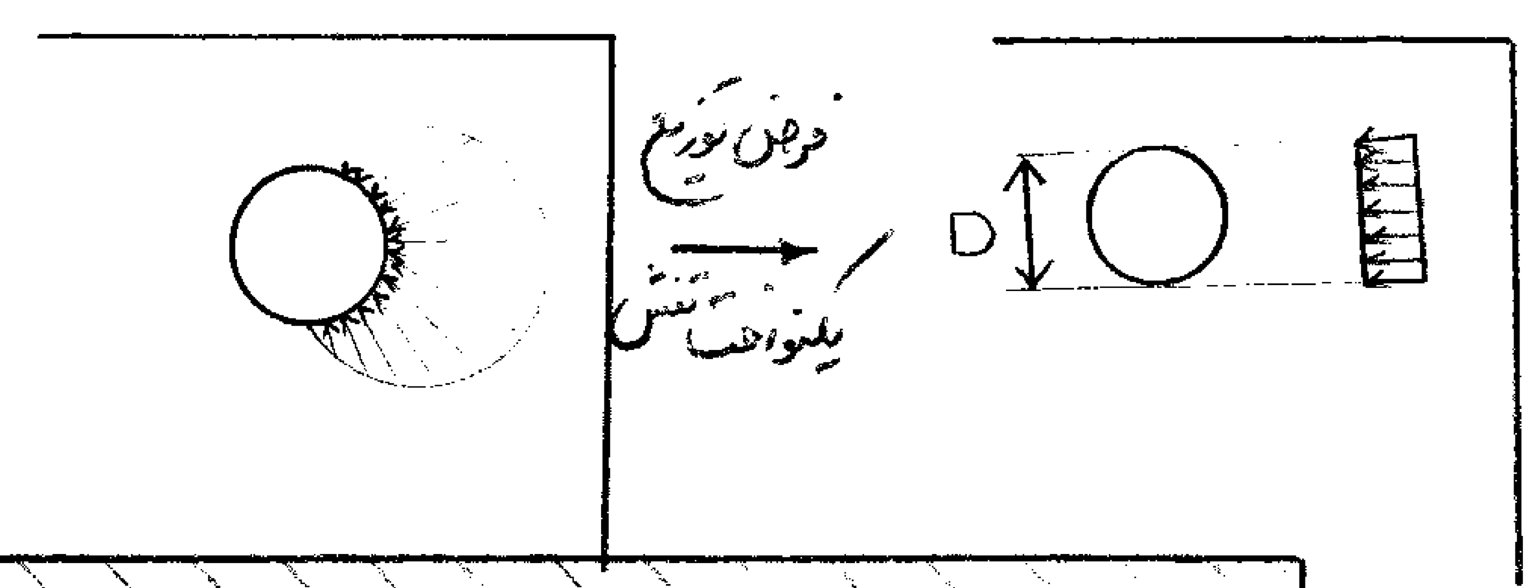

$$\ast\; P_i = \tau \cdot A_i = \frac{A_i}{\Sigma A}\, P$$

G : مرکز سطح مجموعه پیچ‌ها

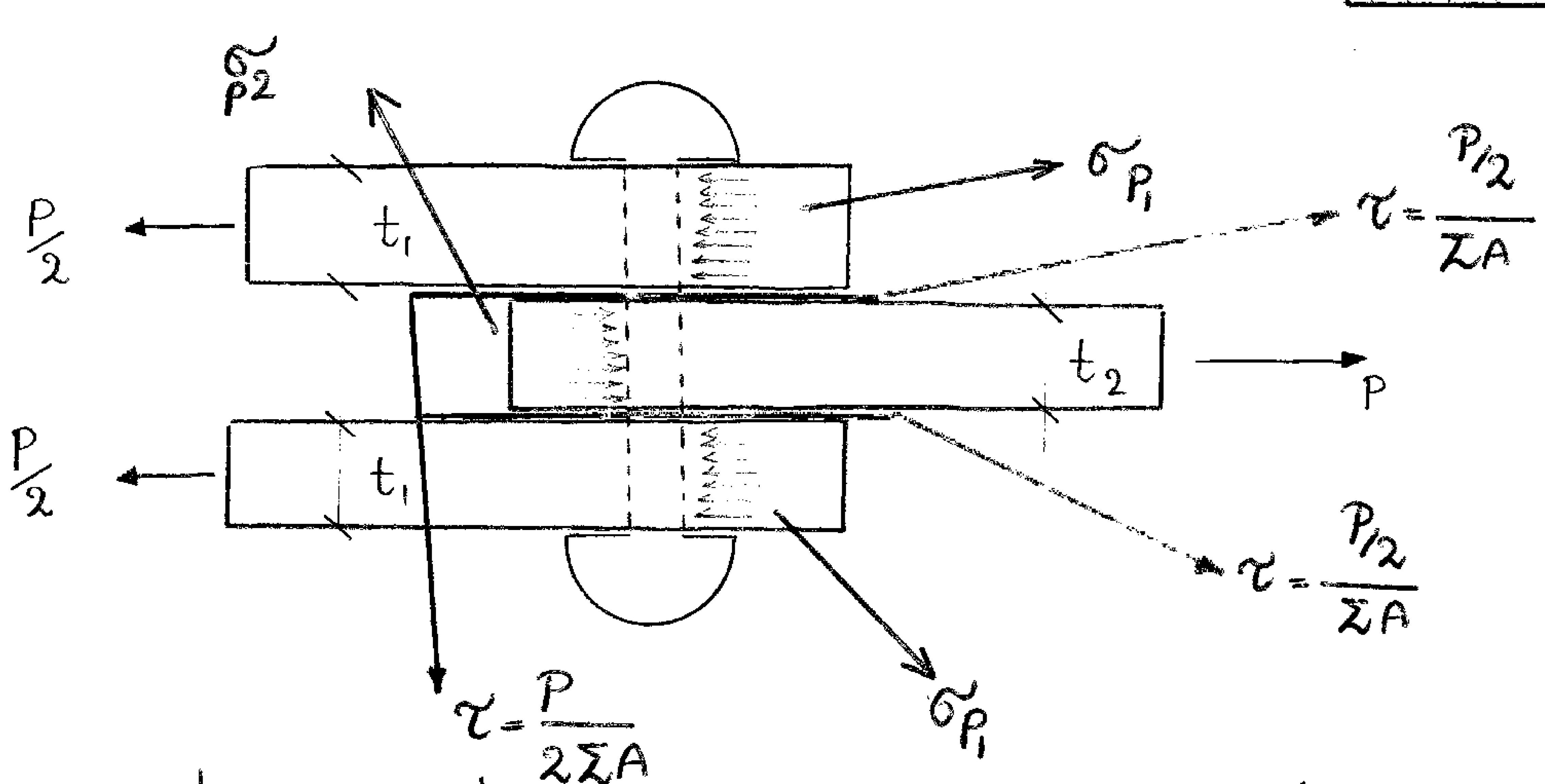
فرض توزیع یکنواخت تنش $\tau$




$$\ast\; \tau = \frac{P}{\Sigma A}$$



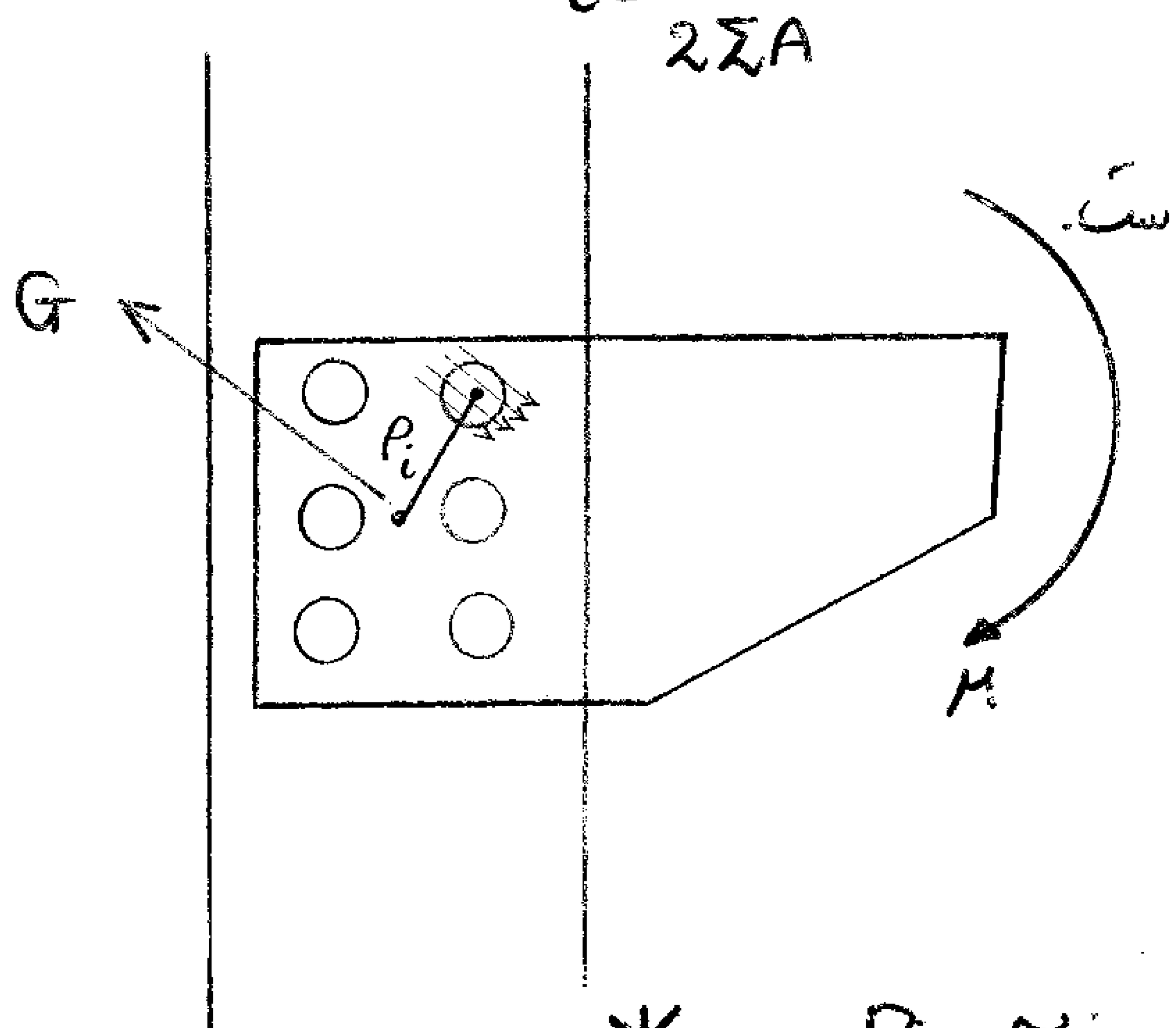

$\ast$ تنش لهیدگی متوسط : $\sigma_P = \dfrac{P_i}{Dt}$




$$\sigma_{P_1} = \left(\frac{P}{2\Sigma A} \times A_i\right) \Big/ Dt_1$$

$$\sigma_{P_2} = \frac{P}{2\Sigma A} \times 2A_i \Big/ Dt_2$$

فرض : توزیع تنش برشی به صورت خطی و متناسب با فاصله از مرکز سطح مجموعه پیچ هاست.

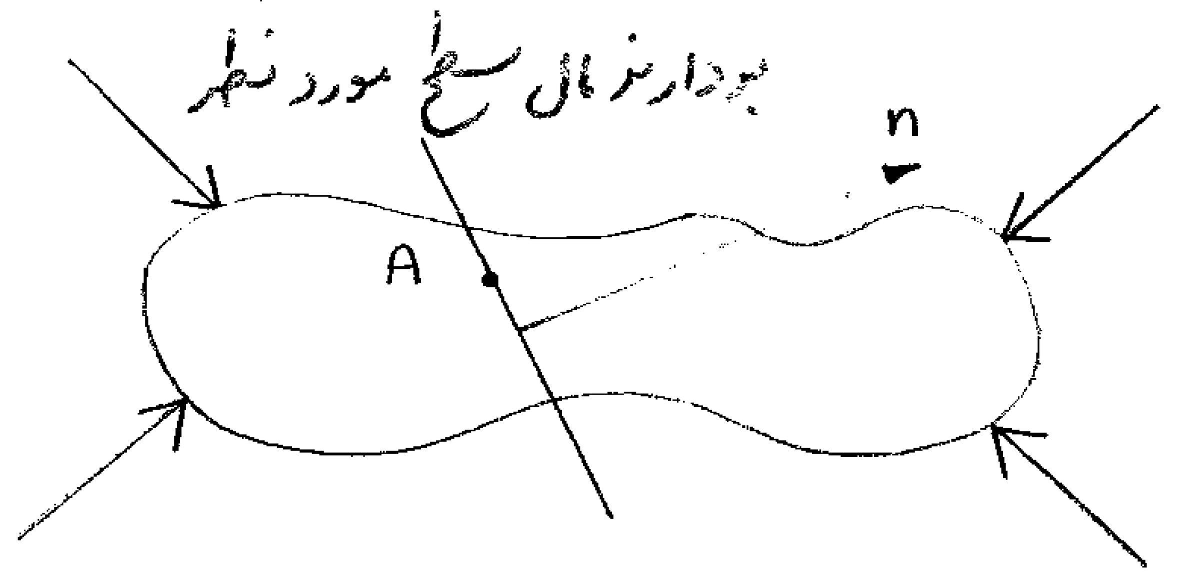



$$\tau_i = C\rho_i \quad , \quad \sum_{i=1}^{m} \tau_i A_i \rho_i = M \longrightarrow C\,\Sigma A_i \rho_i^2 = M$$

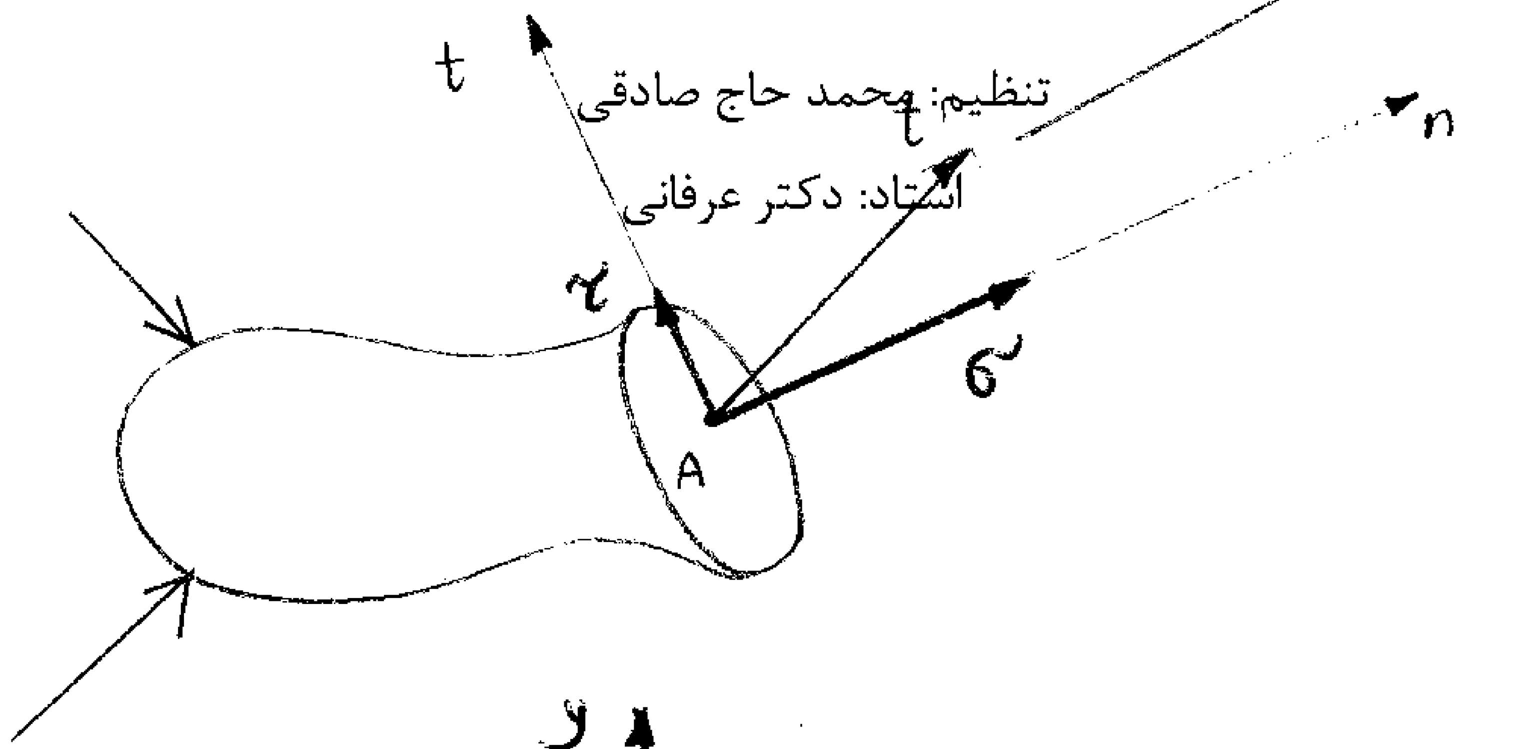
$$\longrightarrow C = \frac{M}{\Sigma A_i \rho_i^2} \longrightarrow \tau_i = \frac{M}{\Sigma A_i \rho_i^2} \cdot \rho_i$$

$$\ast \longrightarrow P_i = \tau_i \cdot A_i = \frac{M}{\Sigma A \rho^2} \cdot A_i \cdot \rho_i$$

## تعاریف ریاضی تنش : ( بحث تنش در فضای سه بعدی )



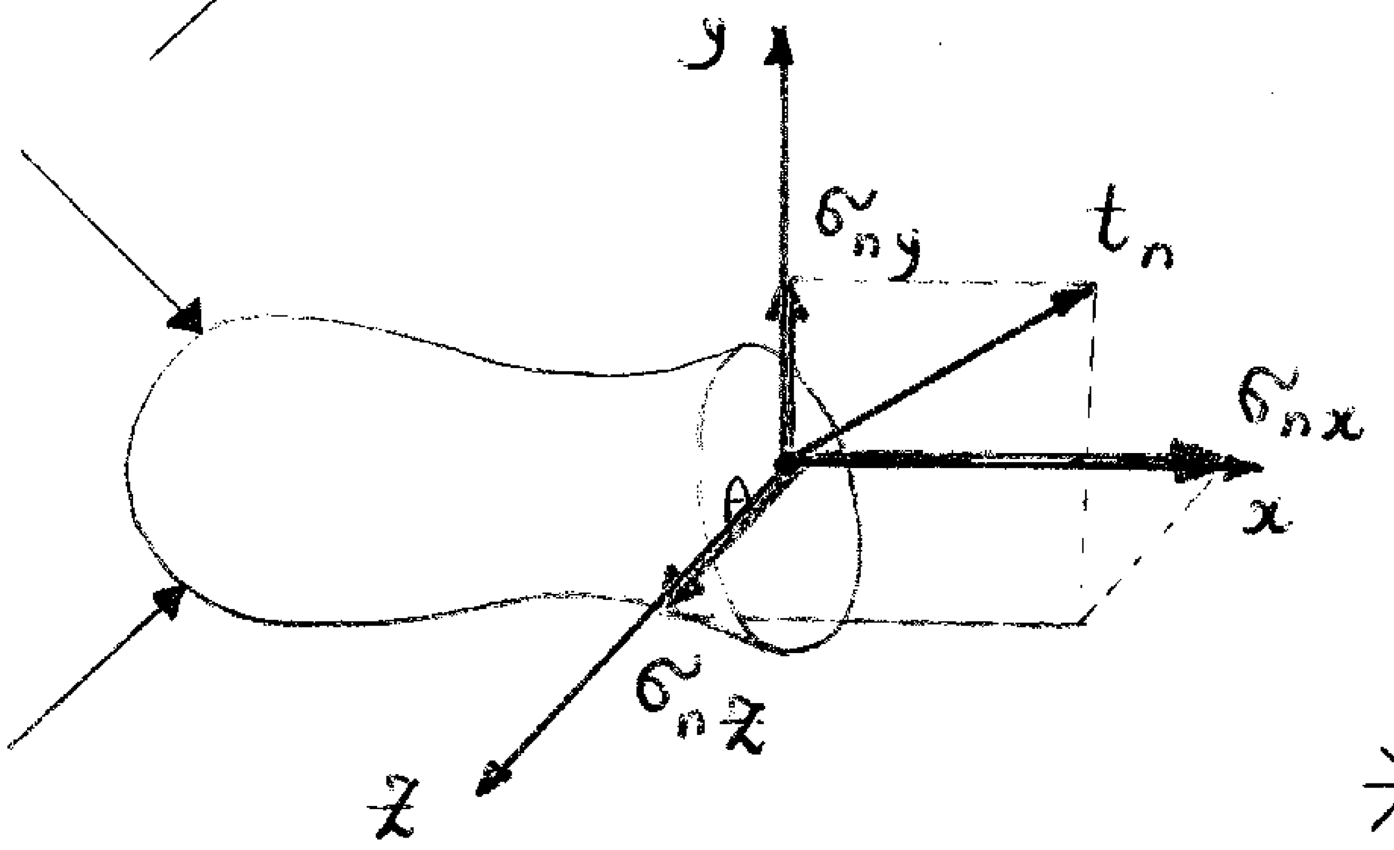

بردار تنش :




تنظیم: محمد حاج صادقی

استاد: دکتر عرفانی

$$* \; t_n^{<nt>} = \begin{bmatrix} \sigma_{nn} = \sigma_n \\ \sigma_{nt} = \tau_{nt} \end{bmatrix}$$




مولفهٔ عمومی تنش $\sigma_{ij}$

امتداد مولفهٔ تنش

نرمال سطح اثر تنش

* در این حالت صفحهٔ n با امتدادهای x و y و z متعامد می باشد.

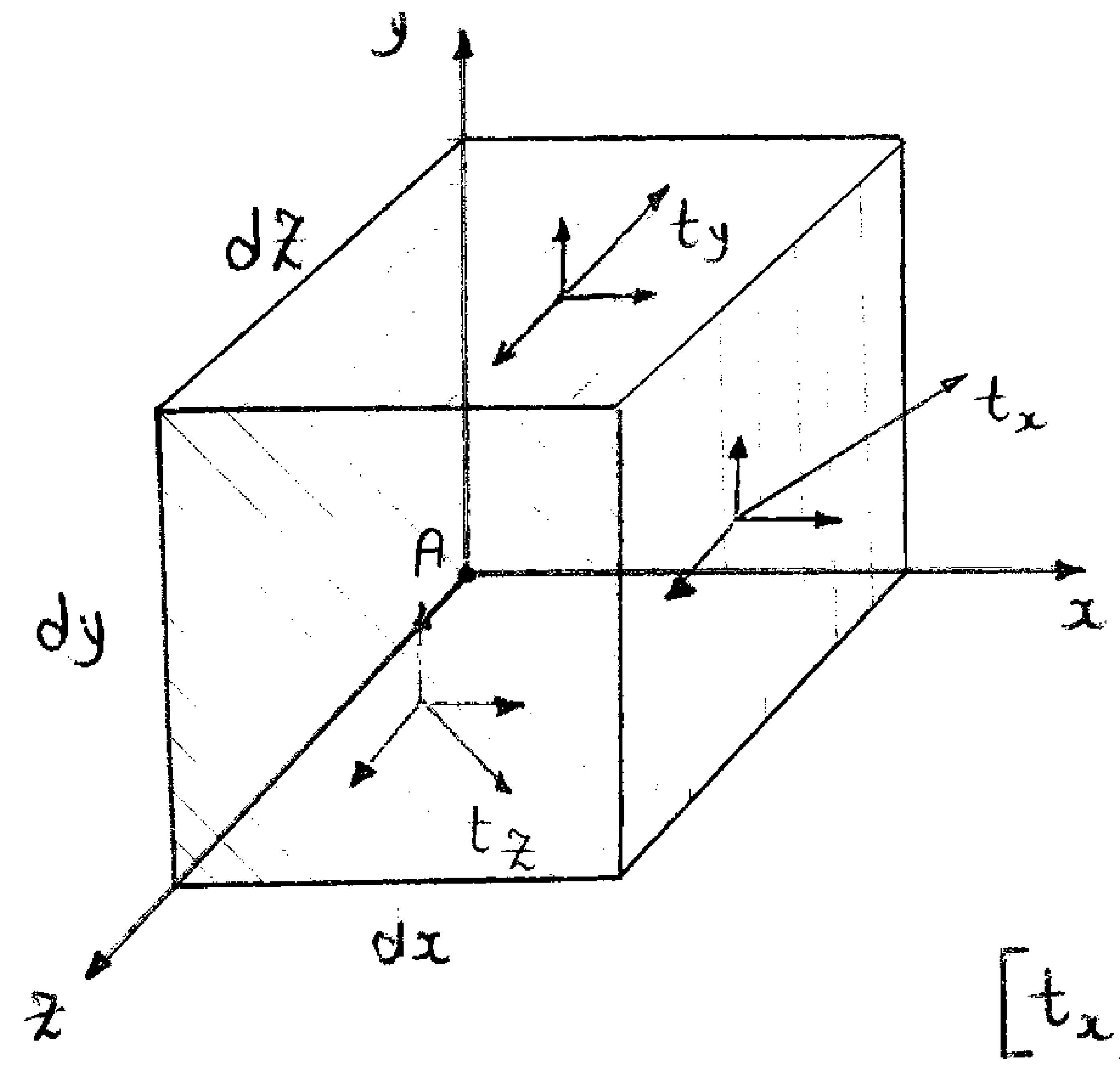
$$* \; t_n^{<xyz>} = \begin{bmatrix} \sigma_{nx} \\ \sigma_{ny} \\ \sigma_{nz} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{ij} \left| \begin{array}{l} i = j : \sigma_{ii} = \sigma_{jj} \Rightarrow \sigma_i = \sigma_j \\ i \perp j : \tau_{ij} \end{array} \right.$$

مولفهٔ عمومی تنش $\sigma_{ij}$ ⇐ در غیر این صورت

تنش قائم

تنش برشی




( المان تنش در نقطهٔ A و در دستگاه xyz )

$$[t_x, t_y, t_z] = \left(\text{تانسور تنش در نقطهٔ A در دستگاه xyz}\right)_{3\times3} = T^{<xyz>}$$

$$T^{<xyz>} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

اگر در یک نقطه تانسور تنش $T^{<xyz>} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & -10 \\ 0 & 20 & 0 \\ -10 & 0 & 20 \end{bmatrix}$ باشد مطلوب است تعیین تنش های اصلی ؟

$$\begin{vmatrix} 10-\sigma & 0 & -10 \\ 0 & 20-\sigma & 0 \\ -10 & 0 & 20-\sigma \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow (10-\sigma)\left[(20-\sigma)^2\right] - 10\left[10(20-\sigma)\right] = 0$$



$$(20-\sigma)\left[(10-\sigma)(20-\sigma) - 100\right] = 0 \longrightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 20 \\ \sigma_2 = 3.81 \\ \sigma_3 = 26.18 \end{cases}$$

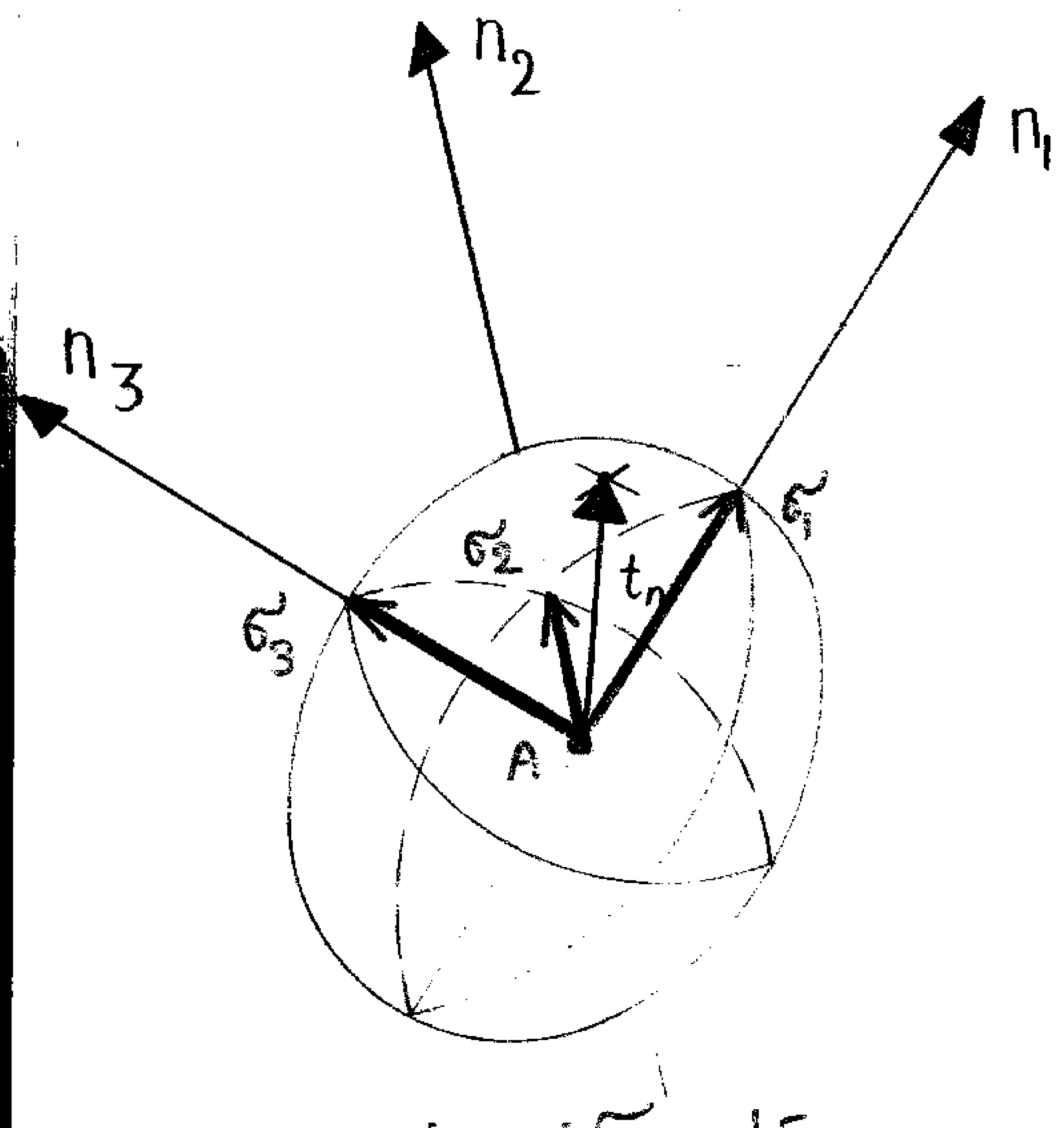
$$\begin{vmatrix} 10 & \boxed{0} & -10 \\ \boxed{0} & \boxed{20} & \boxed{0} \\ -10 & \boxed{0} & 20 \end{vmatrix}$$

نکته : $\Leftarrow$ در این صفحه چون برشی نداریم حتماً 20 یک جواب است .

* $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 50 \quad (10 + 20 + 20)$ = حتماً باید ارضاء شود (تنش حجمی) $\rightarrow$

## بیضوی تنش لامه :

مکان هندسی بردار تنش در حالت کلی یک بیضوی است به نام بیضوی تنش لامه که امتدادهای سه قطر اصلی آن بیضوی، همان امتدادهای اصلی تنش در آن نقطه می باشند و بنابراین اندازه سه شعاع اصلی آن بیضوی همان مقادیر تنش های اصلی می باشند.

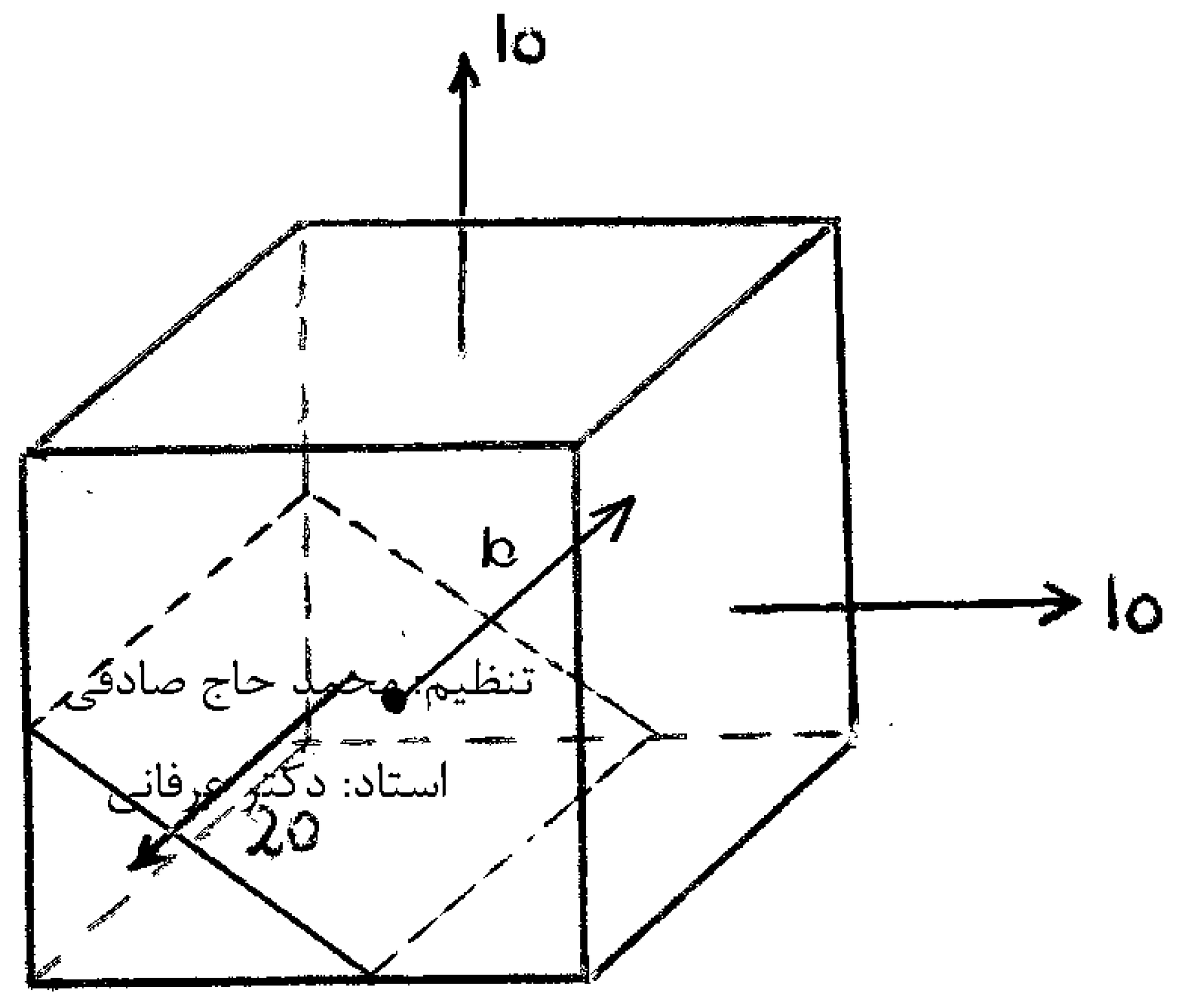



ملاحظه می شود * علاوه بر صفر بودن تنش های برشی بر روی صفحات اصلی تنش تنش های قائم نیز اکسترمم می شوند یعنی ماکزیمم و یا مینیمم می شوند. *

$$\text{IF} \quad \sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3 \longrightarrow \begin{cases} \sigma_1 = \sigma_{min} \\ \sigma_3 = \sigma_{max} \end{cases}$$

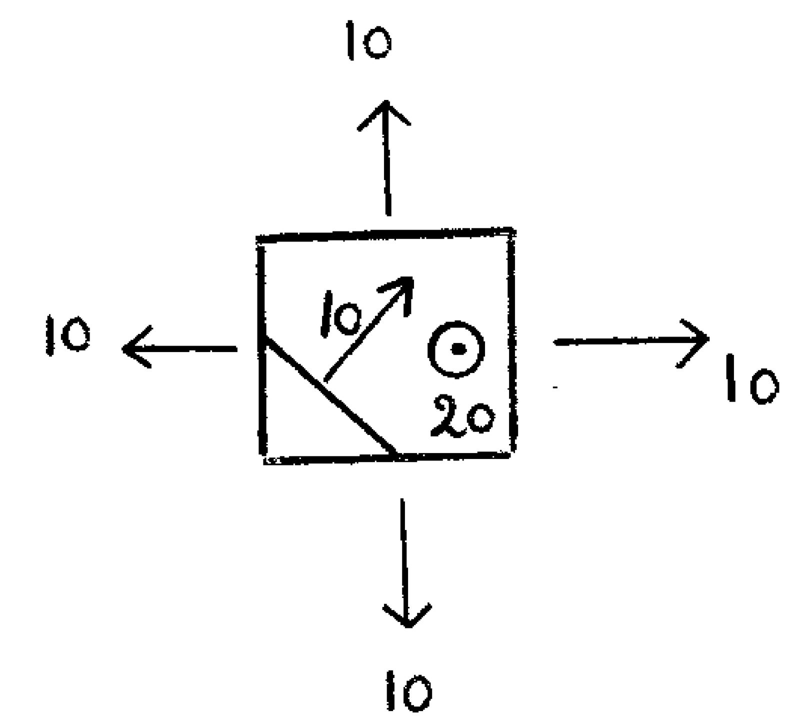
(هر مقطعی از آن بیضی است نه دایره)

در حالت خاصی که دو تنش اصلی با هم برابرند یکی از بیضی های اصلی تنش به دایره تبدیل می شود یعنی اینکه هر امتدادی واقع بر صفحه آن دایره، اصلی محسوب می شود.

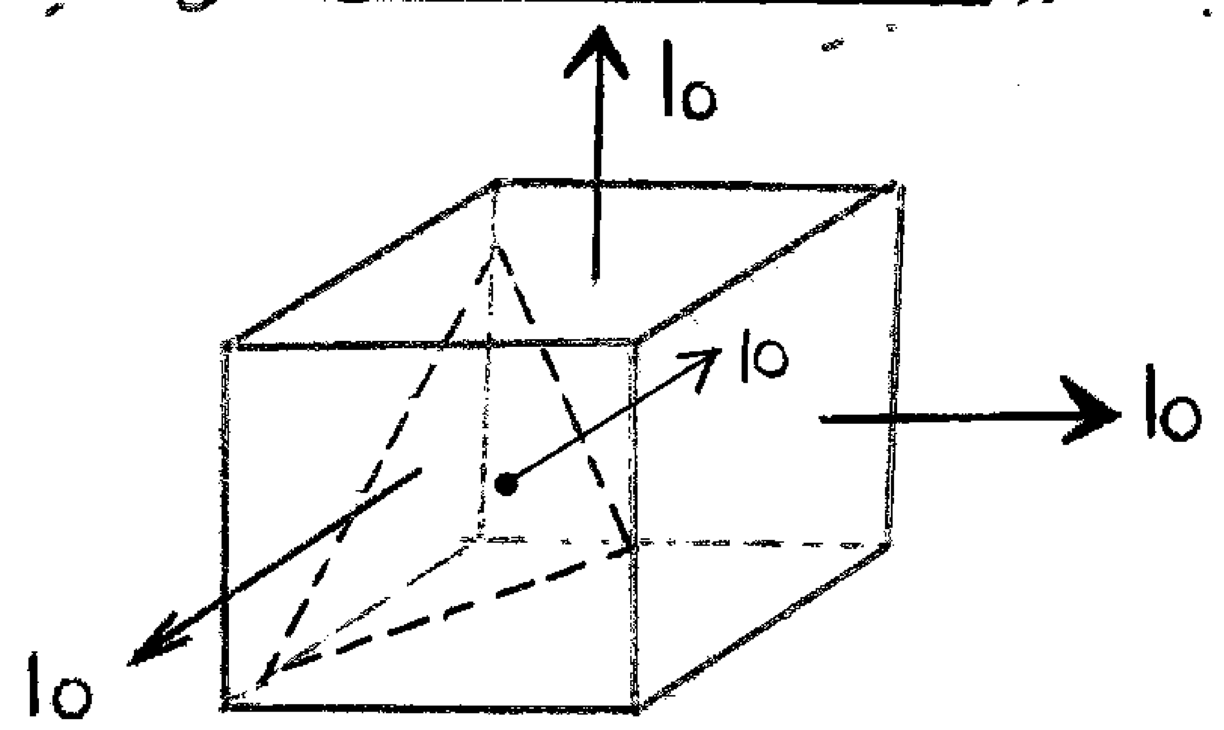




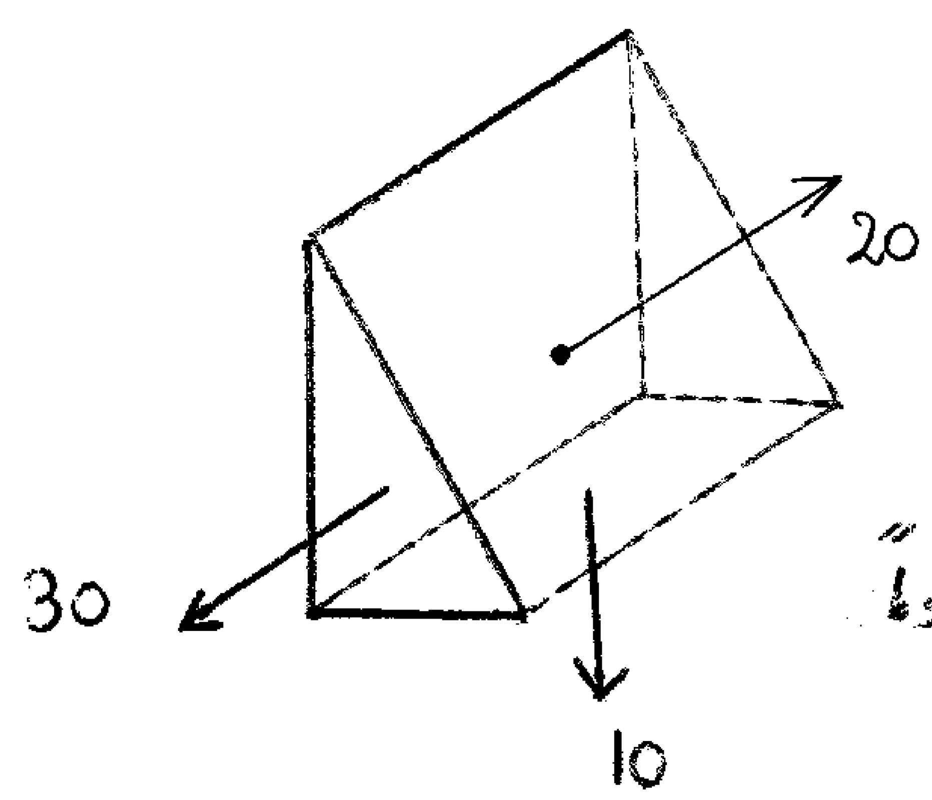
$\Longrightarrow$




* : در یک حالت خاص دیگر اگر هر سه تنش اصلی با هم برابر باشند ، بیضوی تنش تبدیل به کره می شود . در این حالت همهٔ امتدادها اصلی بوده و بر روی هیچ صفحه‌ای برش وجود ندارد ~~به این حالت ، حالت تنش هیدرواستاتیک می گوییم~~



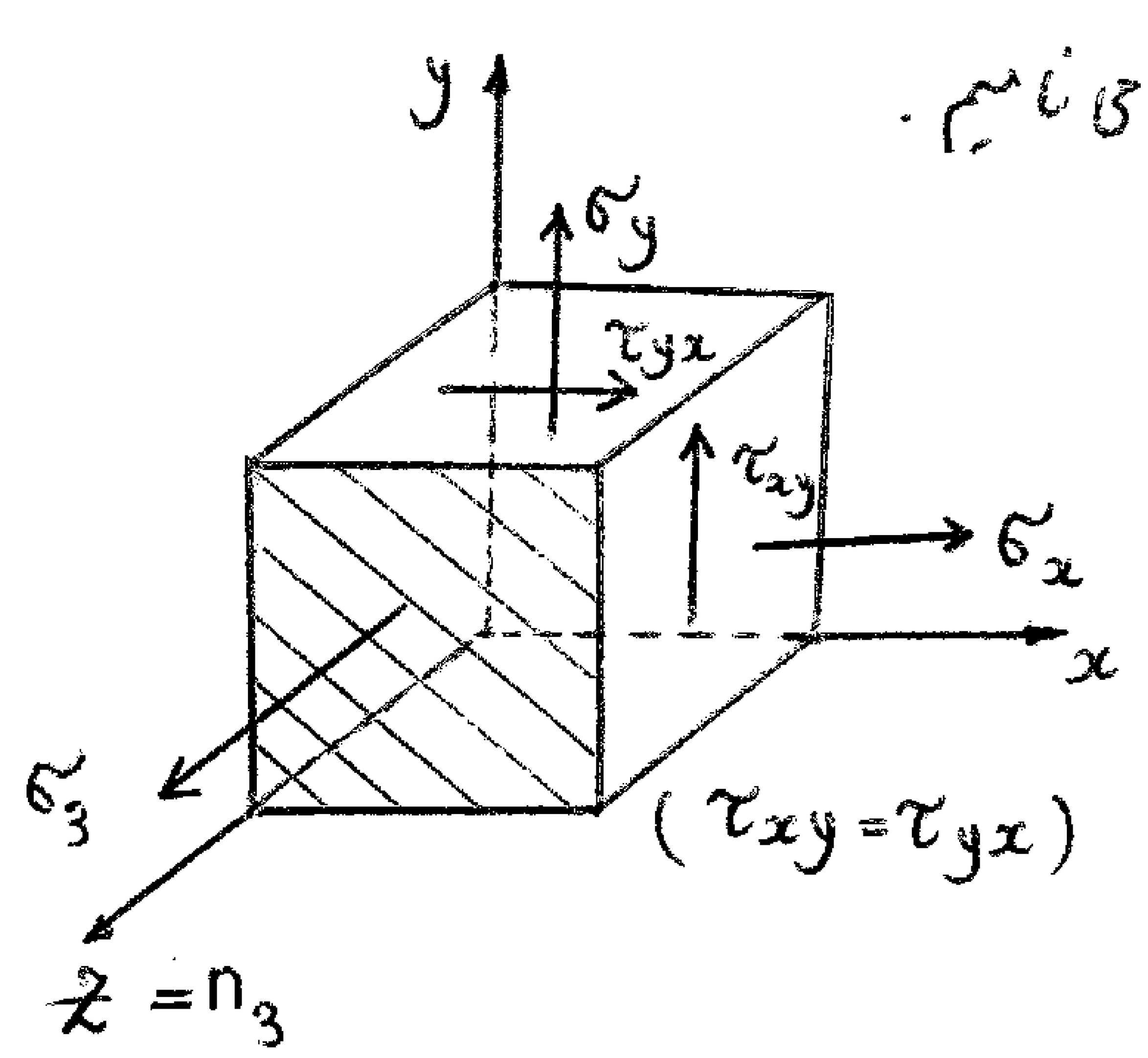

* آیا حالت روبرو امکان پذیر است ؟



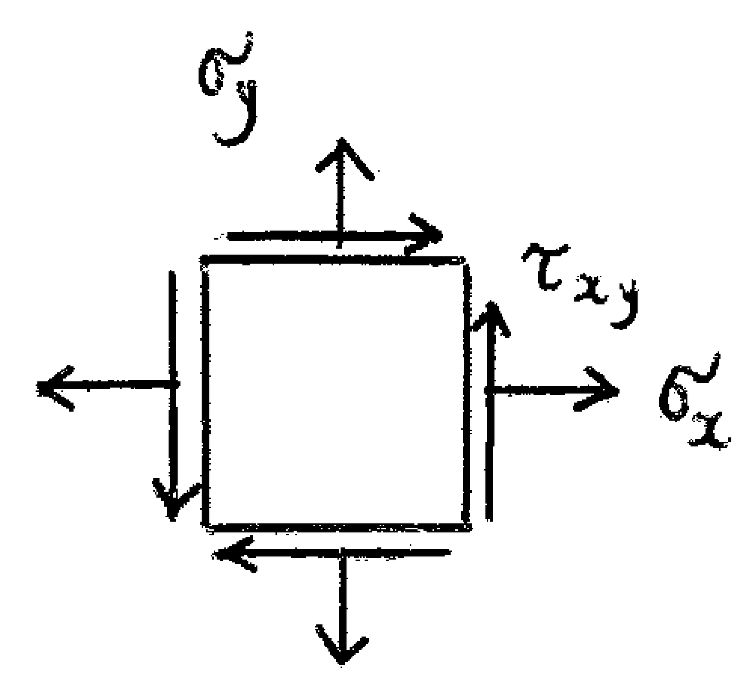

* اگر دو صفحهٔ اصلی بر هم عمود بودند تنش های مؤثر بر آن صفحات می توانند غیر یکسان باشند ولی اگر آن صفحات غیر متعامد باشند لزوماً باید تنش های اصلی یکسان داشته باشند . *

تبدیلات تنش دو بعدی :

اگر یکی از وجوه المان تنش همواره اصلی باشد آن را دو بعدی می نامیم .

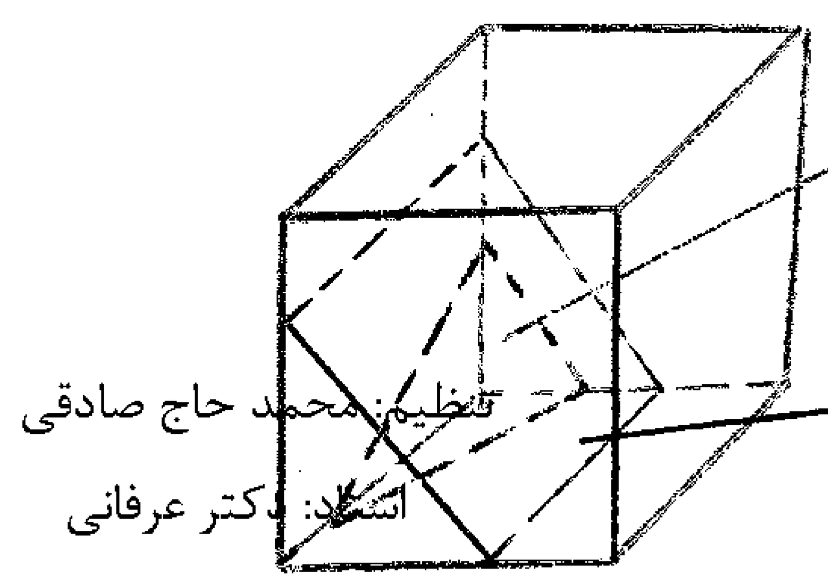



$\Longrightarrow$




$$T^{\langle xyz\rangle}=\begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{yx} & 0\\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0\\ 0 & 0 & \sigma_z\end{bmatrix}\Longrightarrow T^{\langle xy\rangle}=\begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{yx}\\ \tau_{xy} & \sigma_y\end{bmatrix}$$

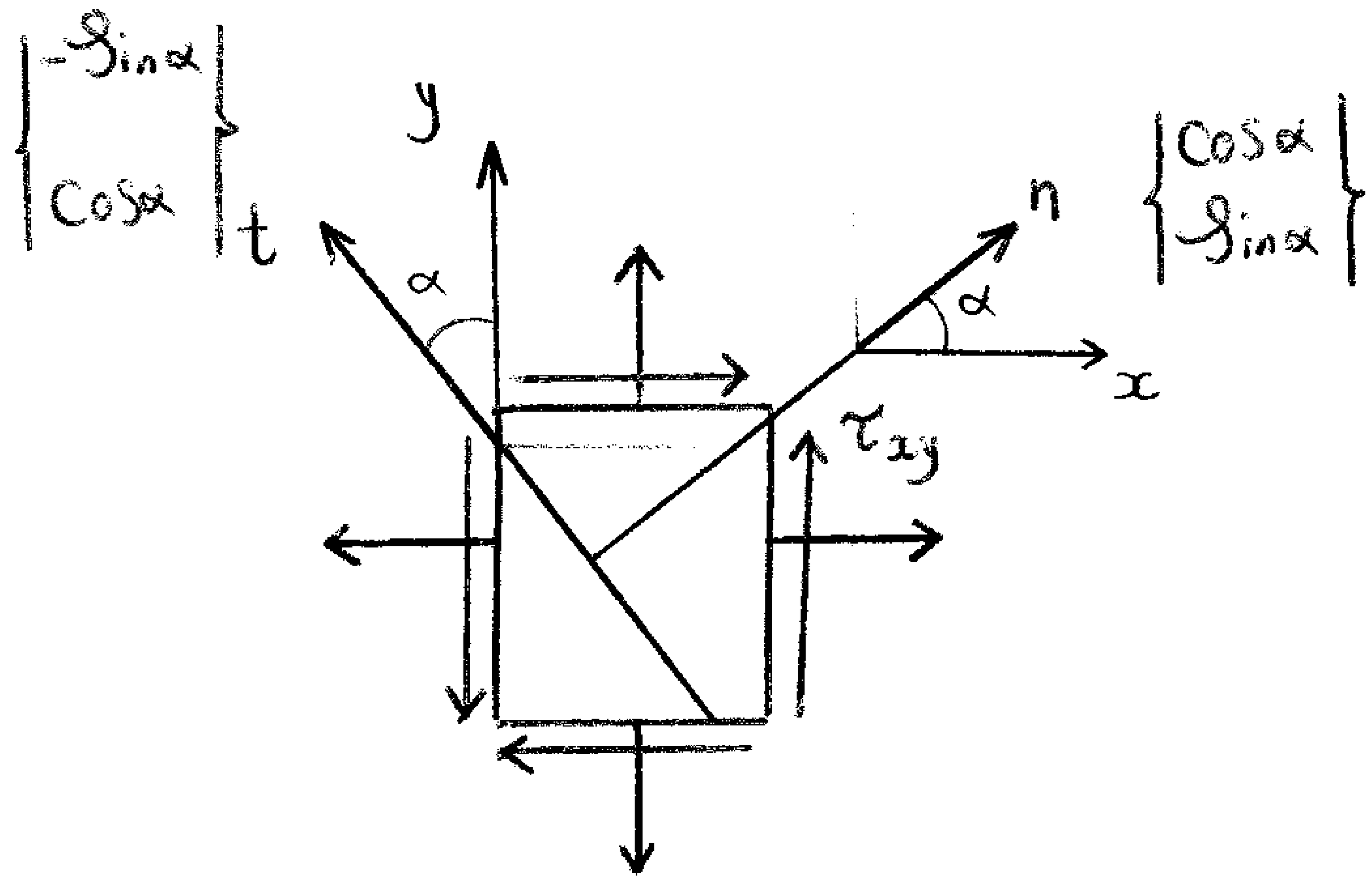
$\Longrightarrow$




$$n=\begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} \Longrightarrow \text{مسائل سه بعدی} \Longrightarrow t_n=\begin{Bmatrix} \sigma_{nx} \\ \sigma_{ny} \\ \sigma_{nz} \end{Bmatrix}$$

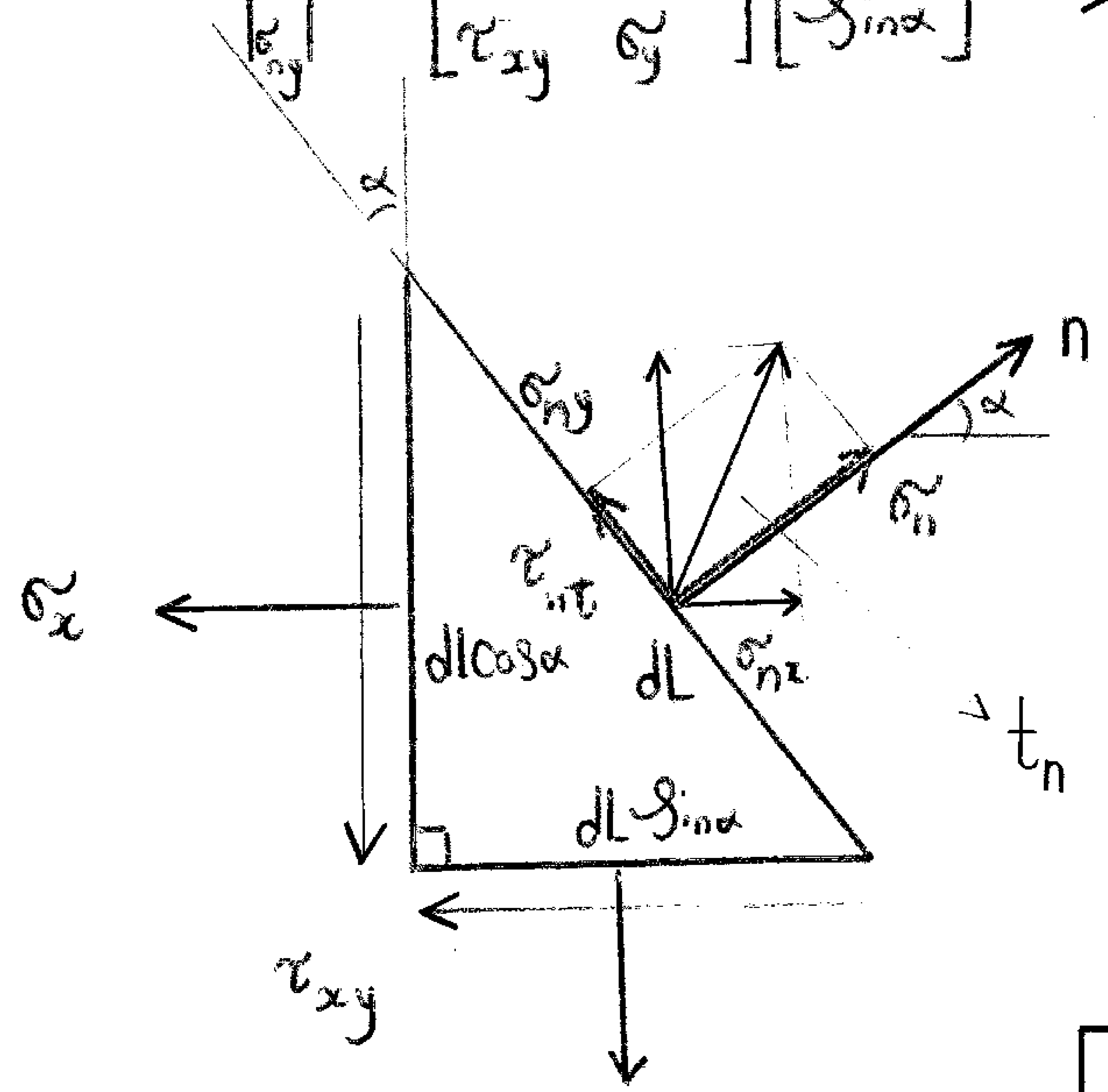
$$n=\begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ \phi \end{bmatrix} \Longrightarrow \text{مسائل دو بعدی} \Longrightarrow t_n=\begin{Bmatrix} \sigma_{nx} \\ \sigma_{ny} \\ \phi \end{Bmatrix}$$

✱ در این شکل و یا در کلیه تبدیل روابط دو بعدی که متعاقباً تنظیم خواهد شد $\alpha$ زاویه بردار عمود مورد نظر با محور $x$ در جهت مثلثاتی است و یا زاویه خود صفحه با محور $y$ ها در جهت مثلثاتی است. ✱




$t_n = T \cdot n$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{nx} \\ \sigma_{ny} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix} \Longrightarrow \left| \begin{array}{ll} \sigma_x \cos\alpha + \tau_{xy}\sin\alpha & \Longleftarrow \Sigma F_x = 0 \\ \tau_{xy}\cos\alpha + \sigma_y \sin\alpha & \Longleftarrow \Sigma F_y = 0 \end{array} \right.$$




مثلاً برای تعادل ، $\sigma_x(dL\cos\alpha\, \cancel{dz}) + \tau_{xy}(dL\sin\alpha\, \cancel{dz})$

$= \sigma_{nx} \quad (\cancel{dL}\, \cancel{dz})$

$$\boxed{\begin{array}{l} ✱\ \Sigma F_n = 0 \longrightarrow \sigma_n = t_n \cdot n \\ ✱\ \tau_{nt} = 0 \longrightarrow t_n \cdot t \end{array}}$$

تنظیم: محمد حاج صادقی

استاد: دکتر عرفانی

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_y \sin^2\alpha + 2\tau_{xy}\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\tau_{nt} = -(\sigma_x - \sigma_y)\sin\alpha\cos\alpha + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\tau_{xy}$$

حفظ شود $\Longrightarrow$

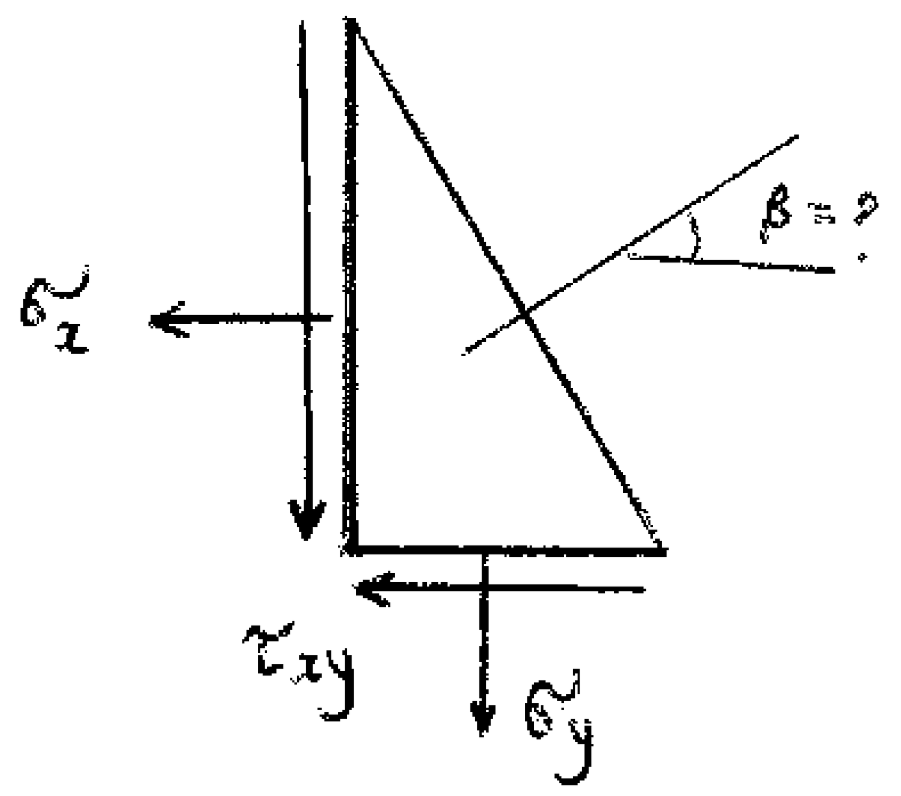
$$\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha + \tau_{xy}\sin 2\alpha$$

$$\tau_{nt} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha$$

در روابط فوق مولفه‌های تنش سمت راست تساوی‌ها از قانون علامت گذاری تانسور تنش تبعیت می‌کنیم ولی مولفه $\sigma_n$ و $\tau_{nt}$ در سمت چپ تساوی‌ها از قانون علامت گذاری بردار تنش تبعیت می‌کند. در این قانون، تنش قائم کششی مثبت و فشاری منفی بوده و همچنین تنش برشی هنگامی مثبت است که المان را در جهت مثلثاتی دوران دهد.

امتدادهای اصلی تنش:

$\beta$: زاویهٔ اصلی تنش




$$\Longrightarrow \tan 2\beta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \begin{cases} \beta_1 \\ \beta_2 = \beta_1 + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

بدست آوردن $\sigma_1$ و $\sigma_2$

روش اول: جایگذاری $\beta_1$ و $\beta_2$ در رابطهٔ $\sigma_n$

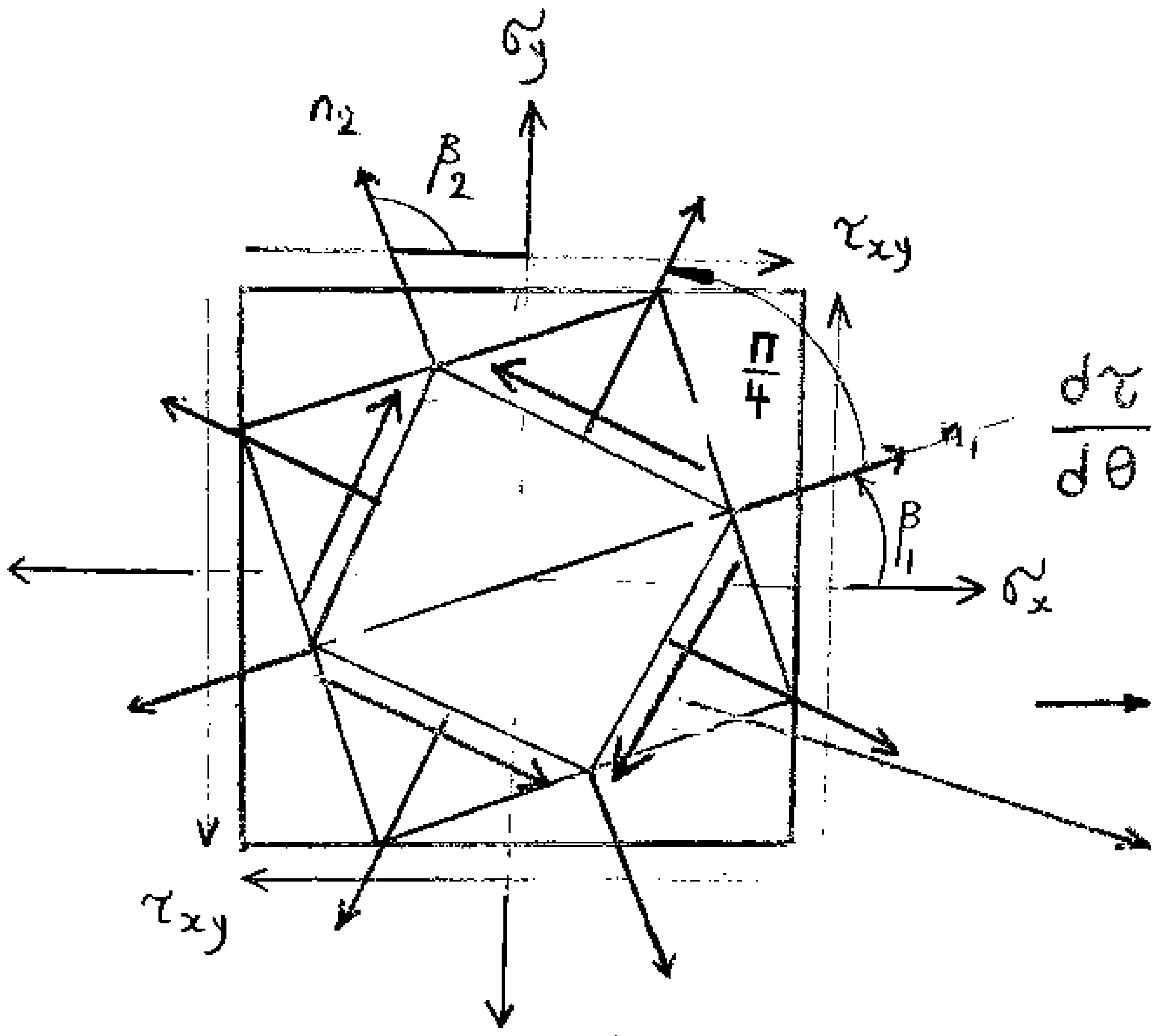
روش دوم:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow (\sigma_x - \sigma)(\sigma_y - \sigma) - \tau_{xy}^2 = 0$$

$$\Longrightarrow \sigma_{1,2} = \sigma_{\max,\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

## تنش های برشی حداکثر :

اگر زاویه نرمال صفحه مورد نظر با محور $x$ را $\theta$ فرض کنیم




$$\frac{d\tau}{d\theta}=0 \longrightarrow \tan 2\theta = -\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2\tau_{xy}} \longrightarrow \begin{cases} \theta_1 \\ \theta_2=\theta_1+\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} \sigma=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \\ \tau_{\substack{max\\min}} = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2} \end{cases}$$

$* \tan 2\beta \times \tan 2\theta = -1 \longrightarrow$ ** $\beta$ ها و $\theta$ ها با هم زاویه $45^\circ$ می سازند *.

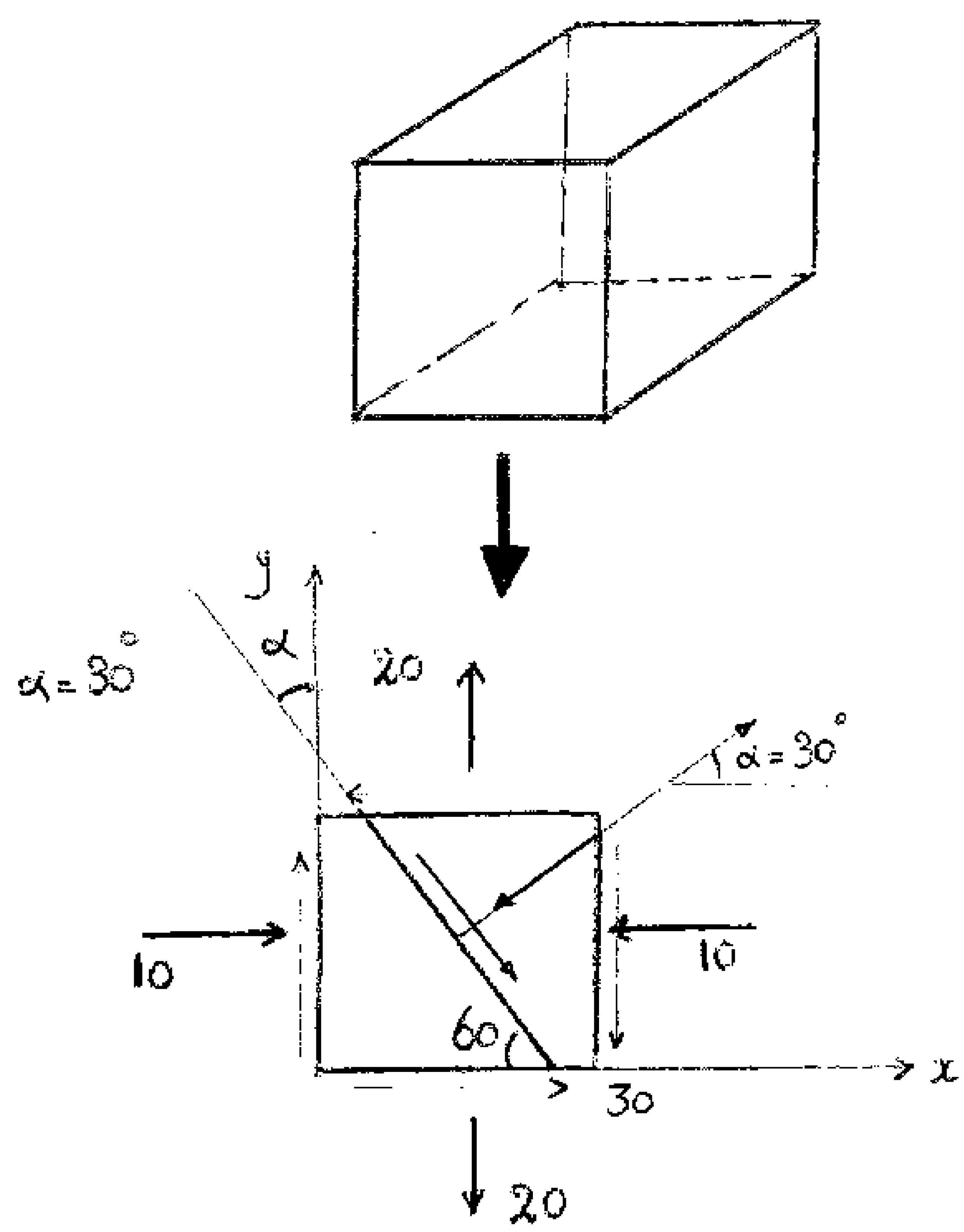
یعنی $2\beta$ و $2\theta$ با هم زاویه $\frac{\pi}{2}$ یا $90^\circ$ می سازند

اگر در نقطه‌ای المان تنش مطابق شکل باشد مطلوب است :

۱- تنش قائم و برشی وجه نشان داده شده :

۲- تنش های اصلی و امتدادهای آن ها :

۳- تنش برشی حداکثر :




$$T^{\langle xy\rangle}=\begin{bmatrix}-10 & -30\\ -30 & 20\end{bmatrix}$$

(+ و - از روابط علامت دهی های تانسور تبعیت می کند)

$$1-\ \sigma_n=\frac{-10+20}{2}+\frac{-10-20}{2}\cos 60^\circ+(-30)\sin 60=-2.5-15\sqrt{3}<0$$ فشاری

$$\tau_{nt}=0-\frac{-10-20}{2}\sin 60^\circ+(-30)\cos 60=-15+7.5\sqrt{3}<0$$ خلاف مثلثاتی

2- $$\sigma_{1,2} = \frac{-10+20}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-10-20}{2}\right)^2 + (-30)^2}$$

$$\tan 2\beta = \frac{2(-30)}{-10-20} \longrightarrow \begin{cases} \beta_1 = 31.717 \\ \beta_2 = 121.717 \end{cases}$$

3- $$\tau_{max,min} = \pm\sqrt{\left(\frac{-10-20}{2}\right)^2 + (-30)^2} = \pm 33.54$$

$$\sigma = \frac{-10+20}{2} = 5$$

دایرهٔ مور :

در دستگاه $xy$ :

$$t_n^{\langle xy \rangle} = \begin{bmatrix} \sigma_{nx} \\ \sigma_{ny} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x \cos\alpha + \tau_{xy} \sin\alpha \\ \tau_{xy} \cos\alpha + \sigma_y \sin\alpha \end{bmatrix} \xRightarrow[\alpha]{\text{با حذف}}$$

مکان هندسی انتهای بردار تنش که یک بیضی است به نام بیضی تنش لامه

در دستگاه $nt$ :

$$t_n^{\langle nt \rangle} = \begin{bmatrix} \sigma_n \\ \tau_{nt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha \\ 0 \quad - \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \end{bmatrix} \xRightarrow[2\alpha]{\text{با حذف}}$$

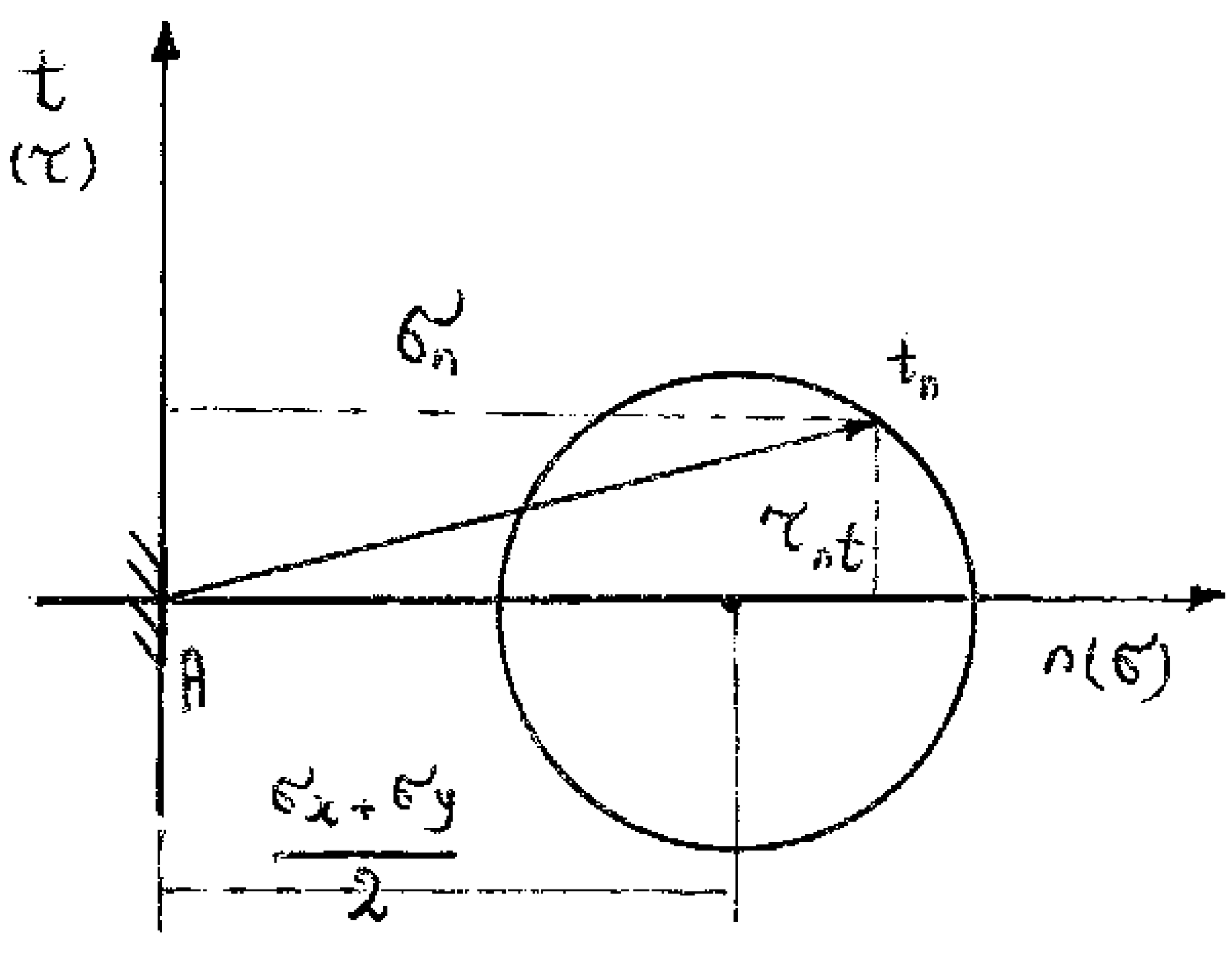
مکان هندسی انتهای بردار تنش که یک دایره است به نام دایره تنش مور.

مکان هندسی انتهای بردار تنش در دستگاه متغیر و وابستهٔ $nt$ دایره‌ای است به نام دایرهٔ مور ولی همین مکان در دستگاه ثابت $xy$ یکی از سه بیضی اصلی بیضوی لامه می باشد.

* تفاوت دایرهٔ مور با بیضی لامه :

معادلهٔ دایرهٔ تنش مور :

$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{nt}^2 = \underbrace{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}_{R^2}$$



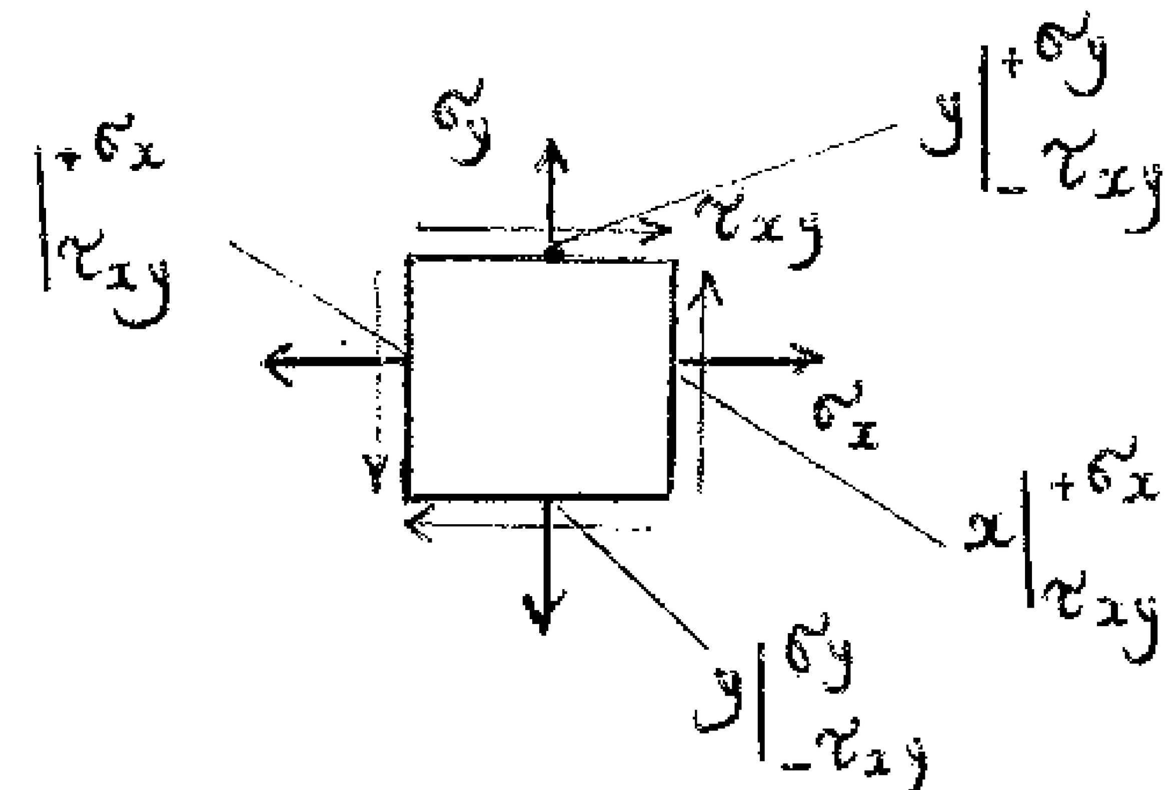
استاد: دکتر عرفانی

تعریف کاربردی دایرهٔ مور :

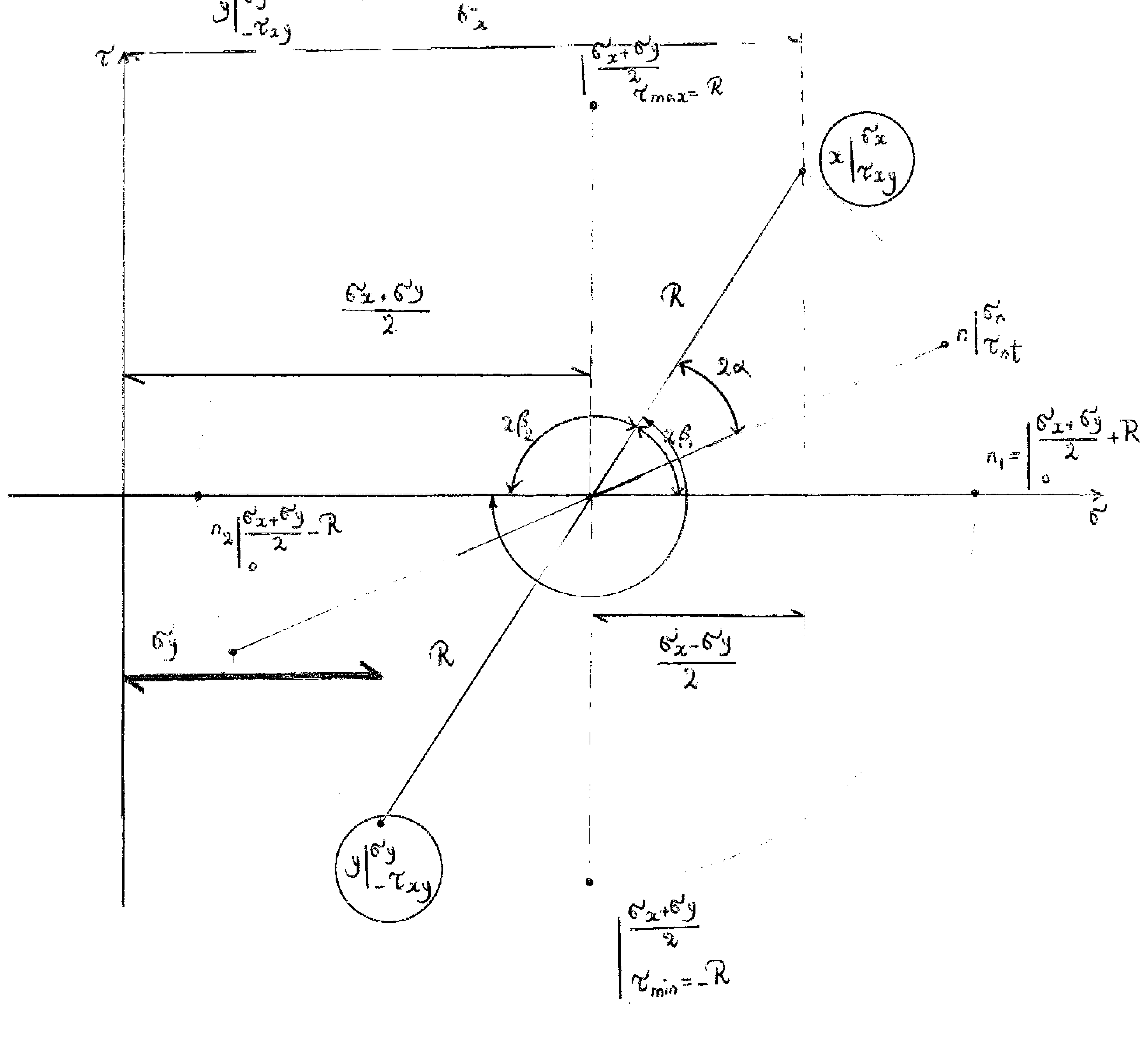
هر صفحه‌ای بر روی المان تنش نظیر نقطه‌ای است بر روی دایرهٔ مور که با چرخش صفحه روی المان به اندازهٔ $\alpha$ نقطهٔ نظیر بر روی دایرهٔ تنش مور به اندازهٔ $-2\alpha$ خواهد چرخید.

$$\boxed{* \quad \alpha \longrightarrow -2\alpha}$$

۱- بنابراین دو نقطهٔ مربوط به دو صفحهٔ متعامد، انتهای یک قطر را بر روی دایرهٔ مور مشخص خواهد کرد.



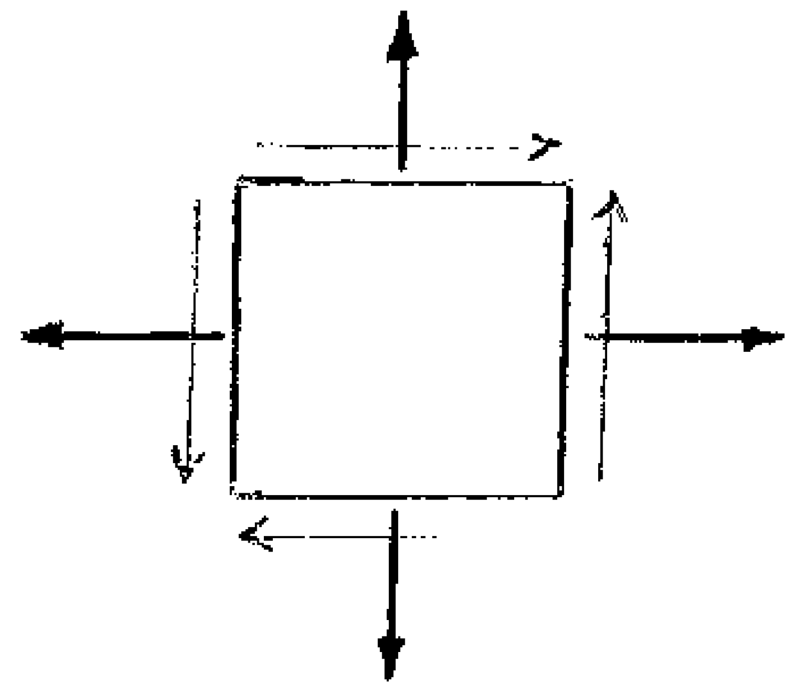

* برای ترسیم دایرهٔ تنش مور، تنش برشی مثلثاتی : مثبت *



تنظیم: محمد حاج صادقی

استاد: دکتر عرفانی

$$\tan 2\beta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$



تنش سطحی

از مکان مرکز دایره $\Longrightarrow \sigma_x + \sigma_y = \sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_{x'} + \sigma_{y'} = ct.$

* برای حالتی معتبر است که وجه سوم یعنی امتداد $z$ همواره اصلی باشد.

$$\rightarrow R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

$$\sigma_1 = \sigma_{max} \ , \ \sigma_2 = \sigma_{min}$$

جای که $\tau$ max یا min است

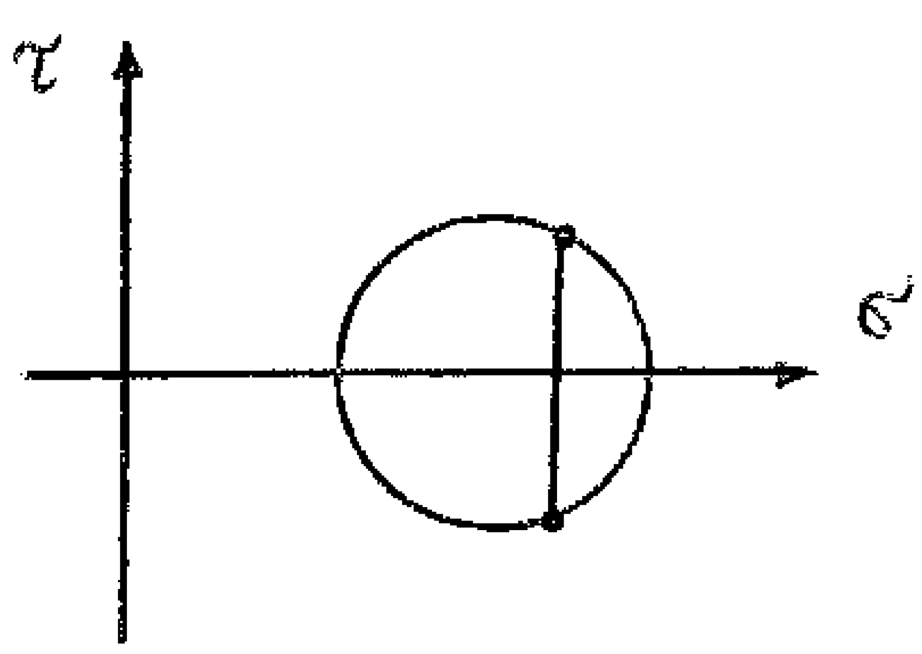
برای $\tau_{max}$ نیز نوشته شود.

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \dfrac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} \\ \tau_{\substack{max \\ min}} = \pm R = \pm \dfrac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} \end{array} \right.$$

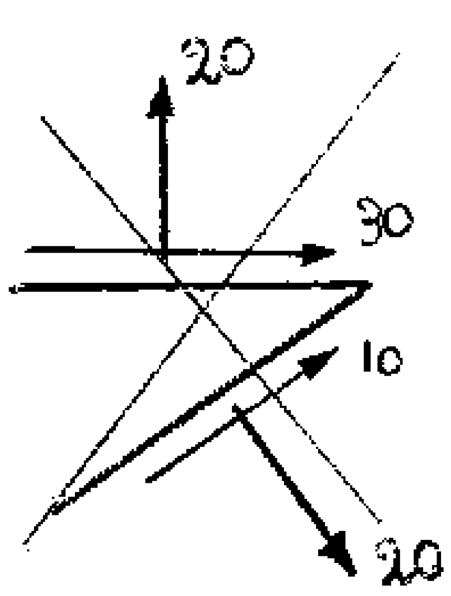
$$\boxed{\left| \begin{array}{l} \sigma_n = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + R\cos(2\beta - 2\alpha) \\ \tau_{nt} = 0 + R\sin(2\beta - 2\alpha) \end{array} \right.}$$

لزوم قرارگیری انتهای بردار تنش در روی دایره مور یعنی تضمین تعادل در المان تنش (یعنی تضمین تعادل برای المان تنش)

در یک نقطه چند صفحه می‌توان یافت که تنش‌های قائمشان یکسان باشد.
فقط دو صفحه؛ که تنش‌های قائم یکسان داشته باشند.
بر روی این دو صفحه تنش‌های برشی لزوماً یکسان بوده و همواره به هم نزدیک و یا دور می‌شوند.



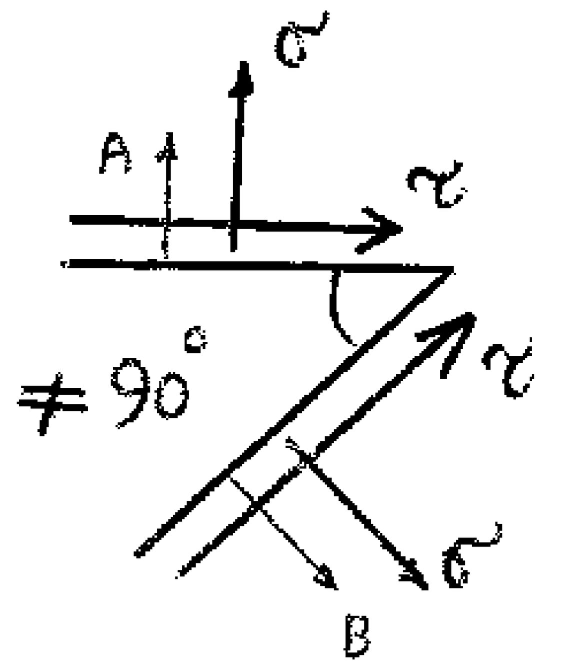

اصل کوشی: زاویه‌ها در 90 است.



تنظیم: محمد حاج صادقی

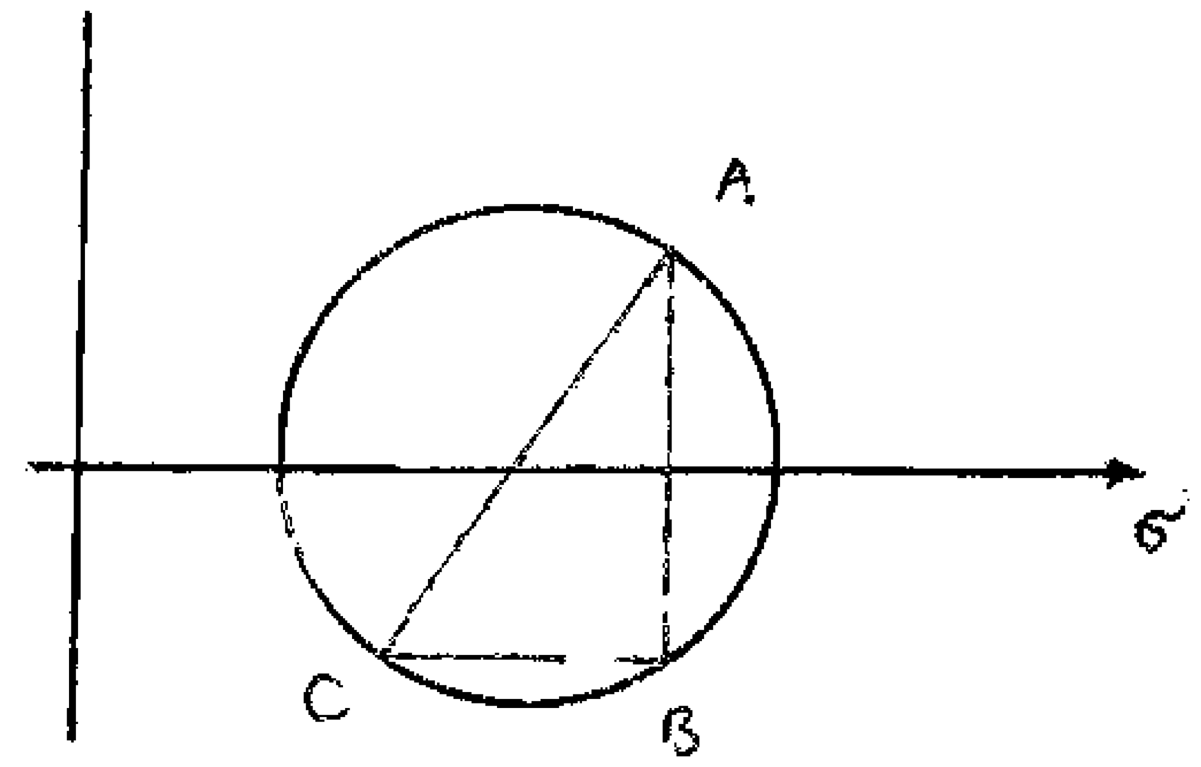
استاد: دکتر عرفانی

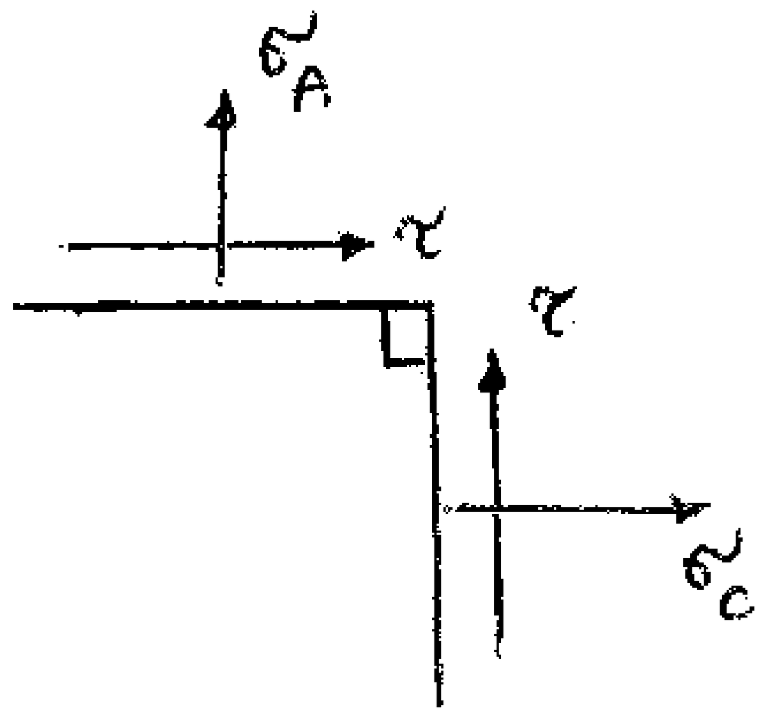
در یک نقطه چند صفحه می توان یافت که تنش های برشی یکسان داشته باشند :
طوری که یا به هم نزدیک شوند و یا ازهم دور شوند :




دو حالت می توان یافت :

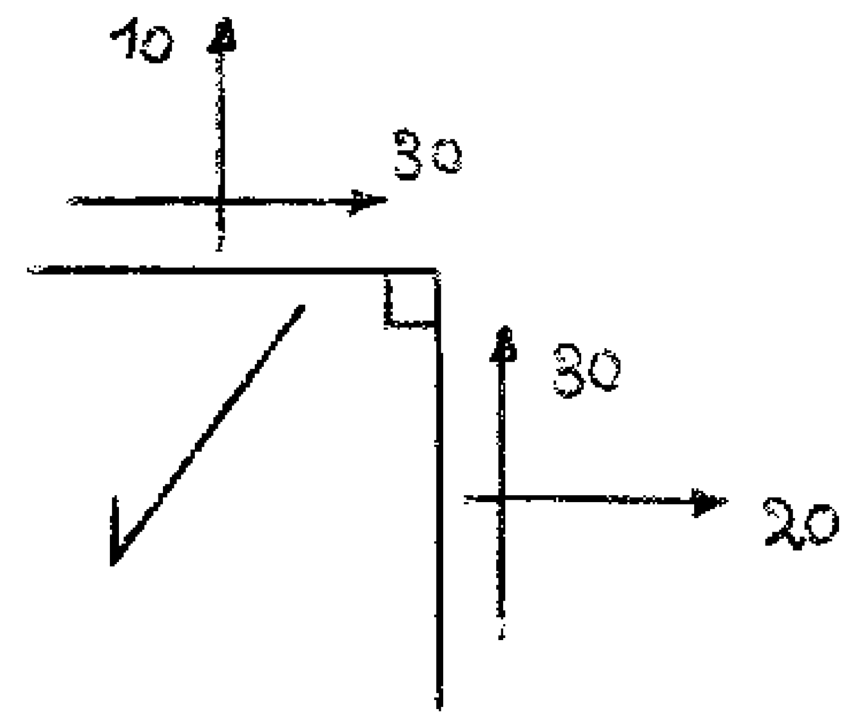
۱ـ در حالت اول تنش های قائم دو صفحه متفاوتند که باید صفحاتشان بر هم عمود باشد یا صفحات متعامد نیستند که باید تنش های قائم یکسانی داشته باشند :



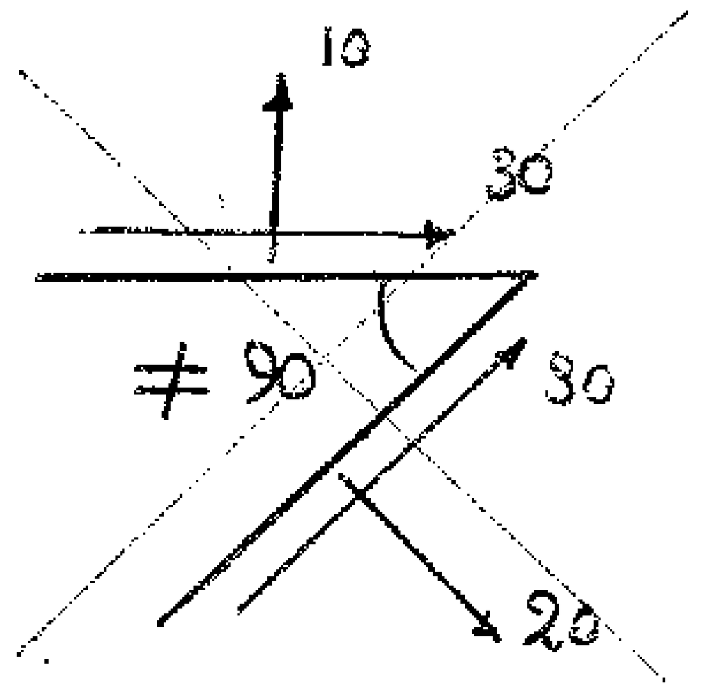



---

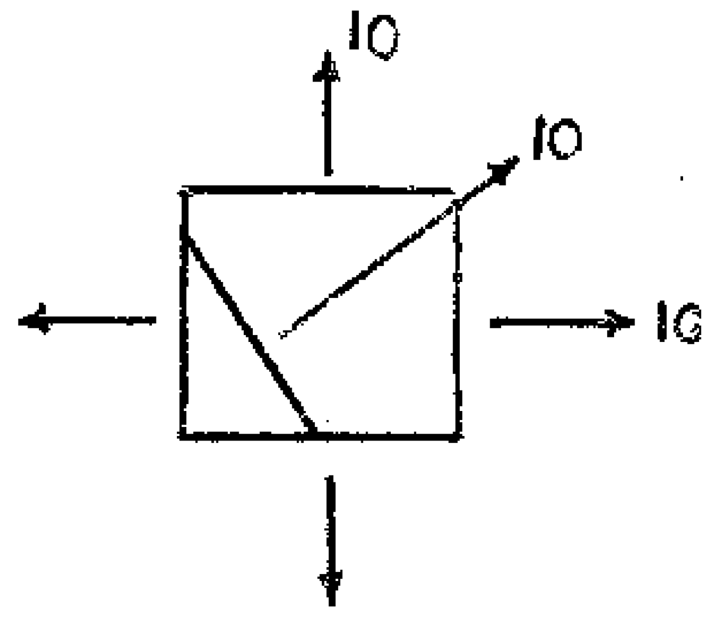
①



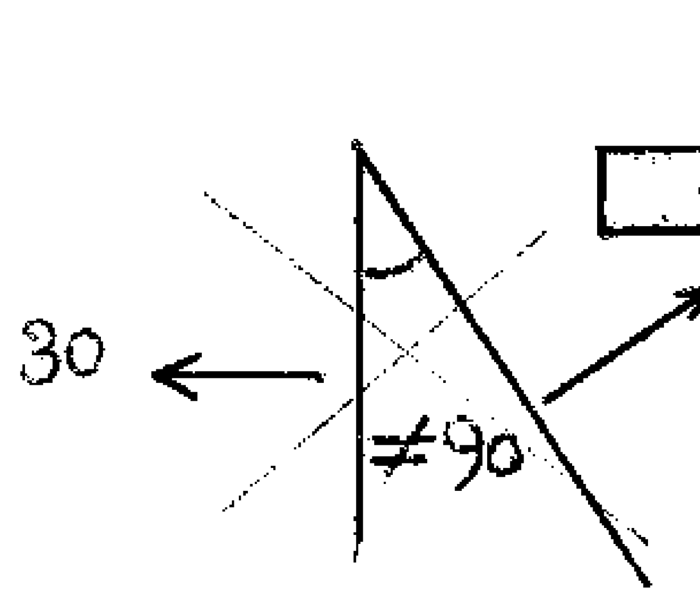

②

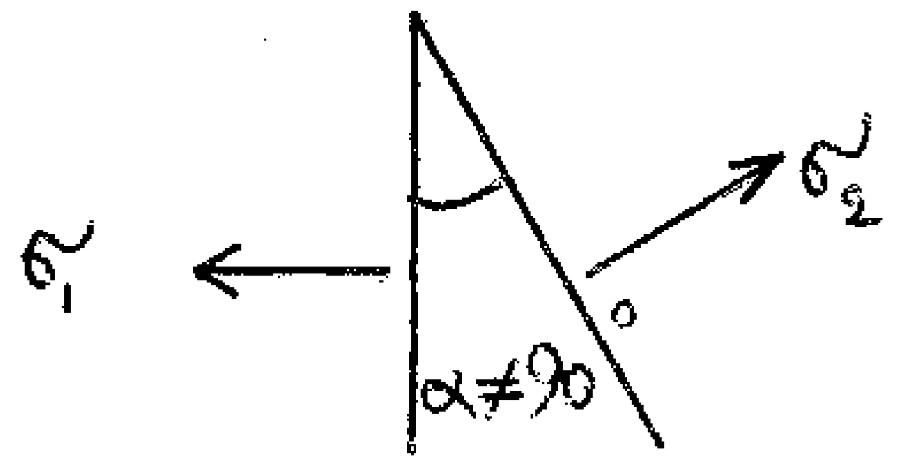



درحالت خاصی که دو تنش اصلی با هم برابر باشند بیضی لامه به دایره مور تبدیل می شود و دایره مور به نقطه تبدیل می شود دراین حالت امتداد های اصلی محسوب می شوند.




صفحات اصلی تنش باید بر هم عمود باشند در غیر این صورت باید تنش های اصلی یکسانی داشته باشند



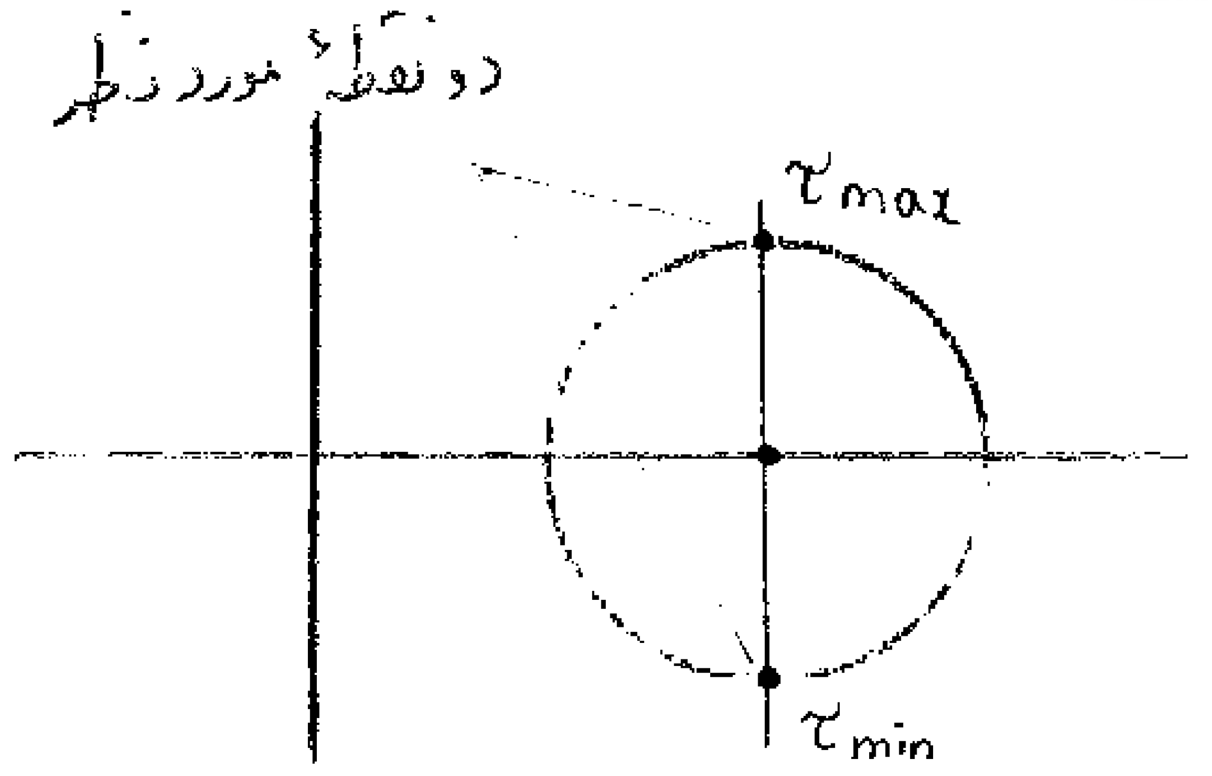



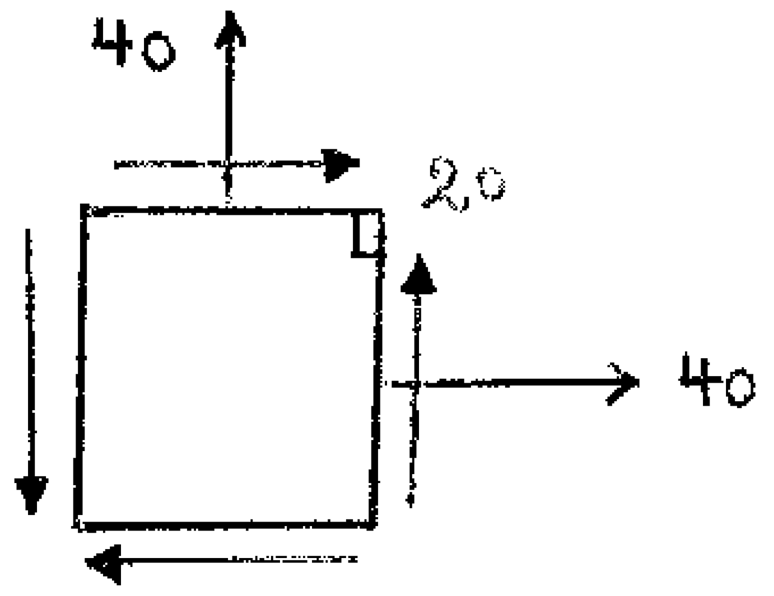

IF $\sigma_1 = \sigma_2$

تنظیم: محمد حاج صادقی

استاد: دکتر عرفانی

دو صفحه متعامد که تنش های قائم یکسان داشته باشند صفحات برش حداکثر را مشخص می کنند.

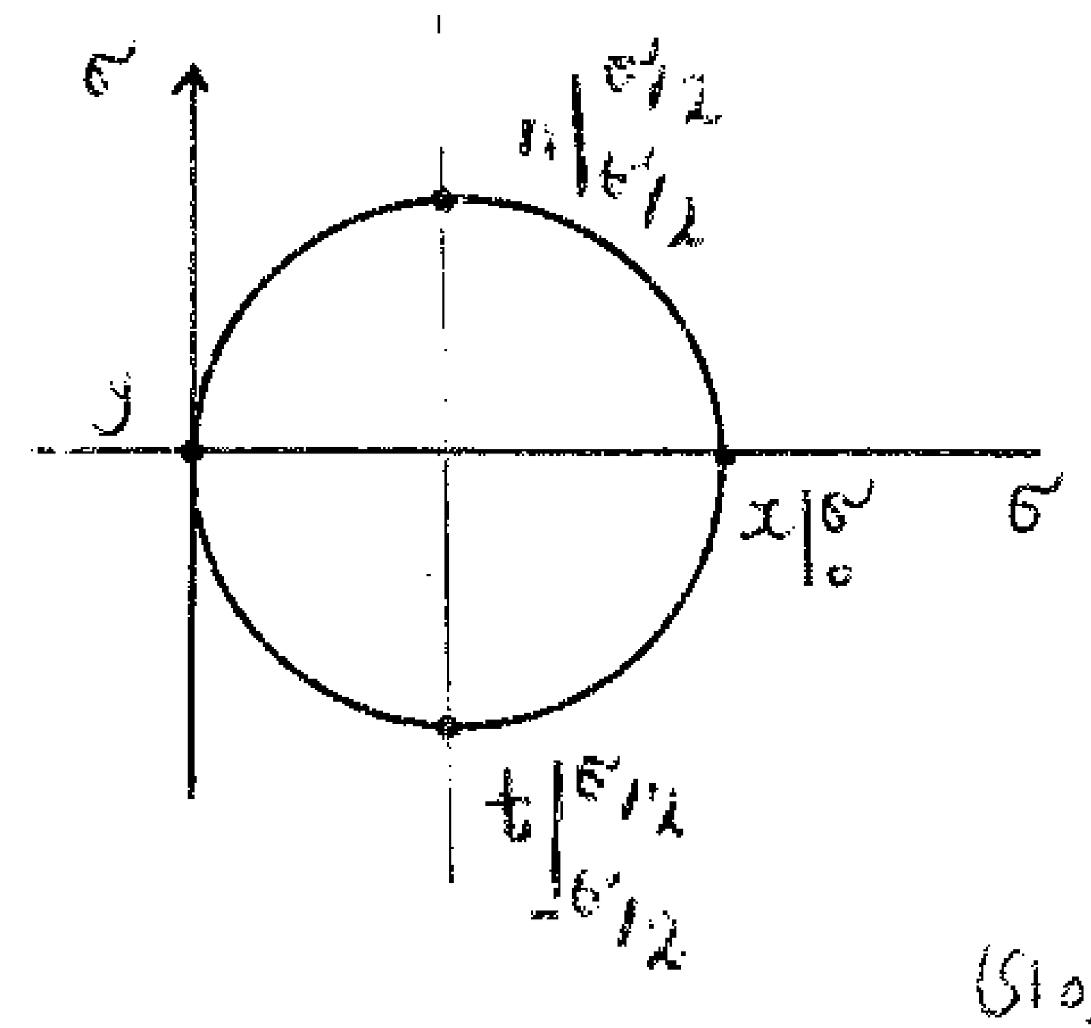


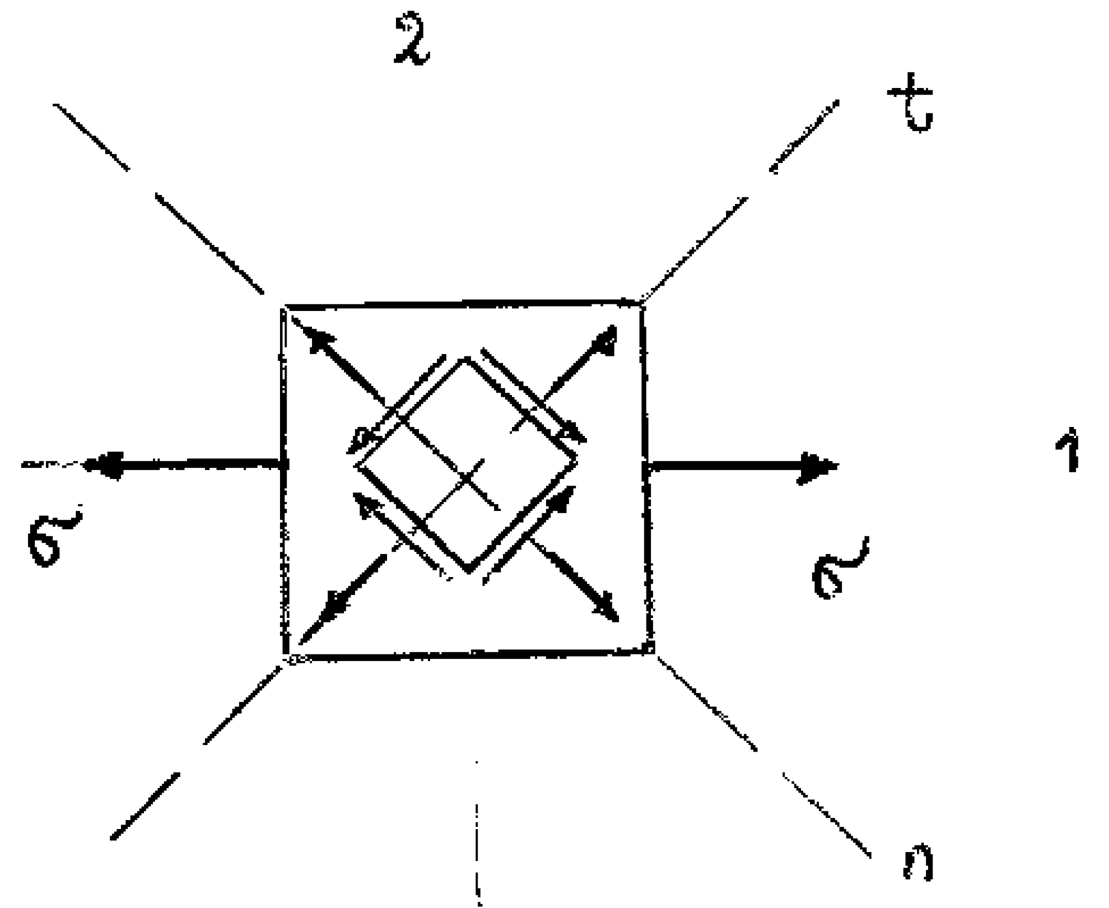




$\tau_{max}=20$ ، $\sigma_{max}=40+20=60$

$\sigma_{min}=40-20=20$

تنش تک محوری :



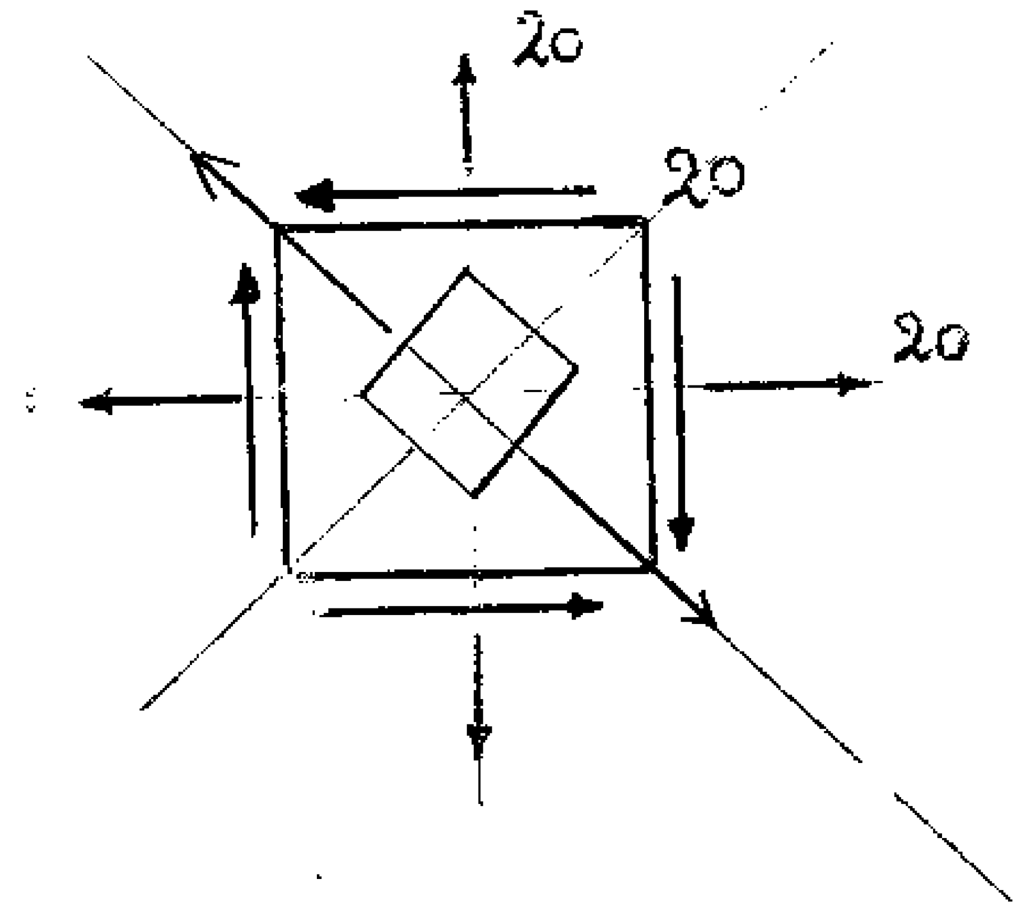



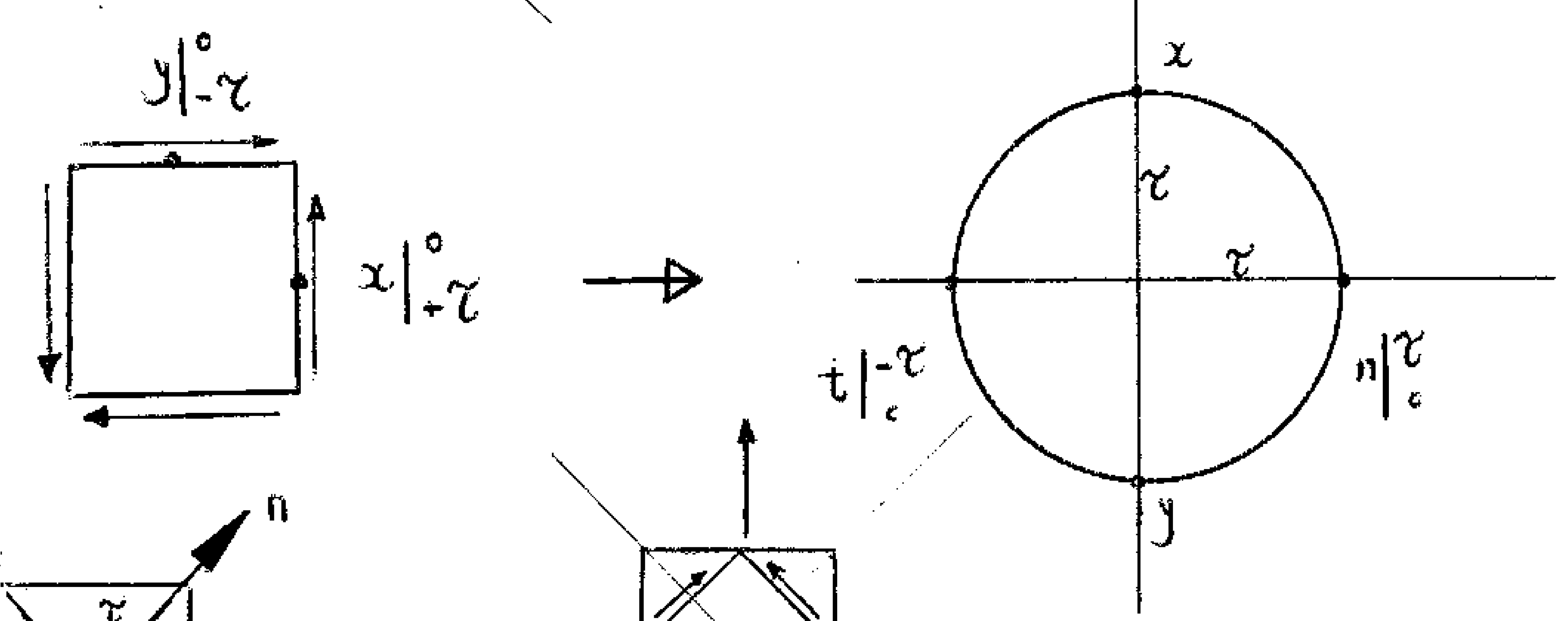

بسیار مهم : تمامی تنش های روی مربع داخلی اعم از برشی و قائم دارای اندازه ای برابر با $\frac{\sigma}{2}$ می باشند.

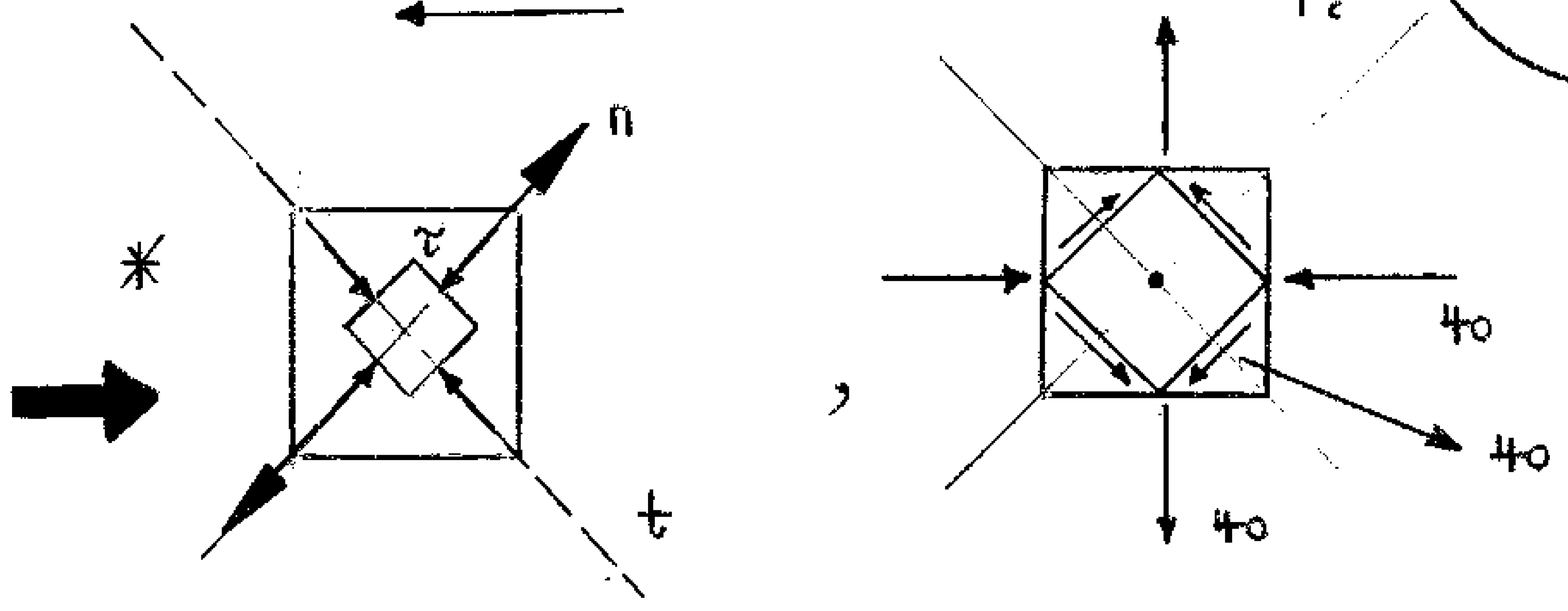
⟸ در دایره مور نقطه x برای رسیدن به n، 90° در جهت مثلثاتی چرخیده است، در نتیجه در واقعیت و در روی شکل، محور 1 (همان x) به اندازه 45° و در خلاف جهت مثلثاتی چرخیده است و به محور n تبدیل شده است.

تنش های برشی بر روی صفحاتی که نرمال n دارند مثبت می باشند.

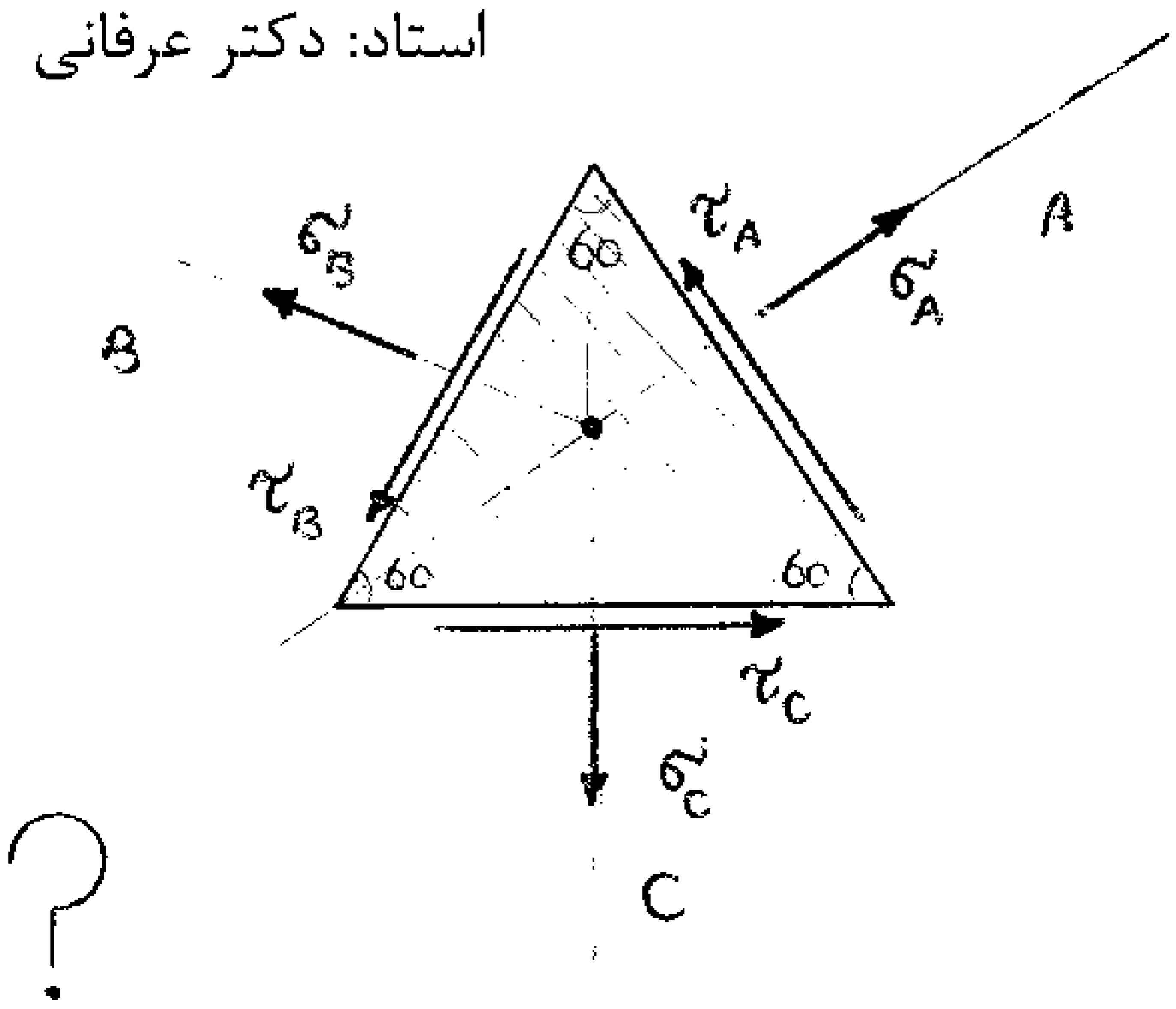
مثال :

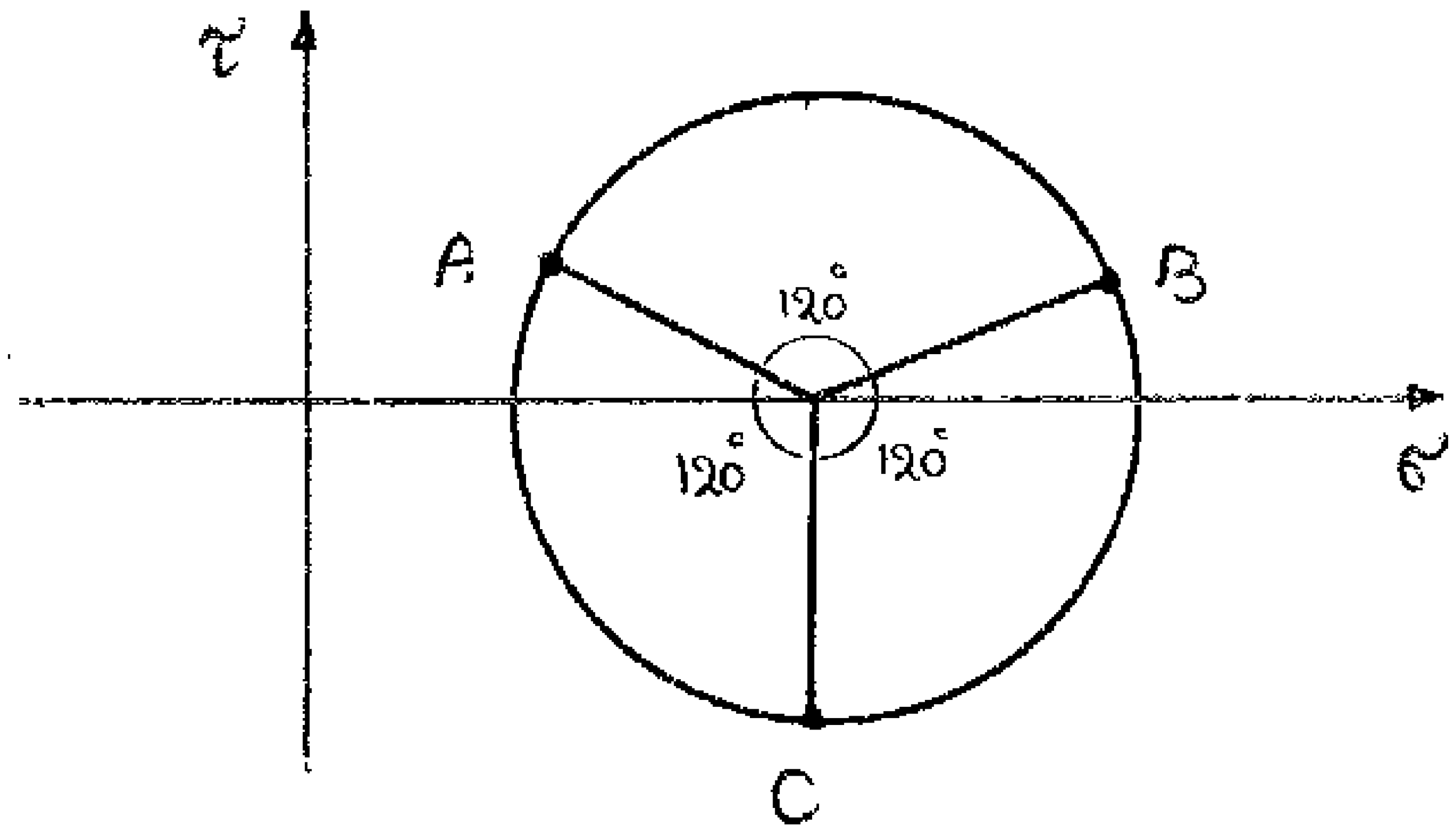


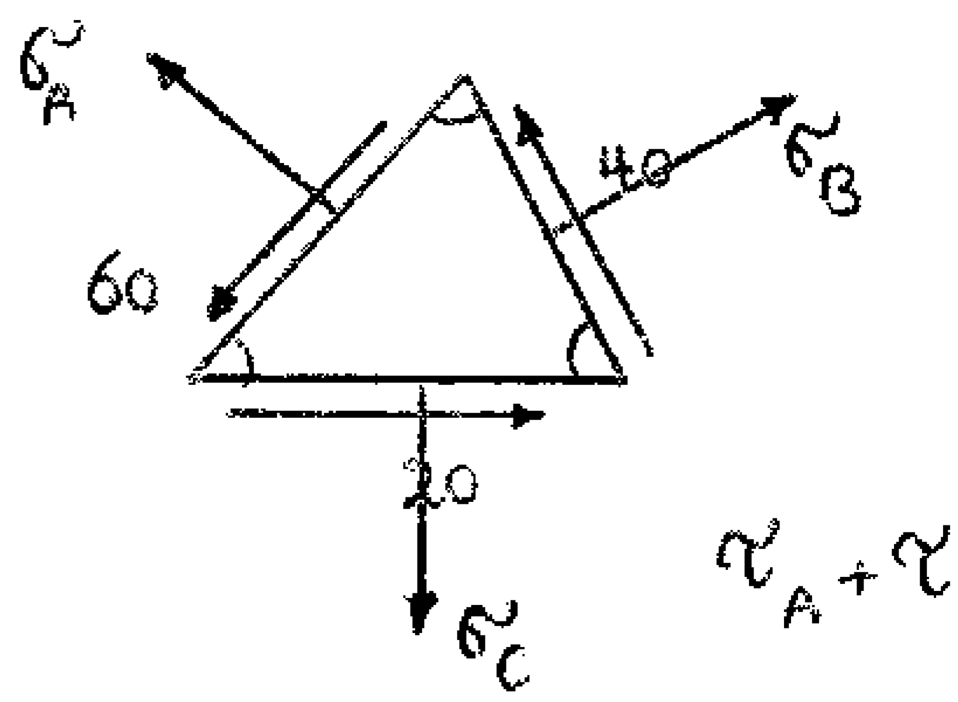
استاد: دکتر عرفانی




$$\boxed{\tau_A+\tau_B+\tau_C=0}$$

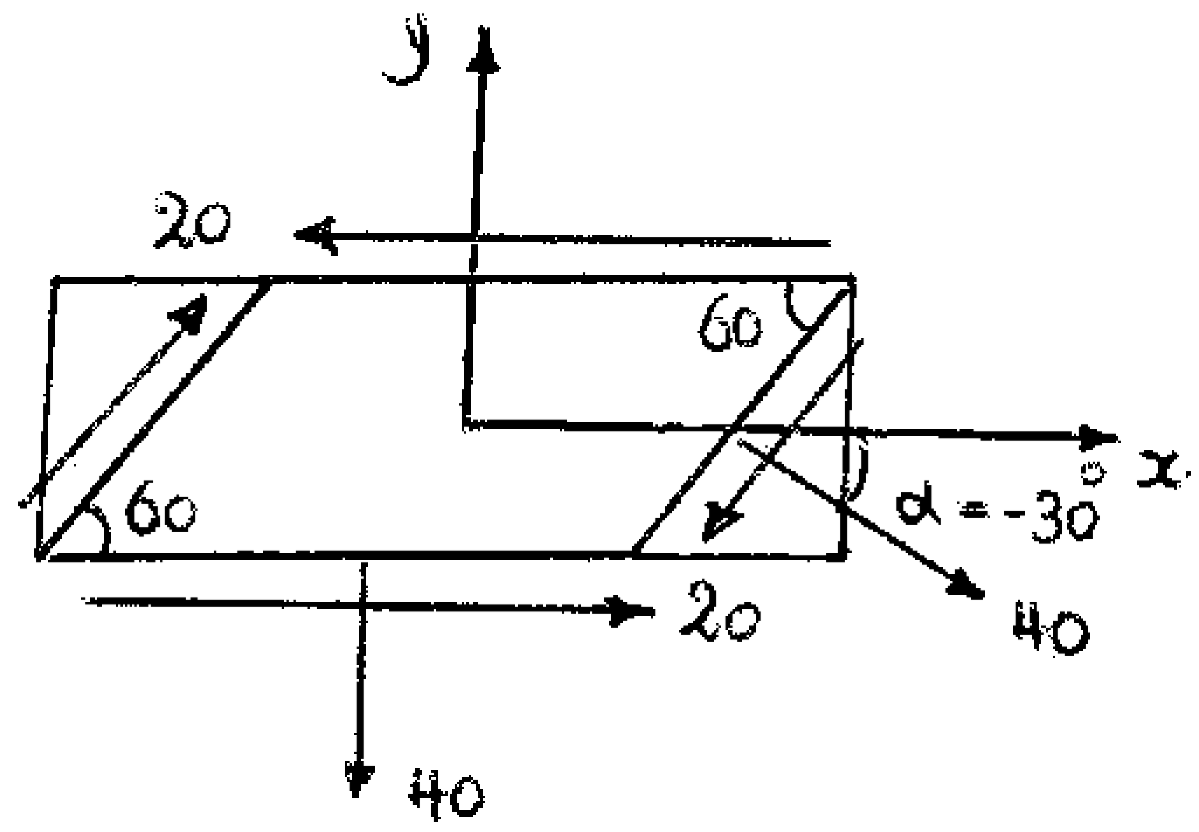
$$\frac{\sigma_A+\sigma_B+\sigma_C}{3}=\sigma_0$$




$$* \quad \sqrt{\tau_A^2+(\sigma_A-\sigma_0)^2}=\sqrt{\tau_B^2+(\sigma_B-\sigma_0)^2}=\sqrt{\tau_C^2+(\sigma_C-\sigma_0)^2}$$

$\tau_A+\tau_B+\tau_C=0$ — تعادل دارد —

مثال : مطلوب است تنش های اصلی و تنش های برشی حداکثر ؟




$$\sigma_n=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\alpha+\tau_{xy}\sin 2\alpha=\frac{\sigma_x+40}{2}+\frac{\sigma_x-40}{2}\cos 60+(-20)\sin(-60)=+40$$

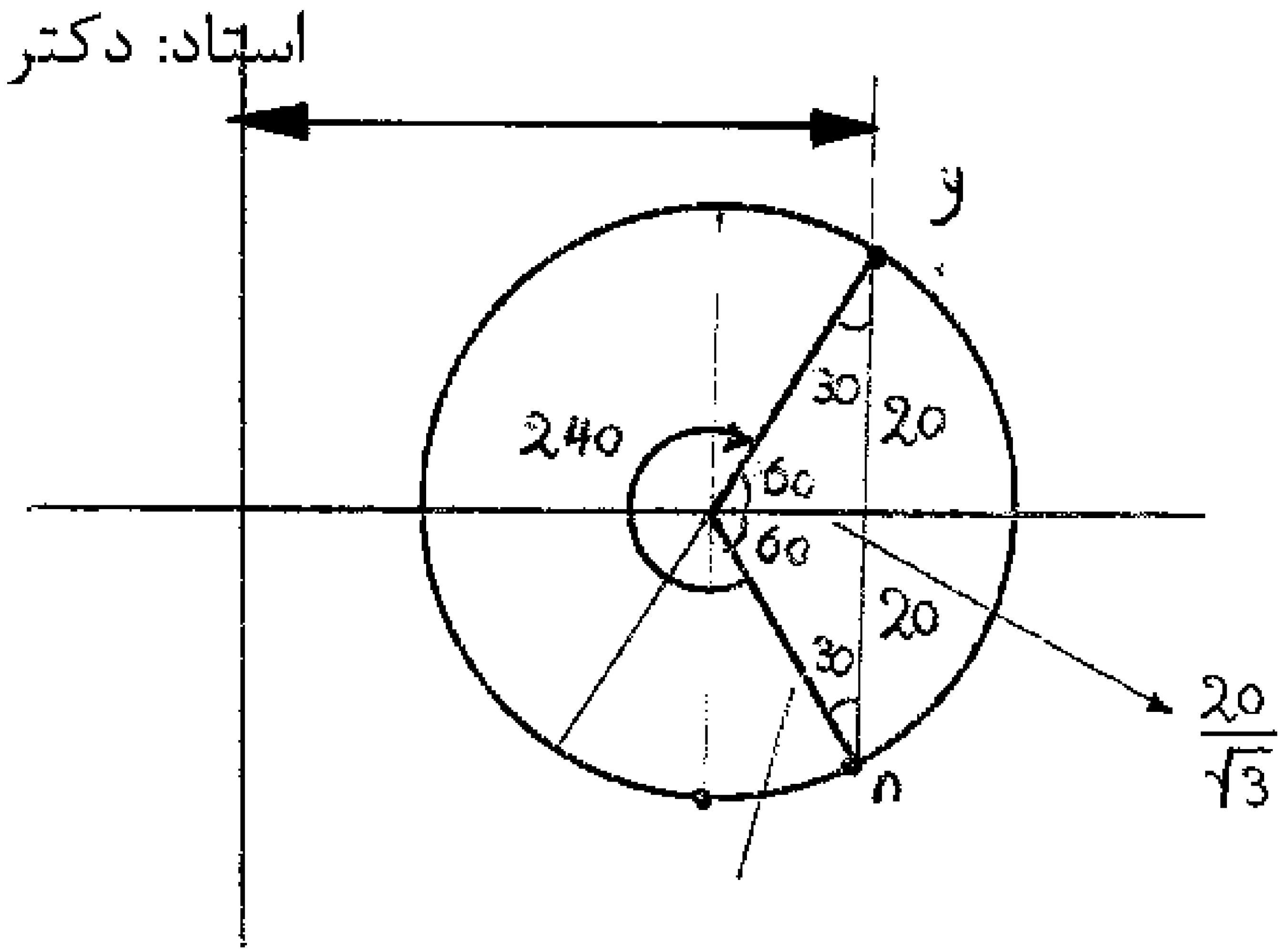
$$\tau_{nt}=0 \quad -\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\alpha+\tau_{xy}\cos 2\alpha=\frac{\sigma_x-40}{2}\sin(-60)+(-20)\cos(-60)$$

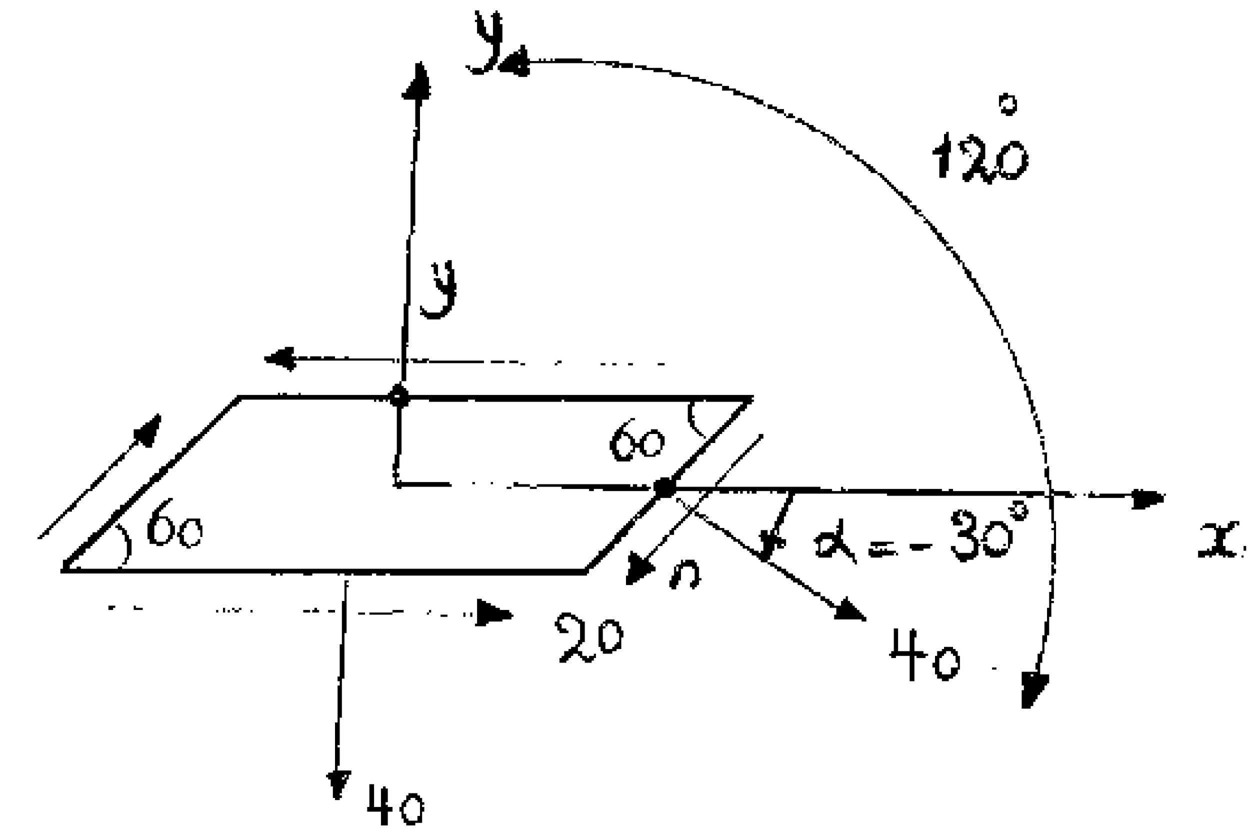
$$\frac{\sqrt{3}}{2}(\sigma_x-40)=20 \longrightarrow \sigma_x=40\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

بعد از بدست آمدن $\sigma_x$ همه چیز بدست می آید.

تنظیم: محمد حاج صادقی

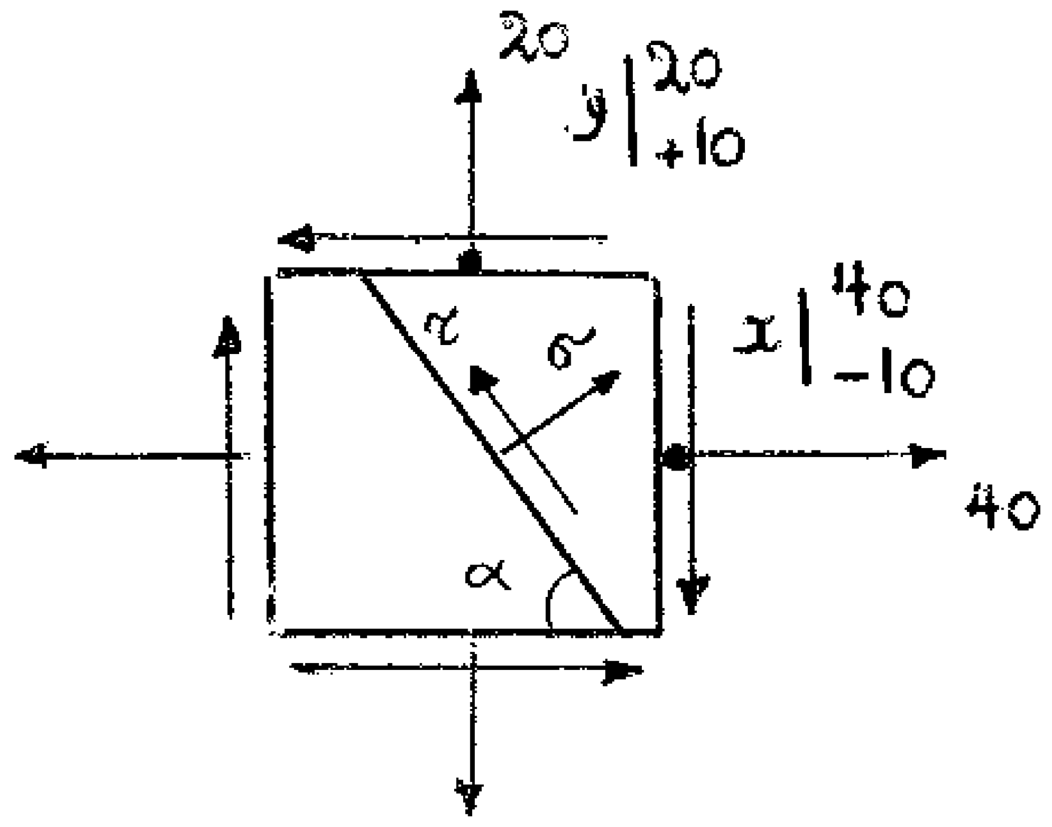
استاد: دکتر عرفانی

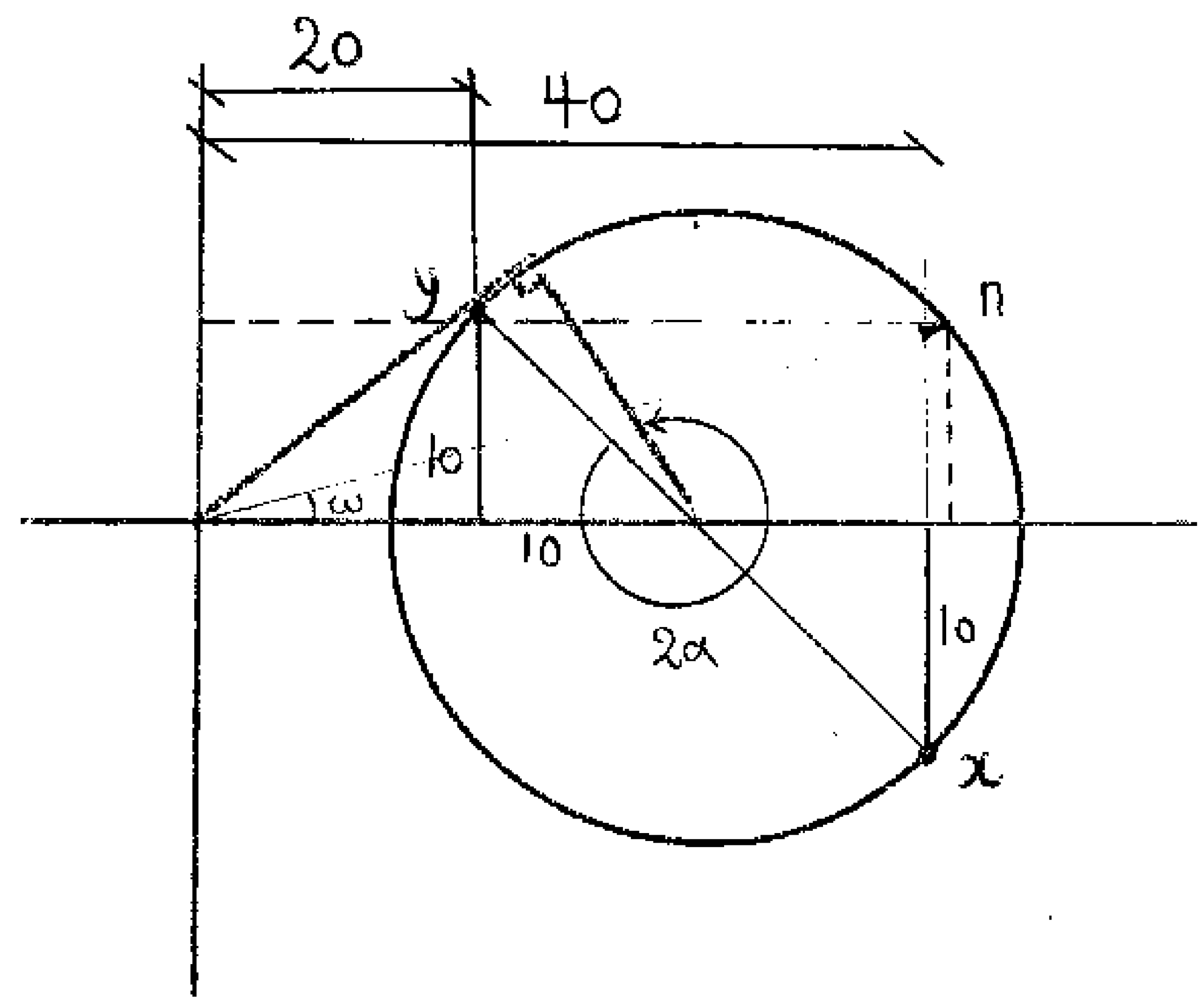



$$\cos 30 = \frac{20}{R} \longrightarrow R = \frac{40}{\sqrt{3}}$$

$$\tau_{max} = R = \frac{40}{\sqrt{3}} \quad , \quad \sigma_{max} = 40 - \frac{20}{\sqrt{3}} + \frac{40}{\sqrt{3}} \quad , \quad \sigma_{min} = 40 - \frac{20}{\sqrt{3}} - \frac{40}{\sqrt{3}}$$




$$\alpha = ? \longrightarrow \left|\frac{\tau}{\sigma}\right| = max$$

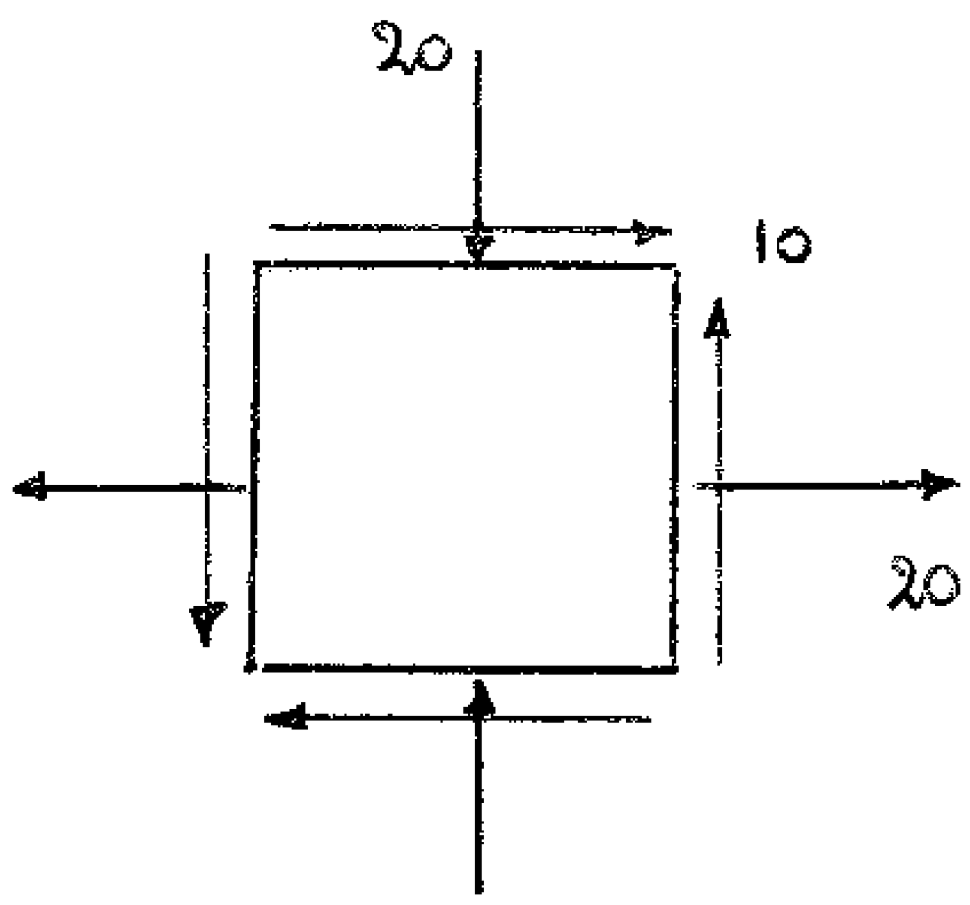
فرمول τ و σ را نوشته، مشتق گرفته و بعد ...

$$\boxed{R = \sqrt{10^2 + 10^2} = 10\sqrt{2}}$$

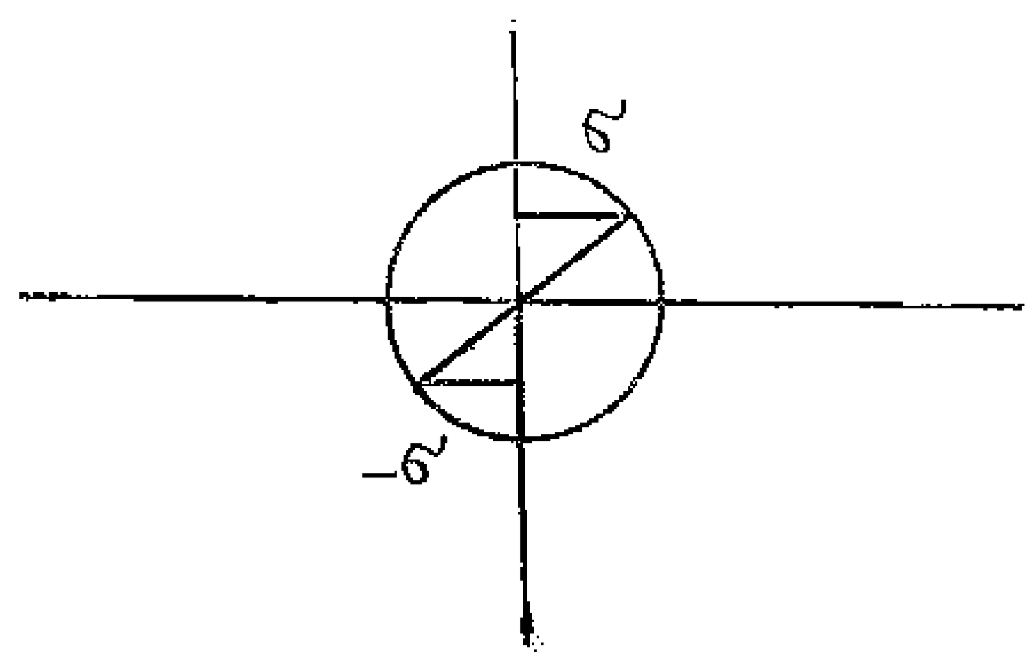
$$* \ \omega_{max} = \mathrm{Arc\,Sin}\,\frac{10\sqrt{2}}{30} = \frac{\sqrt{2}}{3} = 28.12^\circ$$

$$\boxed{\underbrace{\left|\frac{\tau}{\sigma}\right|}_{max} \leftarrow \underbrace{\tan\omega}_{max}}$$

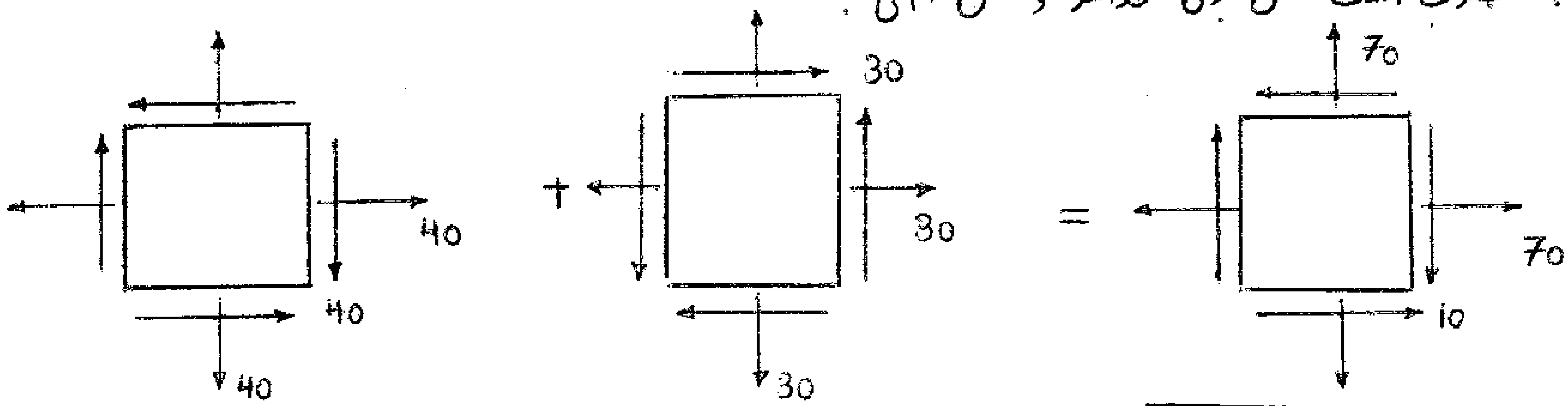
آیا این المان می‌تواند مربوط به یک نقطه در وضعیت برش خالص باشد.




در دو صفحه متعامد در برش خالص مجموع تنش‌های قائم صفر است



اگر در یک نقطه وضعیت دو بارگذاری مطابق المان های نشان داده شده باشند در حالتی که مجموع دو بارگذاری را داشته باشیم ؛ مطلوب است تنش برشی حداکثر و تنش اصلی .



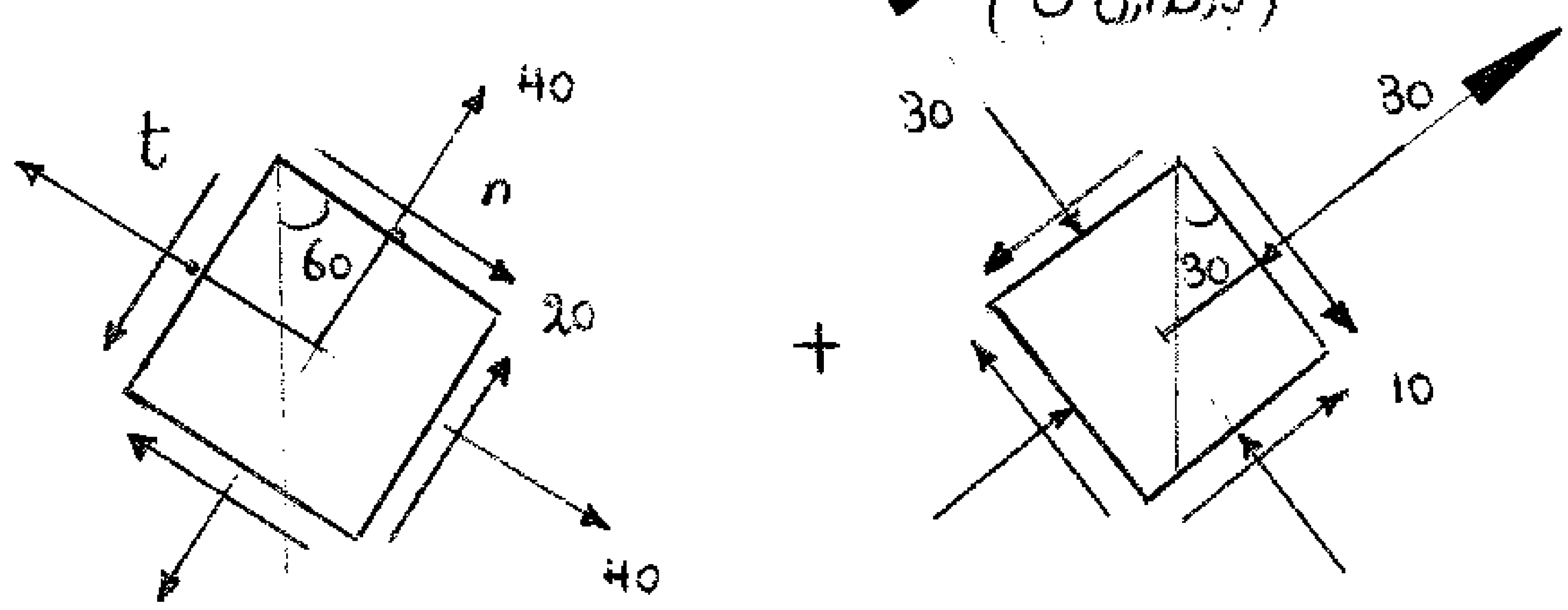

$$\tau_{max} = 40 \quad + \quad \tau_{max} = 30 \quad \neq$$

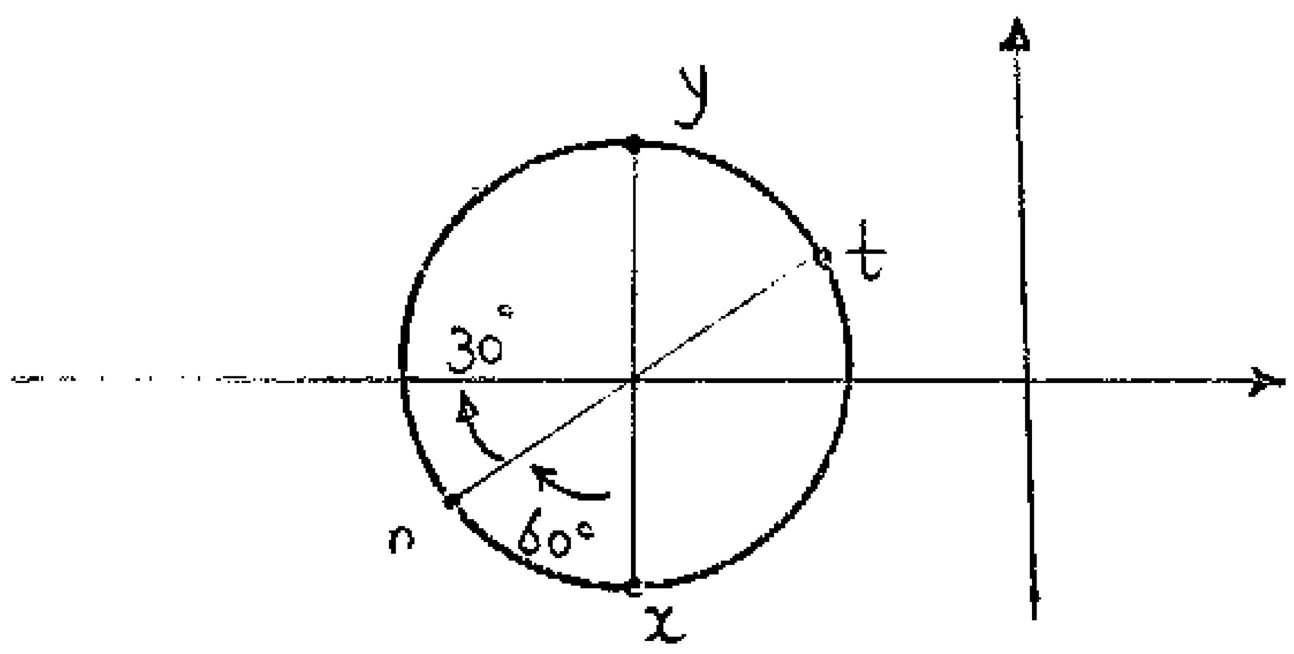
$\tau_{max} = 10$

$\sigma_{max} = 80$

$\sigma_{min} = 60$

( بارگذاری الف ) ( بارگذاری ب )

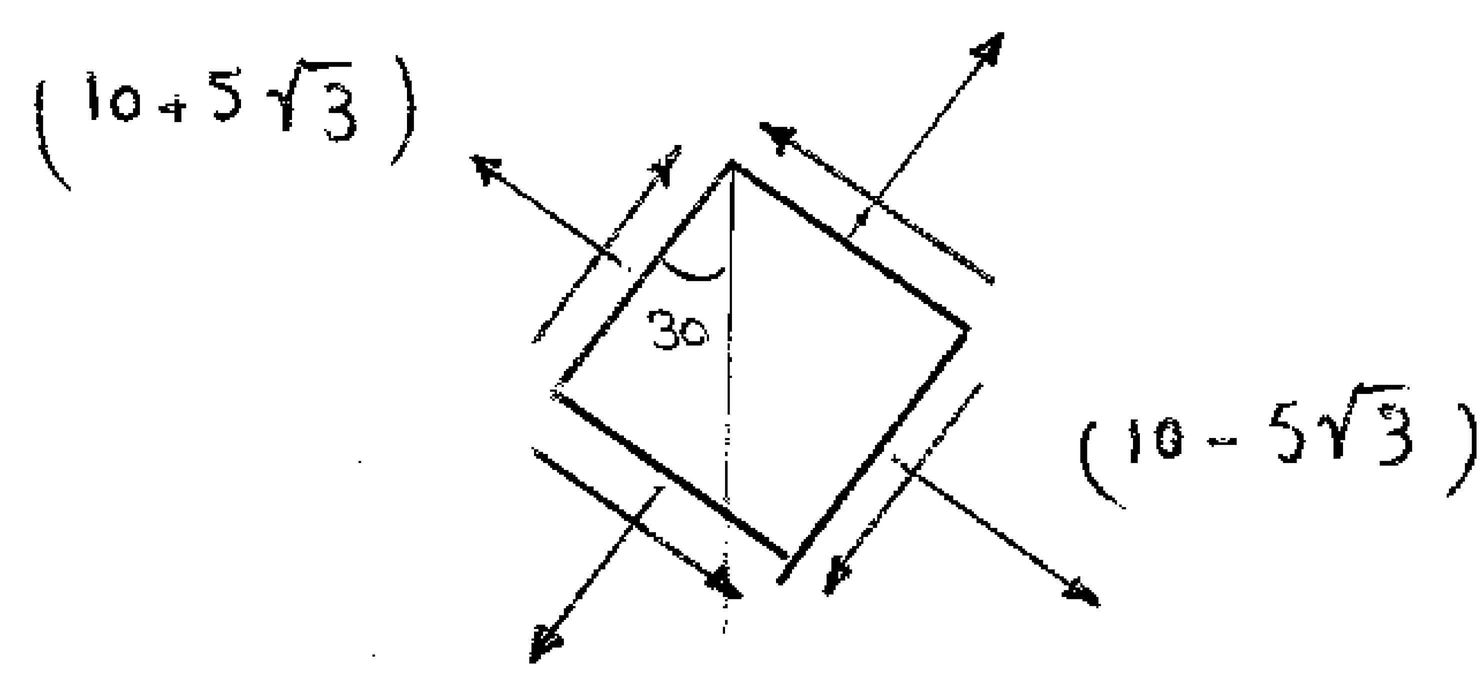



* صفحات تا موازی نباشند قابل جمع شدن نمی باشند *

$$n\left|\begin{array}{l} -30-5\sqrt{3} \\ -5 \end{array}\right.$$

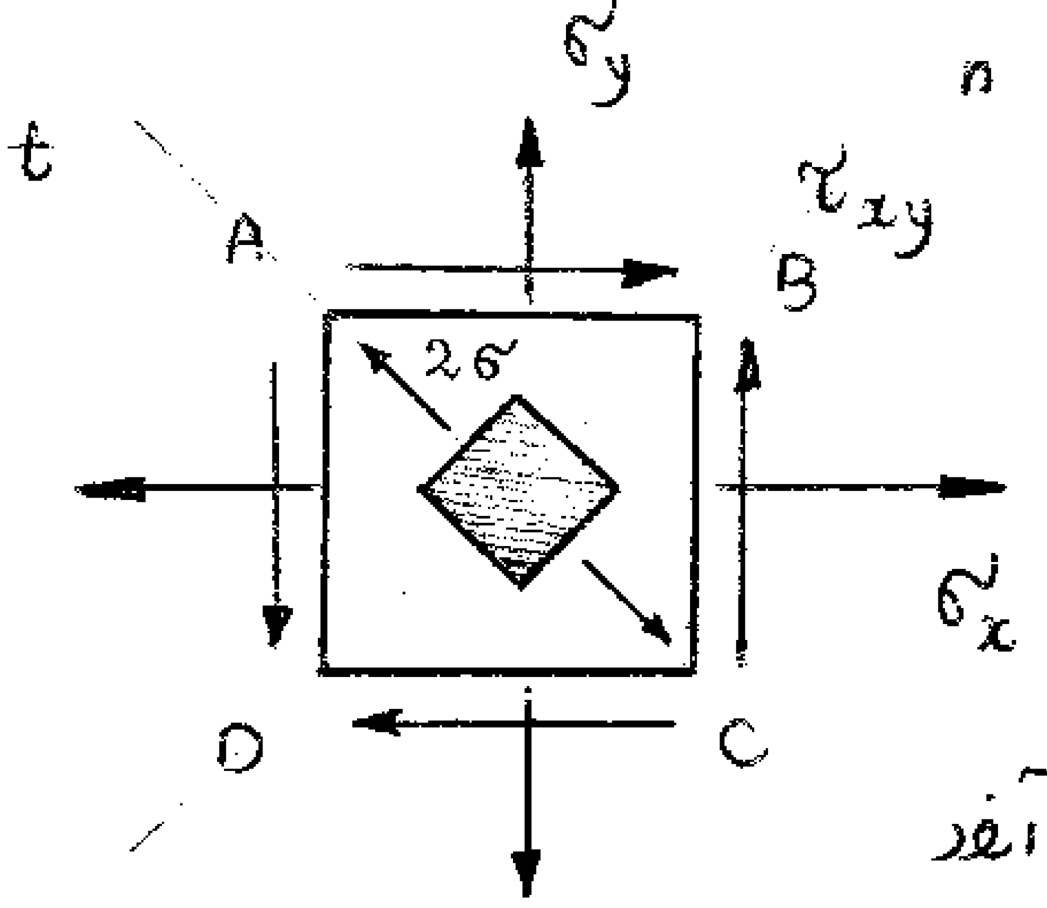
$$t\left|\begin{array}{l} -30+5\sqrt{3} \\ +5 \end{array}\right.$$



تنظیم: محمد حاج صادقی

استاد: دکتر عرفانی

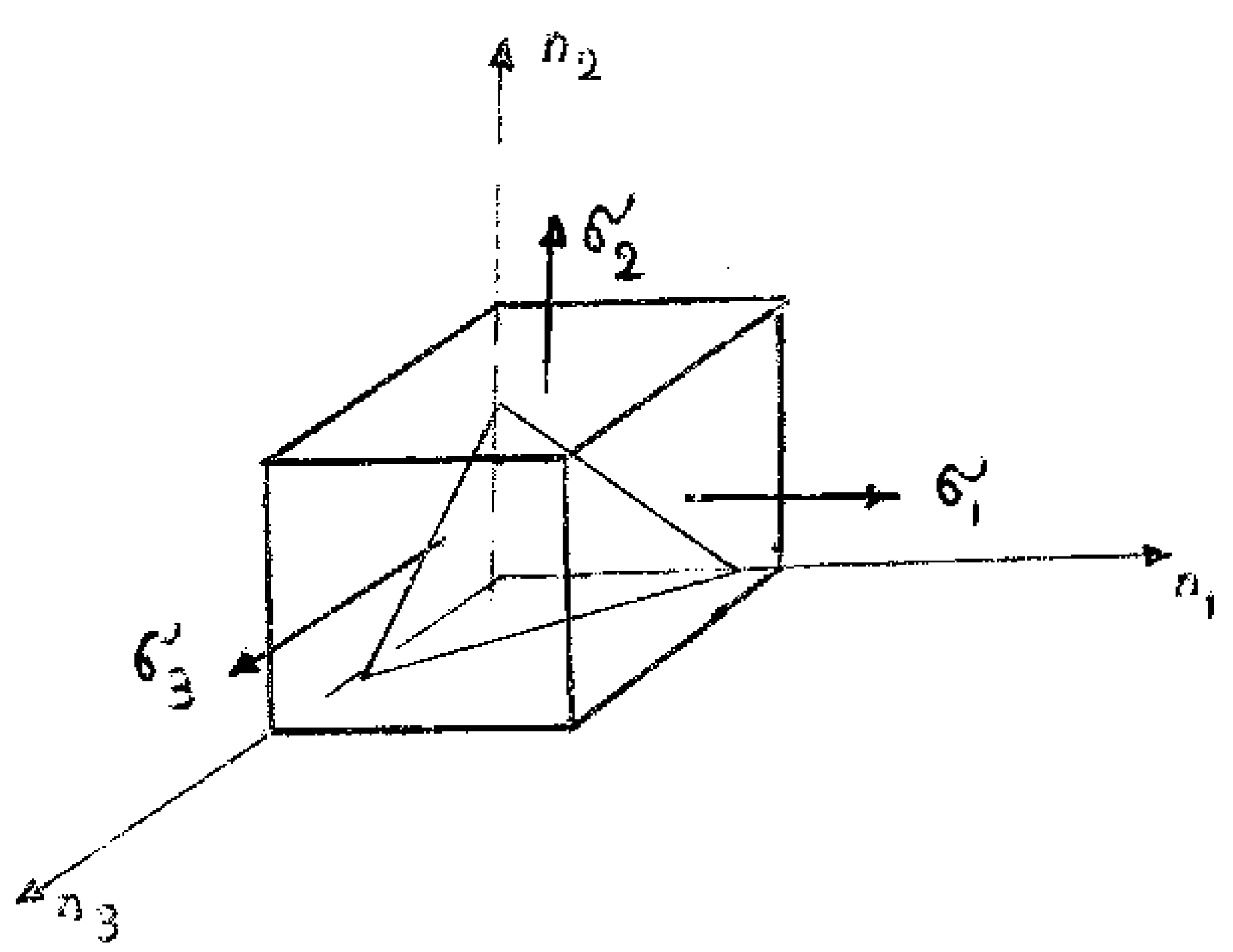
اگر در این المان امتداد قطر AC سطح آزاد تنش را مشخص کند چه رابطه ای بین مولفه‌های تنش های نشان داده شده باید وجود داشته باشد.




تنش در سطح آزاد $\begin{vmatrix} \sigma_n = 0 \\ \tau_{nt} = 0 \end{vmatrix}$ $\longrightarrow \sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = \sigma$

---

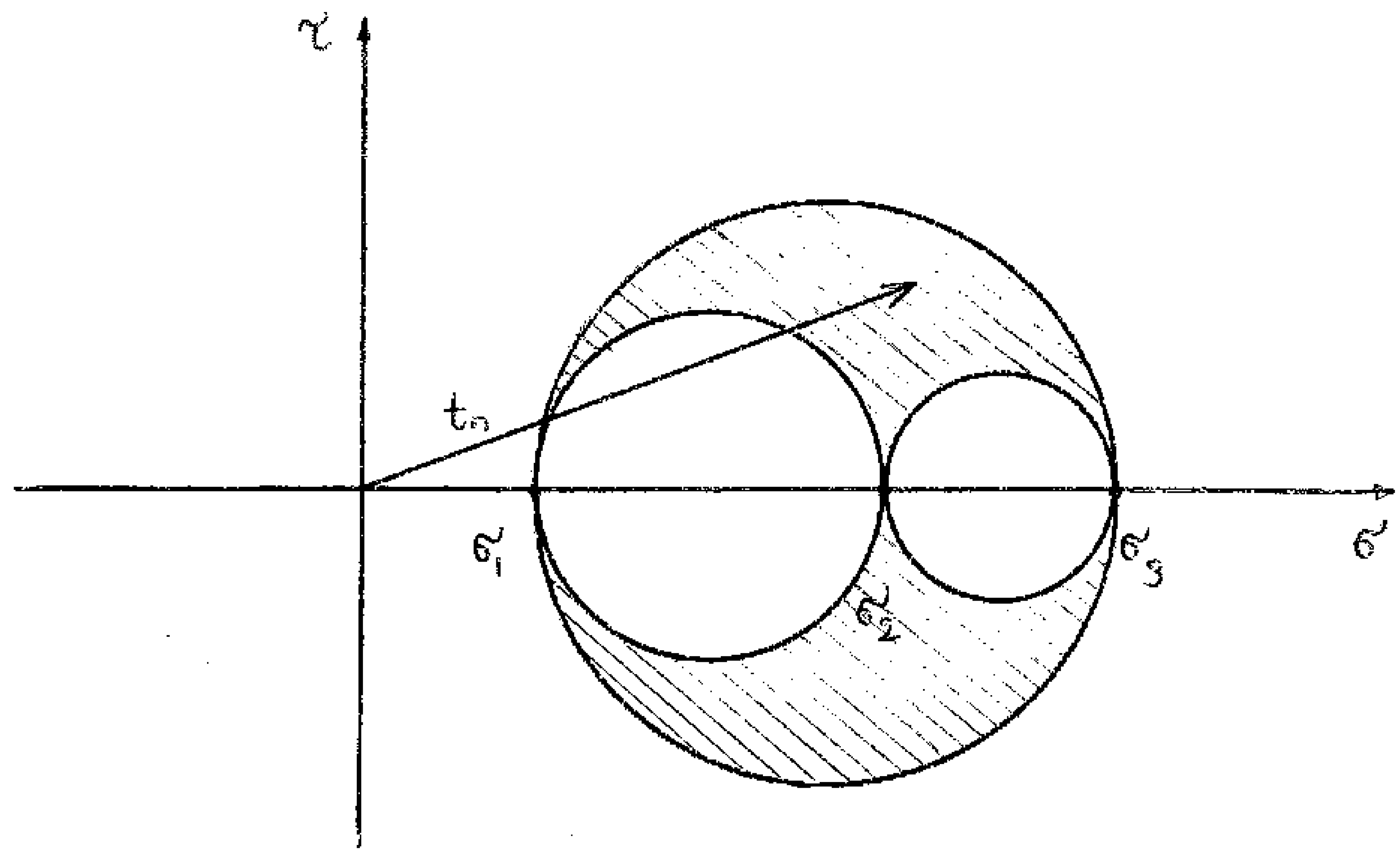
✳ سه دایره مور تنش: ✳
( دایره های مور تنش )




✳ بیضی گون ⟵ سه دایره

✳

✳ بیضی ⟵ دایره




در حالت کلی که صفحه مورد نظر به موازات هیچ کدام از محورهای اصلی نباشد انتهای بردار تنش در محدوده هاشور خورده بین سه دایره واقع خواهد شد.

$R_1 = \left| \dfrac{\sigma_3 - \sigma_2}{2} \right| = \tau_{max}$ صفحاتی است که با محور $n_1$ موازی اند

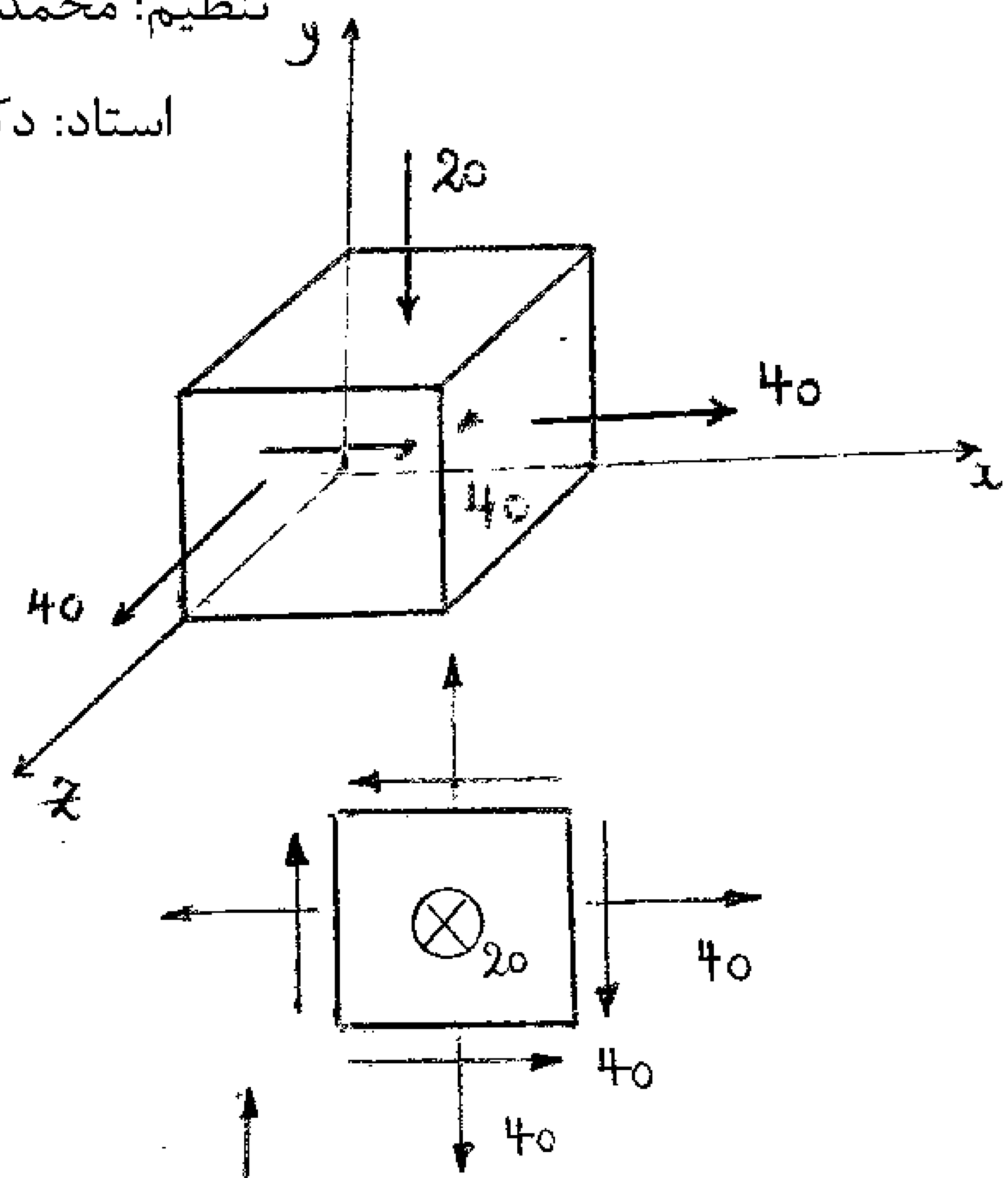
$R_2 = \left| \dfrac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right| = \tau_{max}$ صفحاتی است که با محور $n_2$ موازی اند

$\tau_{max_{\text{مطلق}}} = \dfrac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}$

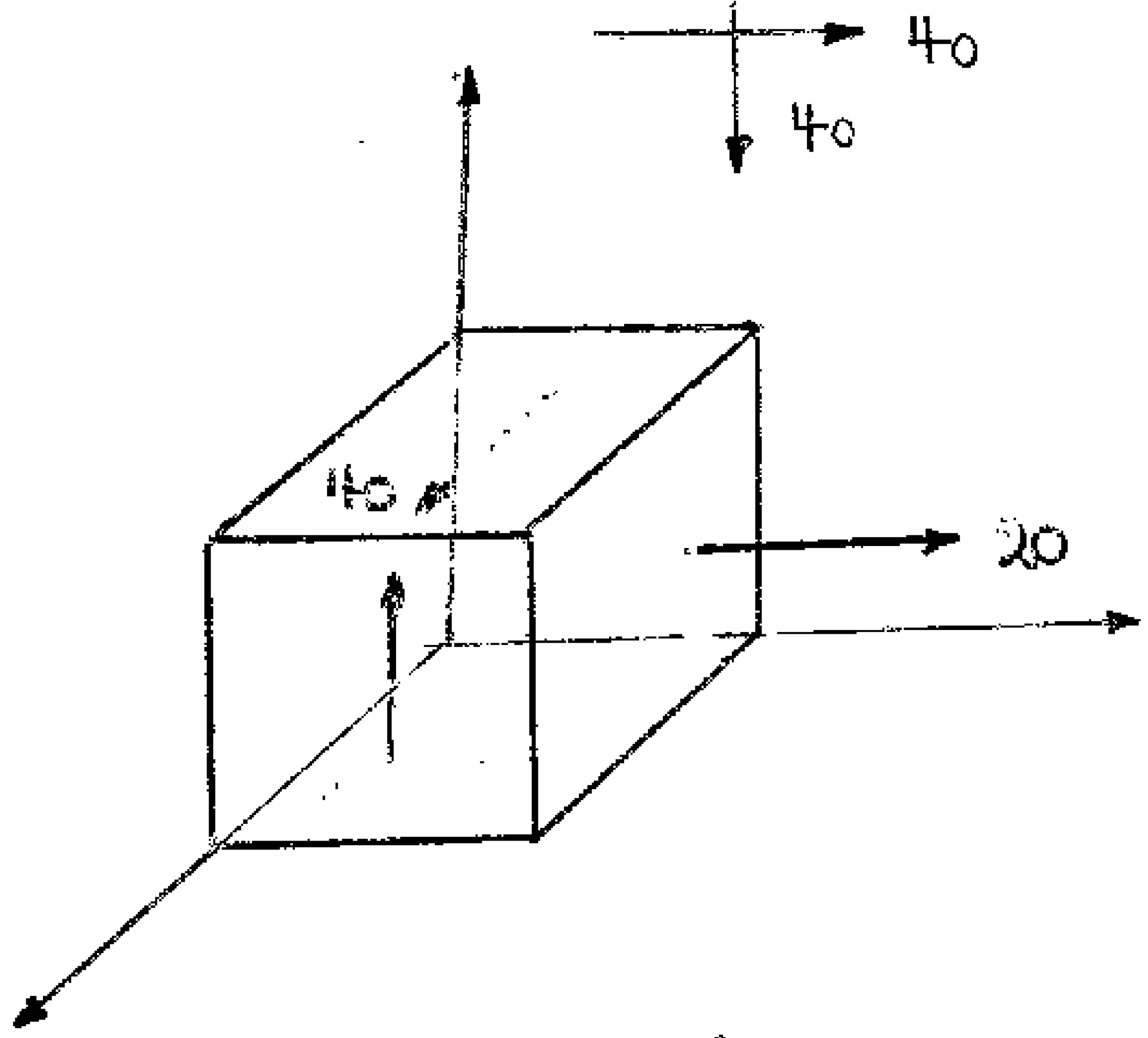
$R_3 = \left| \dfrac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right| = \tau_{max}$ صفحاتی است که با محور $n_3$ موازی اند

تنظیم: محمد حاج صادقی
استاد: دکتر عرفانی

مطلوب است تنش برش حداکثر :



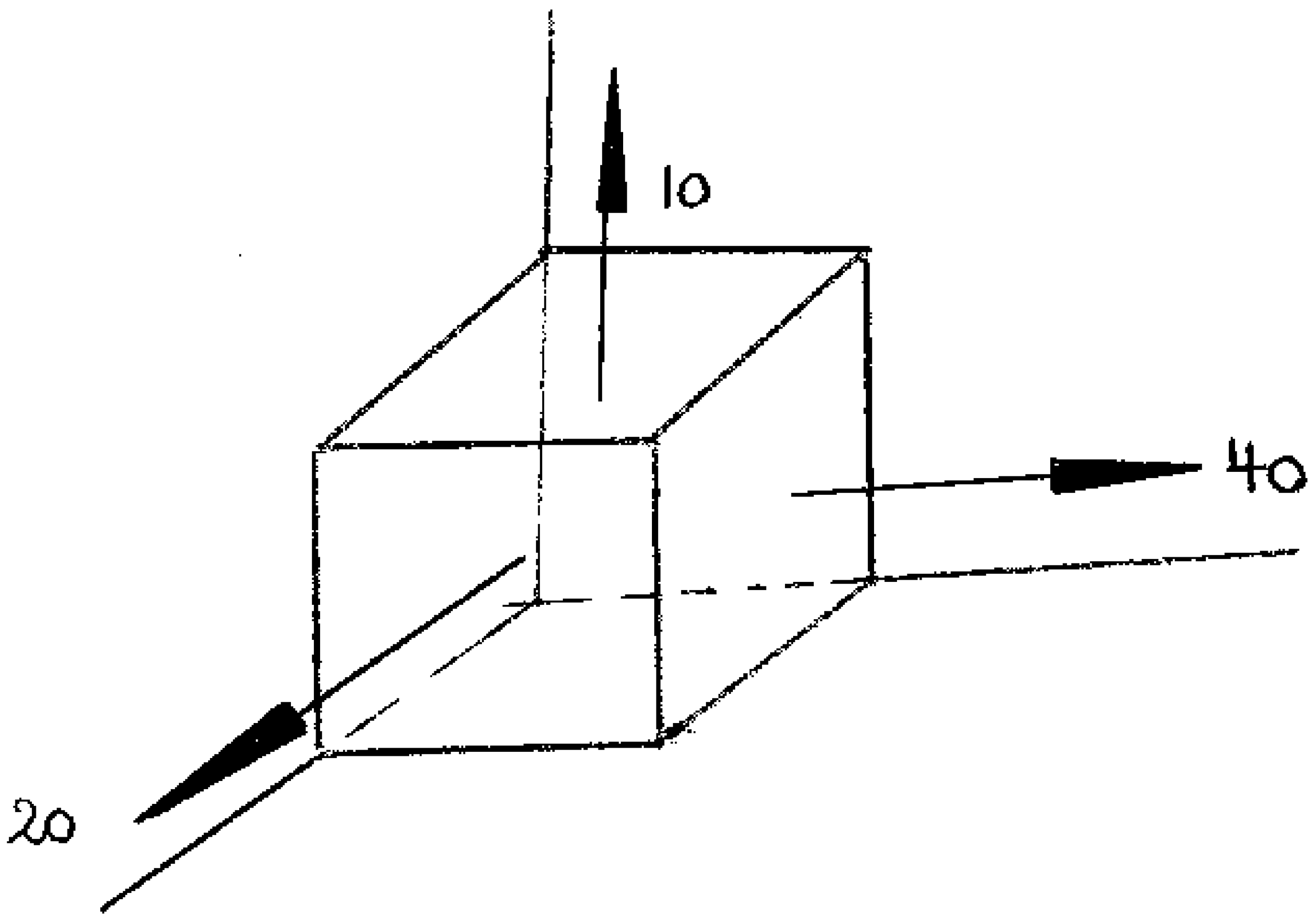

$$\left|\begin{array}{l} -20 : min \\ +80 : max \\ 0 \end{array}\right. \longrightarrow \tau_{max} = \frac{80-(-20)}{2} = 50$$



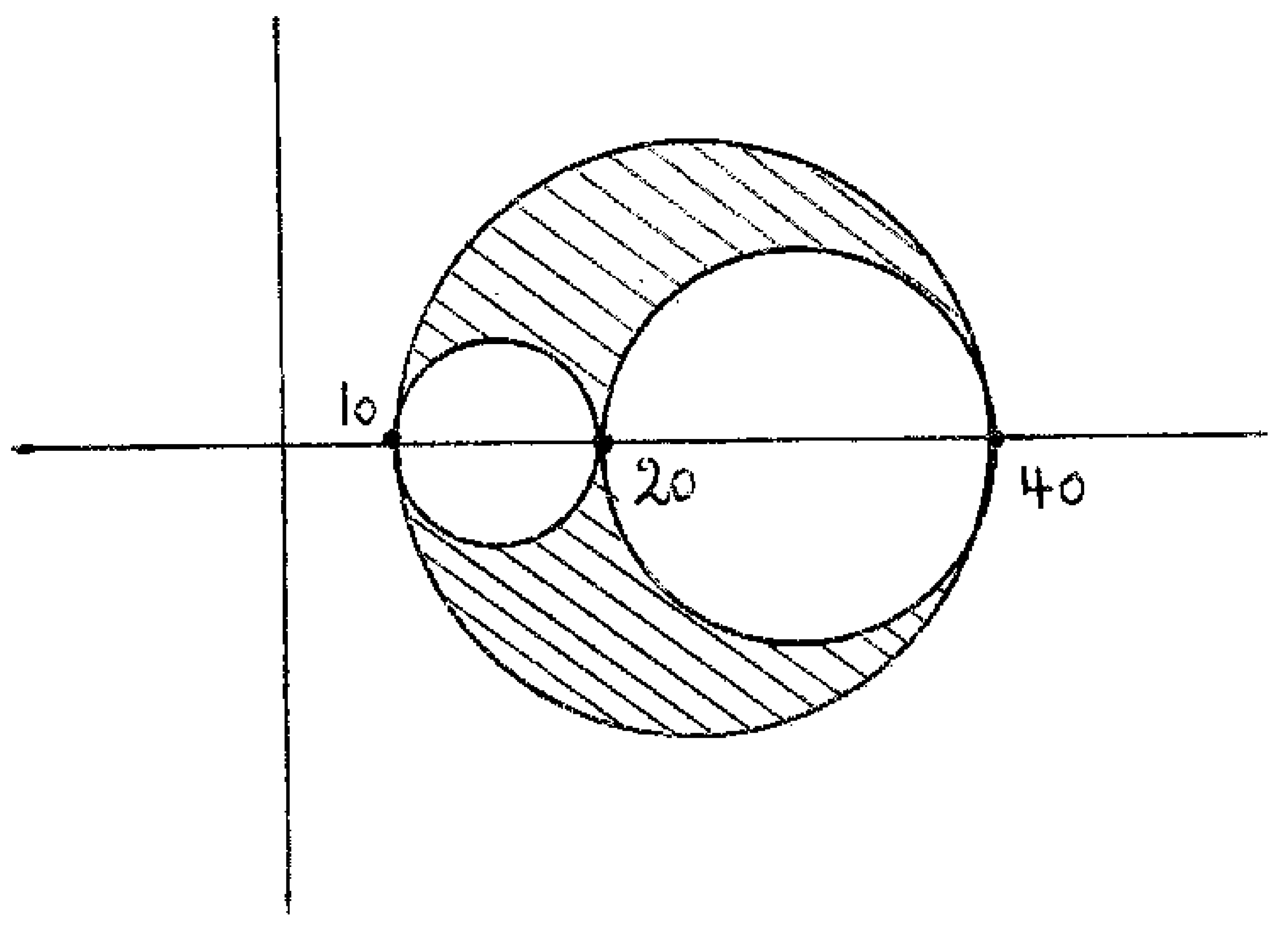

$$\left|\begin{array}{l} +20 \\ -40 : min \\ +40 : max \end{array}\right. \qquad \tau_{max} = \frac{40-(-40)}{2} = 40$$

اگر در یک نقطه المان تنش مانند شکل مقابل باشد آیا می توان در این نقطه صفحه ای پیدا کرد که مؤلفه های تنش به شرح زیر باشد :

باید در منطقه هاشور خورده قرار گیرد




$$n\left|\begin{array}{l} \sigma = 35 \\ \tau = 5 \end{array}\right.$$

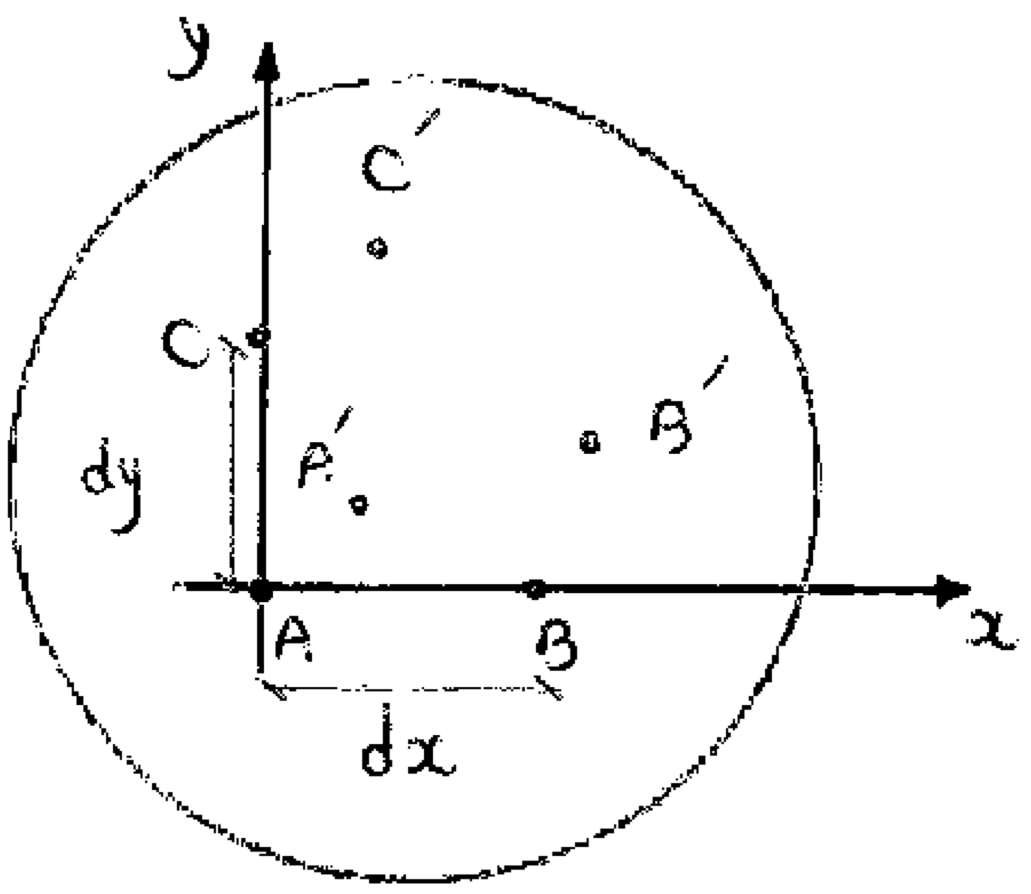


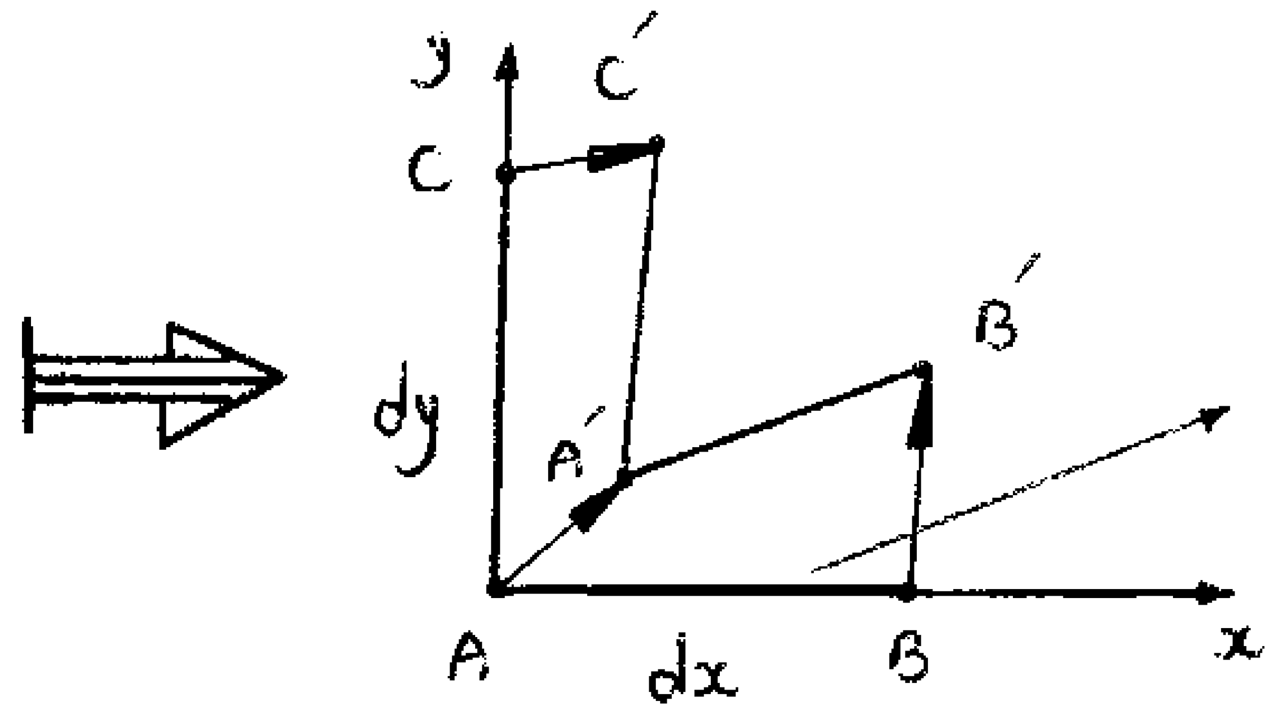
تنظیم: محمد حاج صادقی

استاد: دکتر عرفانی

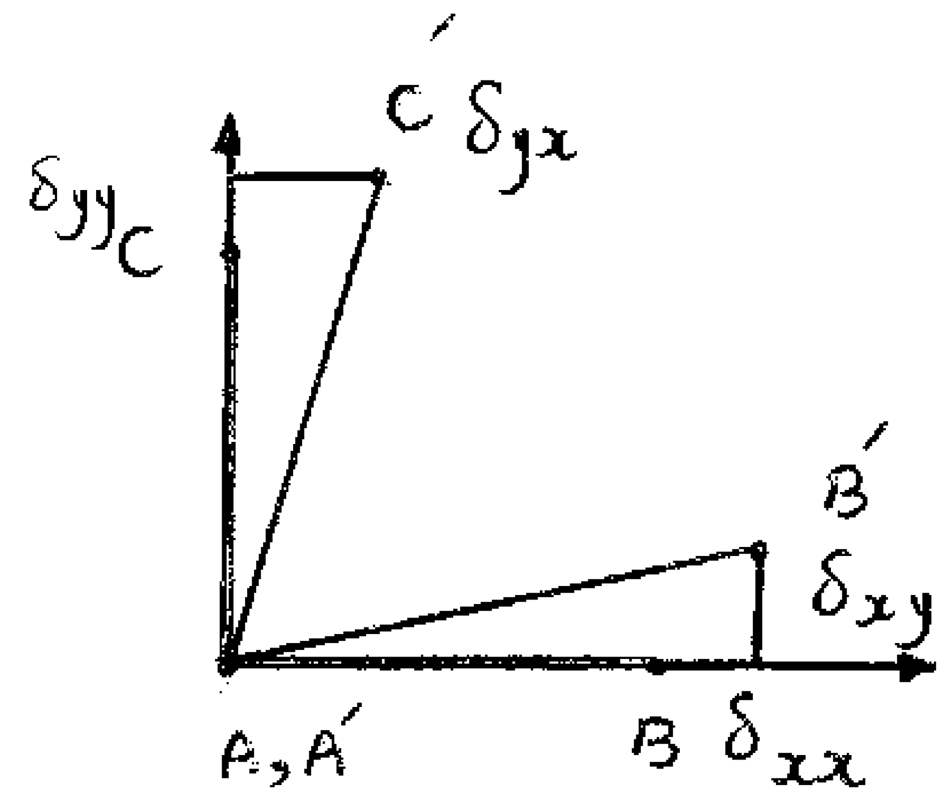
کرنش :

در مبحث کرنش فقط تغییر شکل ها مهمند نه تغییر مکان ها.




تار : المان




اندیس اول : به راستای المان یا تار

اندیس دوم : به راستای حرکت

مثبت بودن

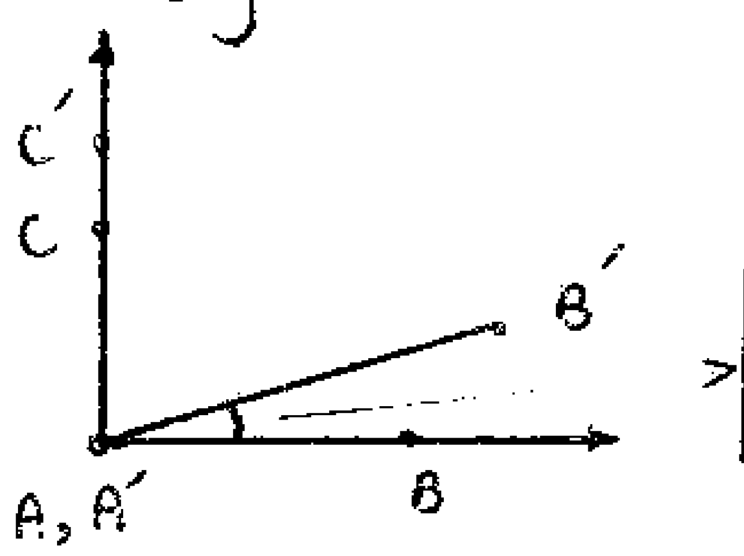
$\varepsilon_{xx}$ = کرنش طولی به راستای $x$ = تغییر طول نسبی تار در امتداد $x$ = $\frac{\delta_{xx}}{dx}$

$\varepsilon_{yy}$ = کرنش طولی به راستای $y$ = تغییر طول نسبی تار در امتداد $y$ = $\frac{\delta_{yy}}{dy}$

کرنش برشی امتداد $x$ = تغییر زاویه تار امتداد $x$ = $\frac{\delta_{xy}}{dx}$

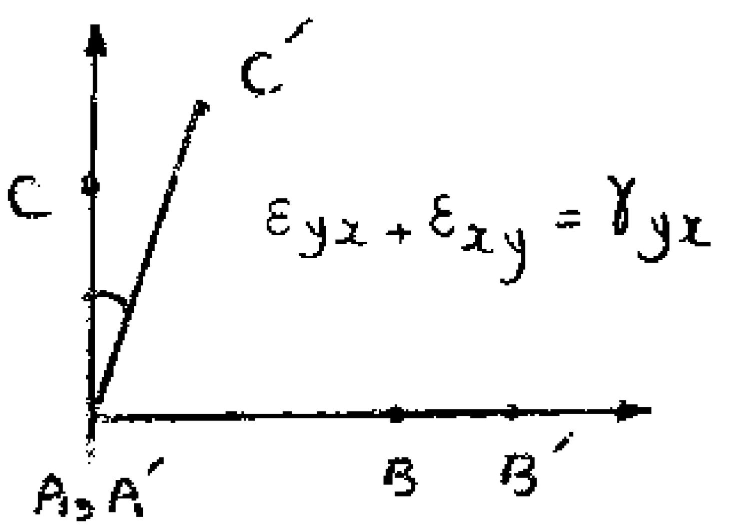
$\left( \tan\alpha = \frac{\delta_{xy}}{dx} = \varepsilon_{xy} \right) \longrightarrow \alpha = \varepsilon_{xy}$

$\varepsilon_{yx}$ = کرنش برشی امتداد $y$ = تغییر زاویه تار امتداد $y$ = $\frac{\delta_{yx}}{dy}$




$\boxed{\varepsilon_{xy}+\varepsilon_{yx}=\gamma_{xy}}$

$\gamma_{xy}=\gamma_{yx}=\varepsilon_{xy}+\varepsilon_{yx}$



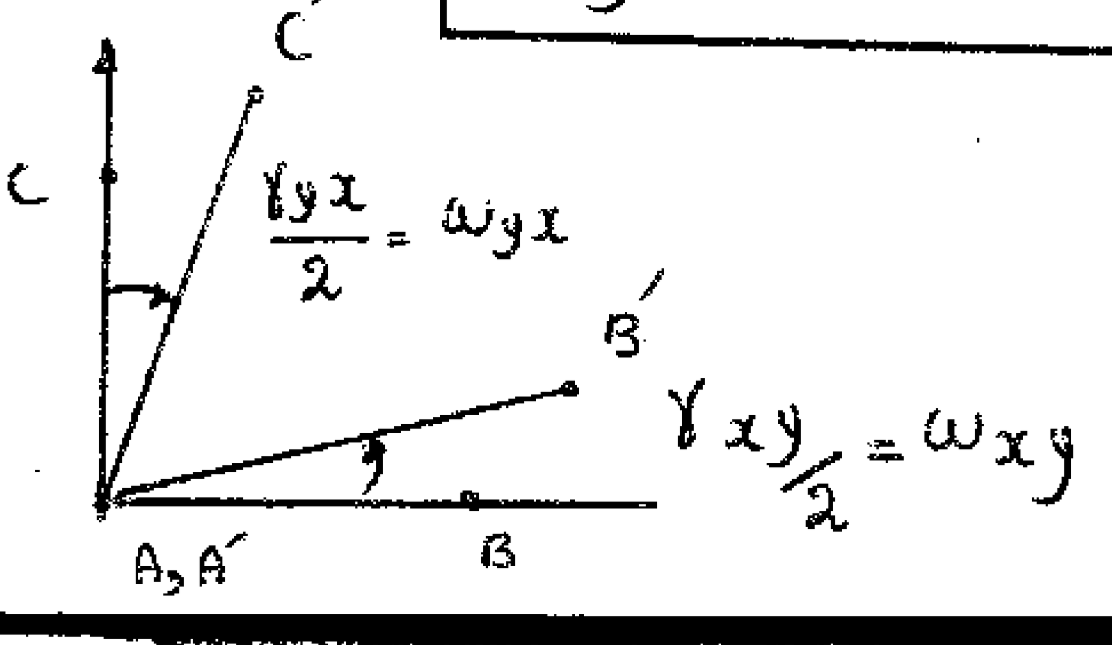

$\varepsilon_{yx}+\varepsilon_{xy}=\gamma_{yx}$

کرنش برشی زاویه‌ای $xy$ =

کرنش برشی مهندسی $xy$ =

کرنش برشی المان $xy$

تغییر زاویه ۹۰ بین تارهای $x$ و $y$




$\longrightarrow \omega_{xy}=\omega_{yx}=\frac{\varepsilon_{xy}+\varepsilon_{yx}}{2}$

$$H^{\langle xyz\rangle} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \omega_{yx} & \omega_{zx} \\ \omega_{xy} & \varepsilon_y & \omega_{zy} \\ \omega_{xz} & \omega_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

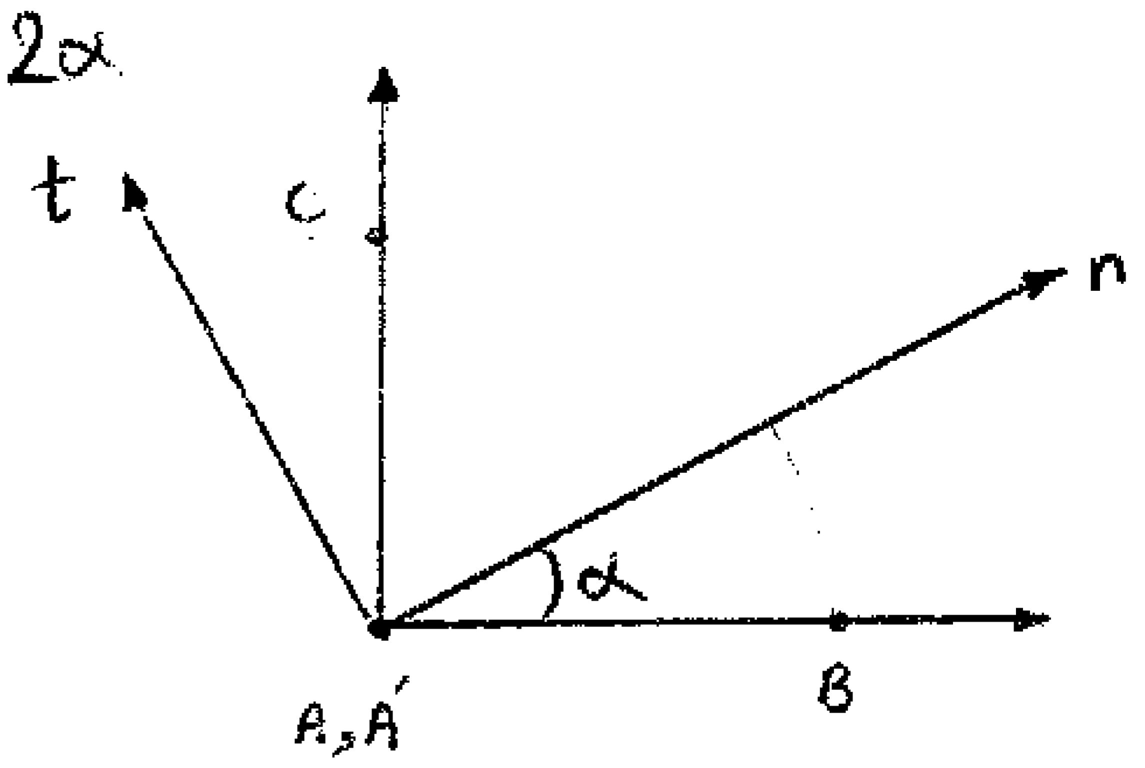
✱ با تعریف تانسور کرنش به شرح فوق همهٔ تبدیلات تنش چه در حالت سه بعدی و چه در حالت دو بعدی بیان شد عیناً برای مولفه های تانسور کرنش نیز صادق است از جمله:

① در هر نقطه امتدادهای اصلی تنش و امتدادهای اصلی کرنش بر هم منطبق اند که در حالت کلی 3 امتداد منحصر به فرد دو به دو متعامد می باشند.

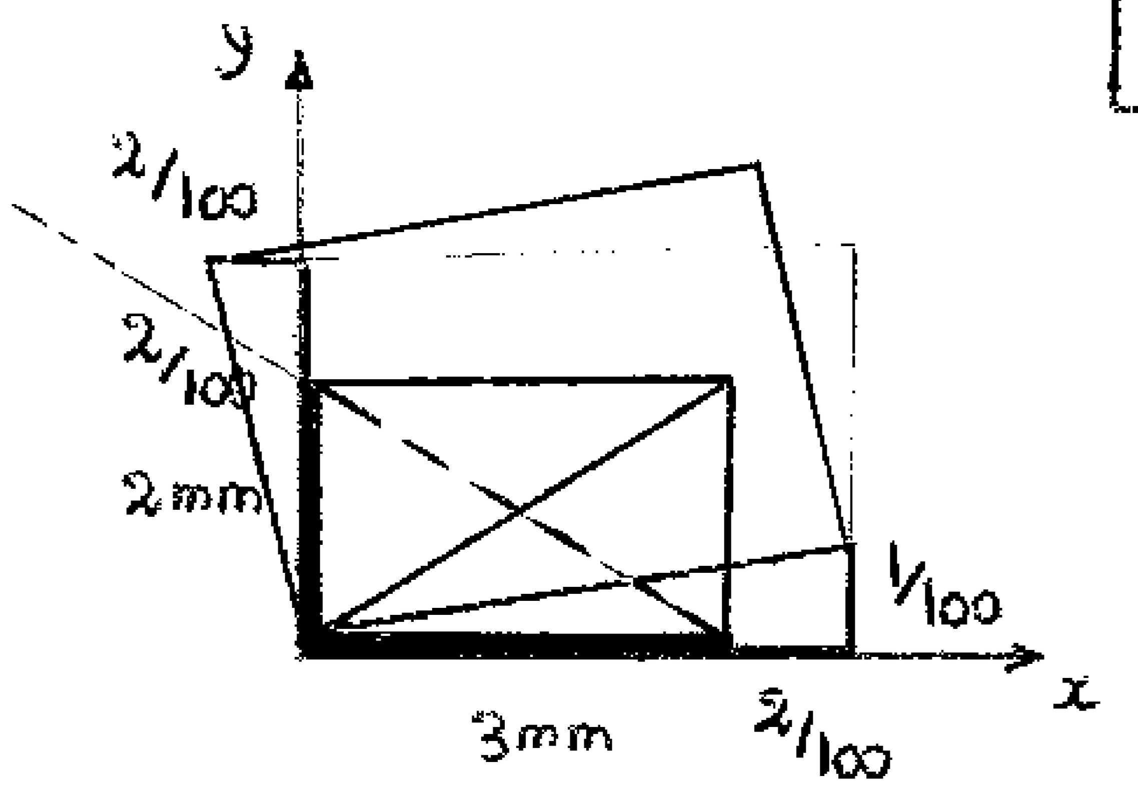
② اگر در نقطه ای زاویهٔ $90^\circ$ بین دو امتداد دلخواه پس از بارگذاری تغییر نکند آن امتدادها اصلی می باشند.

$$\varepsilon_n = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\cos 2\alpha + \omega_{xy}\sin 2\alpha$$

$$\omega_{nt} = 0 \quad -\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\sin 2\alpha + \omega_{xy}\cos 2\alpha$$




$$H^{\langle xy\rangle} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \omega_{yx} \\ \omega_{xy} & \varepsilon_y \end{bmatrix}$$




اگر وضعیت اولیه و تغییر شکل یافتهٔ المان مطابق شکل باشد، مطلوب است تانسور کرنش در آن نقطه. کرنش های طولی حداقل و حداکثر در آن نقطه، کرنش طولی و برشی در امتداد قطر آن.

$$\varepsilon_x = \frac{\delta_{xx}}{dx} = \frac{0.02}{3} = \frac{2}{300}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\delta_{yy}}{dy} = \frac{0.02}{2} = \frac{2}{200}$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\delta_{xy}}{dx} = \frac{0.01}{3} = +\frac{1}{300}$$

$$\varepsilon_{yx} = \frac{\delta_{yx}}{dy} = \frac{-0.02}{2} = -\frac{1}{100}$$

$$\longrightarrow \gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{1}{300} + \left(-\frac{1}{100}\right) = \frac{-2}{300}$$

$$\omega_{xy} = \omega_{yx} = \frac{-1}{300}$$

استاد: دکتر عرفانی

$$H^{\langle xy\rangle} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} / 300$$

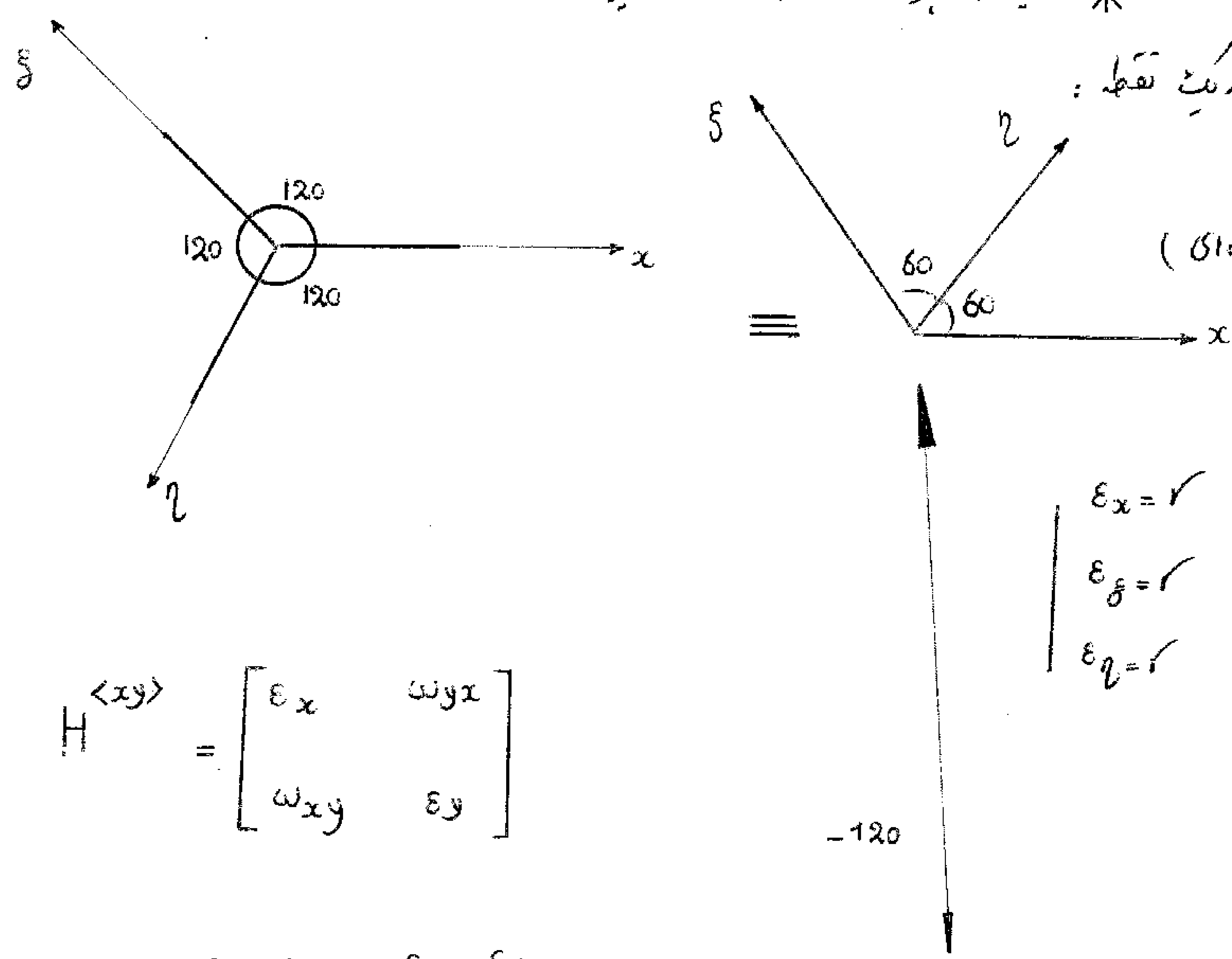
$$\varepsilon_{max,min} = \left[ \frac{2+3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2-3}{2}\right)^2 + (-1)^2} \right] \Big/ 300 = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{600}$$

$$\gamma_{max} = 2\,\omega_{max} = 2\sqrt{\left(\frac{2-3}{2}\right)^2 + (-1)^2} \Big/ 300 = \frac{\sqrt{5}}{300}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_n = \left[\dfrac{2+3}{2} + \dfrac{2-3}{2}\cos 2\alpha + (-1)\sin 2\alpha\right] / 300 \\ \omega_{nt} = \left[0 - \dfrac{2-3}{2}\sin 2\alpha + (-1)\cos 2\alpha\right] / 300 \end{cases}$$

✳ در تبدیل کرنش ها عاقلانه است که ✳ زوایا برای بردار از محور x اندازه گیری شوند.

اندازه گیری کرنش ها در یک نقطه:




(کرنش سنج های ستاره ای)

اندازه گیری

$\varepsilon_x =$ ✓

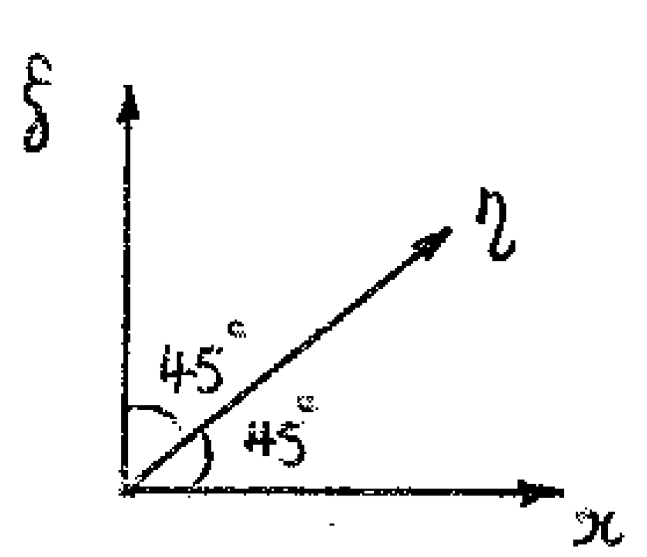
$\varepsilon_\xi =$ ✓

$\varepsilon_\eta =$ ✓

$$H^{\langle xy\rangle} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \omega_{yx} \\ \omega_{xy} & \varepsilon_y \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_\xi = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\cos 240 + \omega_{xy}\sin 240$$

$$\varepsilon_\eta = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\cos(-240) + \omega_{xy}\sin(-240)$$




معادلاتش نوشته شود

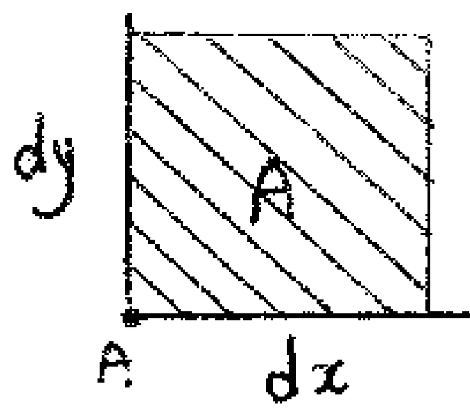
تنظیم: محمدحاج صادقی

استاد: دکتر عرفانی

کرنش سطحی :

کرنش سطحی در یک نقطه یعنی تغییر مساحت نسبی در آن نقطه :

$$\boxed{\text{کرنش سطحی} = \frac{\Delta A}{A}} = \frac{(dx+dx\,\varepsilon_x)(dy+dy\,\varepsilon_y)-dx\,dy}{dx\,dy}$$




$$= (1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y)-1 = \varepsilon_x+\cancel{\varepsilon_x\varepsilon_y}+\cancel{1}-\cancel{1}+\varepsilon_y = \varepsilon_x+\varepsilon_y$$

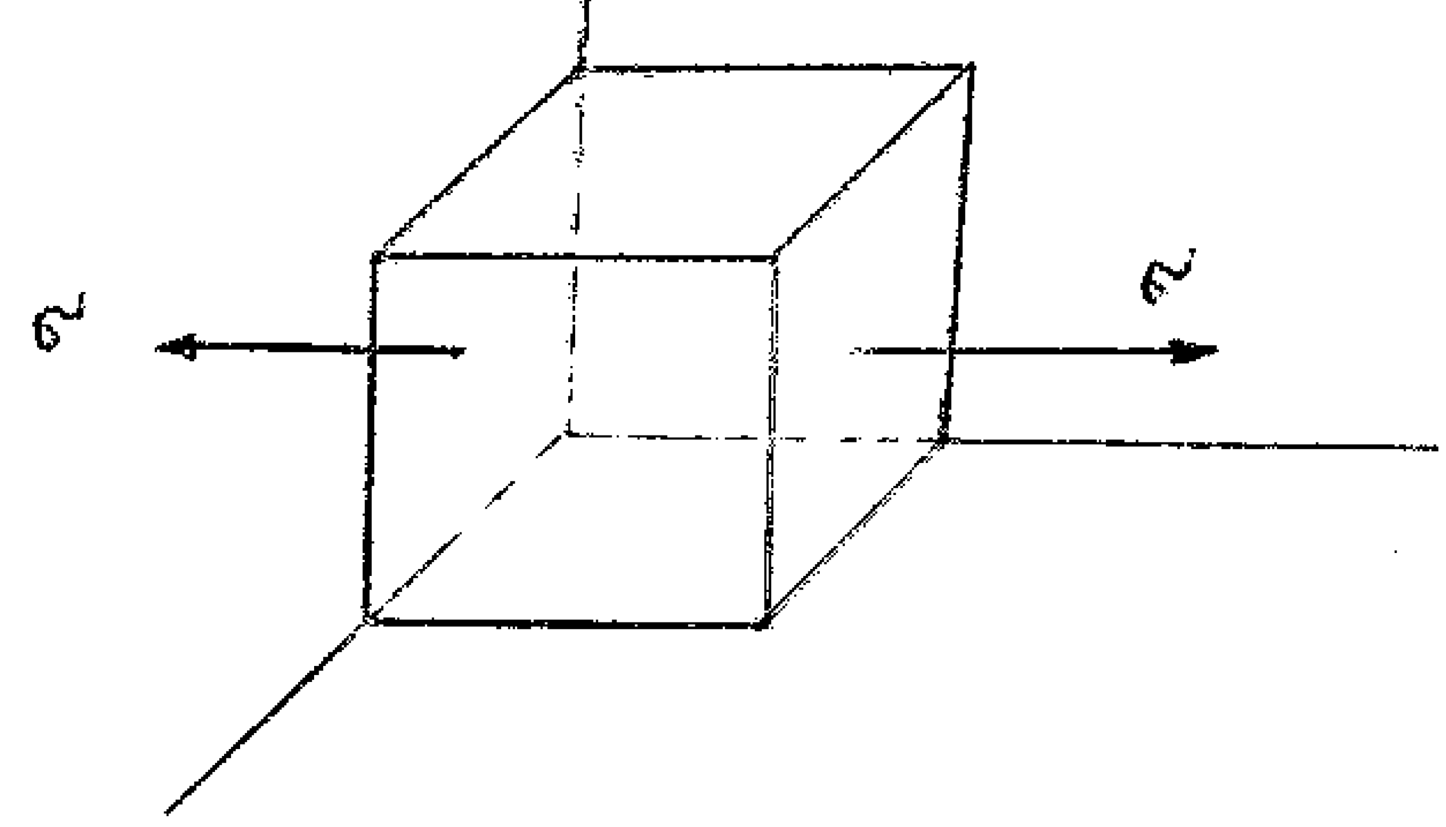
$$\boxed{* \text{ کرنش سطحی} : \varepsilon_x+\varepsilon_y} = \varepsilon_x'+\varepsilon_y' = cte$$

مثلاً سطحا در مثال قبل : $\Delta A = (\frac{2}{300}+\frac{2}{200}) . 2\times3 (mm) = 0.1\ mm^2$

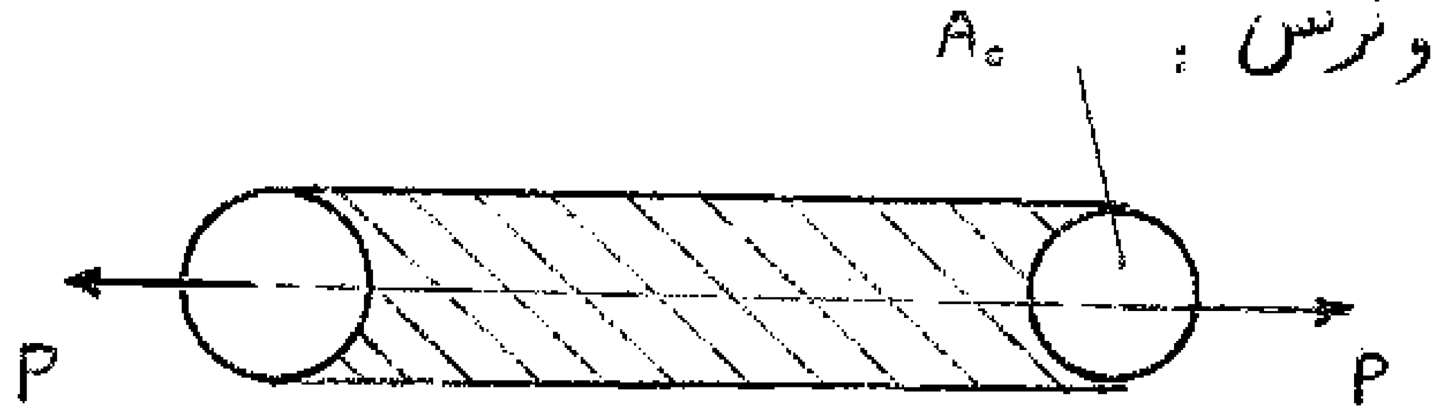
کرنش حجمی :

$$\boxed{* \text{ کرنش حجمی} = \frac{\Delta V}{V}} = \varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z = \varepsilon_x'+\varepsilon_y'+\varepsilon_z' = e = cte$$

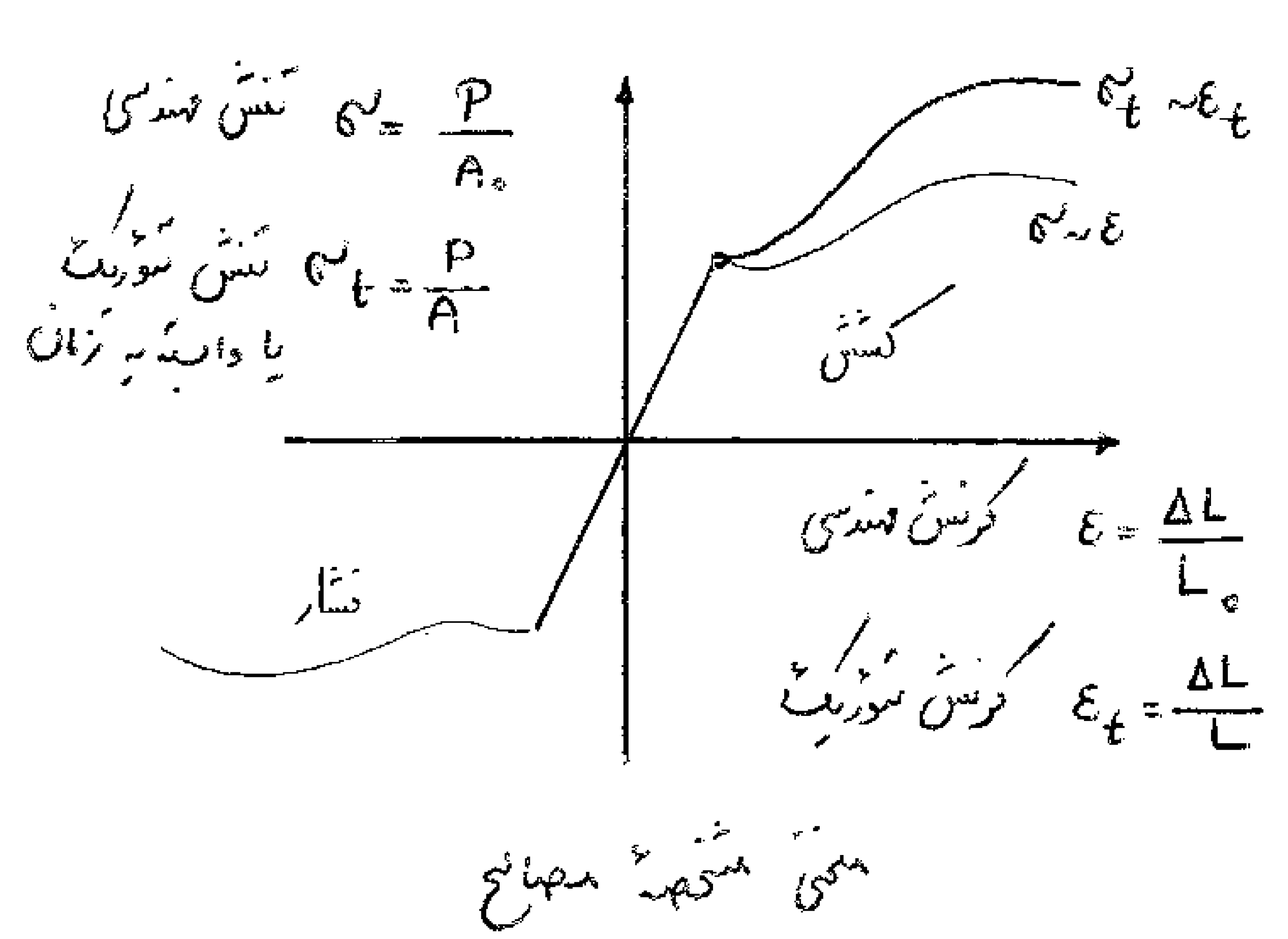
در هر نقطه مقداری است ثابت .




روابط تنش و کرنش :



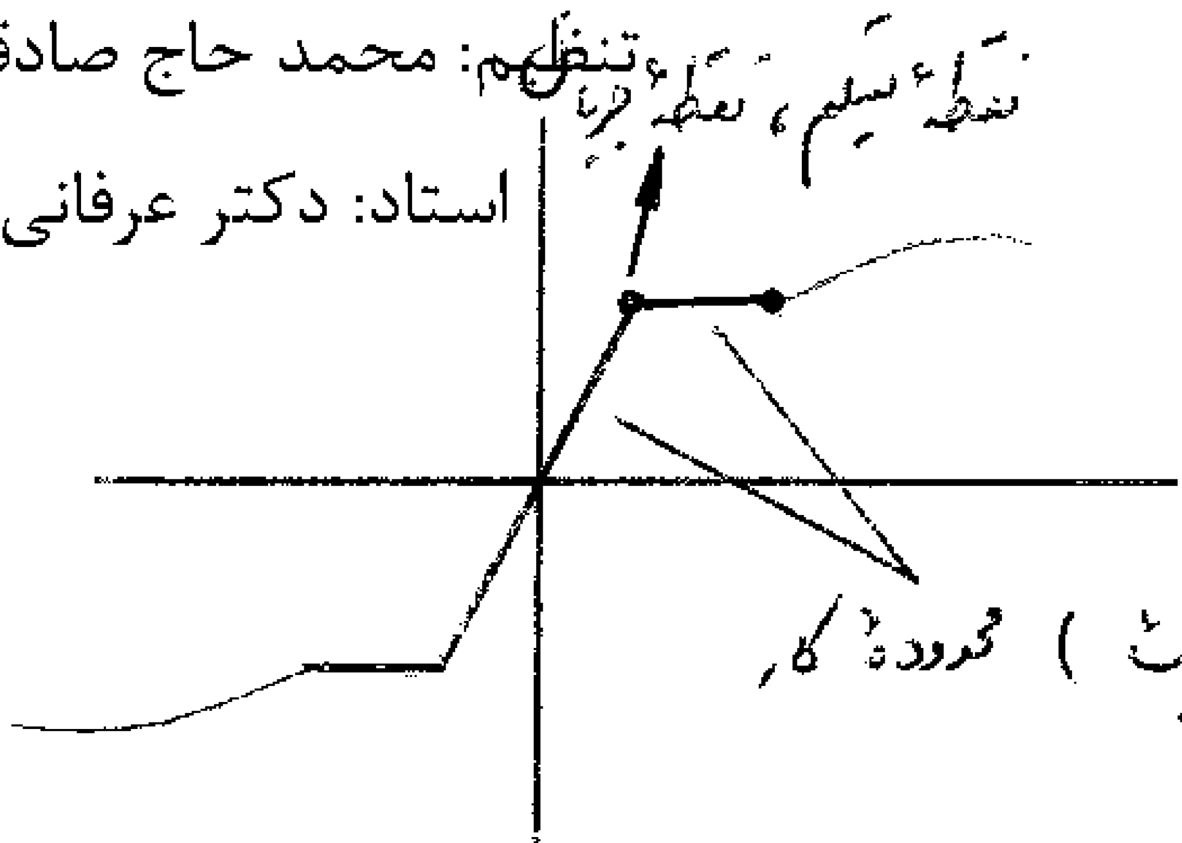

تنش محوری خالص :

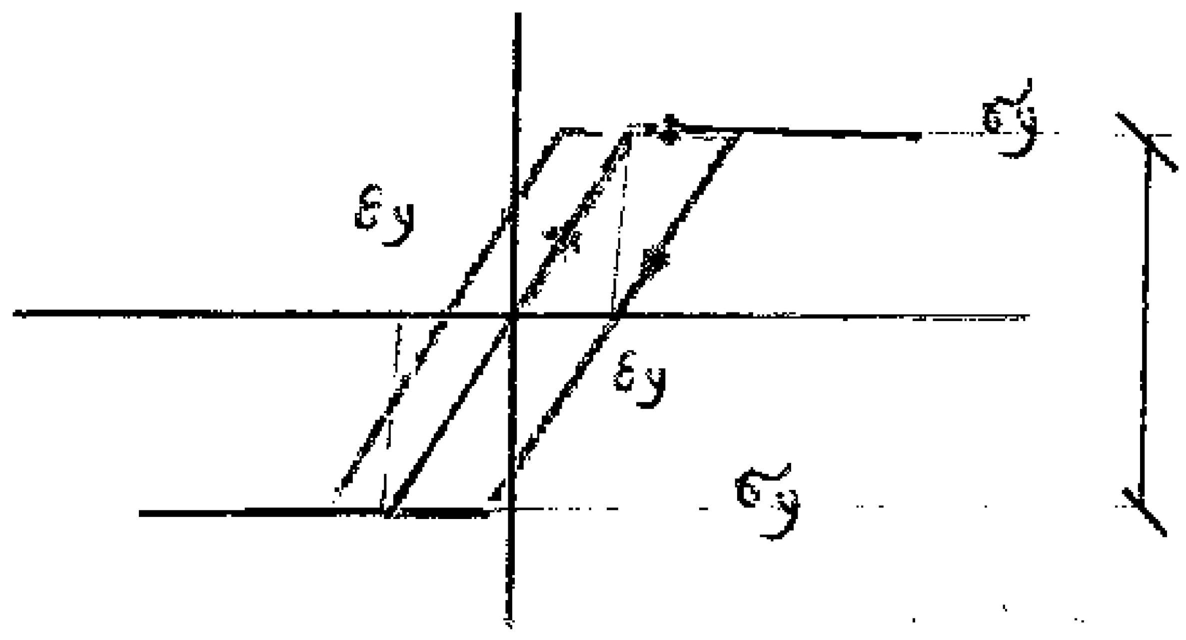



منحنی مشخصهٔ مصالح

تنظیم: محمد حاج صادقی

استاد: دکتر عرفانی



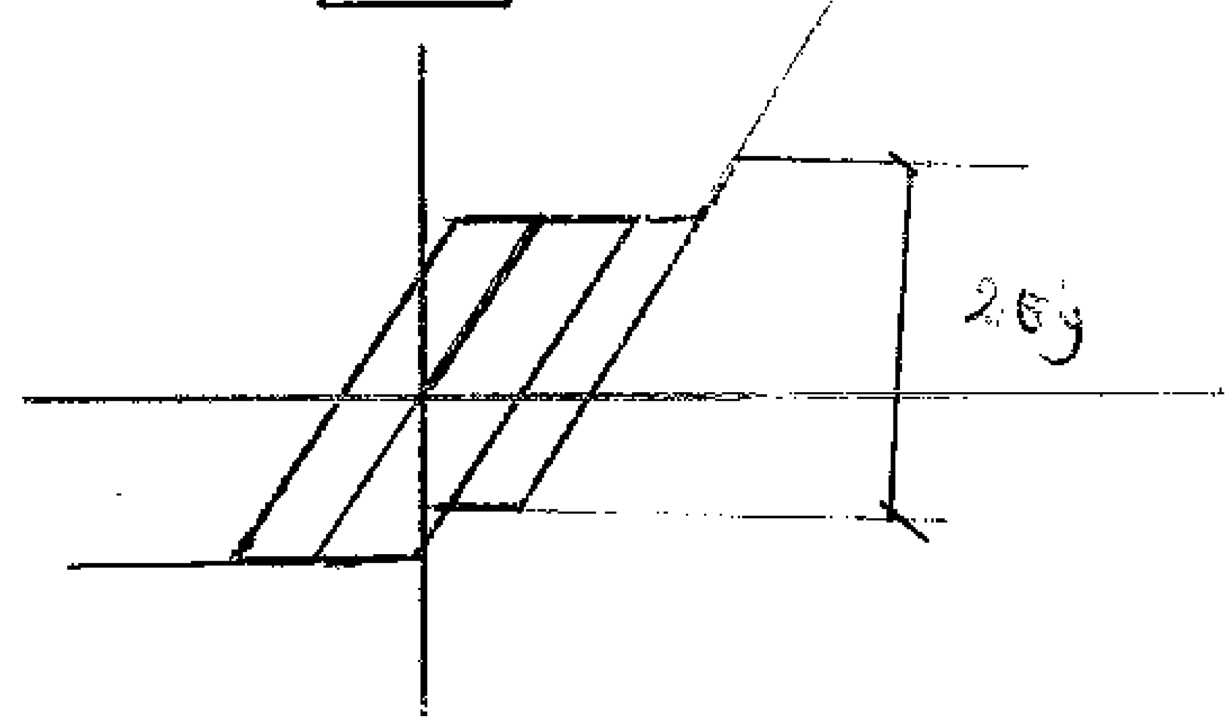

اصل باشینگر = $2\sigma_y$

محدوده خطی : $\sigma < \sigma_y \rightarrow \sigma = E \cdot \varepsilon$ ؛ $E =$ ضریب تناسب = مدول الاستیسیته = ضریب تناسب

پله تسلیم : $\sigma = \sigma_y \rightarrow \varepsilon =$ دلخواه ؛ $E =$ صفر

- در محدوده خطی تغییر شکل ها برگشت پذیرند.

اصل باشینگر : جمع دو ناحیه خطی مربوط به کشش و فشار همواره ثابت بوده و برابر با $\boxed{2\sigma_y}$ است.





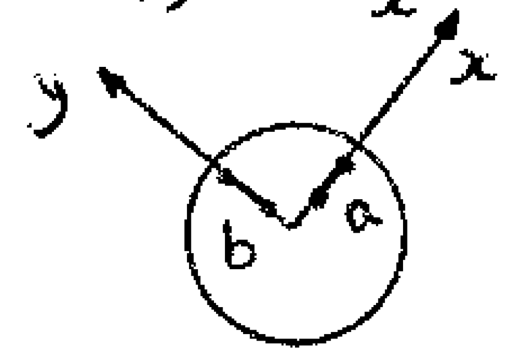
$\varepsilon_l = \frac{\Delta L}{L}$ کرنش طولی

$\varepsilon_d = \frac{\Delta R}{R}$ کرنش جانبی

در محدوده خطی $\Longrightarrow \frac{\varepsilon_d^{(-)}}{\varepsilon_l^{(+)}} = ct_0 < 0 \longrightarrow \frac{\varepsilon_d}{\varepsilon_l} = -\nu$ (ضریب پواسون)

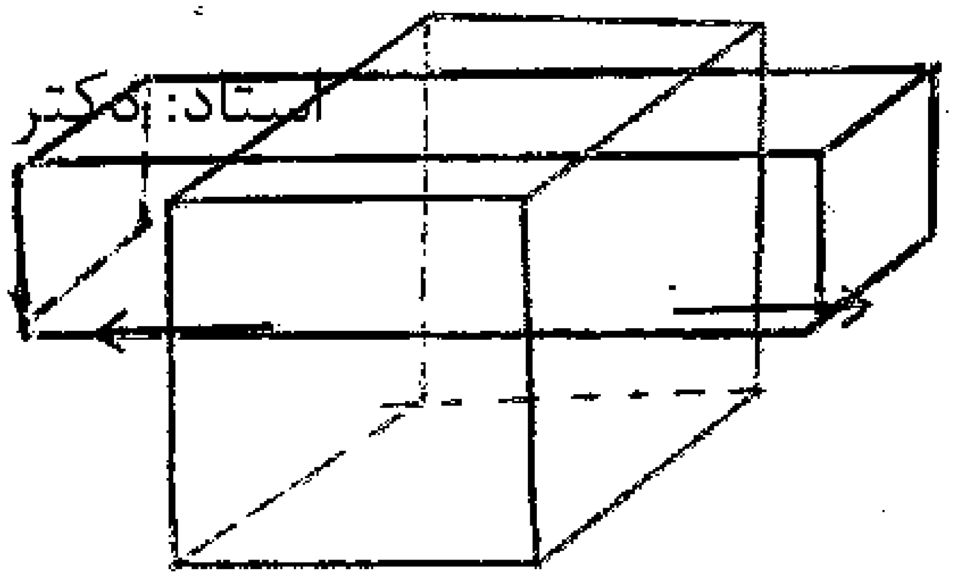
تنش تک محوری $\rightarrow$ : $\varepsilon_d = -\nu \varepsilon_l$ ، کرنش جانبی = تغییر طول نسبی جانبی : $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_d = \frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta a}{a}$

$= \frac{\Delta b}{b} = \frac{\Delta\,(\text{هر خط بر روی مقطع عرضی})}{\text{طول}\,(\text{هر خط بر روی مقطع عرضی})} = \frac{\Delta\,(\text{محیط})}{\text{محیط}}$



تنظیم: محمد حاج صادقی

استاد: دکتر عرفانی

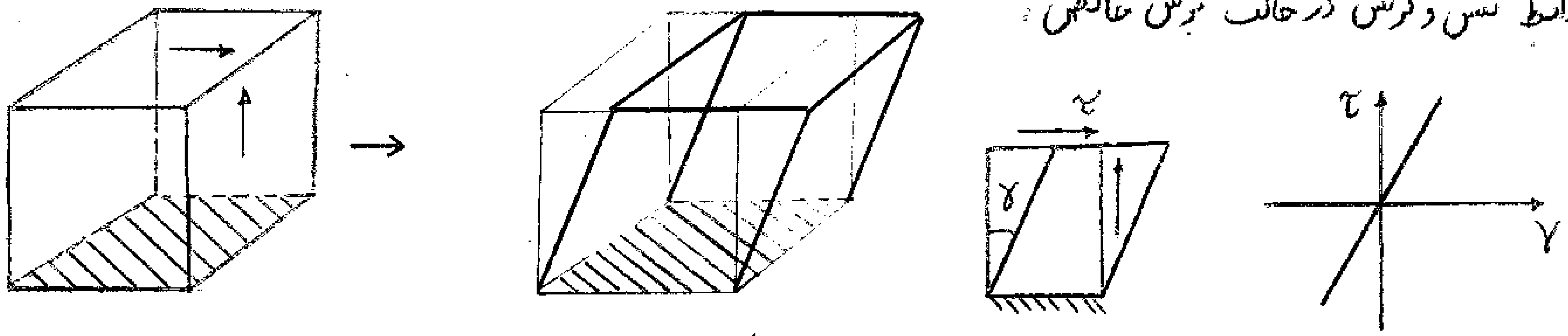


$$\varepsilon_l = \frac{\sigma_l}{E}$$

$$\varepsilon_d = -\nu \varepsilon_l$$

یک بعد افزایش و دو بعد دیگر کاهش پیدا می‌کنند.

روابط تنش و کرنش در حالت برش خالص:

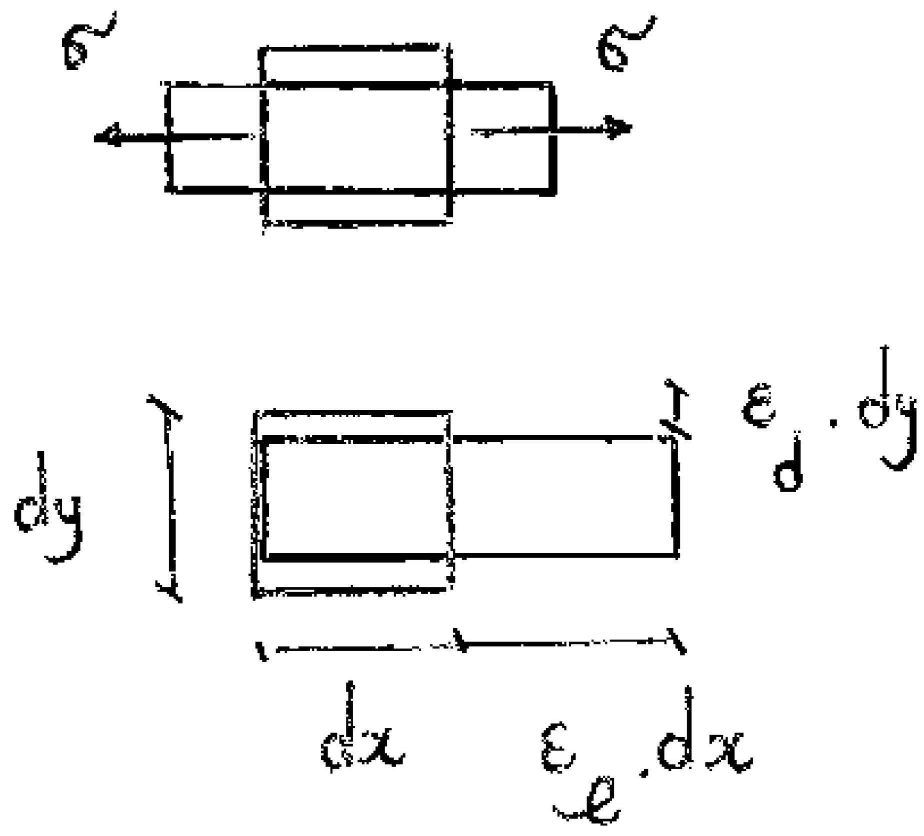



$$\tau = G.\gamma \longrightarrow \gamma = \frac{\tau}{G} \rightarrow$$

مدول الاستیسیته در برش، سختی یا صلابت برشی.

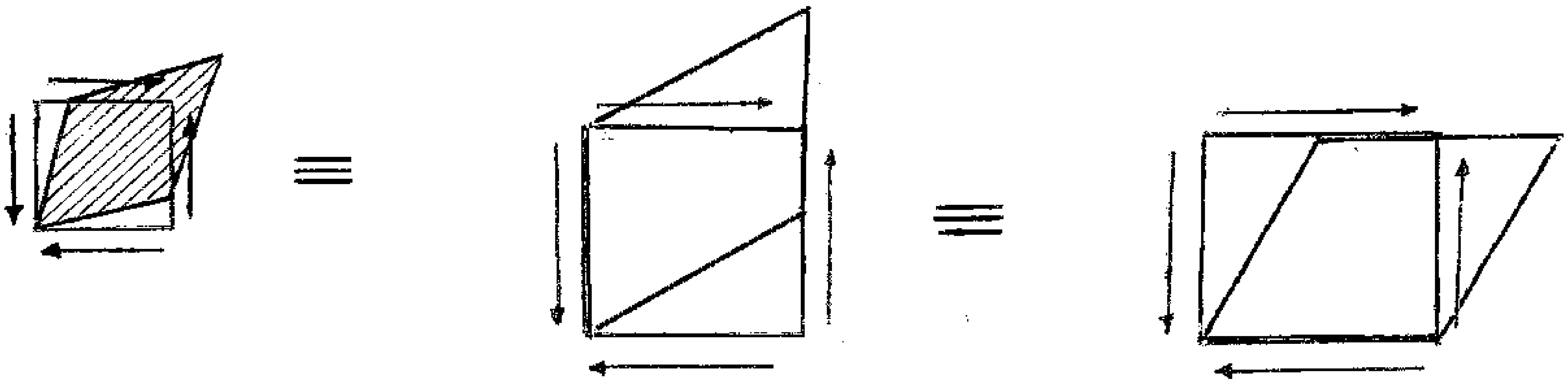
شکل های تنش کرنش:

۱- تنش تک محوری:




ملاحظه می‌شود تنش‌های قائم باعث تغییر ابعاد شده و علاوه بر تغییر طول، سطح و یا حجم را تغییر می‌دهد.

۲- برش خالص:



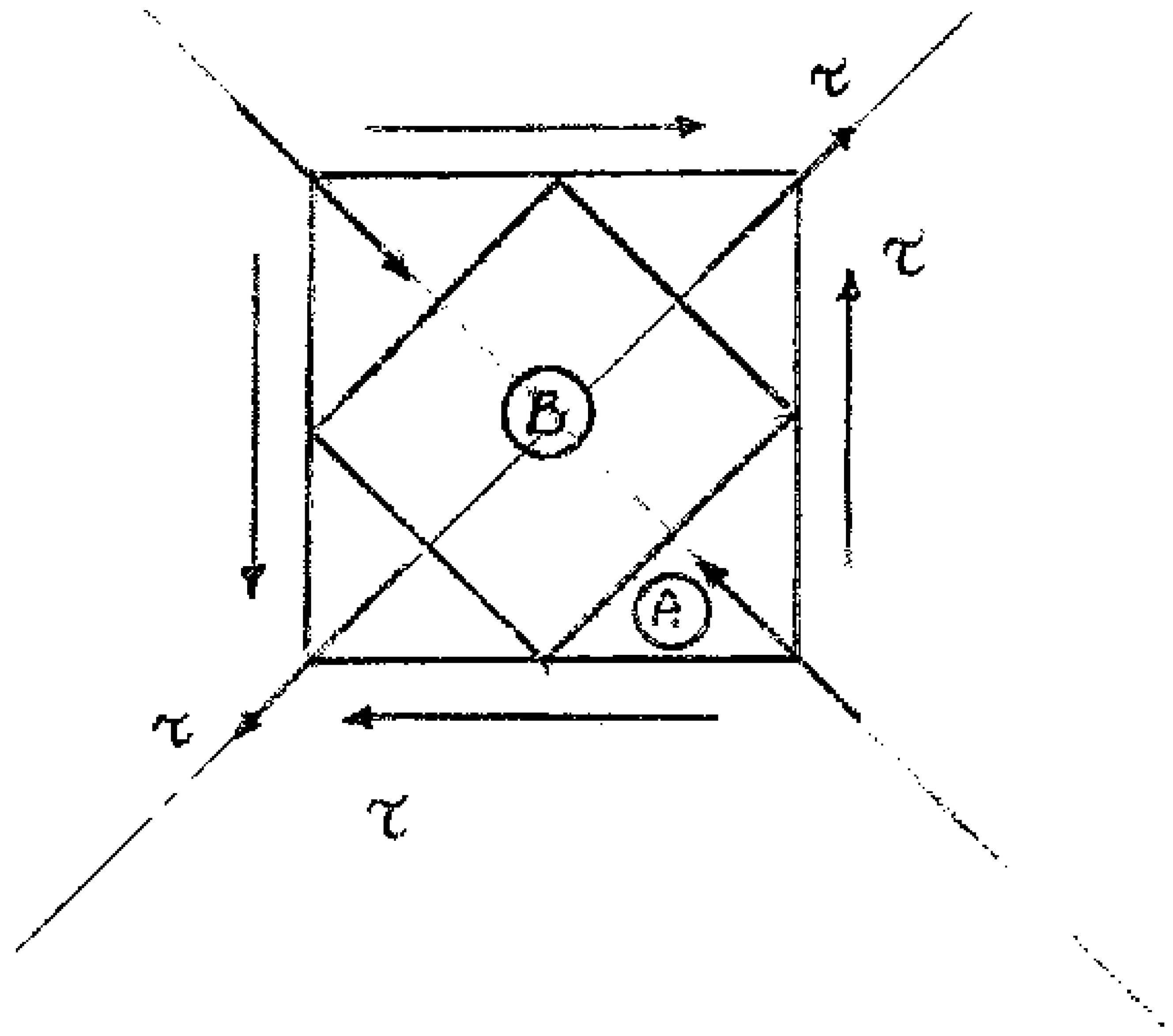
* ملاحظه می‌شود تنش‌های برشی صرفاً تغییر زاویه ایجاد کرده و باعث تغییر طول، تغییر سطح و یا تغییر حجم نمی‌شوند *

ثابت های مصالح:
- $E$ : [نیرو/سطح]
- $G$ : [نیرو/سطح]
- $\nu$ : [بدون بعد]

سه ثابت مصالح مستقل از هم نیستند.

با معلوم بودن دو مورد ثابت سوم قابل محاسبه است.

استاد: دکتر عرفانی




$B: \varepsilon_n = \frac{\tau}{E} + \nu\frac{\tau}{E}$

* : تنش برشی تغییر طول ایجاد می‌کند.

$A: \varepsilon_n = \frac{0+0}{2} + \frac{0-0}{2}\cos 90 + \left[\omega_{xy} = \frac{\gamma_{xy}}{2} = \frac{\tau}{2G}\right]\sin 90$

$\longrightarrow \frac{\tau}{2G} = \tau\left[\frac{1}{E}+\frac{\nu}{E}\right] \longrightarrow \boxed{G = \frac{E}{2(1+\nu)}}$

ضریب پواسون همواره بین 0 و 0.5 قرار می‌گیرد.
(مساوی نه)

تنش تک محوری : ← افزایش حجم

$e > 0$

$\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z > 0 \longrightarrow \frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_x}{E} > 0 \longrightarrow 1-2\nu > 0 \longrightarrow 0<\nu<\frac{1}{2}$

$0<\nu<\frac{1}{2}$

$G=\frac{E}{2(1+\nu)}$ $\longmapsto$ $0<\nu<\frac{1}{2} \longrightarrow \frac{E}{3}<G<\frac{E}{2}$

حجم غیر قابل تراکم
تغییر حجم همواره صفر است
(مصالح توپر) $e=0$
کرنش جانبی حداکثر مقدار ممکنه را دارد یعنی نصف کرنش طولی

بیشترین قابلیت تراکم
بیشترین تغییر حجم
مصالح متخلخل
کرنش جانبی همواره صفر است.

$\nu$ :
- لاستیک : 0.48
- رس اشباع : 0.45
- فولاد : 0.3
- بتن : 0.15
- اسفنج : $\simeq 0$

استاد: دکتر عرفانی

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_z}{E} + \alpha\Delta T$$

$$\varepsilon_y = -\nu\frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_z}{E} + \alpha\Delta T$$

$$\varepsilon_z = -\nu\frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E} + \alpha\Delta T$$

$$\gamma_{xy} = \tau_{xy}/G$$

$$\gamma_{yz} = \tau_{yz}/G$$

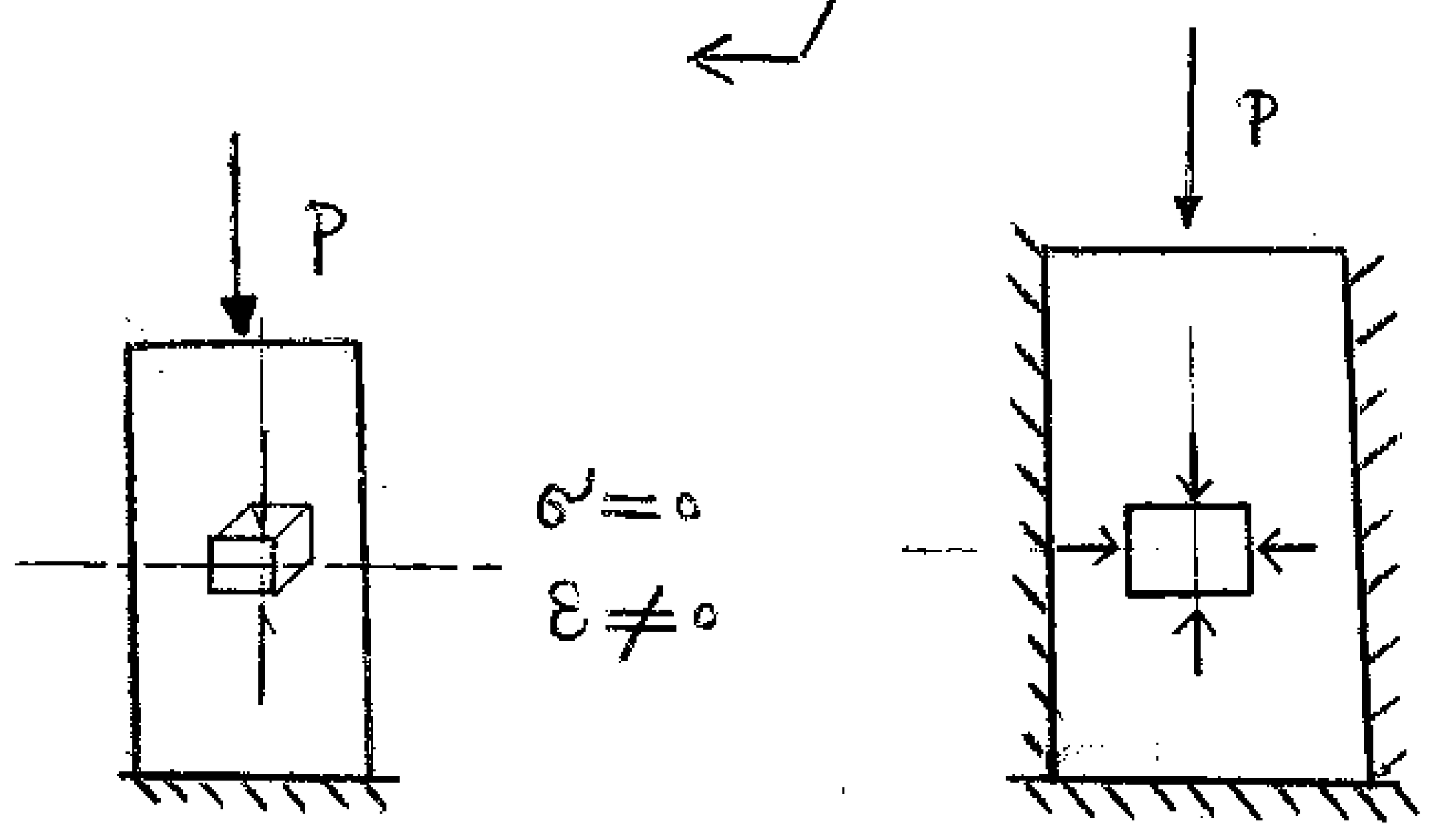
$$\gamma_{zx} = \tau_{zx}/G$$

مسطحی $e = \frac{1-\nu}{E}\theta + 2\alpha\Delta T$

[حاصل جمع سه خط بالا] : $e = \frac{1-2\nu}{E}\theta + 3\alpha\Delta T$

تنش حجمی — کرنش حرارتی حجمی

مدول بالک : $\frac{E}{3(1-2\nu)}$




$\sigma = 0$, $\varepsilon \neq 0$

$\sigma \neq 0$, $\varepsilon = 0$

مسائل مسطحی :

۱ـ تنش مسطحی : $(\sigma_z = 0) \xrightarrow{\text{معمولاً}} \varepsilon_z \neq 0$

۲ـ کرنش مسطحی : $(\varepsilon_z = 0) \xrightarrow{\text{معمولاً}} \sigma_z \neq 0$

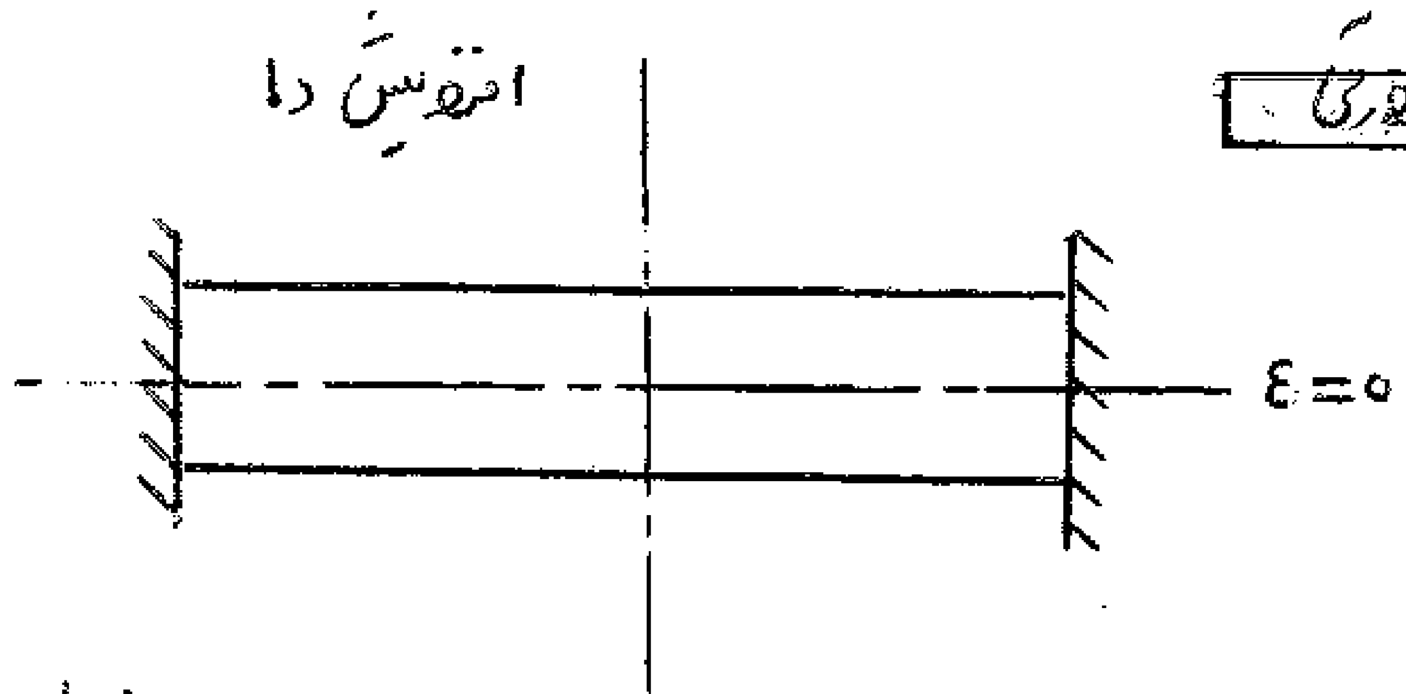
$$\longrightarrow \begin{bmatrix} \tau_{zx} = \tau_{yz} = 0 \\ \gamma_{zx} = \gamma_{yz} = 0 \end{bmatrix}$$

* اجسام با سطح آزاد همواره از نوع تنش مسطحی هستند.

* اجسام منشوری با طول بی‌نهایت که شرایط بارگذاری در طول آن‌ها تغییر نمی‌کند در امتداد طولی عضو حالت کرنش مسطحی فرض می‌شوند.

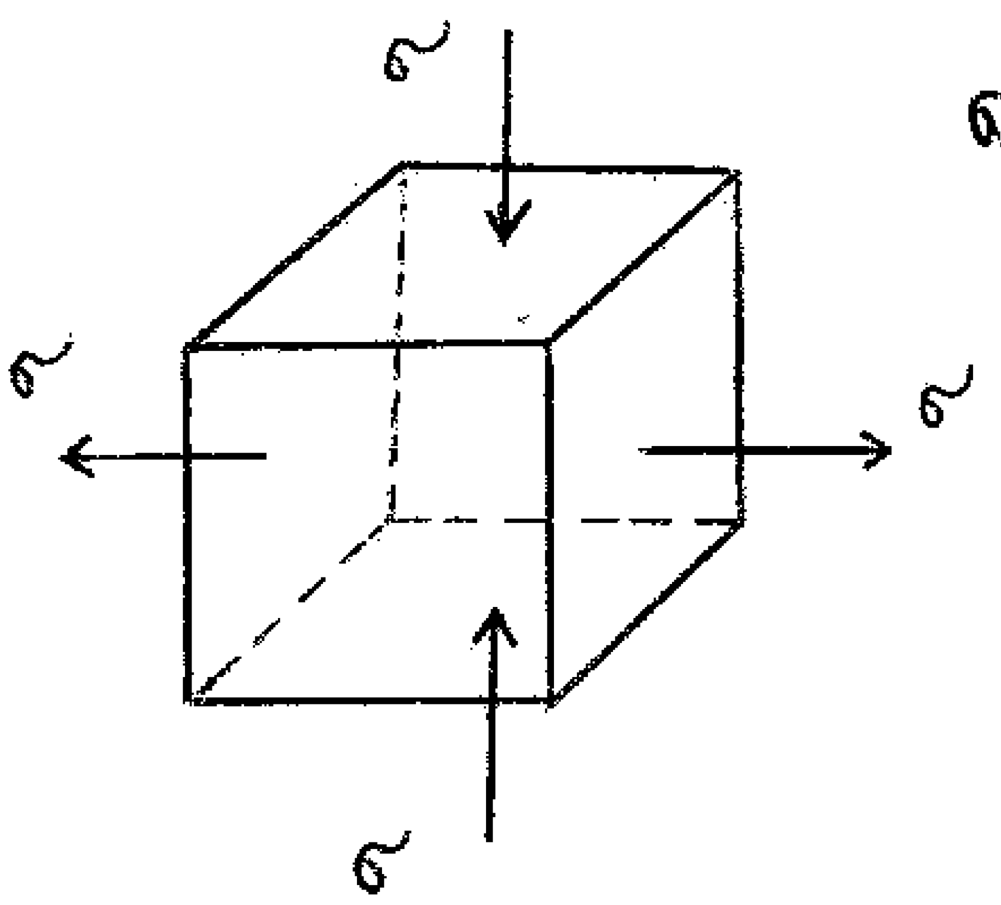
* مانند یک میله با طول بی‌نهایت تحت اثر بارگذاری عرضی.

لوله تحت فشار با طول بی‌نهایت :

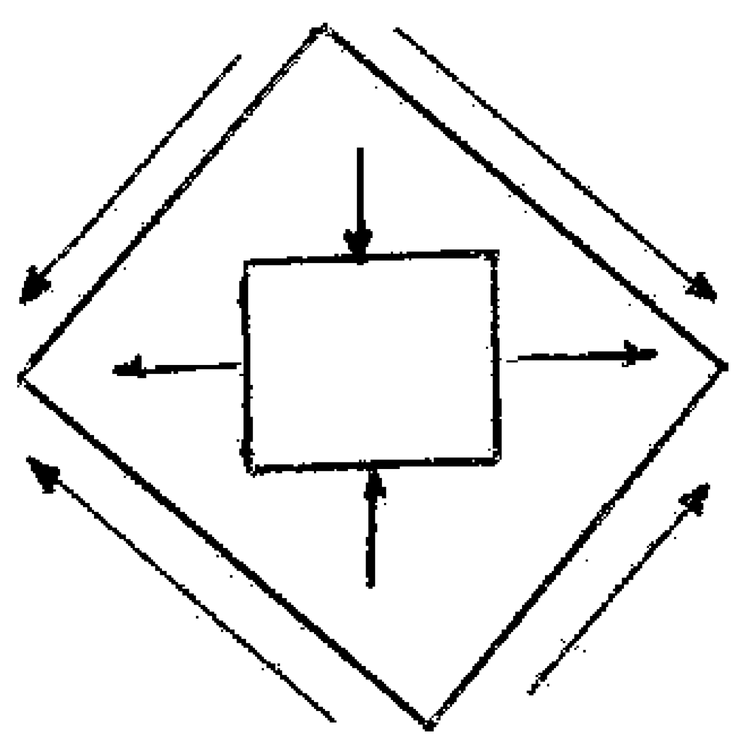



$\sigma = 0$

* برش خالص :




$\boxed{\varepsilon = 0 \;\&\; \sigma = 0 \text{ (حتماً می‌شود)}}$



تنظیم: محمد حاج صادقی
استاد: دکتر عرفانی

تنش مسطح :

$$\sigma_z = 0 \ , \ \gamma_{zx} = \gamma_{yz} = \tau_{zx} = \tau_{yz} = 0$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) + \alpha\Delta T$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) + \alpha\Delta T$$

$$\varepsilon_z = \frac{-\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) + \alpha\Delta T$$

در شرایط حرارتی $\longrightarrow$ $\boxed{\varepsilon_z = \frac{-\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y)}$

روابط مربوط به کرنش مسطحی :

$$\varepsilon_z = 0 \ , \ \tau_{zx} \ , \ \tau_{yz} = 0 \ , \ \gamma_{zx} = \gamma_{yz} = 0$$

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) - \underline{E\alpha\Delta T}$$ تنش حرارتی

* در هر امتدادی که کرنش حرارتی نتواند ایجاد شود یعنی با ایجاد آن مقابله شود ، تبدیل به تنش های حرارتی $\boxed{E\alpha\Delta T}$ می شود .

$\varepsilon_x =$ (جاگذاری فرمول $\sigma_z$ در فرمول های کلی)

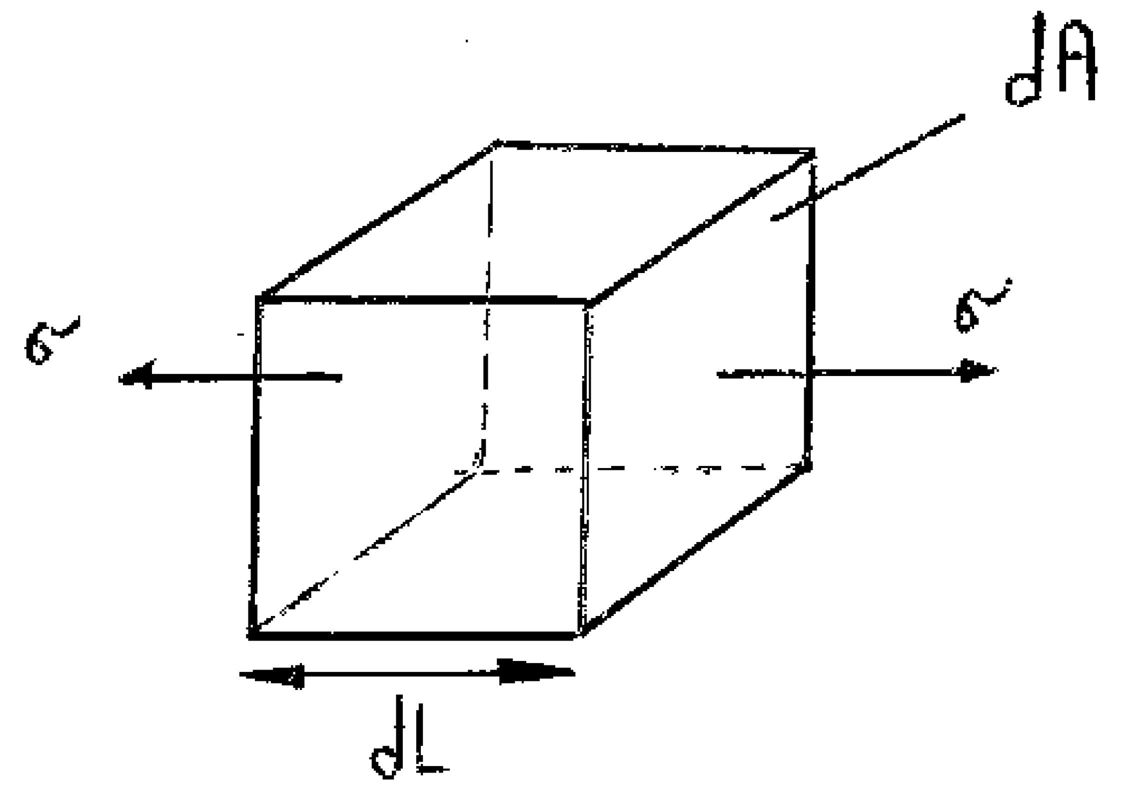
$\varepsilon_y =$

---

انرژی کرنش :

انرژی کرنش یک جسم عبارت است از مجموع انرژی های ذخیره شده در تک تک المان های تشکیل دهنده آن جسم .

* : انرژی ذخیره شده در یک المان عبارت است از کار انجام شده توسط تنش های موثر بر آن المان در اثر کرنش های حاصل شده از آن المان .

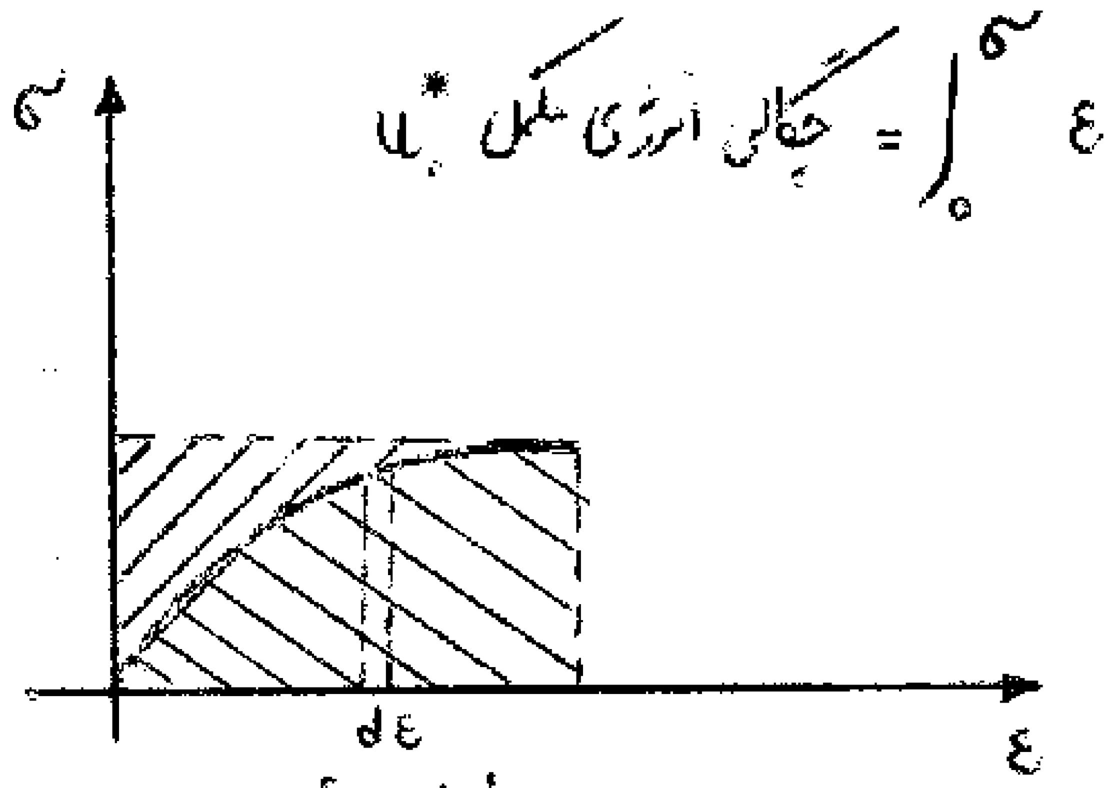



$$du = \frac{(\sigma . dA)(\varepsilon dL)}{2}$$ $\longrightarrow$ رفتار خطی بین تنش و کرنش

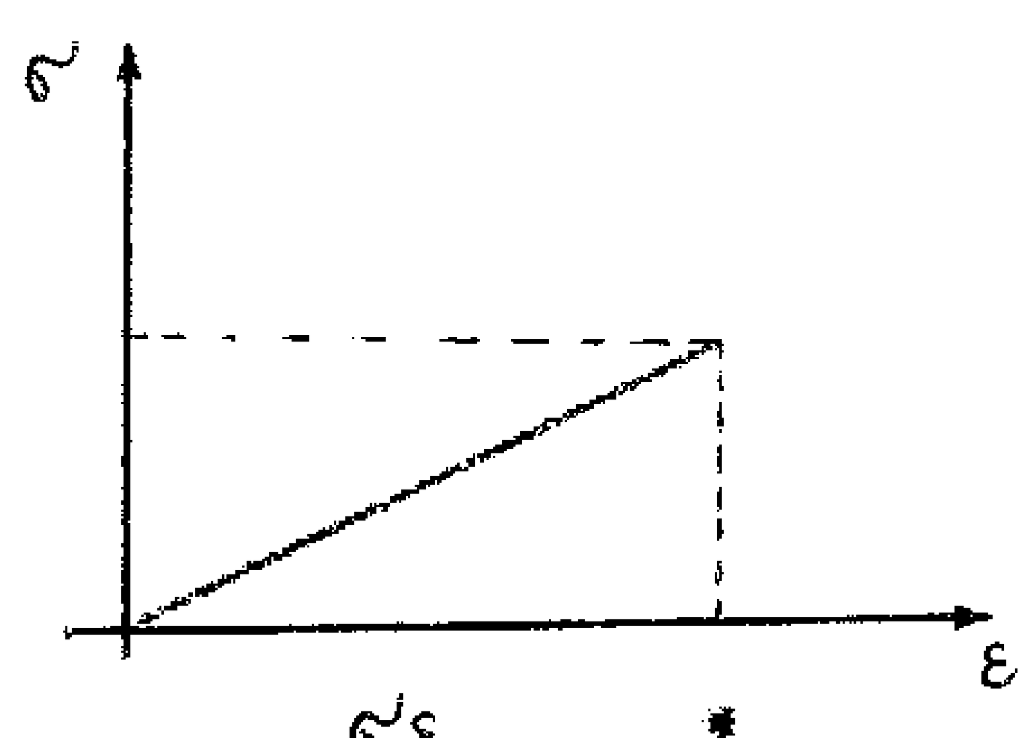
چگالی انرژی : $\frac{du}{dV} = u_0 = \frac{\sigma\varepsilon}{2}$

[ انرژی ذخیره شده در واحد حجم ]

$$u_0^* = \text{چگالی انرژی مکمل} = \int_0^{\sigma} \varepsilon . d\sigma$$




$$u_0 = \int_0^{\varepsilon} \sigma d\varepsilon$$



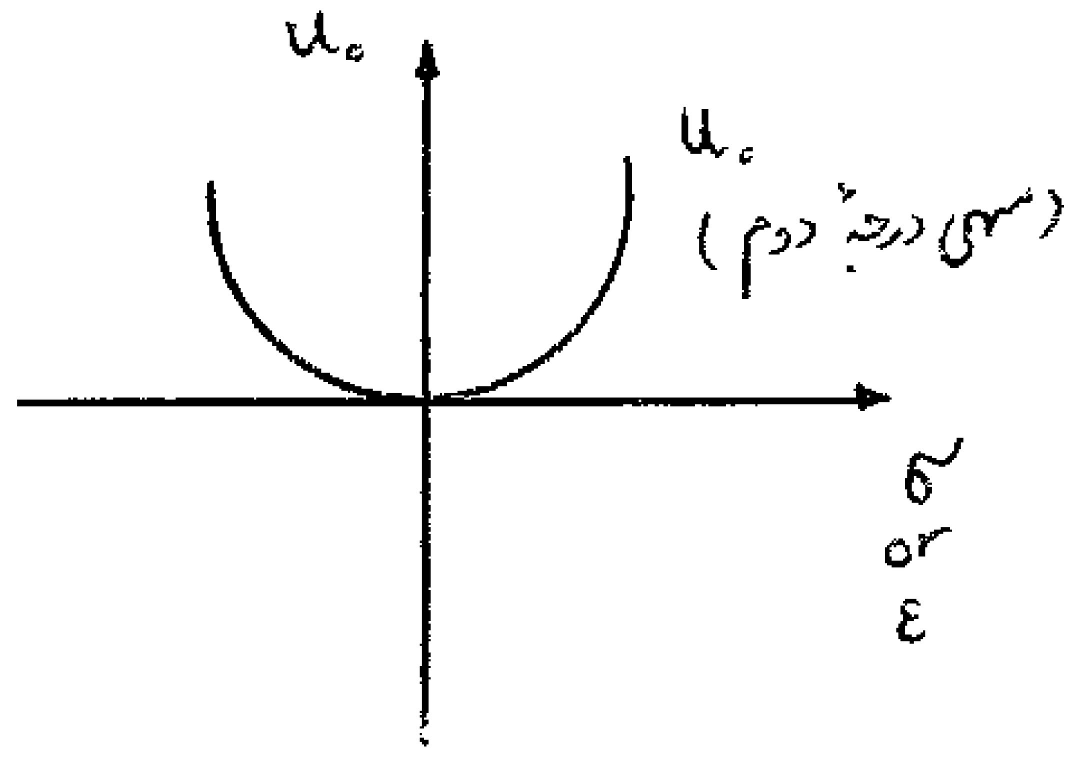

$$u_0 = \frac{\sigma\varepsilon}{2} = u_0^*$$

تنظیم: محمد حاج صادقی
استاد: دکتر عرفانی

$$U_0 = \frac{\sigma \varepsilon}{2} = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{E\varepsilon^2}{2}$$

ملاحظه می شود انرژی بر مبنای فقط تنش و یا فقط کرنش درجه 2 می باشد و خطی نیست ، بنابراین

✳ اصل جمع آثار برای انرژی صادق نیست مگر اینکه کرنش های حاصل از دو بارگذاری مستقل از هم باشند ✳




برش خالص

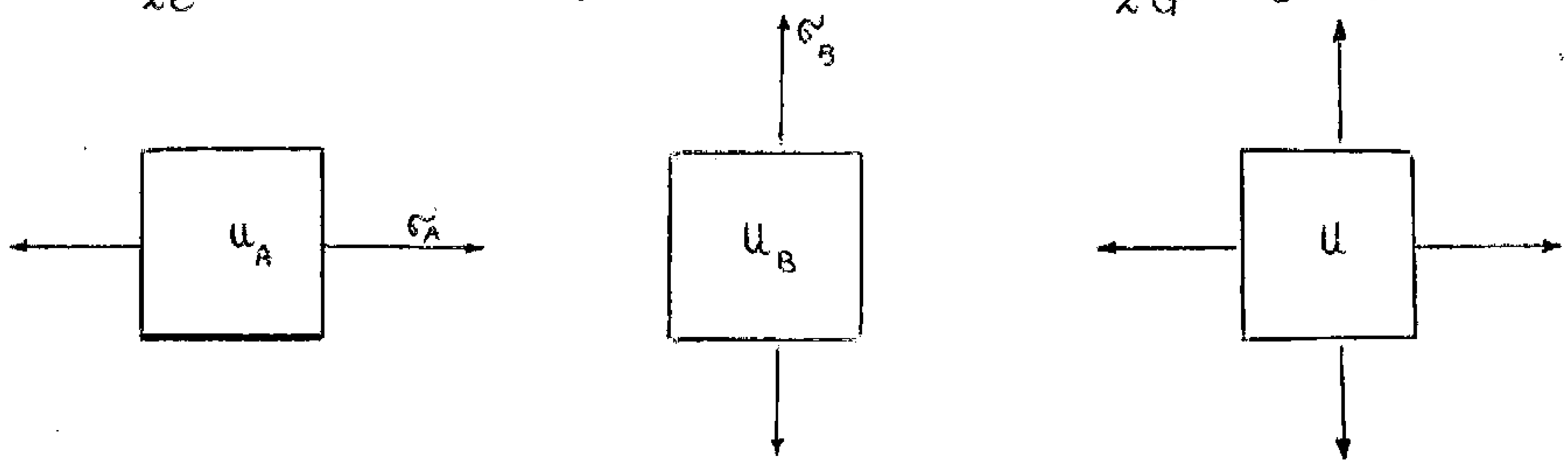
$$U_0 = \frac{\tau \gamma}{2} = \frac{\tau^2}{2G} = \frac{G\gamma^2}{2}$$

$$✳\quad U_0 = \frac{\sigma_x \varepsilon_x}{2} + \frac{\sigma_y \varepsilon_y}{2} + \frac{\sigma_z \varepsilon_z}{2} + \frac{\tau_{xy} \gamma_{xy}}{2} + \frac{\tau_{yz} \gamma_{yz}}{2} + \frac{\tau_{zx} \gamma_{zx}}{2}\quad ✳$$

باید توجه کرد در رابطه فوق جملات کرنش خالص می باشند . یعنی اگر اثراتی مثل تغییر دما وجود داشته باشد باید کرنش حاصل از آن را از کرنش کل کم کرده و سپس در این رابطه استفاده کنیم

$$U_0 = \frac{1}{2E}\left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2\right) - \frac{\nu}{E}\left(\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x\right) + \frac{1}{2G}\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2\right)$$

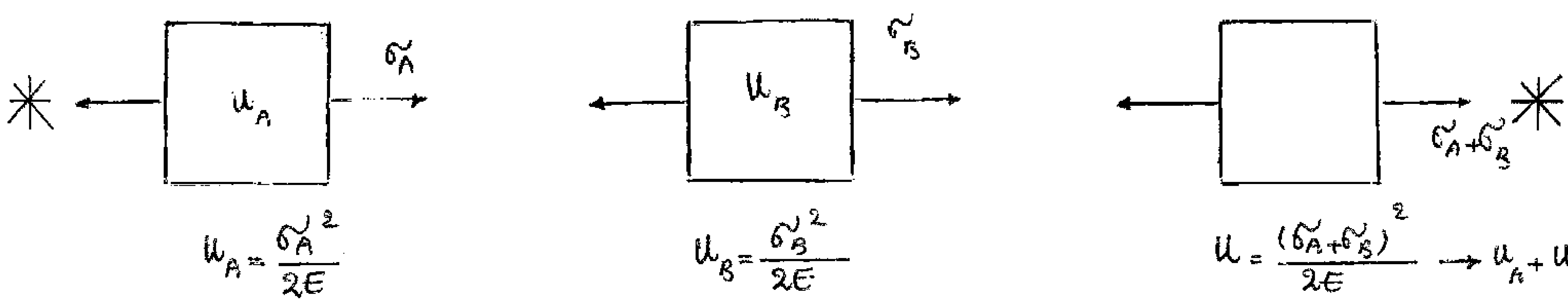
همه جا استفاده می شود.




$$U \neq U_A + U_B$$

$$\sigma_A \cdot \sigma_B > 0 \Longrightarrow U < U_A + U_B$$

$$\sigma_A \cdot \sigma_B < 0 \Longrightarrow U > U_A + U_B$$



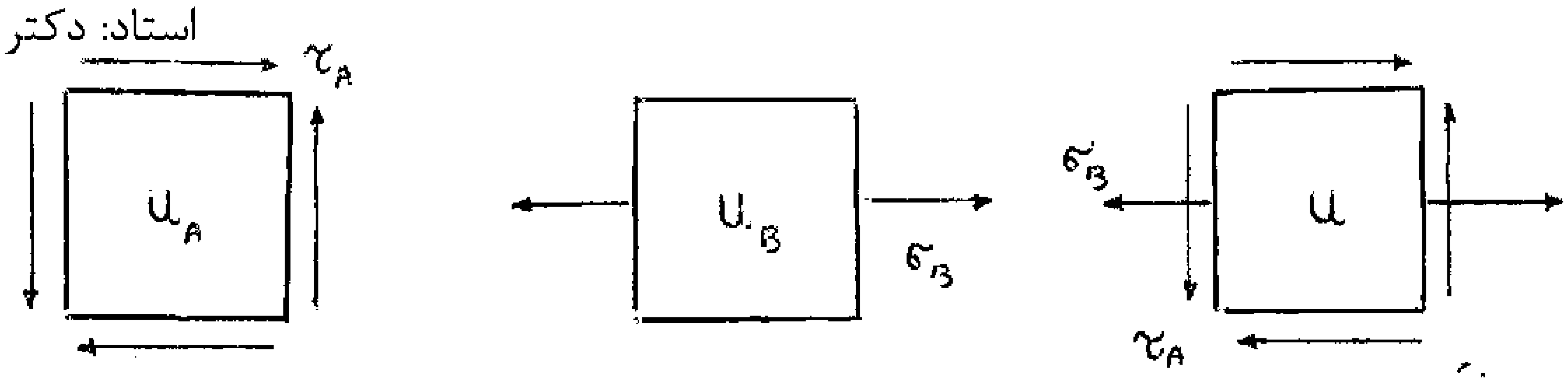

$$U_A = \frac{\sigma_A^2}{2E} \qquad U_B = \frac{\sigma_B^2}{2E} \qquad U = \frac{(\sigma_A+\sigma_B)^2}{2E} \longrightarrow U_A + U_B \neq U$$

$$\sigma_A \cdot \sigma_B > 0 \longrightarrow U > U_A + U_B$$

$$\sigma_A \cdot \sigma_B < 0 \longrightarrow U < U_A + U_B$$

تنظیم: محمد حاج صادقی

استاد: دکتر عرفانی




مستقل از هم هستند ← در نتیجه $U = U_A + U_B$

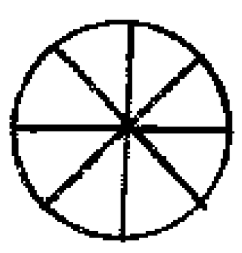
✳ تفکیک یک بارگذاری به مجموع دو حالت تغییر حجم خالص و تغییر زاویه خالص: ✳

$$T^{\langle xyz \rangle} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\sigma} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_x - \bar{\sigma} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \bar{\sigma} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \bar{\sigma} \end{bmatrix}$$

بارگذاری کل — بارگذاری که تغییر حجم خالص ایجاد می کند — بارگذاری که تغییر زاویه خالص ایجاد می کند

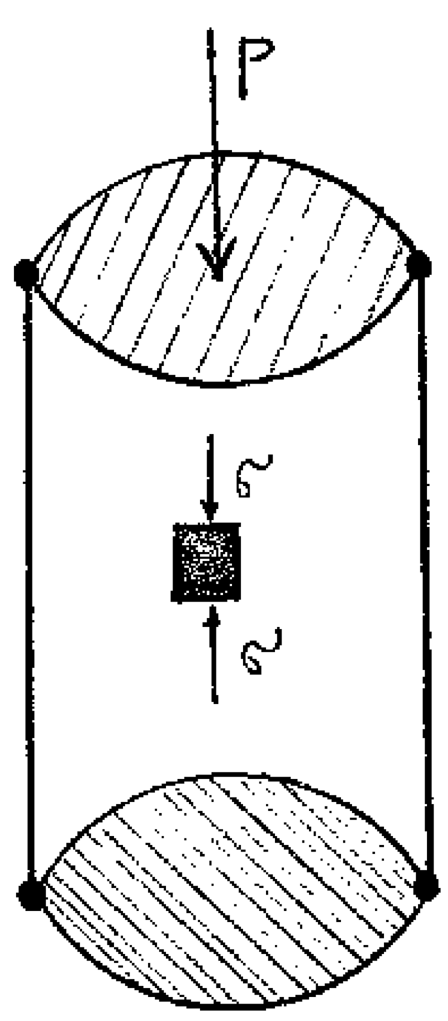
$$\frac{\overbrace{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}^{\theta}}{3} = \bar{\sigma}$$ ( تنش متوسط )

$$\boxed{\begin{matrix} T = T_V + T_S \\ U_0 = U_{0V} + U_{0S} \end{matrix}}$$



✳ اگر بخواهیم تغییر شعاع را بدست آوریم، باید کرنش شعاعی را بدست آوریم:

و چون شعاع، یک امتداد جانبی است داریم: ✳




$$\varepsilon_L = \frac{\sigma_L}{E} = \frac{-P}{AE}$$

$$\Delta L = \varepsilon_L \cdot L = \frac{\sigma_L}{E} \cdot L = \frac{-PL}{AE}$$

کرنش سطح مقطع $= \varepsilon_d + \varepsilon_d = 2\varepsilon_d = 2\nu\varepsilon_\ell = +2\frac{P\nu}{EA}$

$$\varepsilon_R = \varepsilon_d = -\nu\varepsilon_\ell = +\frac{P\nu}{EA}$$

$$\Delta R = R \cdot \frac{P\nu}{EA}$$

کرنش محیطی $= \varepsilon_d = -\nu\,\varepsilon_L = \frac{P\nu}{EA}$

تغییر محیط = محیط $\times \frac{P\nu}{EA}$

کرنش سطح جانبی = $\varepsilon_L +$ کرنش محیطی $= \frac{(1-\nu)P}{EA}$

✳✳✳ تغییر سطح جانبی = سطح جانبی $\times \frac{(1-\nu)P}{EA}$

استاد: دکتر عرفانی

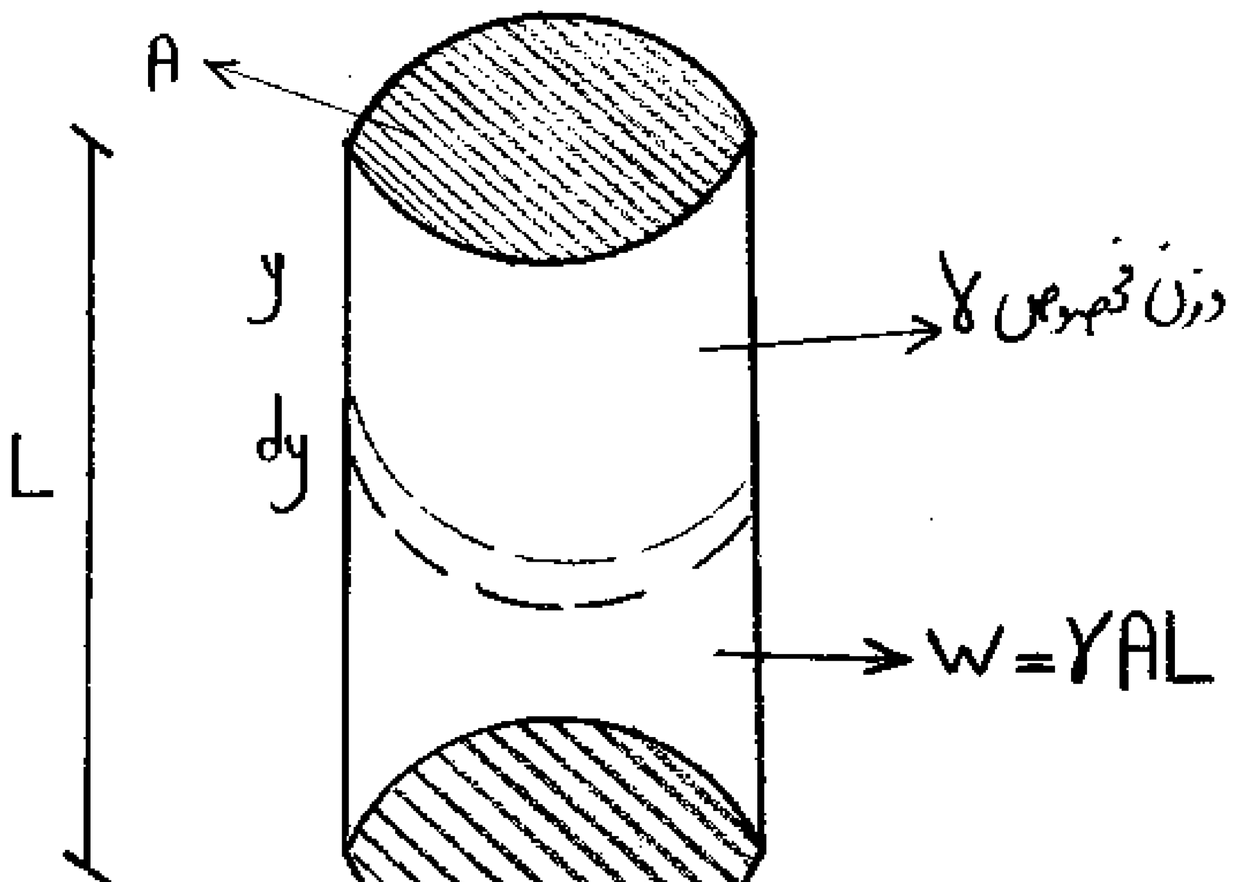
$$e = \varepsilon_{\ell} + \varepsilon_d + \varepsilon_d = \frac{(1-2\nu)P}{EA}$$

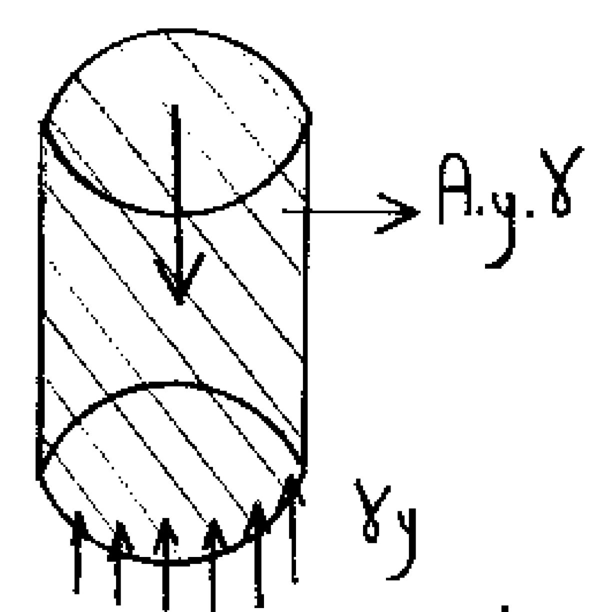
or

$$e = \frac{(1-2\nu)}{E}\,\theta = \frac{(1-2\nu)}{E}\left(\frac{P}{A}+0+0\right) \qquad \Delta V = e.V = e.A.L = \frac{(1-2\nu)PL}{E}$$

$$u_0 = \frac{1}{2E}\,\sigma_L^2 = \frac{P^2}{2EA^2} \quad , \quad U = u_0 \times V = u_0 \times A \times L = \boxed{\frac{P^2L}{2EA}}$$

استوانه تحت اثر وزن خود :




$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{-\gamma y}{E}$$

$$\longrightarrow \Delta(dy) = \frac{-\gamma y}{E}\,.dy$$

$$* \; \Delta L = \int_0^L -\frac{\gamma y}{E}\,dy = \frac{-\gamma L^2}{2E} = \frac{-W}{2}\,\frac{L}{EA} \; **$$

* تغییر مکان انتهای یک ستون تحت وزن خود معادل است با تغییر مکان یک ستون بدون وزن

* با یک بار متمرکز به اندازه نصف وزن در نوک آن

کرنش سطحی : $\varepsilon_d + \varepsilon_d = 2(-\nu\,\varepsilon_{\ell}) = +2\nu\,\frac{\gamma y}{E}$

کرنش محیطی : $\varepsilon_R = \varepsilon_d = -\nu\,\varepsilon_{\ell} = \frac{+\nu\gamma y}{E}$

کرنش سطح جانبی : $\varepsilon_L + \varepsilon_d = \frac{-\gamma y}{E} + \frac{\nu\gamma y}{E} = -(1-\nu)\frac{\gamma y}{E}$

تغییر سطح جانبی : $\int_0^L -(1-\nu)\frac{\gamma y}{E} \times \text{محیط} \times dy = \frac{-(1-\nu)\gamma}{E} \times \text{محیط} \times \frac{L^2}{2} = \frac{-(1-\nu)\gamma}{E} \times \frac{L}{2} \times \text{سطح جانبی}$

$$e = \frac{1-2\nu}{E}\,\theta = \frac{1-2\nu}{E}(-\gamma y+0+0)$$

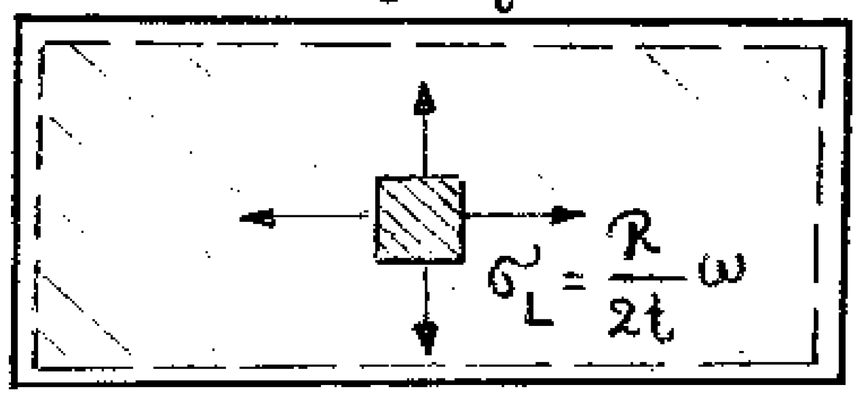
$$\Delta V = \int_0^L \frac{-(1-2\nu)\gamma y}{E}\,.A.dy$$

$$u_0 = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{\gamma^2y^2}{2E} \longrightarrow U = \int_0^L \frac{\gamma^2y^2}{2E}\,.A.dy = \frac{\gamma^2}{2E}\,A\,.\,\frac{L^3}{3}$$

* تمامی مراحل از طریق فرمول های قبلی *

تنظیم: محمد حاج صادقی

استاد: دکتر عرفانی $\sigma_\theta = \frac{R}{t}\omega$




$* \ \varepsilon_L = \frac{\sigma_L}{E} - \nu \frac{\sigma_\theta}{E}$

$* \ \varepsilon_L = (0.5 - \nu) \frac{R\omega}{tE}$

$\Delta L = \varepsilon_L \cdot L$

? : تغییر محیط

$*$ کرنش محیط : ? $= \frac{\sigma_\theta}{E} - \nu \frac{\sigma_L}{E} = (1 - 0.5\nu) \frac{R\omega}{tE}$

$*$ محیط $= 2\pi R \longrightarrow \Delta($ محیط $) = 2\pi \Delta R$

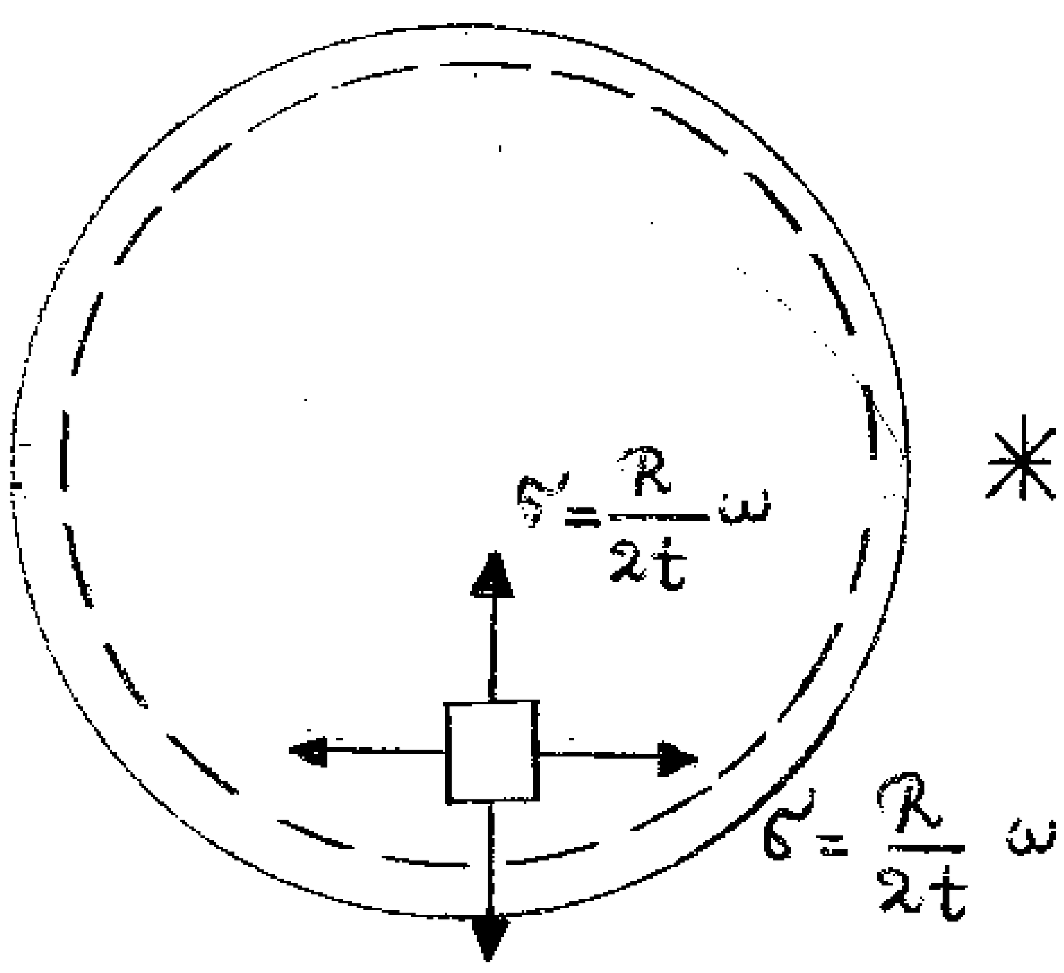
$*$ کرنش محیطی $= \frac{\Delta R}{R} = \varepsilon_R \longrightarrow \Delta R = (1 - 0.5\nu) \frac{R\omega}{tE} \times R$ $*$

$*$ تغییر سطح جانبی = ?

تغییر حجم فضای داخلی لوله : حجم = طول × مساحت ⟶ تغییر حجم $= \Delta A \cdot L + \Delta L \cdot A$

تغییر حجم نسبی فضای داخلی : تغییر سطح داخلی + $\varepsilon_L$ ، سطح داخلی $= \pi R^2$ ، $\Delta($سطح داخلی$) = 2\pi R \ \Delta R$

تغییر سطح نسبی داخلی $= 2\varepsilon_R$ ، کرنش حجمی مصالح لوله : $\frac{1-2\nu}{E}(\sigma_L + \sigma_\theta + 0)$




$*$ کرنش محیطی : $\frac{\sigma}{E} - \nu \frac{\sigma}{E} = \frac{1-\nu}{E} \frac{R}{2t} \omega = \varepsilon_P$

$*$ کرنش سطح جانبی $= \varepsilon_P + \varepsilon_P = 2\varepsilon_P$

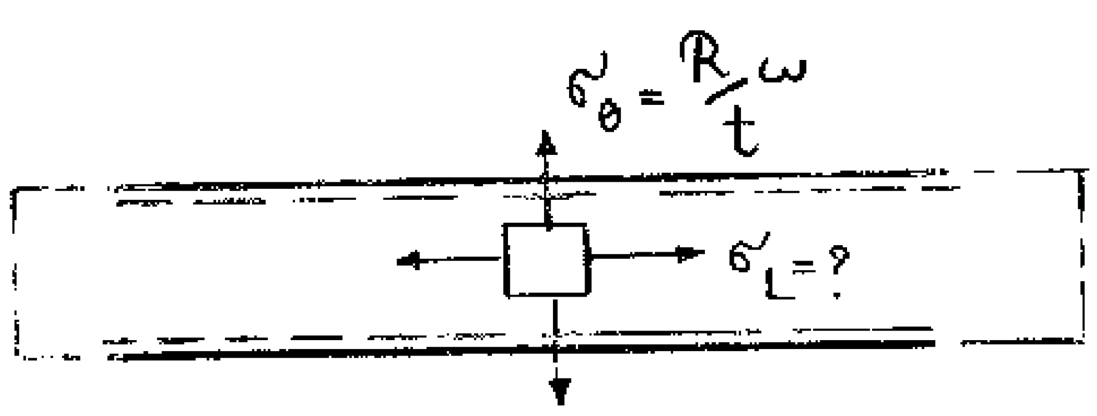
کرنش شعاعی :

محیط $= 2\pi R \longrightarrow \Delta($ محیط $) = 2\pi \Delta R \longrightarrow \varepsilon_P = \varepsilon_R$

حجم مصالح : $e_v = \left(\frac{1-2\nu}{E}\right) \theta (\sigma + \sigma + 0)$

(حجم مخزن) فضای داخلی : $e_v = 3\varepsilon_R = 3 \frac{(1-\nu)}{E} \frac{R}{2t} \omega$

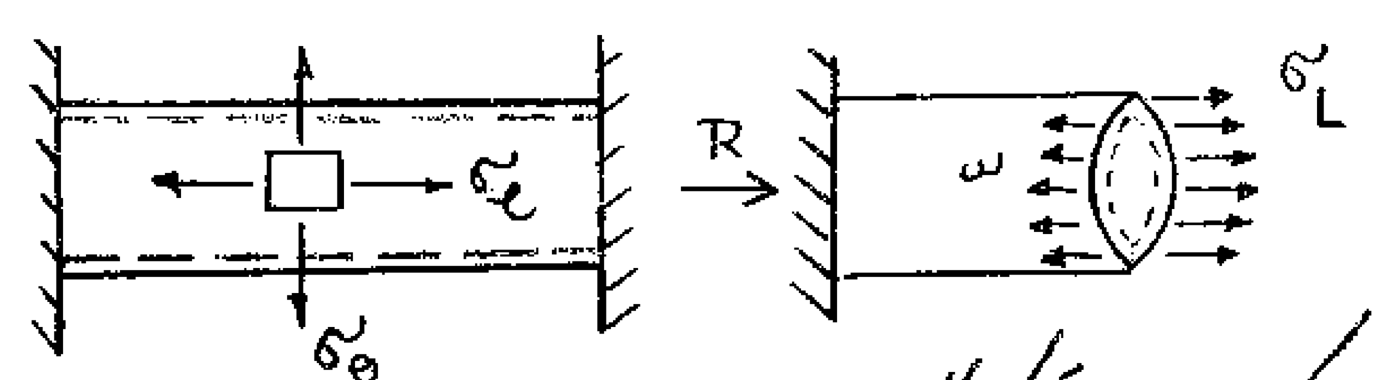
انرژی Q بدست آورید




بی‌نهایت : بارگذاری ثابت $\longrightarrow \varepsilon_\ell = 0$

$\varepsilon_\ell = \frac{\sigma_\ell}{E} - \frac{\nu \sigma_\theta}{E} = 0 \longrightarrow \sigma_L = \nu \sigma_\theta$

$\varepsilon_\ell = 0$




مطلوب است تعیین عکس‌العمل تکیه‌گاهی :

$R + \sigma_\ell \times 2\pi R t - \omega \pi R^2 = 0$

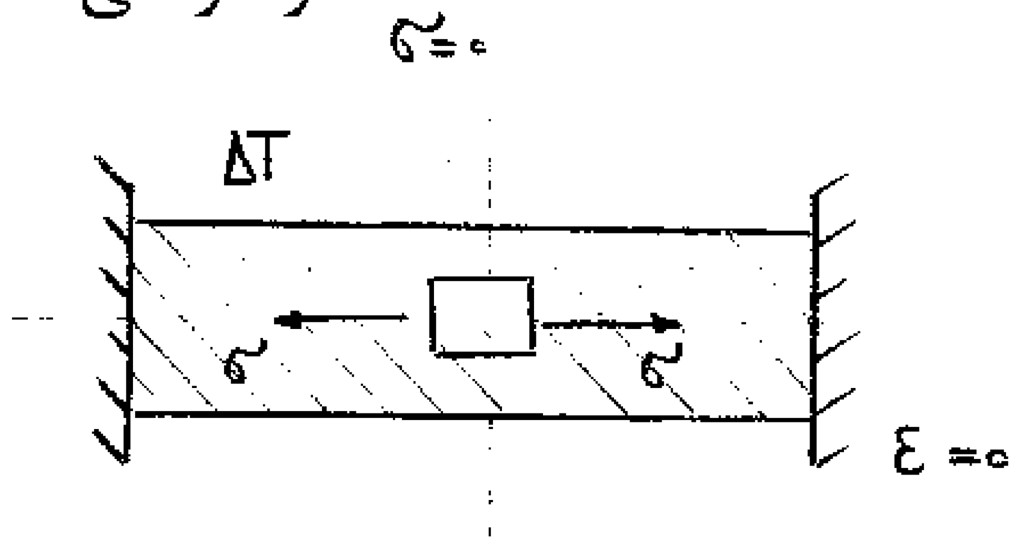
$R = \omega \pi R^2 - \nu \frac{R}{t} \omega \cdot 2\pi R t$

$R = \omega \pi R^2 (1 - 2\nu)$

اگر تراکم ناپذیر باشد $(\nu = 0)$

تنظیم: محمد حاج صادقی

استاد: دکتر عرفانی



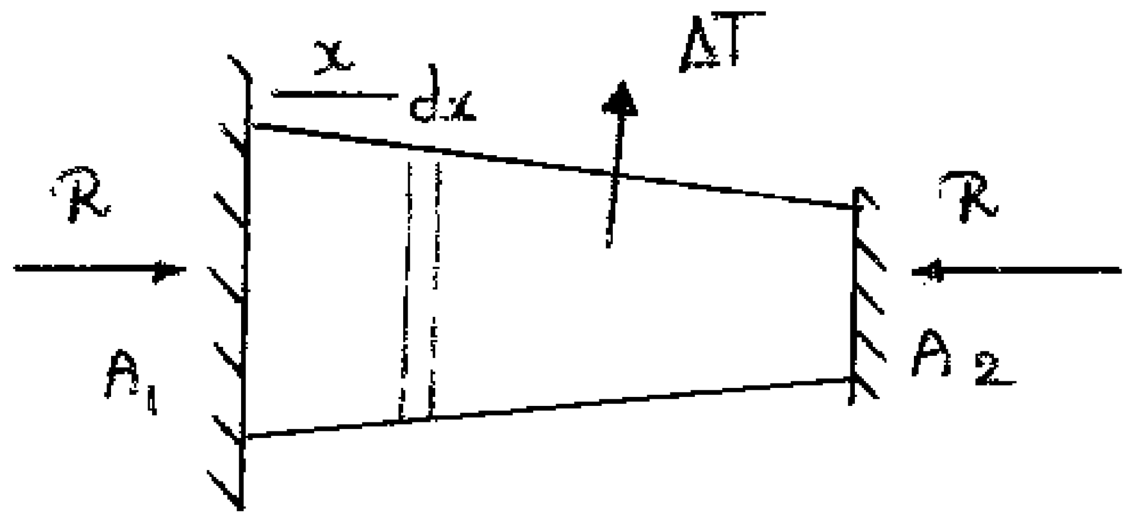

$$\Delta L = 0 \xrightarrow[\text{حرکتی ندارند}]{\text{نقاط انتهایی}} \varepsilon = 0$$

$$\varepsilon_L = \frac{-\sigma}{E} + \alpha\,\Delta T = 0 \longrightarrow \sigma = E\alpha\,\Delta T$$

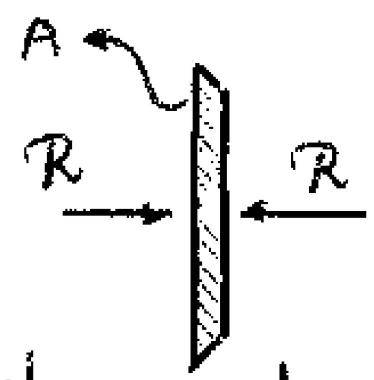
$$\varepsilon_d = -\nu\frac{\sigma_L}{E} + \alpha\,\Delta T = \frac{-\nu(+E\alpha\,\Delta T)}{E} + \alpha\,\Delta T = (1-\nu)\alpha\,\Delta T$$

$$U_0 = \frac{\sigma_L\varepsilon_L}{2} + \frac{\sigma_d\varepsilon_d}{2} + \frac{\sigma_d\varepsilon_d}{2} = \frac{-E\alpha\Delta T}{2}(0-\alpha\Delta T) = \frac{E(\alpha\Delta T)^2}{2}$$

$$U_0 = \frac{1}{2E}\left(\sigma_L^2 + \cancel{\sigma_d^2} + \cancel{\sigma_d^2}\right) - \frac{\nu}{E}\left(\cancel{\sigma_L\sigma_d} + \cancel{\sigma_L\sigma_d} + \cancel{\sigma_d\sigma_d}\right) = \frac{E(\alpha\Delta T)^2}{2}$$




$$\Delta L = 0\ ,\ \varepsilon \neq 0$$



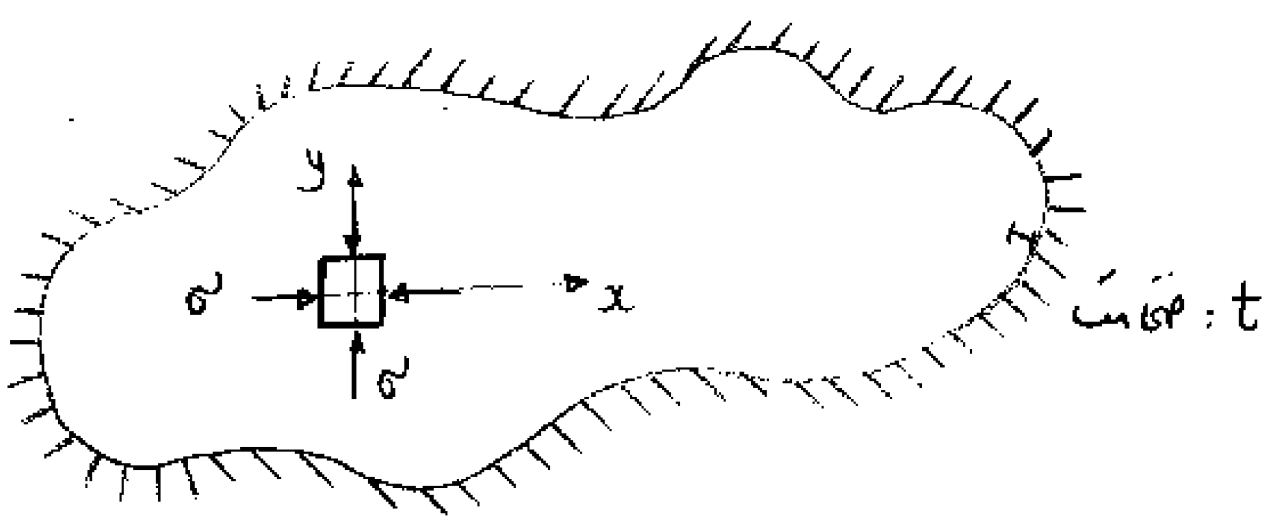

$$\varepsilon_L = \frac{-R}{AE} + \alpha\,\Delta T \longrightarrow \int_0^L \varepsilon_L \cdot dx = 0$$

$$\Delta L = \int_0^L \varepsilon_L\,.dx = 0 \longrightarrow \frac{R}{E}\int_0^L \frac{dx}{A} + \alpha\,\Delta T L = 0 \longrightarrow R = \frac{E\alpha\,\Delta T L}{\int_0^L \frac{dx}{A}}\ ,\ \sigma = \frac{R}{A} = \frac{E\alpha\,\Delta T L}{A\int_0^L \frac{dx}{A}}$$

$$A = A_1 - \frac{A_1 - A_2}{L}x\ ,\ \int_0^L \frac{dx}{A_1 - \frac{A_1-A_2}{L}x} \longrightarrow = \left.\frac{\ln\left(A_1 - \frac{A_1-A_2}{L}x\right)}{\frac{A_1-A_2}{L}}\right|_0^L = \frac{L}{A_1 - A_2}\times\ln\left(A_2/A_1\right)$$

تنش به وجود آمده در المان :

تنش :




$$\Delta A = 0 \xrightarrow[\text{هم حرکتی ندارند}]{\text{چون نقاط با}} \text{کرنش سطحی} = 0$$

$$\longrightarrow \varepsilon_x + \varepsilon_y = 0 \longrightarrow \varepsilon_x = 0\ ,\ -\frac{\sigma}{E} - \nu\left(\frac{-\sigma}{E}\right) + \alpha\,\Delta T = 0$$

$$\longrightarrow \sigma = \frac{E\alpha\,\Delta T}{1+\nu}$$

کرنش حجمی به کرنش ضخامت یکی است زیرا کرنش حجمی جمع سه کرنش است و دوتا از آن ها صفر است.

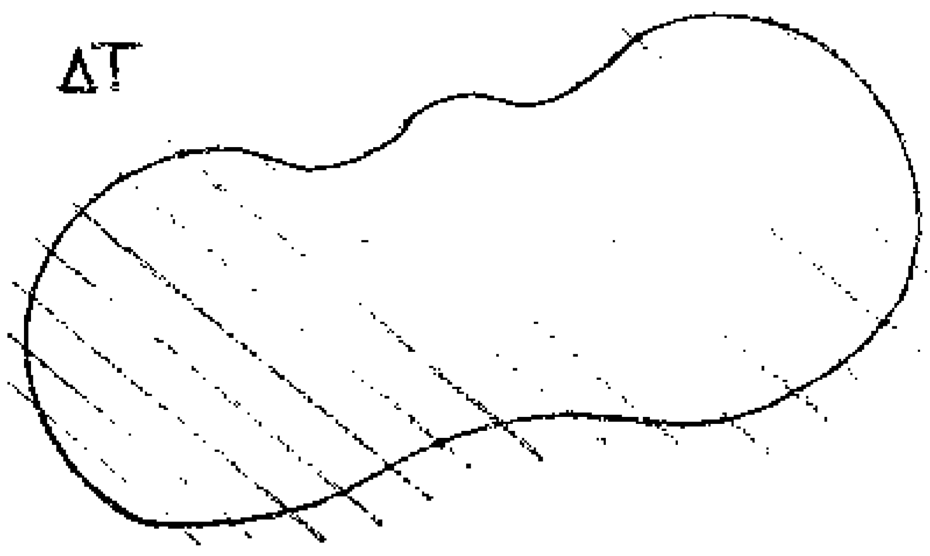
$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y$$

تغییر ضخامت نمونه :

انرژی :

یک حجم در داخل یک حجم صلب دیگر قرار گرفته چه تنشی در آن به وجود می آید.




حجم سه بعدی

$$\Delta V = 0 \longrightarrow \text{کرنش حجمی} = 0 \longrightarrow \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0$$

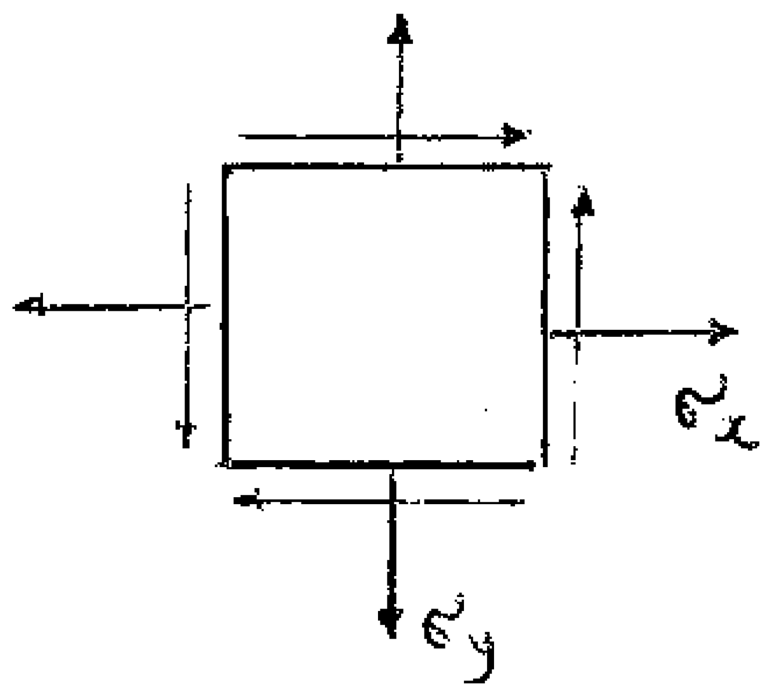
$$\text{چون سه تا عین هم اند} \longrightarrow \varepsilon_x = 0$$

$$\frac{-\sigma}{E} - 2\nu\left(\frac{-\sigma}{E}\right) + \alpha\Delta T = 0$$

انرژی :

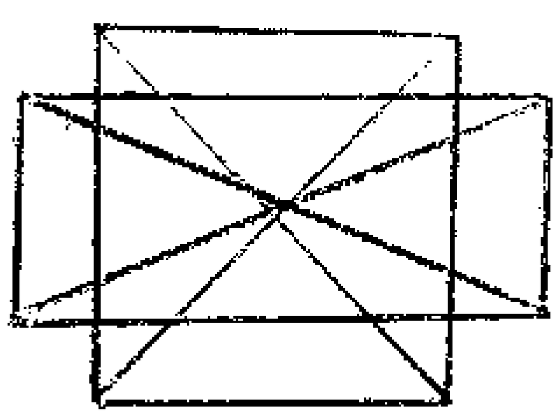
$$\longrightarrow \sigma = \frac{E\alpha\Delta T}{1+2\nu}$$

چه تنشی بین تنش ها برقرار باشد تا طول قطرهای المان تغییر نکند :

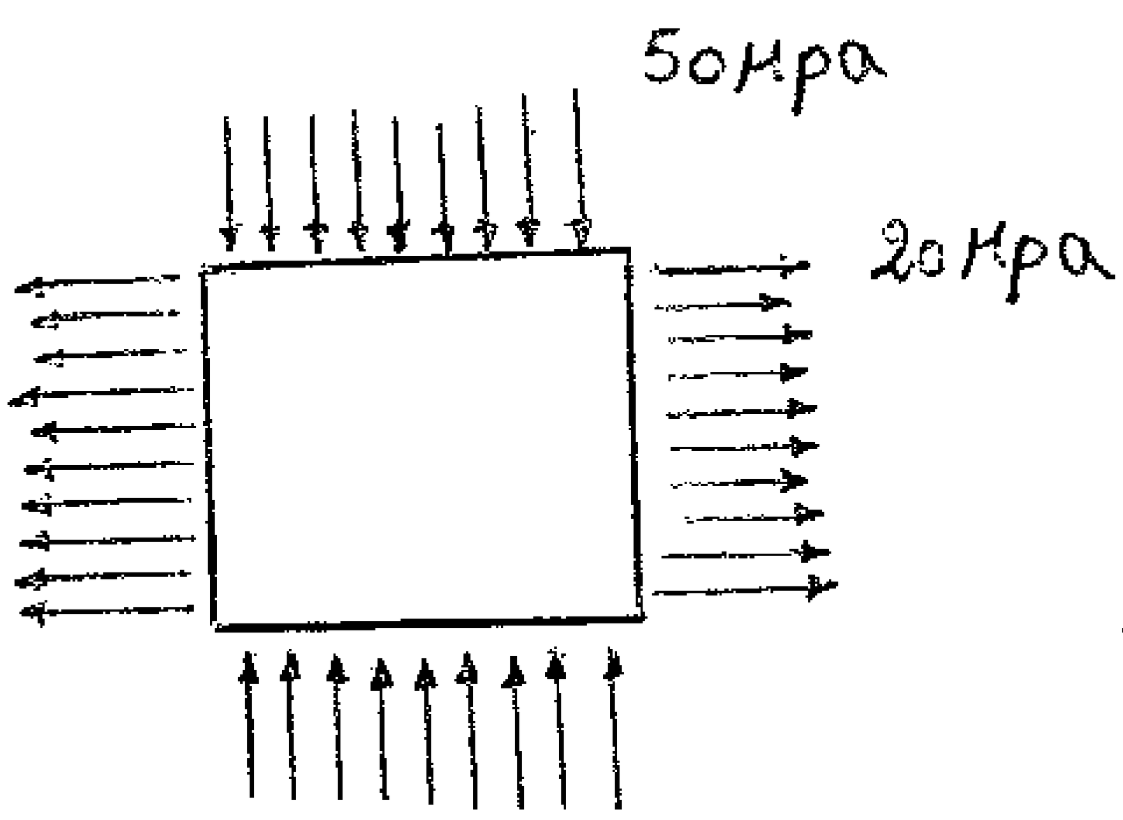



$$1 \longrightarrow \text{کرنش سطحی} = 0 \longrightarrow \varepsilon_x + \varepsilon_y = 0 \longrightarrow \sigma_x + \sigma_y = 0 \longrightarrow \sigma_x = -\sigma_y$$

$$2 \longrightarrow \tau = 0 \; (\longleftarrow \; \gamma = 0)$$



تنها زاویه بین قطرها
عوض می شود.




$E = 200\ Gpa$

$\nu = 0.5$

$$\Delta A = (\varepsilon_x + \varepsilon_y)\, A$$

$$= \left[\left(\frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E}\right) + \left(\frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_x}{E}\right)\right] A$$

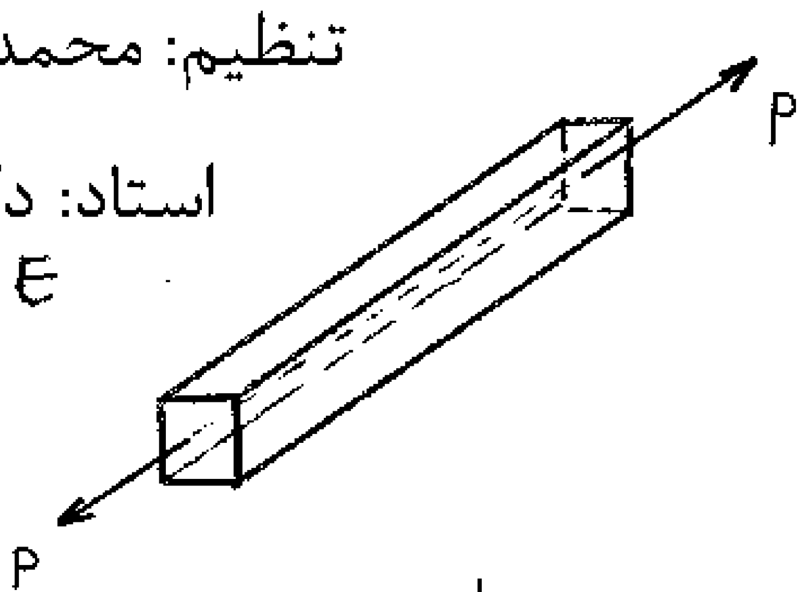
$$= \frac{1-\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)\, A = \frac{1-0.5}{200\times 10^3}\,(20-30)\times 20\times 20$$

$$\Delta A_0 = (\varepsilon_x + \varepsilon_y)\, A_0$$

[حتی اگر $A_0$ حفره باشد]

تنظیم: محمد حاج صادقی

استاد: دکتر عرفانی




## نیروی محوری و روابط میله ها:

$$* \ \Delta L = \frac{PL}{AE} + \alpha \Delta T L + e \ \text{[خطای حین ساخت]} *$$

$\Delta L$:
- $+$ : افزایش طول
- $-$ : کاهش طول

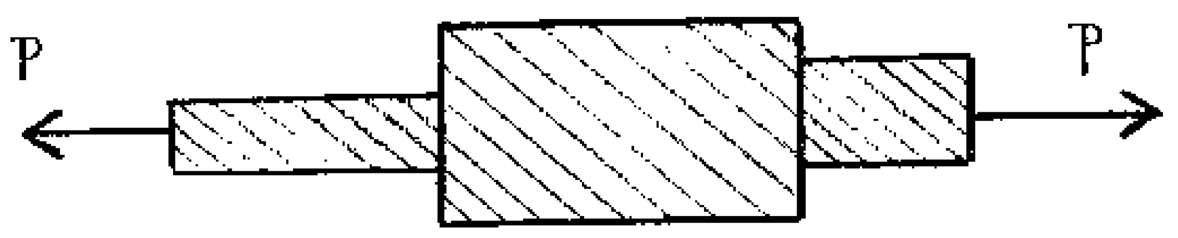
$\Longrightarrow$

$P$:
- $+$ : نیروی کششی
- $-$ : نیروی فشاری

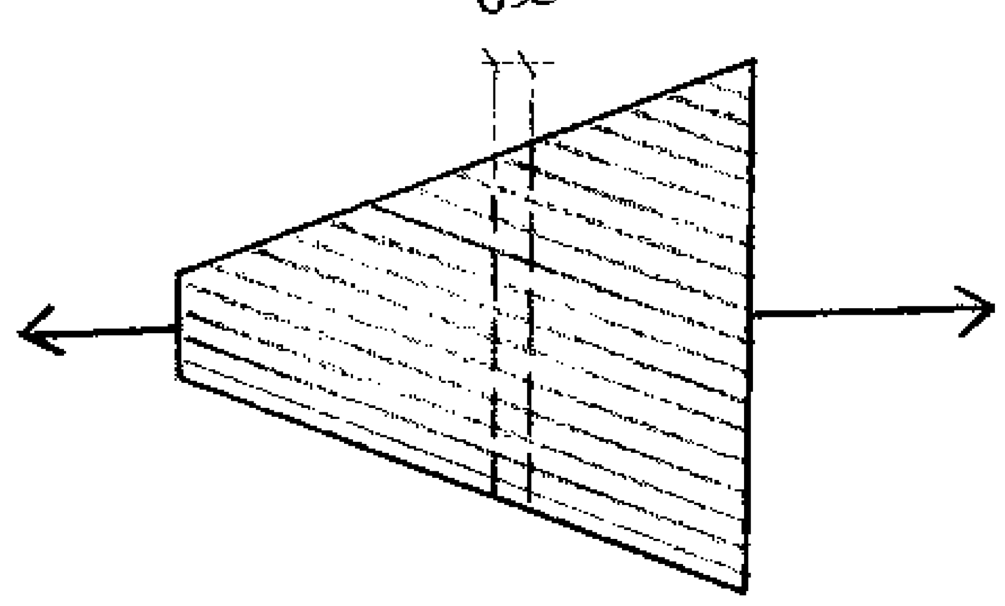
$\Delta T$:
- $+$ : افزایش دما
- $-$ : کاهش دما

$L$:
- $+$ : اضافه طول
- $-$ : کسری طول

اگر تغییرمکان ها را دلخواه در نظر گرفتیم آن ها اگر نیروها با جهت تغییرمکان ها یکسان بود مثبت ولی اگر متفاوت بود علامت را منفی در نظر می گیریم. ∗[تغییرمکان مثبت یا منفی]

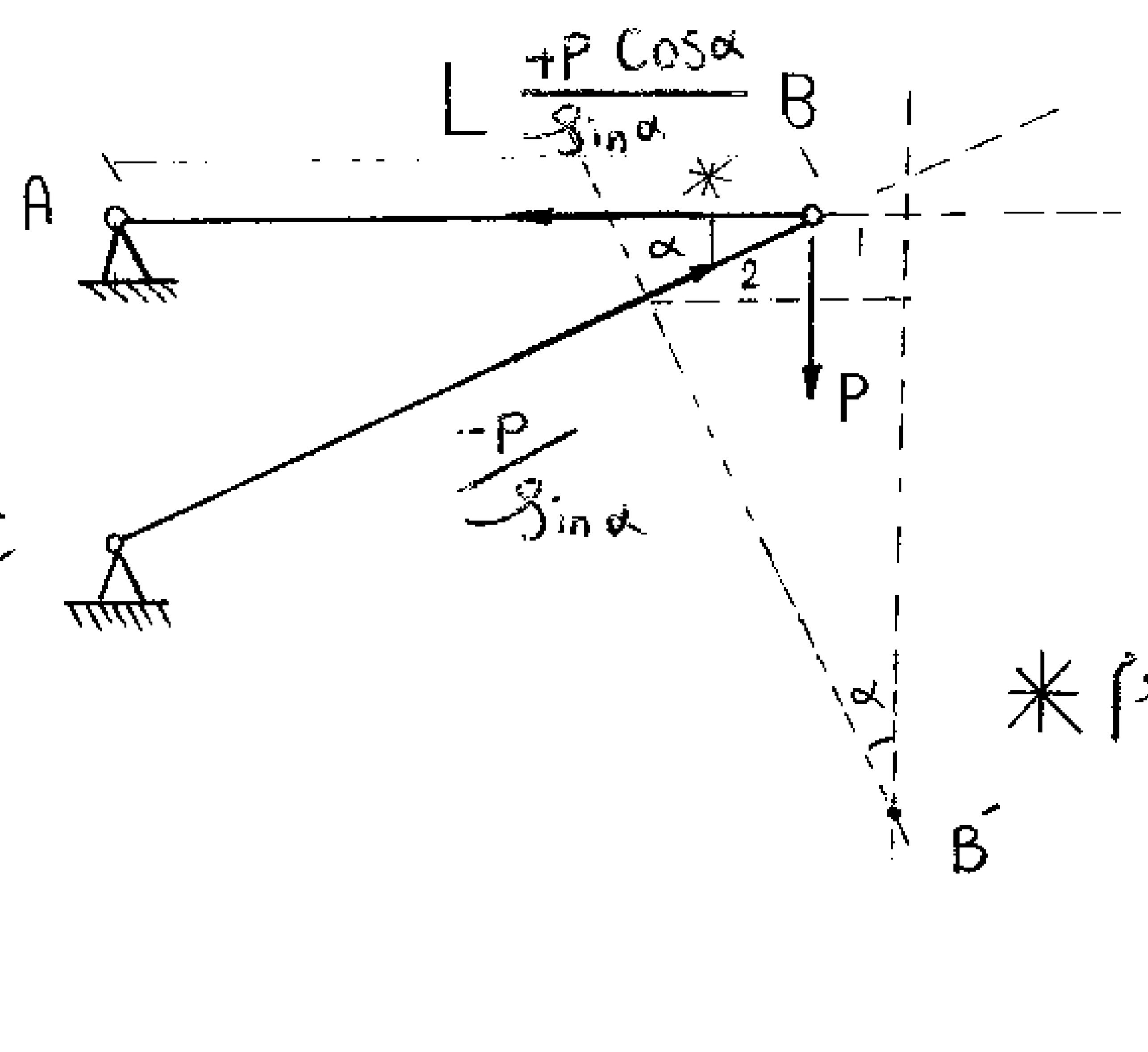



$$\Delta L = \sum \frac{P_i L_i}{E_i A_i} + \sum \alpha_i \Delta T_i L_i + \sum e_i$$




$$\Delta L = \int_0^L \frac{P}{EA} dx + \int_0^L \alpha \Delta T dx + e$$

**مطلوب است تغییرمکان نقطه B** اگر هر دو میله تحت فشار باشد.



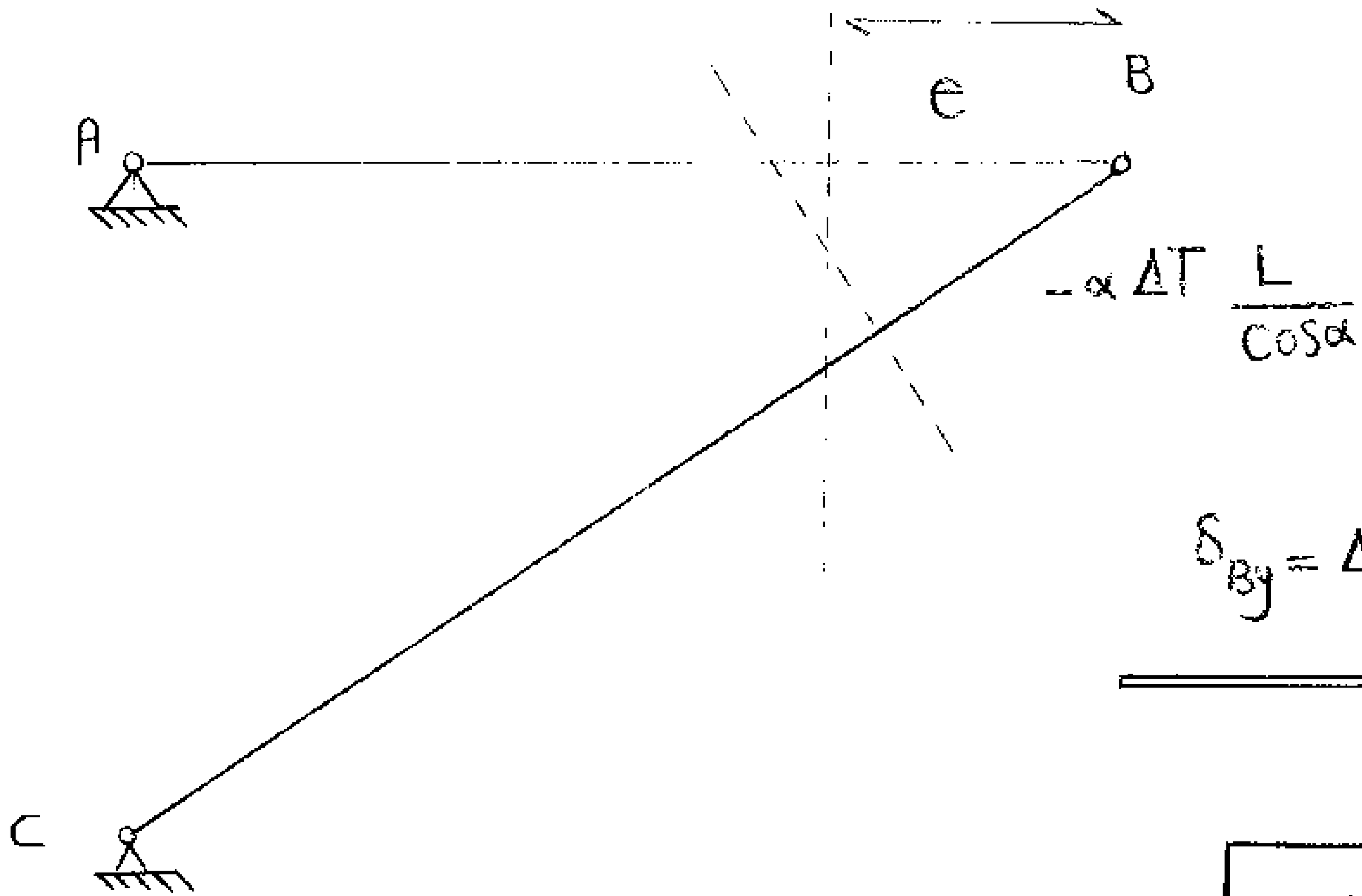

$$* \ \Delta L_1 = \frac{P \cos\alpha}{\sin\alpha} \cdot \frac{L}{EA} \quad , \quad \Delta L_2 = \frac{P}{\sin\alpha} \cdot \frac{L}{EA\cos\alpha}$$

$$\delta_{Bx} = \Delta L_1 \quad , \quad \delta_{By} = \Delta L_2 \sin\alpha + \frac{\Delta L_1 + \Delta L_2 \cos\alpha}{\tan\alpha}$$

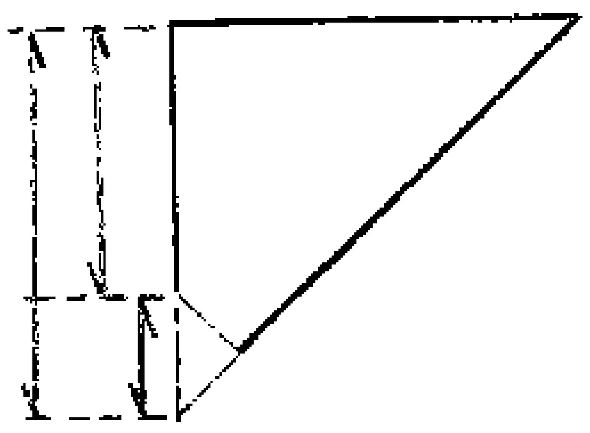
$$* \ \text{راه دوم} : \ \delta_{By} = \frac{\Delta L_2/\cos\alpha + \Delta L_1}{\tan\alpha}$$

اگر میله‌ی AB به اندازه‌ی e کوتاه ساخته شده باشد و میله‌ی BC به اندازه‌ی ΔT کاهش دما یابد موقعیت جدید B: استاد دکتر عرفانی

* در سازه‌های معین فقط بارگذاری‌های مستقیم از نوع نیرو و یا لنگر می‌تواند ایجاد نیروی داخلی کند و بارگذاری‌های غیرمستقیم از نوع تغییرشکلی مانند تغییر دما، خطای حین ساخت، نشست‌های تکیه‌گاهی و ... به هیچ وجه ایجاد نیروی داخلی نمی‌کند.




$$\delta_{Bx} = e$$

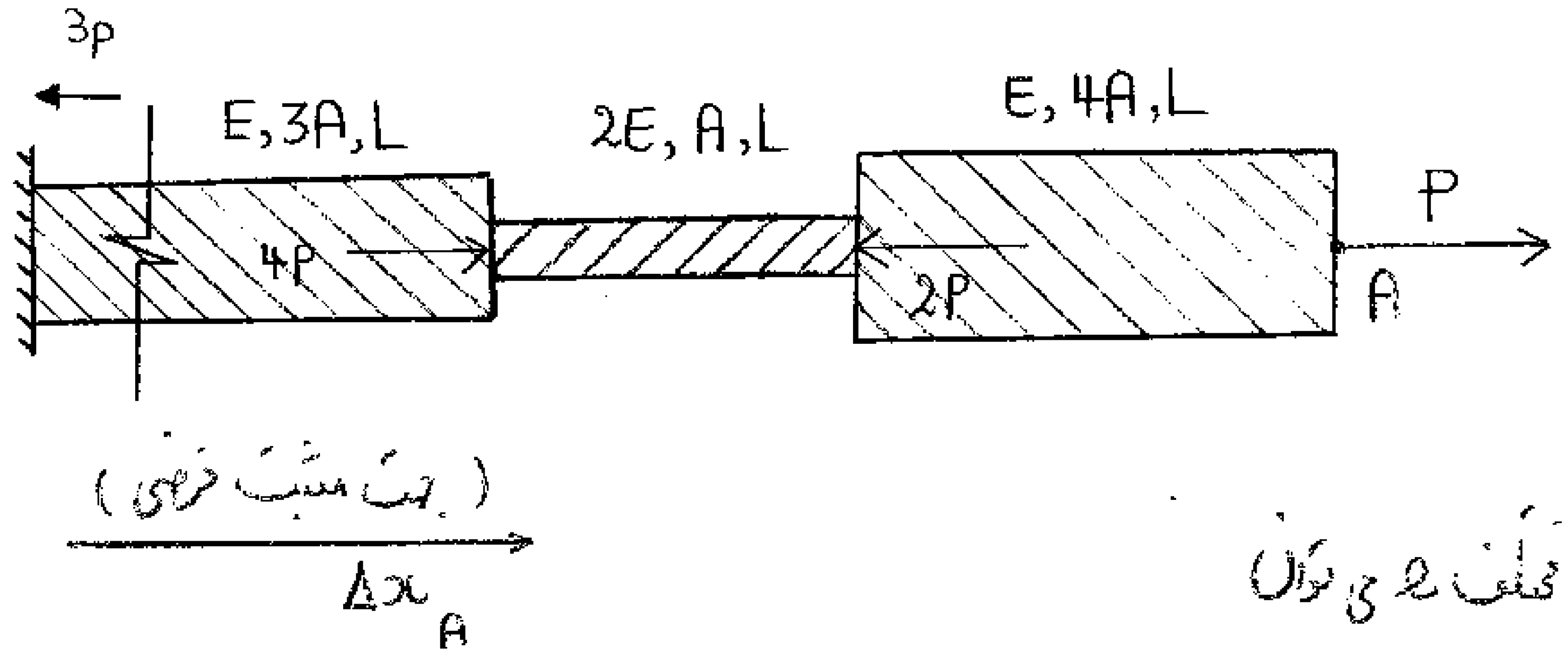


$$\delta_{By} = \Delta L_1 \tan\alpha - \frac{\Delta L_1/\cos\alpha - \Delta L_2}{\sin\alpha}$$

$\boxed{\text{مثال حل ریاضی: سازه معین}}$

مطلوب است تغییرمکان افقی نقطه‌ی A: می‌دانیم A به کدام جهت می‌رود.

هر عاملی باعث به راست رفتن نقطه‌ی A بشود + و هر عاملی باعث به چپ رفتن نقطه‌ی A بشود − است.



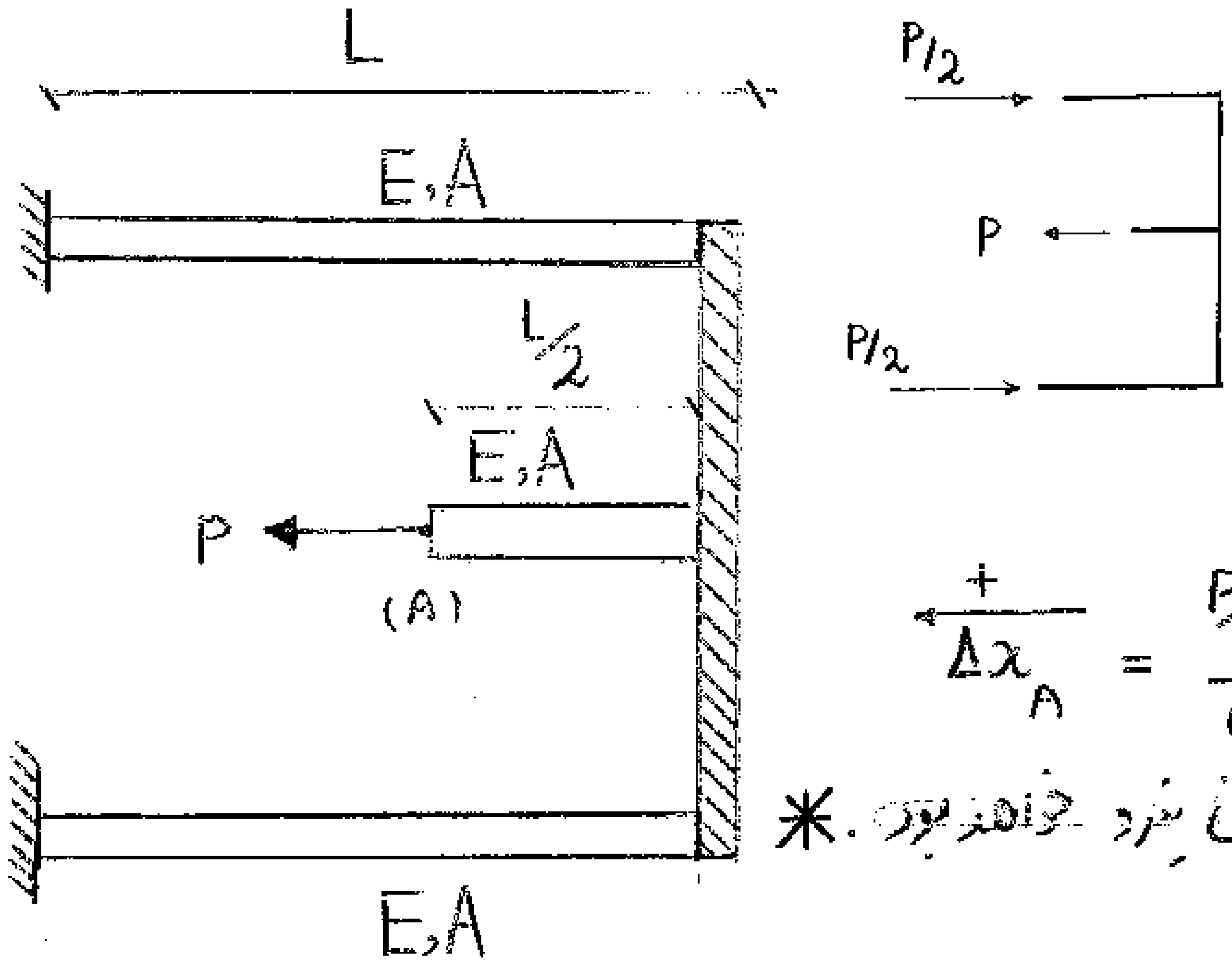

در سیستم‌های معین اثر انعطاف‌پذیری قسمت‌های مختلف را می‌توان جداگانه محاسبه کرده و سپس با هم ترکیب نمود. در این صورت در هر مرحله کافی است فقط یکی از المان‌ها انعطاف‌پذیر فرض شده و بقیه صلب فرض شوند.

$$\overrightarrow{\Delta x_A} = +\frac{3PL}{E3A} - \frac{PL}{2EA} + \frac{PL}{4EA} = +\frac{3PL}{4EA}$$

* حرکت به سمت راست است.

مطلوب است تغییرمکان نقطه A:

[تغییرمکان نسبی است و چون تغییرمکان نقطه‌ی A نسبت به جایی ذکر نشده پس در نتیجه نسبت به زمین می‌باشد و روی همین یک مسیر حل می‌کنیم]




$$\overset{+}{\longleftarrow}\Delta x_A = \frac{\frac{P}{2}L}{EA} + \frac{P\frac{L}{2}}{EA} = +\frac{PL}{EA}$$

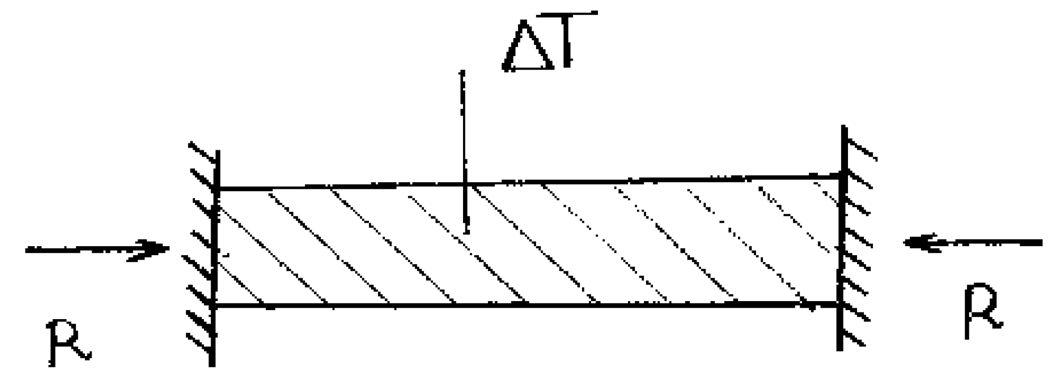
* اگر فقط یک نیرو در یک سازه اثر کند، تغییرمکان آن نیرو در جهت مثبت آن نیرو خواهد بود. *

تنظیم: محمد حاج صادقی

استاد: دکتر عرفانی

در مسائل نامعین برخلاف مسائل معین در ابتدای شروع به حل مسأله نیروهای داخلی معلوم نبوده و بنابراین علاوه بر معادلات تعادل نیاز به معادلات دیگری به نام معادلات سازگاری خواهیم داشت.

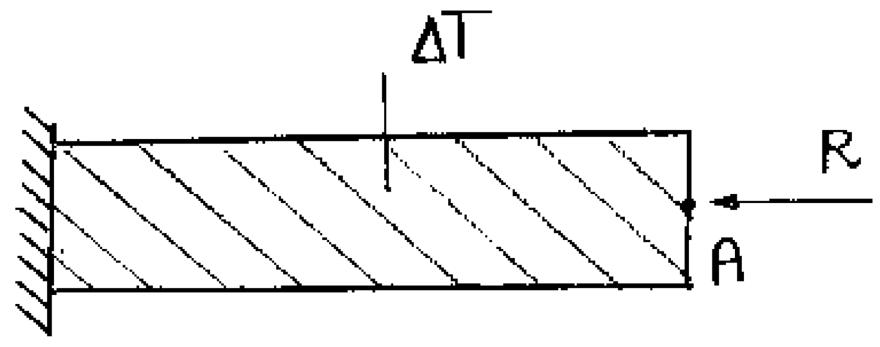
①




$$\Delta L = 0 \longrightarrow \frac{-RL}{EA} + \alpha \Delta T L = 0 \longrightarrow \boxed{R = EA\alpha\Delta T}$$

(حل فیزیکی)

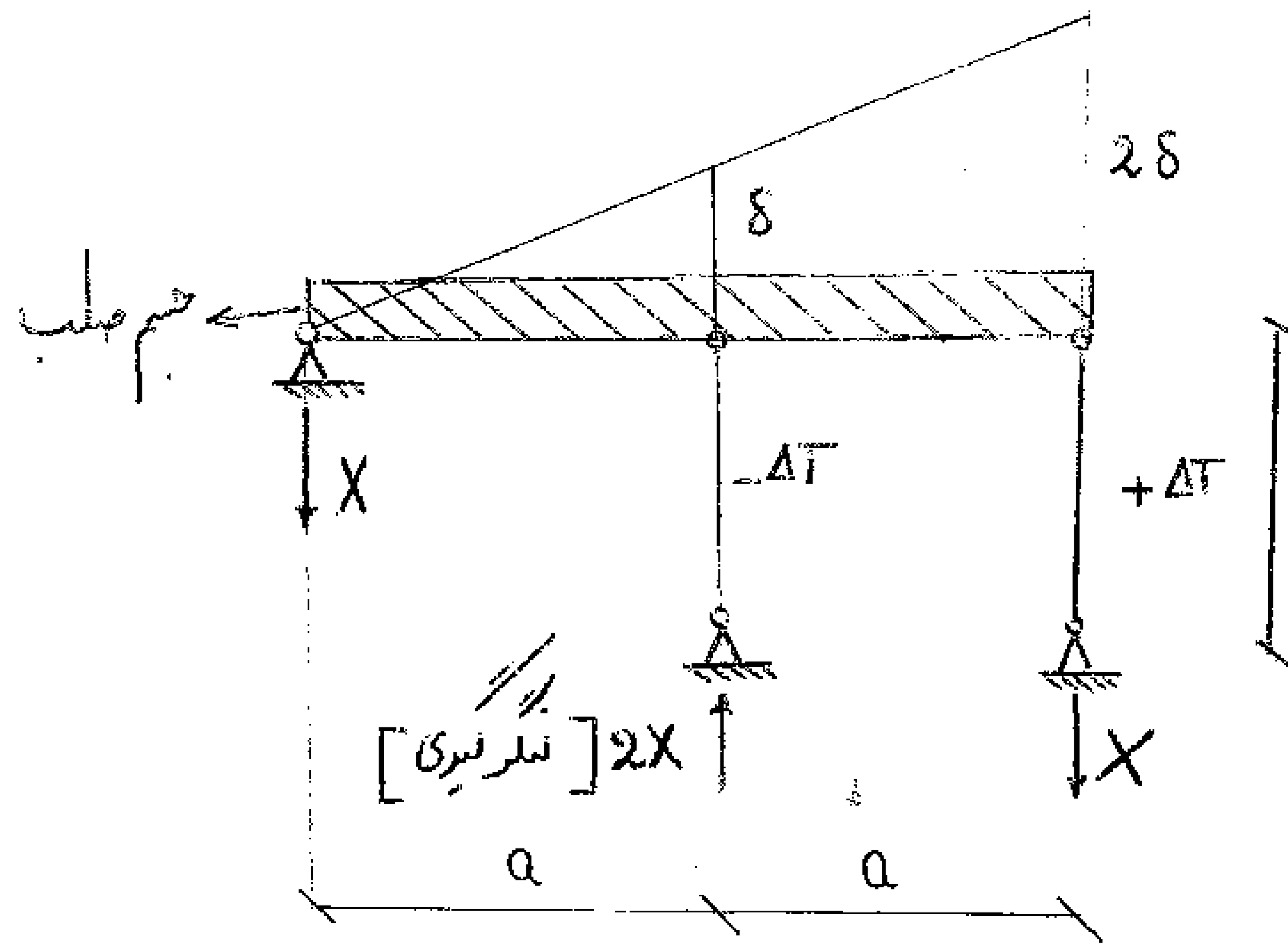
②




$$\Delta x_A = 0 \qquad \overset{+}{\longrightarrow}\ \Delta x_A = +\alpha\Delta T L - \frac{RL}{EA} \longrightarrow \boxed{R = EA\alpha\,\Delta T}$$

(حل ریاضی)

مطلوب است تعیین عکس العمل قائم در تکیه گاه مفصلی:



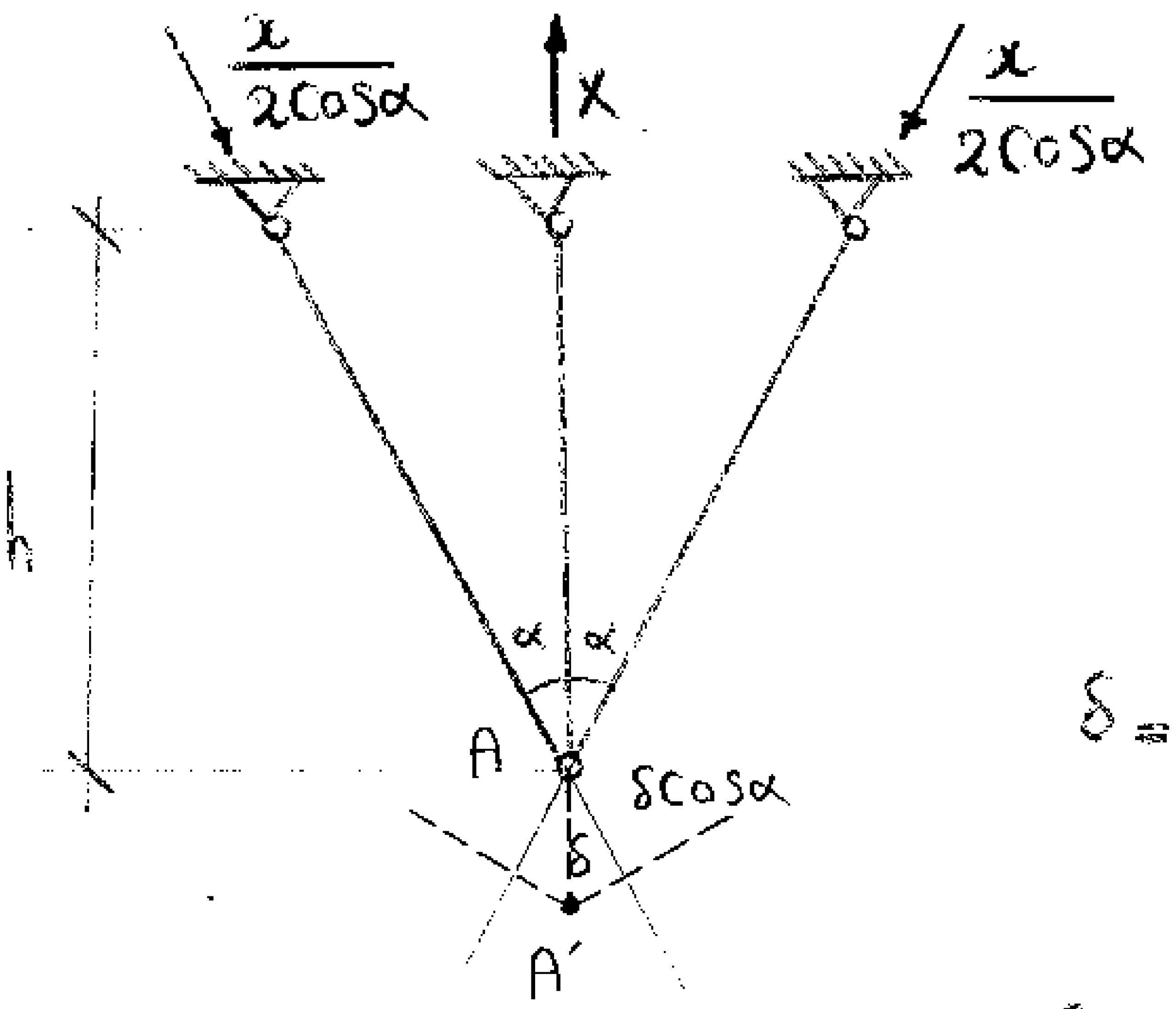

| | |
|---|---|
| * | جهت نیروها = فرضی<br>جهت تغییرمکان = فرضی \| ربطی به هم ندارند. |

(جهت بالا مثبت)

*حل ریاضی*

$$\delta = \frac{-2xL}{EA} - \alpha\Delta T L\ ,\quad 2\delta = \frac{xL}{EA} + \alpha\Delta T L$$

$$\frac{xL}{EA} + \alpha\Delta T L = 2\left(\frac{-2xL}{EA} - \alpha\Delta T L\right) \Longrightarrow x = -0.6\, EA\alpha\,\Delta T$$




اگر میله وسطی به اندازه e کوچکتر ساخته شود پس از نصب چه نیروی در میله ها به وجود آمده و نقطه A در چه موقعیتی قرار می گیرد:

[بالا می رود]

$$\delta = \frac{xh}{EA} - e$$

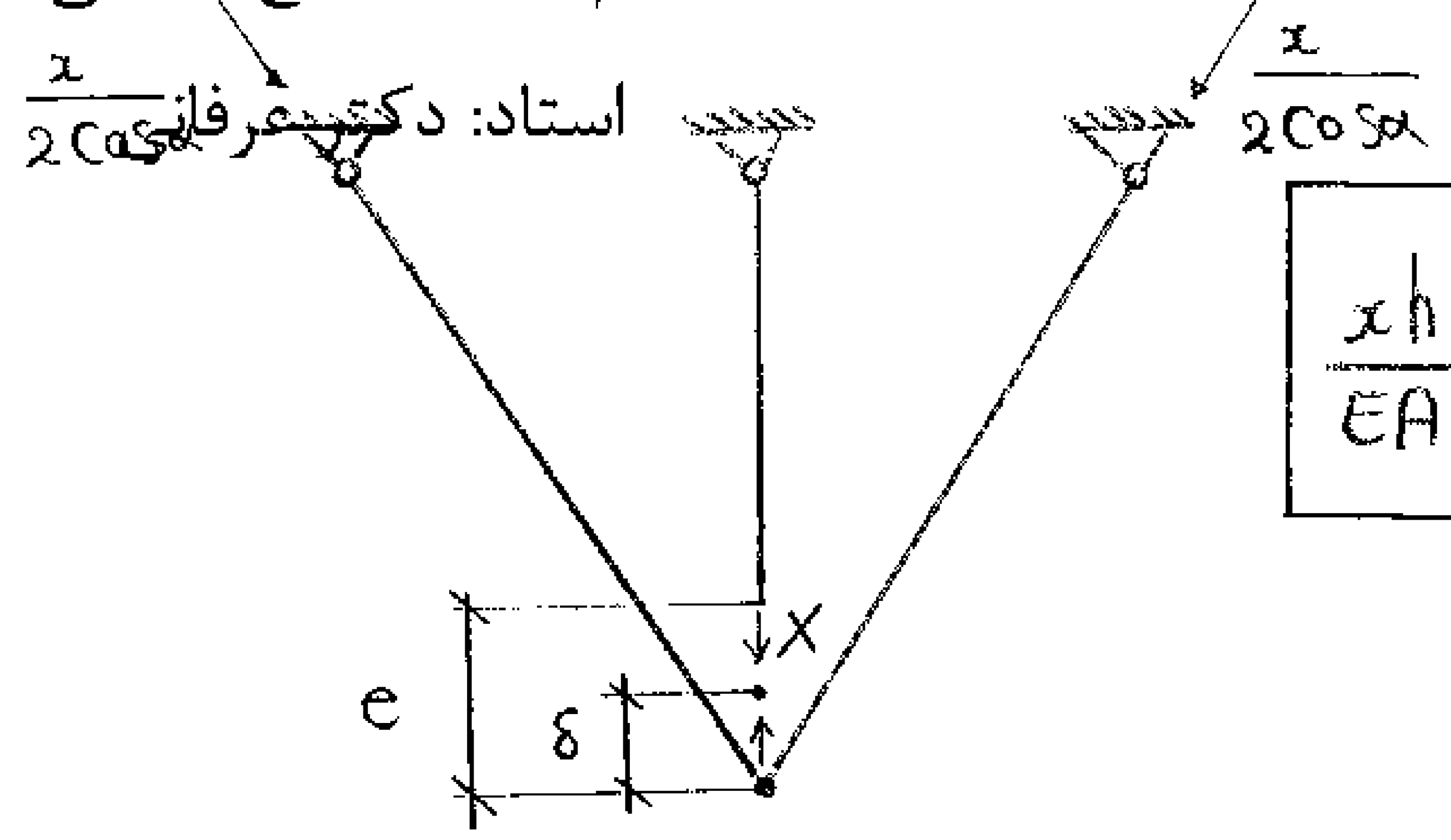
* [روش معین کردن سیستم] *

$$\delta\cos\alpha = -\frac{x}{2\cos\alpha}\,\frac{h}{\cos\alpha\, EA}$$

$$\longrightarrow \frac{xh}{EA}\cos\alpha - e\cos\alpha = \frac{-xh}{2EA\cos^2\alpha} \longrightarrow \boxed{x = \frac{2EAe}{h}\,\frac{\cos^3\alpha}{(2\cos^3\alpha + 1)}}$$

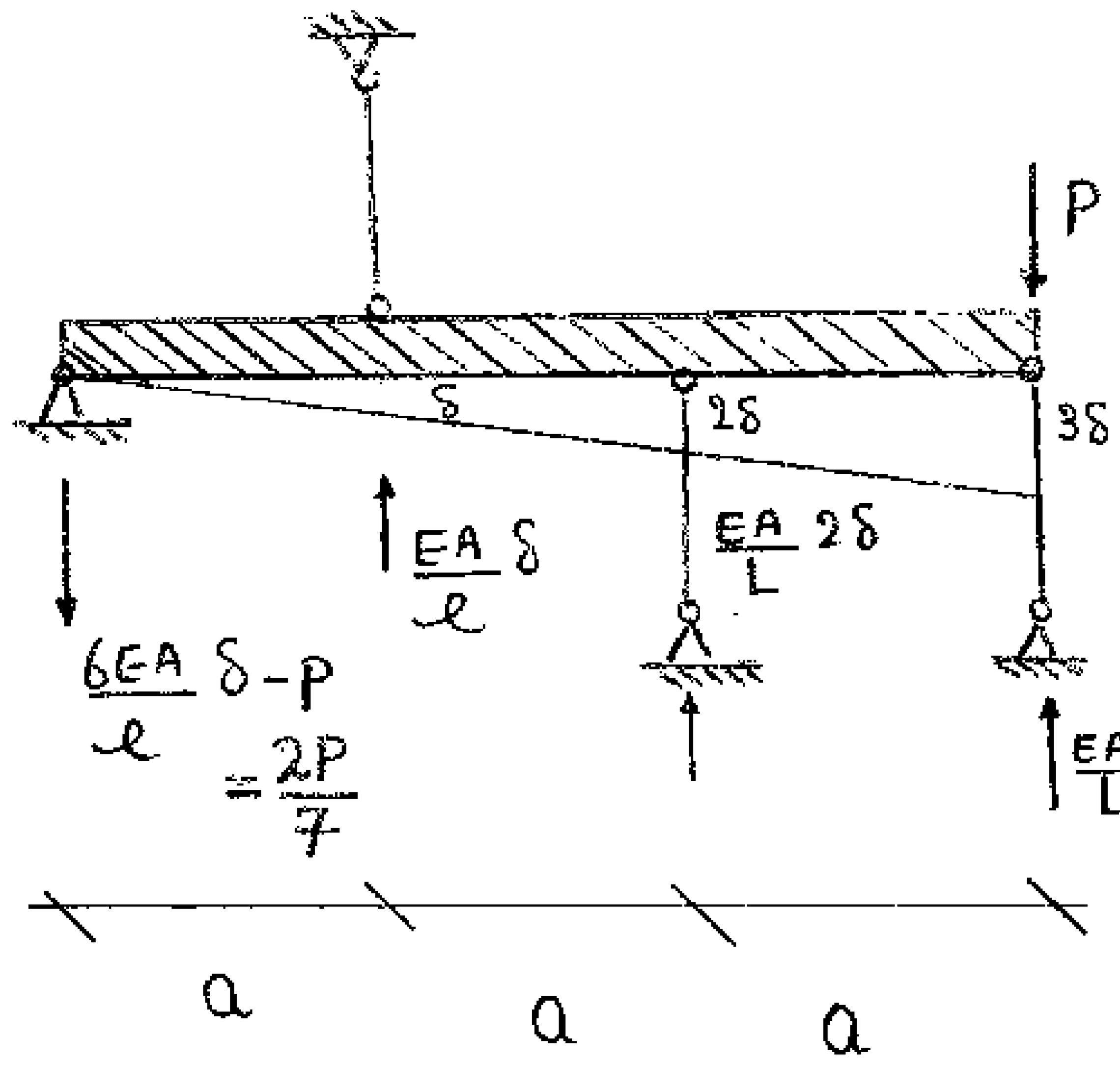
تنظیم: محمد حاج صادقی

استاد: دکتر عرفانی




$$\boxed{\frac{xh}{EA}+\left[\frac{x}{2\cos\alpha}\cdot\frac{h}{\cos\alpha\, EA}\right]\Big/\cos\alpha=e}$$

[روش معین کردن]



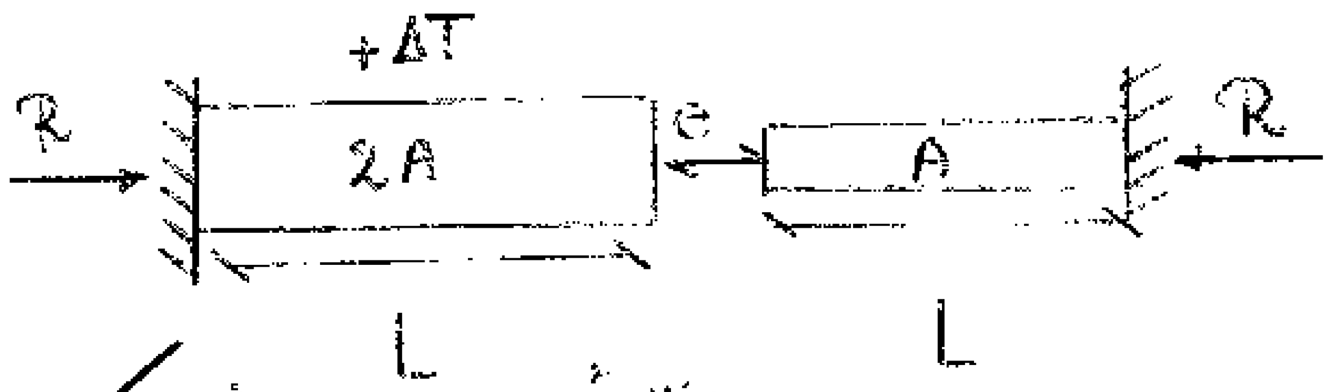

* مطلوب است عکس العمل تمام تکیه گاه ها :

در حل مسائل نامعین اگر تعداد نیروهای مجهول بیش درجهٔ نامعینی کم باشند آن‌ها به عنوان مجهولات اصلی انتخاب می‌کنیم این روش به روش نرمی (روش نیرو، روش سازگاری) می‌نامیم ولی اگر تعداد تغییر مکان‌های مستقل سازه کم باشد که به آن درجهٔ آزادی یا نامعینی سینماتیکی سیستم گفته می‌شود بهتر است تغییر مکان‌ها به مجهولات اصلی انتخاب کنیم که به این روش روش سختی (روش تغییر مکان، روش تعادل) گفته می‌شود.

$E, A, L$ میله‌ها یکسان :

$$\Sigma M_A=0 \longrightarrow \frac{EA}{L}\delta\cdot a+\frac{2EA}{l}\delta\cdot 2a+\frac{3EA}{l}\delta\cdot 3a=p\cdot 3a \rightarrow \frac{EA}{l}\delta=\frac{3P}{14}$$

مطلوب است تعیین عکس العمل های تکیه گاهی :



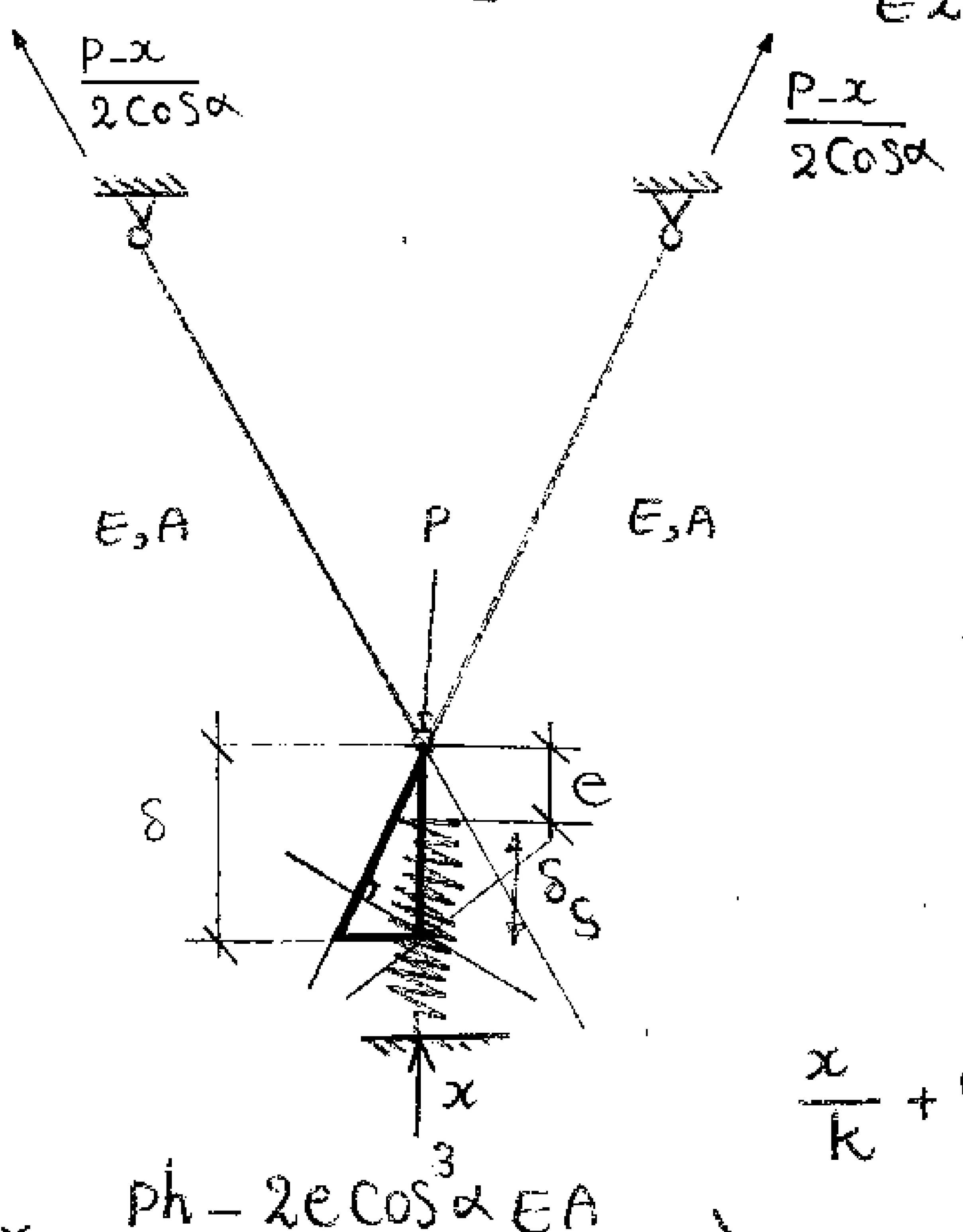

$$\text{If } \alpha\Delta TL\leqslant e \longrightarrow R=0$$

$$\text{If } \alpha\Delta TL> e \longrightarrow R=?$$

* حل فیزیکی *

افزایشی افزایشی

$$\Delta L_1+\Delta L_2=e \longrightarrow \left(\frac{-RL}{E2A}+\alpha\Delta TL\right)+\left(\frac{-RL}{EA}\right)=e \longrightarrow R=\frac{2}{3}\left[EA\left(\alpha\Delta T-\frac{e}{l}\right)\right]$$




مطلوب است تعیین نیروی فنر :

* حل فیزیکی *

$$\delta_S=\delta-e=\frac{x}{k}$$

$$\delta\cos\alpha=\frac{P-x}{2\cos\alpha}\cdot\frac{h/\cos\alpha}{EA}$$

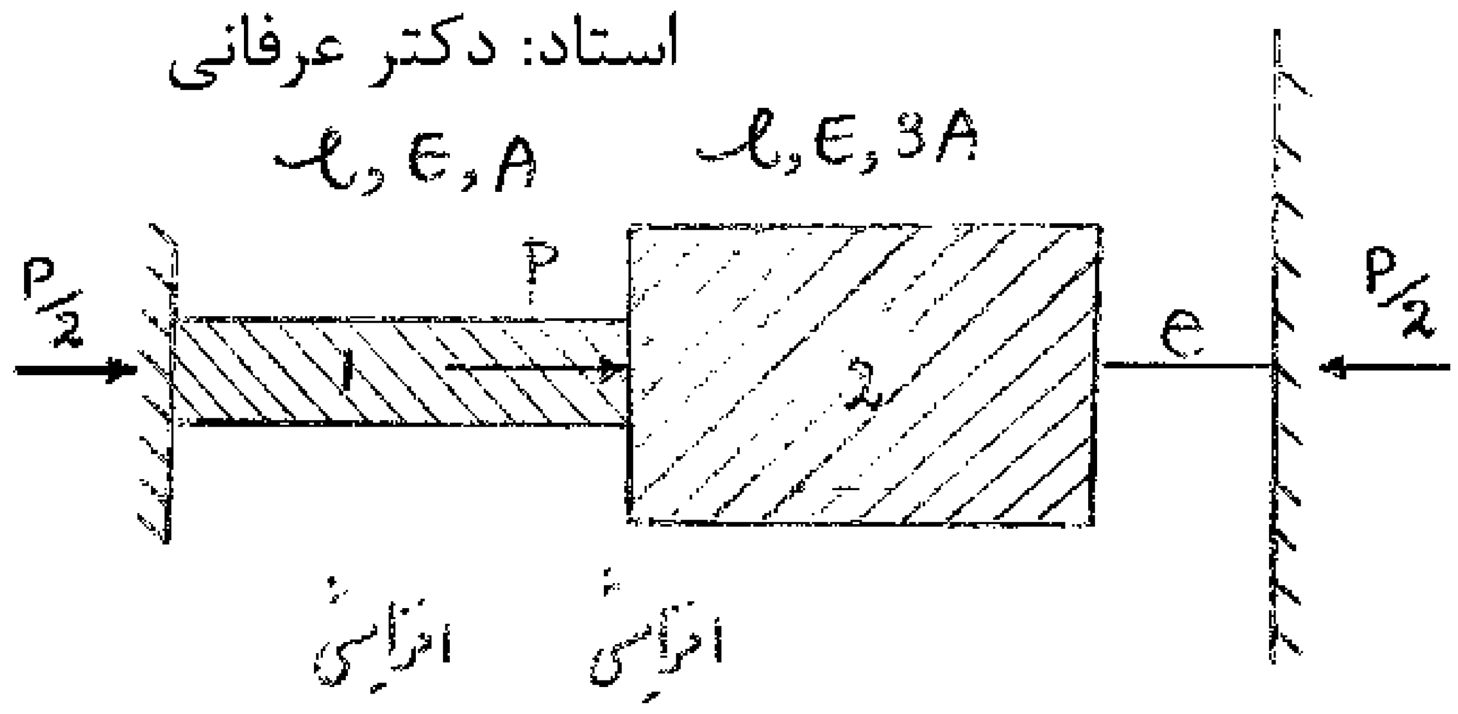
$$\frac{x}{k}+e=\frac{(P-x)h}{2\cos^3\alpha\, EA} \qquad x\left(\frac{1}{k}+\frac{h}{2\cos^3\alpha\, EA}\right)=\frac{Ph}{2\cos^3\alpha\, EA}-e$$

$$x=\frac{Ph-2e\cos^3\alpha\, EA}{\frac{2\cos^3\alpha\, EA}{k}+h}>0$$

تنظیم: محمد حاج صادقی

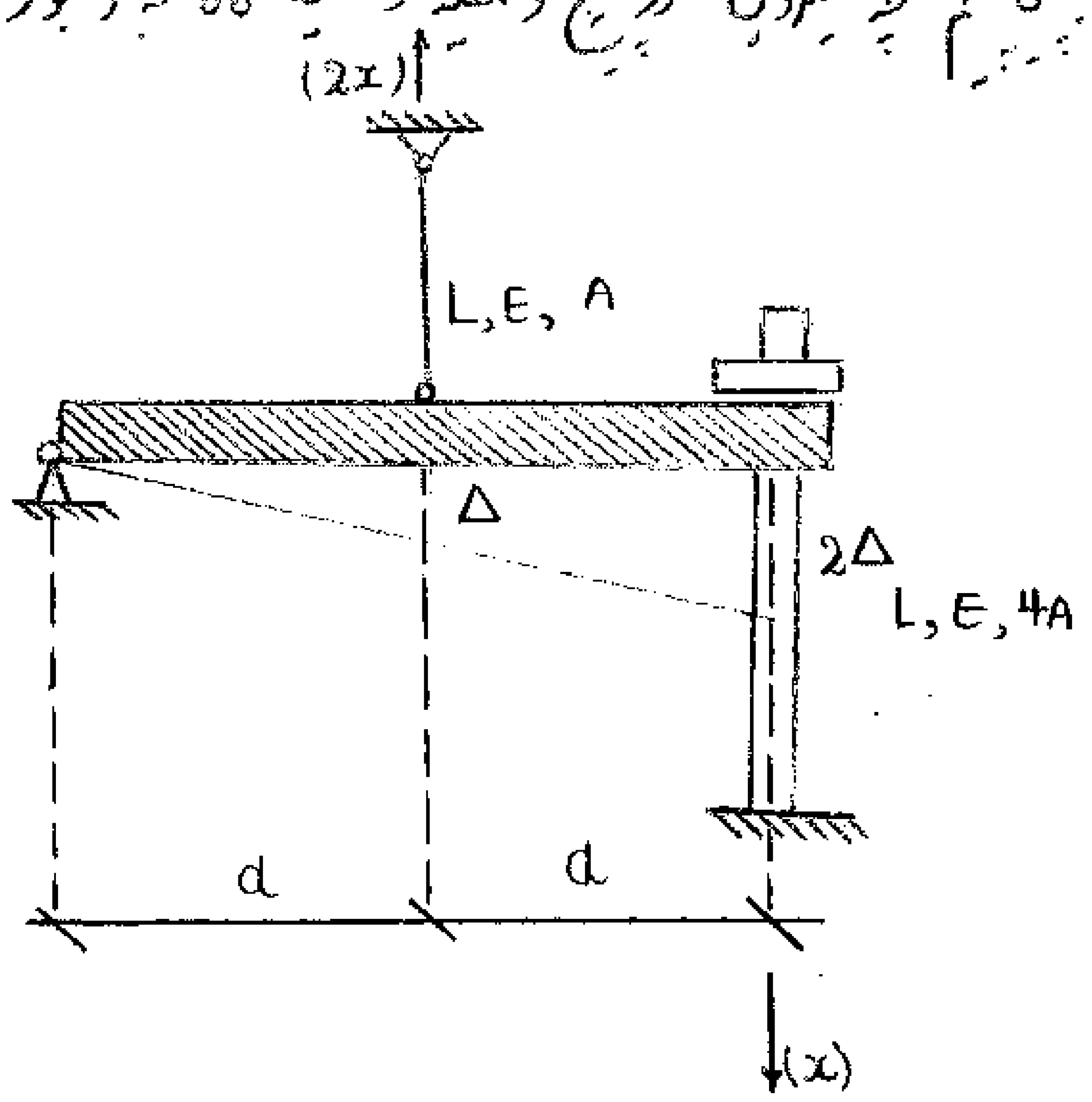
استاد: دکتر عرفانی

مطلوب است مقدار e طوری که عکس العمل تکیه گاهی در هر دو تکیه گاه برابر باشد :




$$* \ \overline{\Delta L_1} + \overline{\Delta L_2} = e \longrightarrow \frac{+P/2\, L}{EA} - \frac{P/2\, L}{3EA} = e \longrightarrow e = \frac{PL}{3EA}$$

اگر بعد از سفت شدن اولیه مهره آن را به زور و به اندازه δ نسبت به پیچ بپیچانیم چه نیرویی در پیچ و میله و تکیه گاه به وجود می آید :

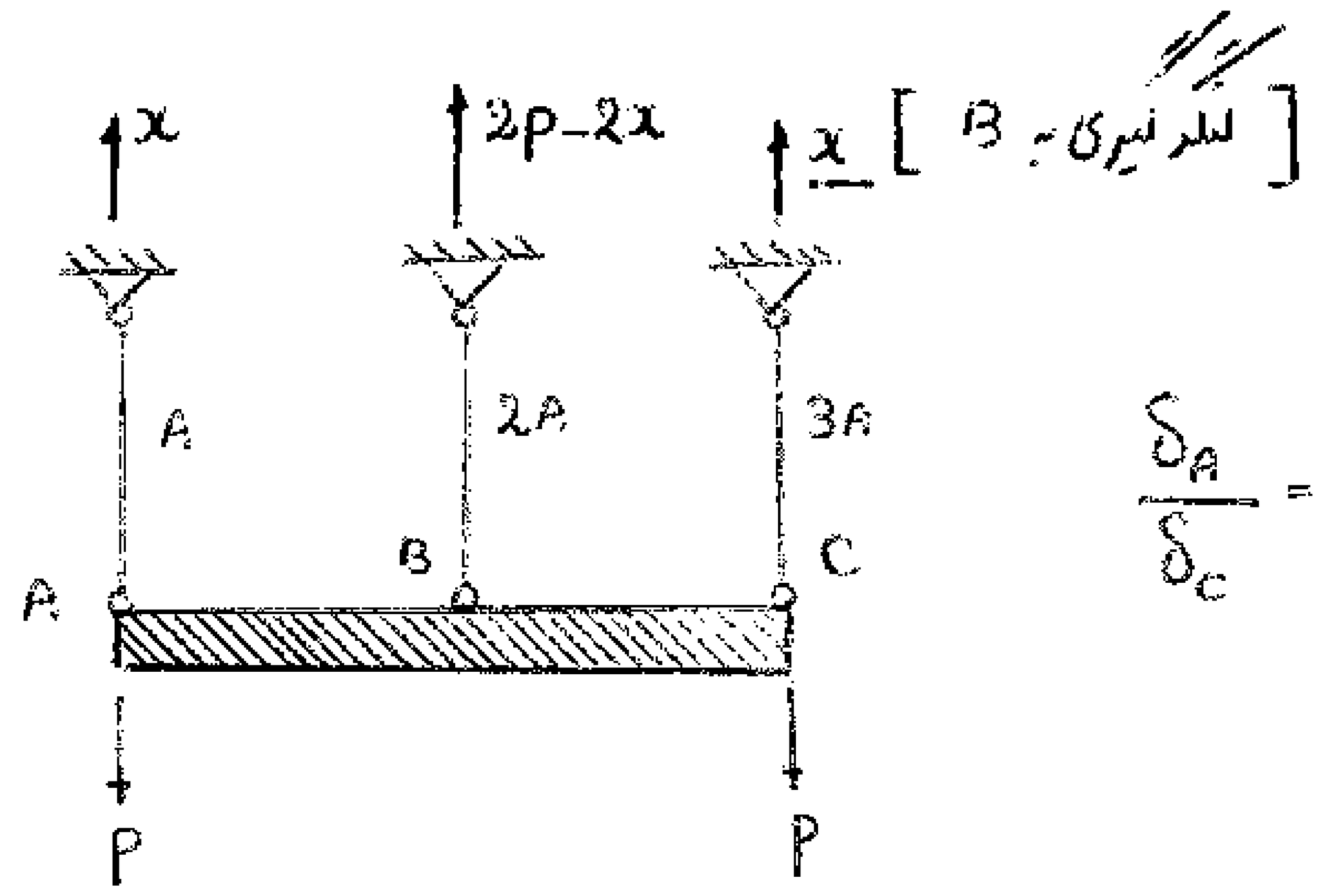



$$\Delta = \frac{2xL}{EA}$$

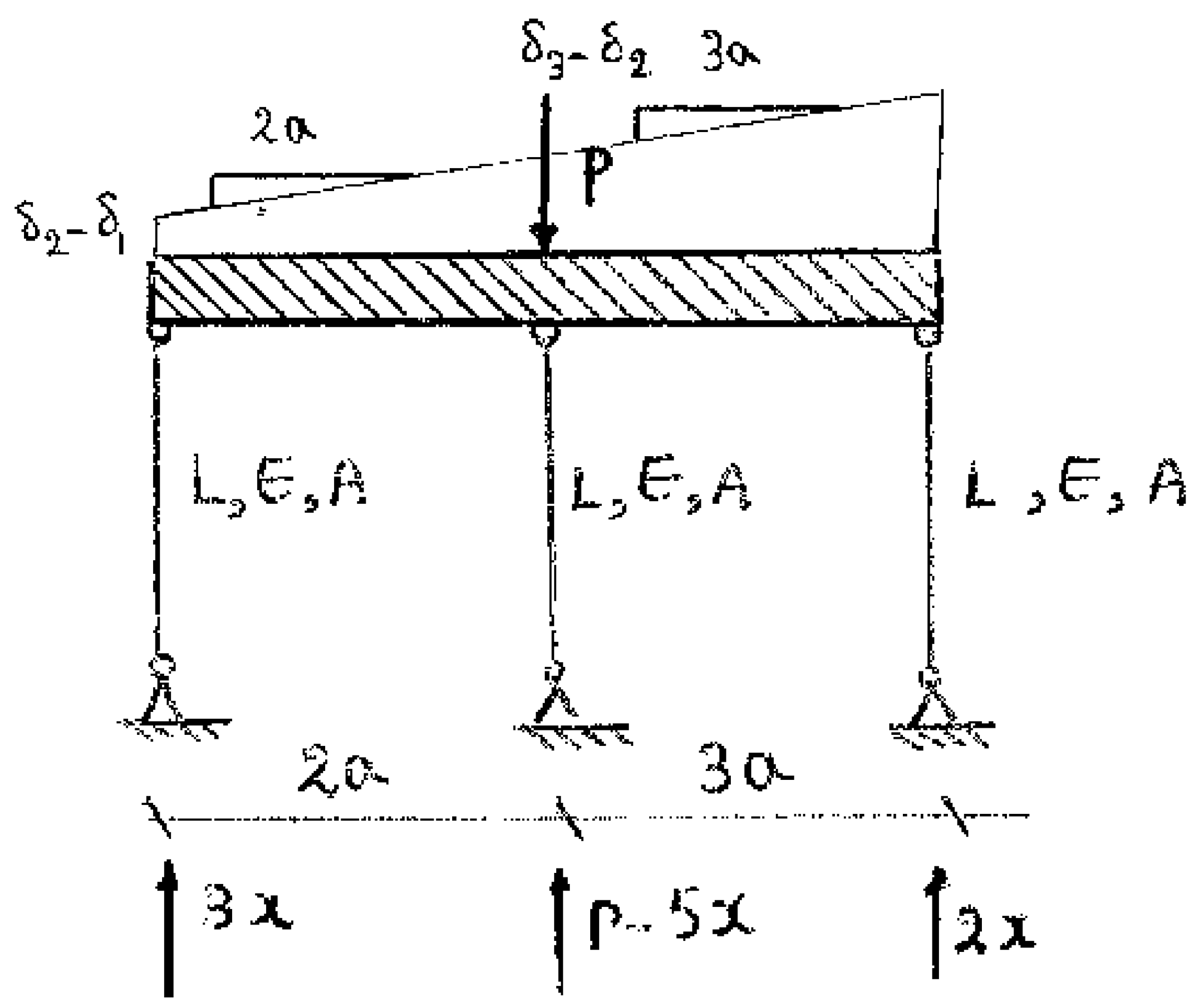
$$2\Delta = \frac{-xL}{4EA} + \delta \longrightarrow = \frac{16}{17}\delta$$

$$\frac{4xL}{EA} = \frac{-xL}{4EA} + \delta \longrightarrow X = \frac{4EA\delta}{17L}$$

مطلوب است نسبت تغییر مکان نقطه A به نقطه C :




$$\frac{\delta_A}{\delta_C} = \frac{\frac{xL}{EA}}{\frac{xL}{3EA}} = 3$$




$$\frac{\delta_2 - \delta_1}{2a} = \frac{\delta_3 - \delta_2}{3a}$$

$$\longrightarrow 3\delta_1 - 5\delta_2 + 2\delta_3 = 0$$

$$* \ \delta_1 = \frac{-3xL}{EA}$$

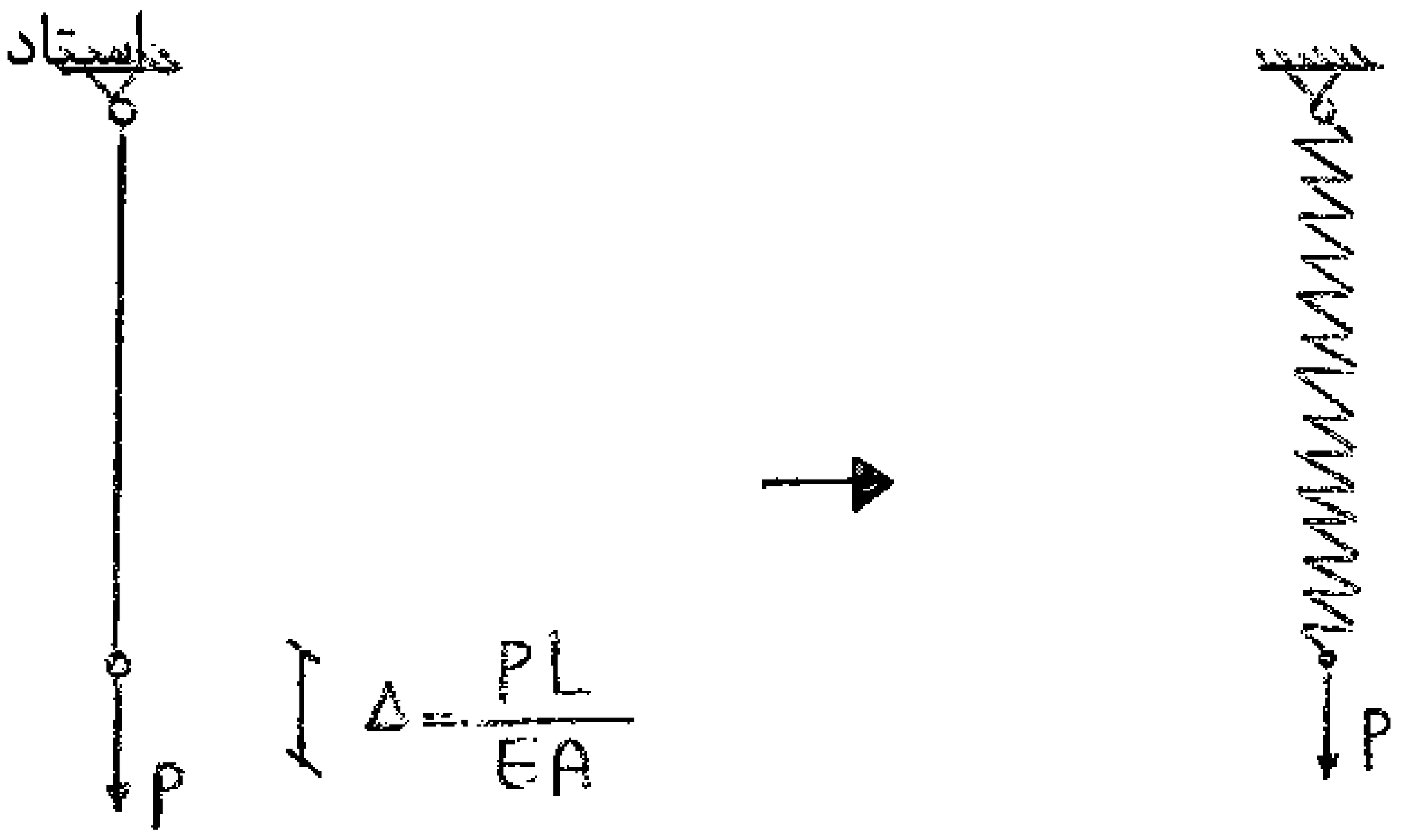
$$* \ \delta_2 = \frac{-(P-5x)L}{EA}$$

$$* \ \delta_3 = \frac{-2xL}{EA}$$

تنظیم: محمد حاج صادقی

استاد: دکتر عرفانی

روش تشبیه به فنر در میله‌ها:




$$\Delta = \frac{PL}{EA}$$

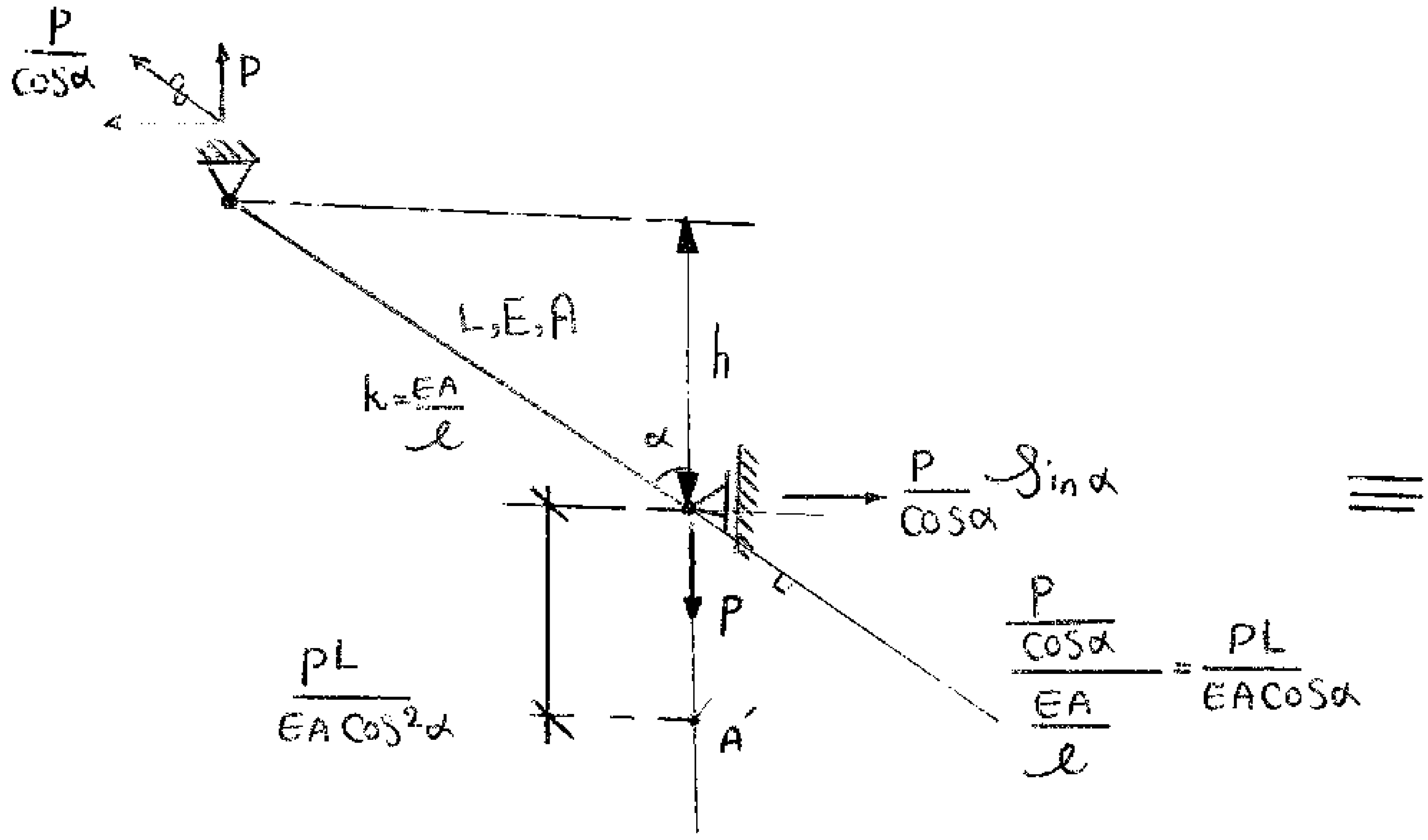
$$\boxed{\Delta = \frac{P}{k}} \qquad \boxed{\rightarrow k = \frac{EA}{L}}$$

سختی: $k$ | $P = k\,\Delta$ | $k = \frac{P}{\Delta}$

نرمی: $F$ | $\Delta = F \cdot P$ | $F = \frac{\Delta}{P}$

$$\longrightarrow k \cdot F = 1$$

شبیه سازی این مسأله صرفاً برای حالتی است که نقطه اثر نیرو بنا به علتی امکان حرکت افقی نداشته باشد.




$$\frac{P}{\cos\alpha}$$

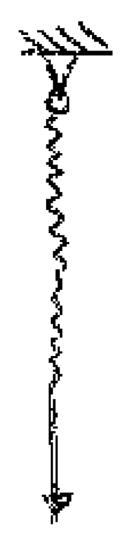
$$k = \frac{EA}{\ell}$$

$$\frac{P}{\cos\alpha}\sin\alpha$$

$$\frac{PL}{EA\cos^2\alpha}$$

$$\frac{\frac{P}{\cos\alpha}}{\frac{EA}{\ell}} = \frac{PL}{EA\cos\alpha}$$

$$\equiv$$

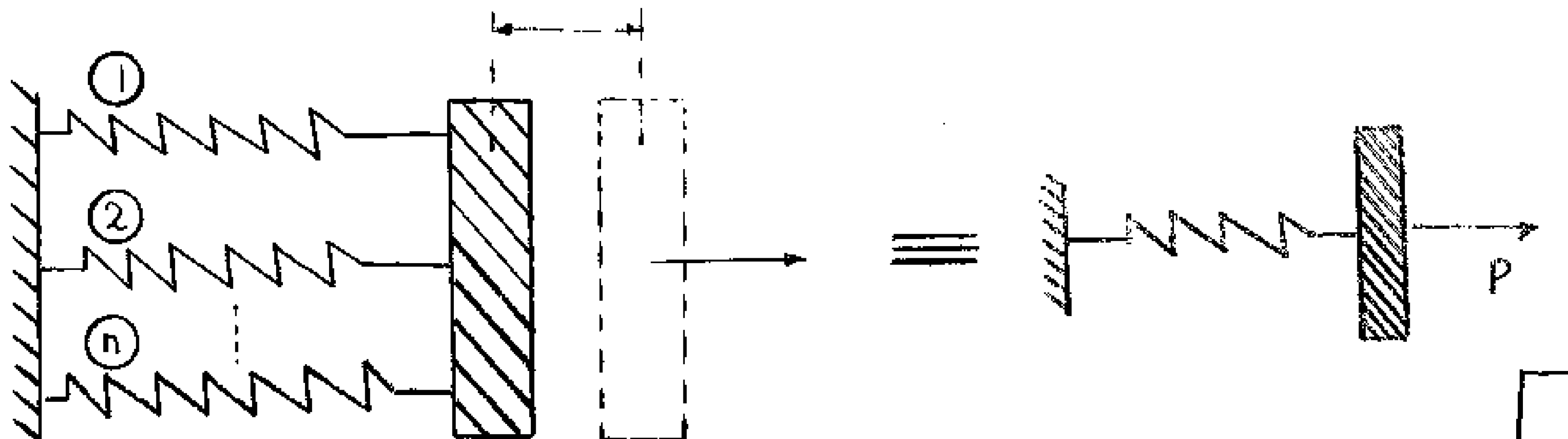


$$\boxed{k = \frac{EA}{\ell}\cos^2\alpha = \frac{EA}{h}\cos^3\alpha}$$

در تشبیه فوق باید توجه کرد که اولاً α زاویه بین امتداد نیرو یا امتداد حرکت با امتداد میله مایل می‌باشد. همچنین تشابه فقط از نظر تغییر مکان درست است چون نیروی قائم در واقع مؤلفه قائم نیروی میله مایل می‌باشد.

ترکیب فنرها:

الف ـ ترکیب موازی:




$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} k = K}$$

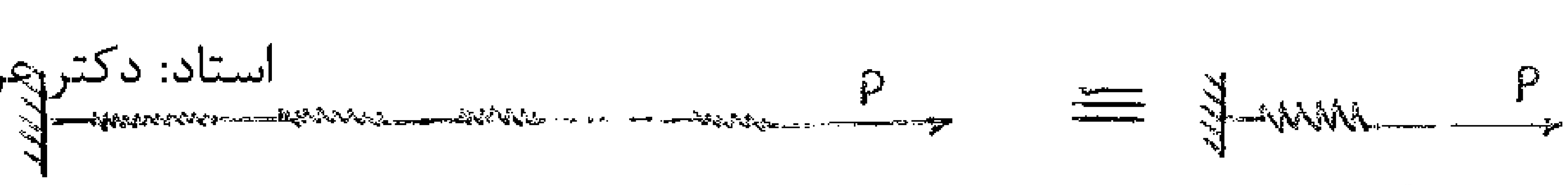
$$\delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_n$$

$$\sum_{i=1}^{n} P_i = P \longrightarrow \boxed{\delta = \frac{P}{\sum k_i}} \longrightarrow \boxed{P_j = \frac{k_j}{\sum_{i=1}^{n} k_i}P}$$

تنظیم: محمد حاج صادقی

استاد: دکتر عرفانی

ب ـ ترکیب سری :

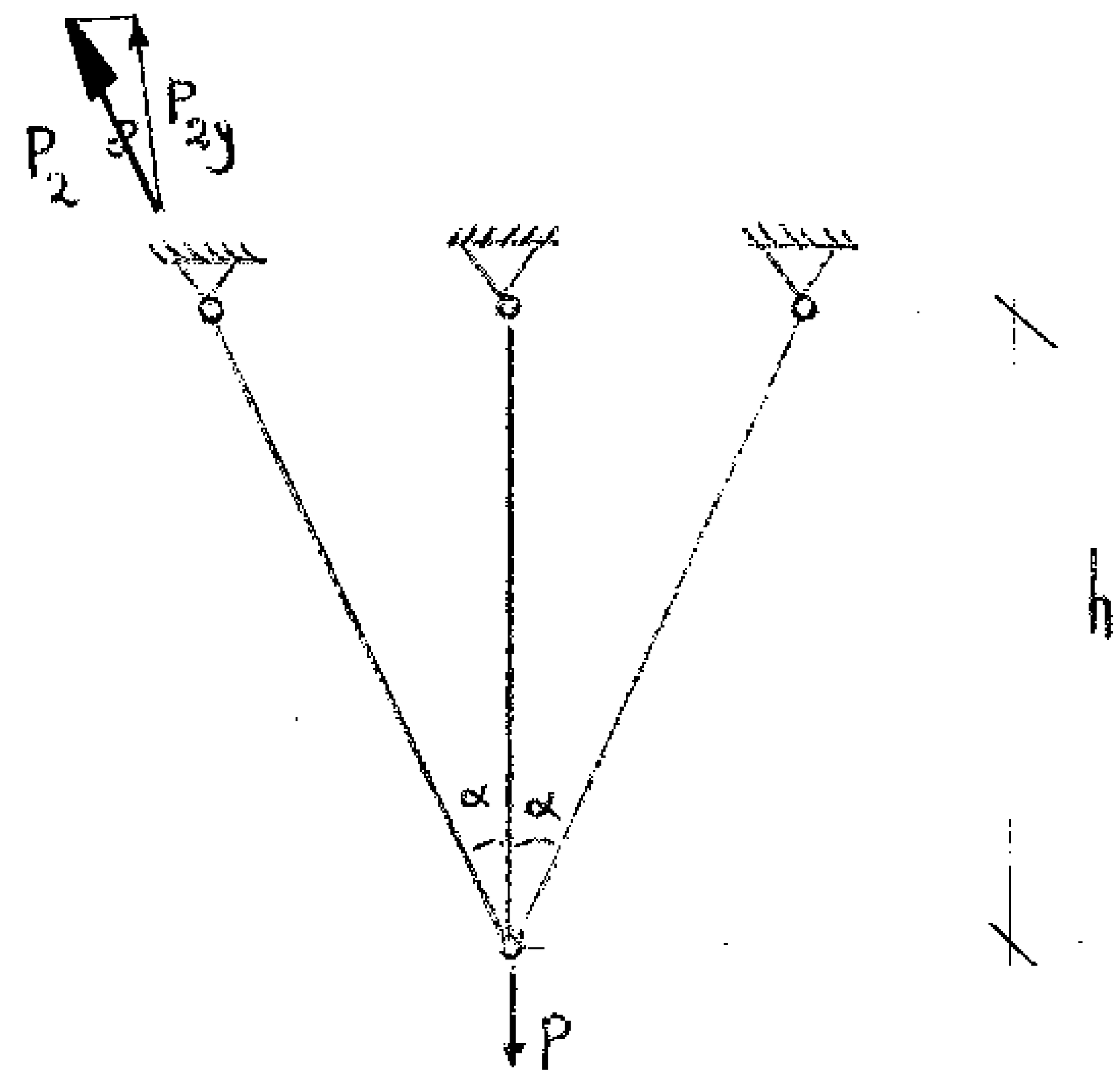



$$F = \sum_{i=1}^{n} F_i$$

$$P_1 = \cdots P_i = \cdots = P_n = P$$

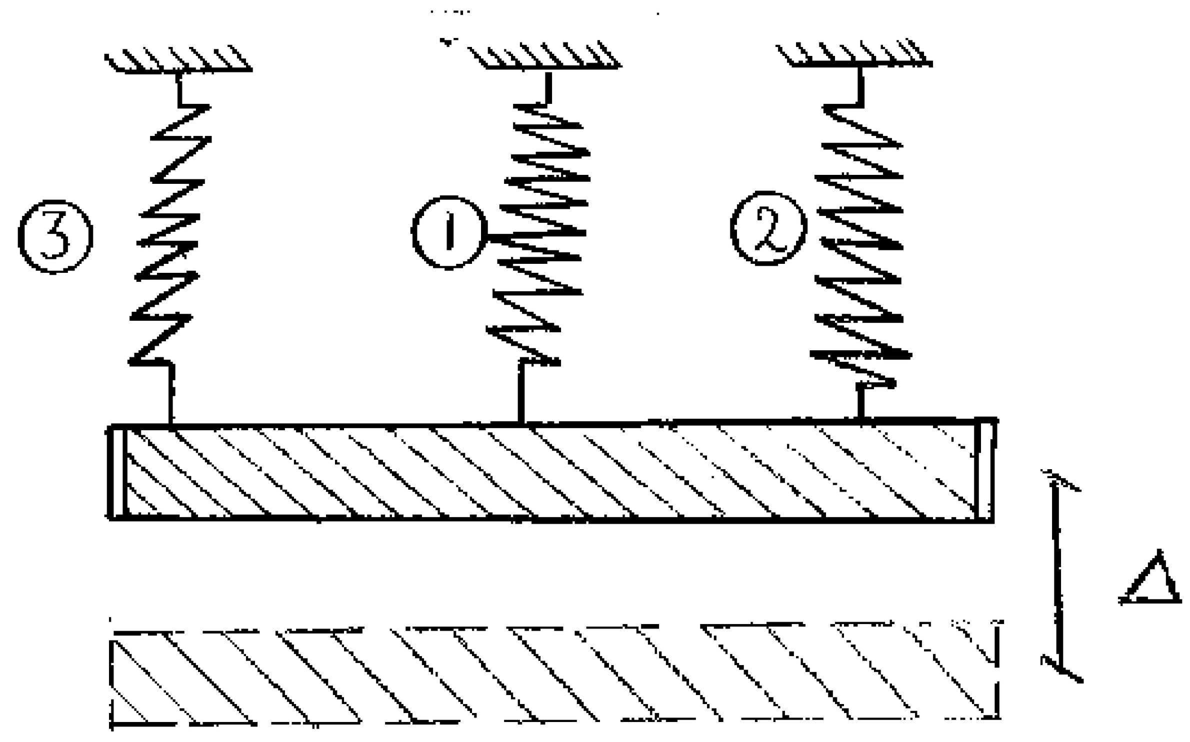
$$\sum_{i=1}^{n} \delta_i = \delta \longrightarrow P = \frac{\delta}{\sum_{i=1}^{n} F_i = F} \longrightarrow \boxed{\delta_j = \frac{F_j}{\sum_{i=1}^{n} F_i} \ast \delta}$$

مطلوب است نیروی میله ها و تغییر مکان اثر نیرو :




$$k_1 = \frac{EA}{h} \quad , \; k_2 = \frac{EA}{h} \cos^3\alpha$$

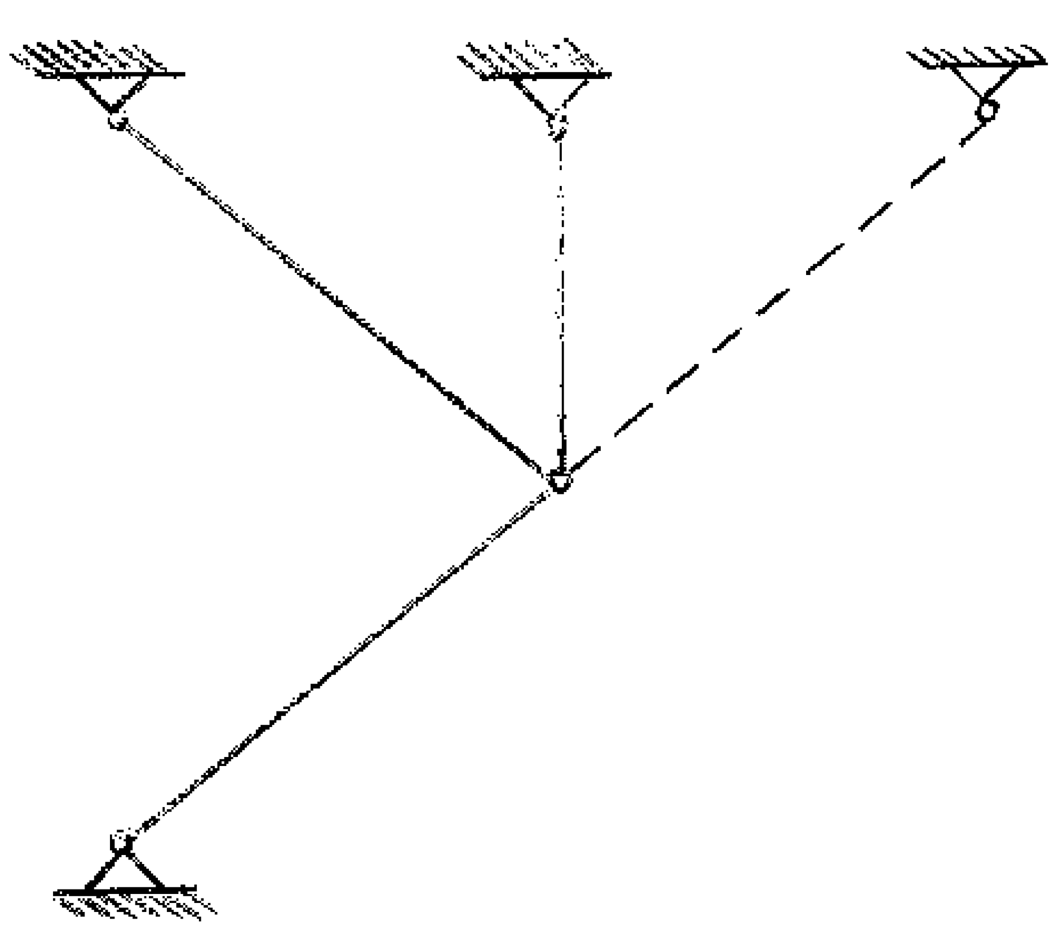
$$\Delta = \frac{P}{\frac{EA}{h} + \frac{2EA}{h}\cos^3\alpha} = \frac{Ph}{EA(1+2\cos^3\alpha)}$$

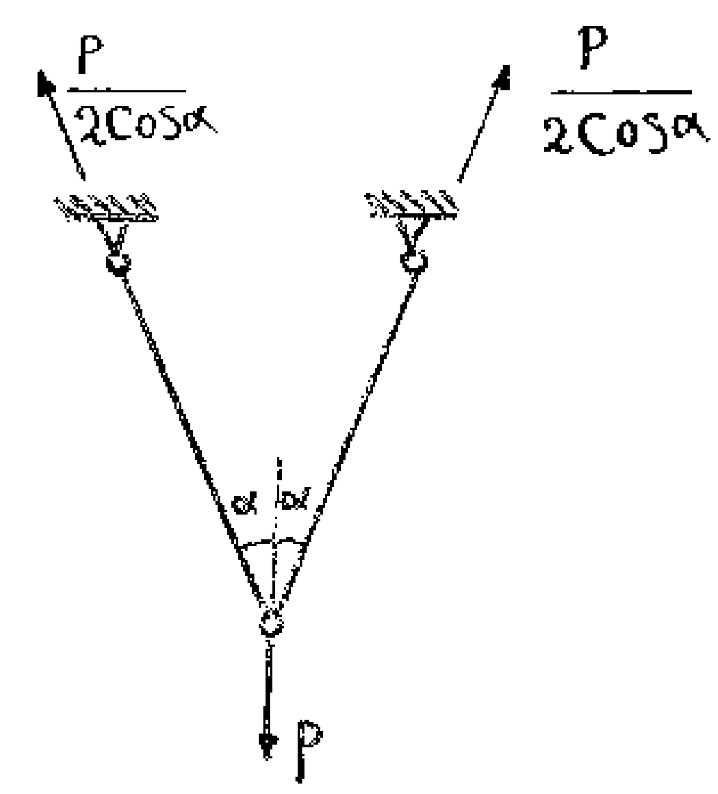



$$P_1 = \frac{1}{1+2\cos^3\alpha} P$$

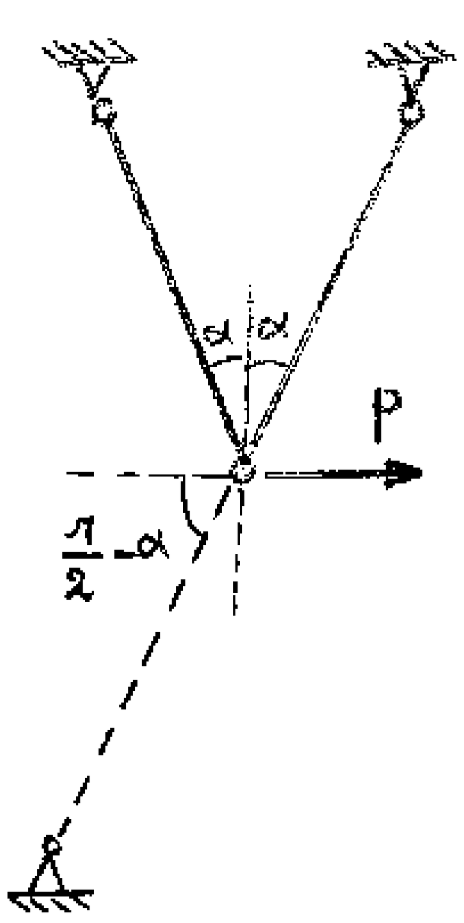
$$P_{2y} = \frac{\cos^3\alpha}{1+2\cos^3\alpha} P \longrightarrow P_2 = \frac{P_{2y}}{\cos\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{(1+2\cos^3\alpha)} P$$

میله ها را می توان با حفظ امتداد جهت شان را عوض کرد با این عمل فقط نیروهای داخلی میله ها به یک منفی ضرب می شود.

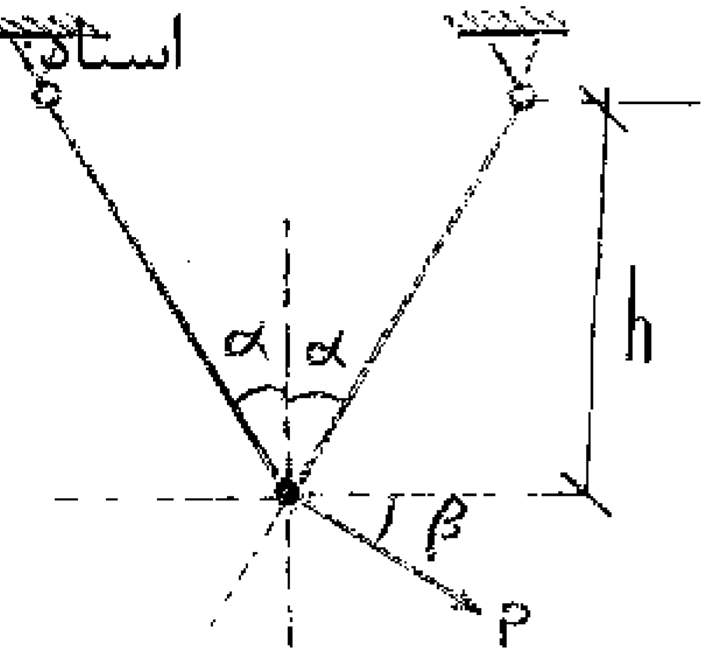





$$\Delta = \frac{P}{2\frac{EA}{l}\cos^2\alpha}$$

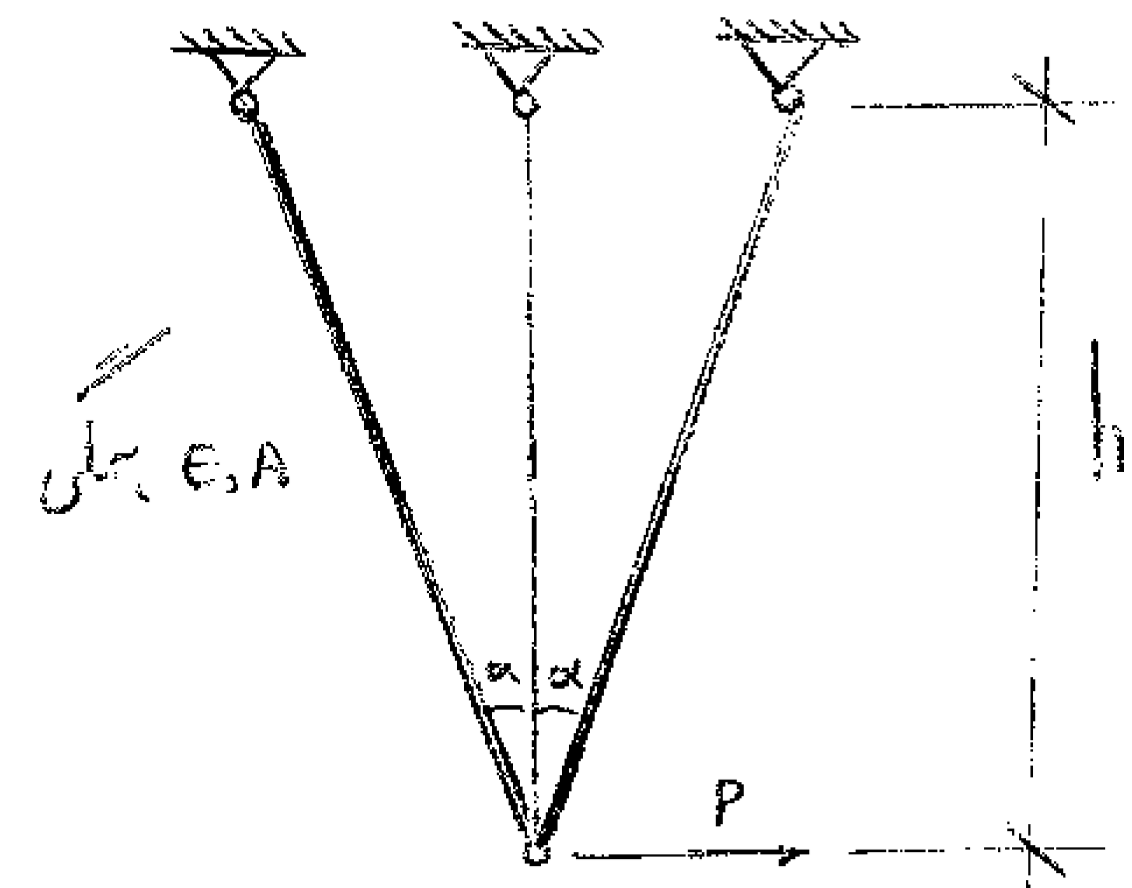



$$\Delta = \frac{P}{\frac{2EA}{l}\sin^2\alpha}$$



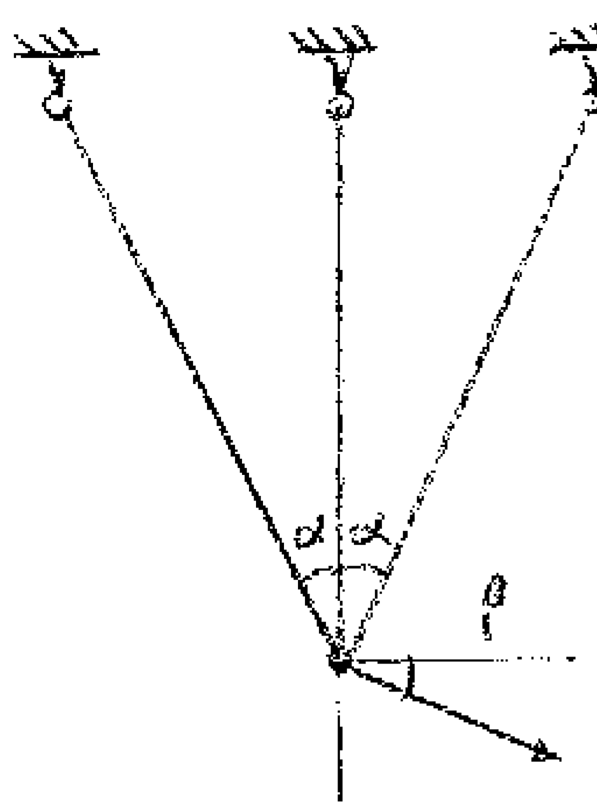

مولفه قائم فقط حرکت قائم و مولفه افقی فقط حرکت افقی

$$\Delta y=\frac{P\sin\beta}{\frac{2EA}{h}\cos^3\alpha} \quad , \quad \Delta x=\frac{P\cos\beta}{\frac{2EA}{h}\sin^3\alpha}$$




نمی توان به تقارن دست یافت :

* اگر میله 2 را از کل سیستم حذف کنیم و پس از حل آن سیستم به وجود آمده،
تغییر شکل‌ها ... بتوانیم آن میله 2 در محل اولیه خود مستقر کنیم بدون اعمال نیرو،
نیروی آن میله‌ها صفر می‌باشد *

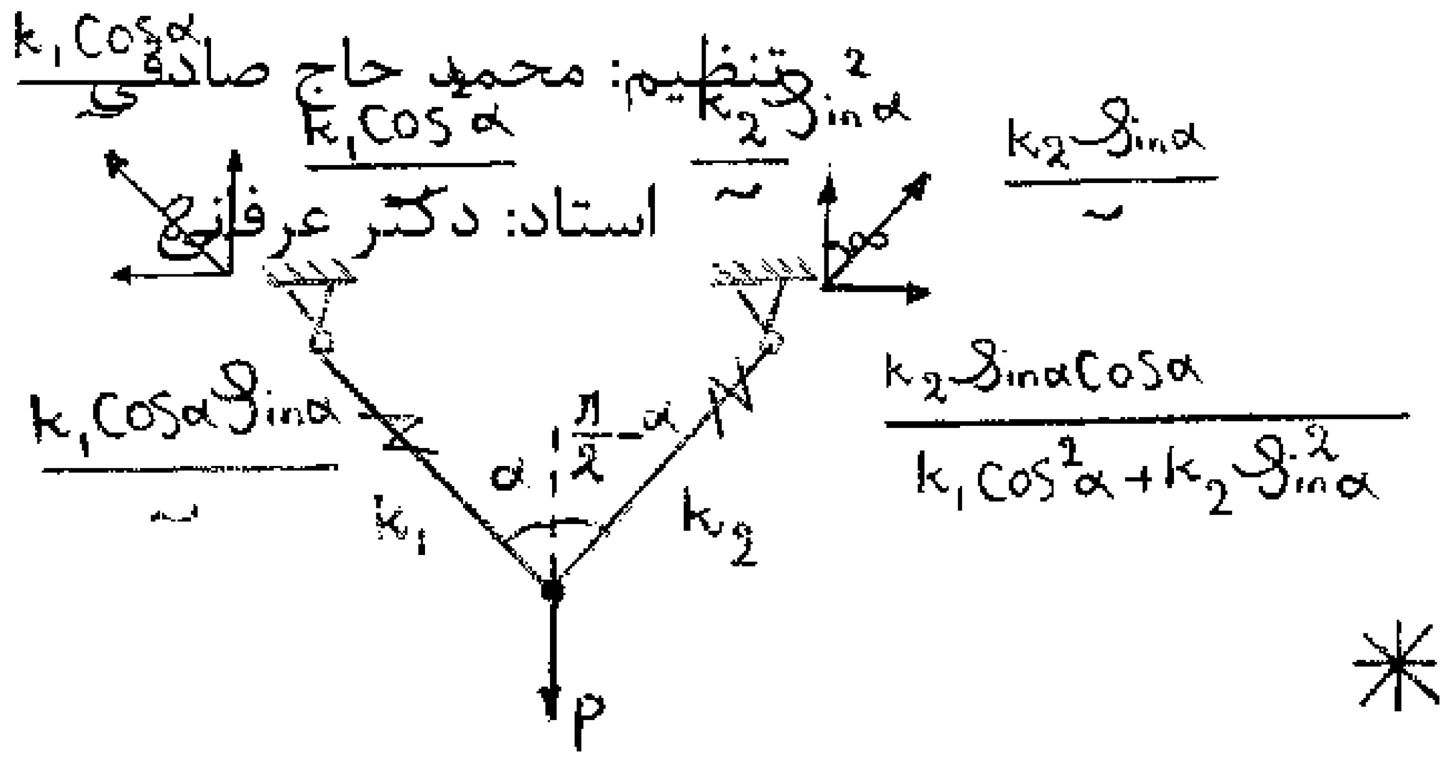



→ افقی → افقی

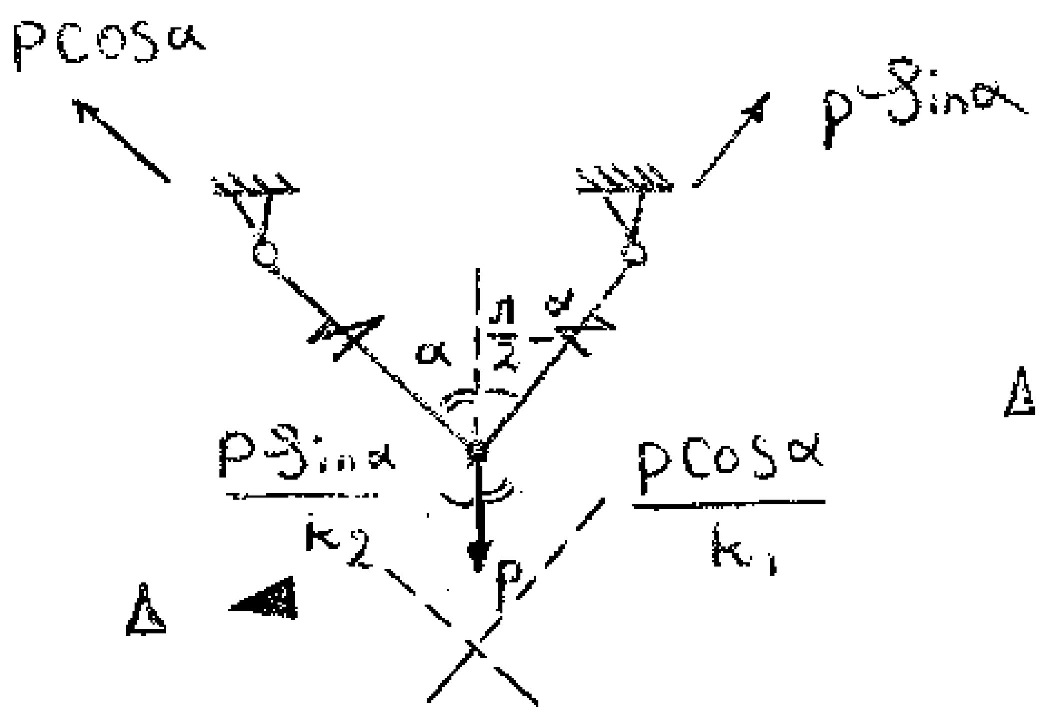
قائم → قائم

تنظیم: محمد حاج صادقی
استاد: دکتر عرفانی

چه نسبتی بین سختی فنرها برقرار باشد تا نیرو فقط در راستای خودش حرکت کند؟

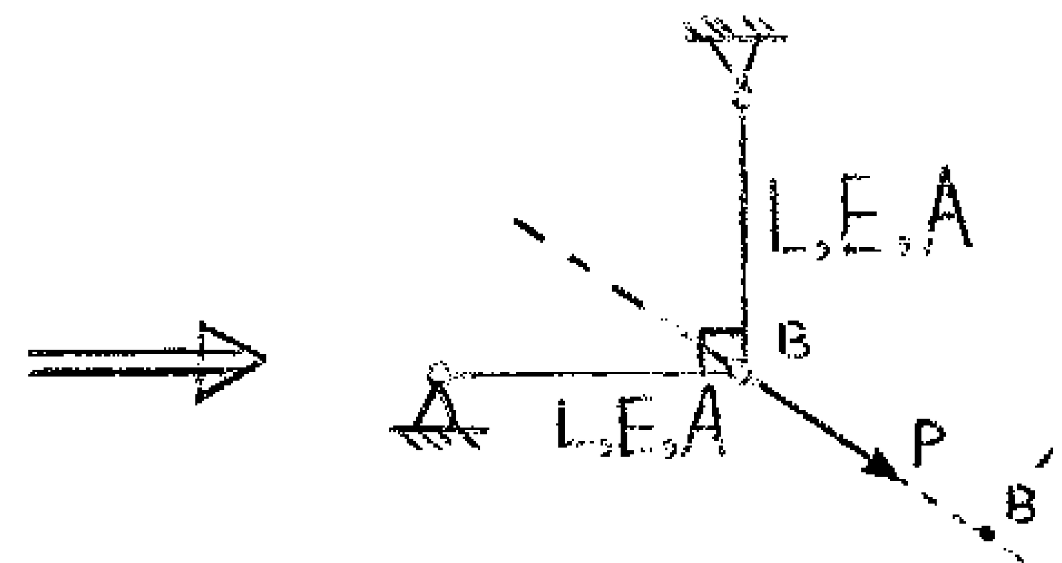



$$\boxed{\Sigma F_x=0 \longrightarrow k_1=k_2}$$

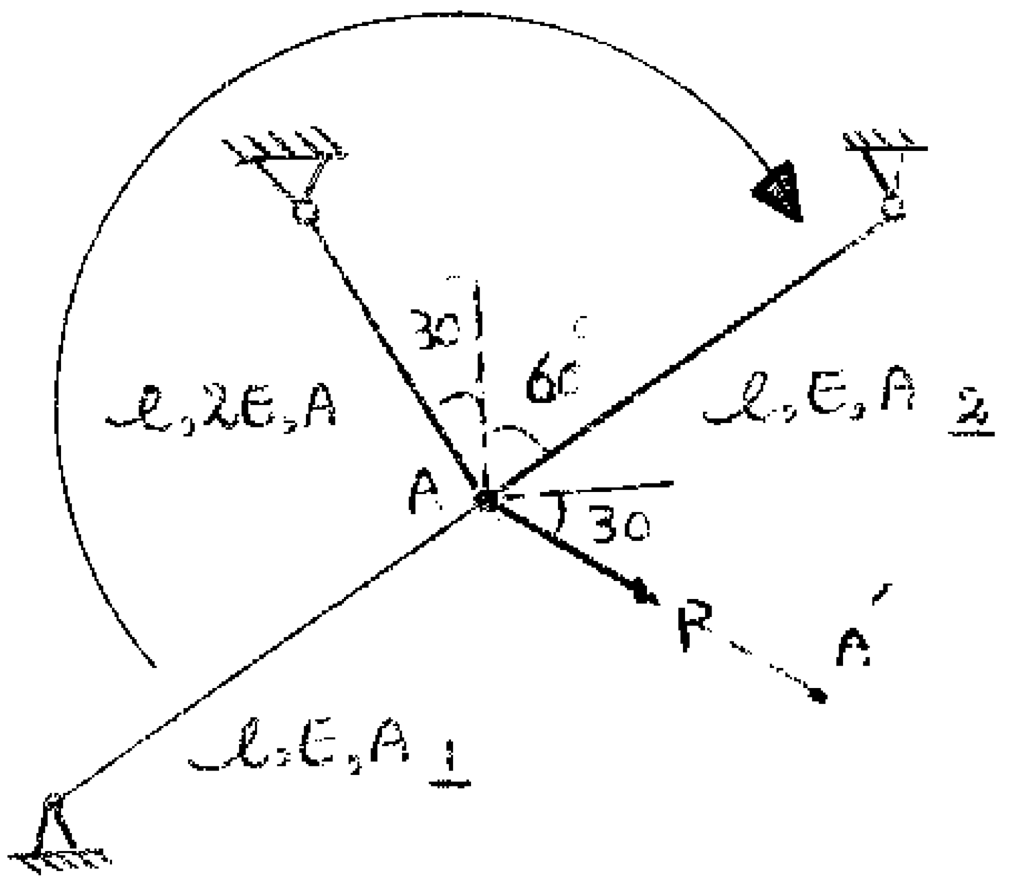



$$\Delta=\frac{P}{k_2}=\frac{P}{k_1}\longrightarrow k_1=k_2$$

$\Longrightarrow$




$$\boxed{\Delta=\frac{P}{\frac{EA}{\ell}}=\frac{PL}{EA}}$$

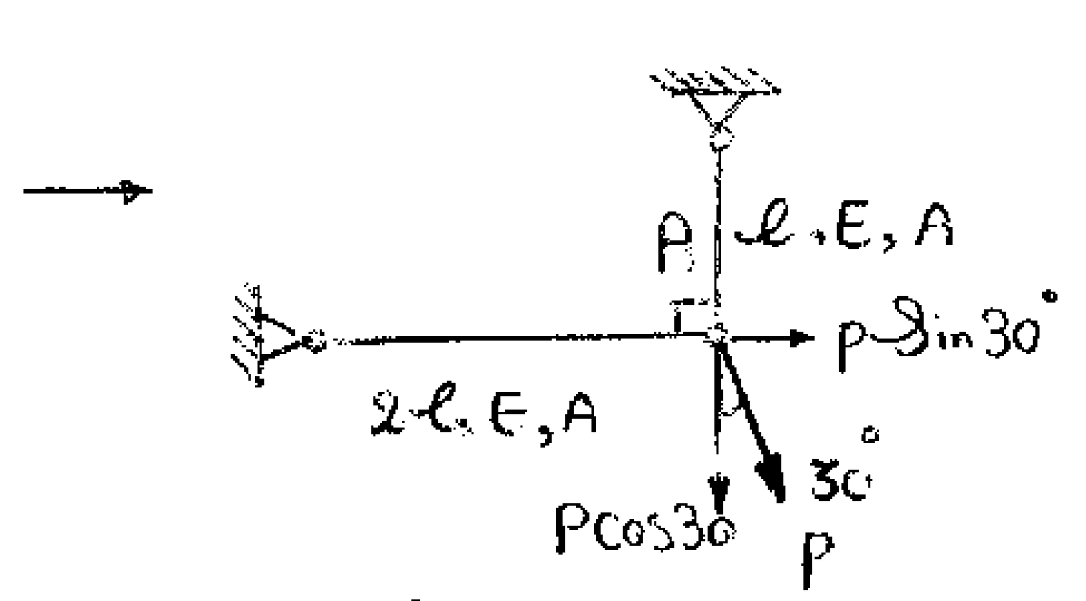



$1, 2 \longrightarrow \ell, 2E, A$

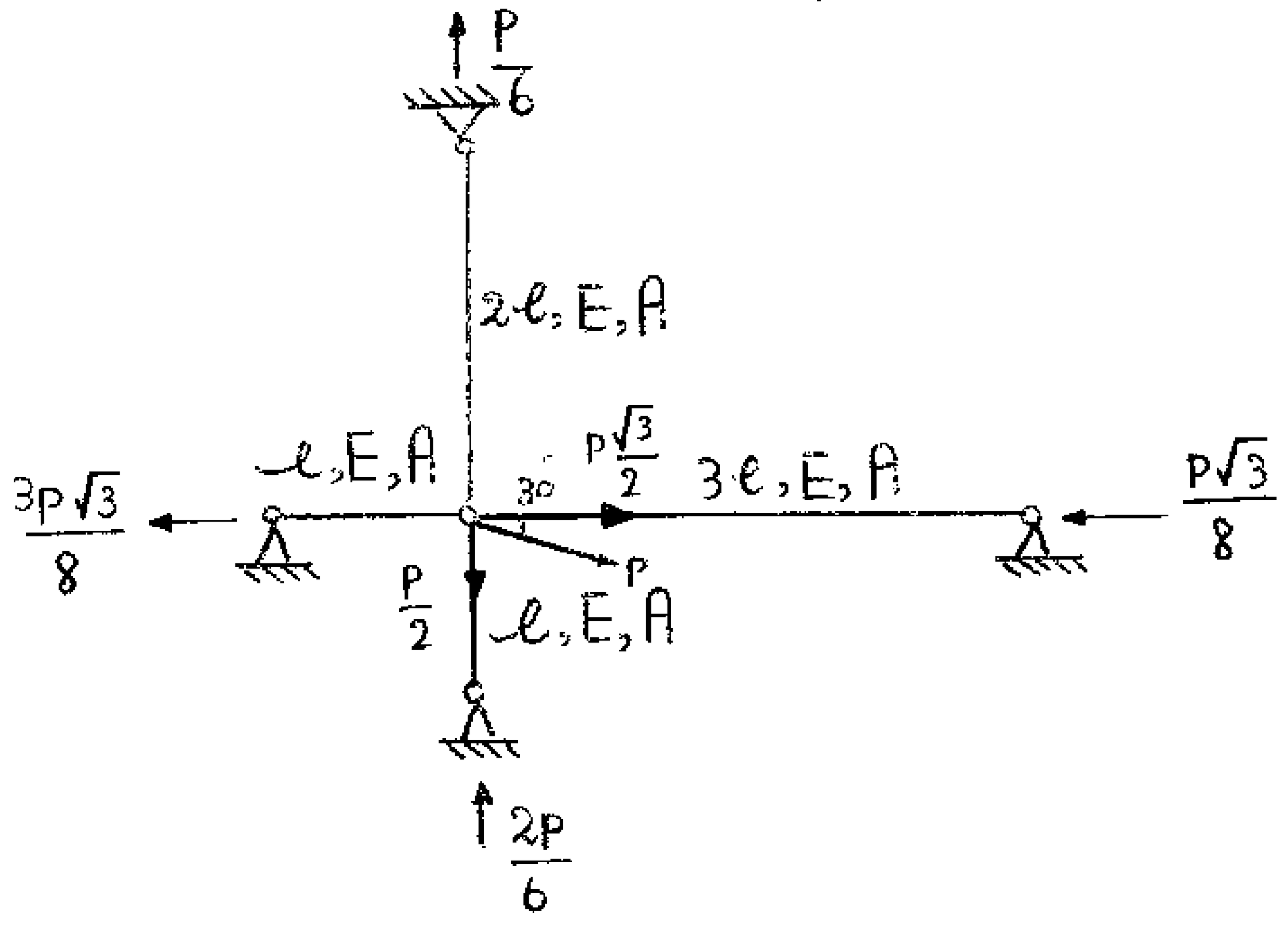
$$\longrightarrow \frac{P}{\frac{2EA}{\ell}}=\frac{PL}{2EA}$$

در میله های متعامد هم نیروها و هم تغییر طول ها مستقل از هم می باشند.

$\longrightarrow$




$$\Delta_{Ax}=\frac{P\sin30}{\frac{EA}{2\ell}}\quad,\quad \Delta_{Ay}=\frac{P\cos30}{\frac{EA}{\ell}}$$



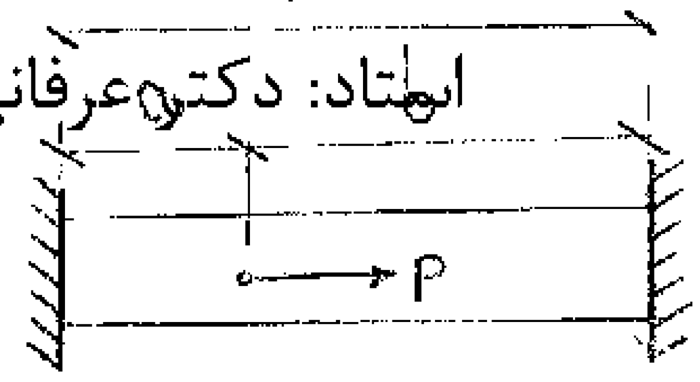

** $\boxed{\text{در این شکل همه اعضای موازی با هم تغییر طول یکسانی دارند}}$

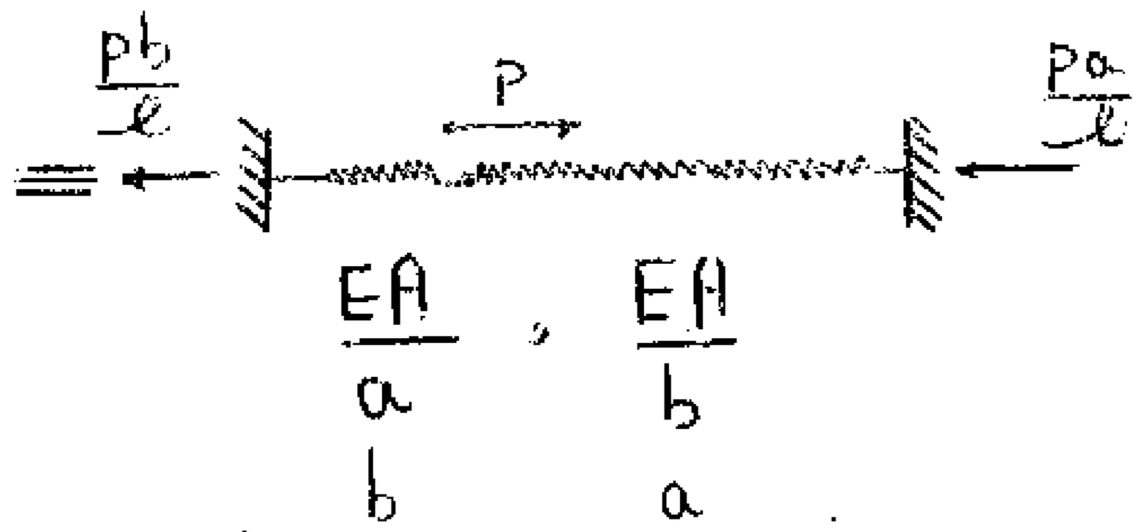
$$\overrightarrow{\Delta A_x}=\frac{P\sqrt{3}/2}{\frac{EA}{\ell}+\frac{EA}{3\ell}}\quad,\quad \downarrow\Delta A_y=\frac{P/2}{\frac{EA}{2\ell}+\frac{EA}{\ell}}$$

$$* \; \frac{P\sqrt{3}/2}{\frac{4}{3}\frac{EA}{\ell}} \qquad * \; \frac{P/2}{\frac{3}{2}\frac{EA}{\ell}}$$

تنظیم: محمد حاج صادقی

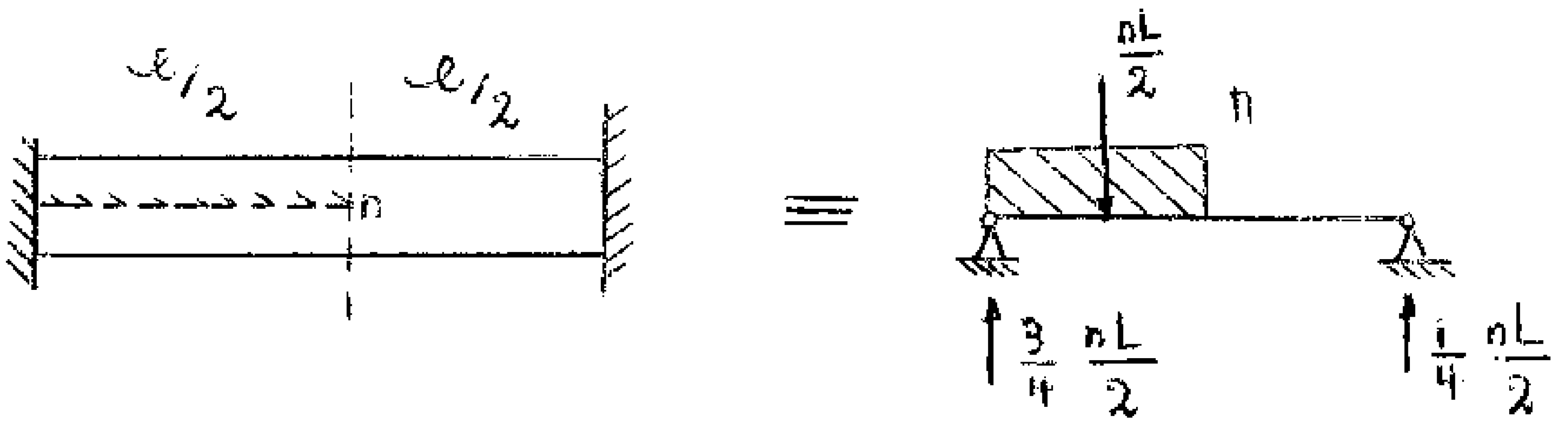
استاد: دکتر عرفانی

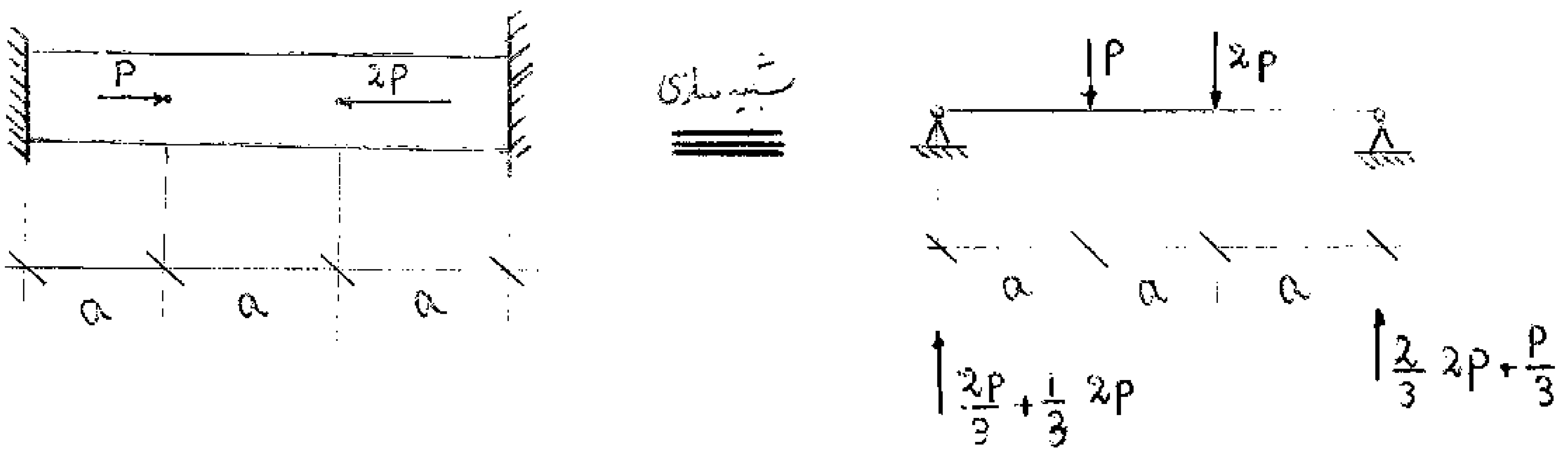




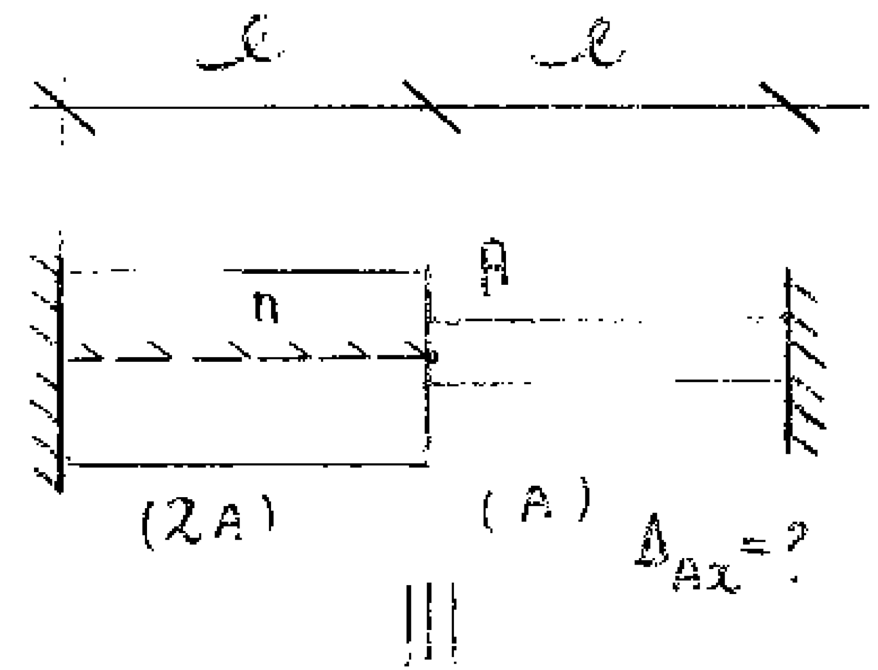

$$\Delta_{Ax} = \frac{P}{\frac{EA}{a} + \frac{EA}{b}}$$

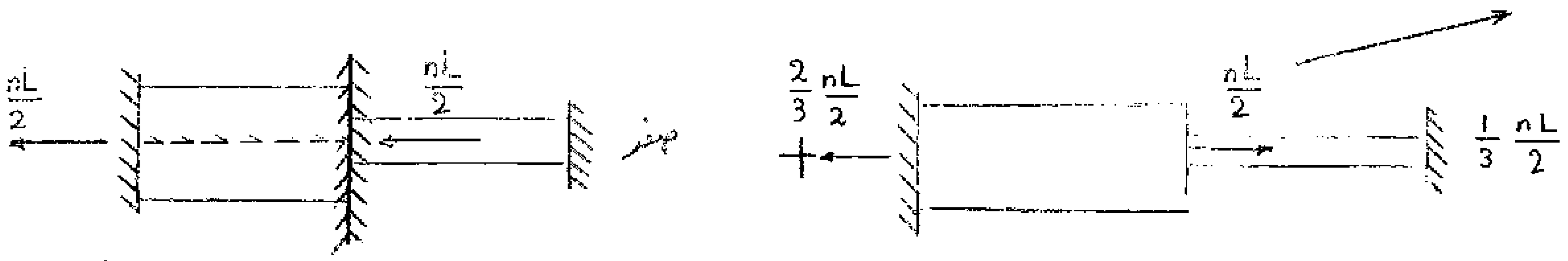
* در صورتی که در یک میله EA در طول آن ثابت باشد می توان به جای حل یک میله دو سر گیردار یک تیر دو سر مفصل را با بارگذاری به صورت ارزی از طریق معادلات تعادل حل کرد. عکس العمل های تکیه گاهی حاصل از هر دو حل یکسان می باشند. *



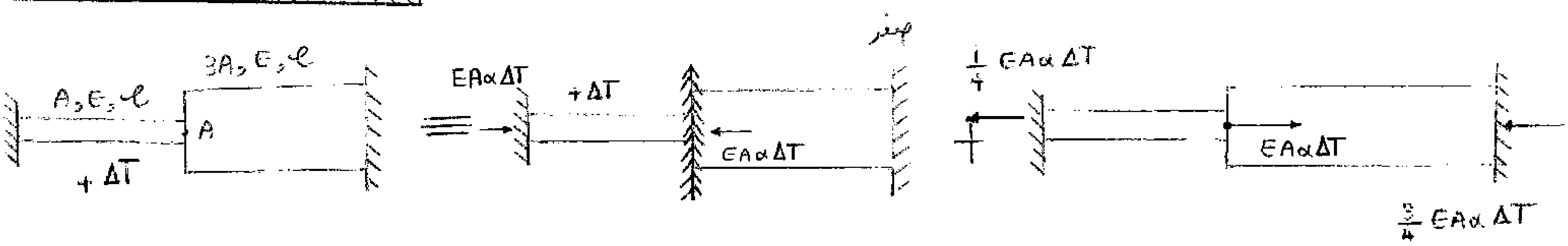

روش بستن و باز کردن.




نیروی کشش

$$\boxed{\Delta x_A = \frac{\frac{nL}{2}}{\frac{2EA}{l} + \frac{EA}{l}}}$$

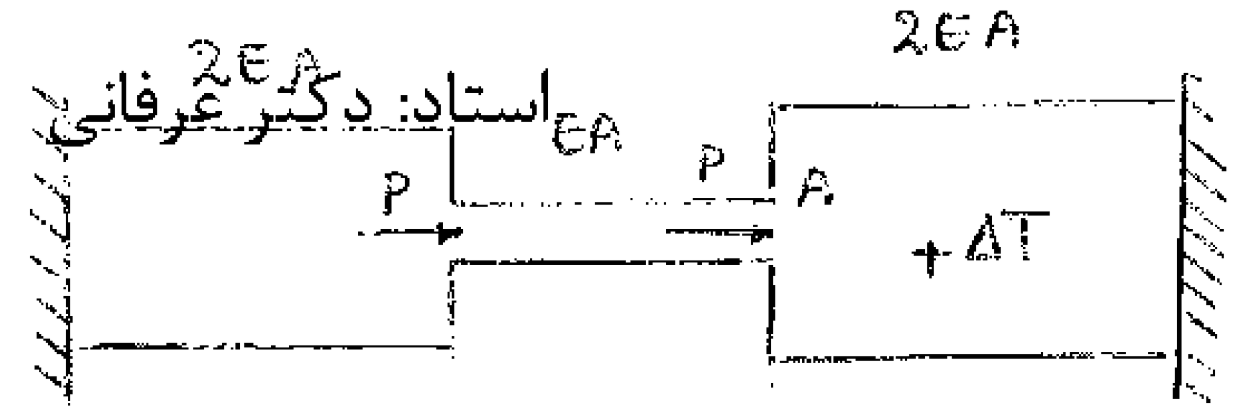



( تغییر مکان نقطه A )

$$\Delta A_x = \frac{EA\alpha\Delta T}{\frac{EA}{l} + \frac{3EA}{l}}$$

تنظیم: محمد حاج صادقی

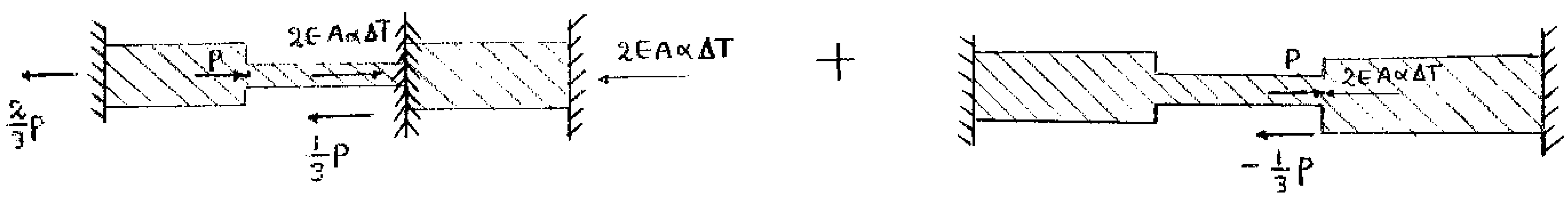
استاد: دکتر عرفانی




چه نسبتی بین P و ΔT برقرار باشد تا نقطه A حرکت نکند.

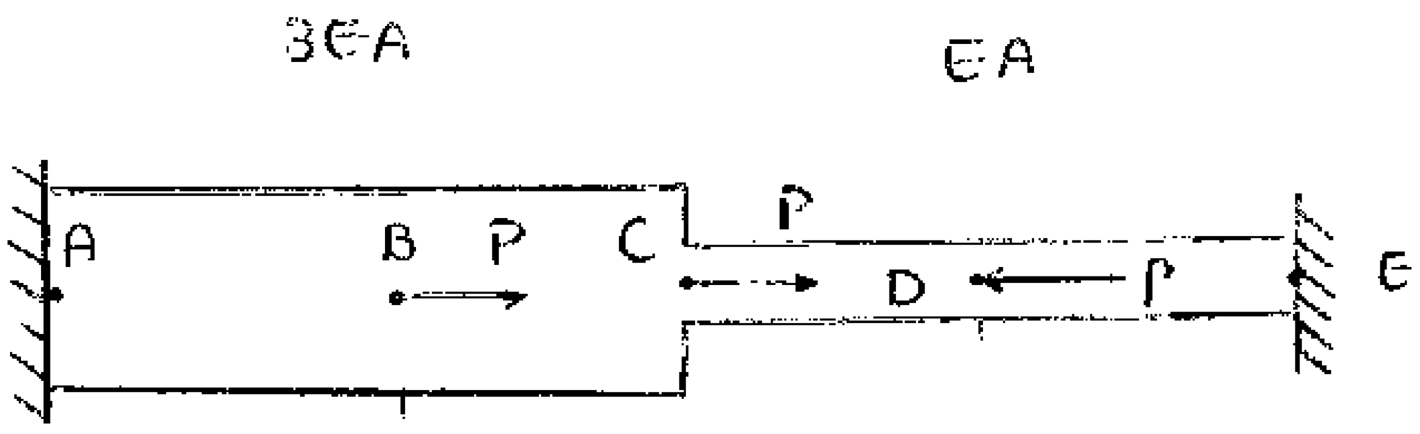
آن جایی که گیر می‌دهیم گره می‌شود و در مرحله دستی بار روی گره‌ها اثر نداده و در هنگام بار کردن اثر می‌دهیم.

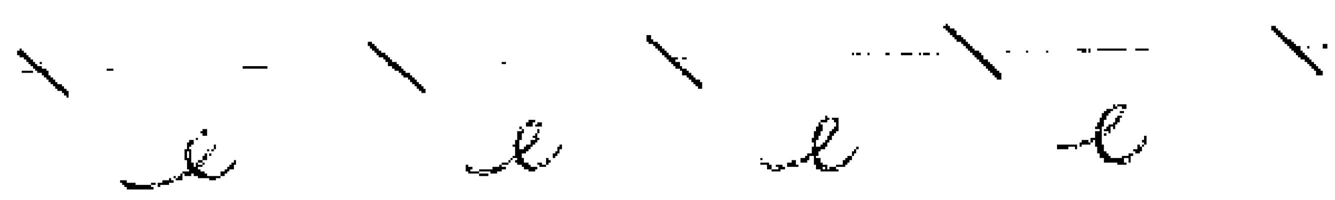

* یعنی صفر کردن نیروی پیش



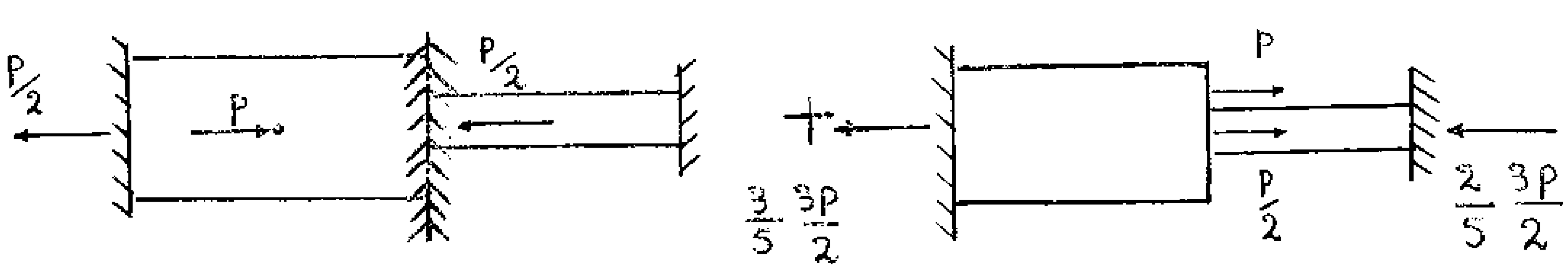

$$\frac{4}{3}P = 2E\alpha\Delta T \times A \longrightarrow \boxed{P=\frac{3}{2}EA\alpha\Delta T}$$

چه رابطه‌ای بین P و Q برقرار باشد تا عکس‌العمل تکیه‌گاهی در E ایجاد نشود.

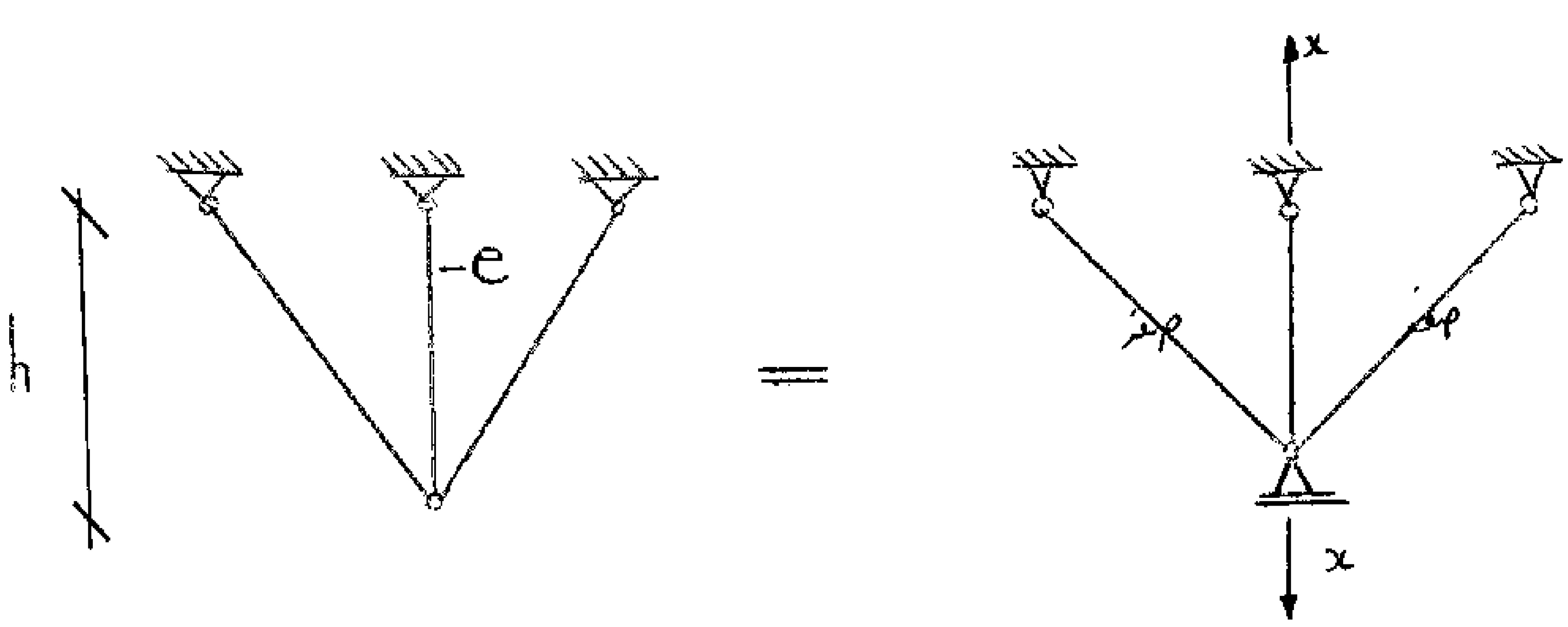


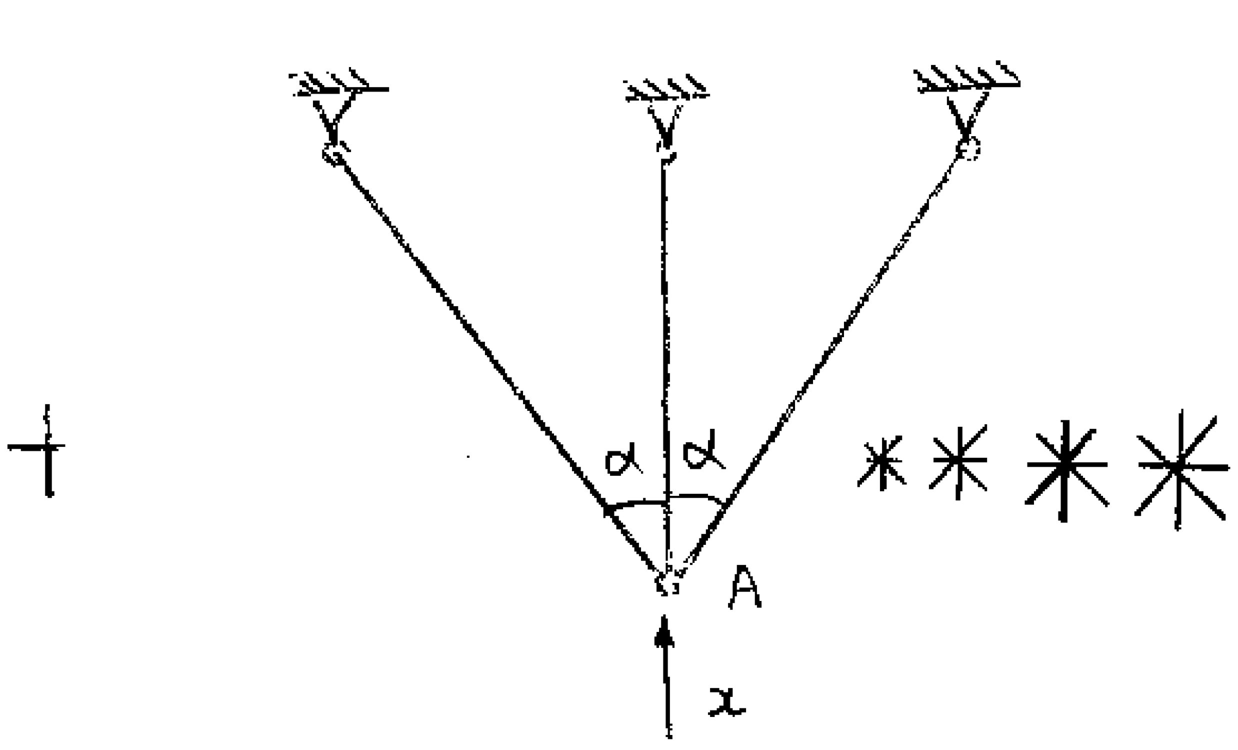

$$\text{روش سازگاری} = \begin{cases} \Delta E_x = 0 \\ R_E = 0 \\ *\Delta D_x = 0 \end{cases}$$




$$\frac{2}{5}\,\frac{3P}{2} = \frac{3P}{5} = Q$$




$$x \Rightarrow e = \frac{xh}{EA}$$

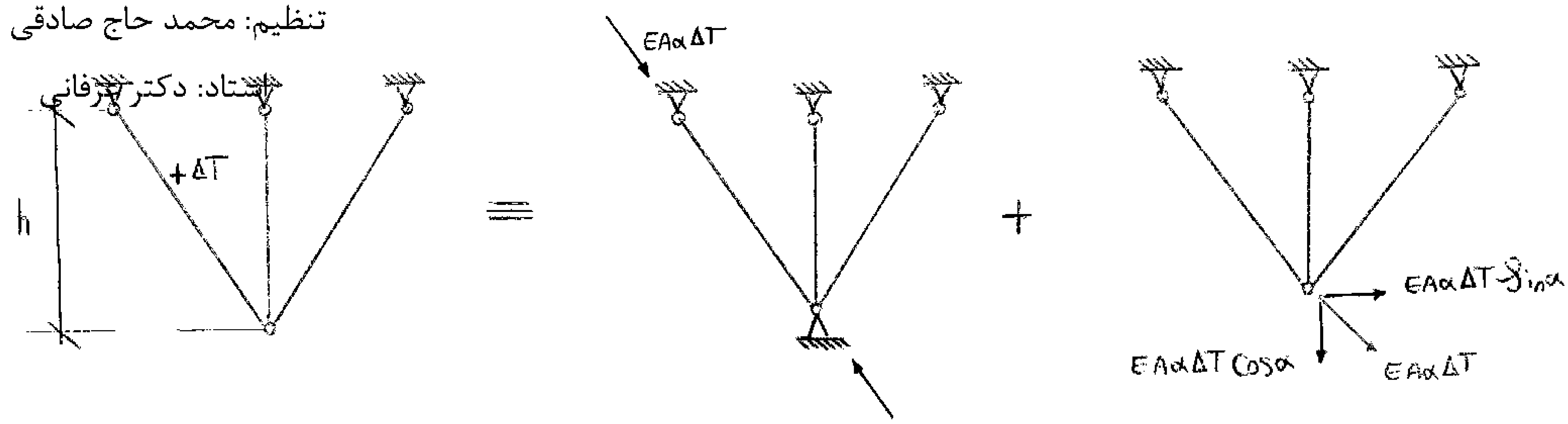



****

$$\delta_{Ay} = \frac{x}{\frac{EA}{h}(1+2\cos^3\alpha)}$$

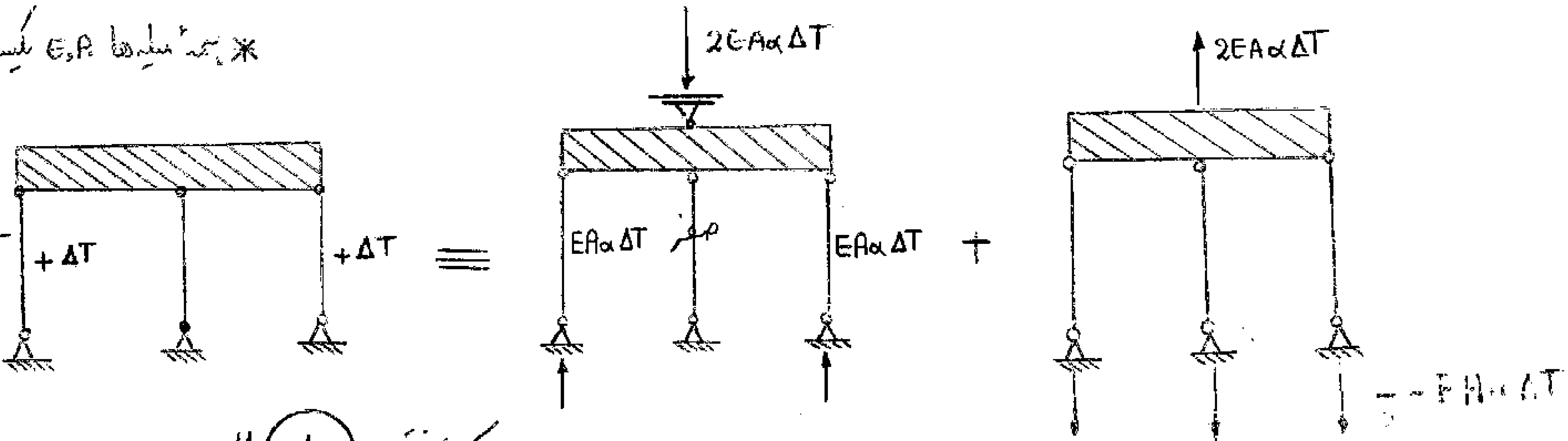
تنظیم: محمد حاج صادقی

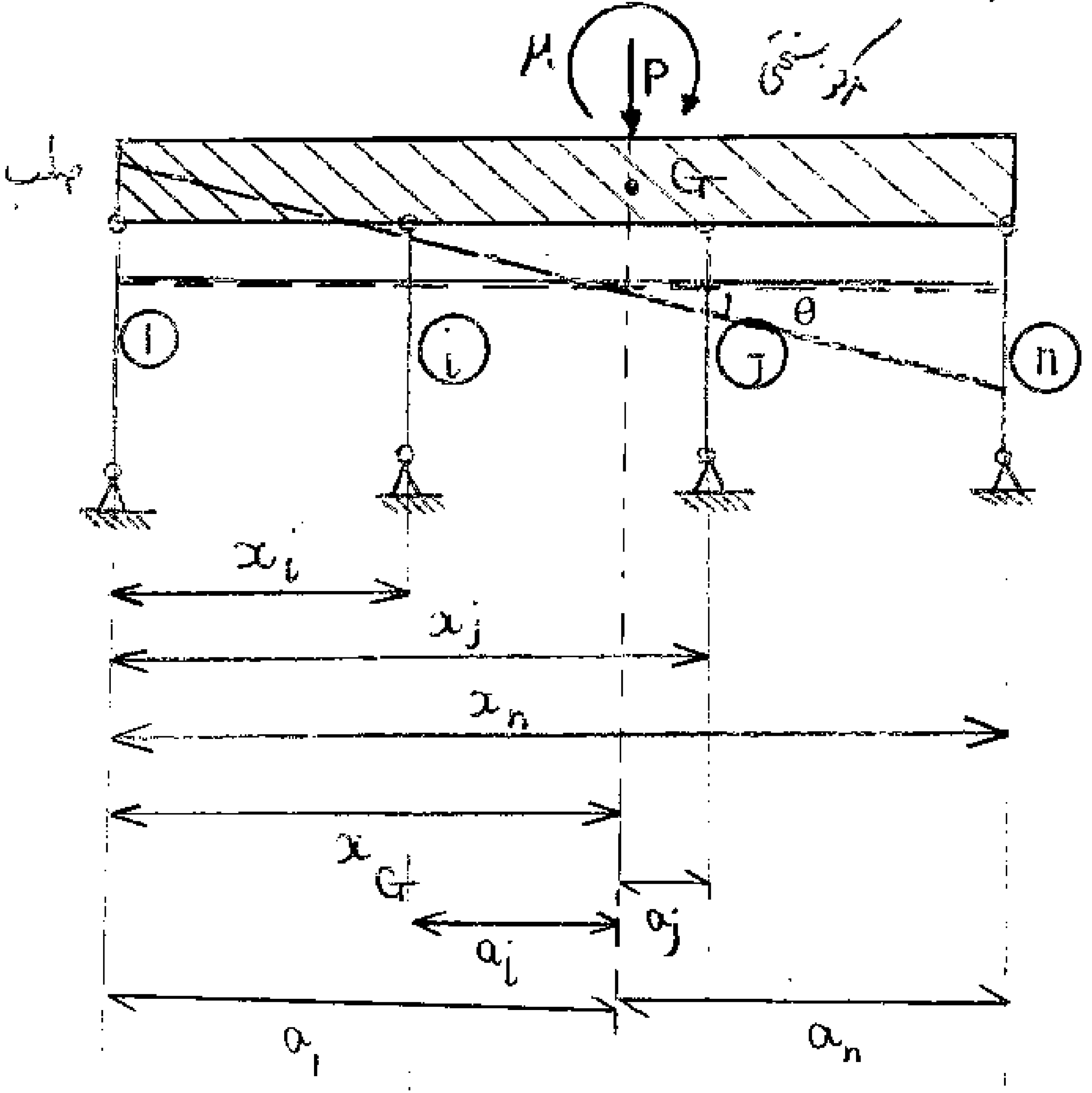
استاد: دکتر عرفانی




* همهٔ میله‌ها E,A یکسان دارند

به علت تقارن فقط بالا و پایین می‌رود.




$$\boxed{x_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} k_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} k_i}}$$

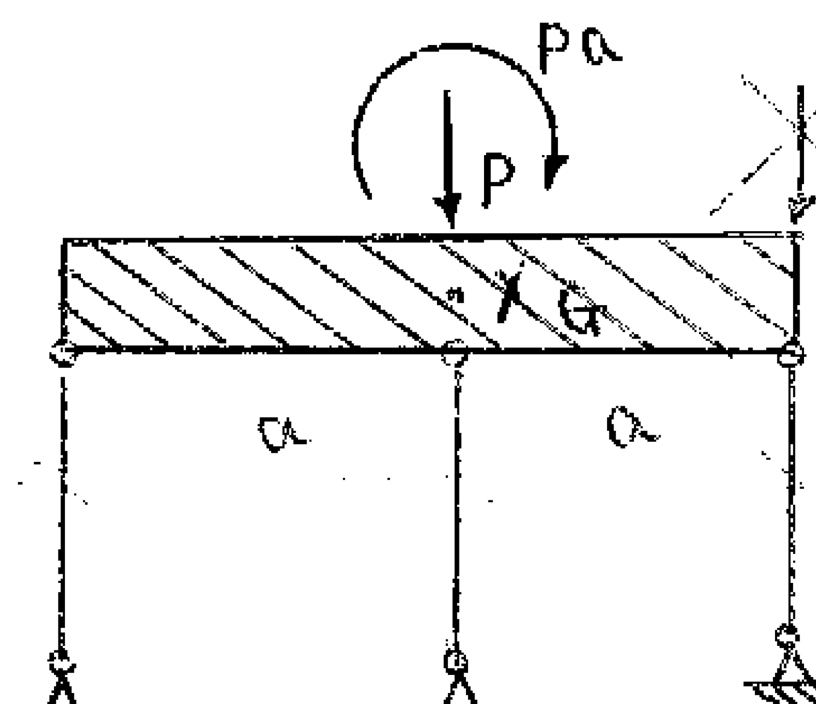
$$\delta_G = \frac{P}{\sum_{i=1}^{n} k_i} \quad , \quad \boxed{\theta = \frac{M}{\sum_{i=1}^{n} k_i a_i^2}}$$

$$\delta_J = \delta_G + a_J \cdot \theta$$

* برای نیروی میله‌های j با استفاده از معادله تمام میله‌ها شرکت می‌کنند. *

$$P = \frac{k_J}{\sum_{i=1}^{n} k_i} P + \frac{k_J a_J}{\sum_{i=1}^{n} k_i a_i^2} M \longrightarrow \text{ok}$$

* برای تمامی فنرها نوشته می‌شود.




میله‌ها E و A و L یکسان دارند.

1 : سختی هر کدام از میله‌ها به صورت سختی

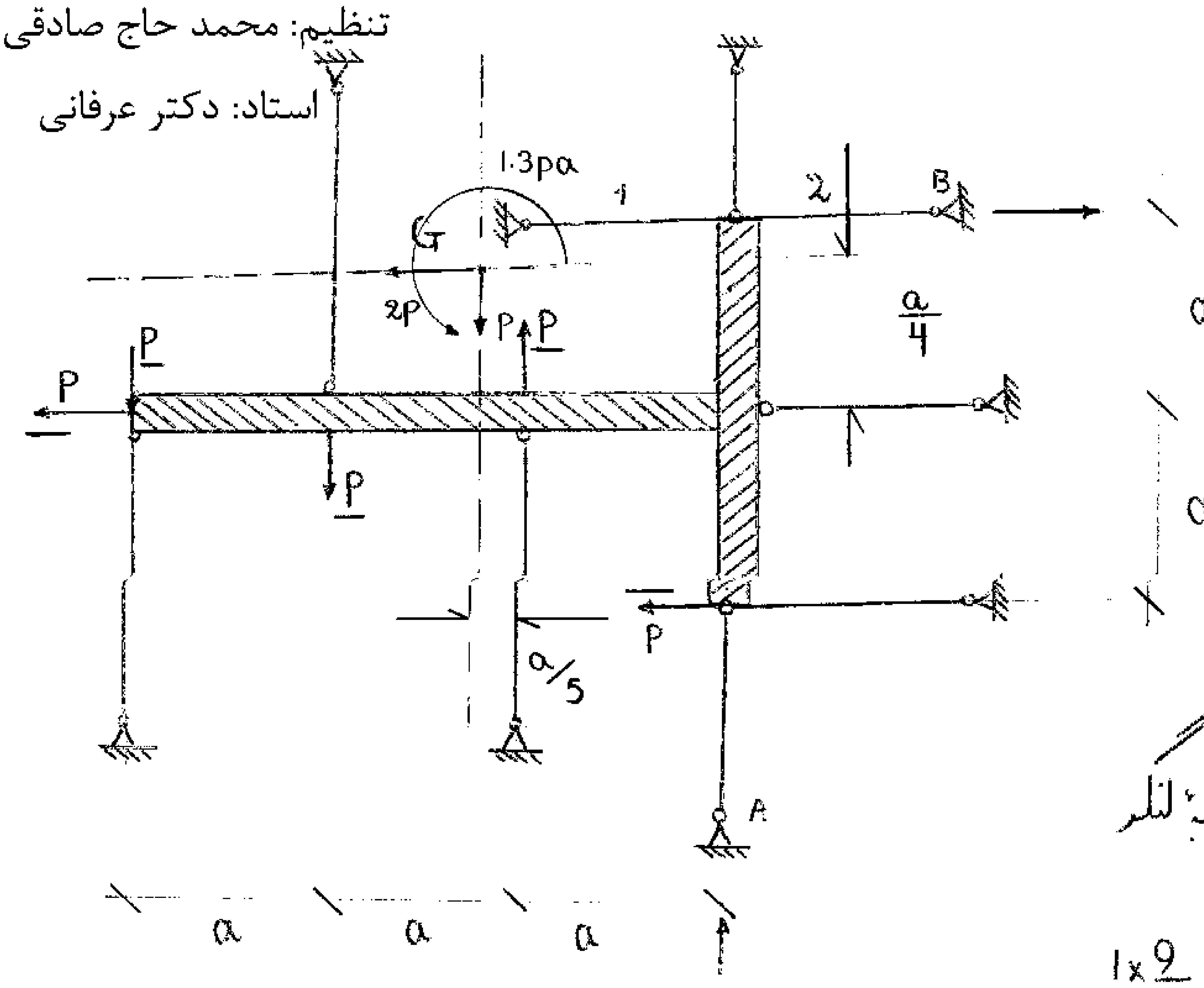
$$\uparrow P/3 \qquad \uparrow P/3 \qquad \uparrow P/3 + \frac{1\times a}{1\times a^2 + 1\times 0 + 1\times a^2} Pa = \frac{5P}{6}$$

$$-\frac{P}{2} = -\frac{P}{6} \qquad \frac{P}{2}$$

* مرکز سختی جایی است که دوران حول آن صورت می‌گیرد. *

تنظیم: محمد حاج صادقی

استاد: دکتر عرفانی




همهٔ میله‌ها یکسان می‌باشند.

* نکته: میله‌های 1 و 2 در رابطهٔ مرکز سختی شرکت نمی‌کنند.

محاسبهٔ لنگر

$$1\times\frac{9}{5}+1\times\frac{4}{5}+1\times\frac{1}{5}-1\times\frac{1}{4}-1\times\frac{5}{4}=\frac{13}{10}$$

$$x_G=\frac{1\times 0+1\times a+1\times 2a+1\times 3a+1\times 3a}{5}=\frac{9}{5}a$$

$$y_G=\frac{1\times a+1\times 2a}{4}=\frac{3}{4}a$$

$$1_A:\ \frac{1}{5}P-\frac{1\times\frac{6}{5}a\times 1.3Pa}{1\times(\frac{9}{5}a)^2+1\times(\frac{4}{5}a)^2+1\times(\frac{1}{5}a)^2+2(\frac{6}{5}a)^2+1\times(\frac{5}{4}a)^2+1\times(\frac{1}{4}a)^2+2\times(\frac{3}{4}a)^2}$$

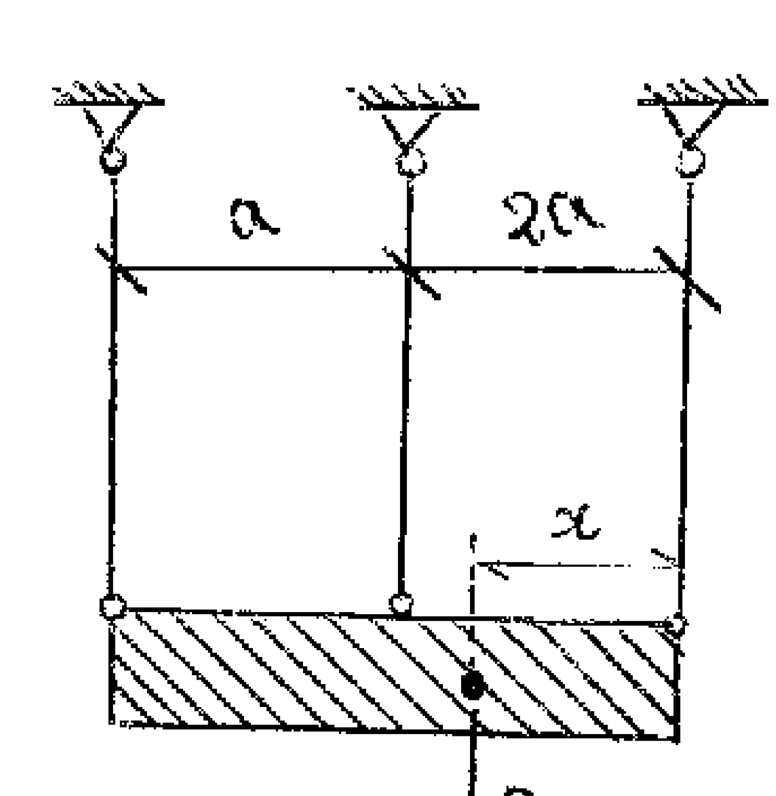
$$\sim$$

$$\longrightarrow B:\ \frac{1}{4}2P+\frac{1\times\frac{3}{4}a}{\sim}\ ,\quad \theta=\frac{1.3P}{\sim}$$

* اگر دوم دوران بود می‌توان گره‌ها را بازنویسی کرد.

* فاصلهٔ $x$ را طوری تعیین کنید که جسم صلب دچار دوران نشود.

* یعنی باید نیرو به مرکز سختی وارد شود.

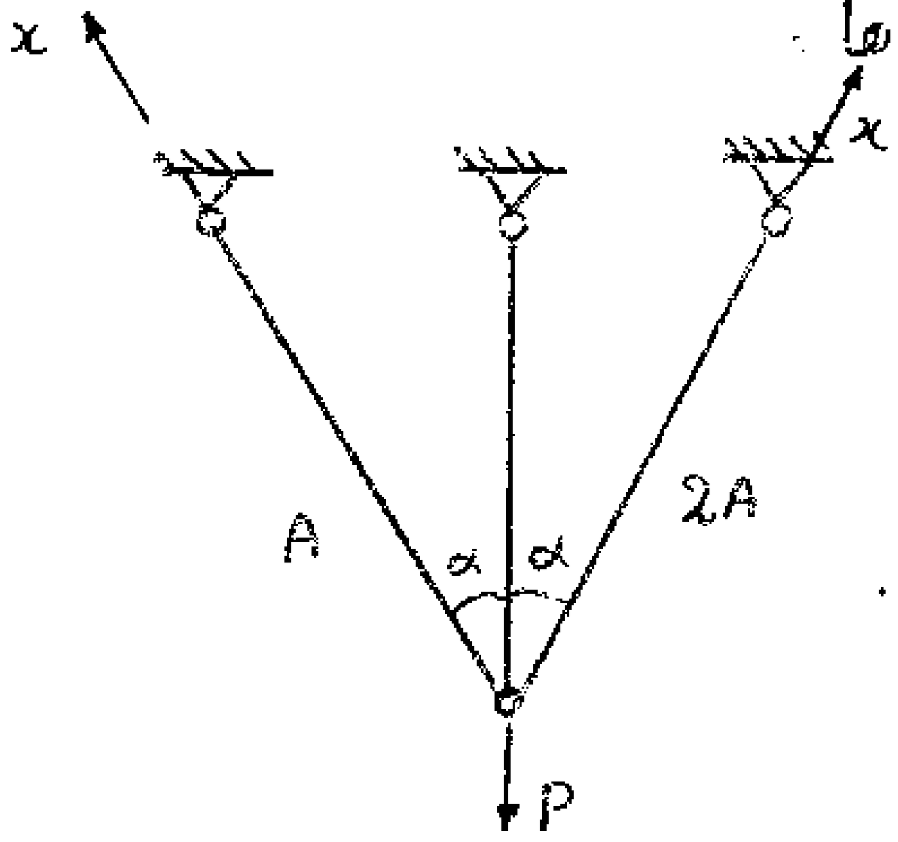



$$x_G=\frac{1\times 2a+1\times 3a}{3}=\frac{5a}{3}\longrightarrow x=\frac{5a}{3}$$

تنظیم: محمد حاج صادقی

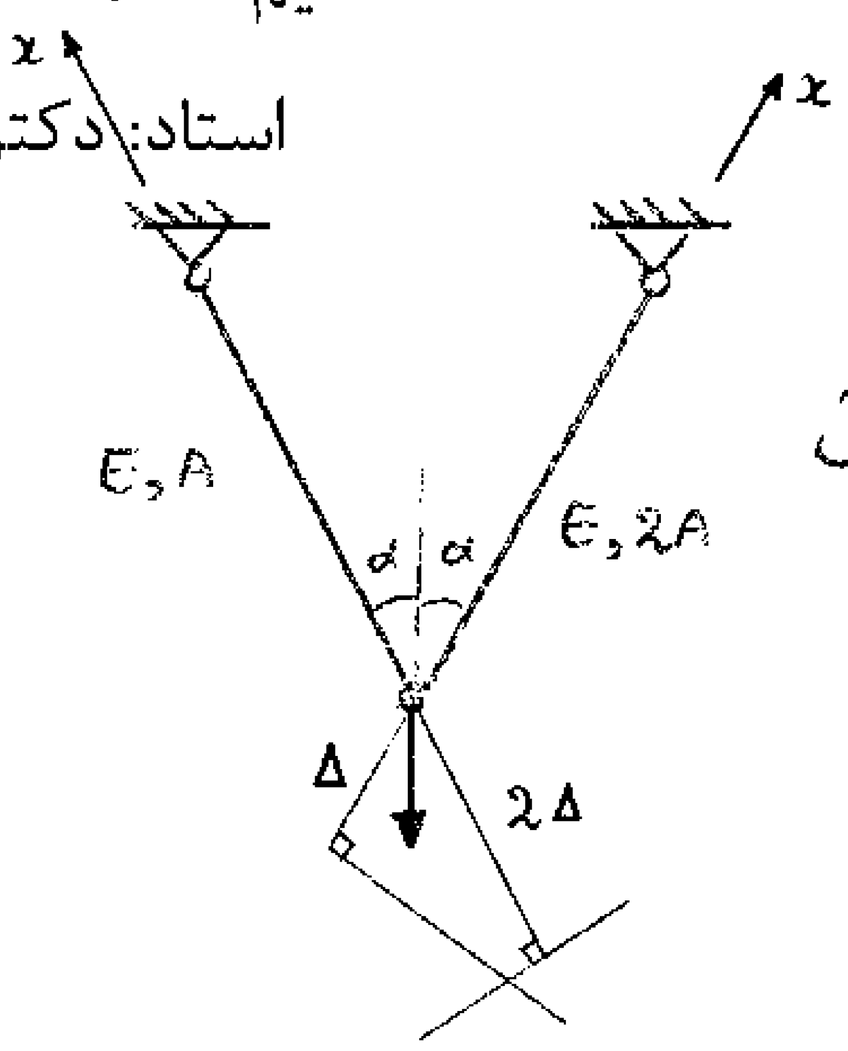
استاد: دکتر عرفانی

## تشخیص جهت حرکت در سازه ها.



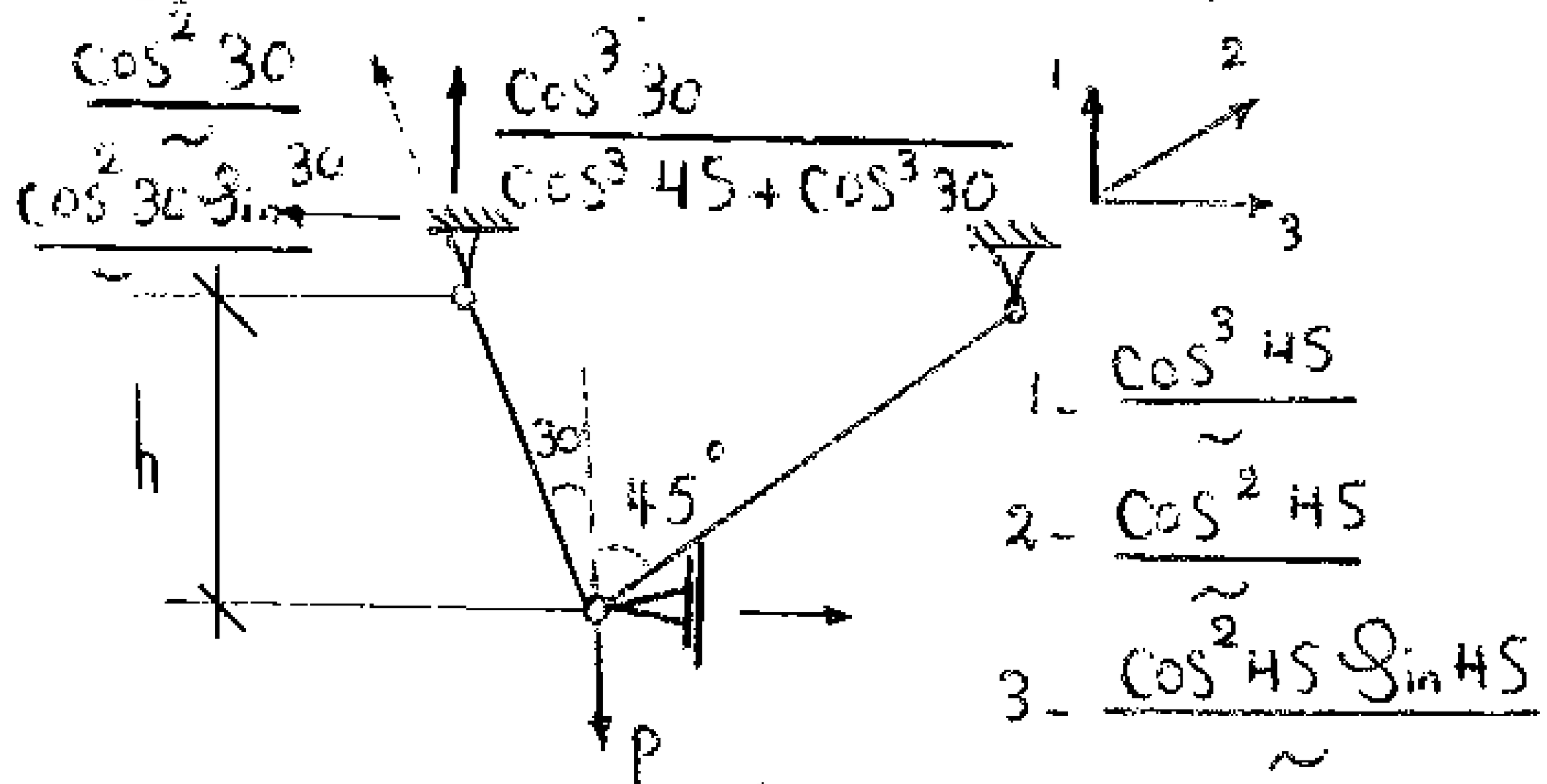

مانند سوال روبرو

جواب به سمت راست می باشد.




به طرف راست حرکت می کند.

برای تشخیص حرکت در یک گره می توان یک قید تکیه گاهی در آن گره و در راستای مورد نظر تعبیه کرد سپس مساله را حل کرده و عکس العمل تکیه گاهی را بدست می آوریم بدیهی است در صورت مثبت بودن آن تکیه گاه حرکت در جهت عکس، عکس العمل آن تکیه گاه خواهد بود.




$$\frac{\frac{EA}{h}\cos^3 30}{\frac{EA}{h}(\cos^3 45+\cos^3 30)}$$

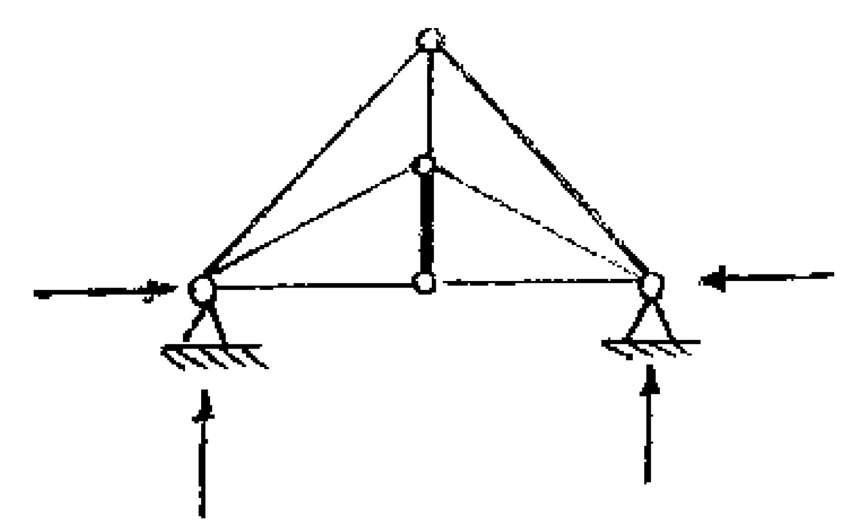
در نتیجه به سمت چپ می رود.

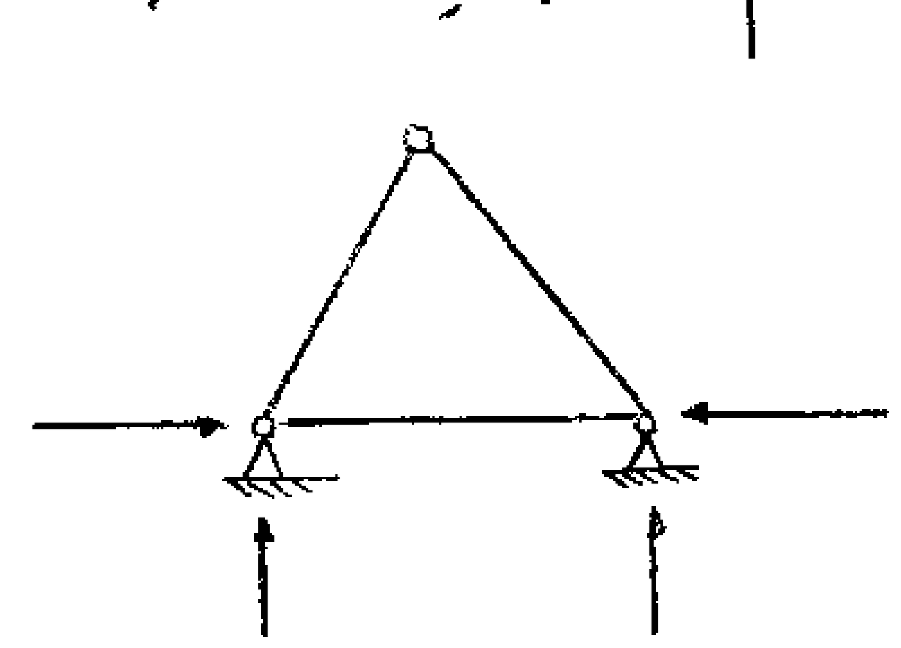
$\boxed{\text{* میله ها EA یکسان دارند}}$

## تشخیص قیدهای معین و نامعین در بارگذاری های غیر مستقیم.

* بارگذاری های غیر مستقیم در قیدهای معین به هیچ وجه ایجاد نیرو نمی کنند ولی در قیدهای نامعین می توانند نیرو ایجاد کنند به شرطی که در مقابل تغییر شکل های حاصل از بارگذاری های غیر مستقیم مانعی به عمل آید.

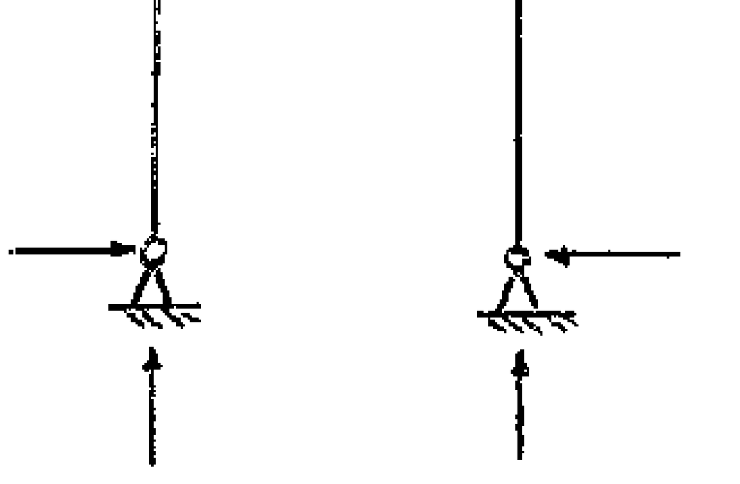
* همچنین در سیستم های متشکل از قیدهای معین و نامعین بارگذاری های غیر مستقیم موثر بر قیدهای معین در هیچ قسمت از سیستم ایجاد نیرو نمی کند ولی بارگذاری های غیر مستقیم موثر بر قیدهای نامعین می توانند در قسمت های نامعین همان سیستم ایجاد نیرو کنند.

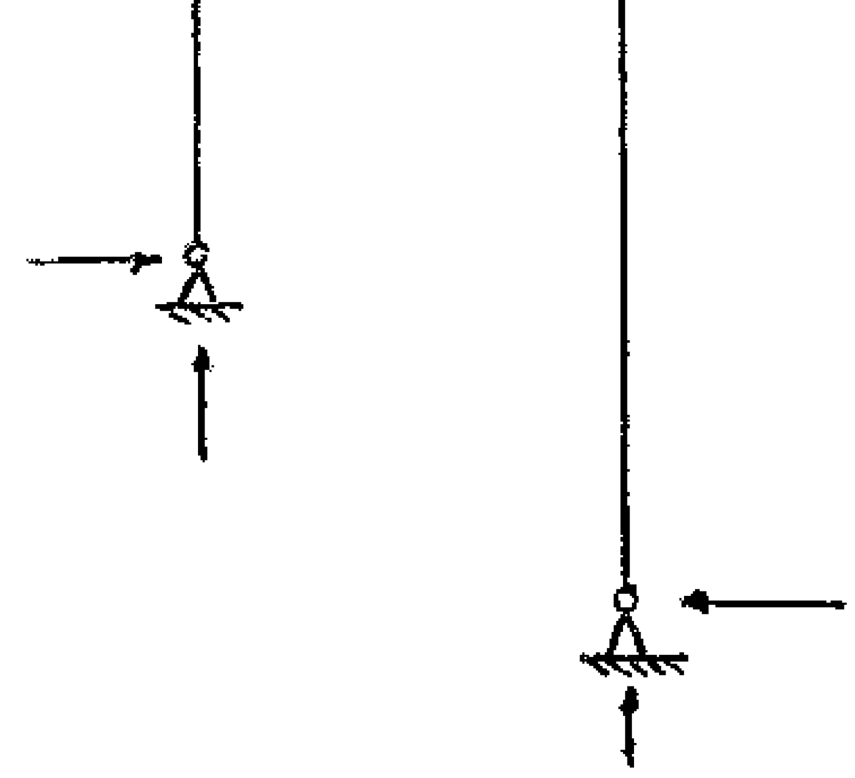




آبی: معین

قرمز: نامعین

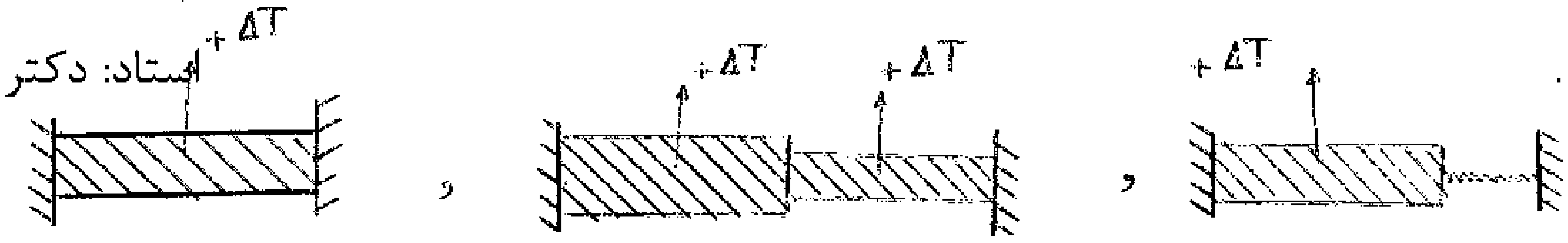




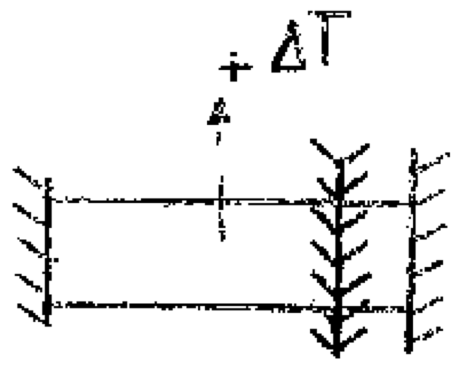
تنظیم: محمد حاج صادقی

استاد: دکتر عرفانی

مقاومت مصالح :

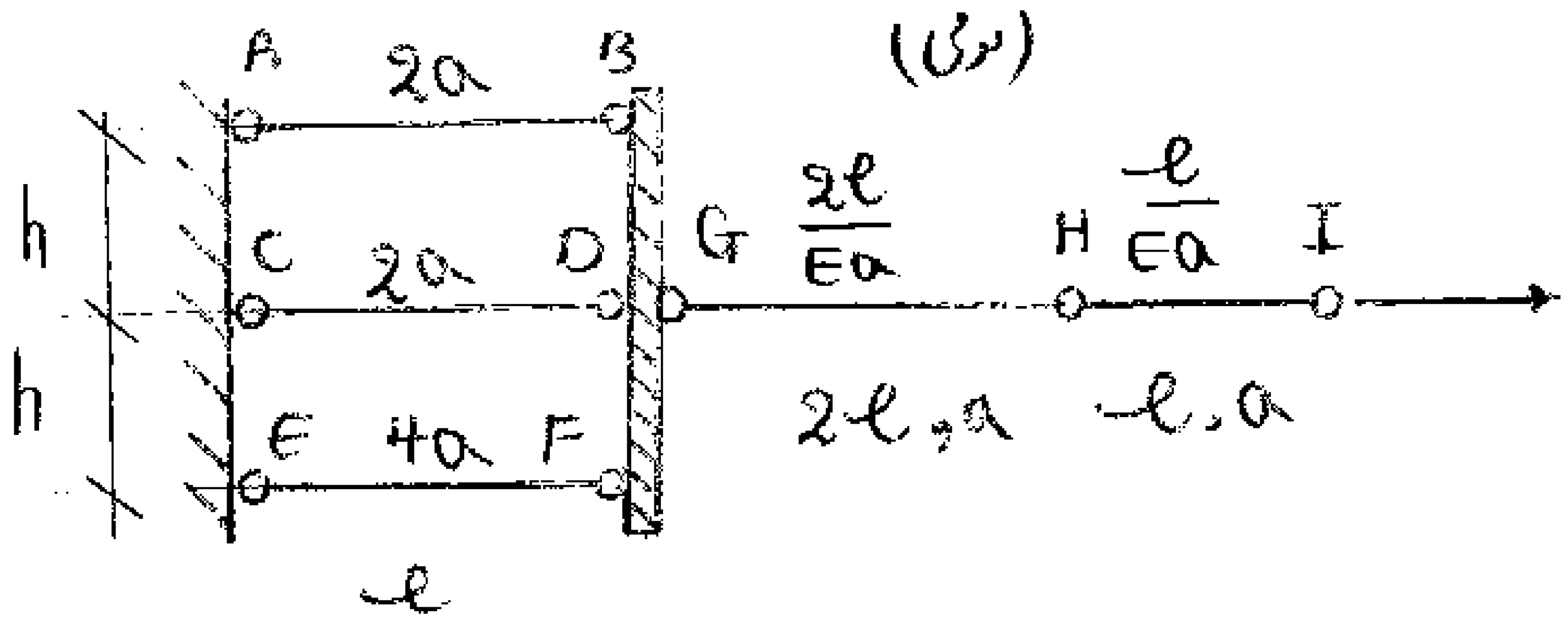



$\sigma = E\alpha\Delta T$ , $\sigma < E\alpha\Delta T$ $\sigma > E\alpha\Delta T$ , $\sigma < E\alpha\Delta T$

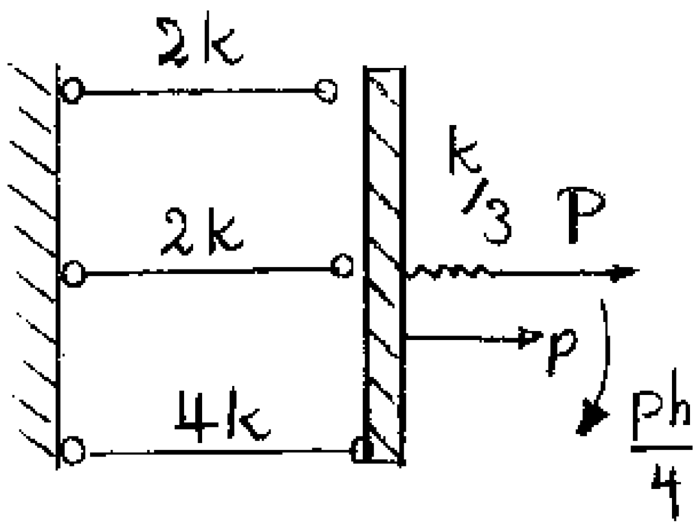



$\sigma > E\alpha\Delta T$

صفحه 58 _ سوال 36 :

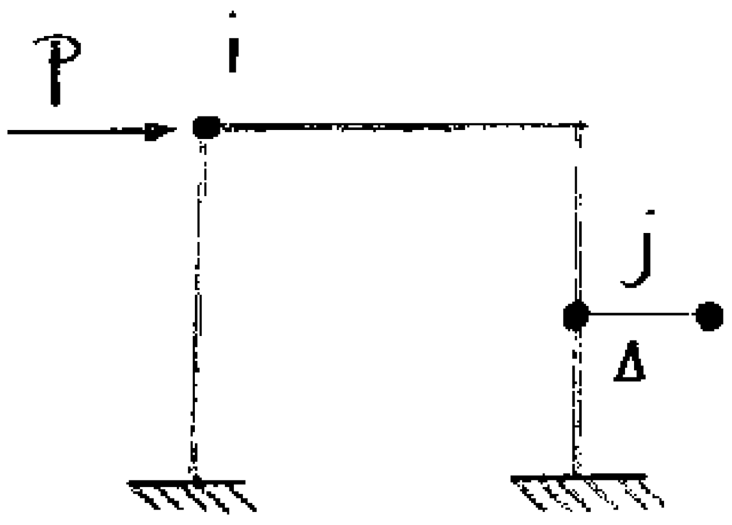



$\frac{EA}{l} = k \,,\, \frac{l}{EA} = F$




$$\Delta_I = \frac{P}{k/3} + \frac{P}{8k} + \frac{h/4 \times Ph/4}{2k(5h/4)^2 + 2k(h/4)^2 + 4k(3h/4)^2} = \frac{69Pl}{22Ea}$$

جمع بندی سختی ها :




تلاش ( نیرو یا لنگر ) لازم برای ایجاد تغییرمکان یا دوران واحد . سختی : k

تغییرمکان یا دوران ایجاد شده تحت اثر نیروی واحد در i . نرمی : F

$k_{ij} = \frac{P}{\Delta}$ : نیروی لازم در i جهت ایجاد تغییرمکان واحد در j

$F_{ji} = \frac{\Delta}{P}$ : تغییر مکان ایجاد شده در j تحت اثر نیروی واحد در i

E : سختی محوری مصالح

EA : سختی محوری مقطع

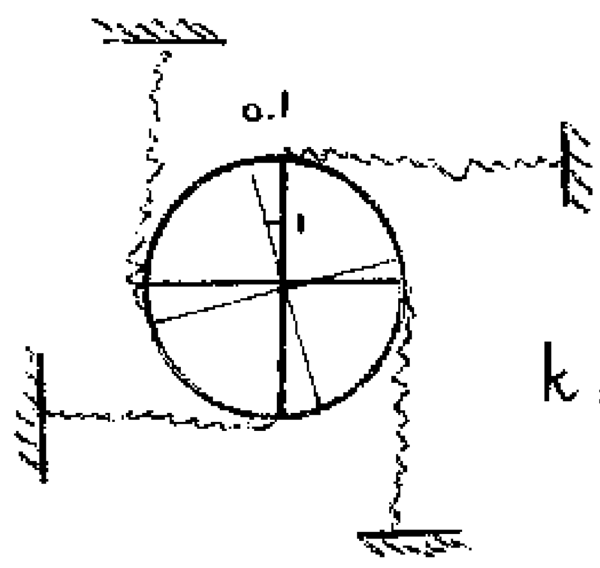
$\frac{EA}{l}$ : سختی محوری عضو

EI : سختی خمشی مقطع

سختی خمشی عضو ( $\frac{EI}{l}$ , $\frac{EI}{l^2}$ , $\frac{EI}{l^3}$ , ... )

سختی پیچشی عضو .

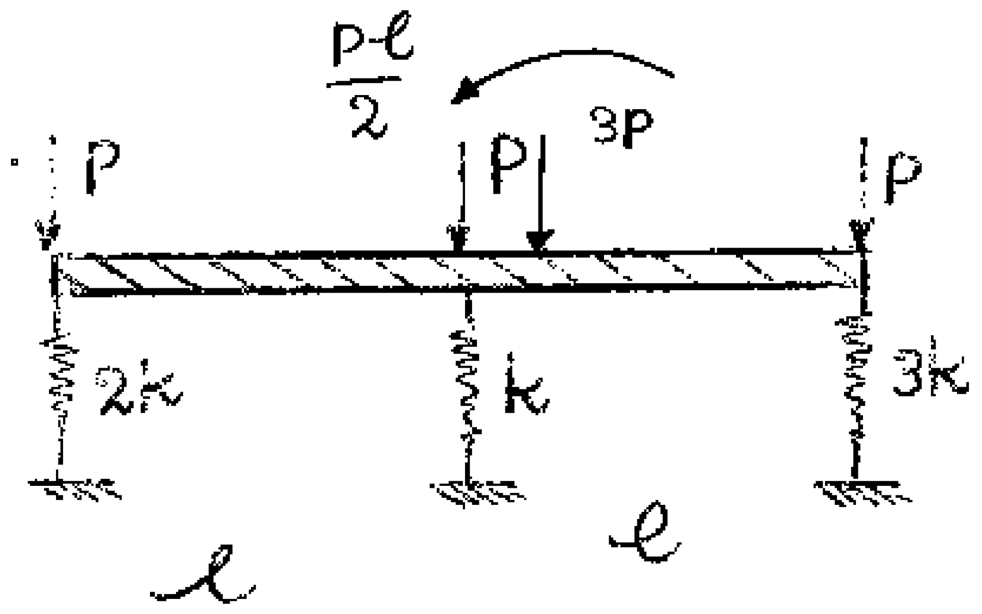
_ لنگر پیچشی لازم جهت ایجاد دوران واحد _




$10 \times 0.1 = 1\,t$

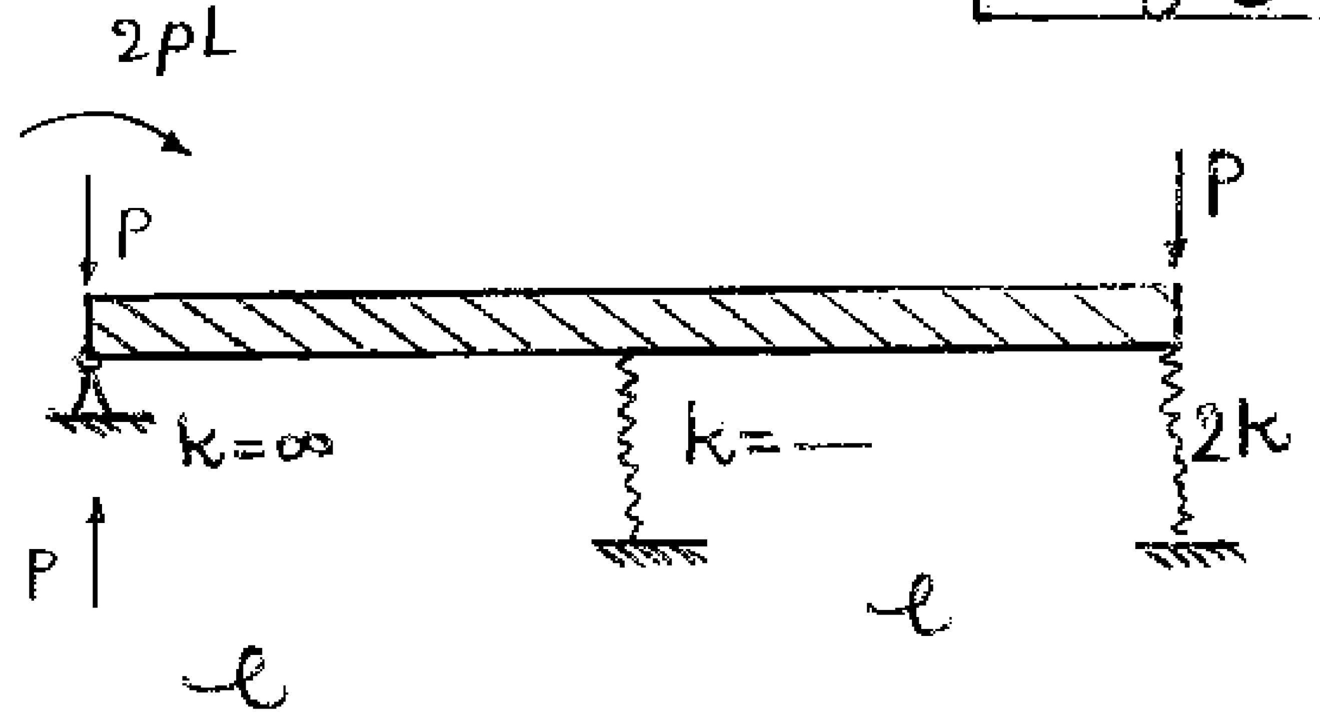
$T = 1 \times 0.1 \times 4 = 0.4\ t.m$

استاد: دکتر عرفانی




$$\frac{2}{6}\times 3P+\frac{2\times \frac{7\ell}{6}}{2\times\left(\frac{7\ell}{6}\right)^2+k\times\left(\frac{\ell}{6}\right)^2+3\left(\frac{5\ell}{6}\right)}\;\frac{P\ell}{2}=\frac{36}{29}P$$

مرکز سختی: جایی است که اگر کوپل بر عضو اثر کند عضو حول آن نقطه دوران می‌کند



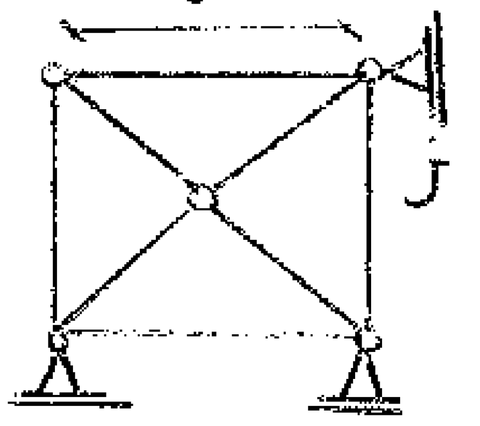

$$\frac{2k\times 2\ell}{2k\times(2\ell)^2+k\times\ell^2+0}\times 2P\ell$$

تنظیم: محمد حاج صادقی

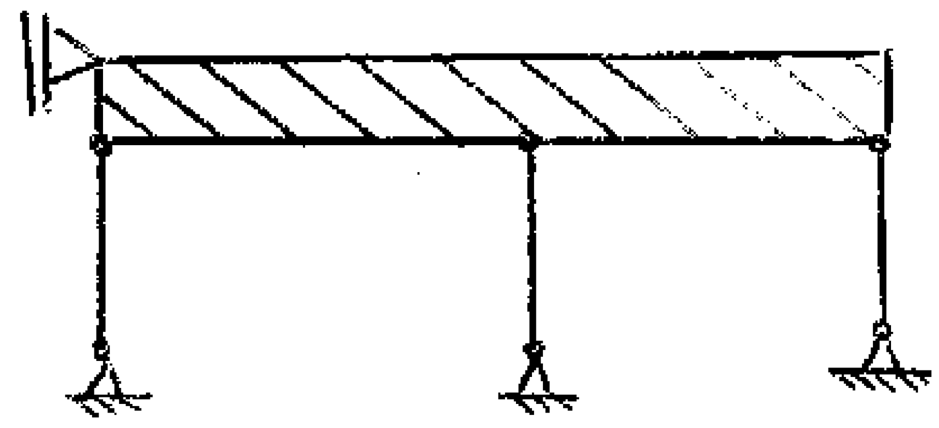
استاد: دکتر طاهر عرفانی

یک جسم صلب نامعین با هر درجه نامعینی به شرطی که به زمین متصل نباشد و یا به صورت معین به زمین متصل باشد همین افزایش دما ببیند (یا کاهش دما) هیچ گونه نیرویی در آن به وجود نمی آید :

مانند :

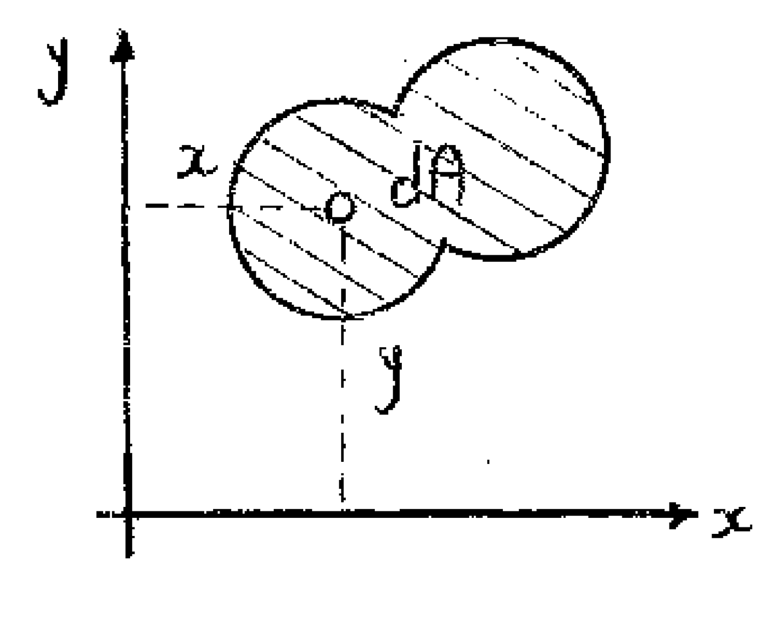



اگر همه اعضا به جز ij افزایش دما به اندازه ΔT ببینند و عضو ij به اندازه $\alpha \Delta T a$ اضافه طول داشته باشد به شرطی که $\alpha \Delta T a$ باشد هیچ گونه نیرویی به وجود نمی آید.



اگر همگی یکسان گرم شوند نیرویی به وجود نمی آید.

## مشخصات هندسی مقاطع :




سطح $\Sigma$

$$\int_{\Sigma} dA = A$$ مساحت — گشتاور صفرم سطح

$$* \int_{\Sigma} x \, dA = S_y = Q_y$$

* [گشتاور / لنگر / خمان] [استاتیک / اول] سطح نسبت به محور y

$$* \int_{\Sigma} y \, dA = S_x = Q_x$$ گشتاور اول سطح نسبت به محور x

$\boxed{\text{به جای } x \text{ , } y \text{ قرار می دهیم } t}$

$$* \int_{\Sigma} x^2 \, dA = I_y = J_y$$

* [گشتاور / لنگر / خمان] [اینرسی / دوم / ماند] سطح نسبت به محور y

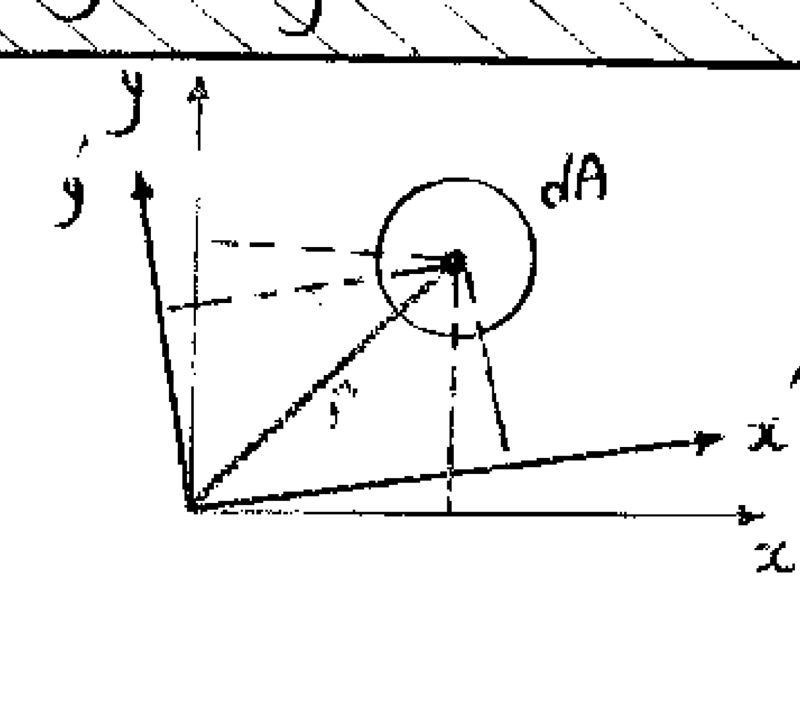
$$* \int_{\Sigma} y^2 \, dA = I_x = J_x$$ گشتاور دوم سطح نسبت به محور x

$$* \int \rho^2 \, dA = I_o = J_o = I_x + I_y = I_{x'} + I_{y'}$$

* [گشتاور / لنگر / خمان] [اینرسی / دوم / ماند] سطح نسبت به مبداء «قطبی»

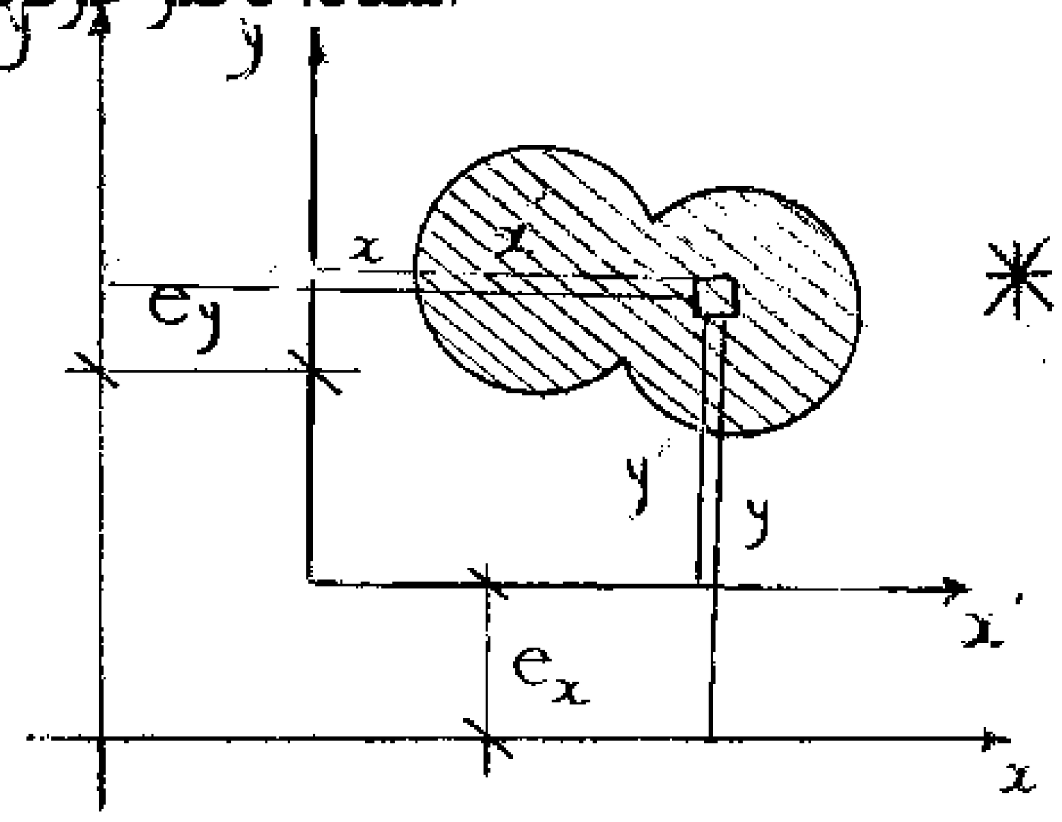
$$\boxed{* \; I_{xy} = J_{xy} = \int xy \, dA}$$

* [گشتاور / لنگر / خمان] [اینرسی / دوم / ماند] حاصلضرب سطح نسبت به محور x و y




*

* قانون انتقال محورهای موازی :



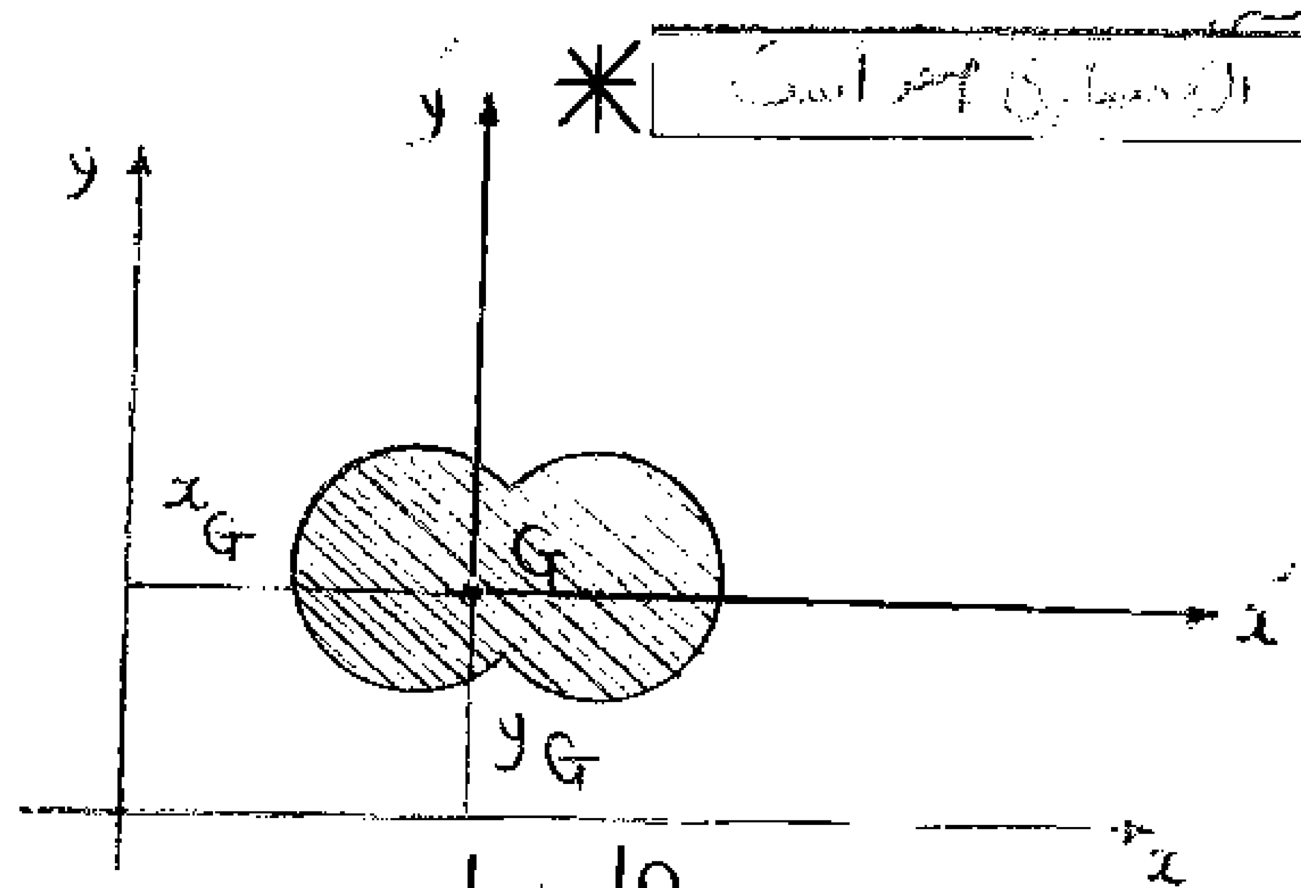

$$* \left| \begin{array}{l} x = x' + e_y \\ y = y' + e_x \end{array} \right.$$

$$* \left| \begin{array}{l} S_{x'} = S_x - e_x A \\ S_{y'} = S_y - e_y A \end{array} \right.$$

$$* \left| \begin{array}{l} I_{x'} = I_x - 2 e_x S_x + e_x^2 A \\ I_{y'} = I_y - 2 e_y S_y + e_y^2 A \end{array} \right.$$

$$* \quad I_{x'y'} = I_{xy} - e_x S_y - e_y S_x + e_x e_y A$$

* مرکز سطح نقطه‌ای است که گشتاور استاتیک سطح حول محور گذرنده از آن مساوی صفر است *



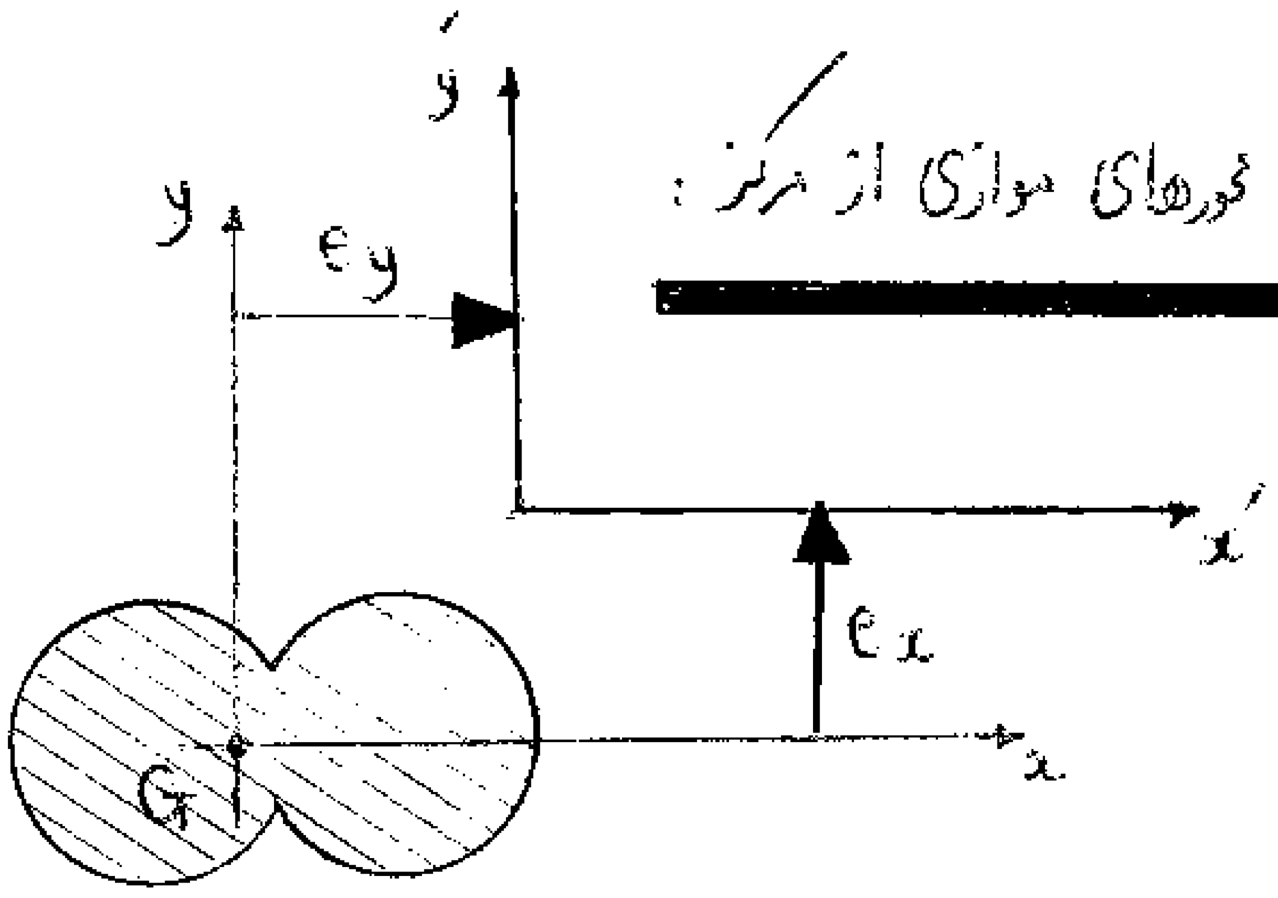

$$S_{x'} = 0 \Rightarrow S_x - Y_G \cdot A \longrightarrow Y_G = \frac{S_x}{A} \quad *$$

$$S_{y'} = 0 \longrightarrow S_y - X_G A \longrightarrow X_G = \frac{S_y}{A} \quad *$$

$$* \left| \begin{array}{l} G_x = \dfrac{\int x \, dA}{A} \\ G_y = \dfrac{\int y \, dA}{A} \end{array} \right.$$

$$* \left| \begin{array}{l} S_{x'} = -e_x \cdot A \\ S_{y'} = -e_y \cdot A \end{array} \right.$$

قانون انتقال محورهای موازی از مرکز :




$$* I_{x'} = \underline{\underline{I_x}} + e_x^2 A$$

$$* I_{y'} = \underline{\underline{I_y}} + e_y^2 A$$

$$* I_{x'y'} = I_{xy} + e_x e_y A$$

* محورهای مرکزی *

* مرکز سطح نقطه‌ای است که در محاسبات گشتاور اول سطح می‌توان مساحت سطح را در آن نقطه متمرکز کرد * باید توجه کرد که این مرکز منحصر به فرد بوده و بستگی به محورهای انتخابی ما ندارد. *

$$* \quad \bar{x} = \frac{\int x \, dL}{L} , \quad \bar{x} = \frac{\int x \, dA}{A}$$

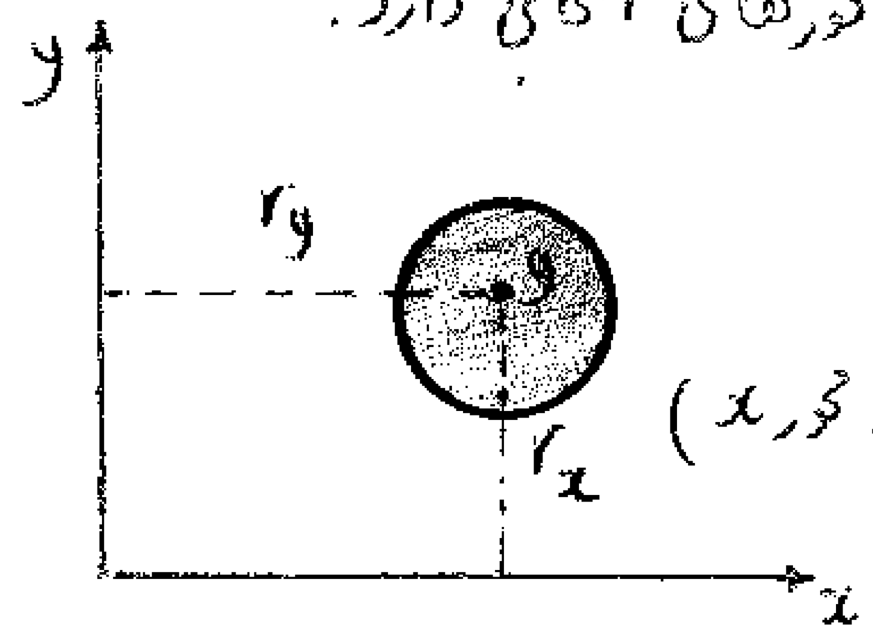
$$\bar{y} = \frac{\int y \, dL}{L} , \quad \bar{y} = \frac{\int y \, dA}{A}$$

استاد: دکتر عرفانی

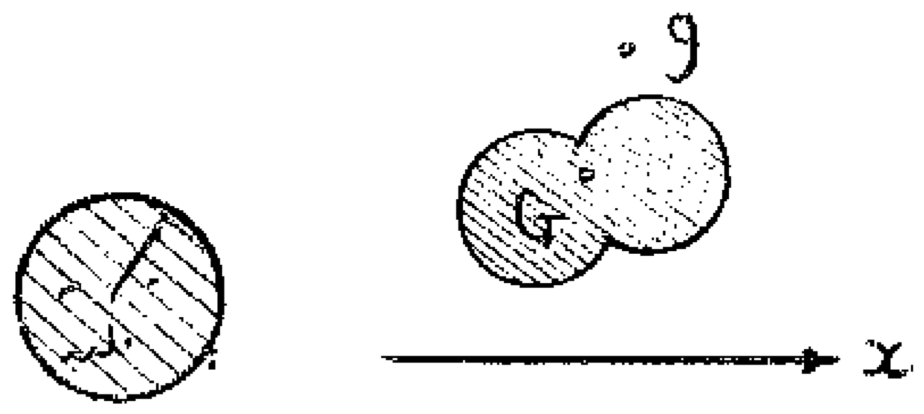
مرکز ژیراسیون :

مرکز ژیراسیون یک سطح نقطه‌ای است که در محاسبات گشتاور دوم سطح می‌توان کل مساحت را در آن نقطه متمرکز کرد.

باید توجه کرد که برخلاف مرکز سطح، مرکز ژیراسیون منحصر به فرد نبوده و بستگی به محورهای انتخابی دارد.



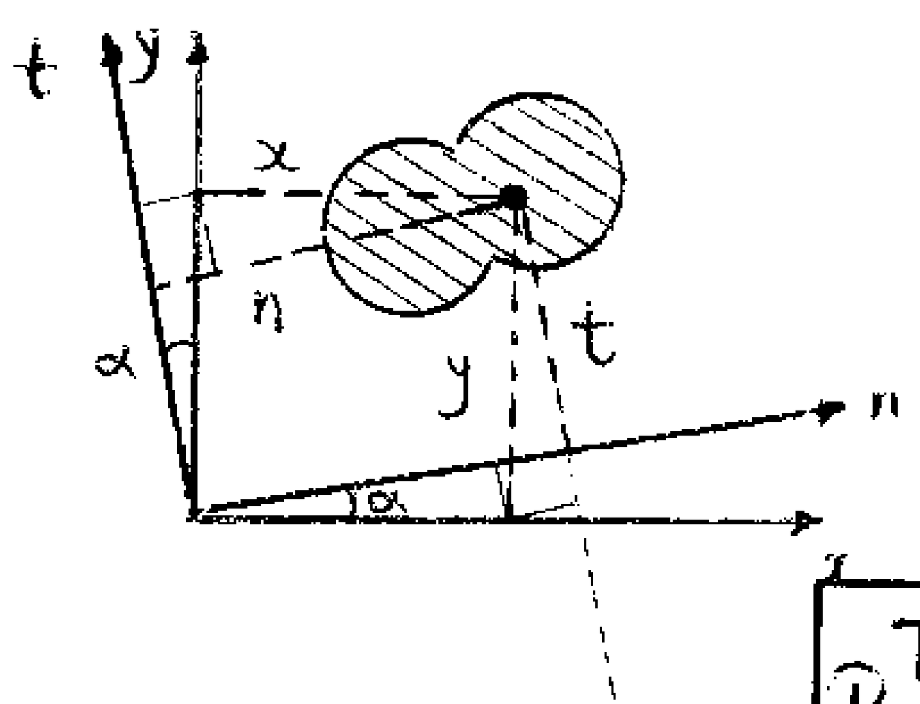

$$I_x = A r_x^2 \qquad I_y = A r_y^2 \;\longrightarrow\; r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \qquad r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$




$$\boxed{I_o = A r_o^2} \qquad r_o = \sqrt{\frac{I_o}{A}}$$

$$\boxed{r_o^2 = r_x^2 + r_y^2}$$

تعمیم دوران محورها :




$$\boxed{R}\qquad \begin{bmatrix} n \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\boxed{R^T}\qquad \begin{bmatrix} S_n \\ S_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_x \\ S_y \end{bmatrix}$$

$$* \quad I_n = \frac{I_x + I_y}{2} \underset{\ominus}{+} \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\alpha \underset{\oplus}{\ominus} I_{xy}\sin 2\alpha$$

$$I_{nt} = 0 \oplus \frac{I_x - I_y}{2}\sin 2\alpha + I_{xy}\cos 2\alpha$$

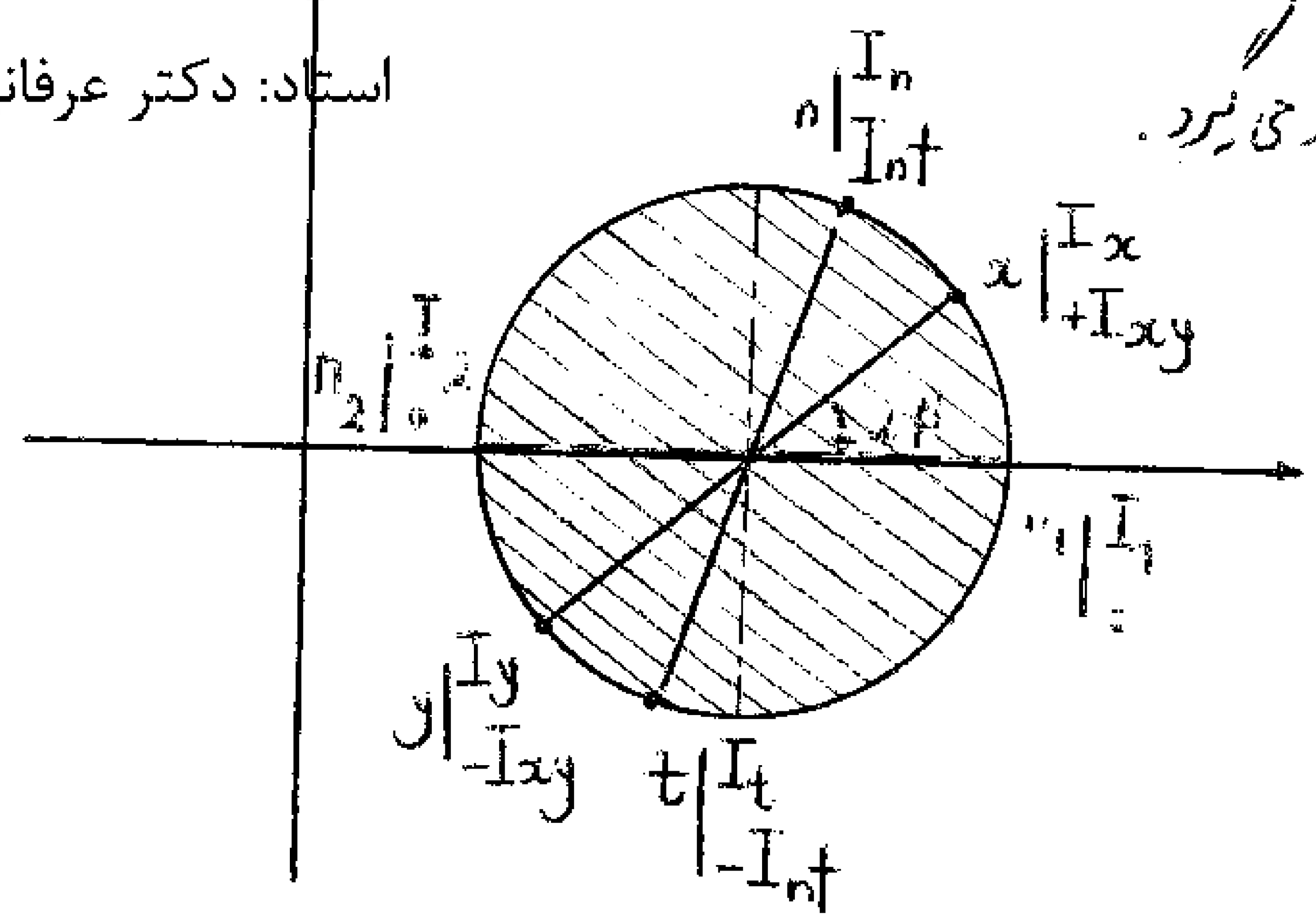
ملاحظه می‌شود تبدیلات دوبعدی تنش و یا کرنش با یک اختلاف در علامت منفی در مورد دوران محورها برای ممان اینرسی نیز صادق است بنابراین دایره مور اینرسی قابل تعریف می‌باشد ** با این اختلاف که در ایجاد دایره مور

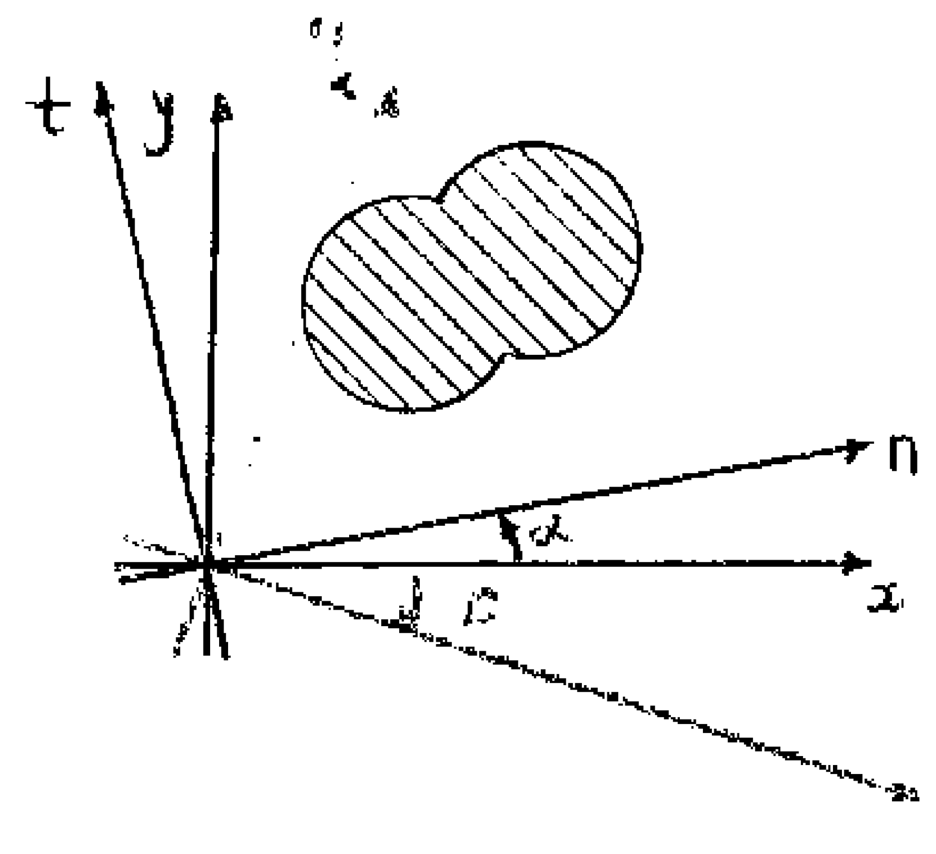
** جهت چرخش نقطه تغییر یافته با جهت چرخش محورها در دو شکل یکسان می‌باشد

تنظیم: محمد حاج صادقی

استاد: دکتر عرفانی

به دلیل آن که ممان اینرسی همواره مثبت است دایره در سمت راست قرار می‌گیرد.




محور اول اگر $90^\circ$ بچرخد روی محور دوم قرار می‌گیرد.

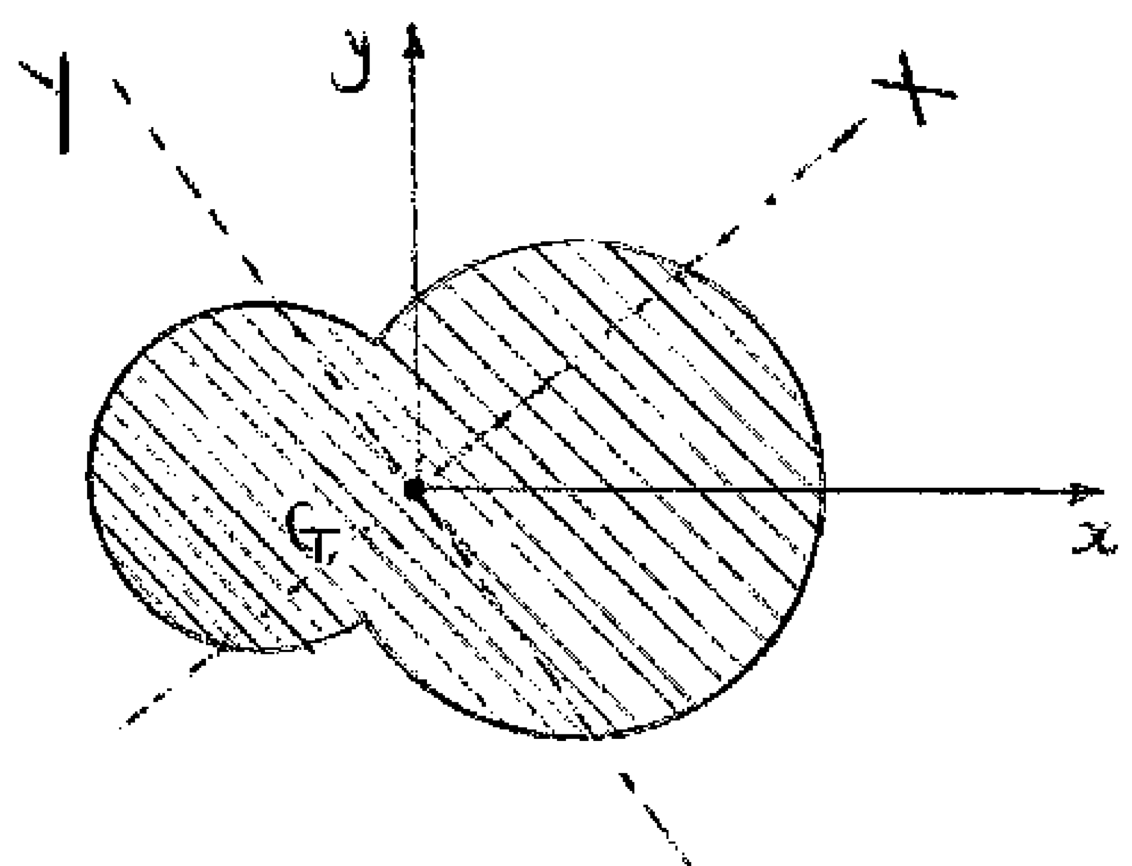
ممان اینرسی گریز از مرکز محور اصلی ، $I_{n_1n_2}=0$

$I_{n_1}=I_{max}$

$I_{n_2}=I_{min}$

* محورهای اصلی اینرسی یک سطح در یک نقطه همواره طوری هستند که یکی از محورها حداقل خود سطح را قطع می‌کند.

محورهای اصلی - اینرسی - مرکزی :




* G : مرکز $\longrightarrow \begin{cases} S_x=0 \longrightarrow S_X=0 \\ S_y=0 \longrightarrow S_Y=0 \end{cases}$

X , Y را اصلی اینرسی مرکزی گوییم. $\longrightarrow$ $I_{xy}=0$ : فرض

محورهای اصلی اینرسی مرکزی

$S_X=0$

$S_Y=0$

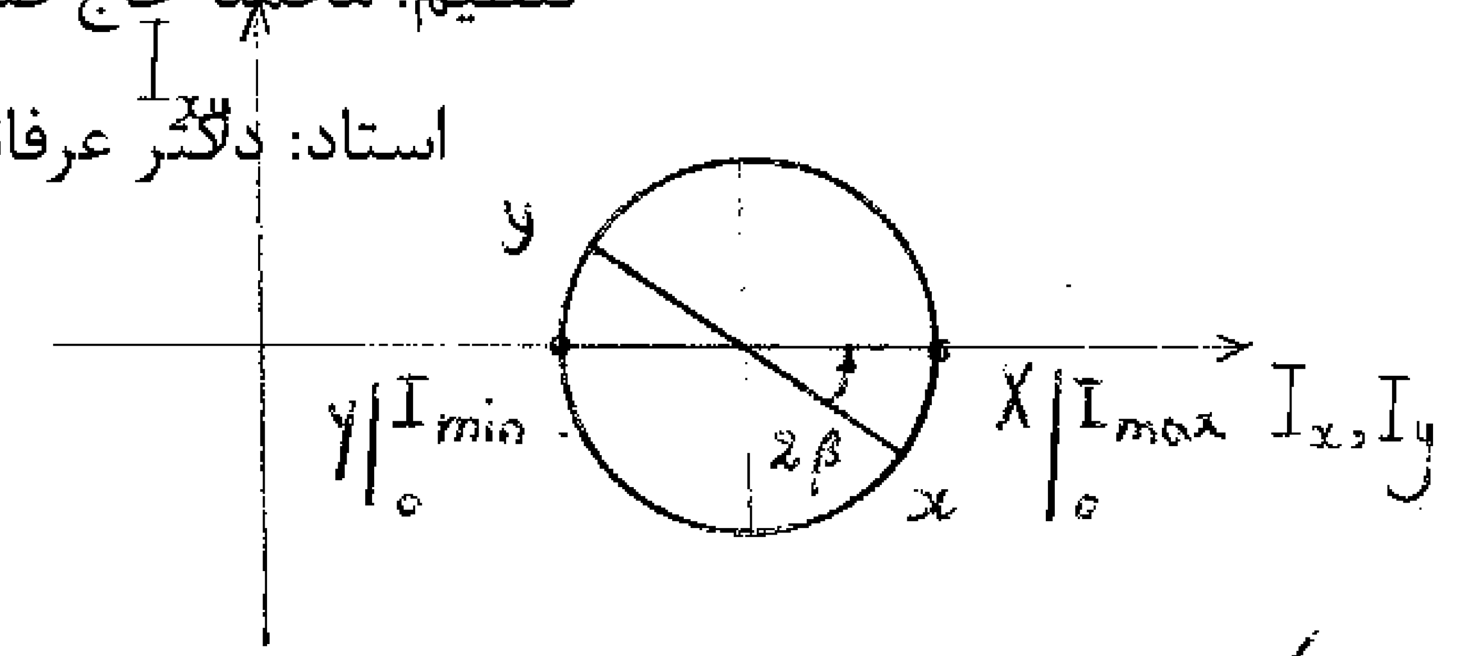
$I_{XY}=0$ ⟷ نتیجتاً

$\boxed{(I_X , I_Y)=(I_{max} , I_{min})}$

$$I_{max,min}=\frac{I_x+I_y}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{I_x-I_y}{2}\right)^2+I_{xy}^2}\quad , \quad \tan 2\beta=\frac{-2I_{xy}}{I_x-I_y}$$

تنظیم: محمد حاج صادقی

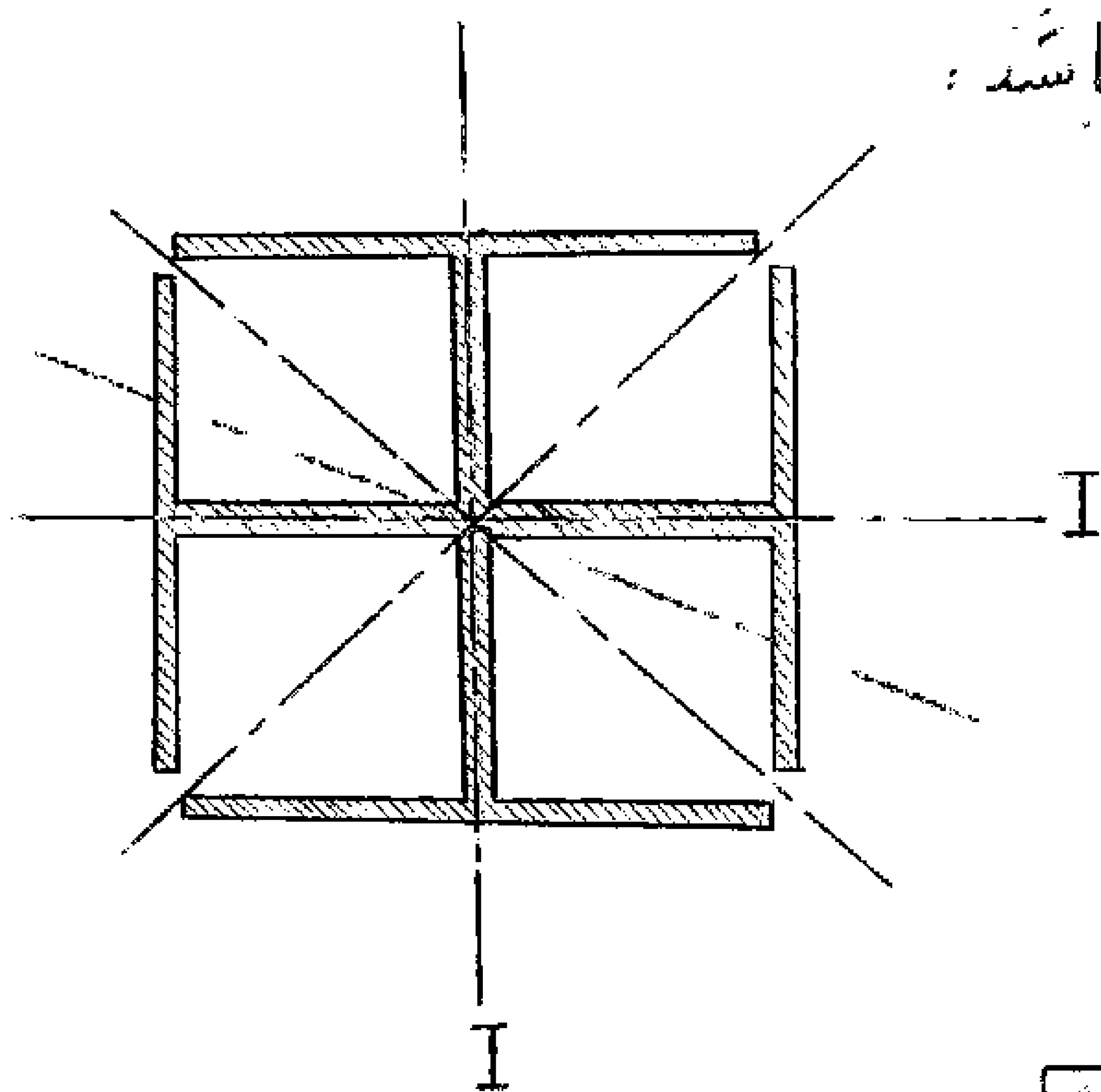
استاد: دکتر عرفانی

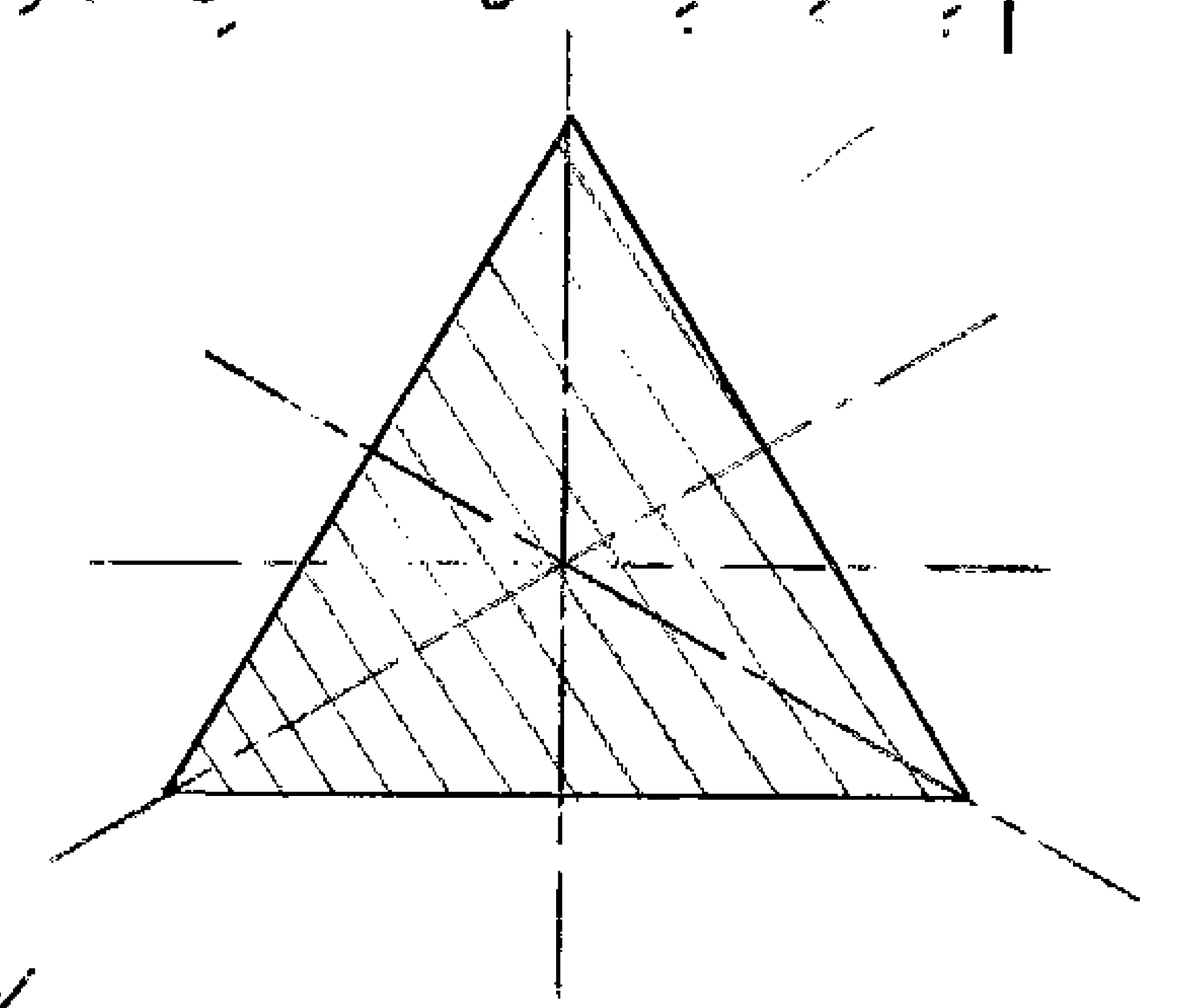



هر شکلی که محور تقارن داشته باشد قطعاً آن محور یکی از اصلی - اینرسی - مرکزی هاست.

اگر شکلی دو محور تقارن غیر متعامد داشته باشد یا بیش از دو محور تقارن داشته باشد همه محورهای مرکزی در آن شکل اصلی محسوب می شوند

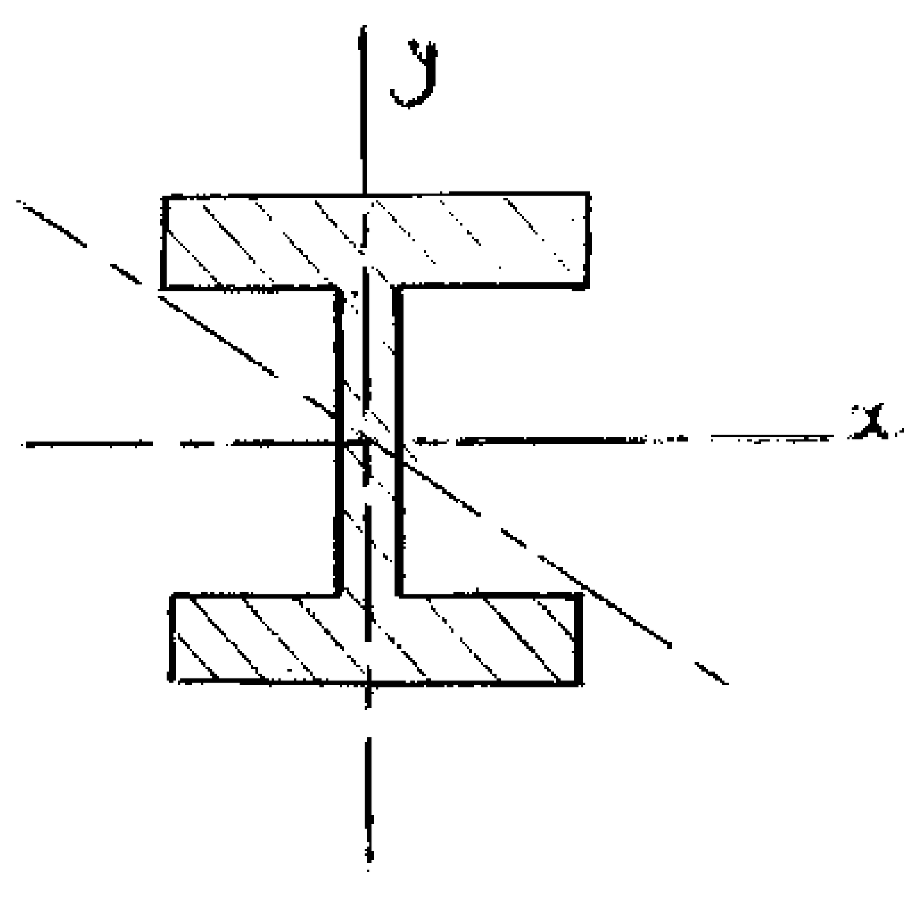
n ضلعی های منتظم چه توپر و چه توخالی دارای این خاصیت می باشند:



* اگر دو ممان اینرسی اصلی نیز با هم برابر باشند همه محورهای گذرنده

* از مبداء اصلی محسوب می شوند




$I_f\ I_x = I_y \longrightarrow$ در نتیجه همهٔ محورهای مرکزی اصلی محسوب می شوند.

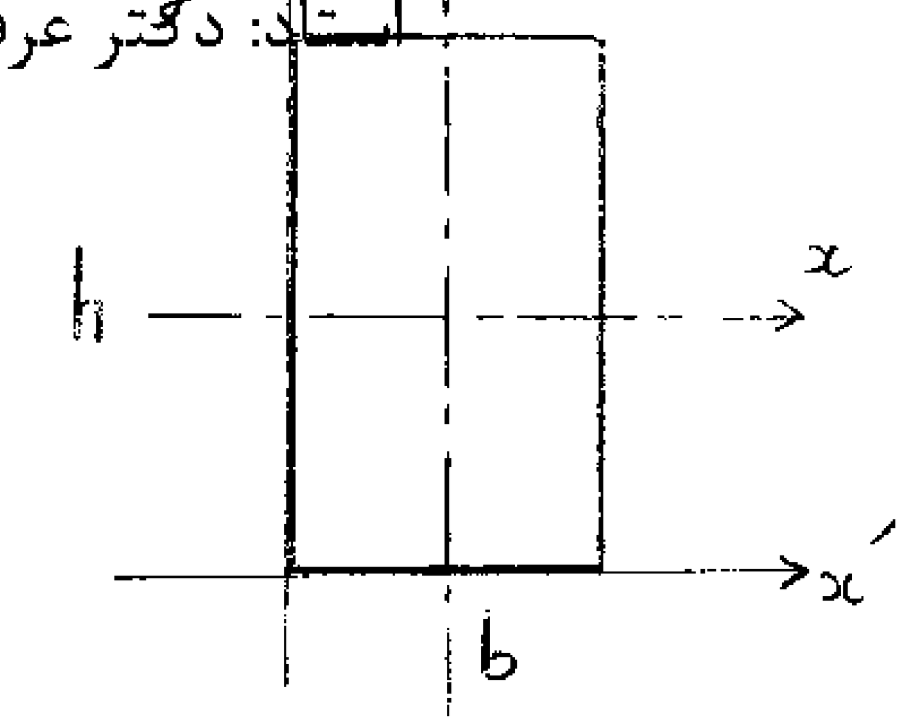
$I = I_x = I_y$

** در بین n ضلعی های منتظم توپر دایره کمترین ممان اینرسی را داشته و مثلث بیشترین ممان اینرسی را دارد. **

در بین n ضلعی های منتظم توخالی با مساحت و ضخامت جدار یکسان ........ بیشترین ممان اینرسی و ..... کمترین ممان اینرسی را دارد

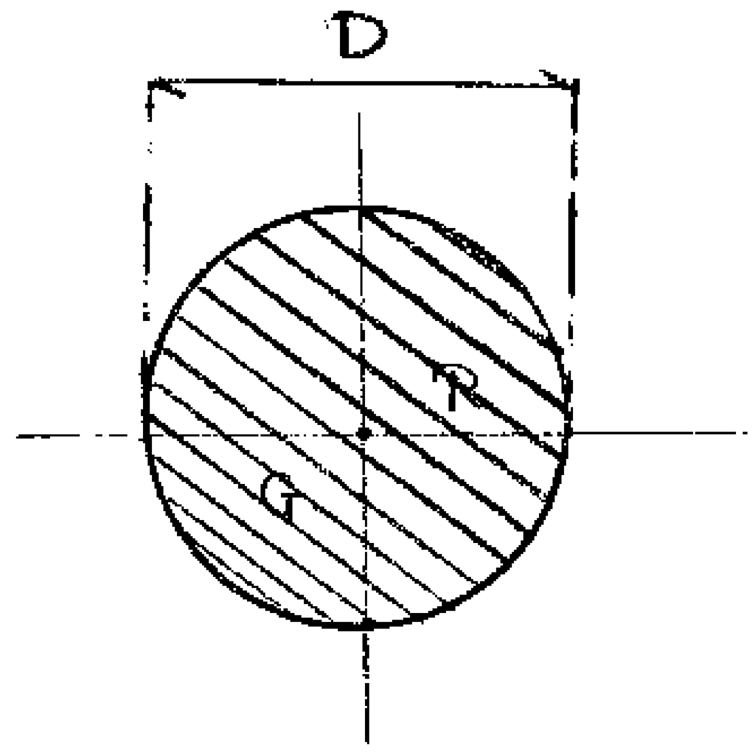
تنظیم: محمد حاج صادقی
استاد: دکتر عرفانی

# مشخصات هندسی بعضی شکل های خاص



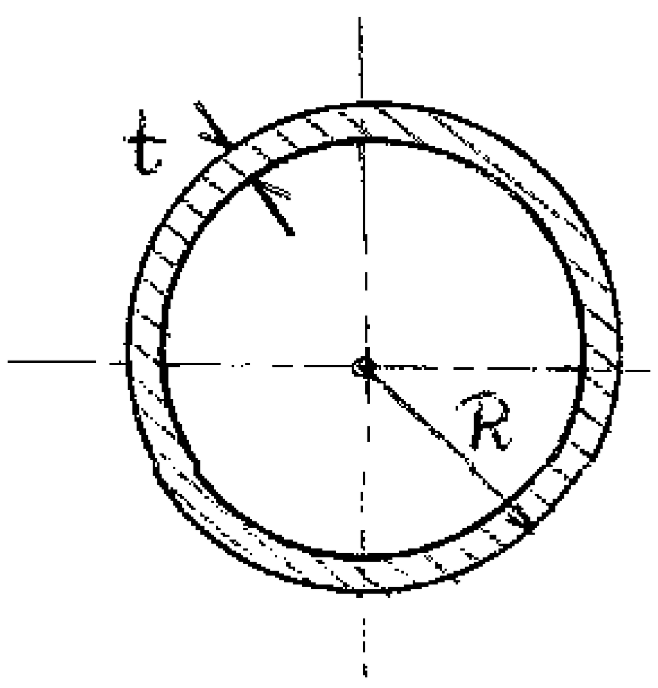

$$I_x=\frac{bh^3}{12},\quad I_y=\frac{hb^3}{12}\qquad r_x=\sqrt{\frac{I_x}{A}}=\sqrt{\frac{bh^3/12}{bh}}=\frac{h}{2\sqrt3}\simeq 0.3h$$

$$I_{x'}=\frac{bh^3}{3},\quad I_{y'}=\frac{hb^3}{3}\qquad r_y=\frac{b}{2\sqrt3}\simeq 0.3b$$



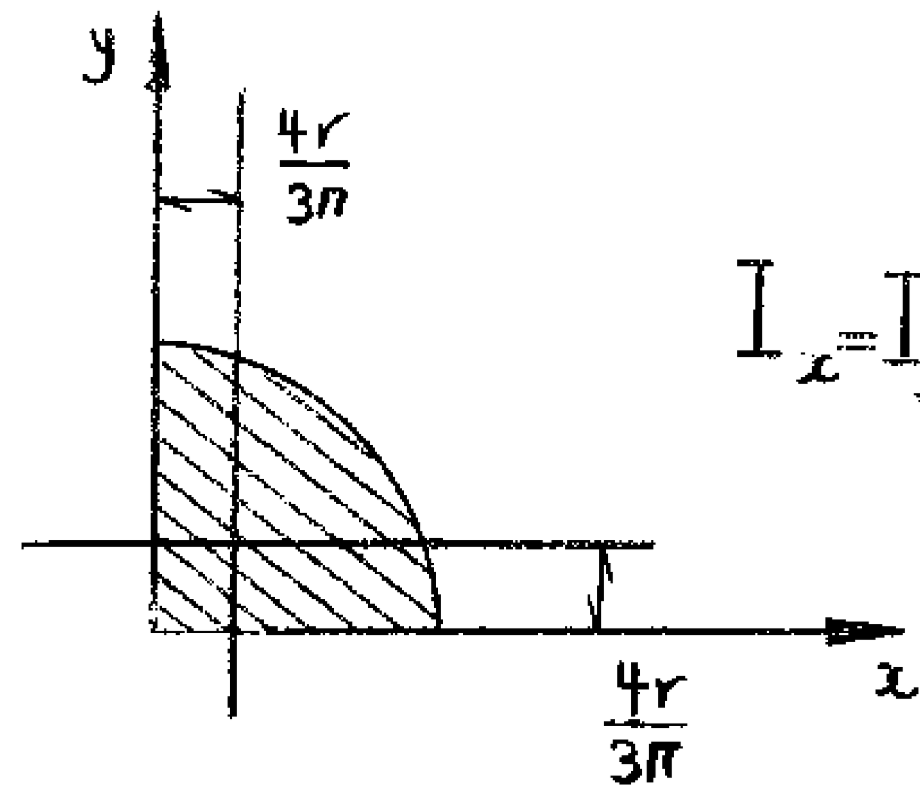

$$*\,I=\frac{\pi D^4}{64}=\frac{\pi R^4}{4}\,*\quad,\ r=\frac{R}{2}=0.5R=0.25D$$

$$J_o=\frac{\pi D^4}{32}=\frac{\pi R^4}{2}$$

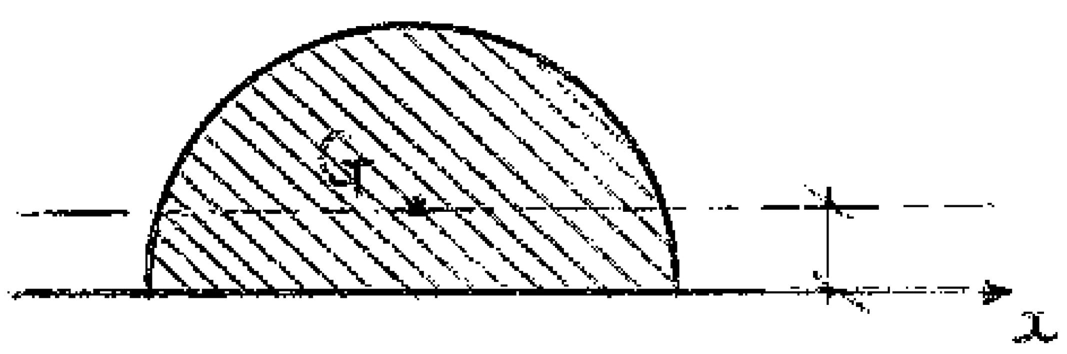



$$\boxed{I=\pi R^3 t}$$

$$r=\frac{R}{\sqrt2}\simeq 0.7R$$

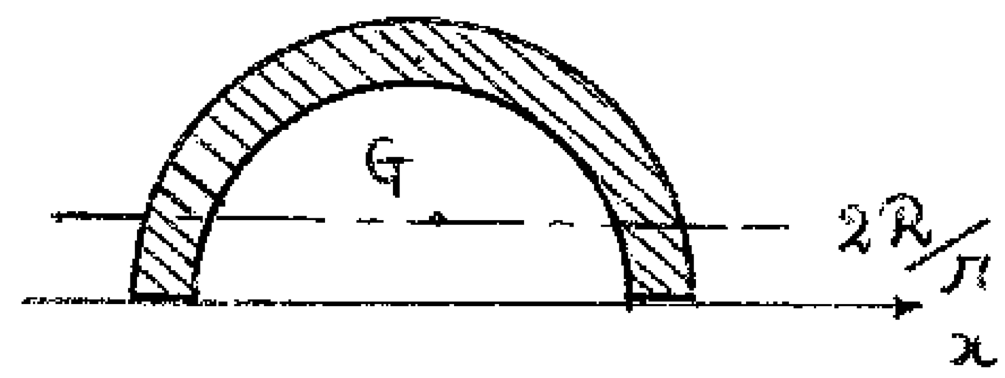



$$I_x=I_y=\frac{\pi R^4}{16}$$

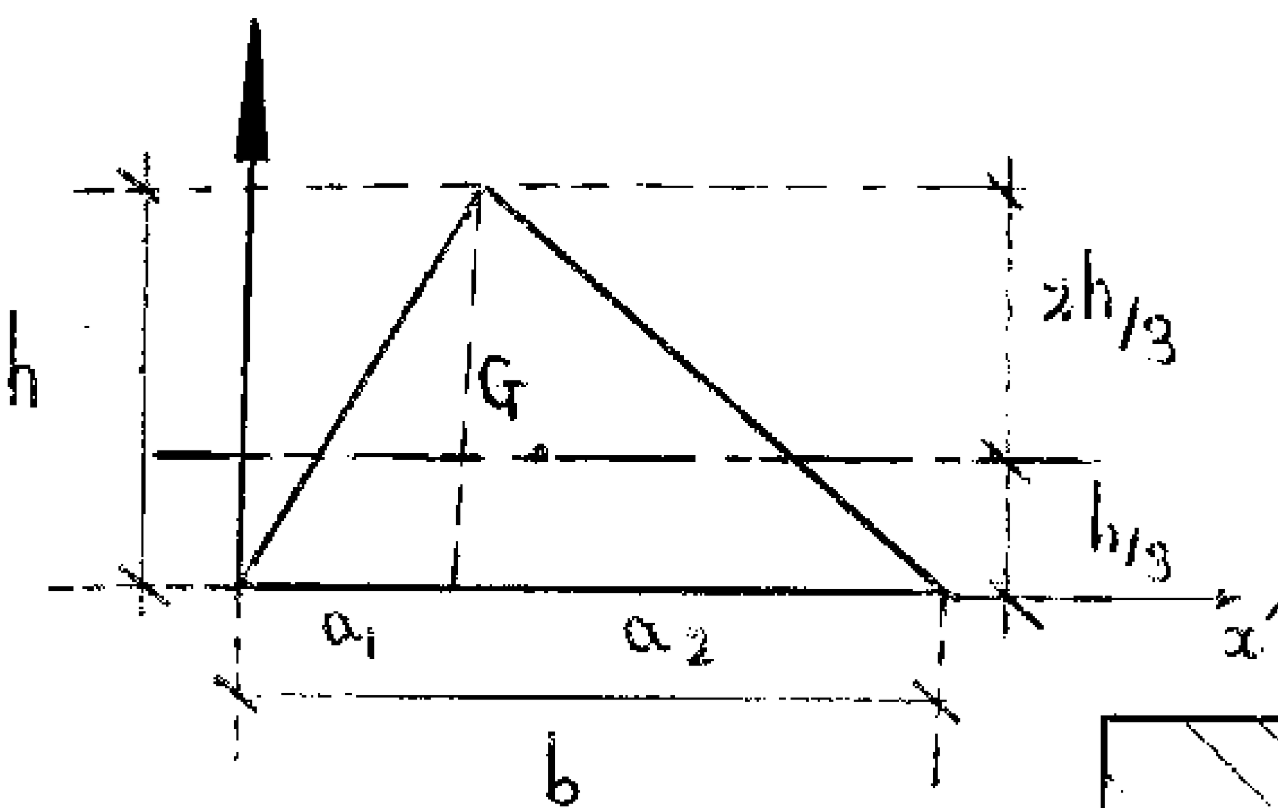



$$\frac{4R}{3\pi}$$

$$I=\frac{\pi R^4}{8}$$



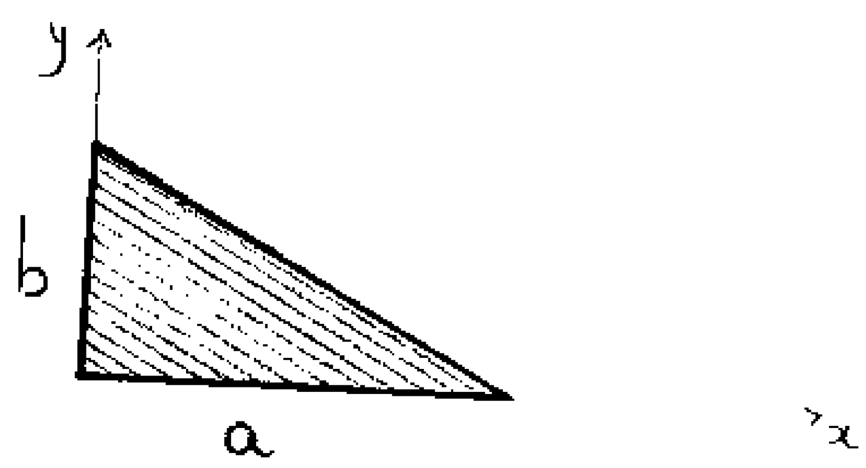

$$I=\frac{\pi R^3 t}{2}$$



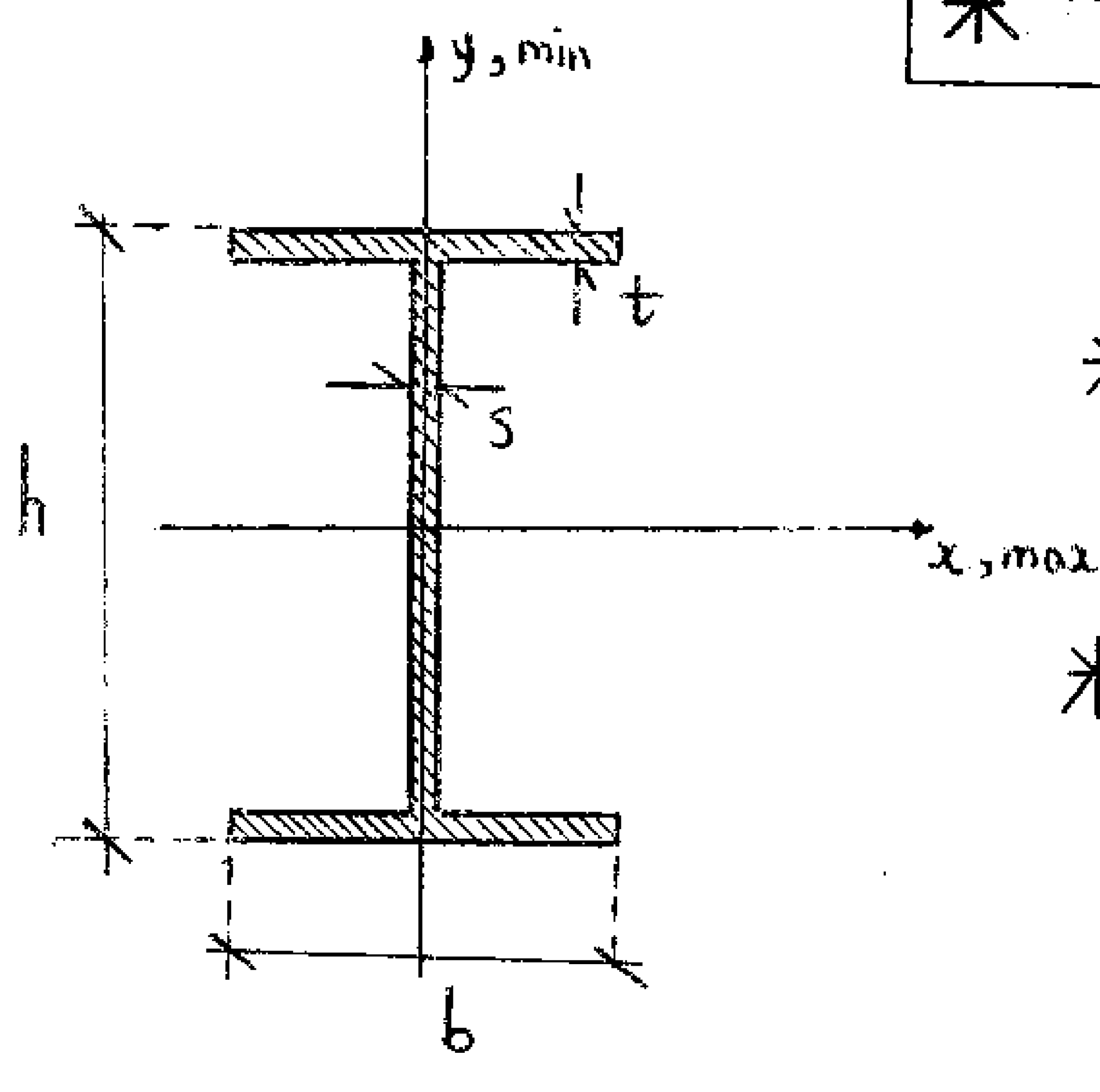

$$I=\frac{bh^3}{36},\quad r_x=\frac{h}{3\sqrt2}$$

$$I_{x'}=\frac{bh^3}{12}$$

$$\boxed{*\ \bar x=\frac{2a_1+a_2}{3},\ \bar y=\frac{h}{3}}$$




$$\bar x=\frac{a}{3},\ \bar y=\frac{b}{3}$$

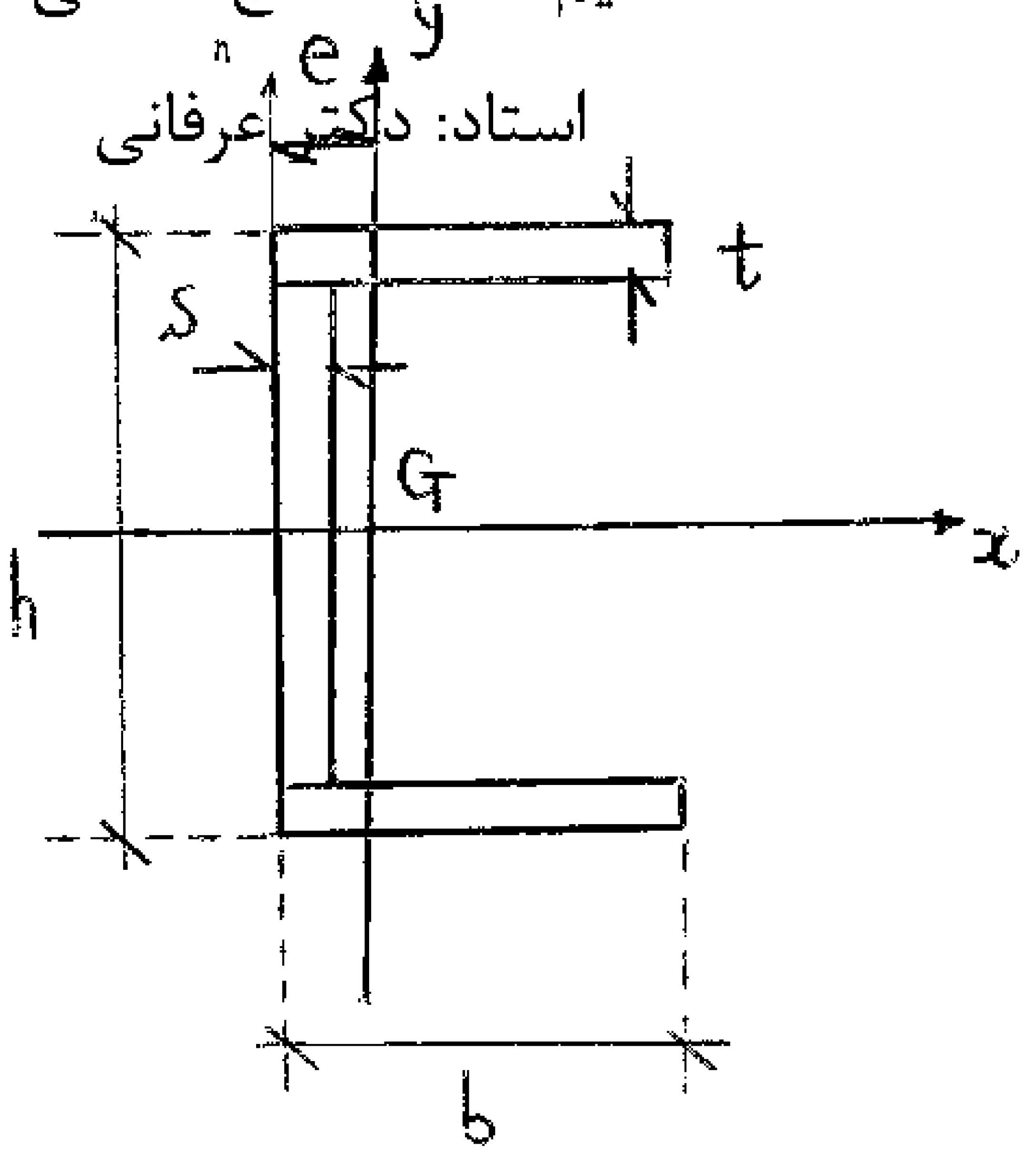



$$*\,I_x=\frac{bh^3-(b-s)(h-2t)^3}{12}$$

$$*\,I_y=\frac{2tb^3+(h-2t)s^3}{12}$$

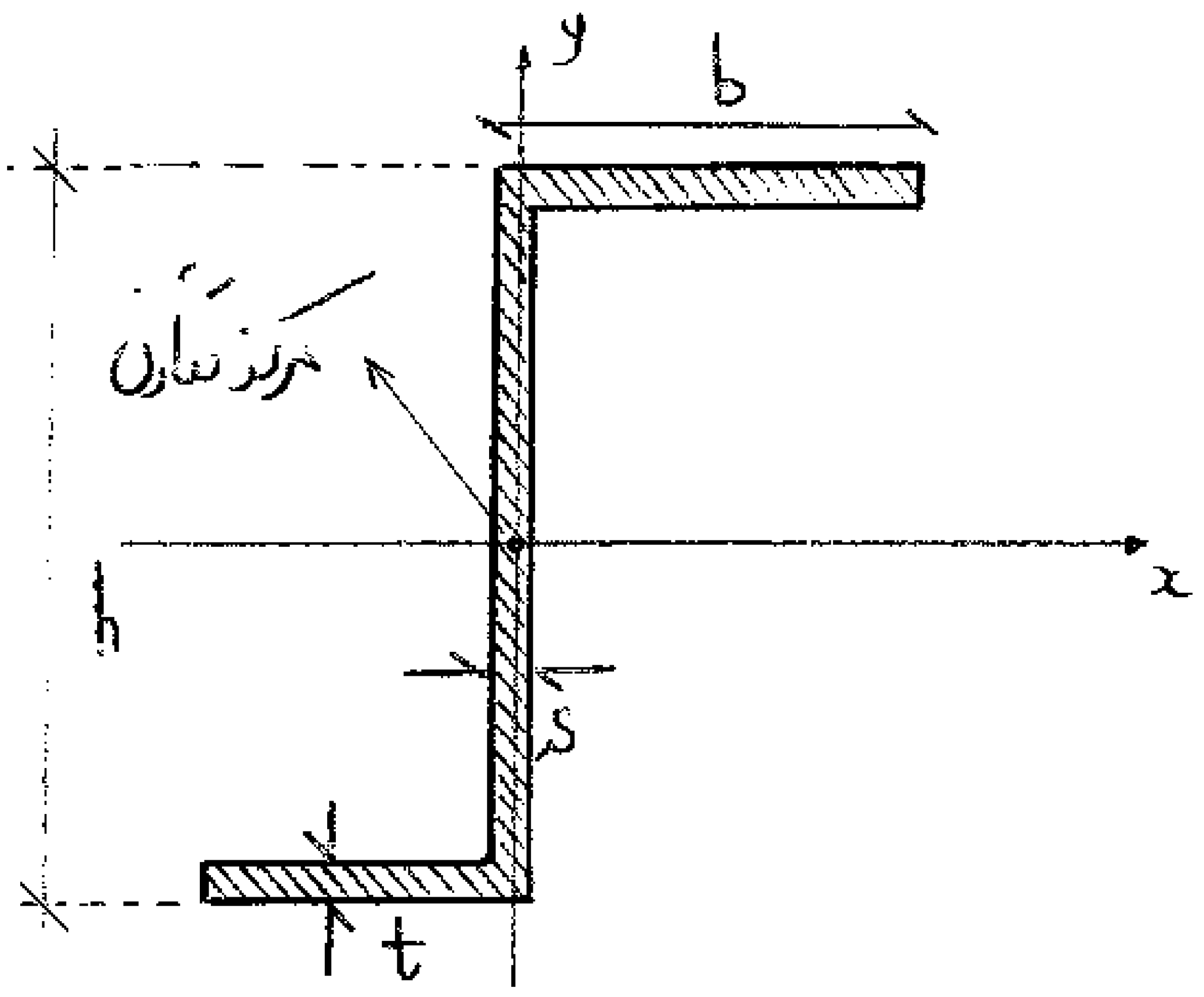
تنظیم: محمد حاج صادقی

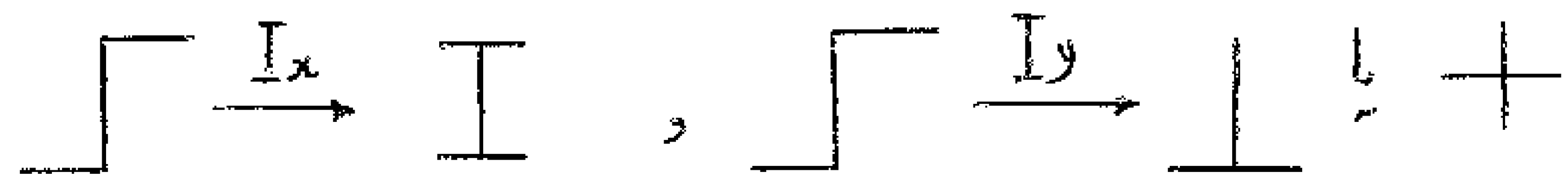
استاد: دکتر عرفانی



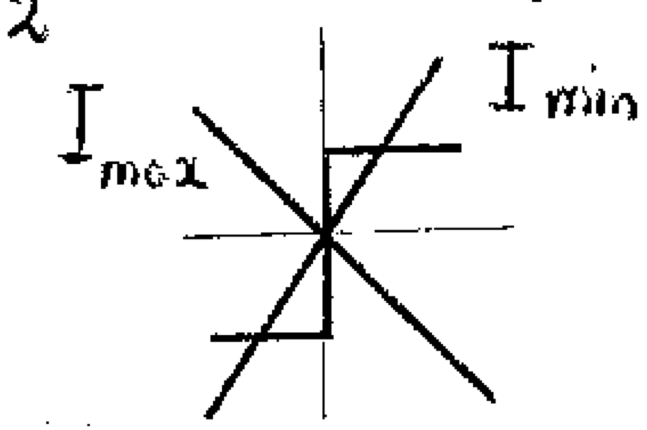

$$I_x = \frac{bh^3 - (b-S)(h-2t)^3}{12}$$

$$I_n = \frac{2tb^3 + (h-2t)S^3}{3} \qquad \boxed{\longrightarrow I_y = I_n - Ae^2}$$



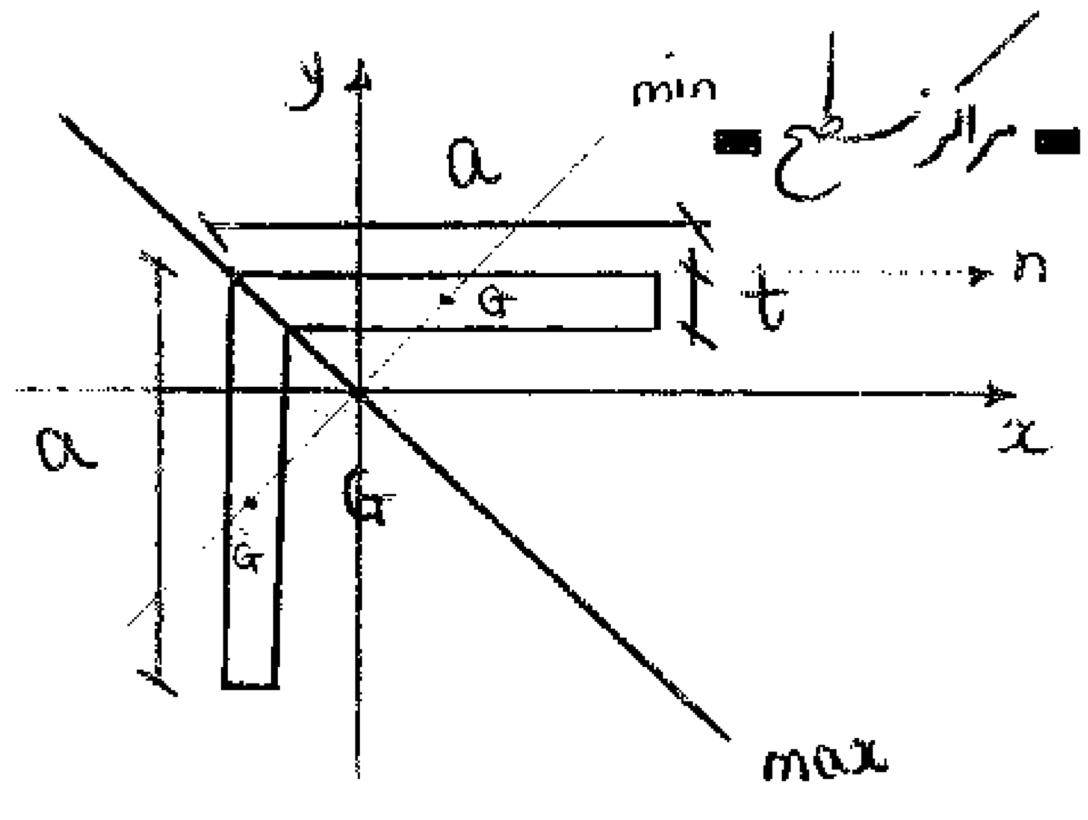

$$* \; I_x = \frac{bh^3 - (b-S)(h-2t)^3}{12} \;,\; I_y = \frac{t(2b-S)^3 + (h-t)S^3}{12}$$



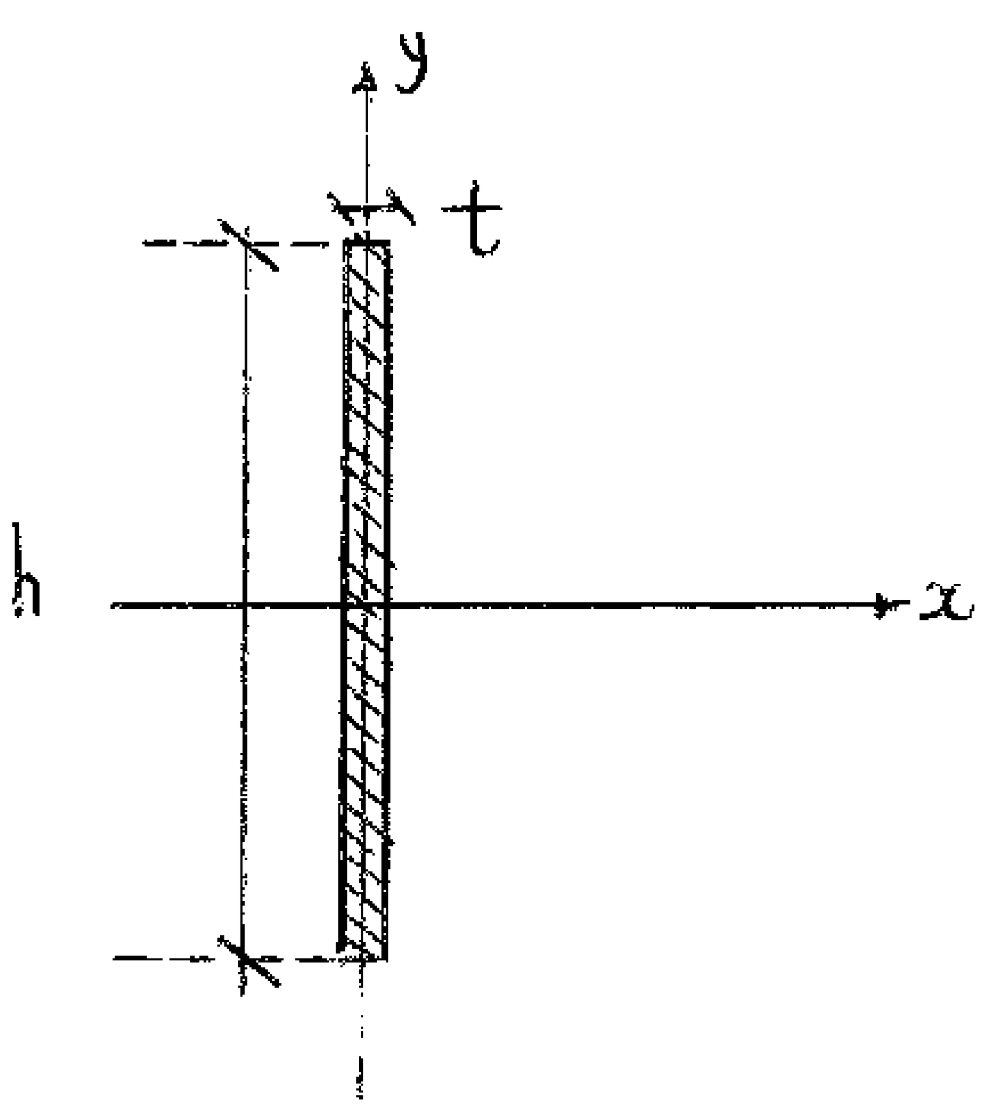

* تعداد نقاط برخورد

$$* \; I_{xy} \neq 0 \; *$$

** هر موقع محور تقارن شکل را به دو نیم تقسیم کند آن محور اصلی بوده و محور اصلی دوم از وصل کردن مراکز آن دو نیم به یکدیگر حاصل می‌شود. - مراکز سطح -




$$I_n = \frac{(a-t)t^3 + ta^3}{3} \;,\; I_x = I_n - Ae^2$$

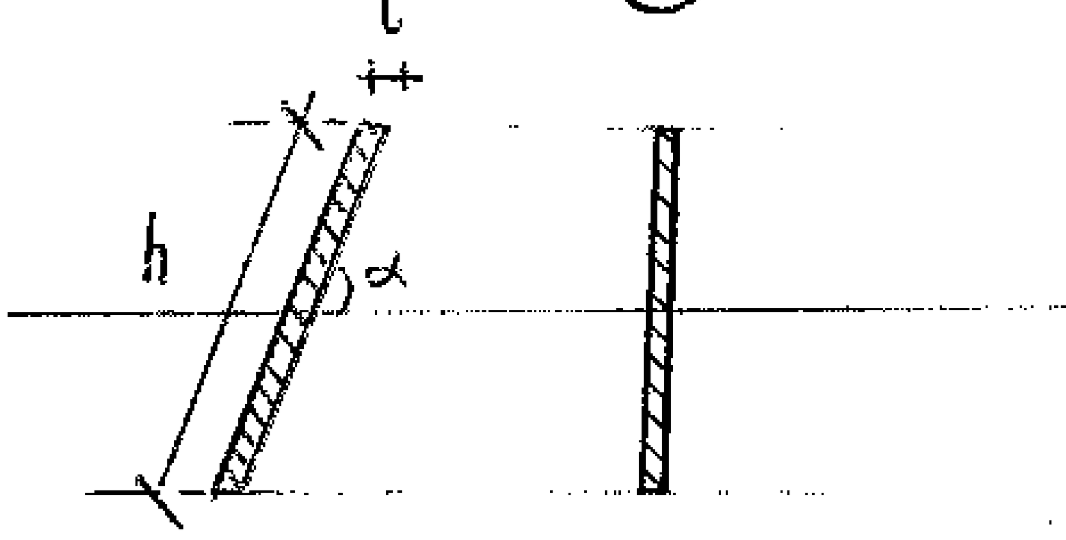



$t << h$

$$I_x = \frac{th^3}{12}$$

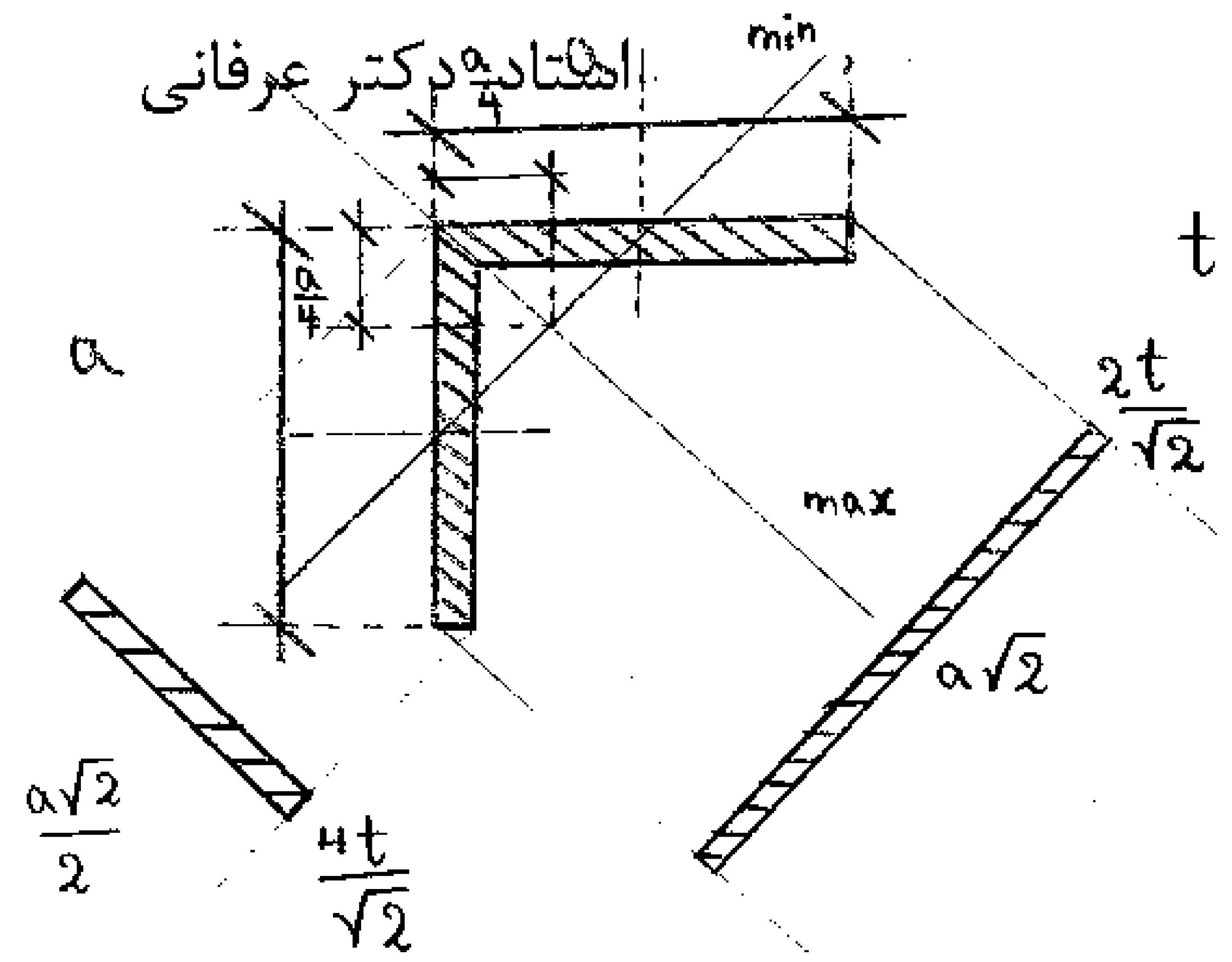
$$I_y = \frac{ht^3}{12} = 0$$

مشخصات مقاطع جدار نازک :




$$* \; \boxed{I = \frac{\left(\frac{t}{\sin\alpha}\right)(h\sin\alpha)^3}{12}} \; *$$

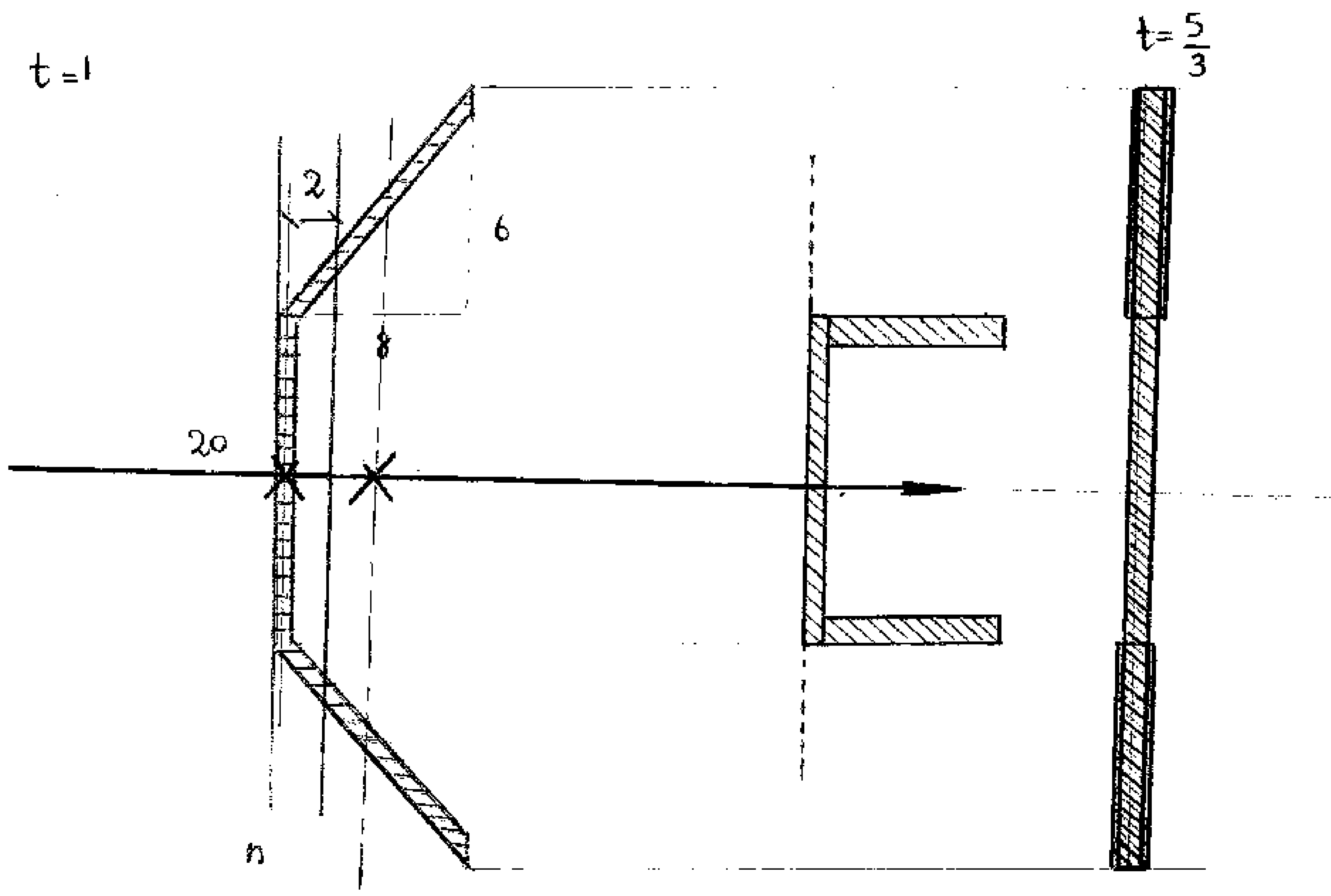
* : مساحت باید ثابت باشد. *




t : ضخامت

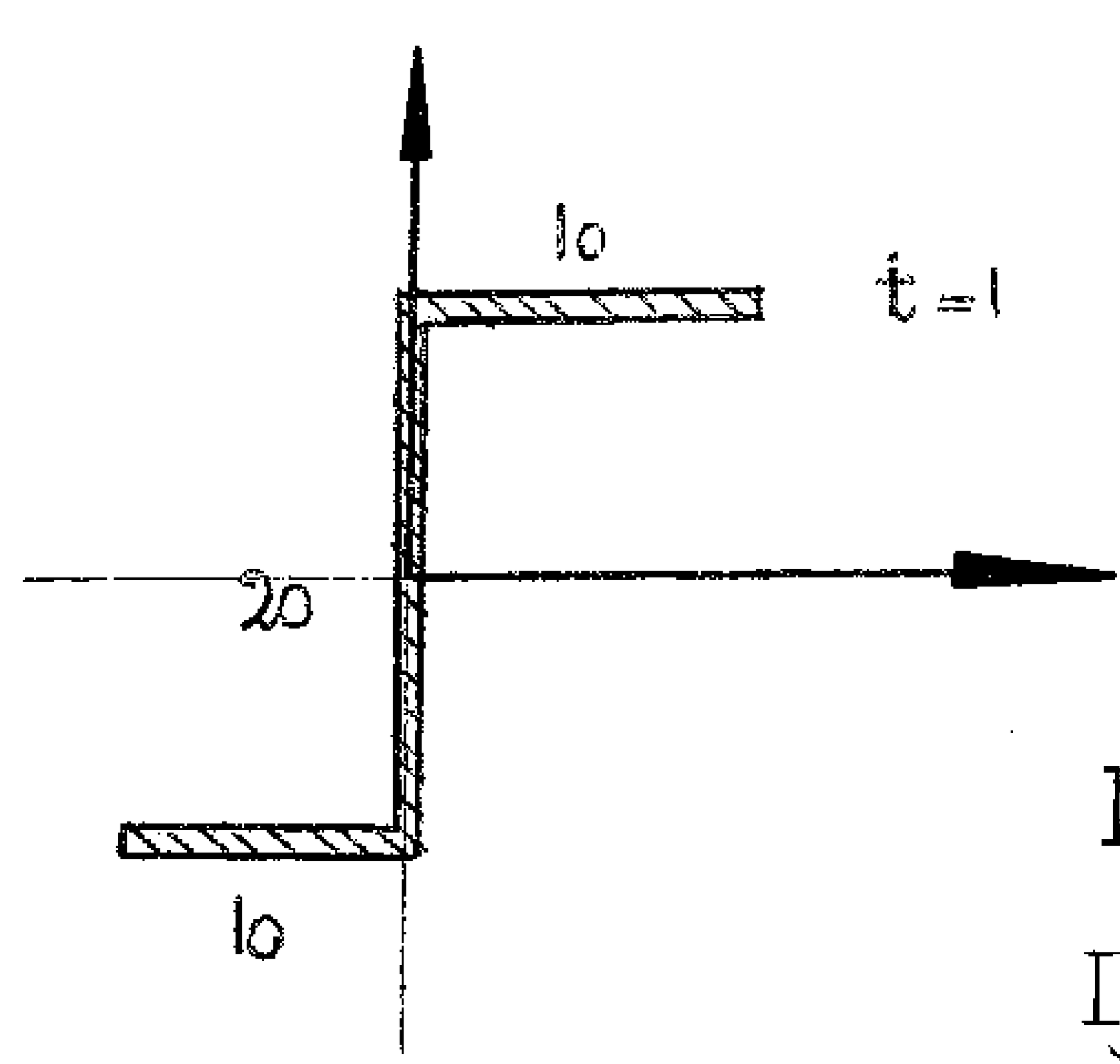
$$\ast\ I_{max}=\frac{\frac{2t}{\sqrt{2}}(a\sqrt{2})^3}{12}=\frac{ta^3}{3}\ \ast$$

$$\ast\ I_{min}=\frac{\frac{4t}{\sqrt{2}}\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^3}{12}=\frac{ta^3}{12}\ \ast$$




$$I_x=\frac{(5/3)(32)^3-(4/6)(20)^3}{12}\quad , I_n=\frac{(20/8)\,8^3}{3}\quad , I_y=I_n-40\times 2^2$$

مطلوب است محورهای اصلی - مرکزی - اینرسی :




$$I_x=\frac{20^3}{12}+10\times 10^2\times 2$$

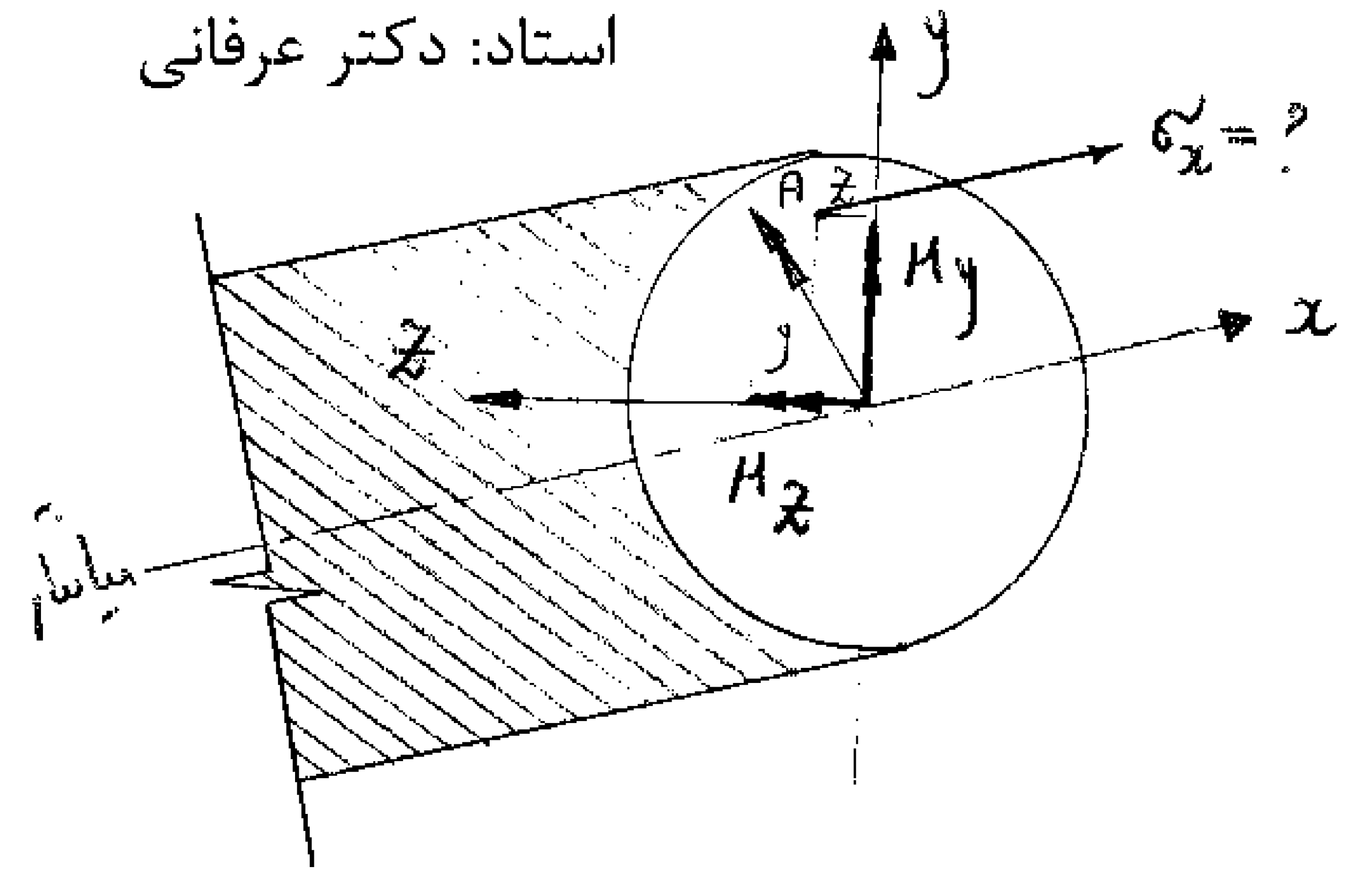
$$I_y=\frac{20^3}{12}$$

$$I_{xy}=10(+5)(+10)+10(-5)(-10)=1000$$

$$\ast\ \tan 2\beta=\frac{-2I_{xy}}{I_x-I_y}$$

تنظیم: محمد حاج صادقی

استاد: دکتر عرفانی




$$\sigma_{x(A)} = Ay + Bz + C$$

G : مرکز

x : نرمال سطح

✳ z و y : محور های اینرسی مرکزی اصلی ✳

$S_y = 0$, $S_z = 0$ | دلیل مرکزی بودن

$I_{yz} = 0$

$I_y , I_z = (I_{max} , I_{min})$ | دلیل اصلی ـ مرکزی ـ بودن

فرض های خمش:

✳ ۱ـ تحت اثر خمش فرض می شود که در مقطع فقط تنش های قائم به وجود می آید.

✳ ۲ـ مقاطع مسطح پس از اعمال، نیز مسطح می مانند. (فرض اساسی خمش)

← نتیجه اینکه توزیع کرنش قائم در مقطع همواره خطی است. اعتبار این فرضیه از شروع بارگذاری تا لحظه خرابی می باشد.

نتیجه اینکه درصورتی که رابطه σ و ε را نیز خطی فرض کنیم توزیع تنش نیز در روی مقطع خطی خواهد بود.

$\int \sigma \, dA = 0 \longrightarrow C = 0$ $\quad \Sigma F_x = 0$ برای اینکه باید از مبداء بگذرد.

معادل بودن تنش ها با M :

$\int \sigma \, y \, dA = -M_z \longrightarrow A = -M_z / I_z$

$\int \sigma \, z \, dA = M_y \longrightarrow B = \dfrac{M_y}{I_y}$

تنش و کرنش در مرکز سطح مقطع در خمش خالص همواره صفر است.

میانتار اعضا تحت اثر خمش خالص تغییر طول نمی دهد.

$$\boxed{\sigma = \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y}$$

~~این ضابطه فقط در دستگاه اصلی اینرسی مرکزی مقاطع معتبر است.~~

چون مجموع تنش های مقطع باید صفر باشند پس قسمتی از مقطع تحت کشش بوده و قسمتی دیگر تحت فشار بوده و بنابراین نقاطی از مقطع دارای تنش صفر می باشند. از جمله مرکز سطح

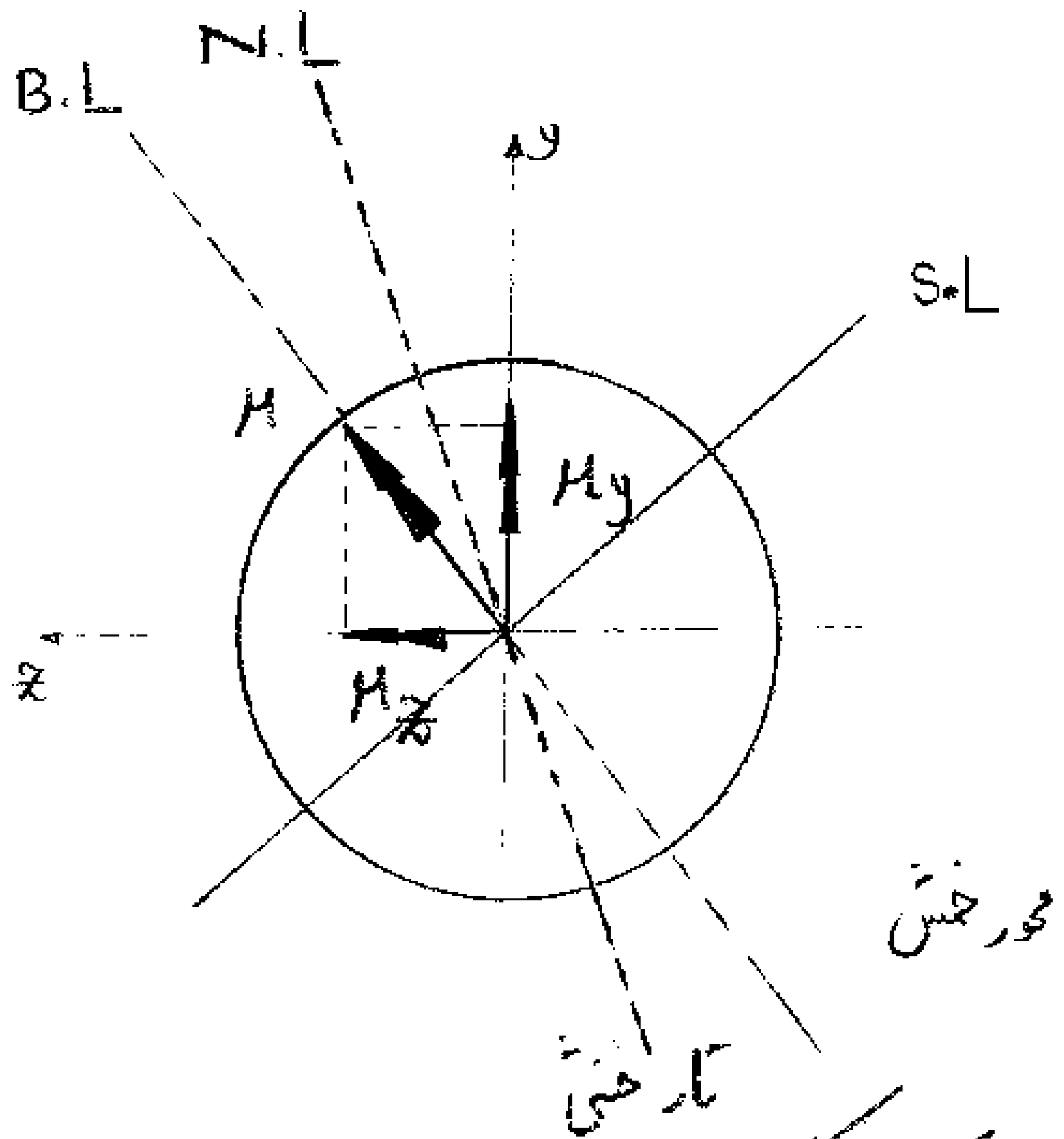
تنظیم: محمد حاج صادقی

استاد: دکتر عرفانی

تارخنثی مکان هندسی نقاط دارای تنش صفر می باشد .

$$\sigma = 0 \longrightarrow \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y = \phi \qquad N.L$$

ملاحظه می شود تارخنثی خط راستی است گذرنده از مبداء .



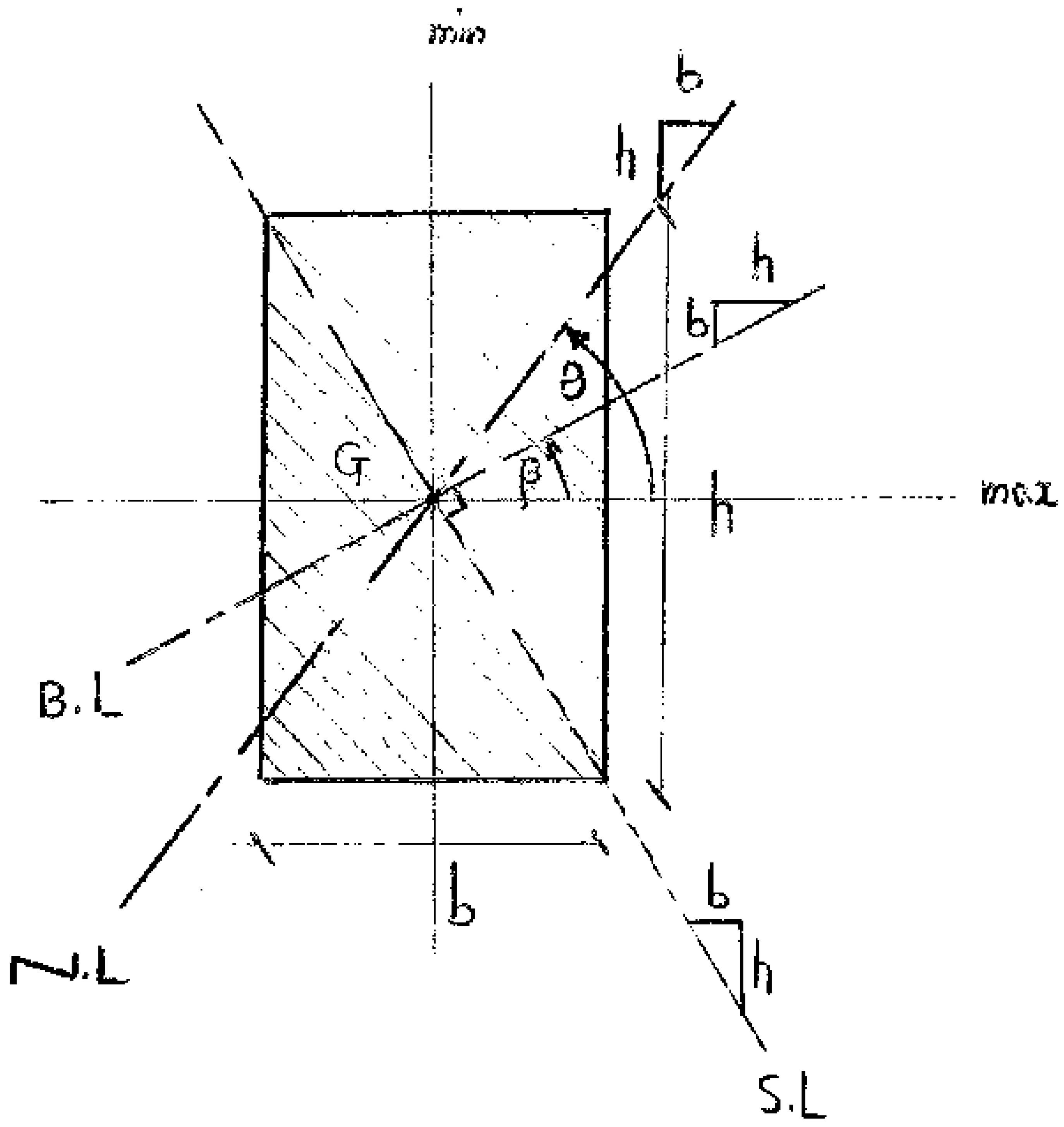

محور خمش : $\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{M_y}{M_z} = \tan\beta$

تار خنثی : $\frac{y}{x} = \frac{M_y}{M_z} \cdot \frac{I_z}{I_y} = \tan\theta \longrightarrow \tan\theta = \tan\beta \frac{I_z}{I_y}$

$$\longrightarrow \frac{\tan\theta}{\tan\beta} = \frac{I_z}{I_y}$$

درحالت کلی در خمش دو محوره محور دوران بر محور خمش منطبق نیست به چنین خمشی ، خمش کج می گوییم . در واقع تار خنثی یا محور دوران همان محور خمش است که اندکی در سمت محور ضعیف تر مقطع متمایل شده است طوری که نسبت شیب این دو خط برابر نسبت ممان اینرسی های اصلی مقطع می باشد .

* : اگر در مقطع مستطیلی مطابق شکل نیروی برشی مقطع در امتداد یکی از قطرهای آن باشد مطلوب است امتداد تارخنثی مقطع :




* امتداد محور برش همواره بر امتداد محور خمش عمود است . *

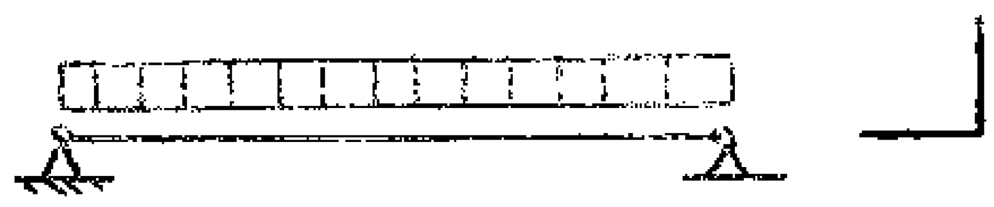
$$\frac{\tan\theta}{\tan\beta} = \frac{\frac{bh^3}{12}}{\frac{hb^3}{12}} = \frac{h^2}{b^2}$$

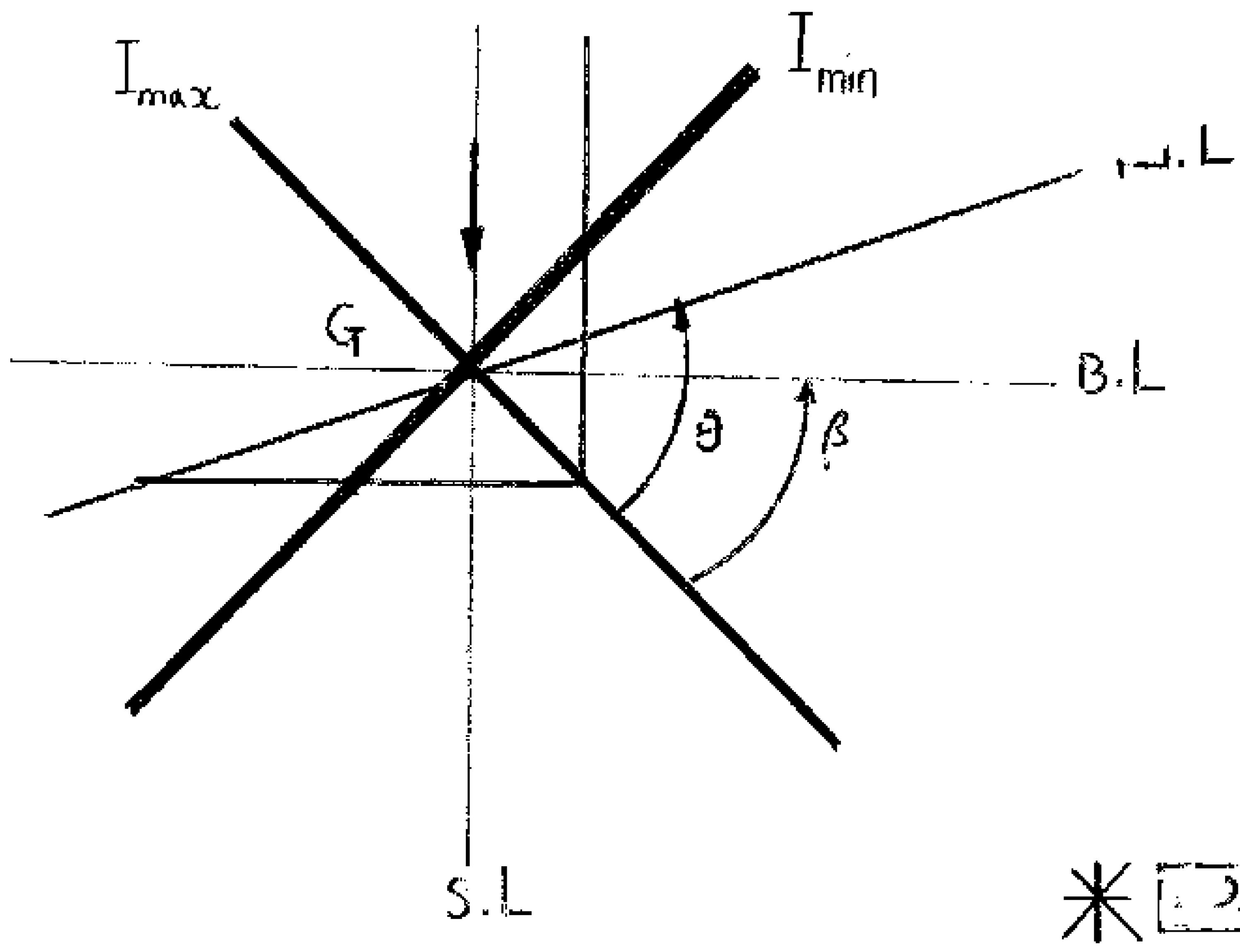
$$\tan\theta = \tan\beta \cdot \frac{h^2}{b^2}$$

$$\tan\theta = \tan\beta \cdot \frac{h^2}{b^2} = \frac{b}{h} \cdot \frac{h^2}{b^2} = \frac{h}{b}$$

تنظیم: محمد حاج صادقی

اگر تیری با مقطع نبشی جدار نازک مطابق شکل تحت اثر بارهای ثقلی قرار گیرد ، مطلوب است امتداد تار خنثی. استاد: دکتر عرفانی





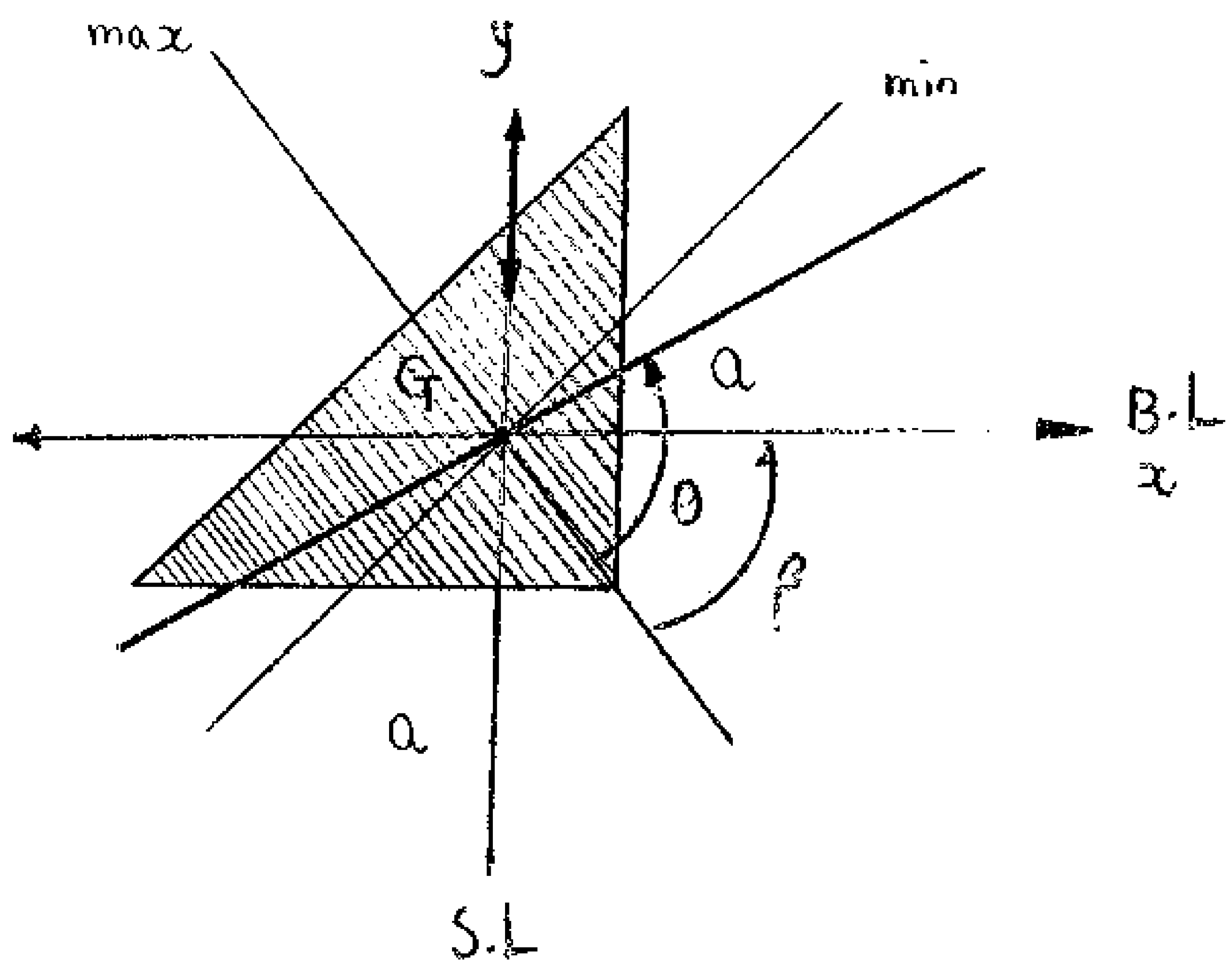

$$\frac{\tan\theta}{\tan\beta}=\frac{\frac{ta^3}{3}}{\frac{ta^3}{12}}=4$$

چون $\tan\beta=1$ زیرا $\beta=45^\circ$

$\tan\theta=4$ ⟵

* $\boxed{\text{θ و β از یکی از محورهای اصلی max و min اندازه گرفته می شود}}$ *

تکرار مسائل برای مثلث :



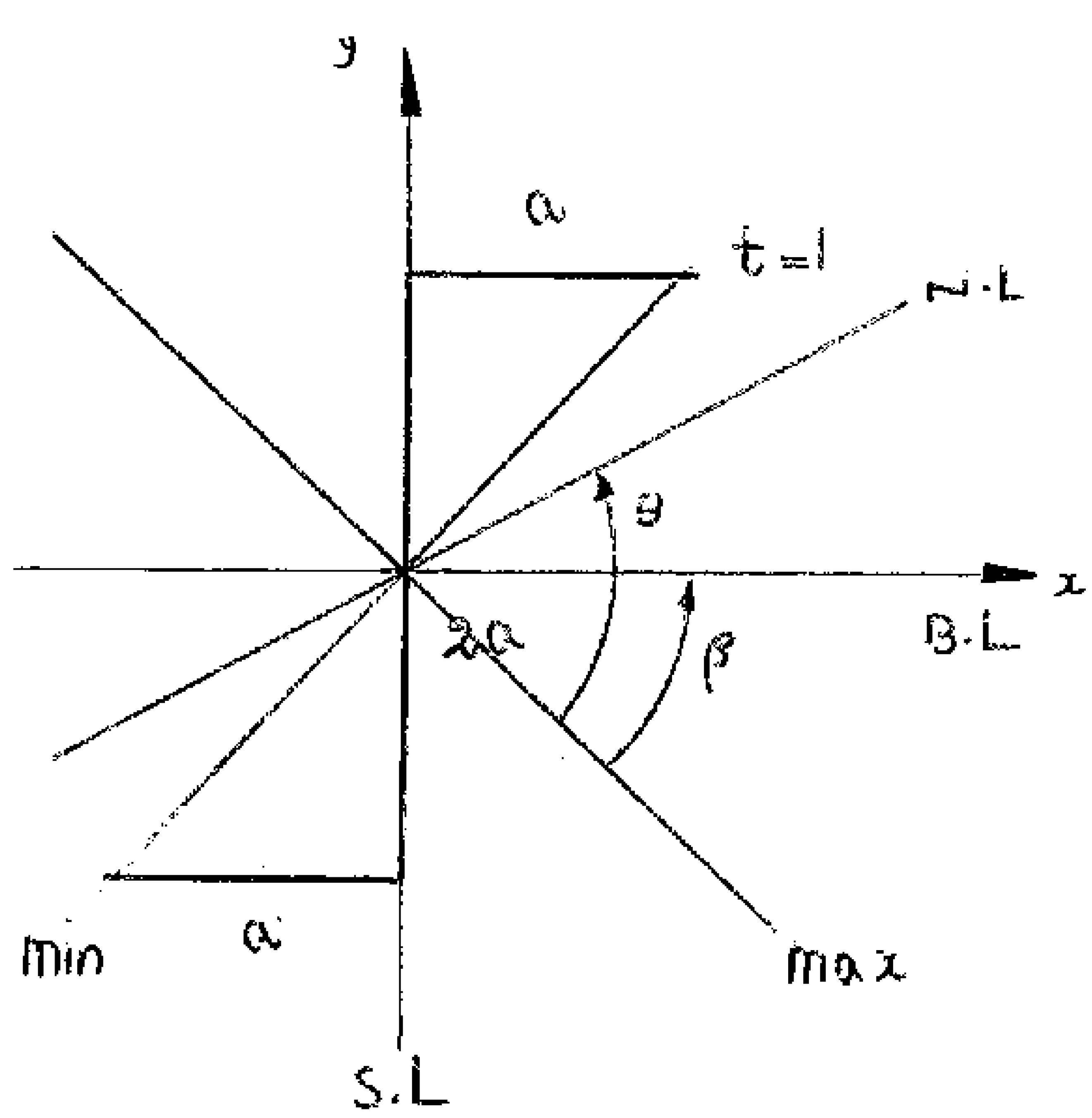

* $I_x=\frac{a\times a^3}{36}=\frac{a^4}{36}$ , $I_y=\frac{a^4}{36}$

* $I_{xy}=\frac{a^4}{72}$ * با استفاده از انتگرال دوگانه *

$$I_{\substack{max\\min}}=\frac{I_x+I_y}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{I_x-I_y}{2}\right)^2+I_{xy}^2}\longrightarrow I_{max}=\frac{a^4}{24},\ I_{min}=\frac{a^4}{72}$$

$$\tan 2\beta=\frac{-2\times a^4/72}{0}\longrightarrow 2\beta=\frac{\pi}{2}\longrightarrow\beta=\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\tan\theta}{\tan\beta}=\frac{\frac{a^4}{24}}{\frac{a^4}{72}}=3\longrightarrow \underline{\tan\theta=3}$$




$$I_x=\frac{1\times(2a)^3}{12}+2\times a\times1\times a^2=\frac{8a^3}{12}+2a^3=\frac{8a^3+24a^3}{12}=\frac{32a^3}{12}=\frac{8}{3}a^3$$

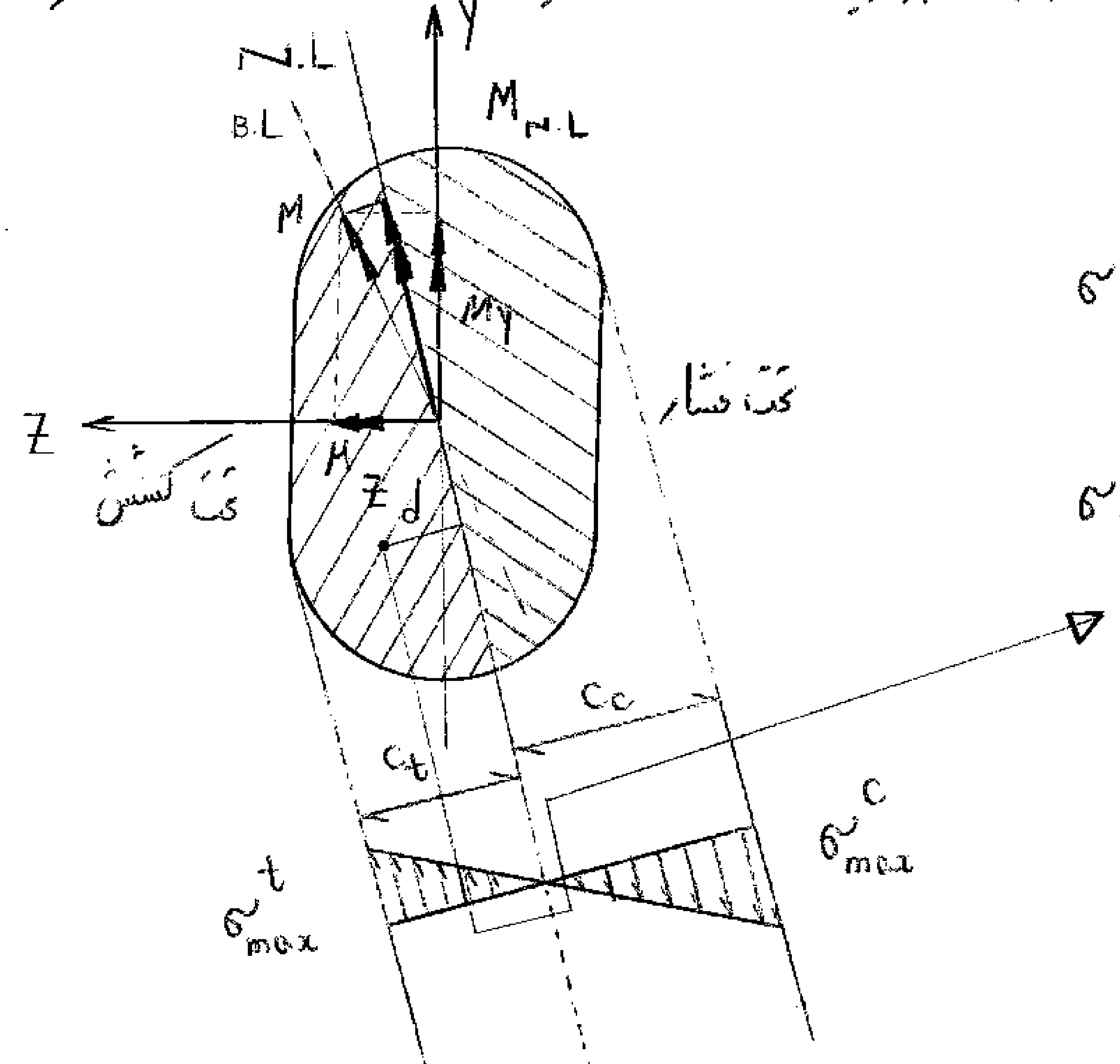
$$I_y=\frac{(2a)^3}{12}=\frac{2}{3}a^3$$

$$I_{xy}=a(a)(a/2)+a(-a)(-a/2)=\frac{2a^3}{2}=a^3$$

$$\tan 2\beta=\frac{-2a^3}{2a^3}=-1\longrightarrow\beta=-45/2\longrightarrow I_{max}=3.08a^3,\ I_{min}=0.252a^3$$

* $\frac{\tan\theta}{\tan\beta}=\frac{3.08}{0.252}\longrightarrow\tan\theta=\tan(-22.5)\frac{3.08}{0.252}\longrightarrow\theta=-78.82$

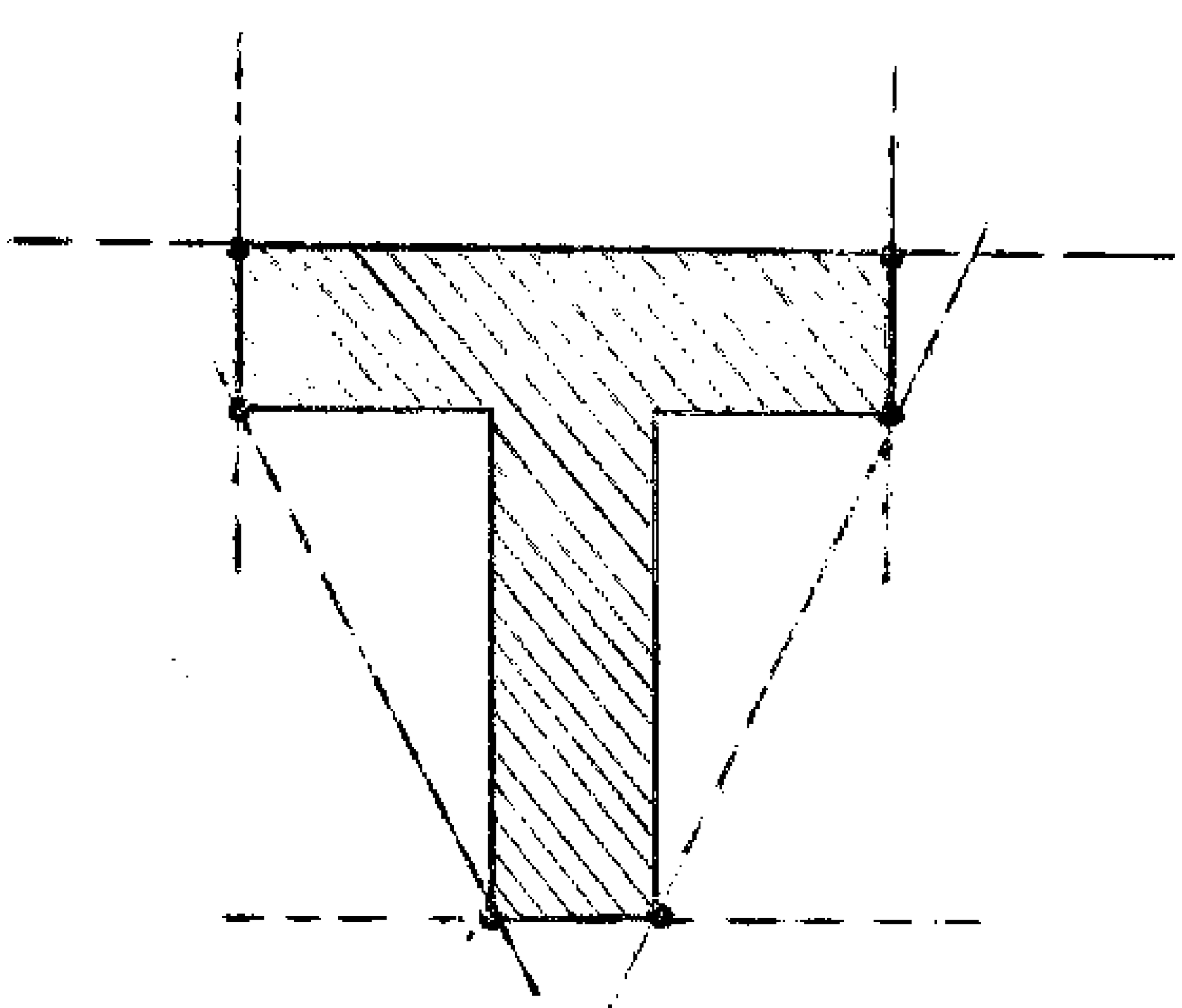
تنش در نقاط یک مقطع تحت خمش متناسب است با فاصله از تار خنثی. بنابراین بیشترین تنش ها در دورترین نقاط از تار خنثی بدست می آید.




$$\sigma = \frac{M_{N.L}}{I_{N.L}} \cdot d_{N.L}$$

$\sigma = k \cdot d$ ( فاصله از تار خنثی )

بنابراین بیشترین تنش ها همواره در نقاط مرزی مقطع واقع می شوند. مخصوصاً اگر مقطع گوشه دار باشد در یکی از گوشه های محدب قرار می گیرد.



در واقع برای تشخیص نقاط گوشه های محدب یک مقطع، می توان یک چند ضلعی محیط بر آن مقطع رسم کرد که گوشه های آن چند ضلعی همان گوشه های محدب مقطع می باشد.

$$\sigma_{max} = \frac{M_{N.L}}{I_{N.L}} C_{N.L}$$

$$\sigma_{max} = \frac{M_{N.L}}{\frac{I_{N.L}}{C_{N.L}}}$$

مشخصات هندسی مقاطع

$\frac{I_{N.L}}{C_{N.L}} = W_{N.L}$ or $Q_{N.L}$ $\longrightarrow$ $\boxed{\sigma_{max} = \frac{M_{N.L}}{W_{N.L}}}$

اساس مقطع

تنظیم: محمد حاج صادقی

استاد: دکتر عرفانی

خمش تک محوره :

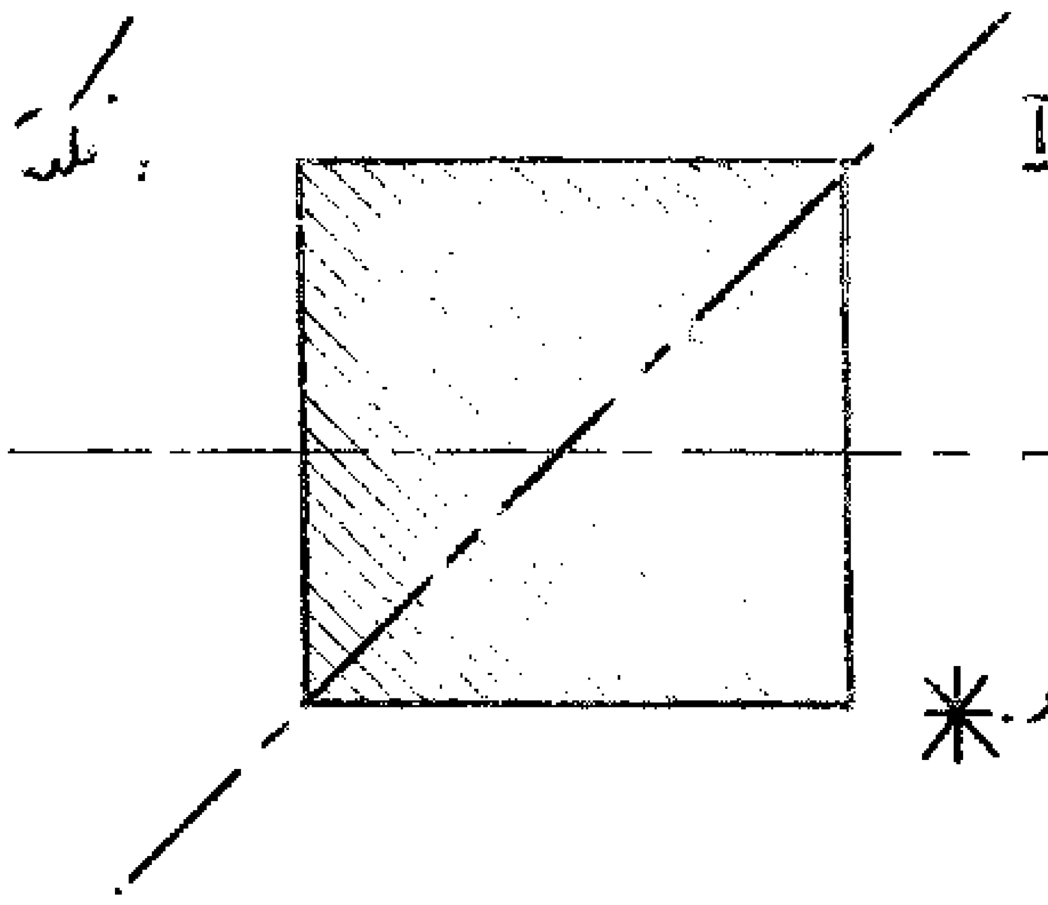
درحالتی که محور خمش منطبق بر یکی از محورهای اصلی اینرسی مرکزی مقطع شود تار خنثی نیز بر آن منطبق شده و چنین خمشی را تک محوره و یا ساده می‌نویسیم.

روابط مانند خمش کج می‌باشد.

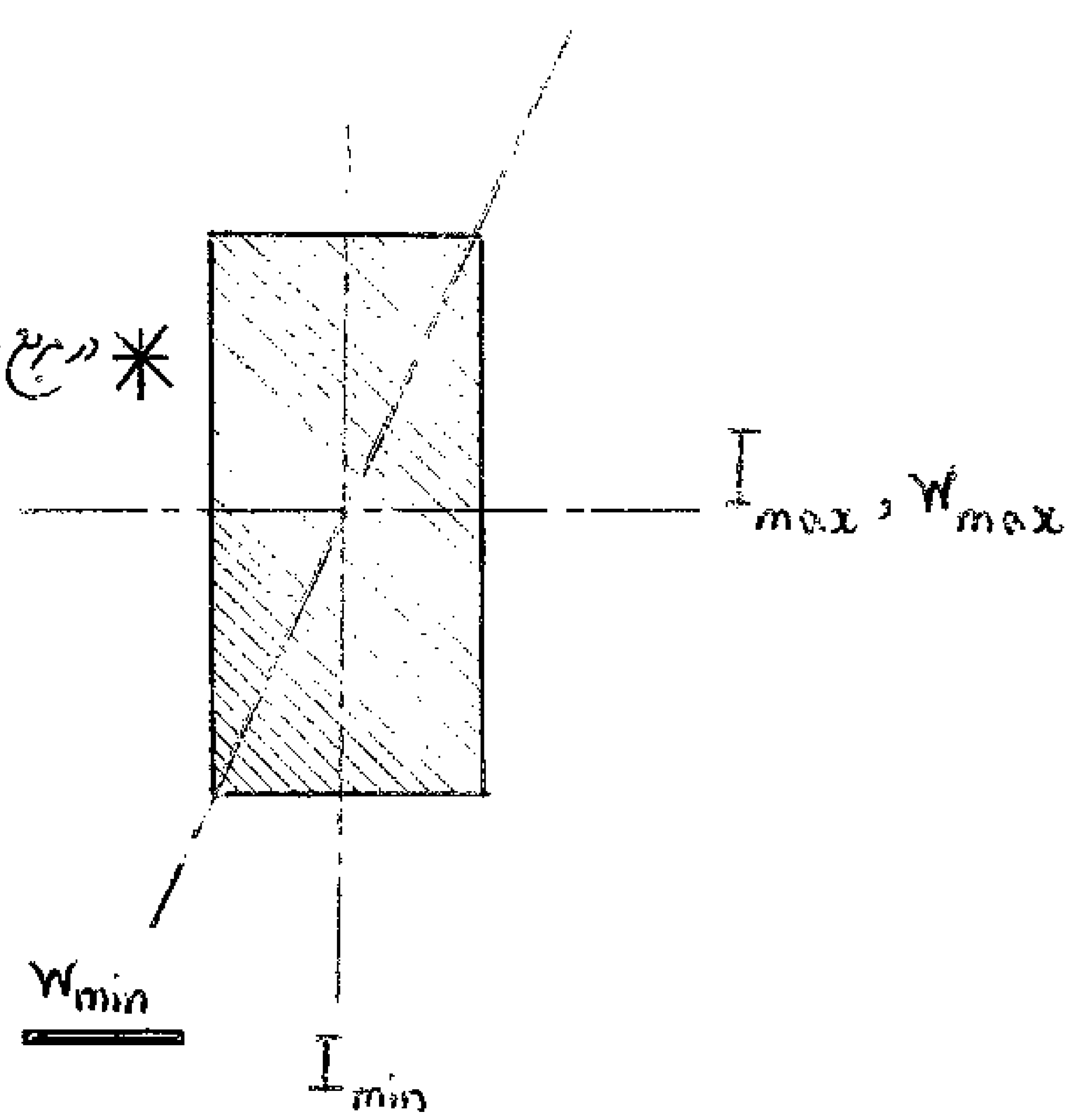
✱✱ در n ضلعی های منتظم تو پر یا تو خالی که همهٔ محورهای مرکزی مقطع، اصلی نیز می‌باشند خمش همواره ساده یا تک محوره است.

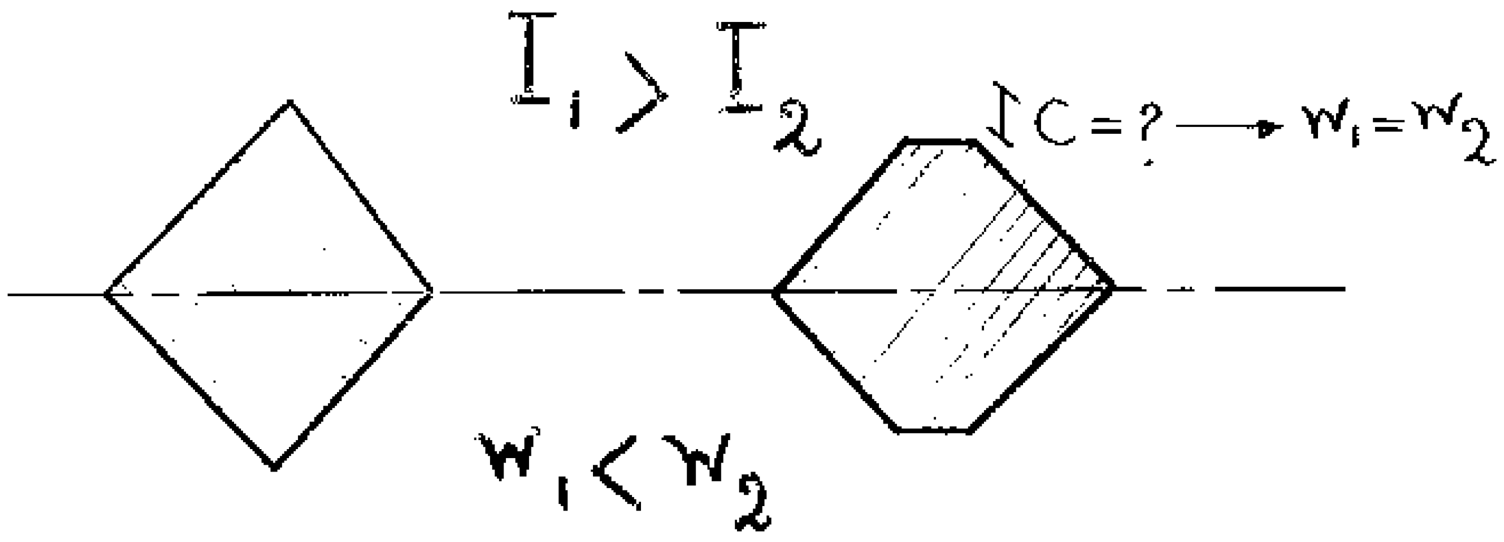
✱ مقاومت خمشی مقاطع متناسب با اساس مقطع آن‌ها می‌باشند نه ممان اینرسی آن‌ها ✱

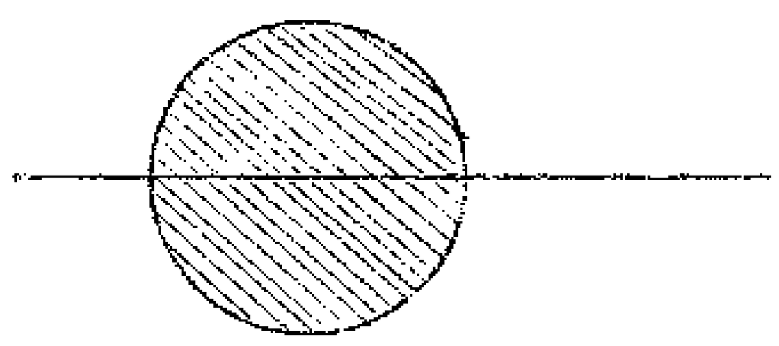
نکته :



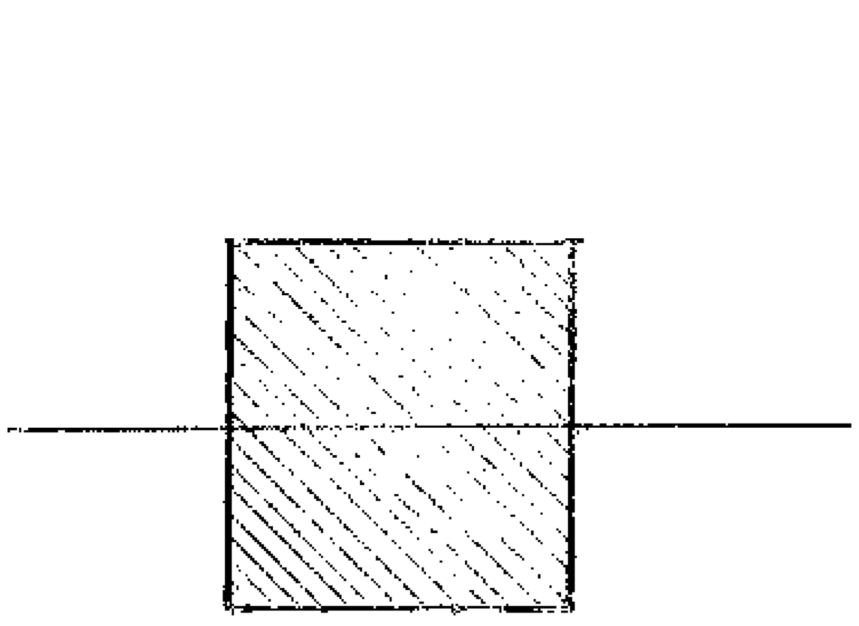

✱ در مربع و مستطیل $W_{min}$ بر روی اقطار واقع می‌باشند. ✱



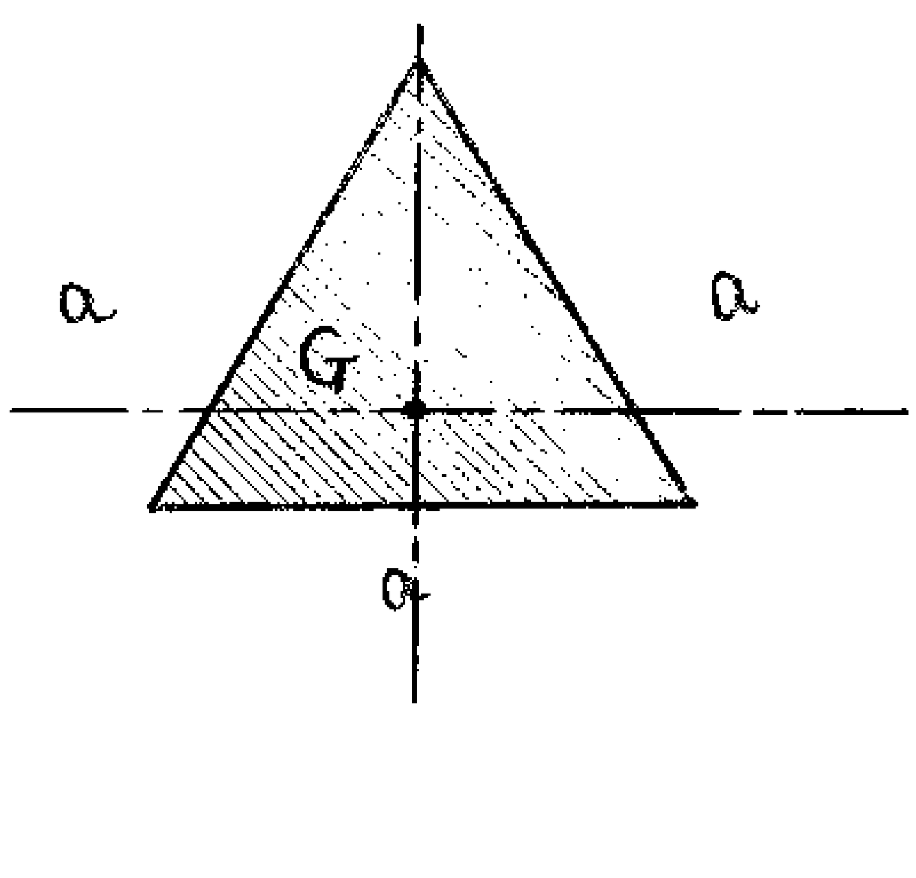



$$I = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{A^2}{4\pi} \quad , \quad W = \frac{I}{R} = \frac{\pi R^3}{4} \quad , \quad W = \frac{\pi \left(\frac{A}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}}}{4} = \frac{A^{3/2}}{4\sqrt{\pi}}$$



$$I = \frac{a^4}{12} = \frac{A^2}{12} \quad , \quad W_{max} = \frac{\frac{a^4}{12}}{\frac{a}{2}} = \frac{a^3}{6} = \frac{A^{\frac{3}{2}}}{6}$$




$$h = \frac{\sqrt{3}\, a}{2}$$

$$I = \frac{a \times \sqrt{3} \times 3a^3}{8 \times 12} = \frac{\sqrt{3}\, a^4}{32} \longrightarrow I = \frac{\sqrt{3}}{6} A^2$$

✱ $W_{max} = \frac{3A^{\frac{3}{2}}}{2 \times 3^{3/4}}$ ✱

$$A = \frac{\sqrt{3}\, a^2}{4} \longrightarrow a^2 = \frac{4A}{\sqrt{3}}$$

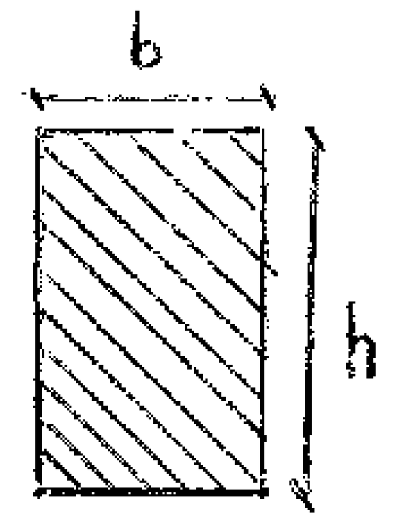
$$W_{min} = \frac{3A^{\frac{3}{2}}}{2 \times 2 \times 3^{3/4}}$$

تنظیم: محمد حاج صادقی

استاد: دکتر عرفانی

## راندمان خمشی مقطع

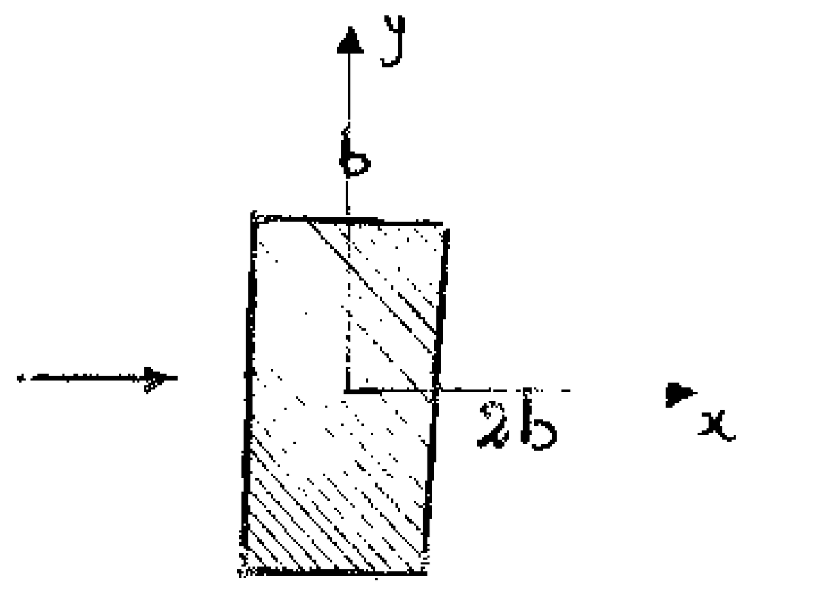
در بین مستطیل های هم مساحت مقطعی که بیشترین ارتفاع را دارد بیشترین مقاومت خمشی را دارد.




$bh = A = ct_o$

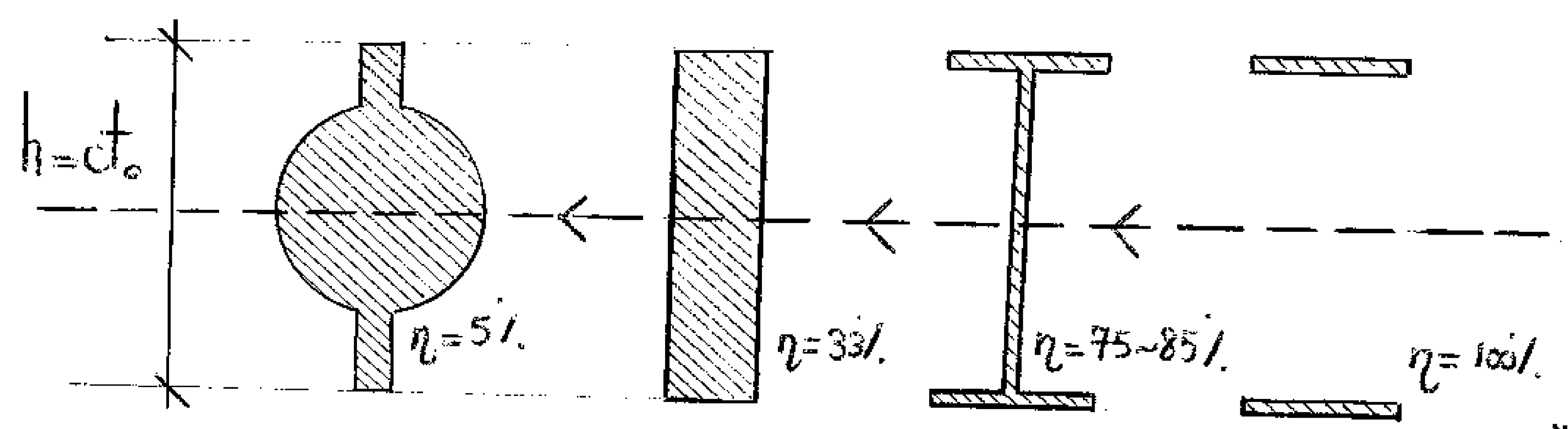
$W_{max} = ?$ $\qquad W = \dfrac{I}{\frac{h}{2}} = \dfrac{bh^2}{6} = (\dfrac{A}{6})h$

$\frac{A}{6}$ ثابت است در نتیجه با افزایش $h$ به صورت خطی W افزایش می یابد.




$W_x = 2W_y$

** در بین مقاطع تو پر با مساحت و ارتفاع ثابت مقاطع I شکل بیشترین مقاومت خمشی را دارند. *




$(\dfrac{I}{c})_{max}$ , $c = ct_o = \dfrac{h}{2}$

$\boxed{I_{max}, W_{max}}$ * مقطع ایده آل خمشی

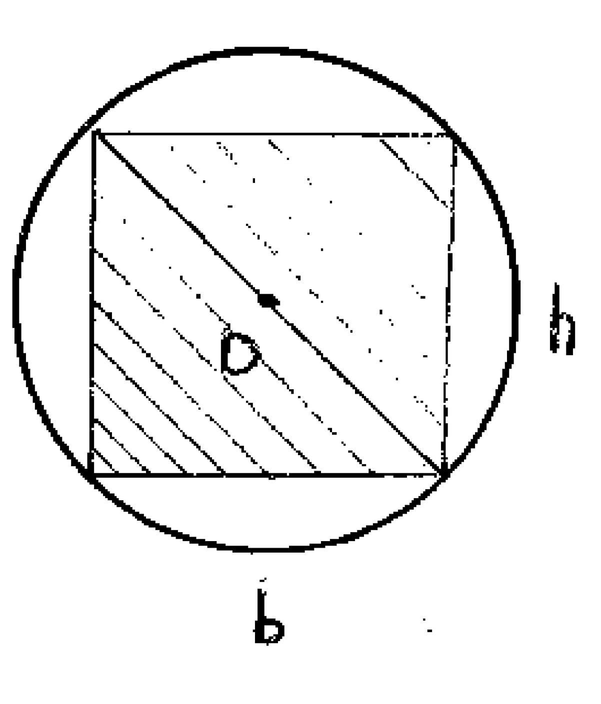
$I_{max} = 2(\dfrac{A}{2})(\dfrac{h}{2})^2 = \dfrac{Ah^2}{4}$ , $W_{max} = \dfrac{I}{h/2} = \dfrac{Ah}{2} = (\dfrac{A}{2})h$

* W باید کل مساحت در بالا و پایین آن باشد. *

راندمان خمشی $\eta\% = \dfrac{I}{I_{max}} \times 100 = \dfrac{W}{W_{max}} \times 100$

* برای مینیمم شدن خیز باید همان انرژی حداکثر شود. *

اگر از یک الوار دایره ای بخواهیم یک چهار تراش انتخاب کنیم با بیشترین مقاومت خمشی، نسبت ارتفاع به عرض آن مقطع چیست؟




$W \longrightarrow W_{max}$

$\dfrac{bh^2}{6} \longrightarrow max$ , $D^2 = b^2 + h^2 = ct_o \longrightarrow h^2 = D^2 - b^2$

$\longrightarrow \dfrac{b(D^2 - b^2)}{6} \longrightarrow max \Rightarrow (bD^2 - b^3)' = 0$ , $D^2 - 3b^2 = 0 \longrightarrow b^2 = \dfrac{D^2}{3}$

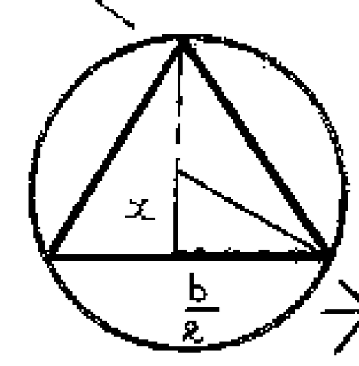
$\longrightarrow h^2 = \dfrac{2D^2}{3} \longrightarrow \dfrac{h}{b} = \sqrt{2}$

تنظیم: محمد حاج صادقی

استاد: دکتر عرفانی

برای حداکثر کردن I مسأله بالا : برای W مثلث : $h=$ , $b=$ , $\frac{h}{b}=$

برای یک مثلث :



$\ast\ (\frac{b}{2})^2+(h-R)^2=R^2\ \ast$

$h=R+\frac{\sqrt{4R^2-b^2}}{2}$

$1-\ \frac{bh^3}{12}\longrightarrow max,\ D^2=b^2+h^2\longrightarrow b=\sqrt{D^2-h^2}$

$\left(\frac{\sqrt{D^2-h^2}\,h^3}{12}\right)'=\frac{1}{12}\left[\frac{-2h}{2\sqrt{D^2-h^2}}\times h^3+\sqrt{D^2-h^2}\ 3h^2\right]=0$

$\frac{-h^4}{\sqrt{D^2-h^2}}+3h^2\sqrt{D^2-h^2}=0\longrightarrow\frac{-h^4+3h^2(D^2-h^2)}{\sqrt{D^2-h^2}}=0\longrightarrow-4h^4+3D^2h^2=0\longrightarrow+4h^2=3D^2\longrightarrow h^2=\frac{3}{4}D^2$

$\longrightarrow b^2=\frac{1}{4}D^2\longrightarrow\frac{h}{b}=\sqrt{3}$

$R^2=(\frac{b}{2})^2+x^2$

$S=\frac{bh^2}{24}$ , $h=R+x$

$\ast$ چه نسبتی بین $l_1$ و $l_2$ برقرار باشد تا حداکثر تنش های بوجود آمده در هر دو شکل یکسان باشد.

( یا حداکثر تنش های کششی در دو شکل یکسان شود . )

1_ 

2 - 

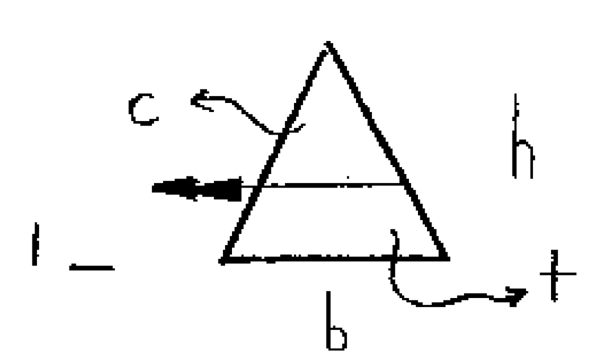
$1-\ M_{max}=\frac{q\,l_1^2}{8}$

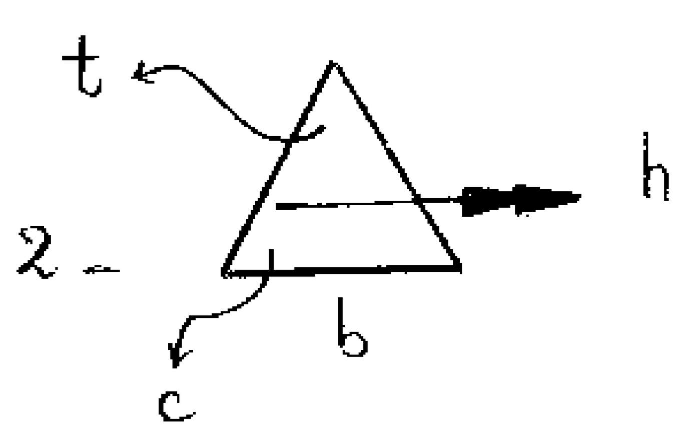
$\longrightarrow l_1=2l_2$

$2-\ M_{max}=\frac{q\,l_2^2}{2}$

$\sigma_{max}=\frac{M}{\underline{W}}$

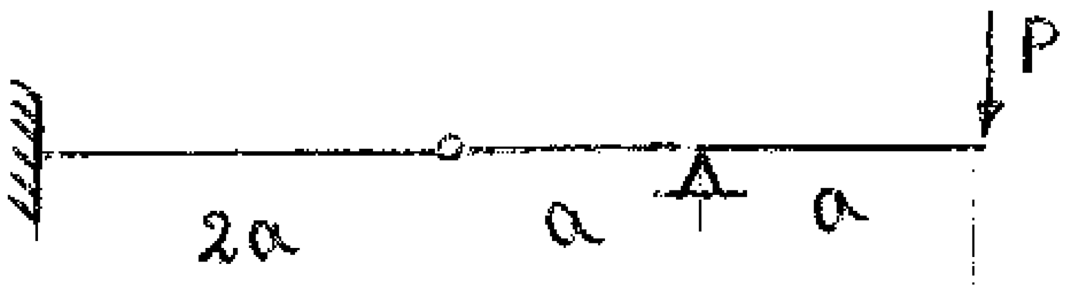
در هر دو برابر

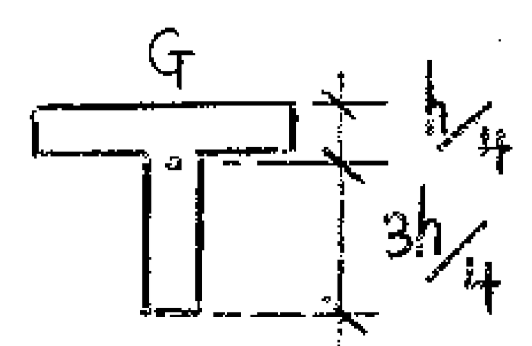




$\sigma_{max\,t_1}=\sigma_{max\,t_2}\longrightarrow\frac{M}{W_1}=\frac{M}{W_2}\longrightarrow\frac{q\,l_1^2/8}{I/\frac{h}{3}}=\frac{q\,l_2^2/8}{I/\frac{2h}{3}}$

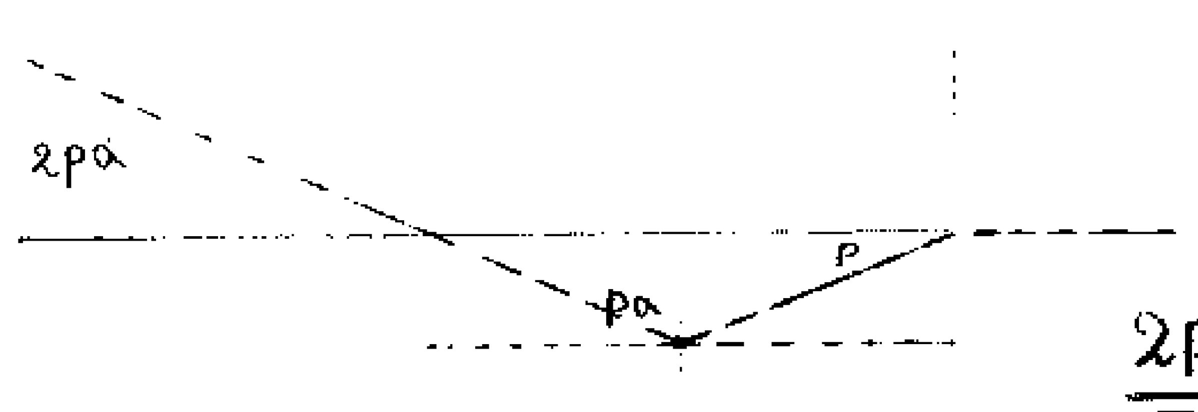
$\boxed{\longrightarrow l_1=2\sqrt{2}\,l_2}$





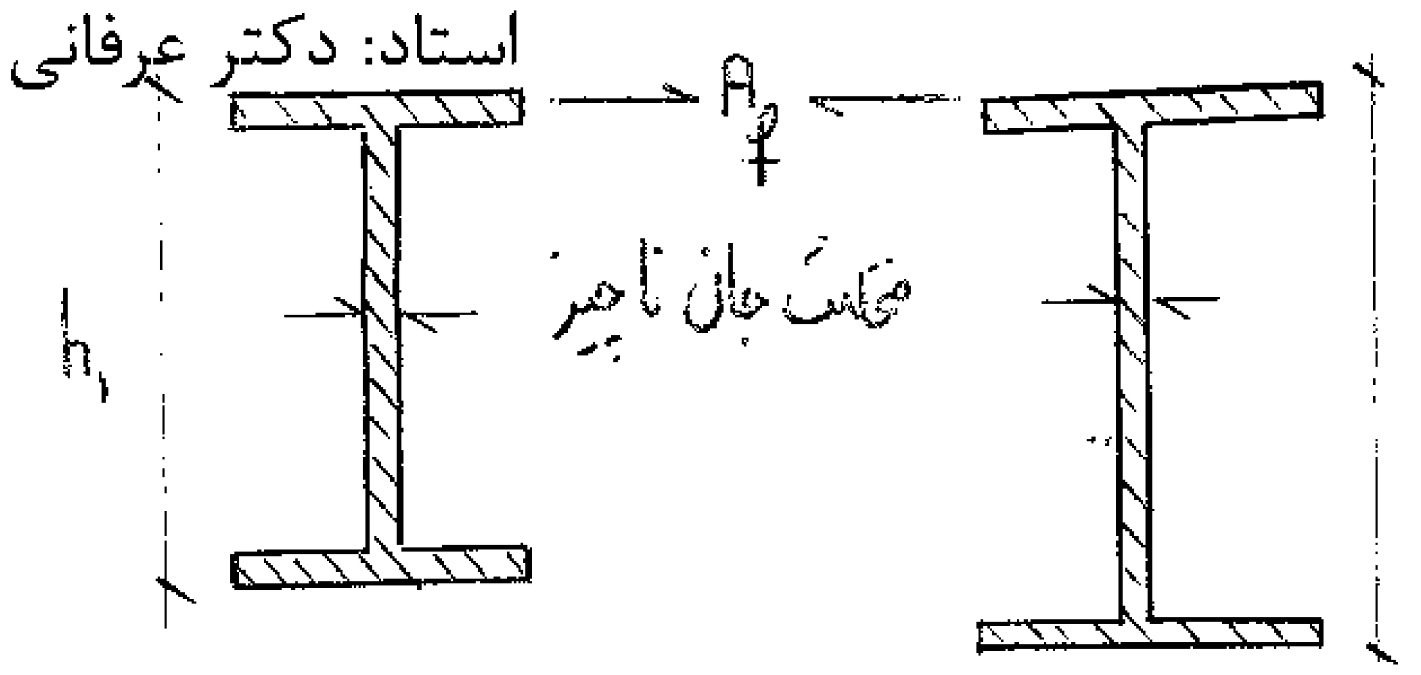
اگر در مصالح تیر مطابق شکل تنش مجاز فشاری $\sigma_0$ فرض کرده و تنش مجاز کششی نصف آن فرض کنیم مطلوب است حداکثر P مجاز :

ممان اینرسی مقطع حول محور خنثی I فرض کنید :



$\frac{2pa}{I/_{3h/4}}\leqslant\frac{\sigma_0}{2}$ , $\frac{2pa}{I/_{h/4}}\leqslant\sigma_0$

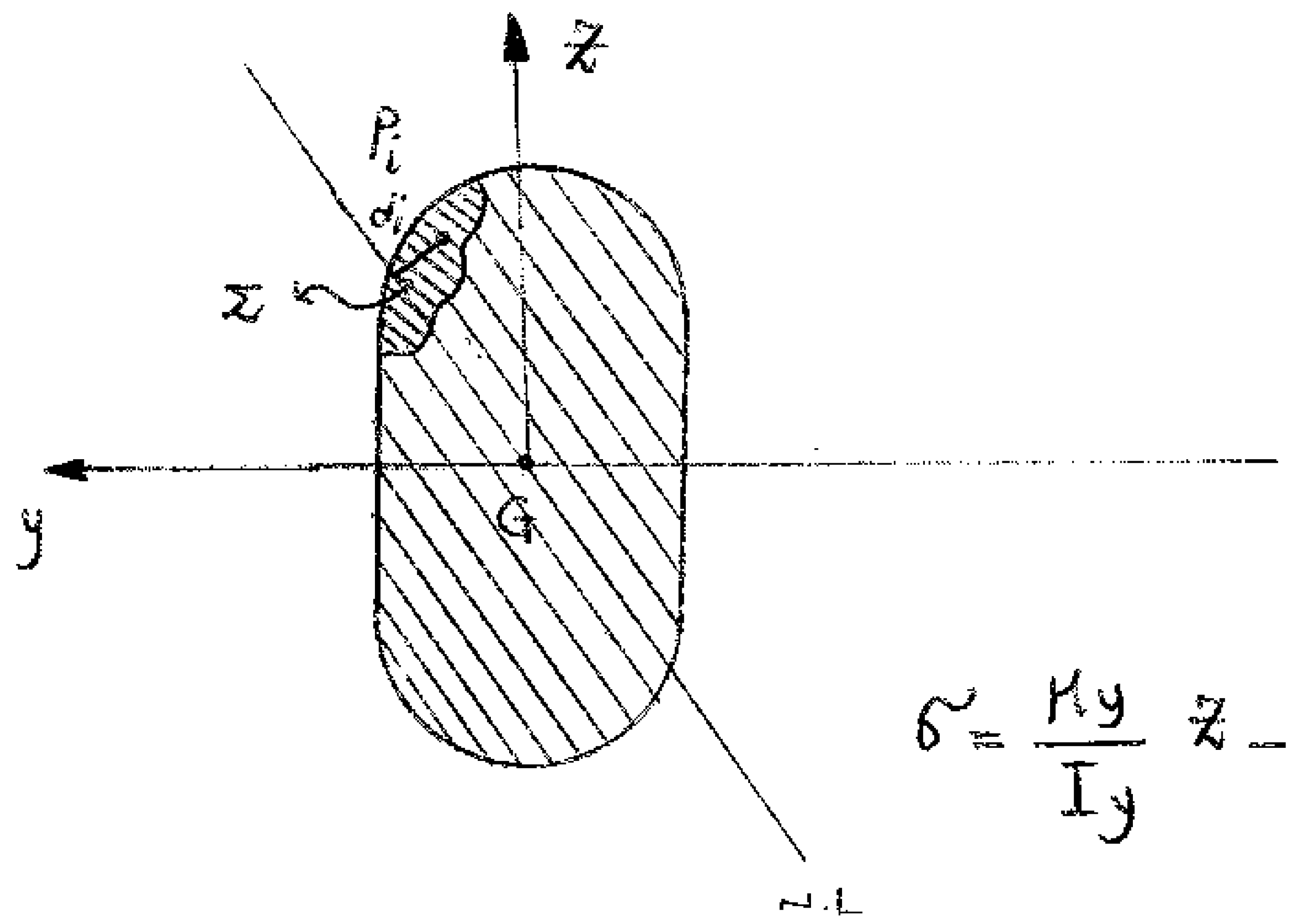
$\frac{pa}{I/_{h/4}}\leqslant\sigma_0/_2$ , $\frac{pa}{I/_{3h/4}}\leqslant\sigma_0$ $\longrightarrow P\leqslant\frac{\sigma_0 I}{3ha}$




✳ W تابع توزیع مساحت در بازو می‌باشد ✳

$$\frac{W_2}{W_1} = ?$$

$$\frac{h_2}{h_1} \qquad \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 \qquad \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^3 \qquad \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^4$$




بر قسمت نشان داده شده تحت اثر خمش چه نیرویی وارد می‌شود.

$$P_i = \int_\Sigma \sigma\, dA \quad , \quad \sigma = \frac{M_{N.L}}{I_{N.L}} \cdot d_{N.L} \longrightarrow \boxed{P_i = \frac{M_{N.L}}{I_{N.L}} \cdot S_{N.L}^{\Sigma}}$$

$$\sigma = \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y \longrightarrow P_i = \frac{M_y}{I_y} S_y - \frac{M_z}{I_z} S_z$$

چند درصد از خمش توسط قسمت هاشور خورده تحمل می‌شود.

$$M_i = \int^\Sigma \sigma\, d_{N.L} \cdot dA \quad , \quad \sigma = \frac{M_{N.L}}{I_{N.L}} d_{N.L} \longrightarrow M_i = \frac{M_{N.L}}{I_{N.L}} \cdot I_{N.L}^{\Sigma}$$

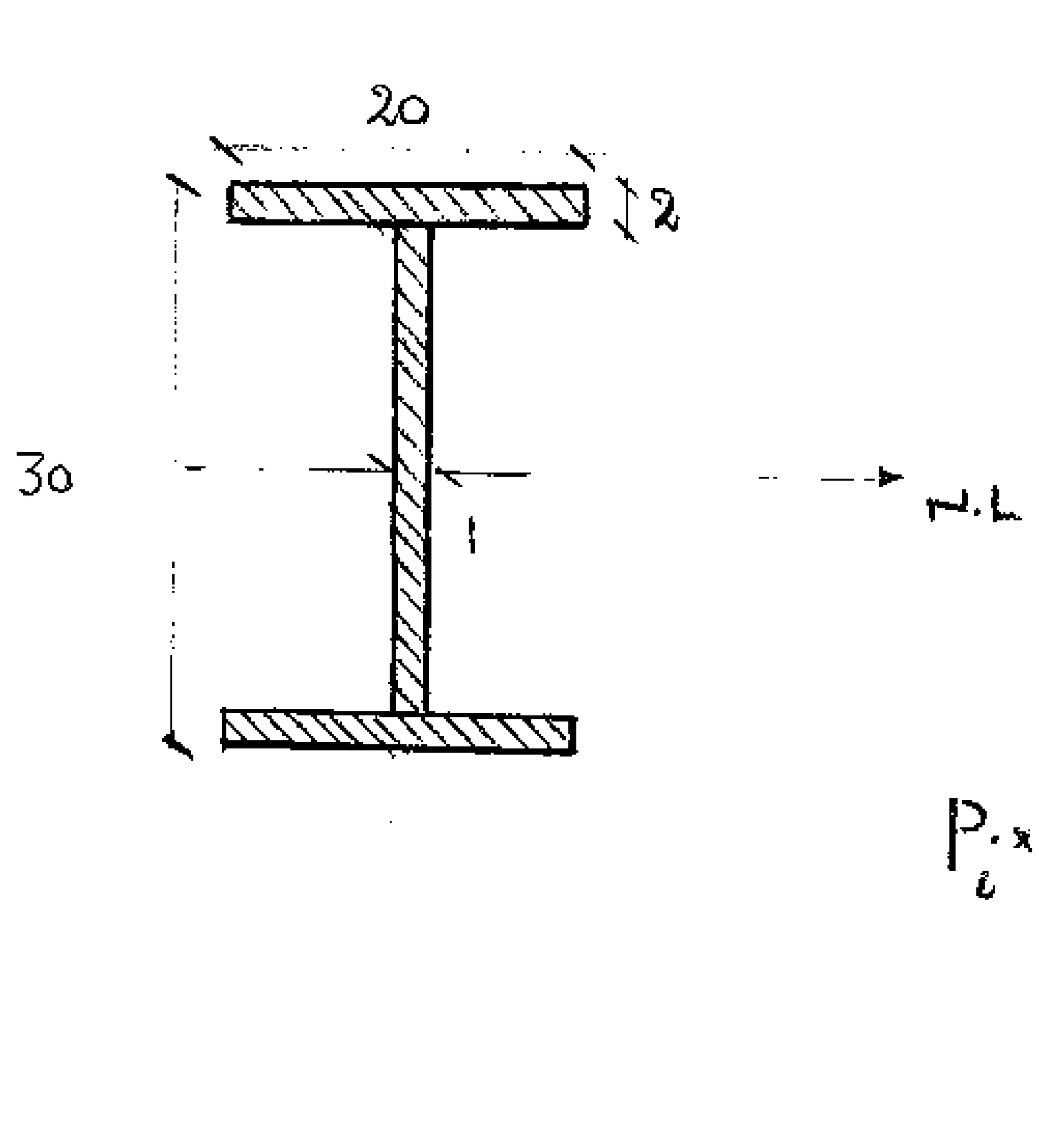
$$\boxed{\longrightarrow \frac{M_i}{M_{N.L}} = \frac{I_{N.L}^{\Sigma}}{I_{N.L}}}$$

✳ ملاحظه می‌شود خمش - نسبت ممان اینرسی بین قسمت‌های مختلف توزیع می‌شود ✳

✳ چند درصد از خمش حول محور y توسط قسمت هاشور خورده تحمل می‌شود. ✳

$$M_i = \int_\Sigma \sigma \cdot z \cdot dA = \frac{M_y}{I_y} I_y^{\Sigma} - \frac{M_z}{I_z} (I_{yz})^{\Sigma} \qquad \text{(مهم نیست)}$$

تحت اثر لنگر خمشی چند درصد از خمش توسط بال‌ها تحمل می‌شود.




$$M_f = \frac{M}{I} \cdot I_f \longrightarrow \frac{M_f}{M} = \frac{I_f}{I} = \frac{20\times 30^3 - 20\times 26^3}{20\times 30^3 - 19\times 26^3} = 0.91$$

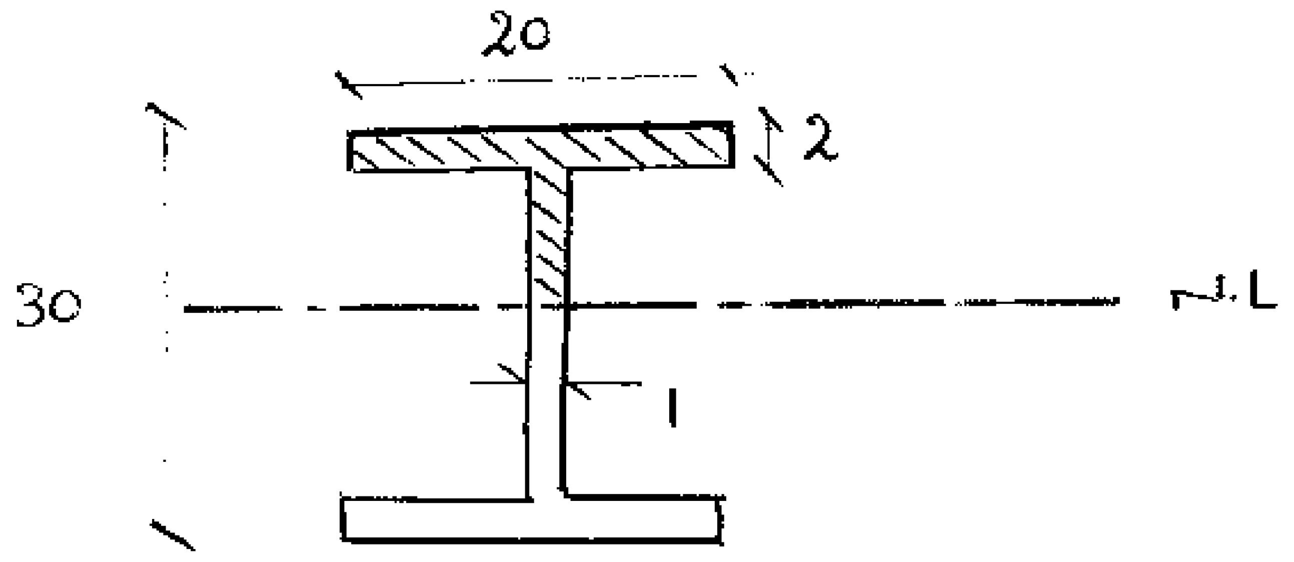
فاصله محل اثر بار :

$$P_i \times d_i = M_i \longrightarrow \boxed{d_i = \frac{I_{N.L}^{\Sigma}}{S_{N.L}^{\Sigma}}}$$

تنظیم: محمد حاج صادقی

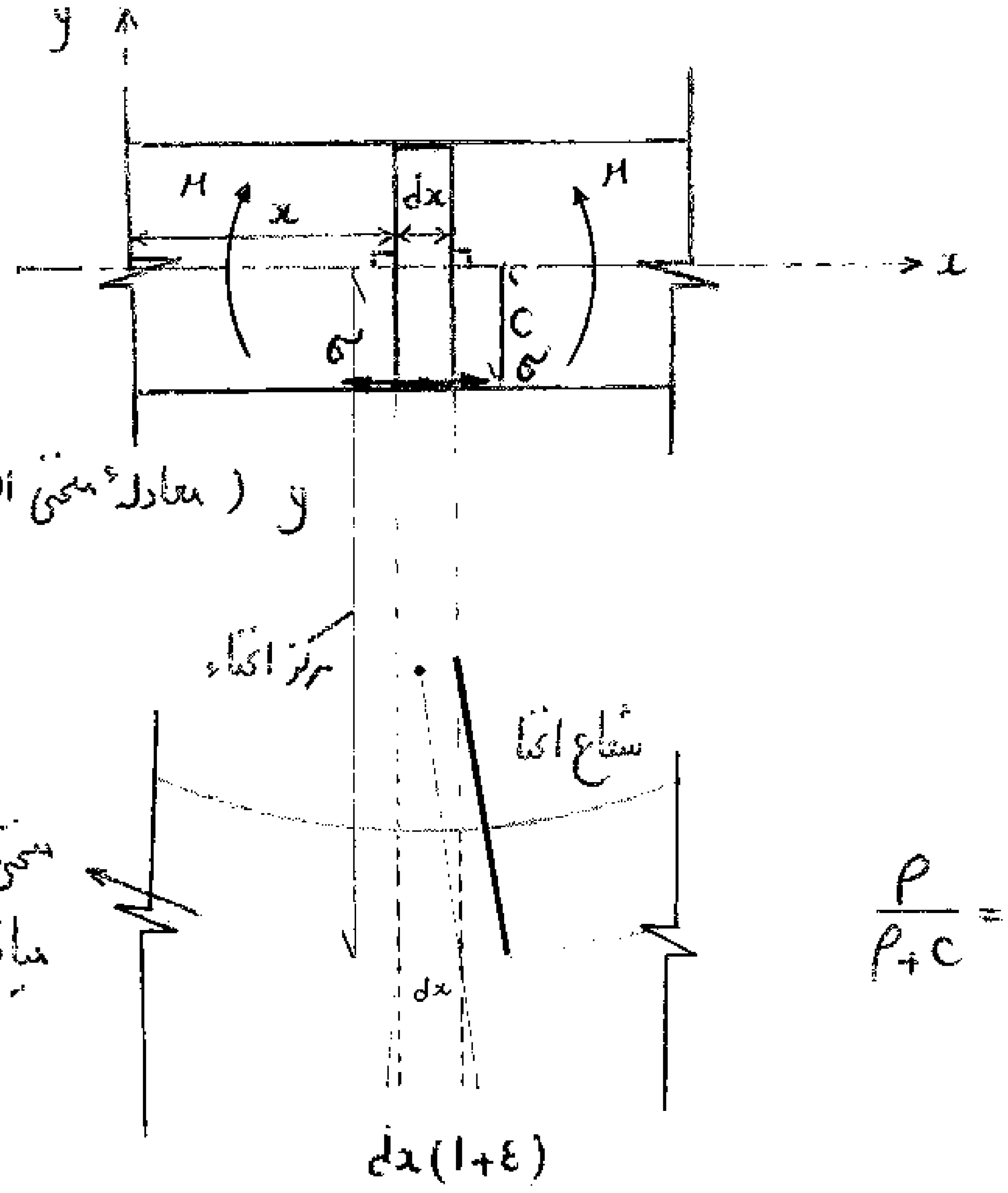
استاد: دکتر عرفانی

در مقطع I شکل پایین مطلوب است محل اثر نیروی فشاری سهم قسمت فوقانی تار خنثی.




$$d_i = \frac{I^{\Sigma}_{N.L}}{S^{\Sigma}_{N.L}} = \frac{\frac{20\times15^3-19\times13^3}{3}}{20\times15\times7.5-19\times13\times6.5} = 13.32$$

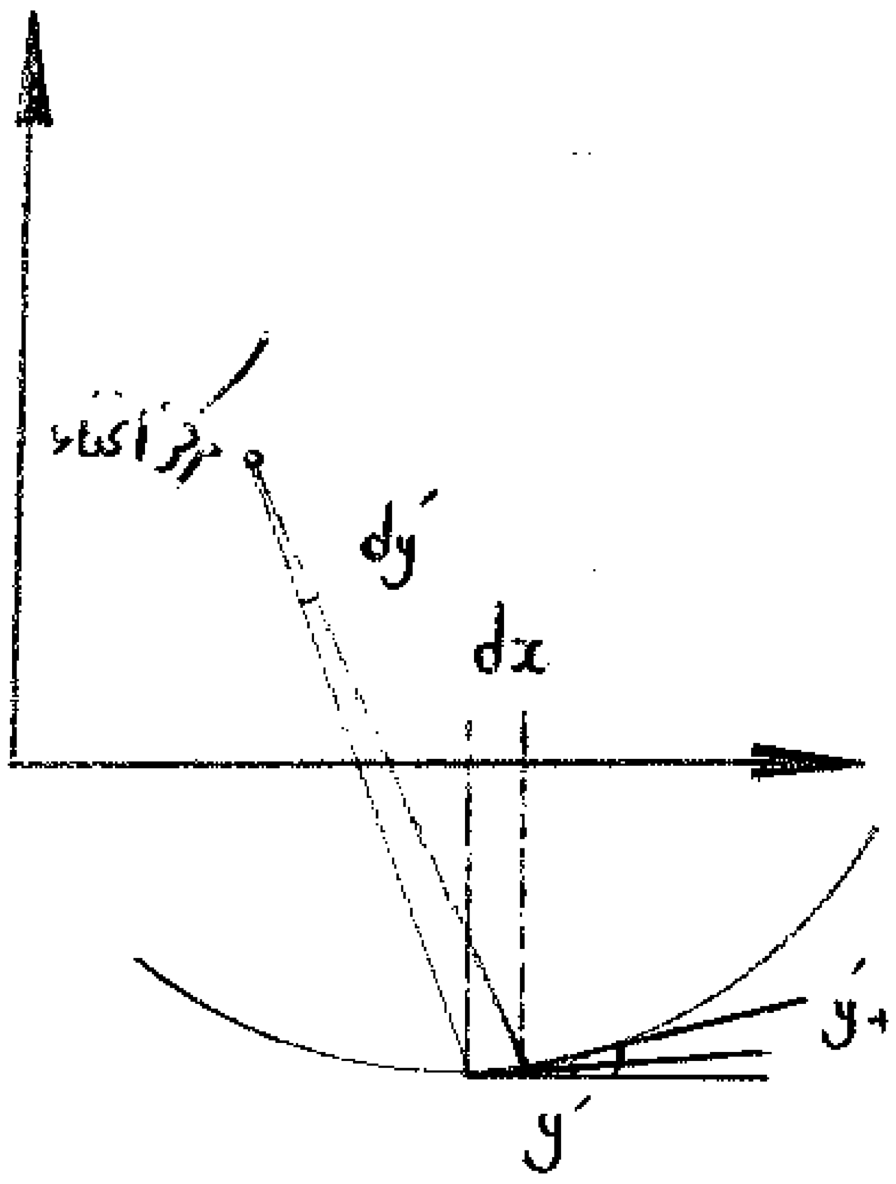
تغییر شکل‌های خمشی:




$$\sigma = \frac{MC}{I} \quad , \quad \varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{MC}{EI} \quad (\mathrm{I})$$

$$\frac{\rho}{\rho+C} = \frac{dx}{dx(1+\varepsilon)} = \frac{1}{1+\varepsilon} \longrightarrow \frac{\rho}{C} = \frac{1}{\varepsilon} \longrightarrow \boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{\varepsilon}{C}} \quad (\mathrm{II})$$

$$\mathrm{I}, \mathrm{II} \longrightarrow \boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}}$$




$$(y''\,dx)\,\rho = \sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$$

تغییر شکل‌های کوچک: $(y''\,dx)\,\rho = dx \longrightarrow \frac{1}{\rho} = y''$ تقریبی

$$\boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}}$$ دقیق

* $\frac{M}{EI} = y''$ تقریبی

* $\frac{M}{EI} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$ دقیق

ملاحظه می‌شود پارامتر موثر در تغییر شکل‌های خمشی EI می‌باشد. به عبارتی سختی خمشی مقطع عبارت است از EI یعنی برای کاهش تغییر شکل‌ها باید EI را افزایش داد در حالی که پارامتر موثر در مقاومت خمشی W می‌باشد یعنی برای افزایش مقاومت خمشی یا کاهش تنش‌های ناشی از خمش باید اساس مقطع را افزایش دهیم.

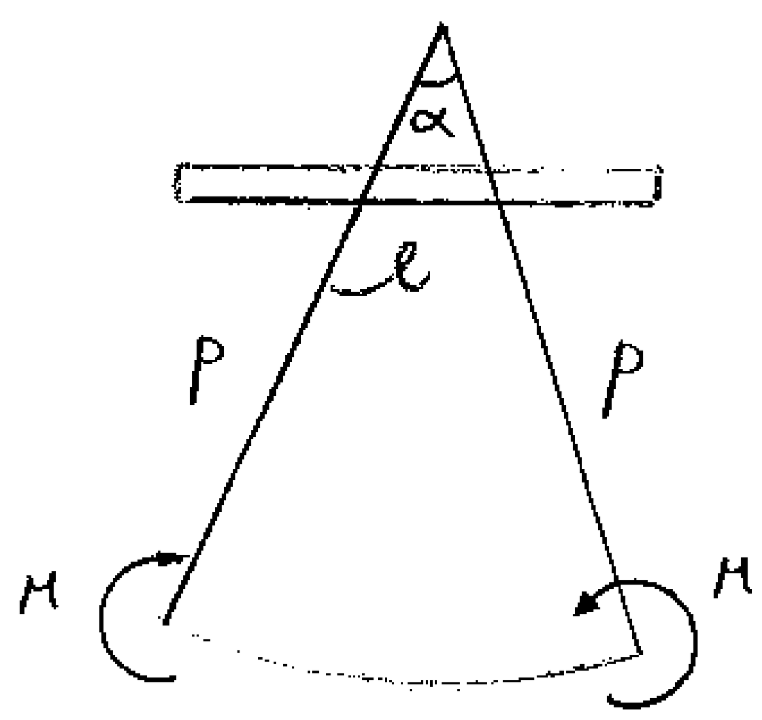
$\frac{M}{EI} = \frac{1}{\rho}$ تقعر یا انحنا        $\rho$ : شعاع انحنا

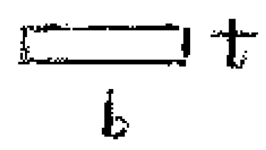
$y' = \int y'' dx$        شیب یا دوران

$y = \int y' dx$        خیز یا افت

دیگر مربوط به تحلیل سازه می‌شود.

* اگر تسمه‌ای به طول $\ell$ داشته باشیم و بخواهیم آن را توسط اعمال لنگر در دو انتها به قوسی با زاویه مرکزی $\alpha$ تبدیل کنیم مقدار لنگر اعمالی چقدر باید باشد :



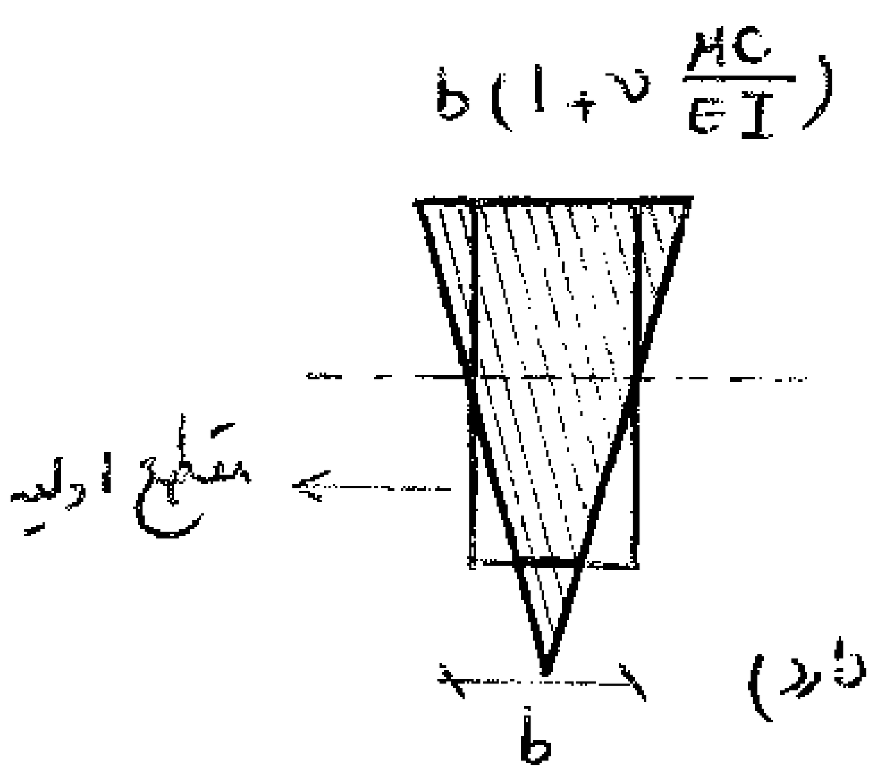




$M$ در کل ثابت ، در نتیجه $\rho$ در کل ثابت در نتیجه قسمتی از دایره می‌شود .

$$\boxed{\ell = \alpha\rho} \longrightarrow \rho = \frac{\ell}{\alpha} \ , \ \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \longrightarrow M = \frac{EI\alpha}{\ell}$$

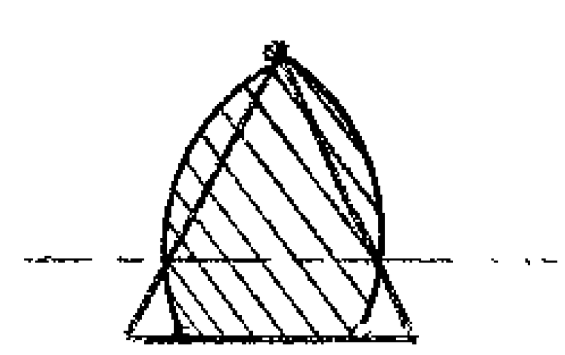
$$\longrightarrow M = \frac{Ebt^3\alpha}{12\ell}$$

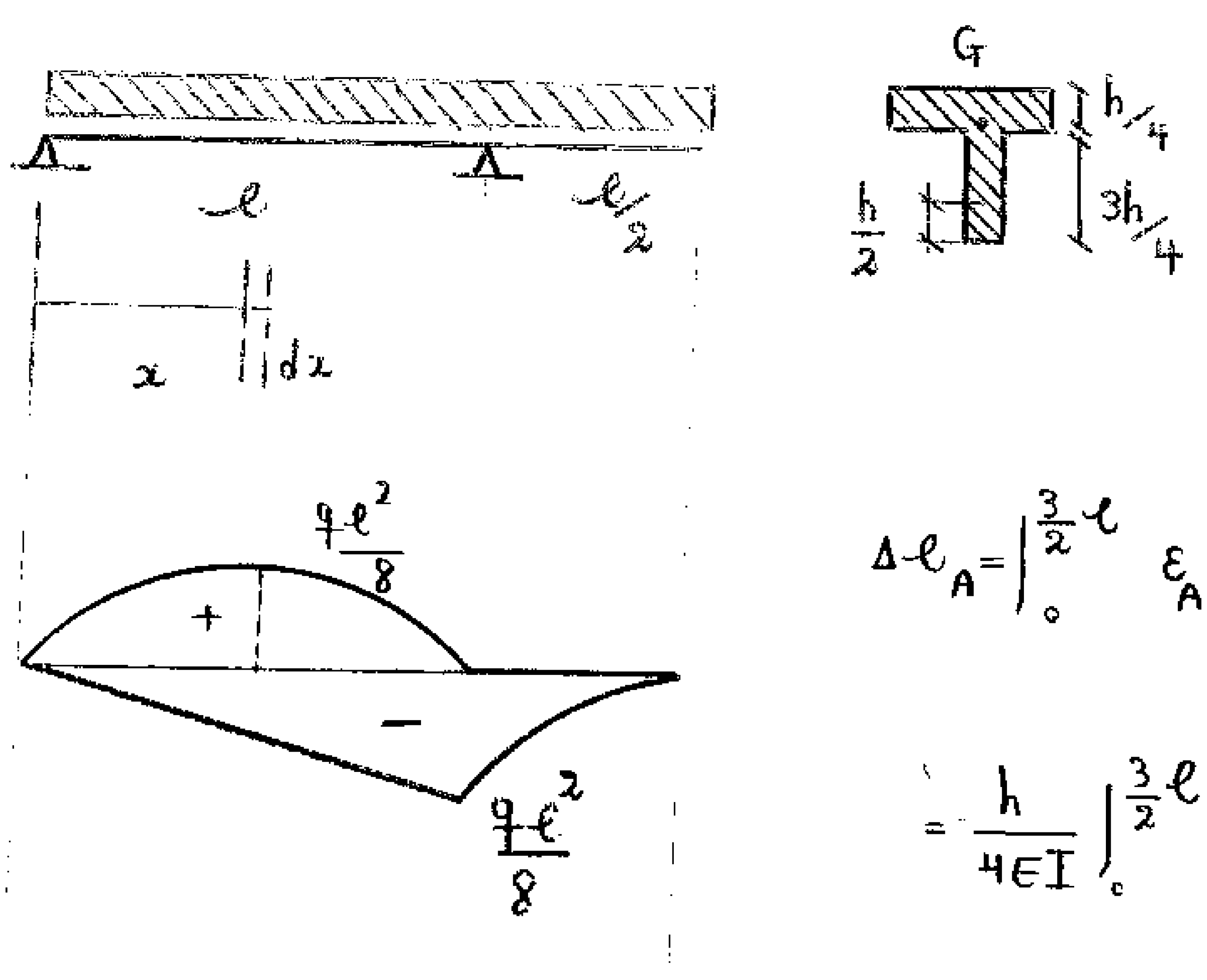
یک مقطع مستطیلی پس از اعمال خمش به چه شکلی تبدیل می‌شود :




لنگر مثبت        $= b\left(1+\frac{\nu c}{\rho}\right)$        $1+\frac{\nu c}{\rho} = \frac{\rho_d + c}{\rho_d} = 1+\frac{c}{\rho_d}$

$\frac{1}{\rho_d} = \nu \frac{1}{\rho}$ (ذاتاً منفی دارد)

برای مقطع مثلثی :                لنگر مثبت




مطلوب است تغییر طول تار به ارتفاع $\frac{h}{2}$ از قسمت تحتانی مقطع مطابق شکل تحت اثر بارگذاری نشان داده شده :

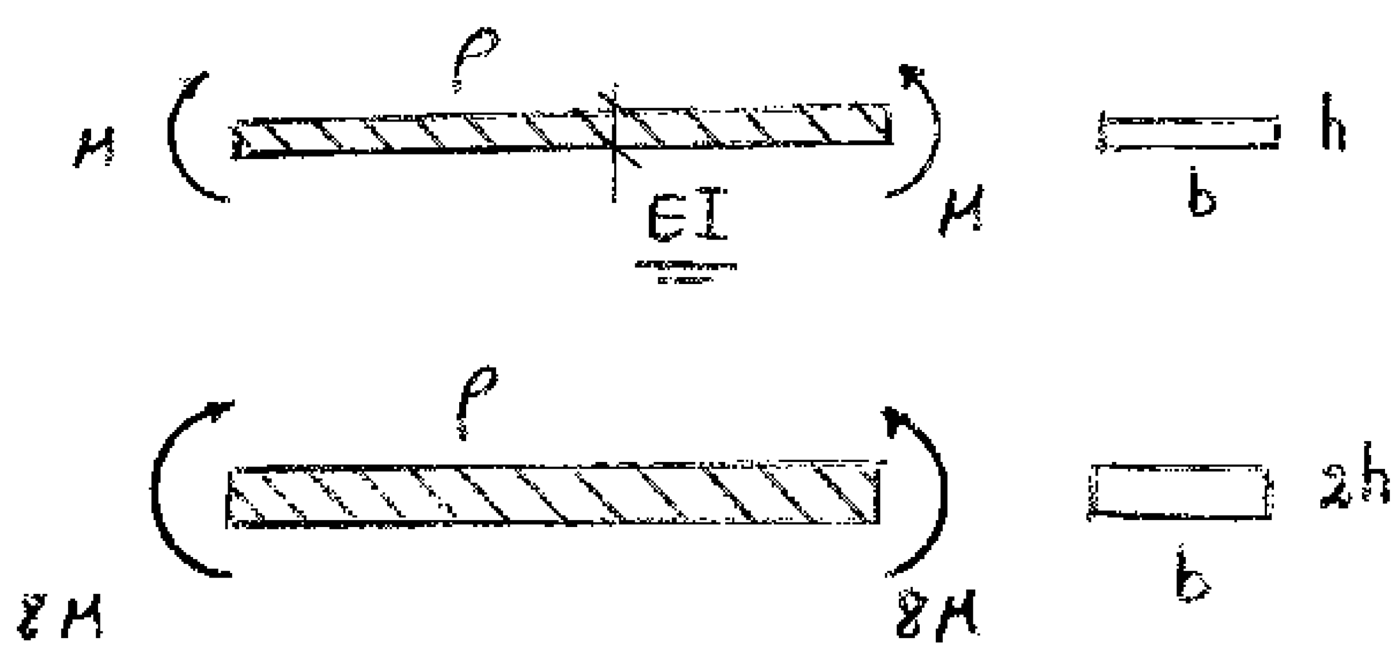
$$\Delta\ell_A = \int_0^{\frac{3}{2}\ell} \varepsilon_A \, dx = \int_0^{\frac{3}{2}\ell} \frac{\sigma_A}{E} dx = \int_0^{\frac{3}{2}\ell} \frac{M \frac{h}{4}}{EI} \cdot dx$$

$$= \frac{h}{4EI}\int_0^{\frac{3}{2}\ell} M dx \Rightarrow \Delta l_A = \frac{h}{4EI}\left[\frac{2}{3}\times\frac{q\ell^2}{8}\cdot\ell - \frac{1}{3}\frac{q\ell^2}{8}\cdot\frac{\ell}{2} - \frac{1}{2}\frac{q\ell^2}{8}\ell\right]$$

تنظیم: فاطمه حاج ...

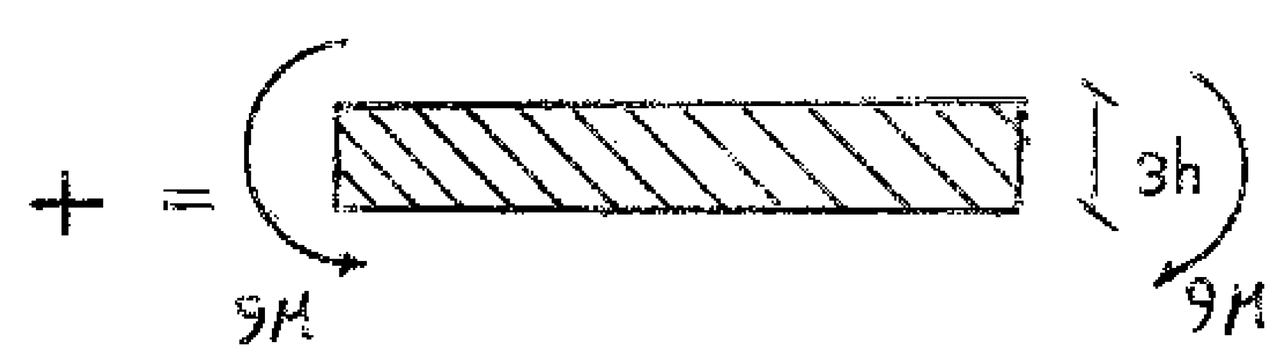
استاد: دکتر عرفانی

دو تسمه مطابق شکل اگر با اعمال لنگرهای مناسب طوری خم کنیم که انحنای هر دو یکسان شود سپس آن ها را روی هم قرار داده و به هم بچسبانیم و رها کنیم شعاع انحناء و تنش های باقی مانده در مجموعه ( پسماند ) چقدر خواهد بود :




همواره حاصل بارگذاری و تخلیه باربرداری را می توان به مجموع دو حالت تقسیم کرد :

در حالت اول بارگذاری را انجام می دهیم و در حالت دوم همان بارگذاری را با علامت منفی انجام می دهیم .




$$\frac{1}{\rho_2} = \frac{9M}{27EI} = \frac{M}{3EI} = \frac{1}{3\rho} \longrightarrow \rho_2 = 3\rho$$

$$\boxed{\text{اصل جمع آثار برای } \frac{1}{\rho} \text{ صادق است نه خود } \rho}$$

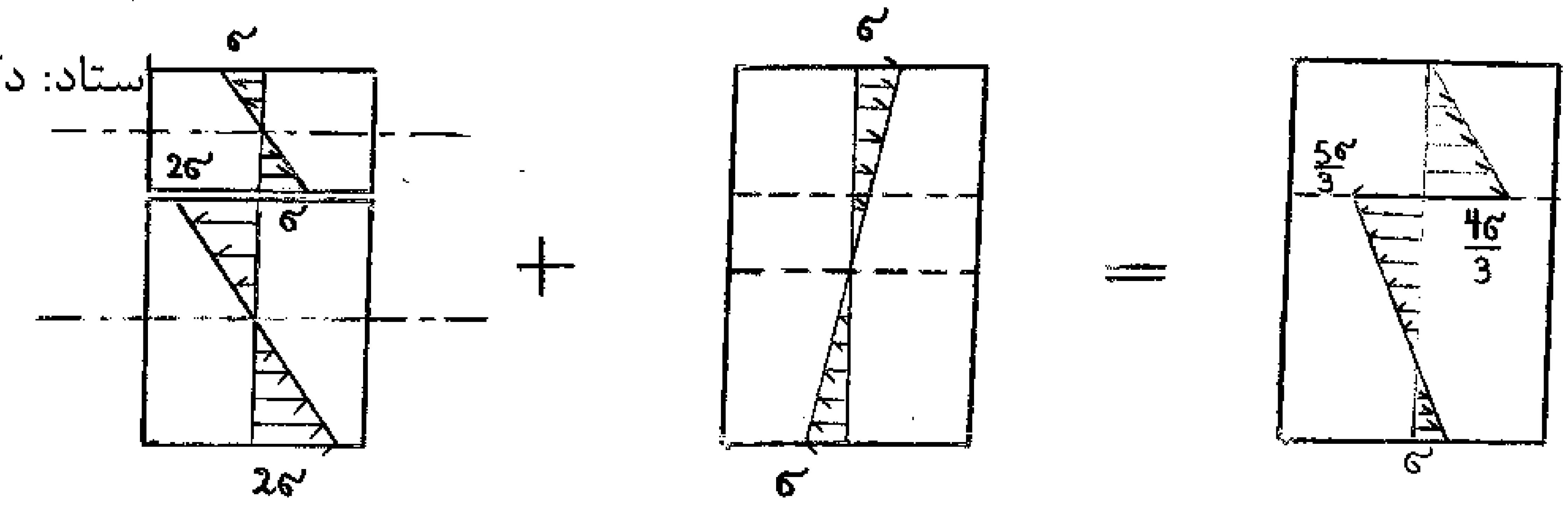
$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{\rho}$$

$$\frac{1}{\rho_2} = -\frac{1}{3\rho}$$

نهایی : $\frac{1}{\rho_{Final}} = \frac{+1}{\rho} - \frac{1}{3\rho} = \frac{2}{3\rho}$ $\qquad \rho_F = 1.5\rho$

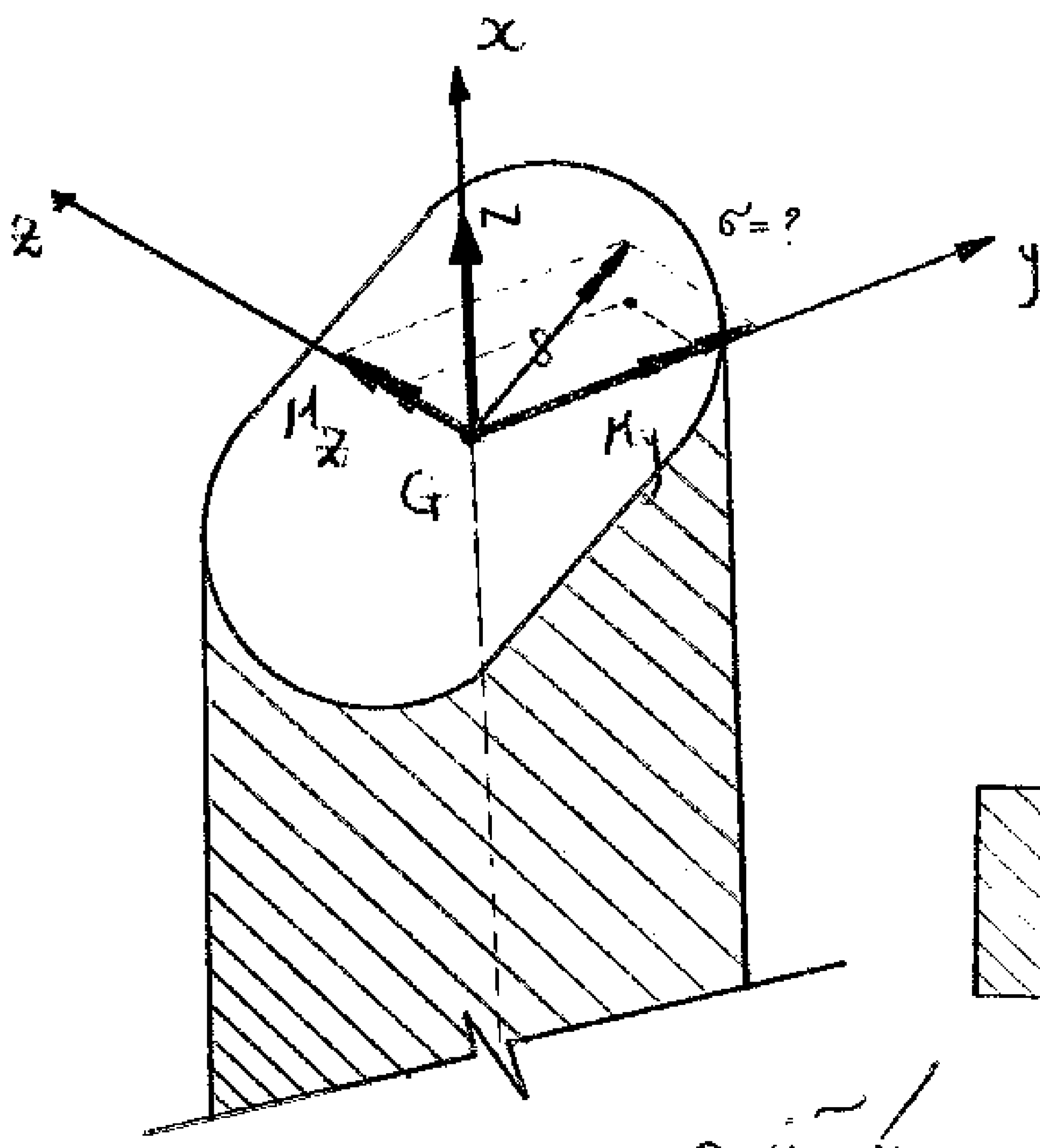
تنظیم: محمد حاج صادقی

استاد: دکتر عرفانی




$\sigma = \frac{M}{W}$ ( $y''$ ، $\frac{1}{3}$ ولی d سه برابر درنتیجه $\sigma$ ) $\varepsilon = y''.d$

چون $y''$ ها باهم برابرند درنتیجه می توان از d استفاده کرد و $2\sigma$ را از $\sigma$ بدست آورد با استفاده از



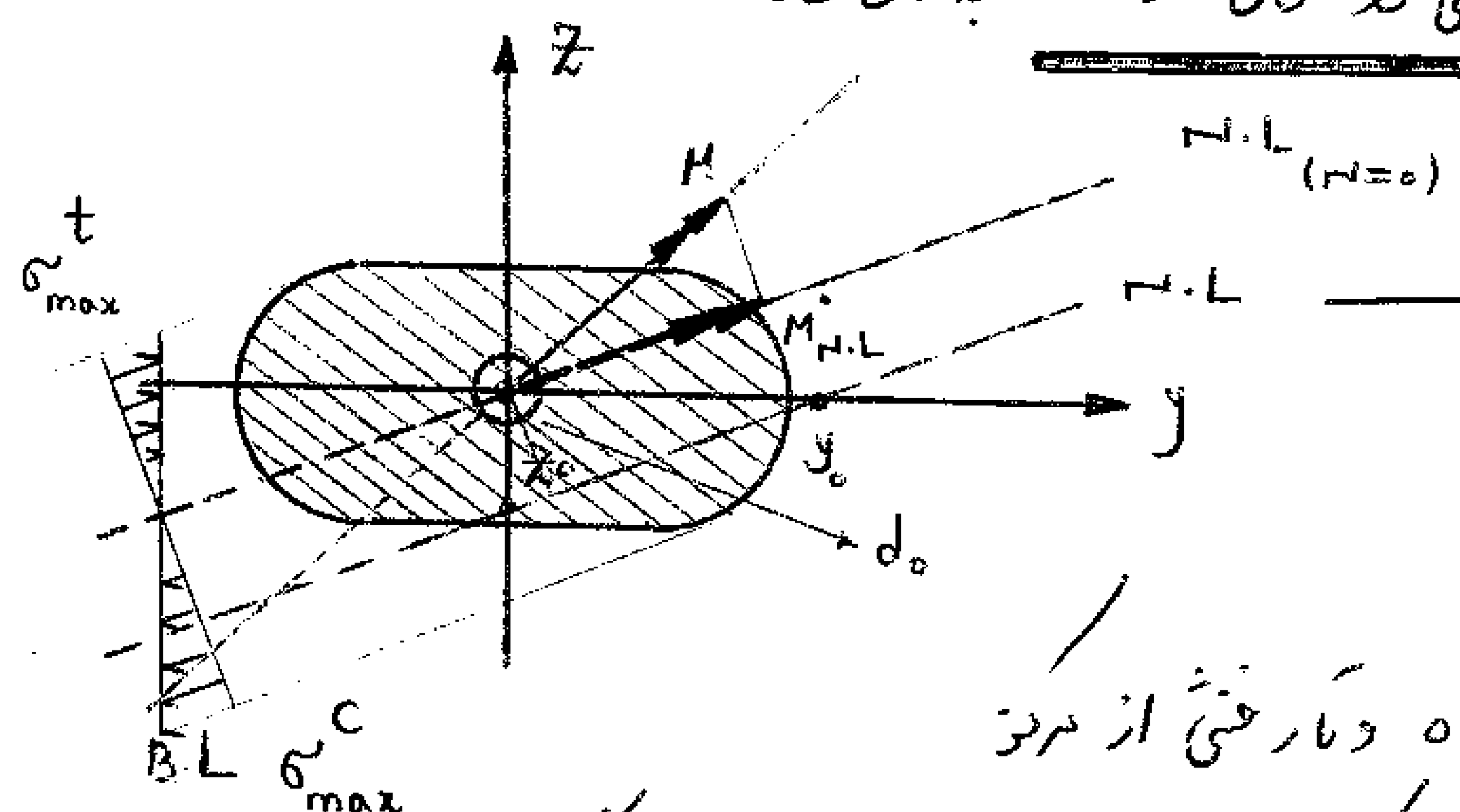

$\boxed{\text{ترکیب نیروی محوری و لنگر خمشی}}$

$$\sigma = +\frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y$$

$\pm \quad \pm \quad \pm$

$$\boxed{N.L \longrightarrow \sigma = 0 \longrightarrow \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y = 0}$$

ملاحظه می شود اضافه شدن نیروی محوری به لنگر خمشی شیب تار خنثی را عوض نکرده بلکه آن را به موازات خود از مرکز دوری کند.



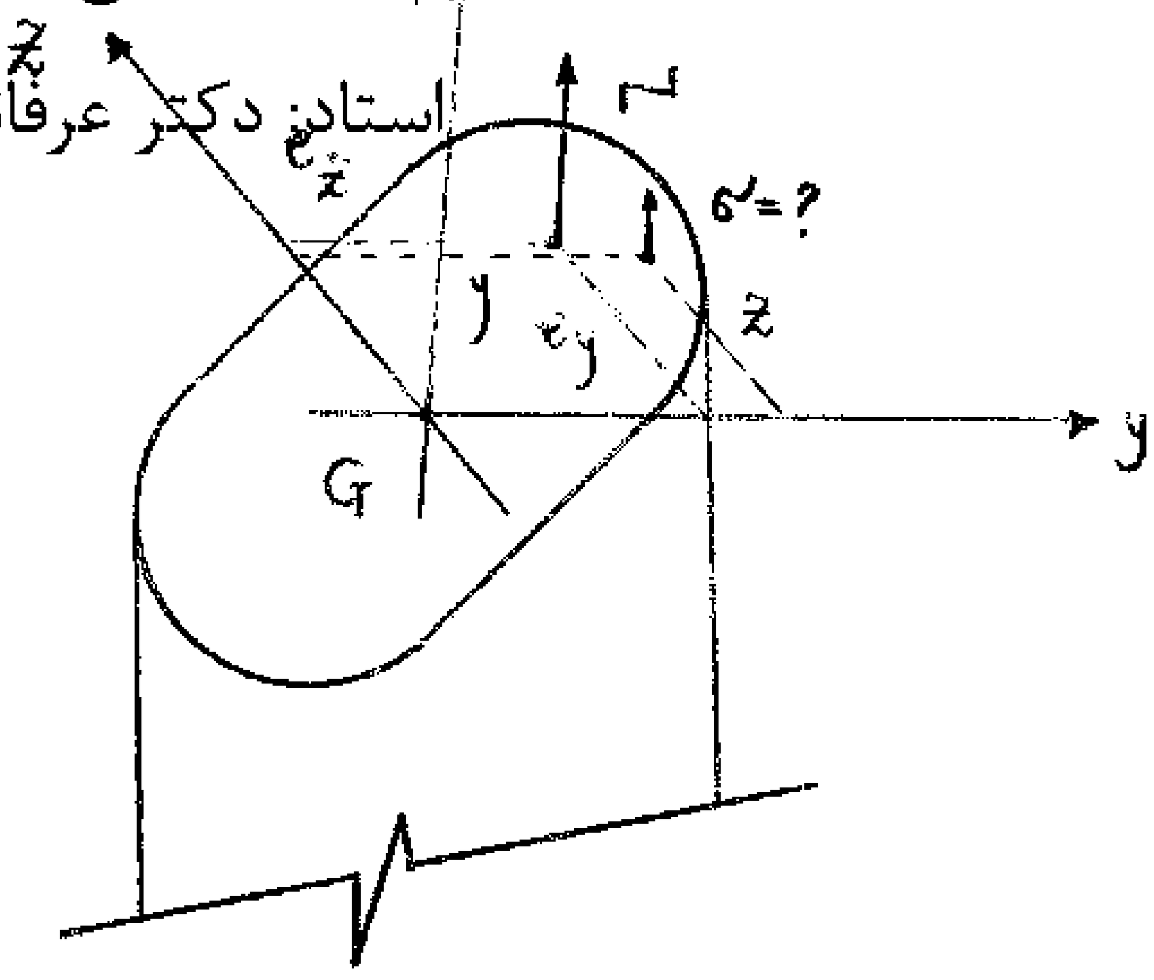

$$\longrightarrow \begin{cases} y_0 = \dfrac{N/A}{M_z/I_z} \\[2ex] z_0 = \dfrac{-N/A}{M_y/I_y} \end{cases}$$

اگر نیروی محوری در مقطع صفر باشد حالت خمش خالص بوده و تار خنثی از مرکز رد می شود ولی اگر لنگر خمشی صفر باشد حالت نیروی محوری خالص حاکم بوده و تار خنثی در بی نهایت قرار می گیرد.

همچنین هنوز در حالت ترکیب نیروی محوری و لنگر خمشی تنش و کرنش خطی بوده و متناسب با فاصله از تار خنثی تغییر می کند.

$$\boxed{\sigma = \frac{M_{N.L}}{\underbrace{I_{N.L}}_{\text{تار خنثی جدید}}} d_{N.L}}$$

تنظیم: محمد حاج صادقی
استاد: دکتر عرفانی



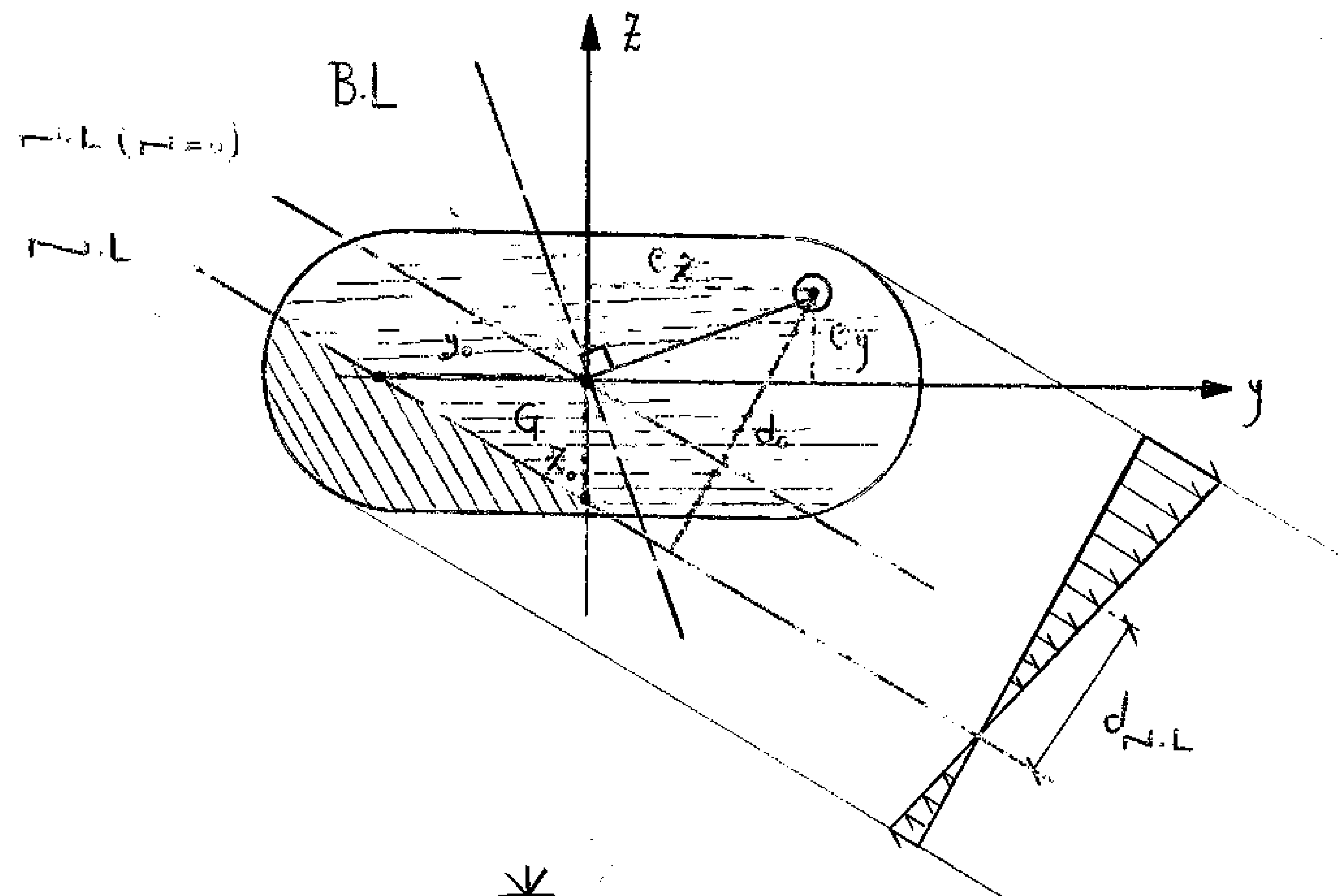

نیروی محوری خارج از مرکز :

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{N e_y}{I_y} z - \frac{N e_z}{I_z} y$$

$$\sigma = N \left( \frac{1}{A} + \frac{e_y}{I_y} z + \frac{e_z}{I_z} y \right)$$

$$N.L \mid \ \sigma = 0 \longrightarrow \frac{1}{A} + \frac{e_y}{I_y} z + \frac{e_z}{I_z} y = 0$$

ملاحظه می‌شود در حالت نیروی محوری خارج از مرکز مقدار نیروی محوری در موقعیت تار خنثی موثر نیست بلکه تنها موقعیت نیروی محوری است.




نیروی محوری و تار خنثی مربوطه، همواره در طرفین مرکز سطح واقع می‌شوند نه در یک طرف آن. طوری که حاصل ضرب فاصله
از یکی از محورهای اصلی اینرسی مرکزی در فاصله تار خنثی از همان محور مقداری است ثابت به اندازه مجذور شعاع ژیراسیون نسبت به همان محور.

بنابراین با نزدیک شدن یکی به مرکز دیگری از مرکز دور می‌شود.

$$y_0 = \frac{-\frac{1}{A}}{e_z / I_z} = \frac{-r_z^2}{e_z} \longrightarrow \boxed{y_0 \times e_z = -r_z^2}$$

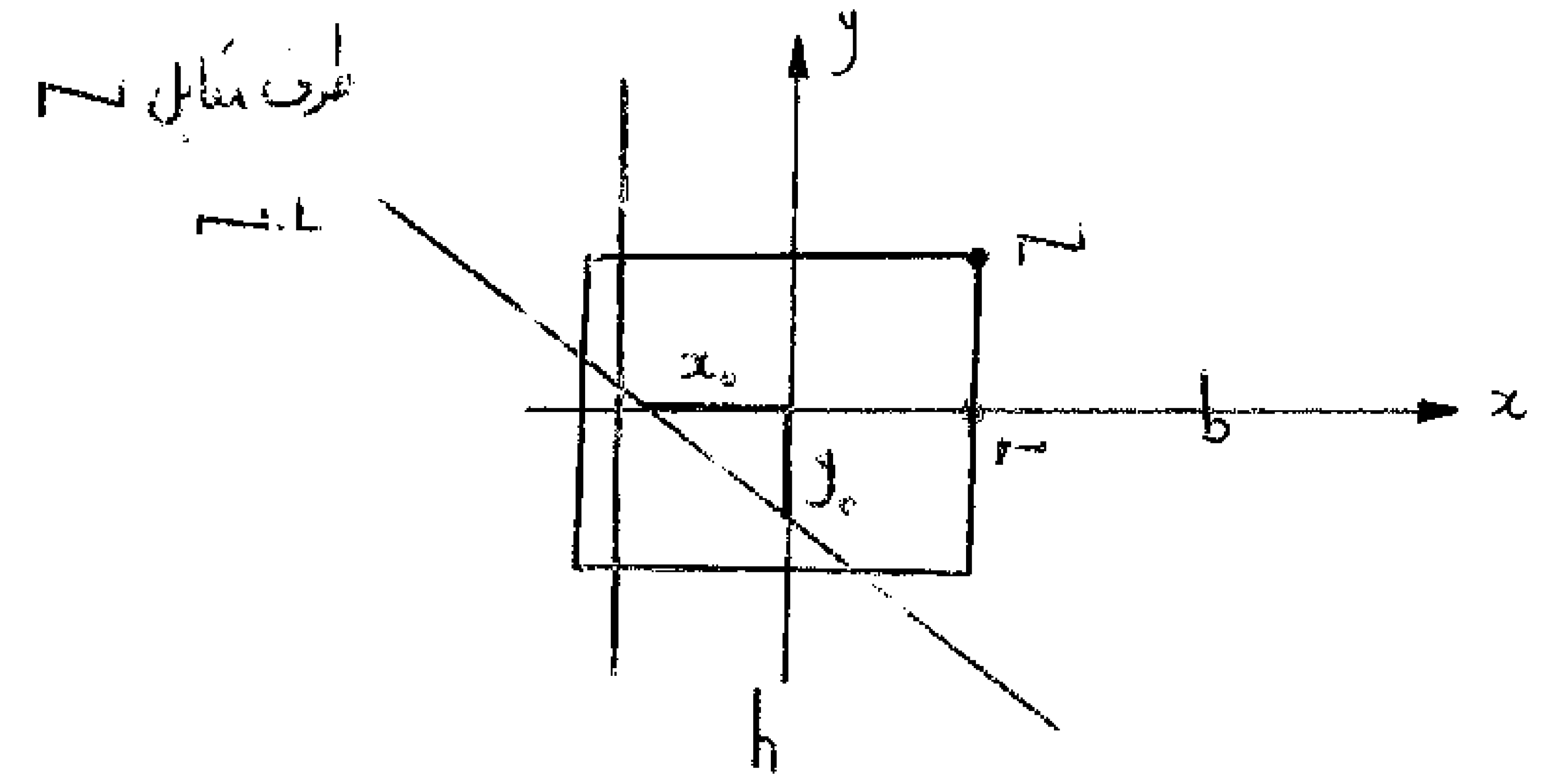
$$z_0 = \frac{-\frac{1}{A}}{e_y / I_y} = \frac{-r_y^2}{e_y} \longrightarrow \boxed{z_0 \times e_y = -r_y^2}$$

$$\sigma = \frac{M_{N.L}}{I_{N.L}} \cdot d_{N.L} \quad , \quad M_{N.L} = N \cdot d_0$$

تنظیم: محمد حاج صادقی

استاد: دکتر عرفانی

اگر نیروی محوری در یک گوشهٔ مستطیل واقع شود مطلوب است موقعیت تارخنثی :



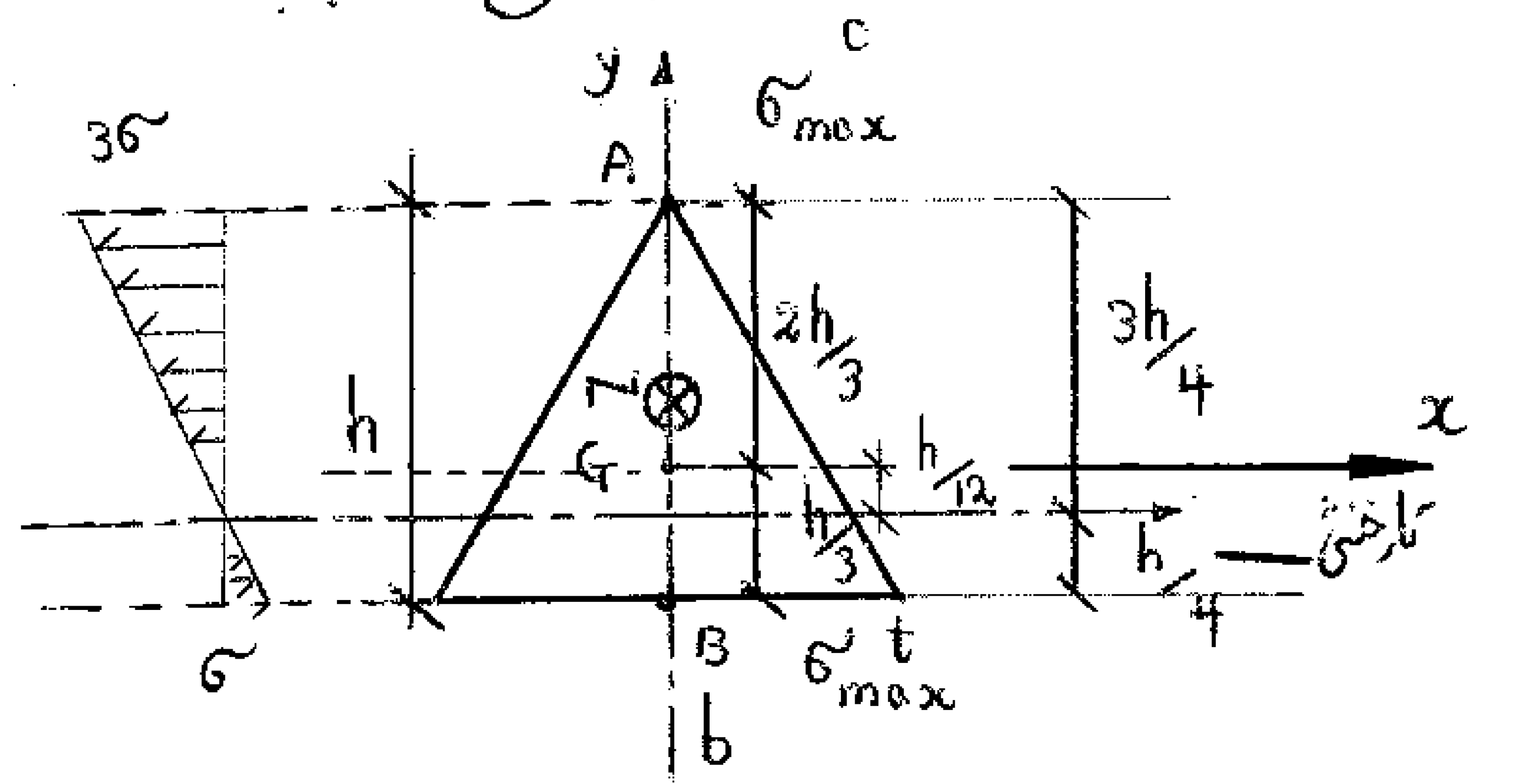

$$\frac{b}{2}\cdot y_0 = \frac{hb^3/12}{bh}$$

$$\longrightarrow y_0=\frac{b}{6}\ ,\ x_0=\frac{h}{6}$$

* اگر نیروی محوری بر روی یکی از محورهای اصلی اینرسی مرکزی واقع شود تارخنثی مربوط درطرف دیگر مرکز بر آن محور عمود خواهد بود.

مطلوب است تعیین e (موقعیت نیروی فشاری موثر در مقطع) طوری که حداکثر تنش فشاری موثر بر مقطع سه برابر حداکثر تنش کششی موثر بر مقطع باشد.

(دو جواب دارد، $\sigma^c_{max}$ در پایین مقطع باشد)



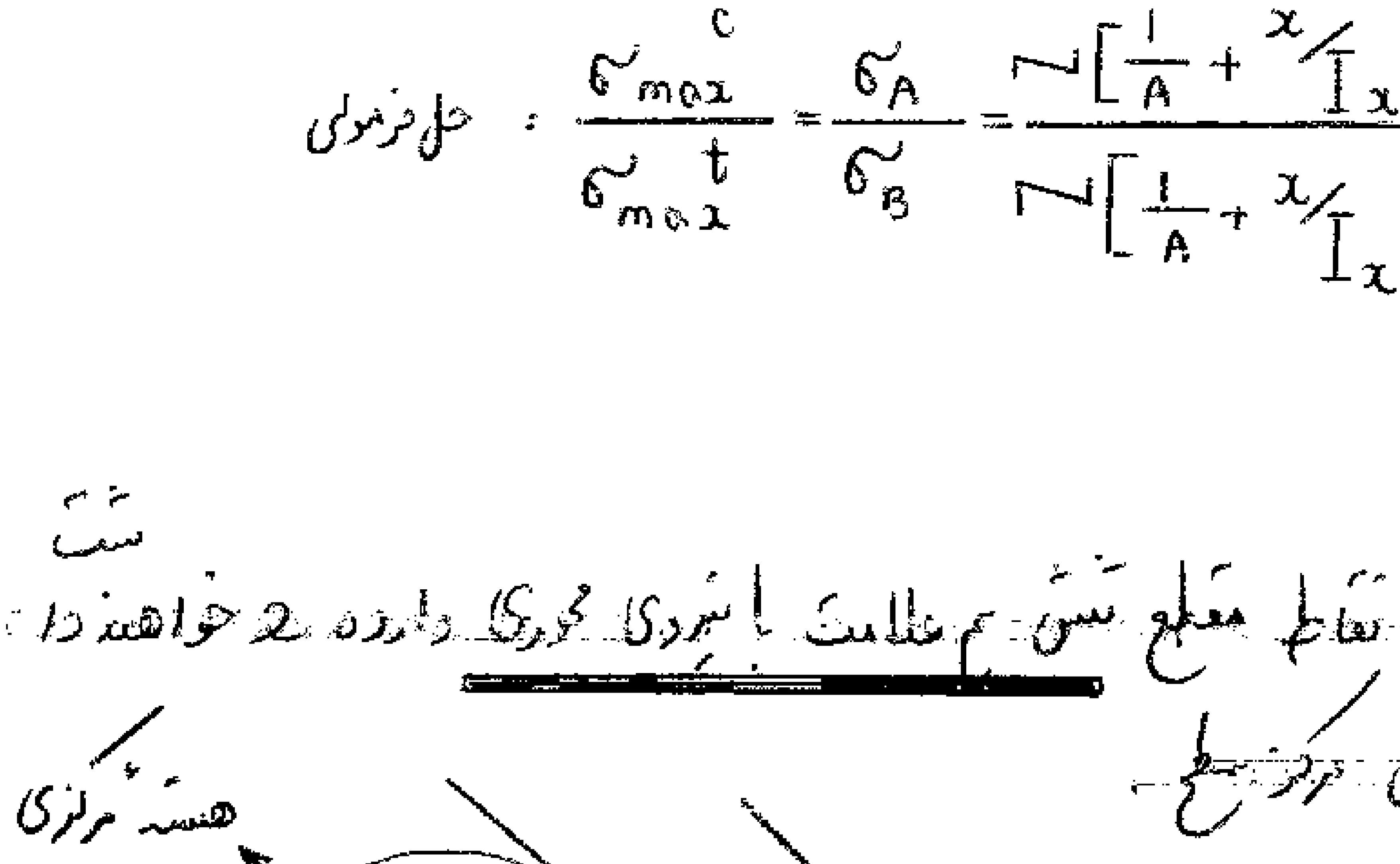

$$x\cdot\frac{h}{12}=\frac{bh^3/36}{bh/2}$$

$$x=\frac{2}{3}h \longrightarrow e=\frac{2}{3}h+\frac{h}{3}=h$$

حل فرمولی : $\frac{\sigma^c_{max}}{\sigma^t_{max}}=\frac{\sigma_A}{\sigma_B}=\frac{P\left[\frac{1}{A}+\frac{x}{I_x}(+2h/3)\right]}{P\left[\frac{1}{A}+\frac{x}{I_x}(\frac{-h}{3})\right]}=-3$ چون یکی فشاری و دیگری کششی است $\longrightarrow x=\frac{2h}{3}$

## هستهٔ مرکزی مقطع

مکان هندسی نقاطی که اگر نیروی محوری در آن نقاط اثر کند کلیهٔ نقاط مقطع تنش هم علامت با نیروی محوری وارده خواهند داشت را هستهٔ مرکزی می‌نامیم که قطعاً سطح محدودی است شامل مرکز سطح.



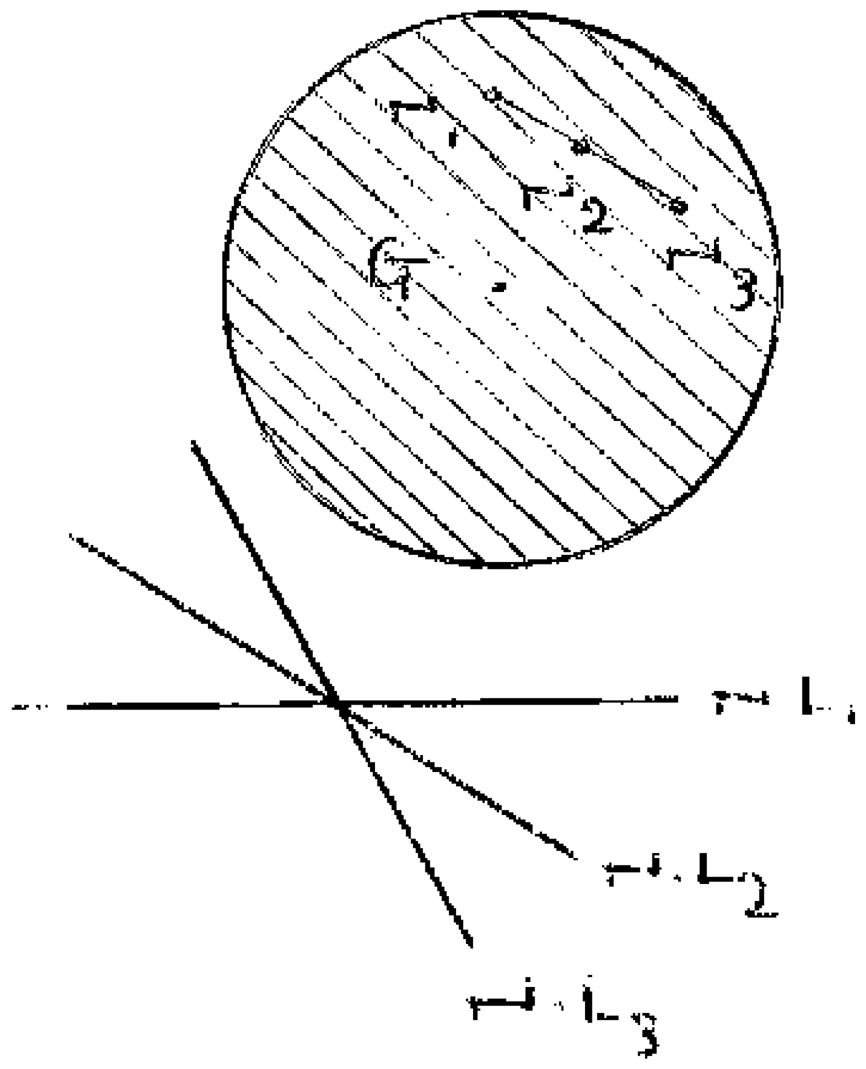

مرز هستهٔ مرکزی مکان هندسی نقاطی است که اگر نیروی محوری بر روی آن نقاط اثر کند تارخنثی مربوط بر مقطع محیط خواهد بود.

سطح محدودی است شامل مرکز سطح

تذکر :

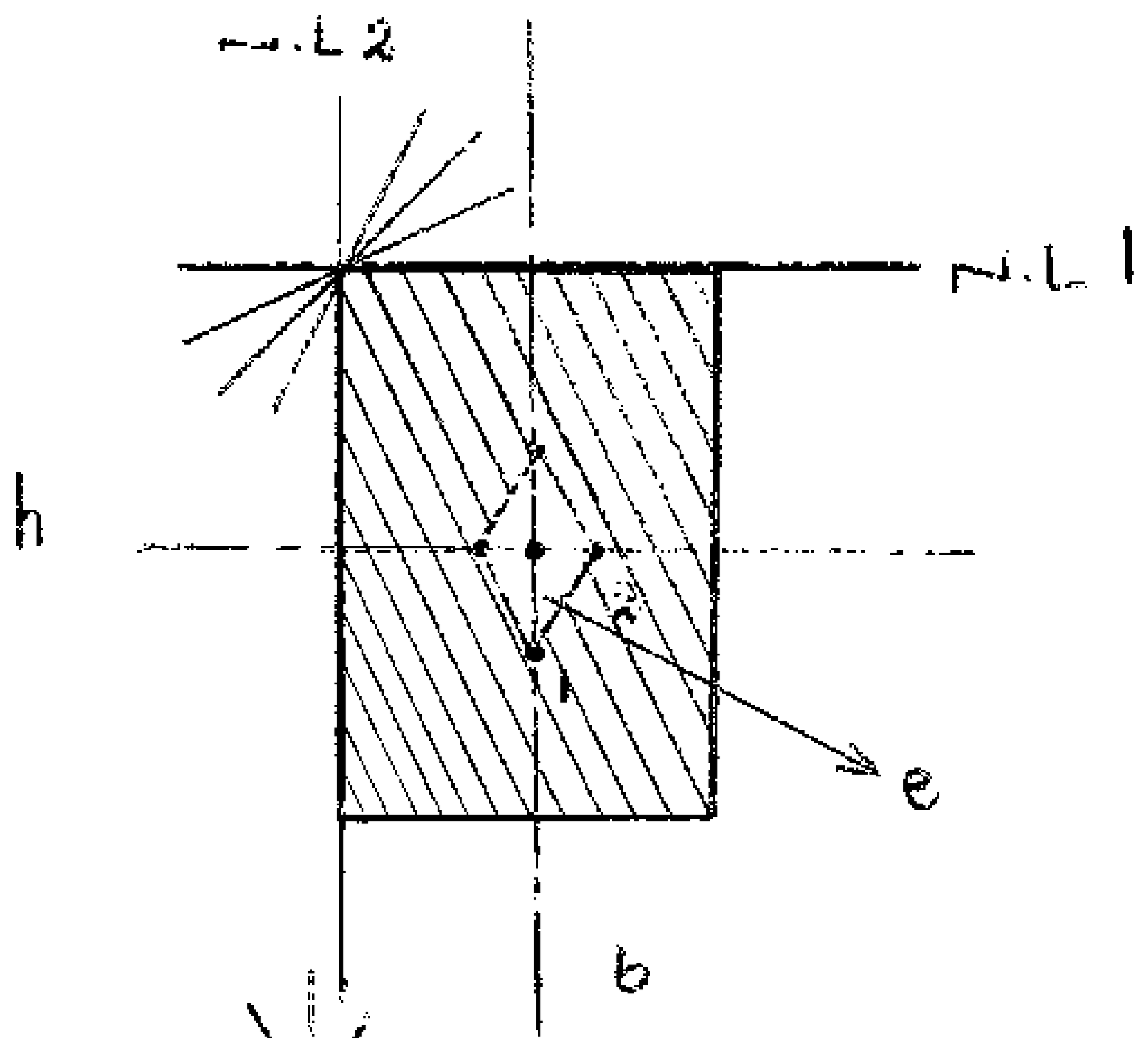
اگر تارخنثی حول یک نقطه دوران نماید نیروی محوری نظیر بر روی یک خط راست حرکت خواهد کرد .

نیرو و تارخنثی در واقع عکس هم نسبت به مرکز سطح می باشند :




| نیرو | تارخنثی |
|---|---|
| نقطه ← | خط |
| خط ← | نقطه |

مطلوب است تعیین هسته مرکزی یک مستطیل :

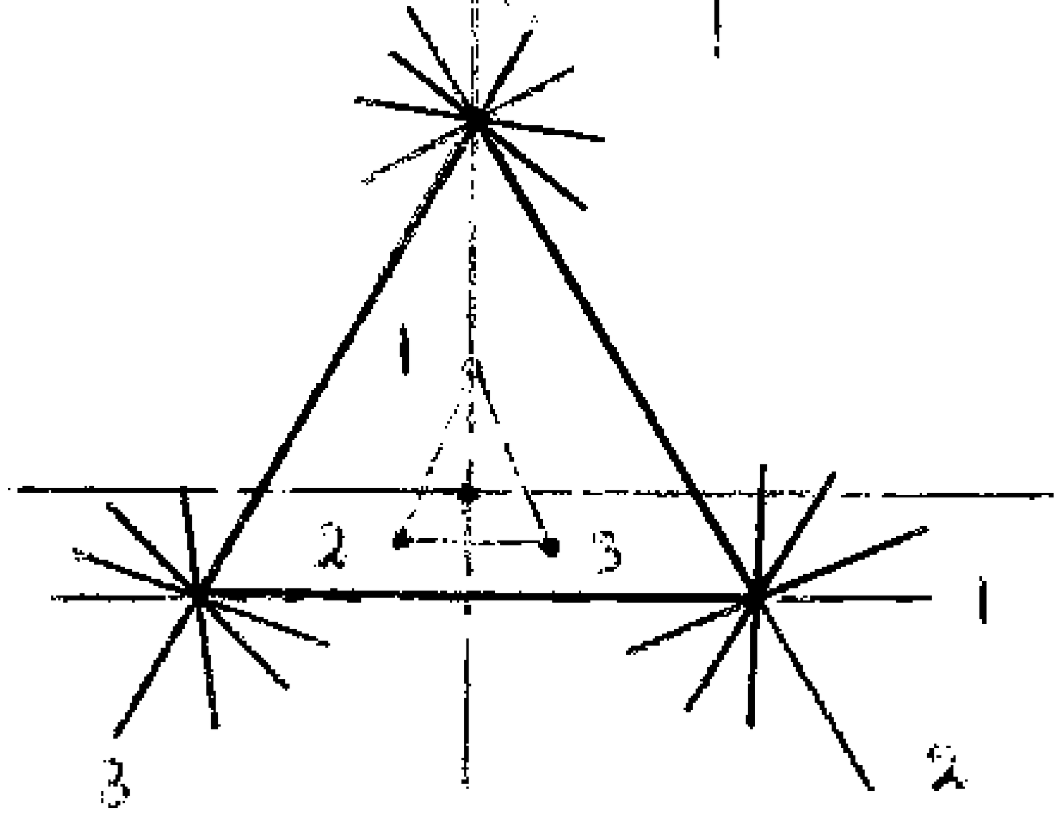


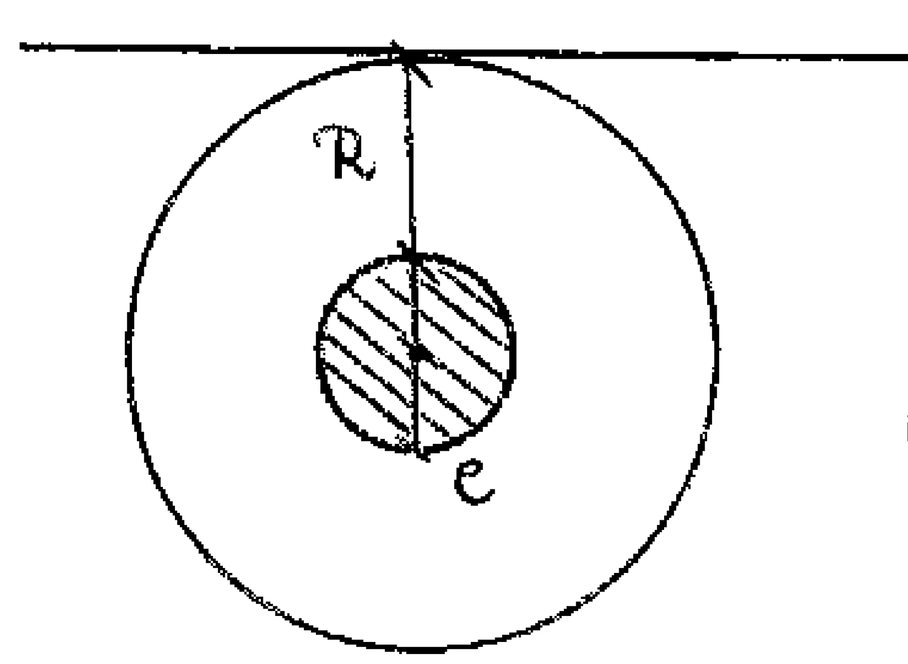

$$e \times \frac{h}{2} = \frac{bh^3/12}{bh} \longrightarrow e = \frac{h}{6}$$

هسته مرکزی یک [illegible] سطح مقطع [illegible] است

[illegible] دایره با شعاع [illegible] آن دایره [illegible] است

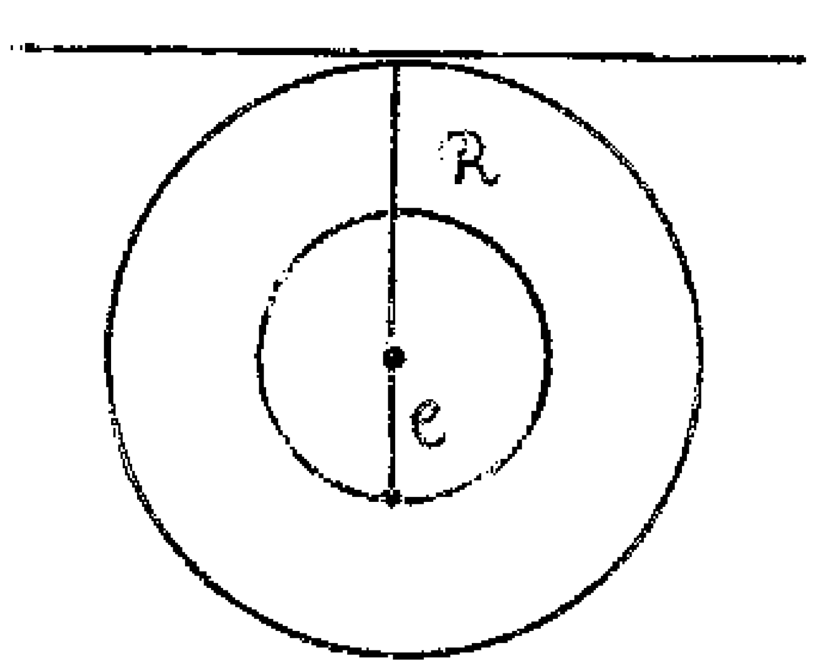
هسته مرکزی یک شکل متقارن قطعاً متقارن می باشد






$$e \times R = \frac{\pi R^4/4}{\pi R^2} \longrightarrow e = \frac{R}{4}$$

جدار نازک :

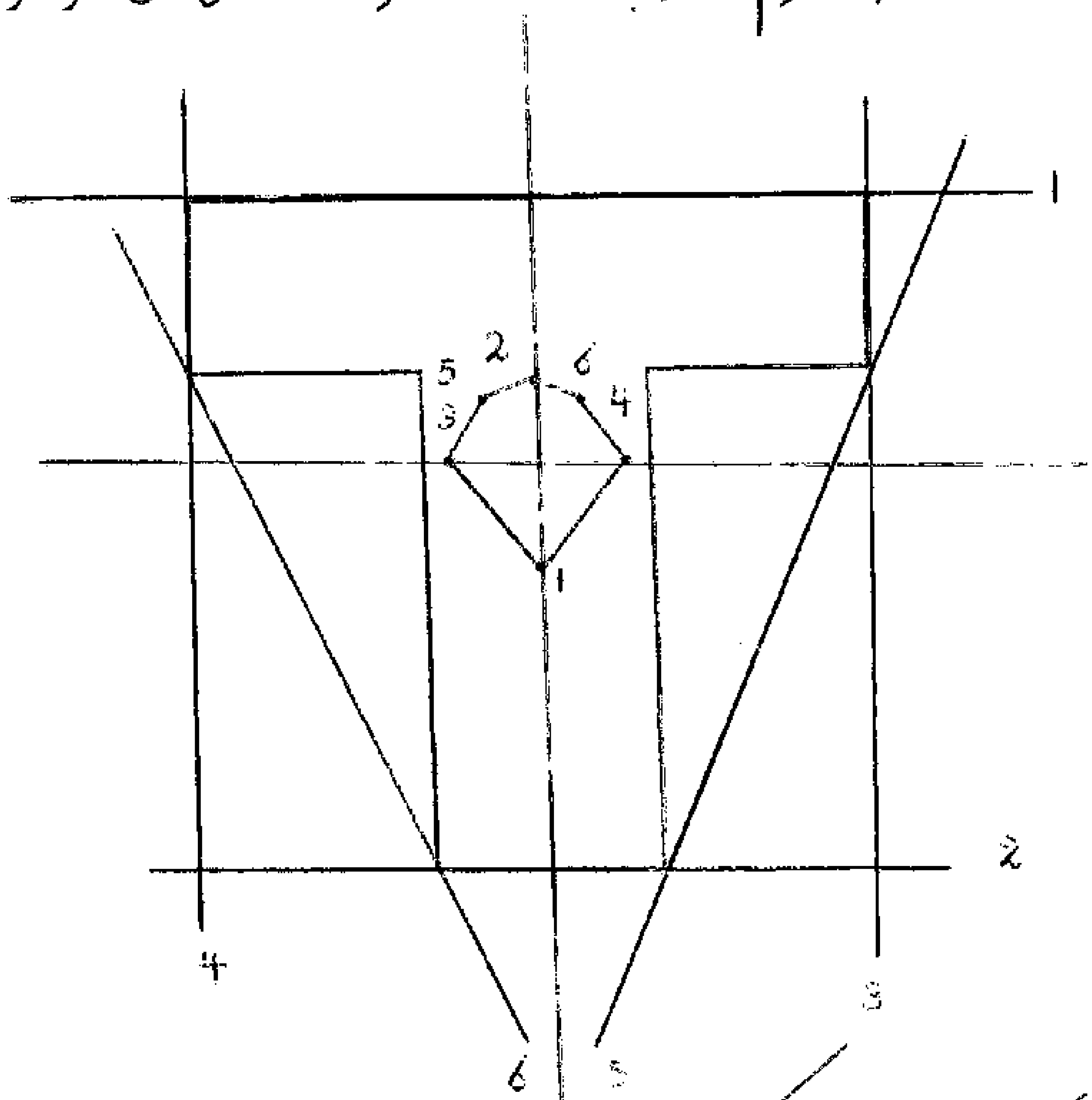



$$R \times e = \frac{\pi R^3 t}{2\pi R t} \longrightarrow e = \frac{R}{2}$$

تنظیم: محمد حاج صادقی

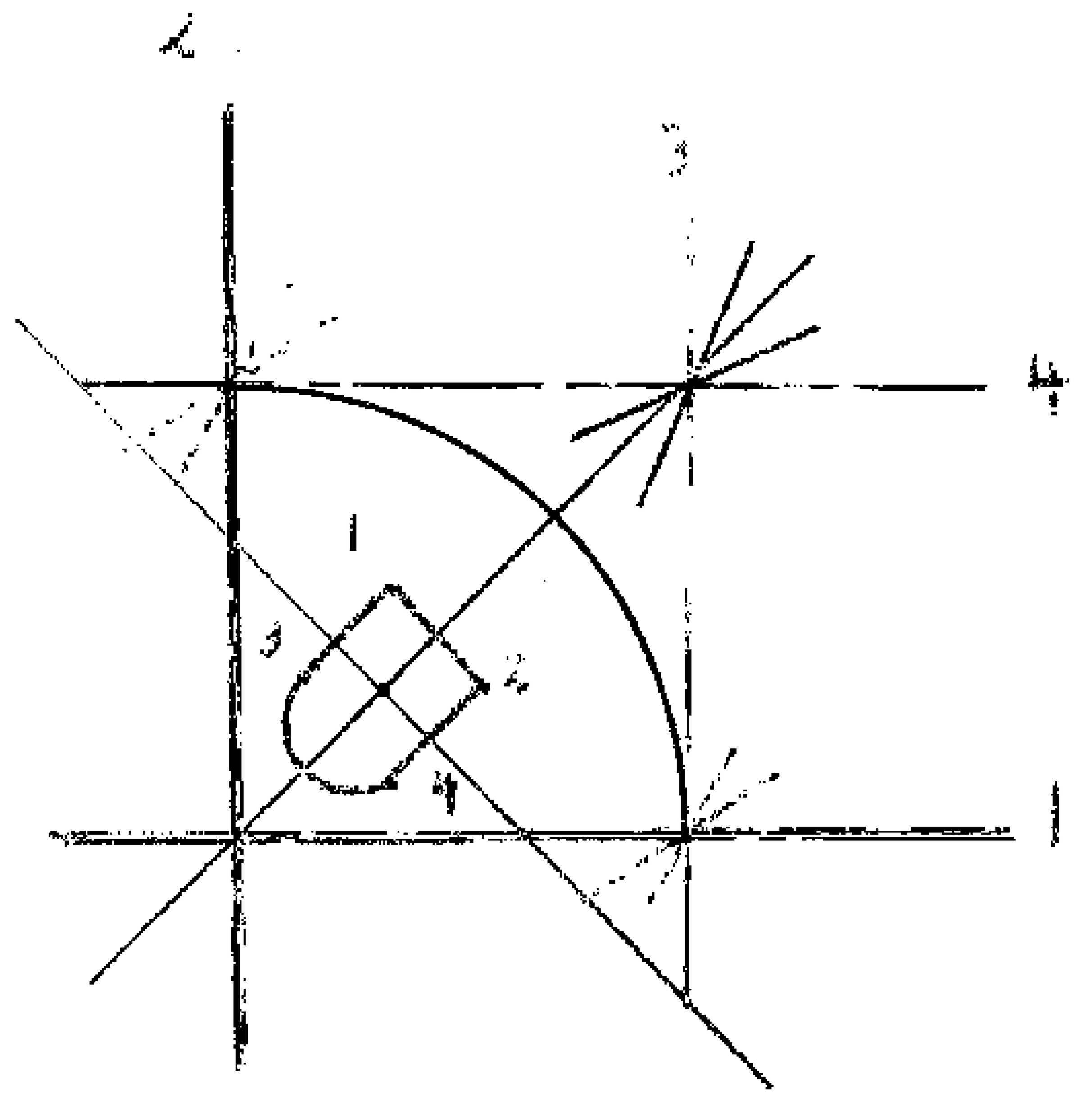
استاد: دکتر عرفانی

در مورد چند ضلعی های مقعر ابتدا یک n ضلعی محدب بر آن محیط می کنیم در نتیجه هستهٔ مرکزی یک n ضلعی ...




✳ یک شکل وقتی مقعر است که اگر دو نقطه داخل شکل انتخاب کنیم اگر پاره خط واصل آن دو را رسم کنیم پاره خط از خارج شکل رد شود. ✳

✳ هستهٔ مرکزی یک n ضلعی کاو ـ شرط n فرد ، هستهٔ مرکزی تصویر عناصر متقاطع می باشد ✳

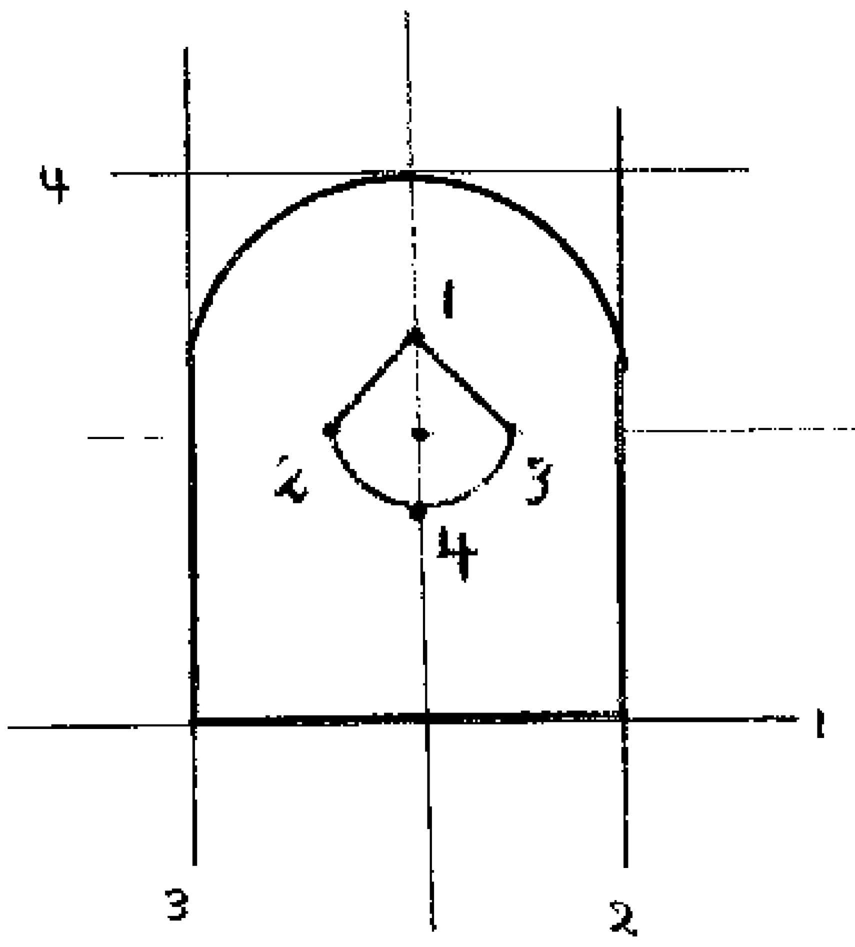


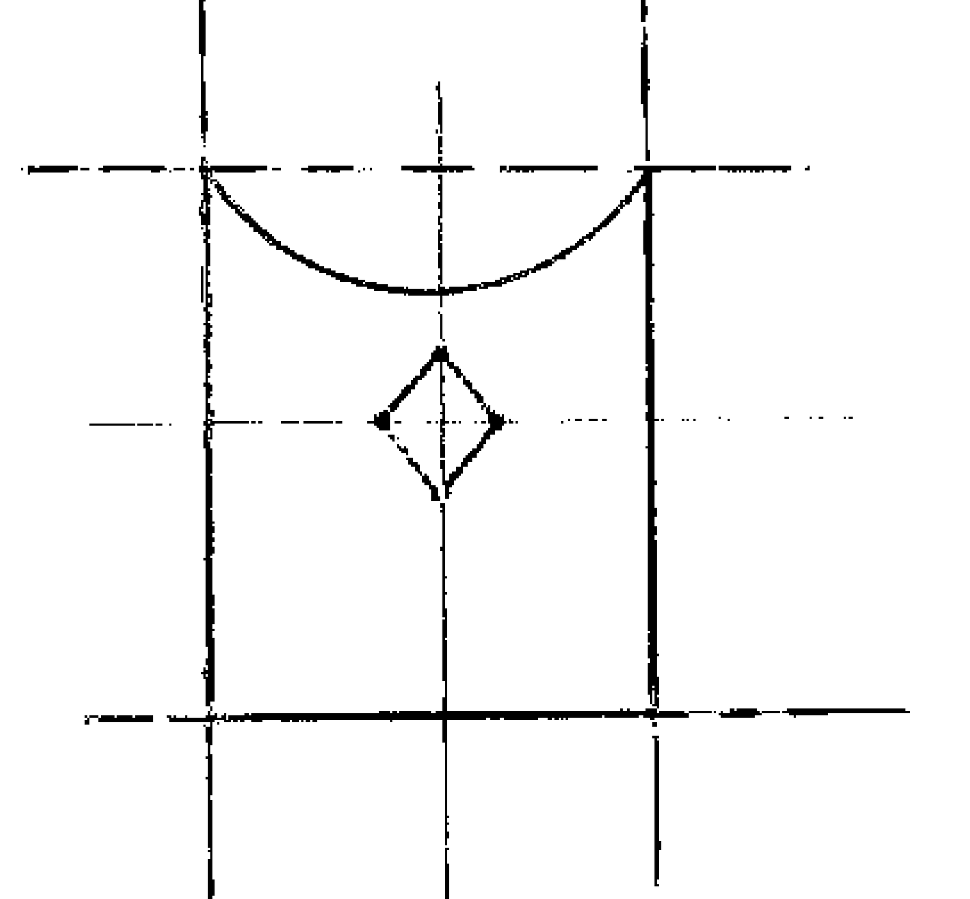

نقطه به خط تبدیل شده

و منحنی به منحنی

سه نقطه ⟵ سه خط

یک منحنی ⟵ یک منحنی



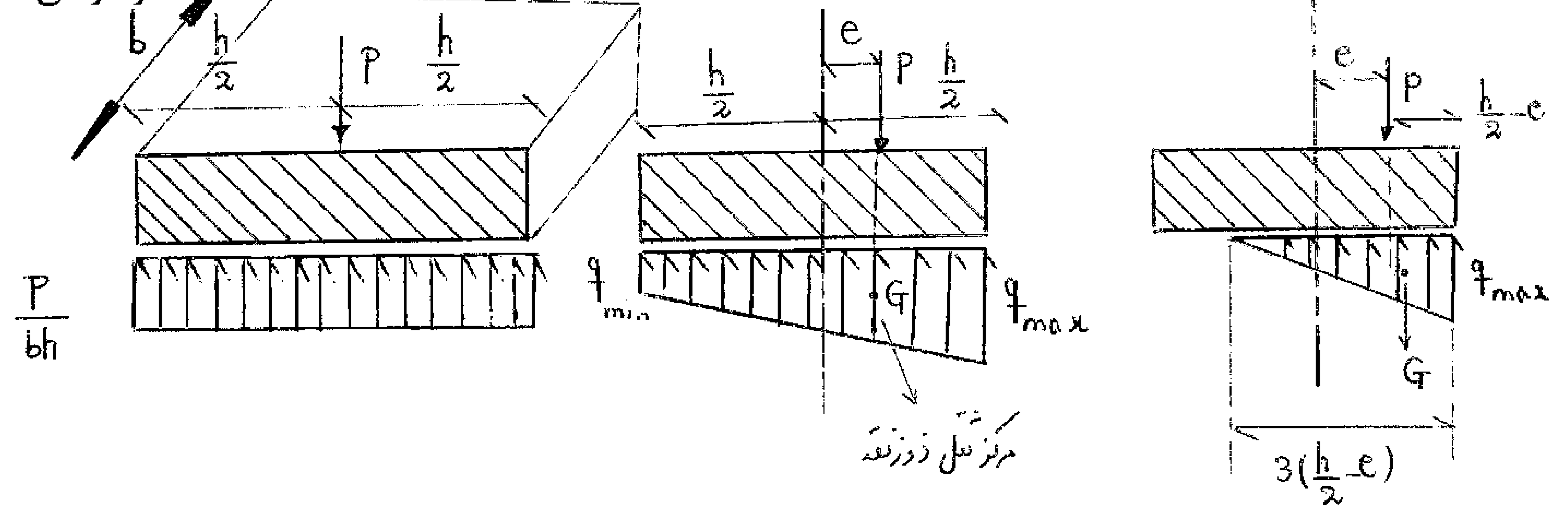



درهنگام رسم نقطه به خطوط محیطی توجه شود ، مثلاً اینکه سطح سوهان است.

اگر سیردی خارج از مرکز یک مقطع از نوع فشاری باشد می توان حالتی پیدا کرد که کلیه نقاط مقطع کششی باشد ولی می توان حالتی را در نظر گرفت که کلیه نقاط مقطع فشاری باشد و یا منحنی فشاری و منحنی کششی باشد. ( والسلام )

تنظیم: محمد حاج صادقی

استاد دکتر عرفانی




$$e \leqslant \frac{h}{6} \quad ; \quad \text{سطح ذوزنقه} = \frac{q_{max}+q_{min}}{2}\,h$$

$$\frac{q_{max} \times 3(h/2-e)}{2} \times b = P$$

$$q_{\substack{min\\max}} = P\left[\frac{1}{bh} + \frac{e}{\frac{bh^3}{12}}\left(\begin{matrix}-h/2\\+h/2\end{matrix}\right)\right] \qquad \longrightarrow q_{max} = ?$$

$$q_{\substack{min\\max}} = \frac{P}{A} \mp \frac{P.e}{W}$$

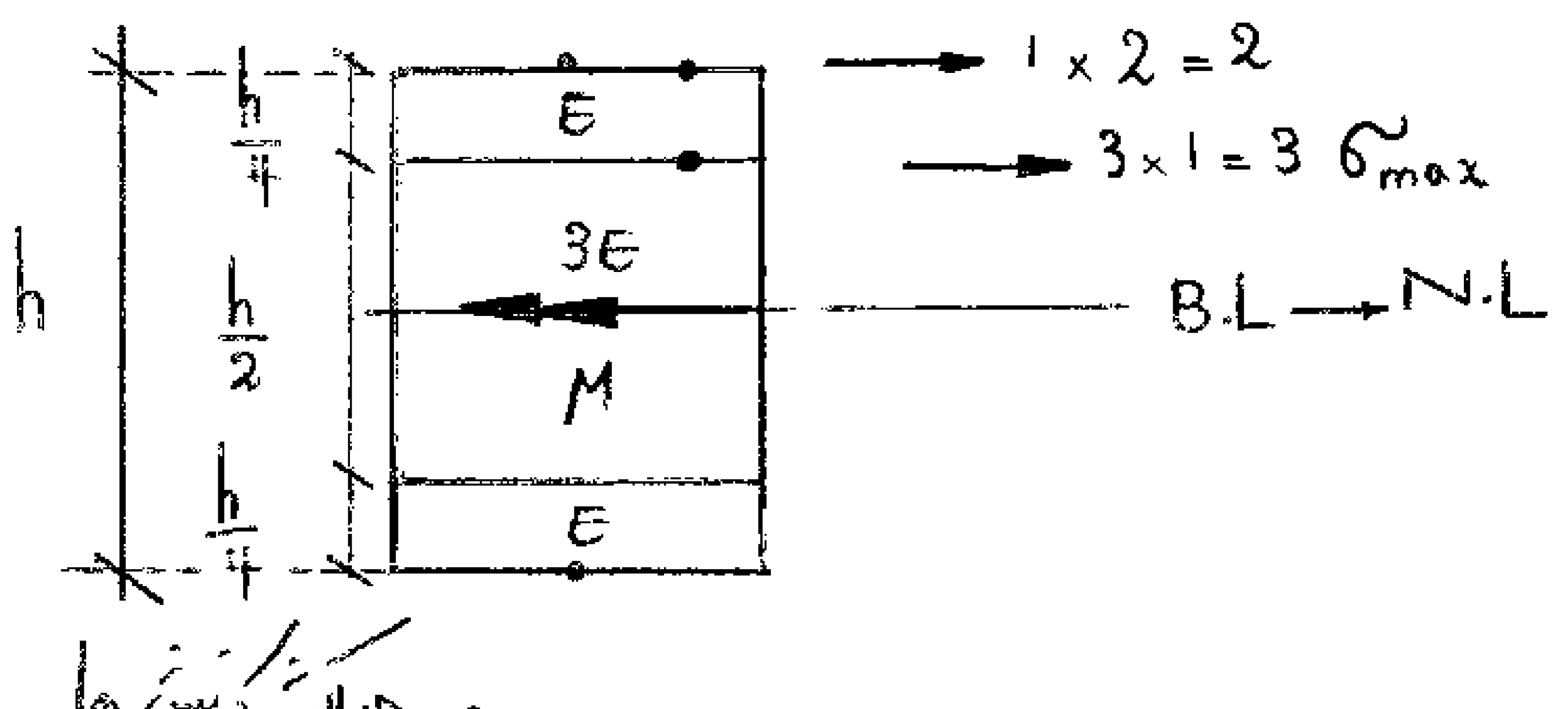
## مقاطع غیر همگن

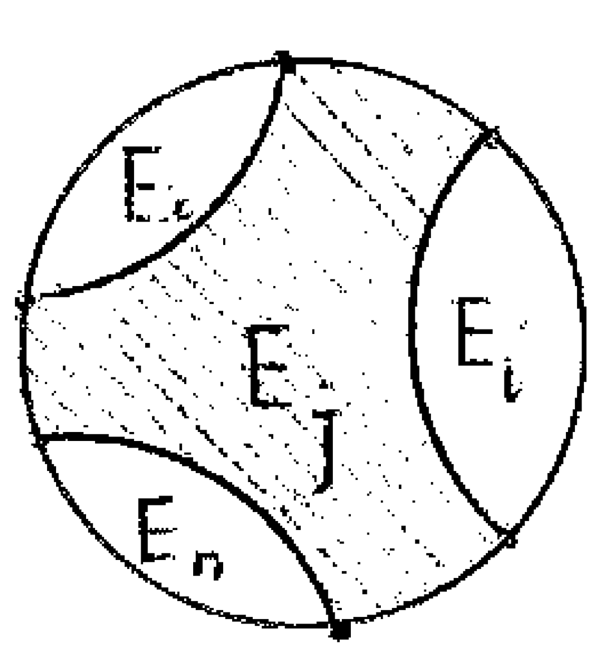
مقاطعی هستند که از قسمت های مختلفی با مدول الاستیسیته های غیر یکسان تشکیل شده‌اند ولی بدلیل اتصال آن قسمت ها یا هر دلیل دیگری یکپارچگی مقطع حفظ می‌شود یعنی فرضیه اساسی خمش مبنی بر مسطح ماندن مقاطع حفظ می شود.

یعنی توزیع کرنش همچنان خطی بوده و حداکثر کرنش ها در دورترین نقاط واقع می‌شوند ولی توزیع تنش پله‌ای خطی می باشد یعنی بر روی قسمت های مختلف خطی بوده و در مرز بین قسمت‌های مختلف یک تغییر ناگهانی پله‌ای به وجود می آید.

✳ بنابراین تنش متناسب است با حاصلضرب فاصله از تار خنثی در E آن نقاط. ✳

در نتیجه احتمال اینکه حداکثر تنش در مرزهای داخلی مقطع و بر روی قسمت های با E بزرگتر حاصل شود وجود دارد.




در چنین مقاطعی درصورتی که عمل همگن کردن نسبت به یکی از قسمت‌ها انجام گیرد روابط کلاسیک خمش حاکم خواهد بود یعنی می‌توان نوشت:

$$\sigma_i = \left(\frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y}z - \frac{M_z}{I_z}y\right) \times n_i$$

$$n_i = \frac{E_i}{\underset{\text{قسمت مبنا}}{E_0}} \qquad \text{ضریب همگنی}$$

در محاسبهٔ مشخصات هندسی همگن شدهٔ مقطع کافی است به جای مساحت های واقعی از مساحت های همگن شده استفاده کنیم: دکتر پورزینالی

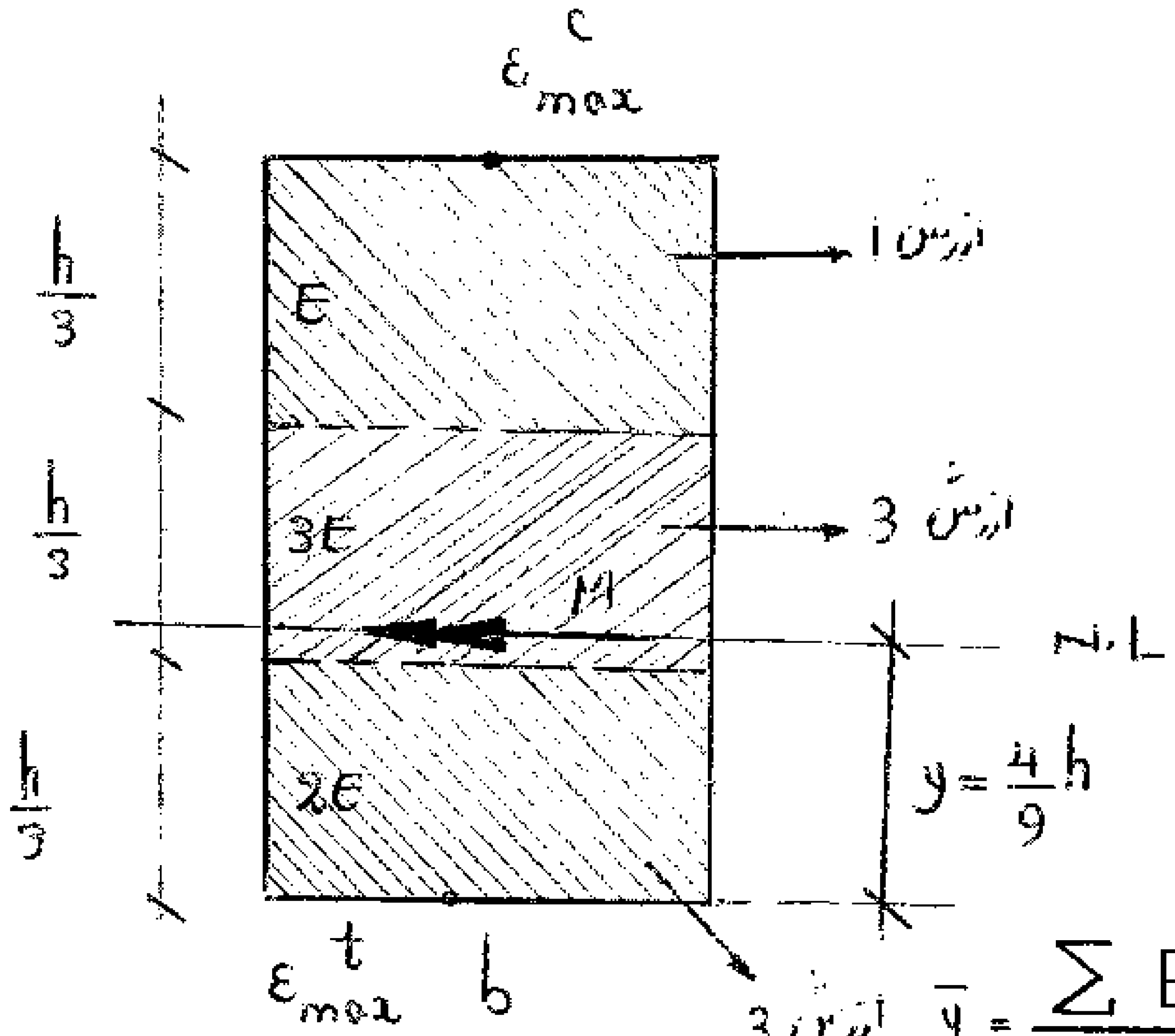
$$\boxed{\begin{aligned} EA &= \sum E_i A_i = E_\phi \times \bar{A} \\ EI &= \sum E_i I_i = E_\phi \times \bar{I} \end{aligned}}$$

مطلوب است نسبت کرنش فشاری حداکثر به کرنش کششی حداکثر.

نسبت تنش فشاری حداکثر به تنش کششی حداکثر:

نسبت تنش کششی حداکثر به کرنش کششی حداکثر:

نسبت تنش فشاری حداکثر به کرنش فشاری حداکثر.




اگر خمش را مثبت فرض کنید:

$$\bar{y} = \frac{\sum E_i A_i y_i}{\sum E_i A_i}$$

b را مساوی 1 فرض می‌کنیم (تأثیری ندارد)

$\frac{h}{3}$ را مساوی یک می‌گیریم:

$$\bar{y} = \frac{1\times1\times2\times\frac{1}{2} + 1\times1\times3\times1.5 + 1\times1\times1\times2.5}{1\times1\times2 + 1\times1\times3 + 1\times1\times1} \times \frac{h}{3} = \frac{4}{9}h$$

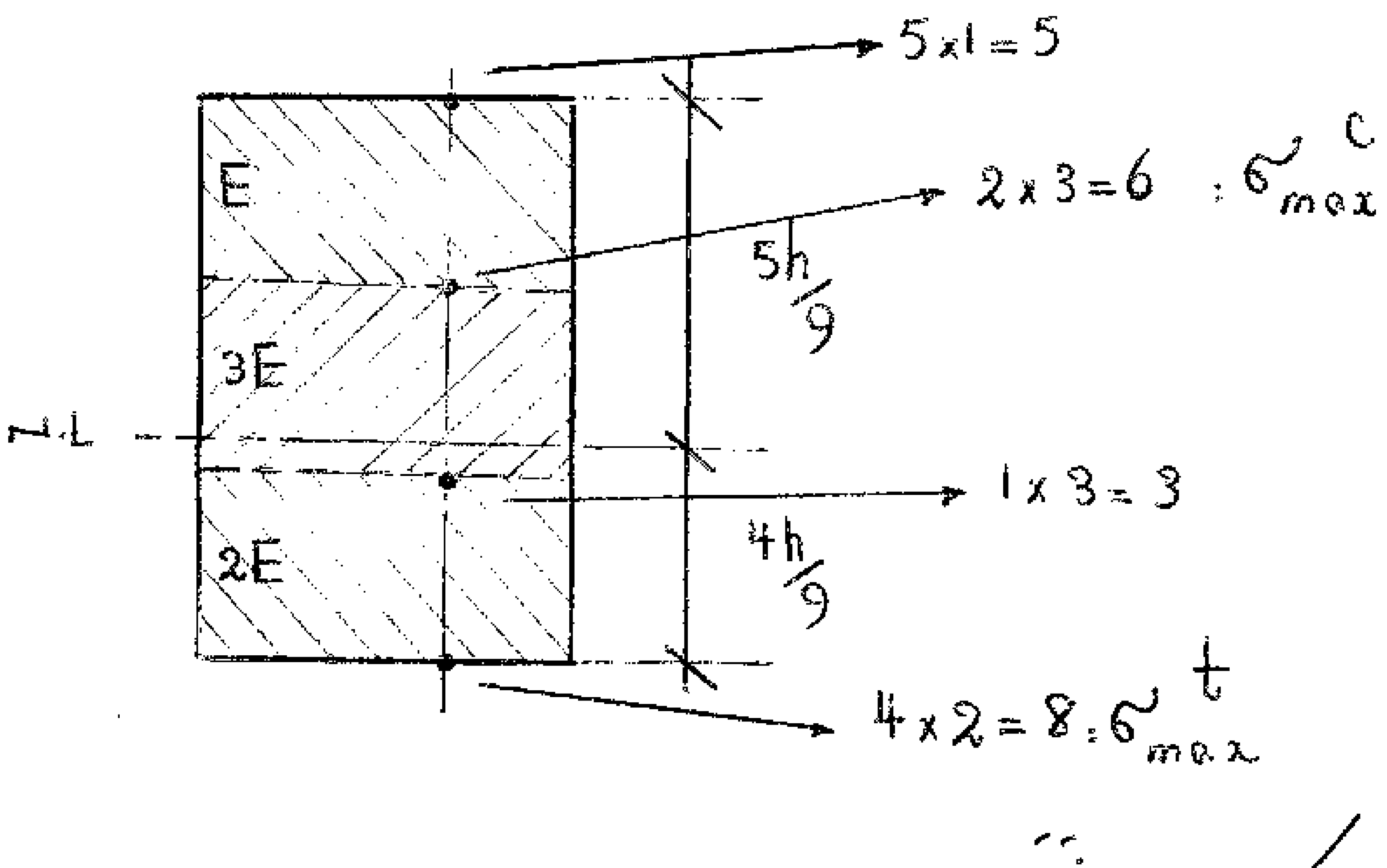
مساحتی $\quad y: \quad \dfrac{1\times3\times1\times1.5 + 1\times1\times2\times1/2 + 1\times1\times1\times2.5}{1\times3\times1 + 1\times1\times1 + 1\times2\times1} \times \dfrac{h}{3} = \dfrac{4}{9}h$

1 – $\dfrac{\varepsilon_{max}^{c}}{\varepsilon_{max}^{t}} = \dfrac{5}{4}$

2 – $\dfrac{\sigma_{max}^{t}}{\sigma_{max}^{c}} = \dfrac{8}{6} = \dfrac{4}{3}$

3 – $\dfrac{\sigma_{max}^{t}}{\varepsilon_{max}^{t}} = 2E$ (در یک نقطه اند)

4 – $\dfrac{\sigma_{max}^{c}}{\varepsilon_{max}^{c}} = \dfrac{\frac{2h}{9}\times 3E}{\frac{5h}{9}} = \dfrac{6}{5}E$



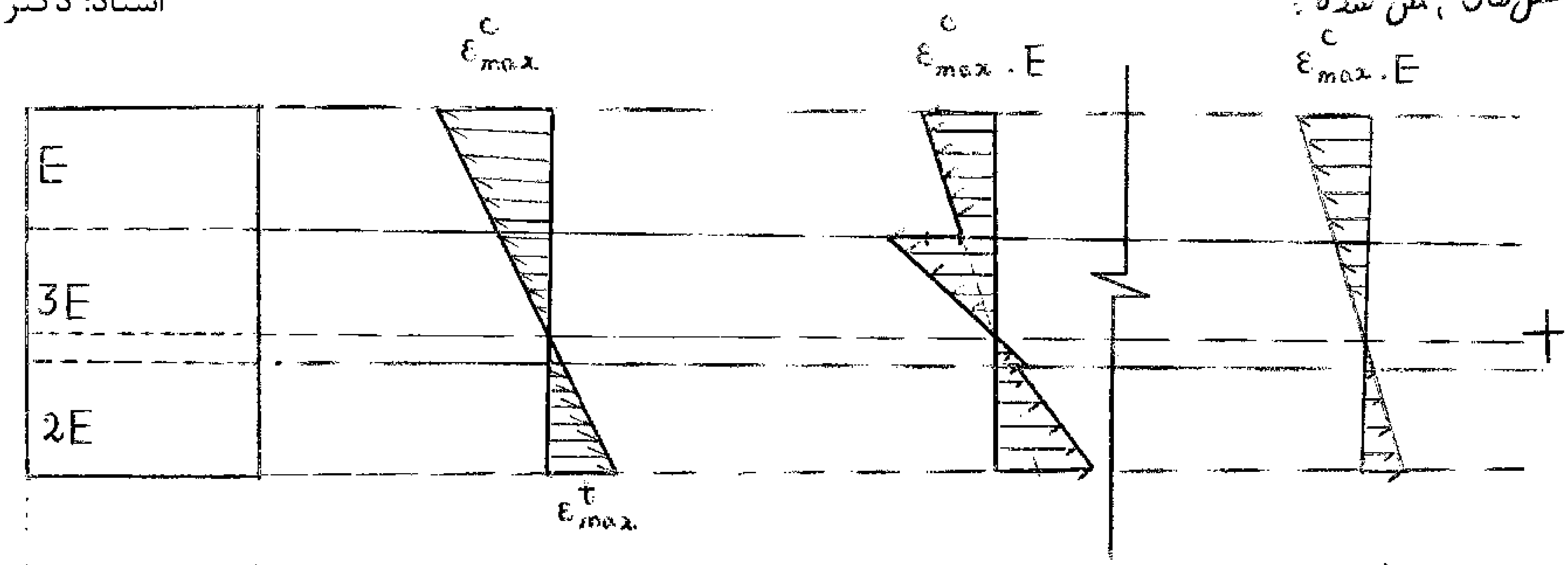

ممان اینرسی حول مرکز دو بعد از انتقال

$$EI = E\left[\frac{b(\frac{h}{3})^3}{12} + (b\frac{h}{3})(\frac{5h}{9} - \frac{1.5h}{9})^2\right] + 3E[\;\;] + 2E[\;\;]$$

تنظیم: محمد حاج صادقی

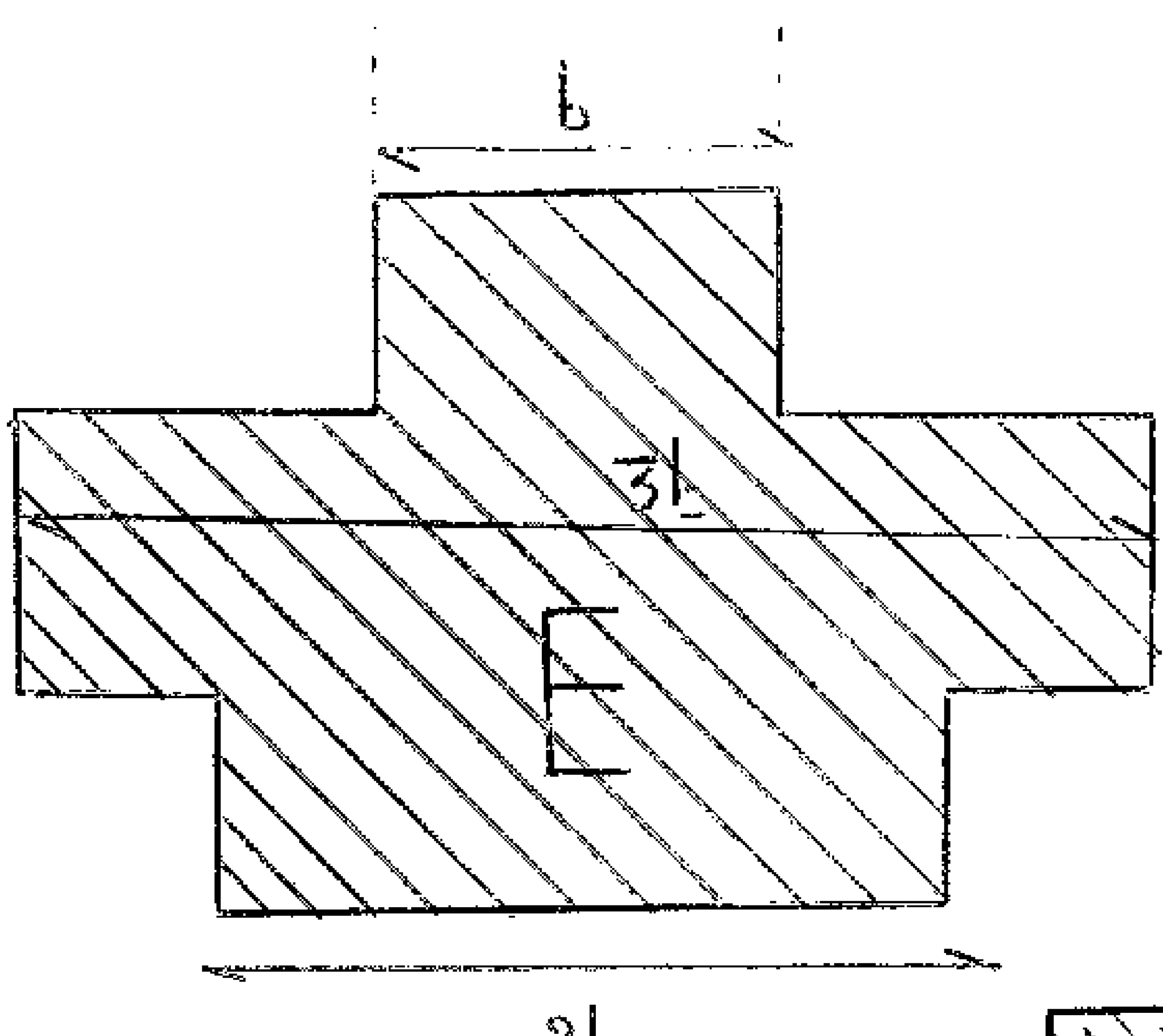
استاد: دکتر عرفانی

رسم شکل‌های همگن شده :



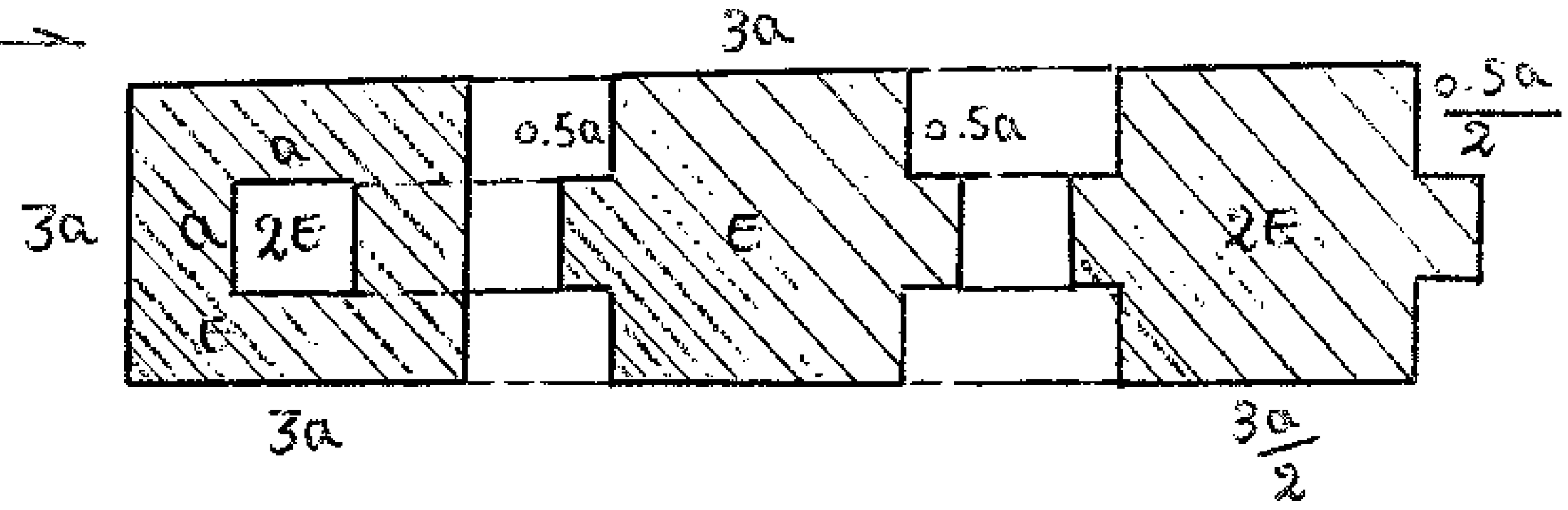

ε متناسب با فاصله از تار خنثی  *  σ متناسب با فاصله از تار خنثی در E

در رسم شکل‌های همگن شده عرض مقاطع را به نسبت ارزش آن قسمت‌ها تغییر می‌دهیم ولی ارتفاع‌ها را ثابت نگه می‌داریم .

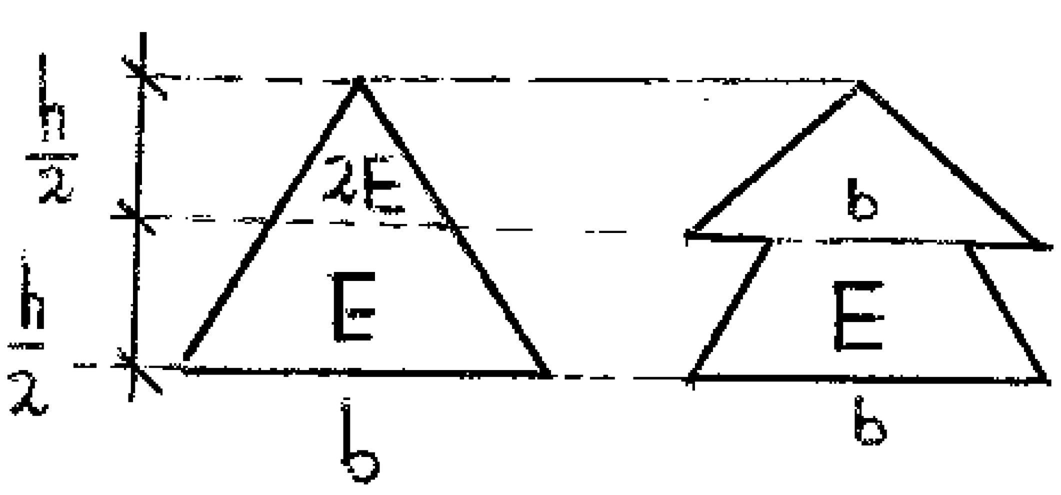


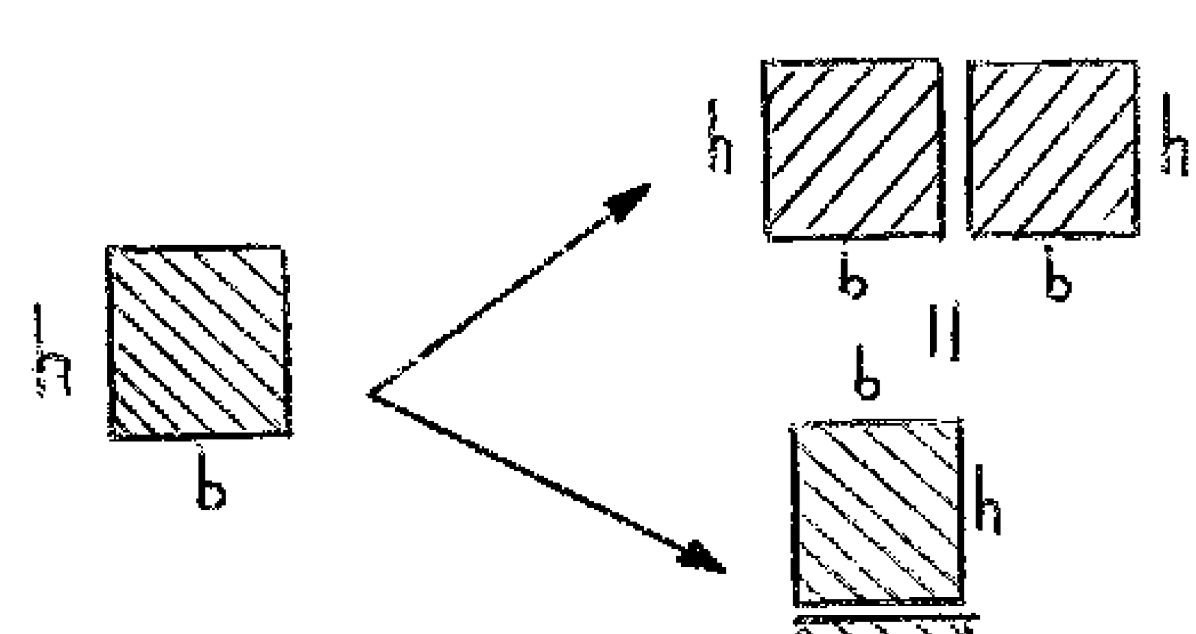

شکل همگن شده

بدیهی است که رسم شکل همگن شده فقط در خمش تک محوره امکان پذیر است .




ترکیب مقاطع .




از نظر سختی و مقاومت خمشی چه اتفاقی می‌افتد

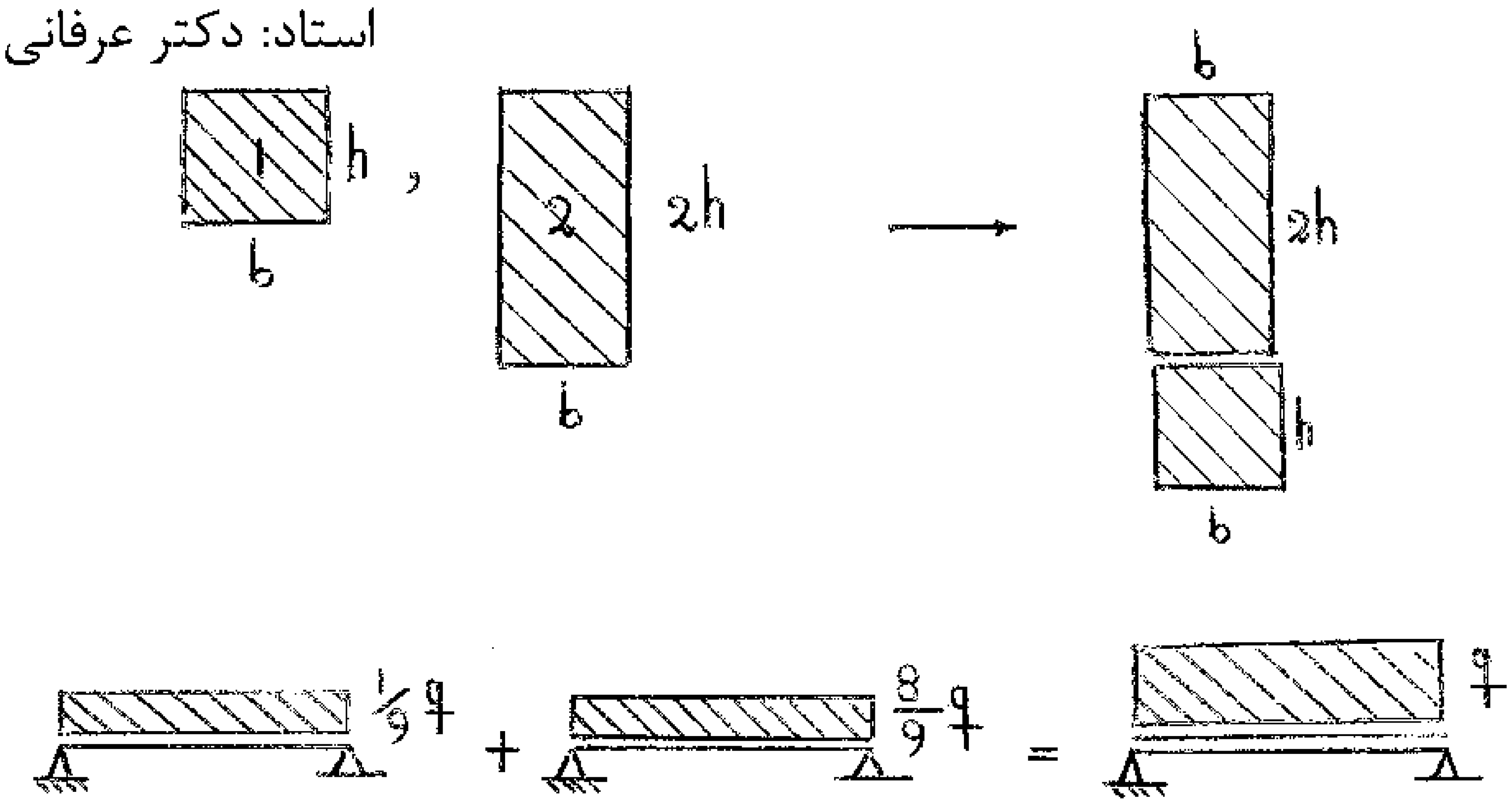
سختی خمشی ⟵ هر دو ، دو برابر می‌شود .

* چون با روی هم گذاری تیرها تغییر شکل هر یک تارهای تمام یکسان می‌شود بنابراین اتصال آن‌ها مساوی بوده پس در سختی خمشی

* آن‌ها با هم جمع می‌شود و بار به نسبت سختی بین آن‌ها توزیع می‌شود .

تنظیم: محمد حاج صادقی

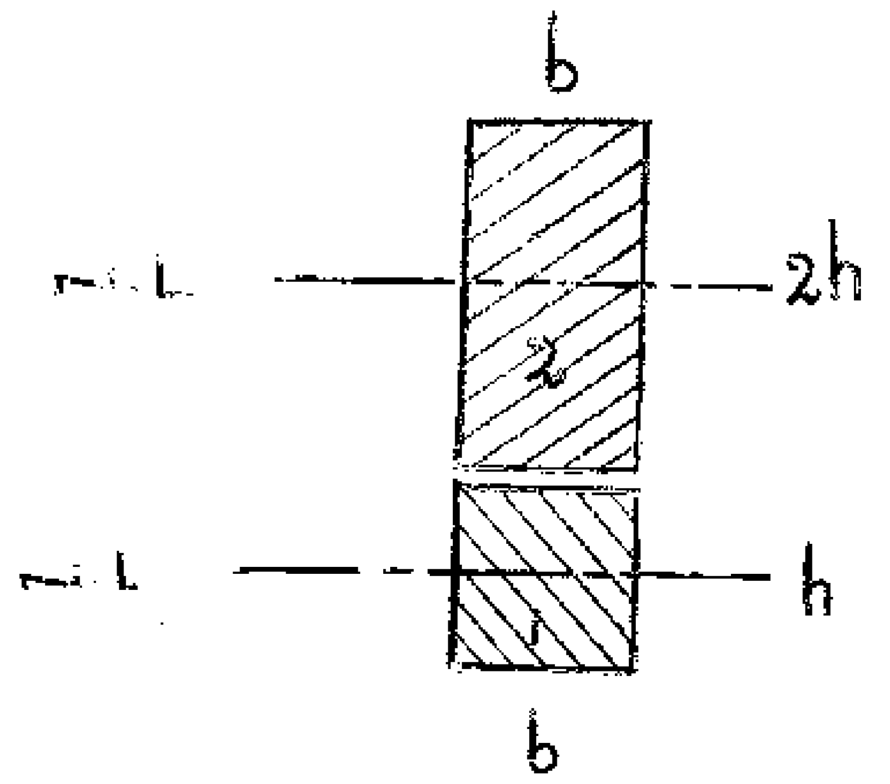
استاد: دکتر عرفانی




$$* \ EI = EI_1 + EI_2$$

تذکر: اگر دو تیر ۱ و ۲ که روی هم قرار دهیم ولی با بستهای کاری کنیم که تغییر شکل دو تیر یکسان شود مشابه حالت روی هم گذاری تیرها خواهد بود.

* در ترکیب فوق اگر دو تیر ۱ و ۲ هم‌جنس فرض شوند تحت بار فزاینده q تنش در کدام قسمت به حد مجاز می‌رسد.




$$* \ y_1'' = y_2'' \longrightarrow \varepsilon^2_{max} = 2\varepsilon^1_{max} \longrightarrow \sigma^2_{max} = 2\sigma^1_{max} \ *$$

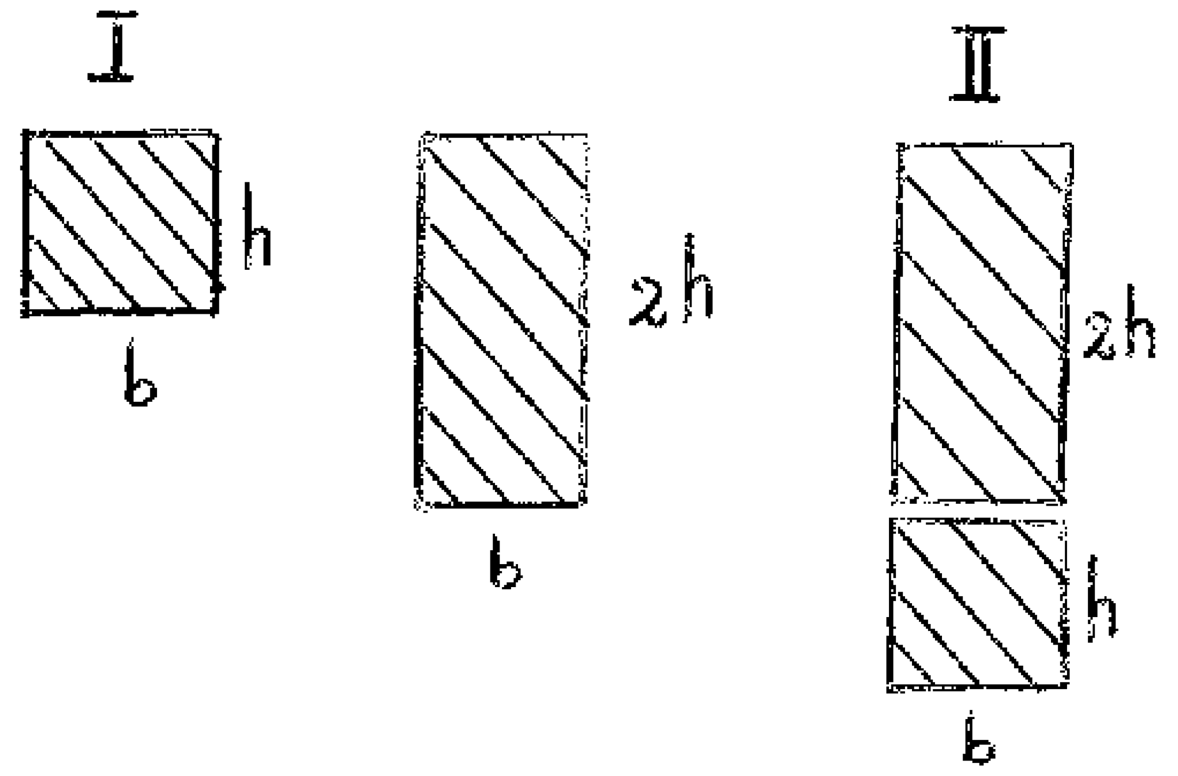
$$* \ \varepsilon = \frac{C}{\rho} \ *$$

جنس 2 زودتر به تسلیم می‌رسد.

از لحاظ ممان تقسیم بر W

$$\left(\frac{8}{\frac{8}{2}}\right) / \left(\frac{1}{\frac{1}{1}}\right) = 2$$

در ترکیب فوق مقاومت خمشی به چه نسبتی تغییر می‌کند:




$$\boxed{\frac{\text{مقاومت } II}{\text{مقاومت } I} = \frac{\sigma_{max} I}{\sigma_{max} II}}$$

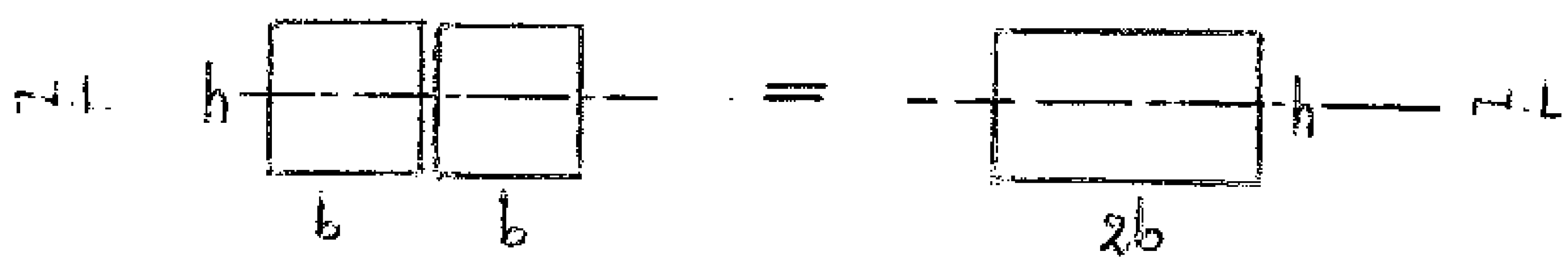
$$\frac{\text{مقاومت } II}{\text{مقاومت } I} = \text{تحت تنش یکسان } \frac{(\sigma_{max})_I}{(\sigma_{max})_{II}} = \frac{M/w}{\frac{8M/9}{4W}} = 4.5$$

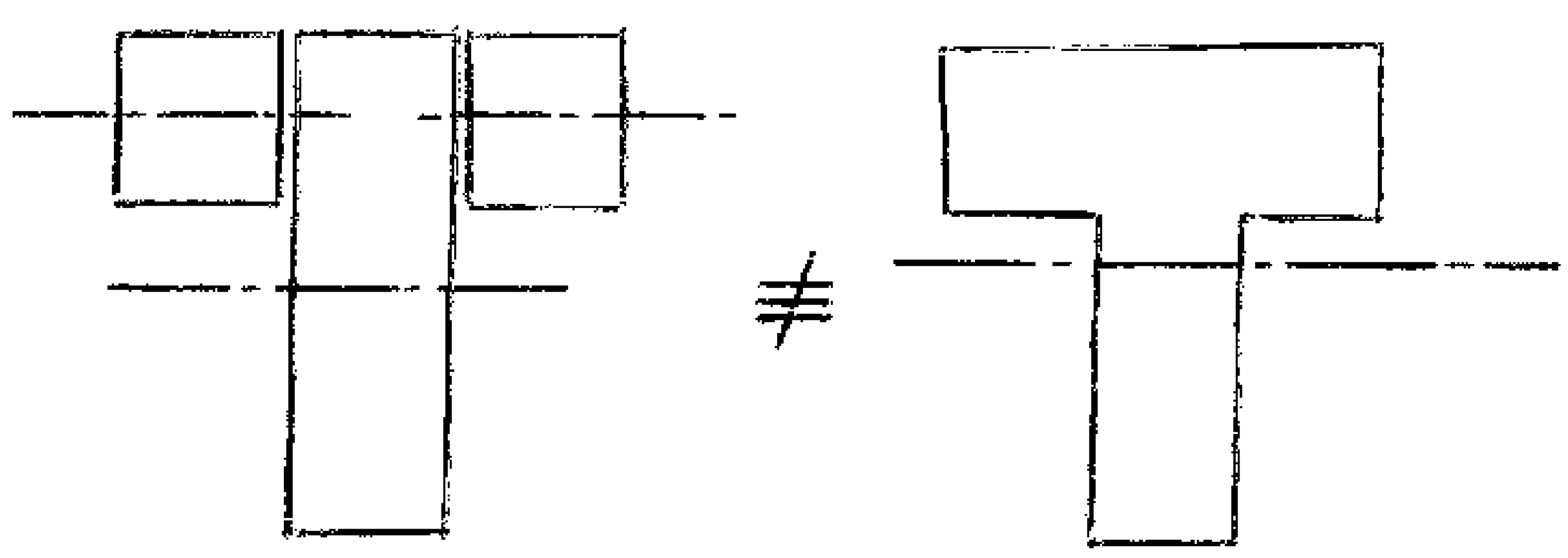
با تنش مجاز یکسان

$$\boxed{\frac{M \text{ مقاوم } II}{M \text{ مقاوم } I} = \frac{4M \times 9/8}{M} = 4.5}$$

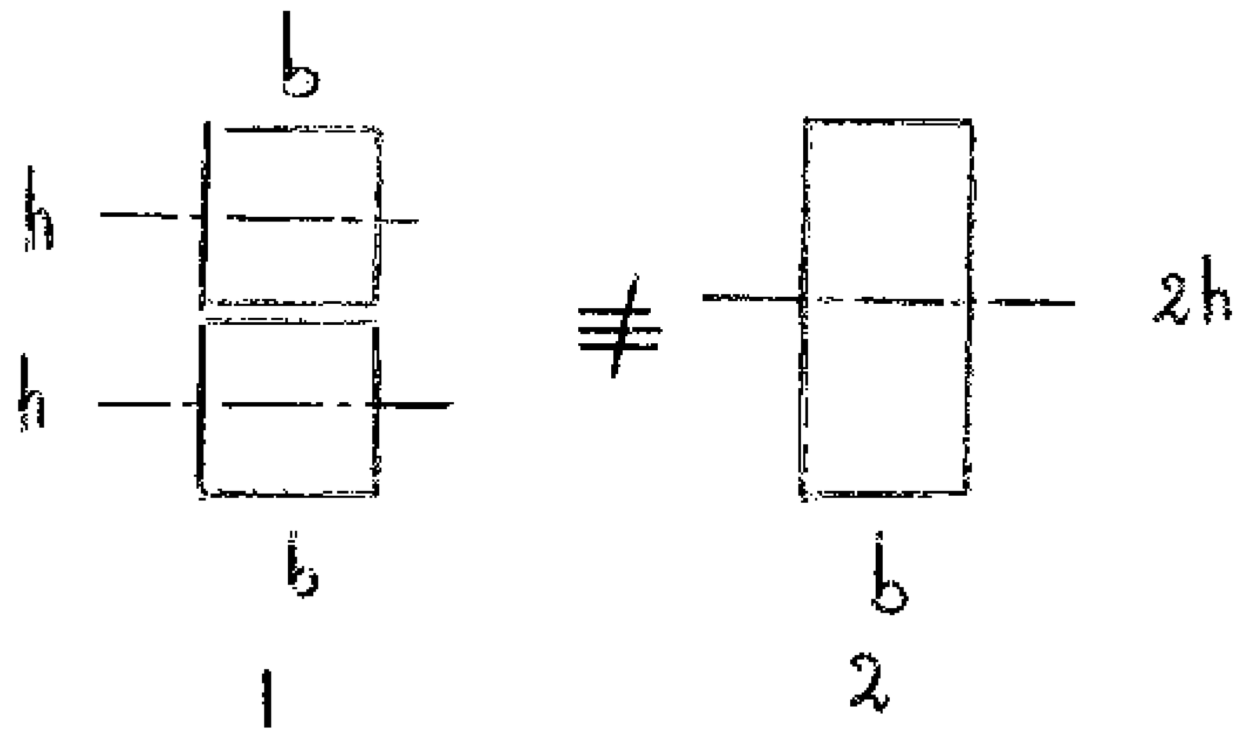
استاد: دکتر عرفانی

اگرچه قسمت‌ها به هم چسبانده شوند کل مقطع یک تار خنثی خواهد داشت. اگر موقعیت این تار خنثی نسبت به موقعیت تار خنثی‌های یکایک قسمت‌ها قبل از عمل چسباندن تغییر کند خواص مقطع تغییر خواهد کرد در غیر این صورت خواص مقطع دچار تغییر نخواهد شد:



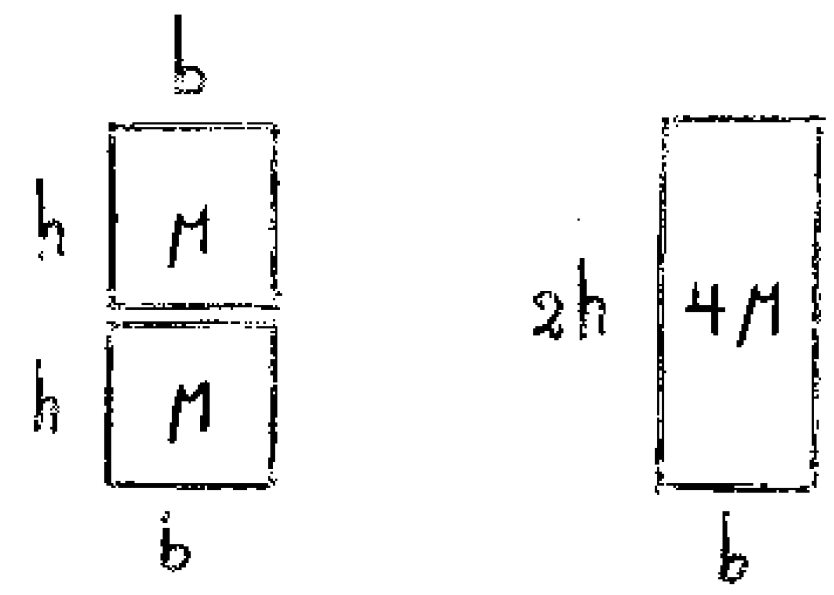

نسبت سختی و مقاومت خمشی چقدر تغییر کرده است:




$$(EI)_1 = 2\,\frac{bh^3}{12}$$

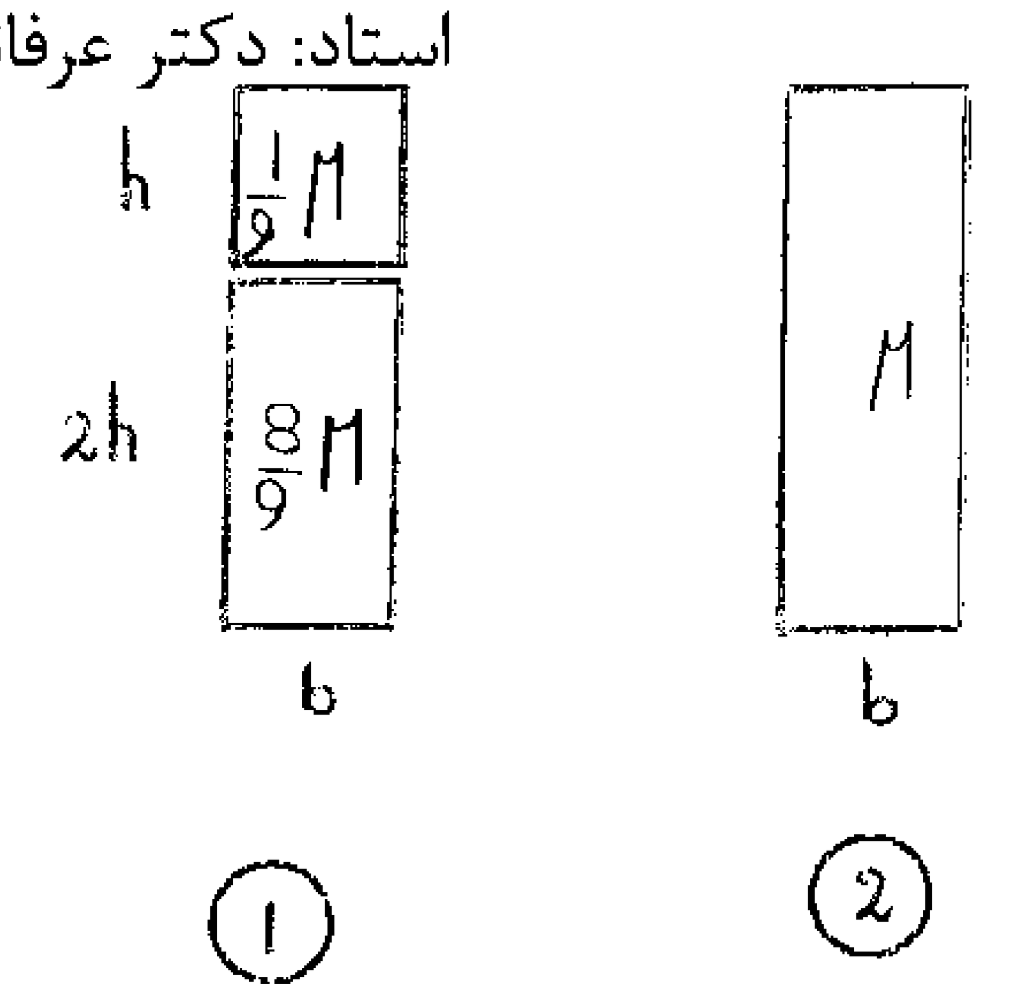
$$(EI)_2 = \frac{b(2h)^3}{12} \longrightarrow \frac{EI_2}{EI_1} = 4$$

$$\frac{2\ \text{مقاومت}}{1\ \text{مقاومت}} = \frac{4}{2} = 2$$



تنظیم: محمد حاج صادقی

استاد: دکتر عرفانی




3h

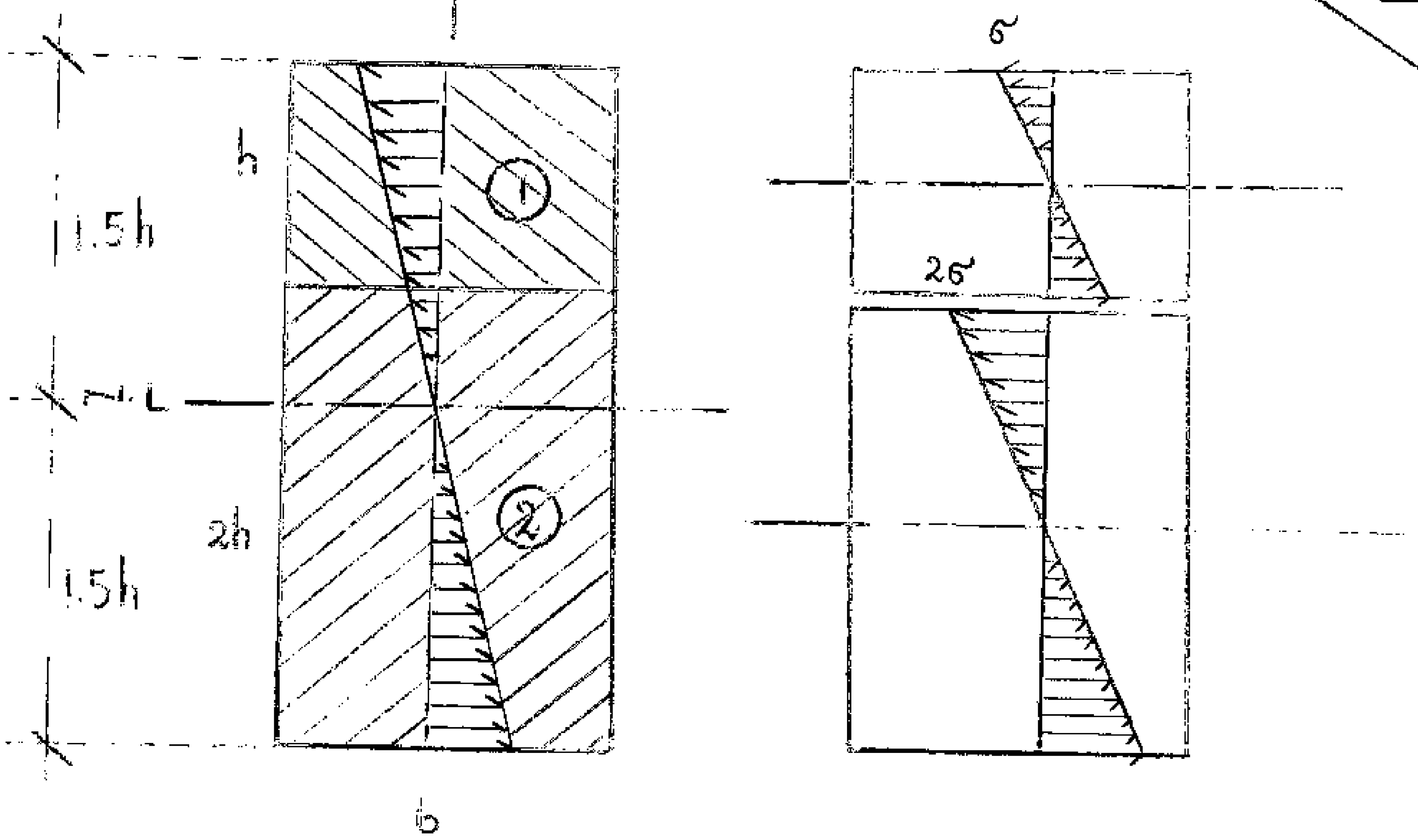
$$\frac{EI_1}{EI_2} = \frac{\frac{bh^3}{12} + \frac{b(2h)^3}{12}}{\frac{b(3h)^3}{12}} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{I \text{ مقاومت}}{II \text{ مقاومت}} = \frac{9/8}{2.25} = \frac{1}{2} \quad \boxed{*}$$

* لنگر همواره به نسبت EI بین قسمت‌های مختلف توزیع می‌شود که اگر مقطع از چند قسمت جدا گانه تشکیل شده باشد (با هم یکسان)

در این حالت همان اصولی بر حسب نسبت ... لنگر خمشی خود کاسته می‌شود ولی در صورتی که مقطع یکپارچه باشد به اصولی ها نیست

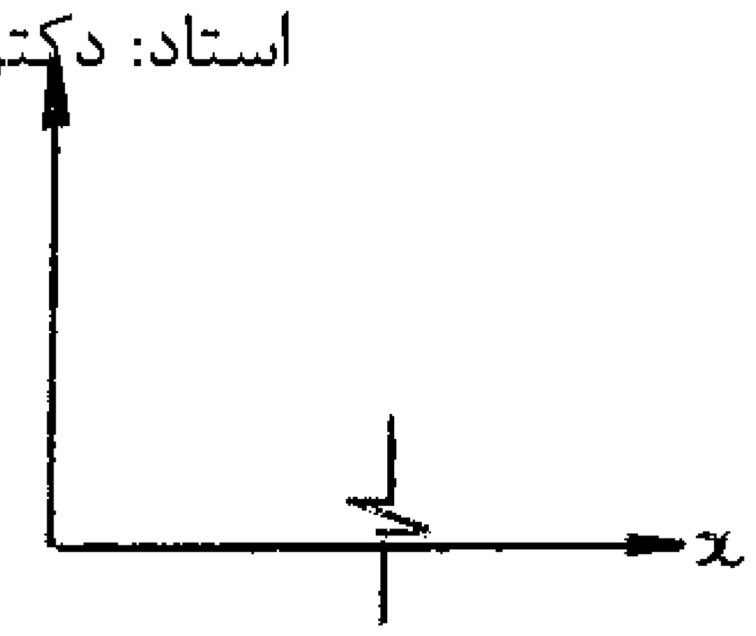
* ... ولی در آن مقطع کاسته می‌شود.

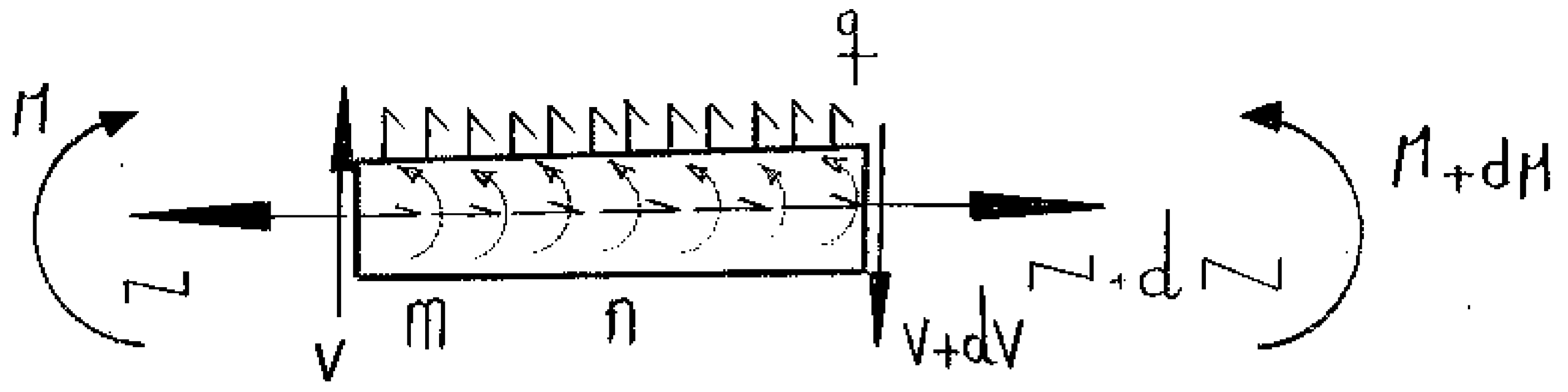


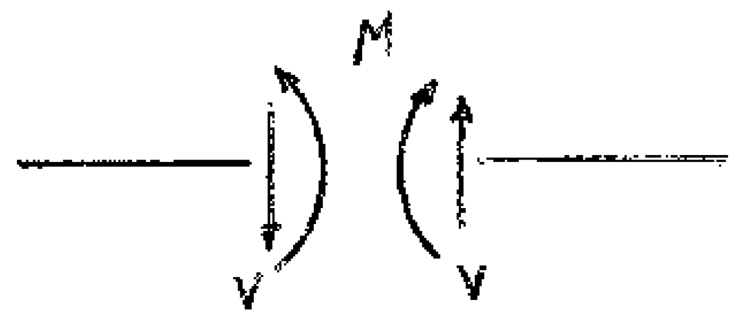

$$\frac{M_1}{M} = \frac{\frac{bh^3}{12} + bh \times h^3}{\frac{b(3h)^3}{12}} = \frac{13}{27}$$

$$\frac{M_1}{M_{\text{کل}}} = \frac{I_1}{I} \qquad \frac{M_1}{M} = \frac{I_1}{I} = \frac{\frac{bh^3}{12}}{\frac{bh^3}{12} + \frac{b(2h)^3}{12}} = \frac{1}{9}$$

**برش :**




$$\frac{dM}{dx}=V$$

$$dN=-n\,dx \longrightarrow \frac{dN}{dx}=-n$$

$$dV=q\,dx \longrightarrow \frac{dV}{dx}=q$$

$$dM=(V-m)dx \longrightarrow \frac{dM}{dx}=V-m$$

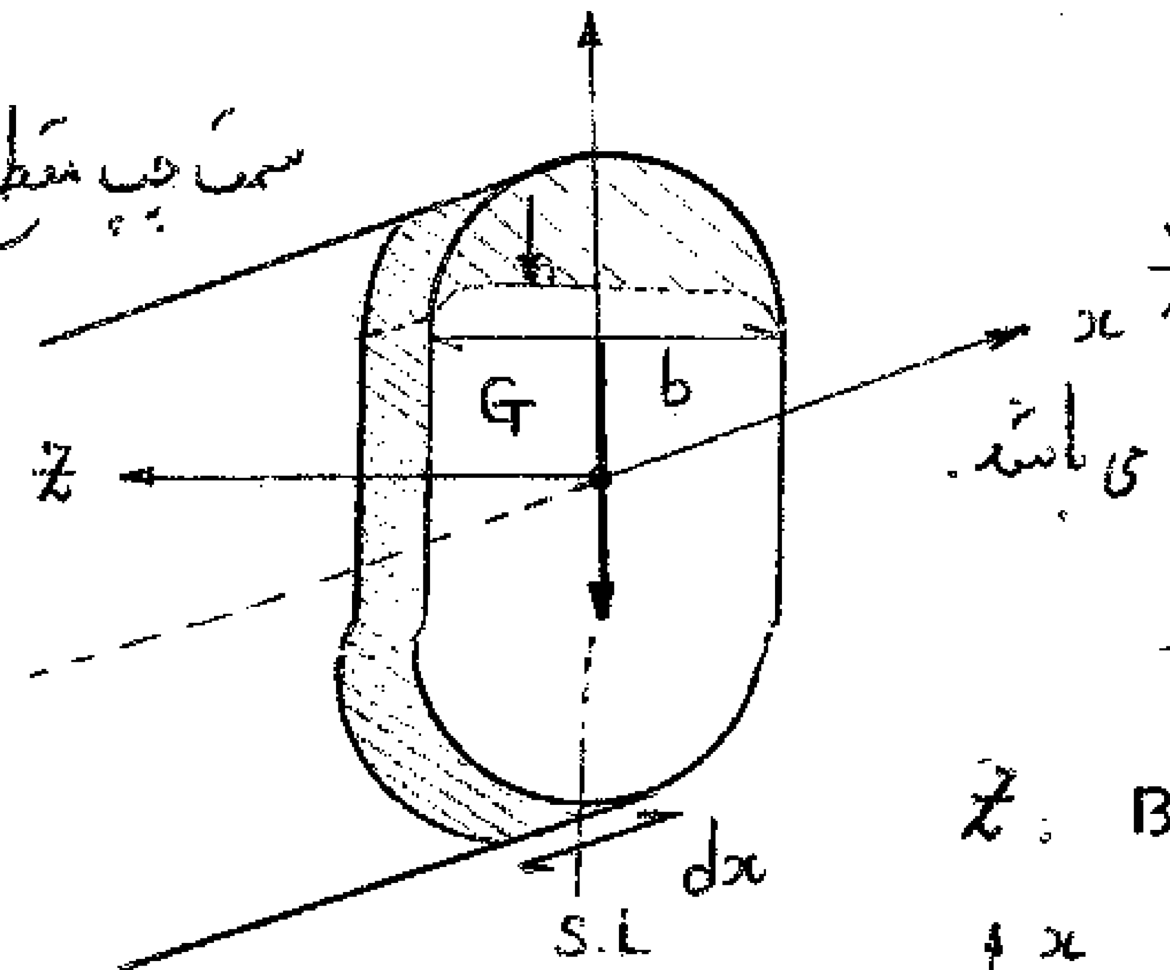
**فرض های برش**

فرض اول : در مقاطع تحت برش خالص فقط تنش برشی وجود دارد .

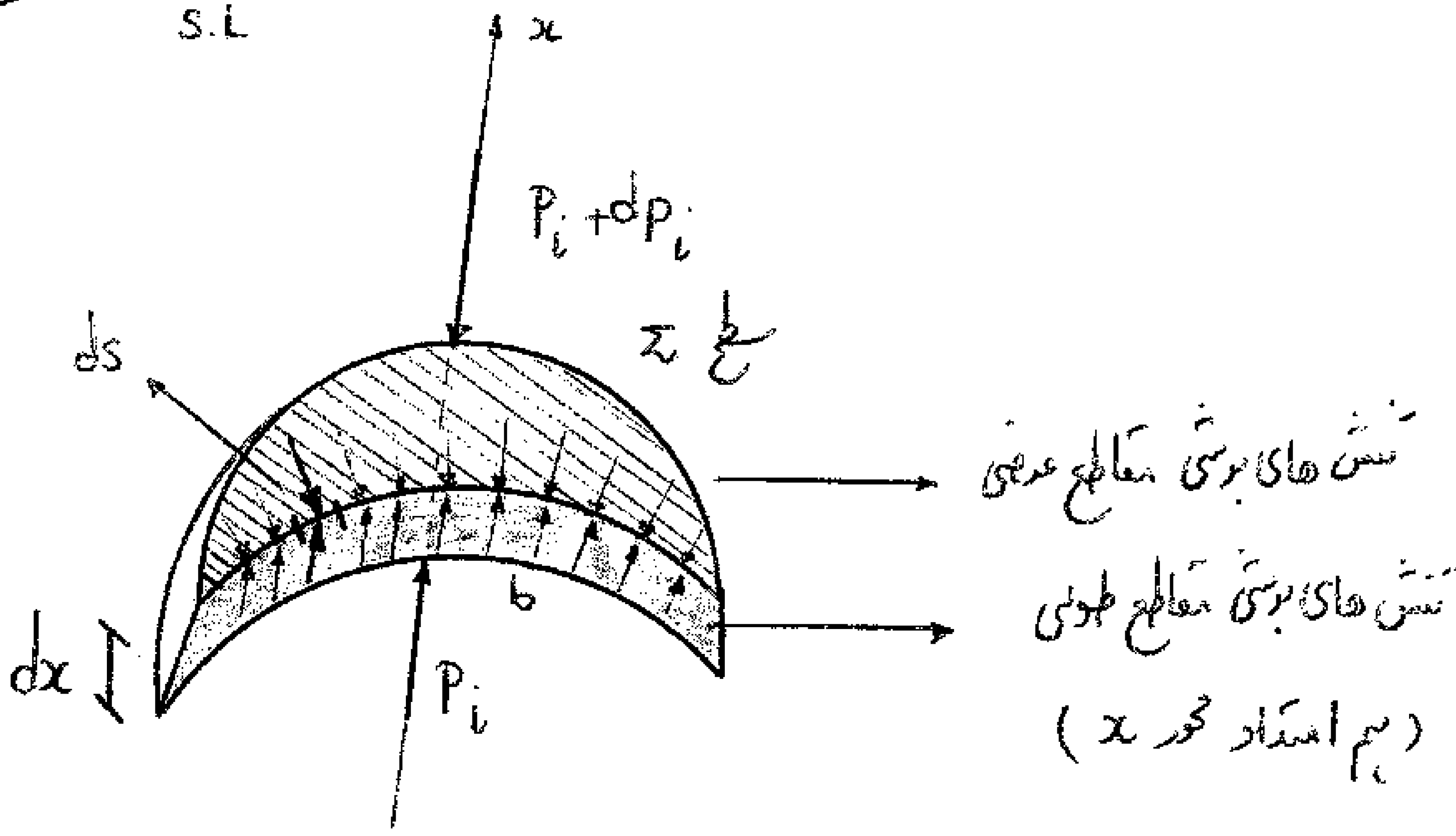
✳ در حالت عمومی در هر نقطه‌ای امتداد تنش برشی ارتباط چندانی با امتداد نیروی برشی ندارد . ✳

کما اینکه در نقاط نزدیک مرز امتداد تنش های برشی در صورت وجود قطعاً به موازات مرز مقطع می باشد .

بنابراین مجهول بودن تنش برشی در یک نقطه لازم است مولفه‌های تنش برشی را در روی دو محور متعامد بدست آوریم .




$z$ : $B.L \xrightarrow{\text{اصلی}} = N.L$




$$\Sigma F_x=0 \longrightarrow dP_i=\int_{\text{روی سطح بریده}} \tau .ds.dx$$

$$P_i=\frac{M_{N.L}\times S^{z}_{N.L}}{I_{N.L}}$$

$$\frac{dP_i}{dx}=\int_{b\ \text{منحنی}} \tau .ds \longrightarrow \frac{V.S^{z}_{N.L}}{I_{N.L}}=\int_b \tau\, ds$$

$q$ : جریان برش

$$\boxed{q=\tau .t}$$

✳ جریان برش مجموع تنش های برشی عمود بر یک پاره خط و یا یک پاره منحنی می باشد . ✳

$$\boxed{q=\frac{VQ}{I}}$$

همواره صحیح

در رابطه فوق $V$ و $I$ ، مربوط به کل مقطع بوده و

$Q$ گشتاور استاتیک قسمتی از مقطع است که توسط پاره خط یا پاره منحنی مورد نظر از کل مقطع جدا شده است (نسبت به تار خنثی)

و $q$ جریان برشی مقاطع طولی و یا مقاطع عرضی عمود بر پاره خط یا پاره منحنی مورد نظر می باشد .

تنظیم: محمد حاج صادقی

می توان تنش برشی متوسط عمود بر آن پاره خط یا پاره منحنی را (مربوط به مقاطع طولی یا عرضی) می توان از رابطه ذیل بدست آورد:

$$q = \tau_{avg} \cdot b \longrightarrow \tau_{avg} = \frac{VQ}{Ib}$$

درصورت استفاده از رابطهٔ فوق برای یافتن تنش های برشی باید حتی الامکان پاره خط یا پاره منحنی را طوری انتخاب کنیم که تنش های متوسط حاصله ازاین رابطه و تنش های واقعی به هم نزدیک باشند.

* اگر نیروی برشی در مقطع از بالا به پایین عمل کند و در صورتی که قسمت جدا شده توسط پاره خط یا پاره منحنی مورد نظر دارای گشتاور استاتیک مثبت نسبت به تار خنثی باشد تنش های برشی مقطع عرضی بر روی قسمت جدا شده به سمت مرز جدا کننده خواهد بود در غیراین صورت از آن مرز دور خواهد شد. *

$$\frac{q}{I} = \left(\frac{V}{I}\right)_{ct_0} Q_{var} \longrightarrow Q_{max} \longrightarrow q_{max}$$

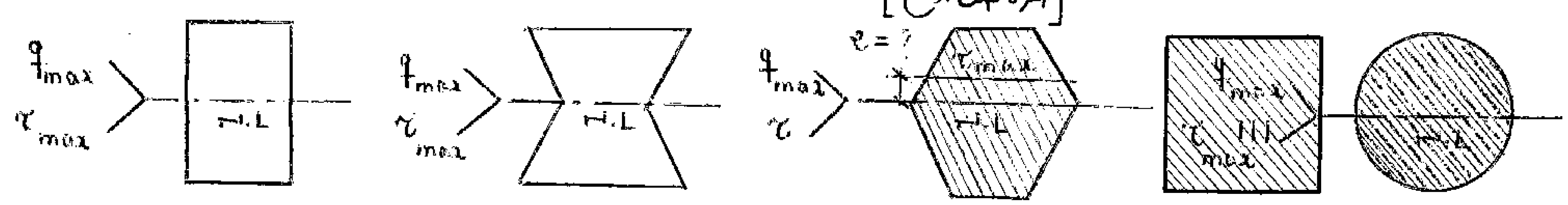
$$\tau = \left(\frac{V}{I}\right)_{ct_0} \left(\frac{Q}{b}\right)_{var} \longrightarrow \left(\frac{Q}{b}\right)_{max} \longrightarrow \tau_{max}$$

برای پیدا کردن تنش های برشی و جریان برشی حداکثر می توان از روابط زیر استفاده کرد.

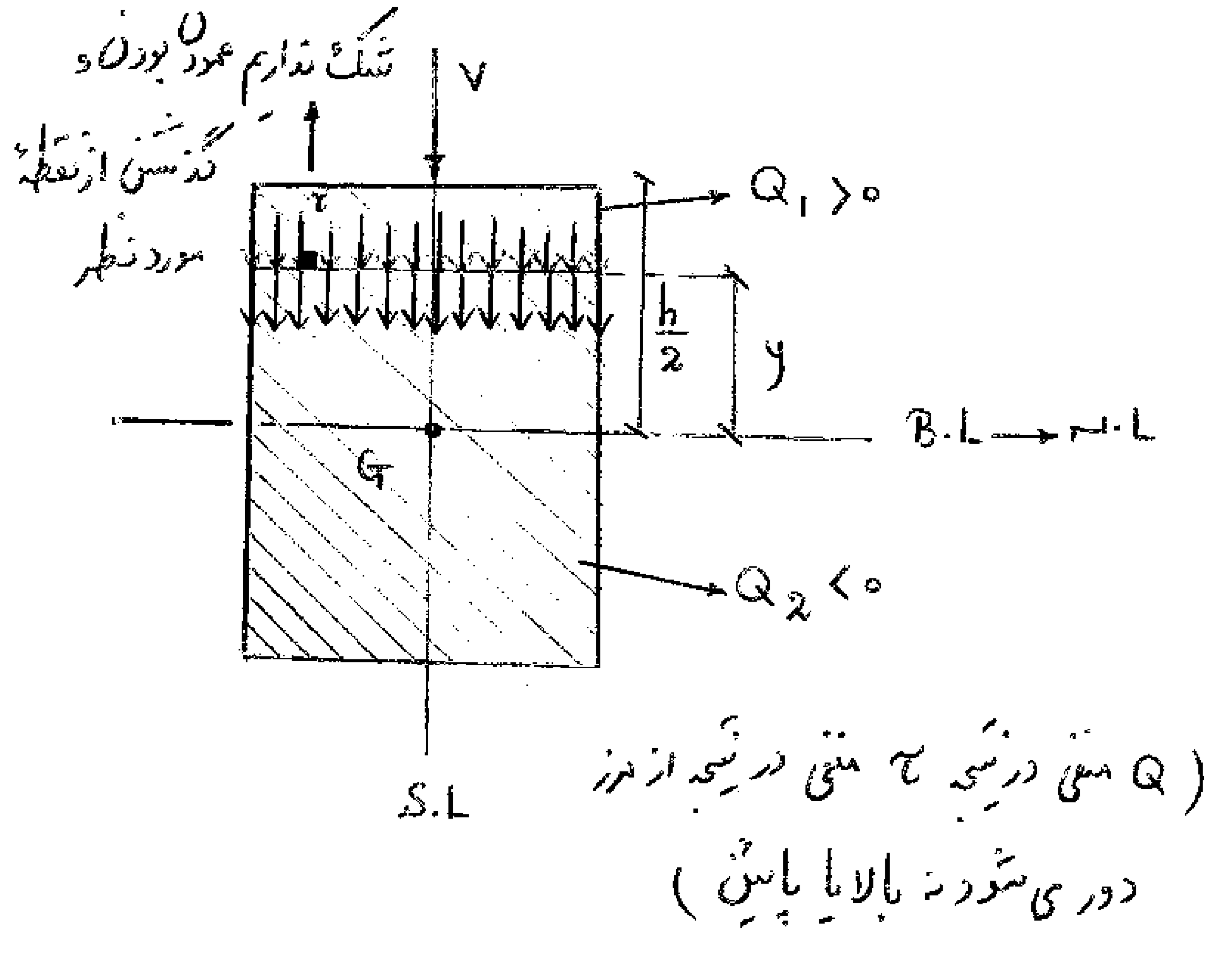
مقدار جریان برشی همواره روی تار خنثی حداکثر است چون قسمت جدا شده توسط تار خنثی بیشترین ممان استاتیک را ایجاد می کند:

همچنین اگر عرض تار خنثی کمترین (یا حتی مساوی) عرض در کل مقطع باشد قطعاً تنش برشی روی تار خنثی حداکثر خواهد شد در غیراین صورت احتمال قرارگیری آن در روی خطی غیر از تار خنثی وجود دارد.

[صفرتا نصف ارتفاع]




مقدار تنش برشی در نقطهٔ نشان داده شده:




$$\tau = \frac{VQ}{Ib}$$

$$\tau = \frac{V\, b\left(\frac{h}{2} - y\right)\left(\frac{h}{2} + y\right)/2}{\frac{bh^3}{12} \cdot b} = \frac{V}{bh} \times \frac{6}{h^2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

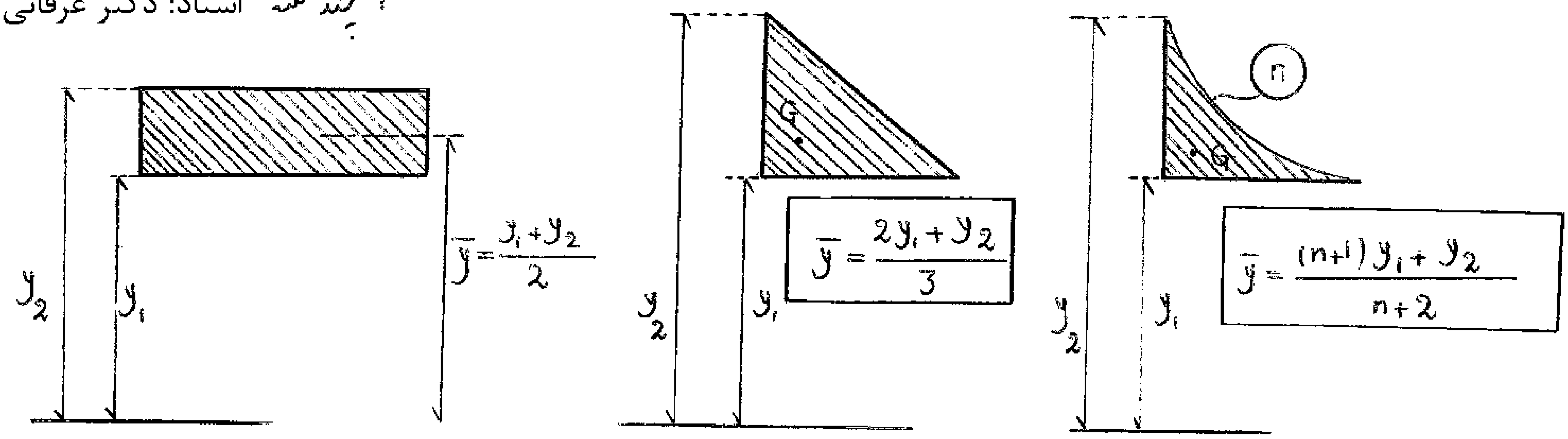
(Q منفی در نتیجه $\tau$ منفی در نتیجه از مرز دور می شود به بالا یا پایین)

$$\longrightarrow \tau = \tau_{avg}\left(1.5 - 6\frac{y^2}{h^2}\right) \quad \text{I}$$

تنظیم: محمد حاج صادقی

استاد: دکتر عرفانی

چند نکته :

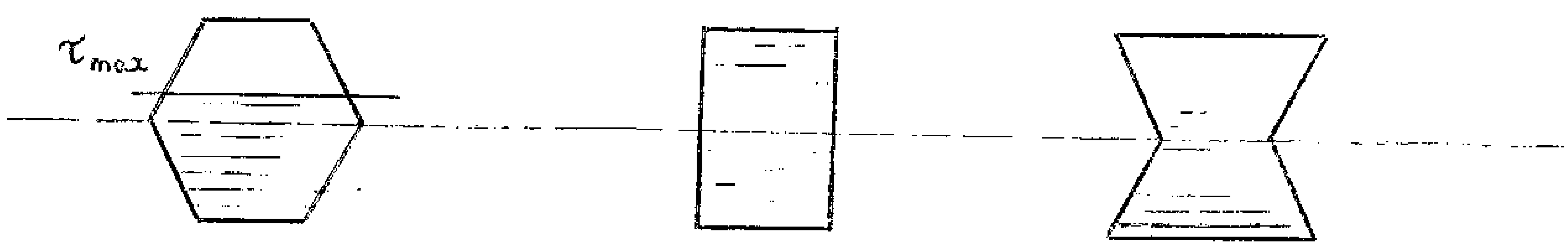



$$
I \longrightarrow \begin{cases} \tau = 0 \longrightarrow y = \pm \frac{h}{2} \\ \tau_{max} = 1.5\,\tau_{avg} \longrightarrow y = 0 \end{cases}
$$

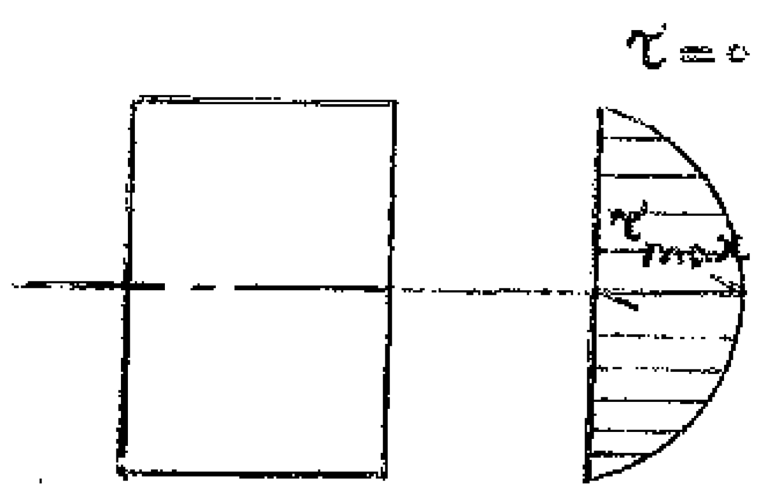
تنش برشی در بالا و پایین مقاطع و در هرجای دیگری که Q ایجاد شده توسط سمت جداشده با پاره‌خط مورد نظر صفر باشد همواره صفر است.

$$\boxed{\tau_{max} = C\,\tau_{avg}}$$

C : در همه مقاطع فقط تابع مشخصات مقطع می‌باشد.



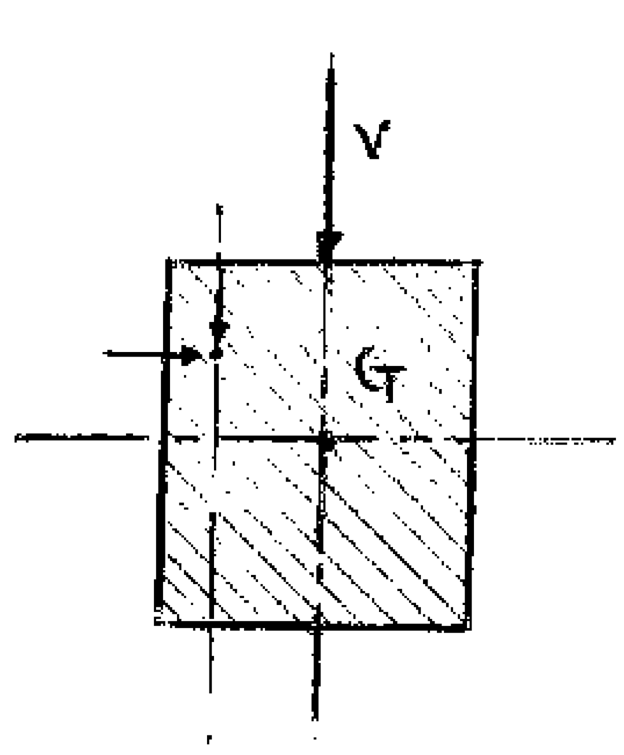

$C < 1.5$ $\qquad$ $C = 1.5$ $\qquad$ $C > 1.5$




توزیع مقدار تنش برشی -

استفاده از خواص سهمی‌ها : $V = b \times \frac{2}{3}\,\tau_{max} \cdot h$

$$\tau_{max} = 1.5\,\frac{V}{bh}$$



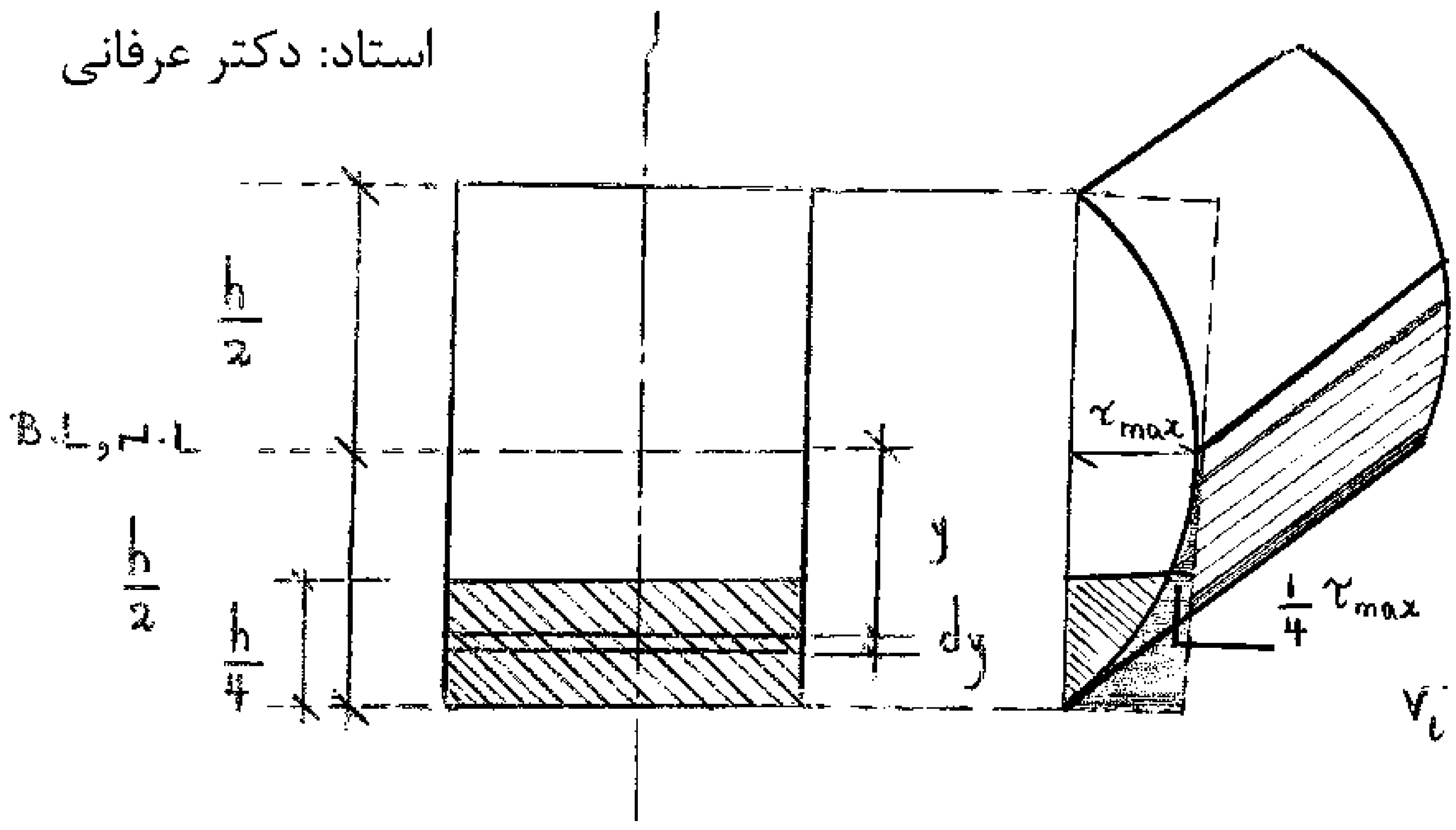

$$Q = 0 \longrightarrow q = 0 \not\longrightarrow \tau = 0$$

$$\longrightarrow \tau_{avg} = 0$$

* دیگر مربوط به مقاطع بالاتر می‌شود.

تنظیم: محمد حاج صادقی

استاد: دکتر عرفانی



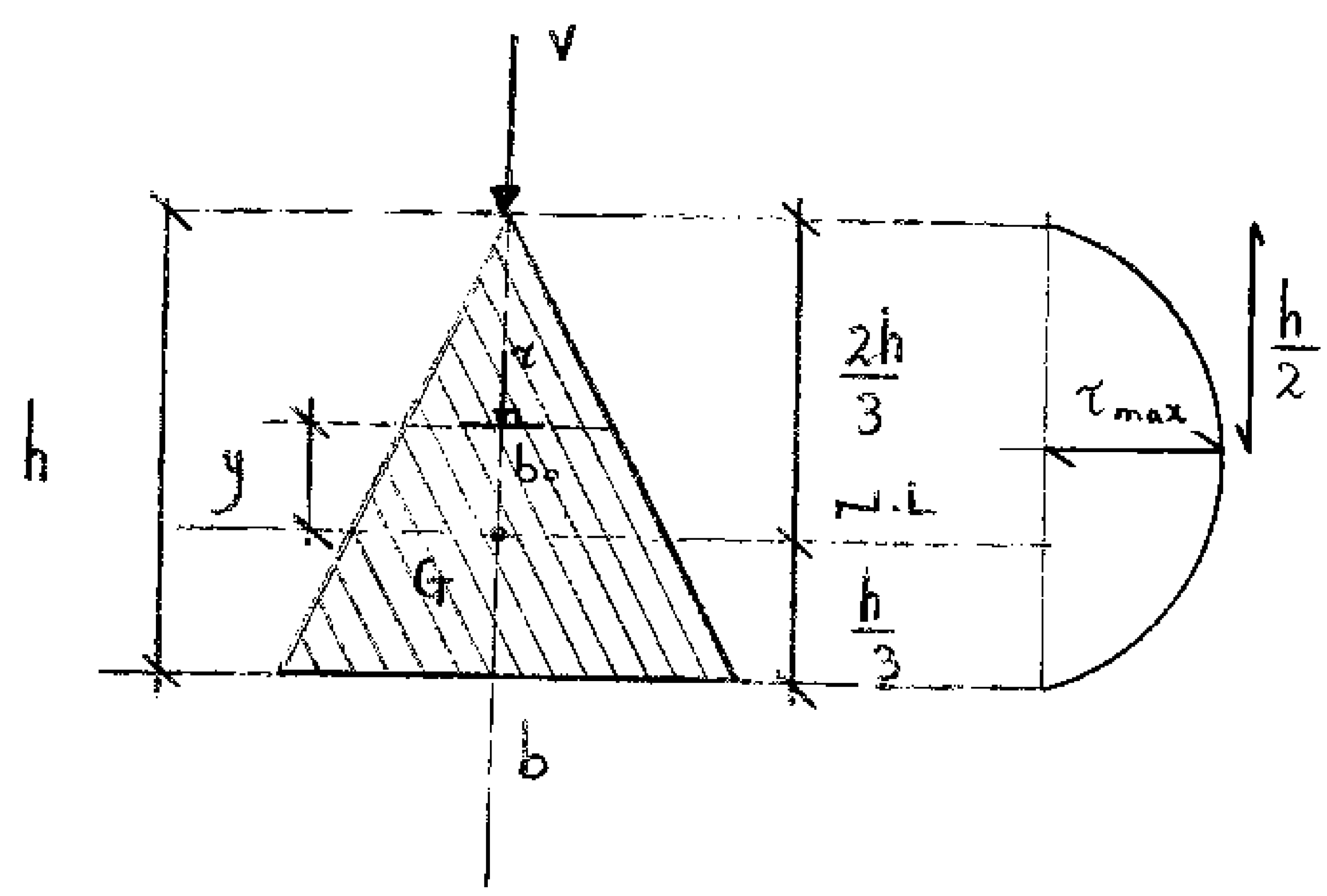

$$v_i = \int_{h/4}^{h/2} \tau b \, dy$$

$$v_i = \int \frac{VQ}{I\cancel{b}} \cancel{b}\, dy$$

$$v_i = \frac{V}{I}\int Q\, dy \longrightarrow v_i = \frac{V}{I}\int_{h/4}^{h/2} b\left(\frac{h}{2}-y\right)\left(\frac{h}{2}+y\right)/2 \; dy$$

( سهم برش قسمت هاشورخورده )

$\boxed{\text{استفاده از خواص سهمی‌ها}}$ : $v_i = \left[\left(\tau_{max} \times \frac{h}{2} - \frac{1}{3}\tau_{max} \cdot \frac{h}{2}\right) - \left(\tau_{max} \times \frac{h}{4} - \frac{1}{3}\frac{h}{4} \times \frac{1}{4}\tau_{max}\right]\times b$




تنش حاصل از رابطهٔ $\tau = \frac{VQ}{Ib}$ درمورد مثلث متوسط مولفه‌های قائم تنش های برشی روی آن پاره خط می باشد.

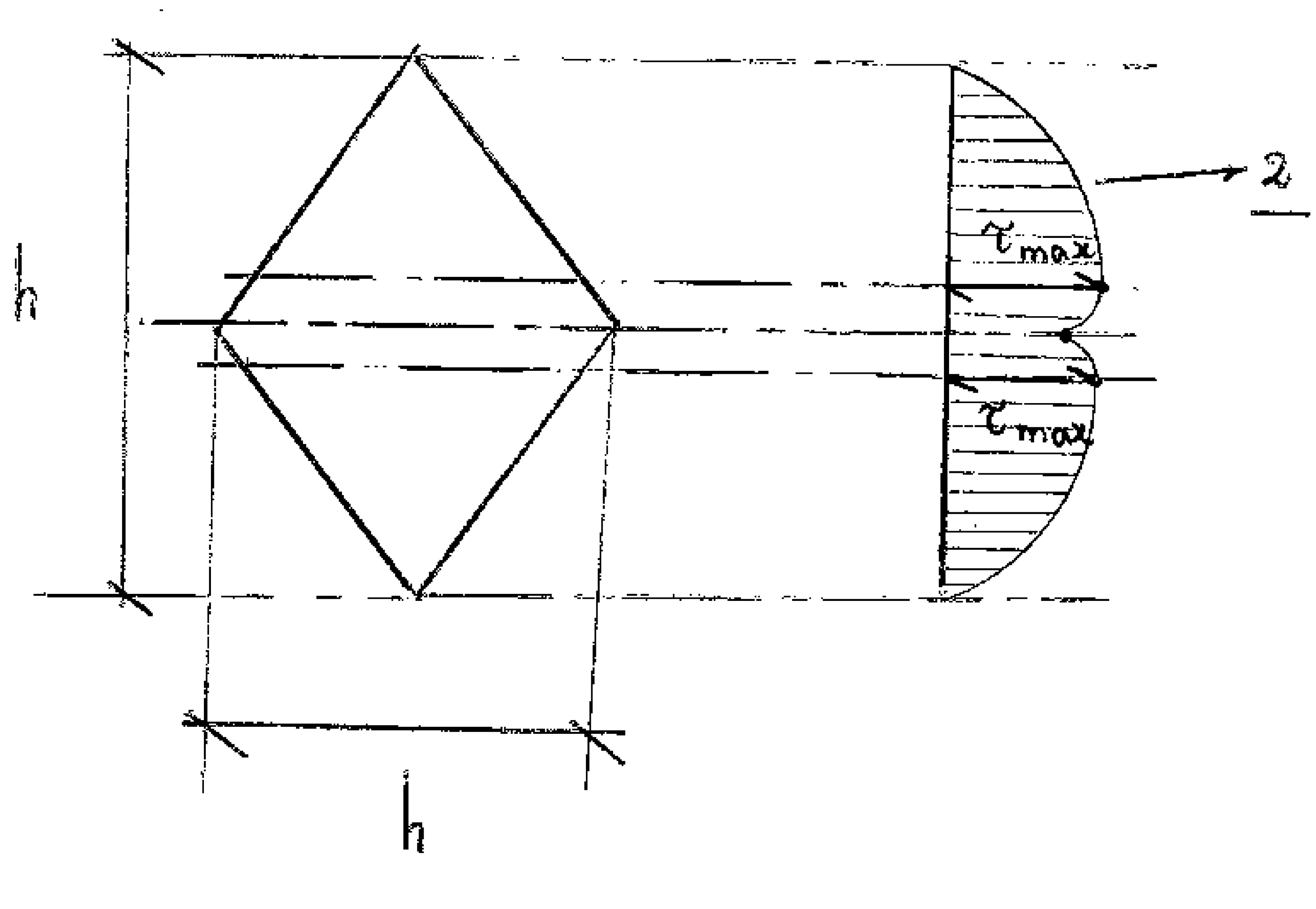
$$\tau = \frac{V\,\frac{b_o}{2}\left(2h/_3 - y\right)\left(2h/_3 + 2y\right)/3}{\frac{bh^3}{36}\times b_o} = \frac{V}{Ah^2}\left(\frac{4h^2}{3} + 2hy - 6y^2\right)$$

$$\boxed{\tau_{max} = 1.5\,\frac{V}{A}}$$

$$\frac{d\tau}{dy} = 0 \longrightarrow +2h - 12y = 0 \longrightarrow y = \frac{h}{6}$$

برای ... مستطیل ... 1.5 ...

در وسط




محل تنش برشی ماکزیمم :

و مقدار آن :

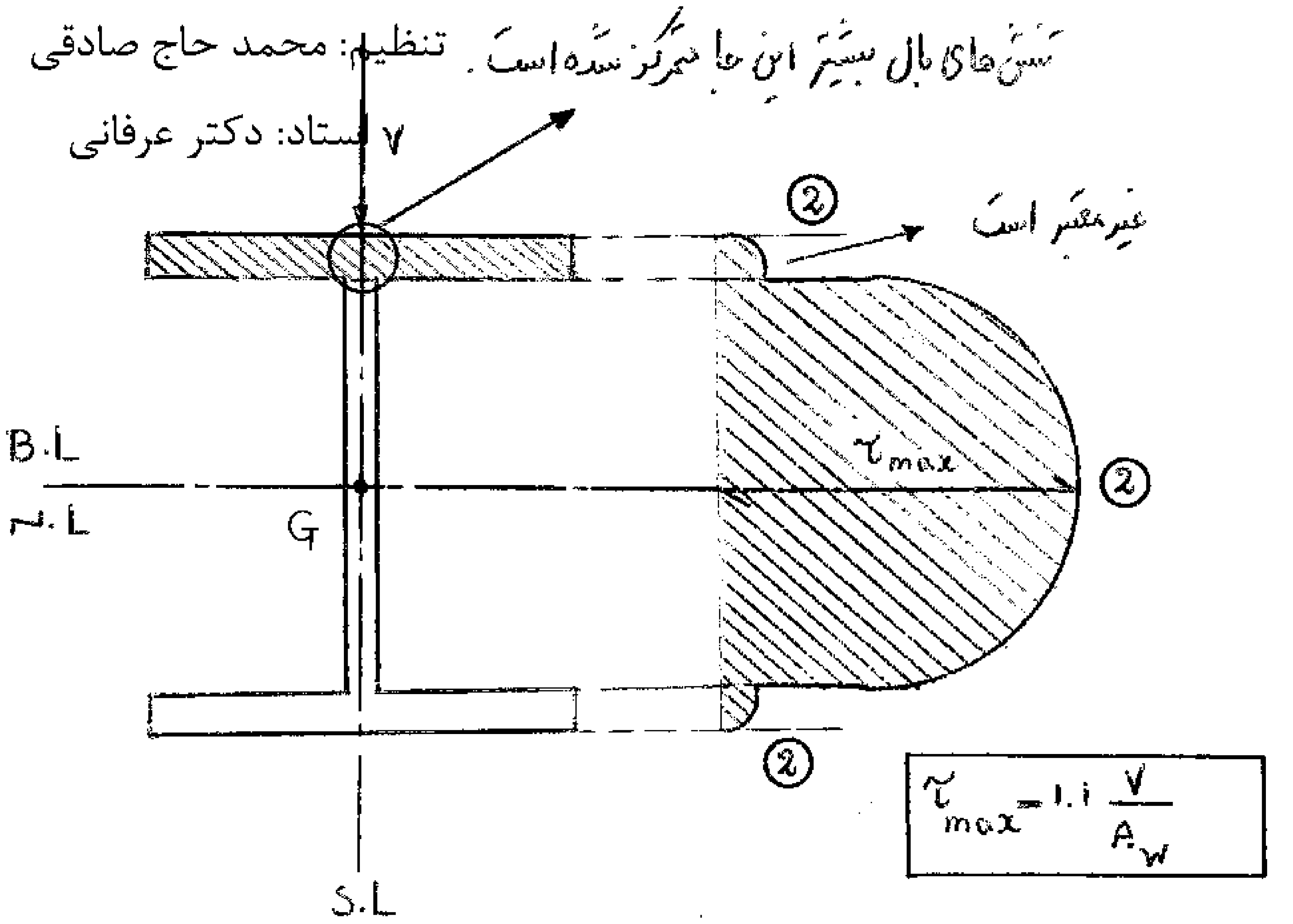
چو عرض خطی تغییر کند چو ثابت باشد

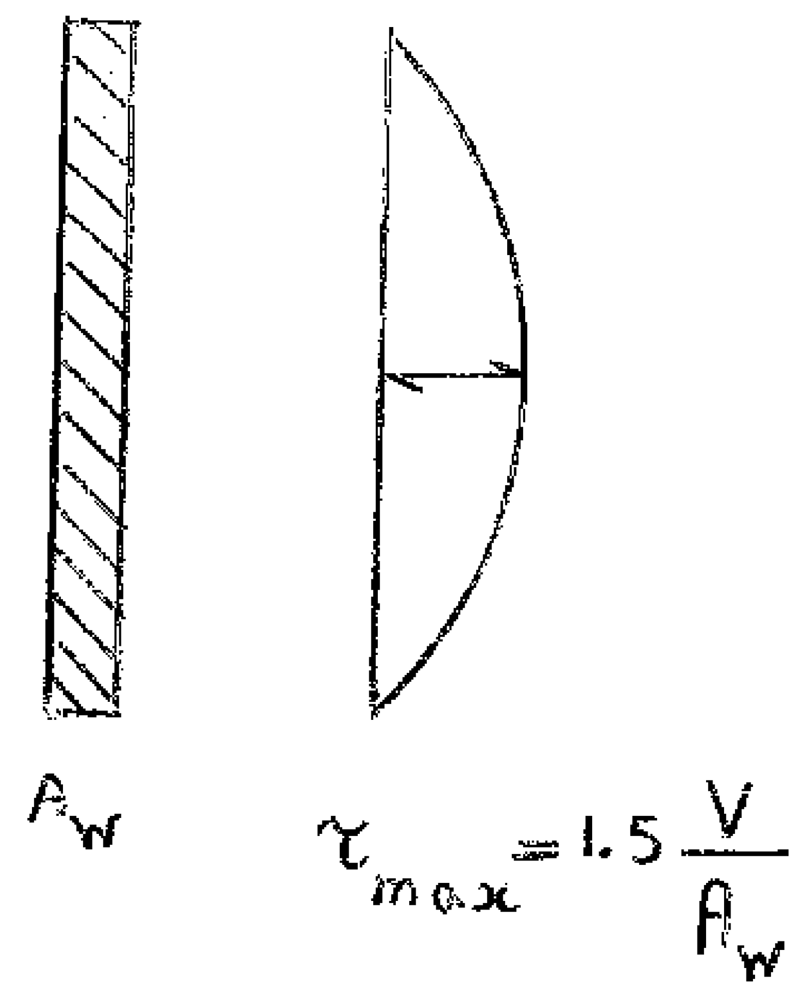
تغییرات تنش برشی درجهٔ 2 می باشد.

تنظیم: محمد حاج صادقی

استاد: دکتر عرفانی

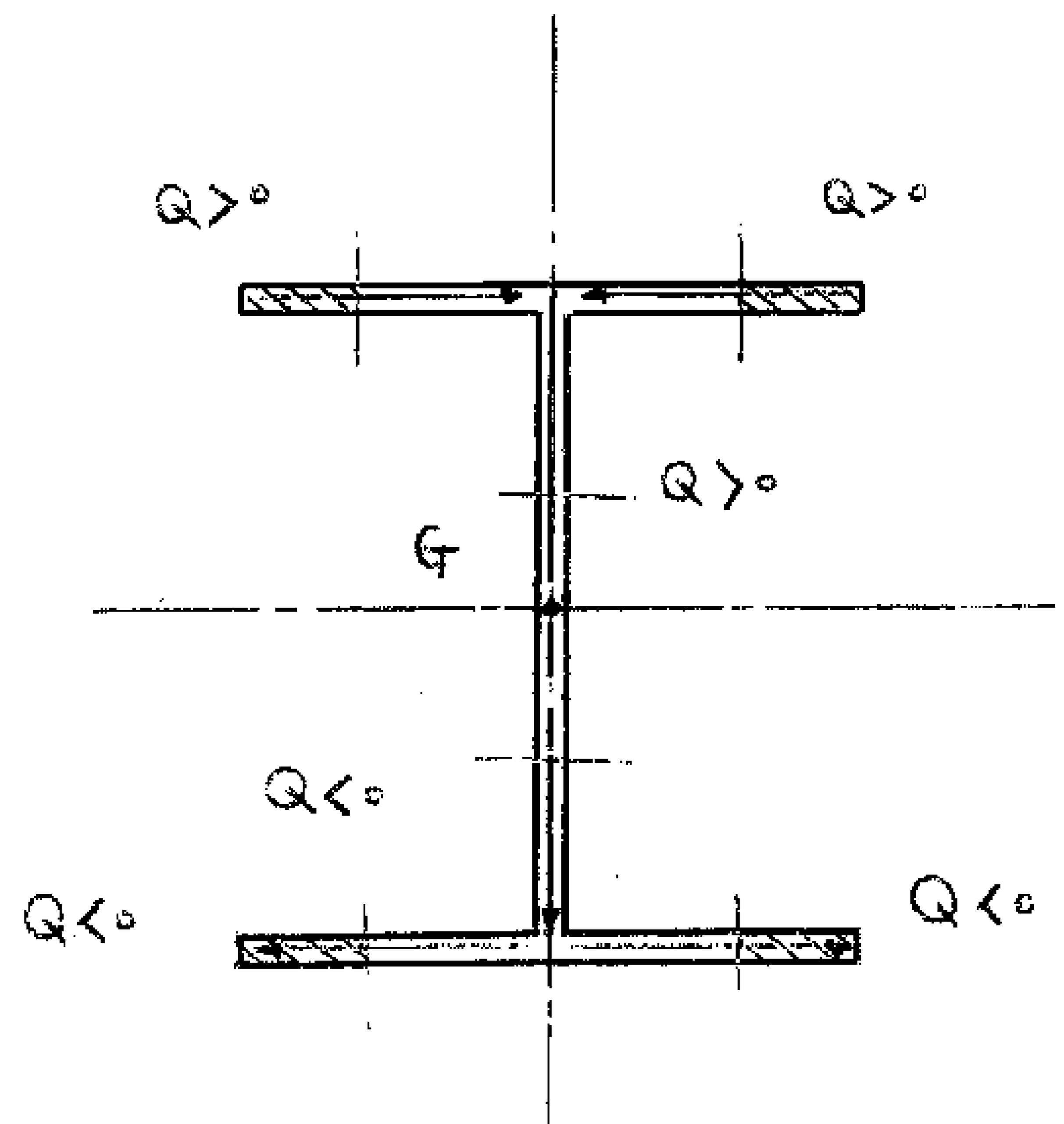
$$\tau_{max} = 1.5\,\frac{V}{A_w}$$




در مقاطع I شکل ملاحظه می شود بال ها به طور مستقیم تأثیری چندانی در تحمل برش ندارند.
ولی بودنشان باعث می شود تا تنش های برشی در جان یکنواخت تر توزیع شود و در نتیجه باعث کاهش تنش حداکثر می شود.

ملاحظه می شود که با روابط مربوط به برش در مورد مقاطع توپر فقط متقارن قابل بررسی می باشند و هر چه عرض مقطع تغییرات کمتری داشته باشد توزیع تنش بدست آمده واقعی تر خواهد بود.

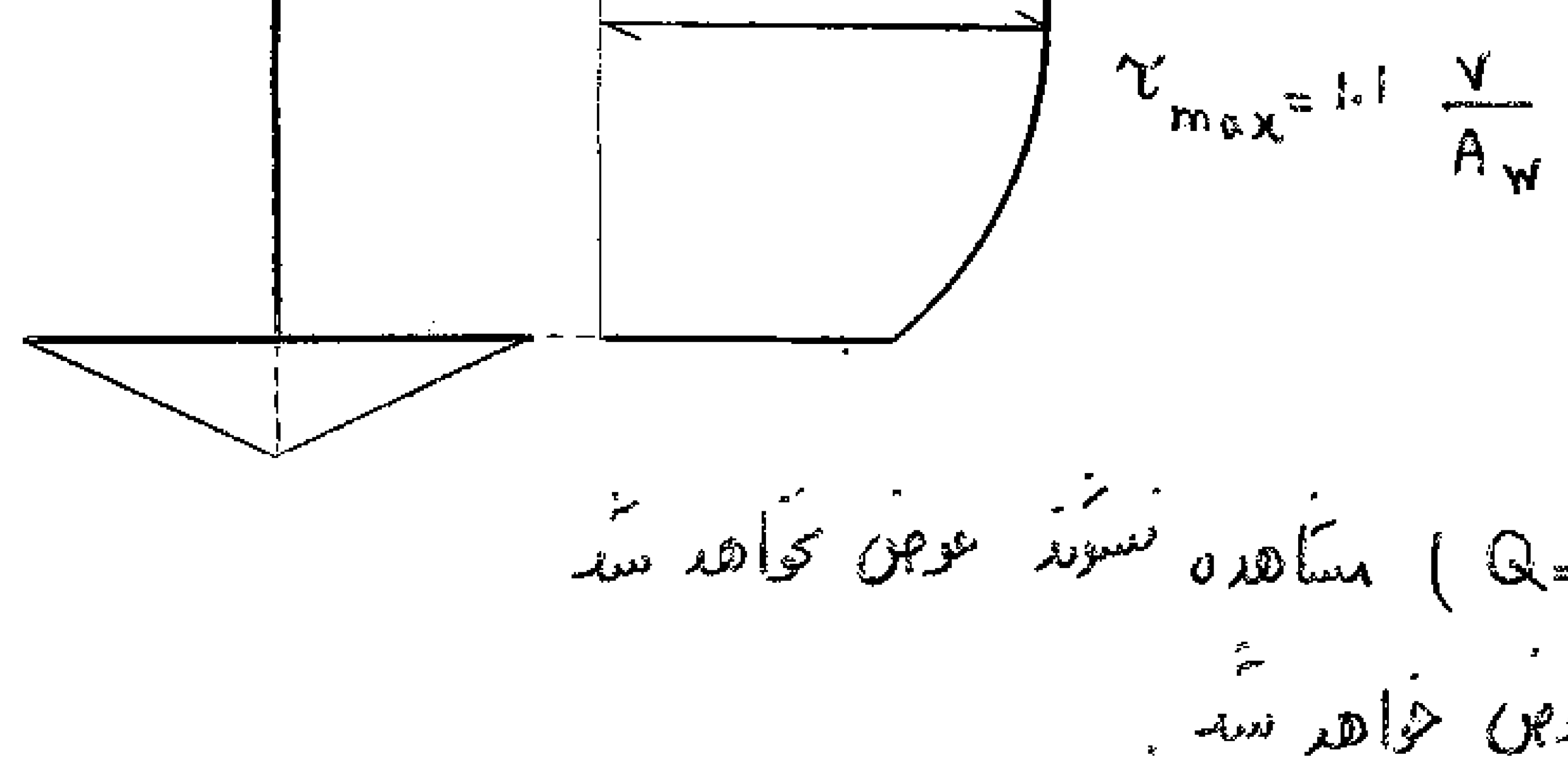



## مقاطع جدار نازک:

در مقاطع جدار نازک رابطه $\tau = \frac{VQ}{It}$ تنش های واقعی تری را نسبت به مقاطع توپر محاسبه می کنند چون که در این مقاطع امتداد تنش های برشی قطعاً به موازات جدار می باشد و ضخامت جدار در تنش برشی از نظر مقدار تغییر چندانی ندارد.

در هر نقطه تقاطع:

$$\boxed{\Sigma q_{in} = \Sigma q_{out}}$$



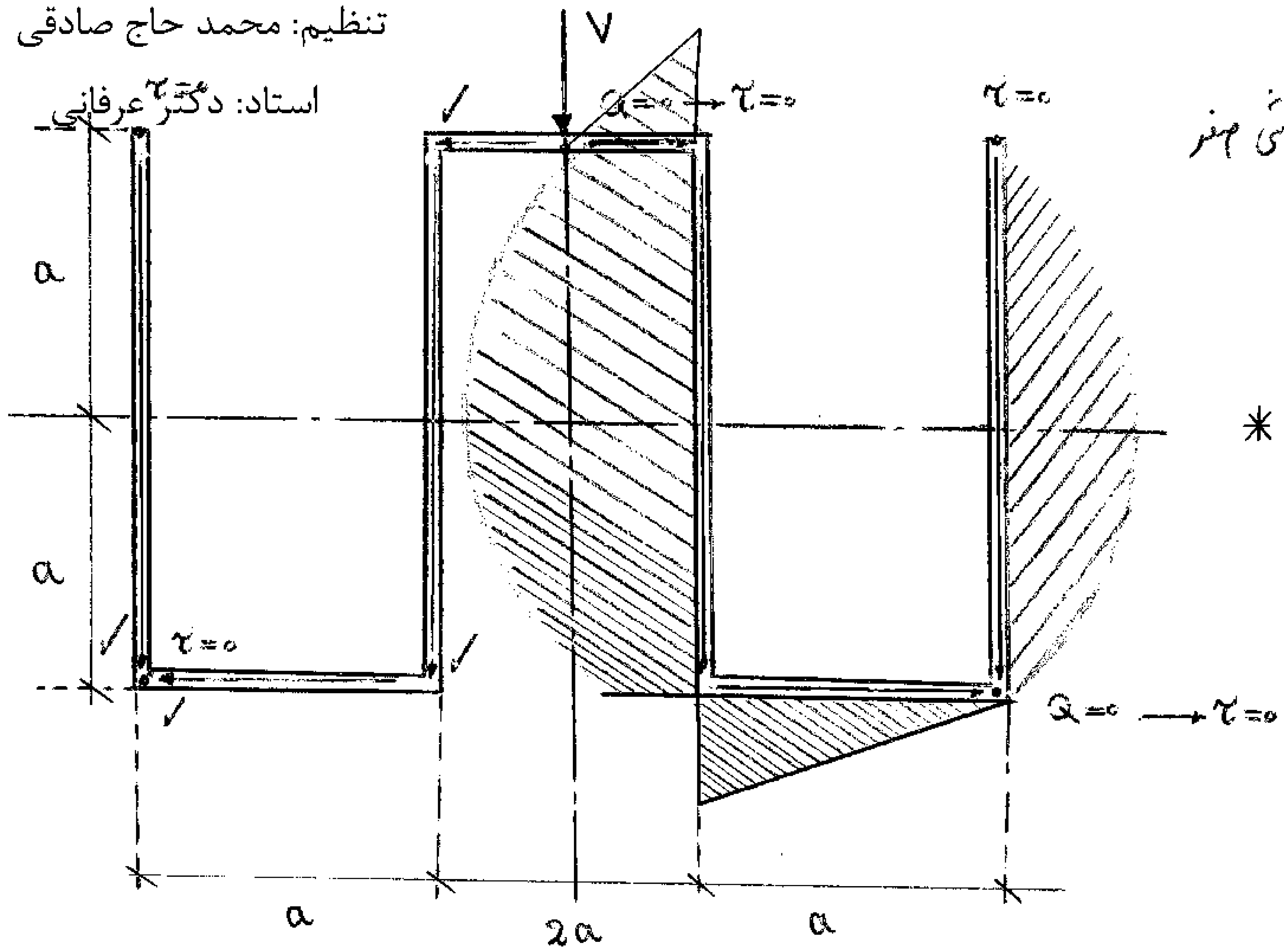

$$\text{If } t = ct_e \longrightarrow \Sigma \tau_{in} = \Sigma \tau_{out}$$

اصل پیوستگی جریان:

جهت تنش یا جریان برشی تا زمانی که نقطه ($\tau = 0$ یا $Q = 0$) مشاهده نشوند عوض نخواهد شد
ولی در نقطه ($\tau = 0$ یا $Q = 0$) جهت جریان قطعاً عوض خواهد شد.

تنظیم: محمد حاج صادقی
استاد: دکتر عرفانی

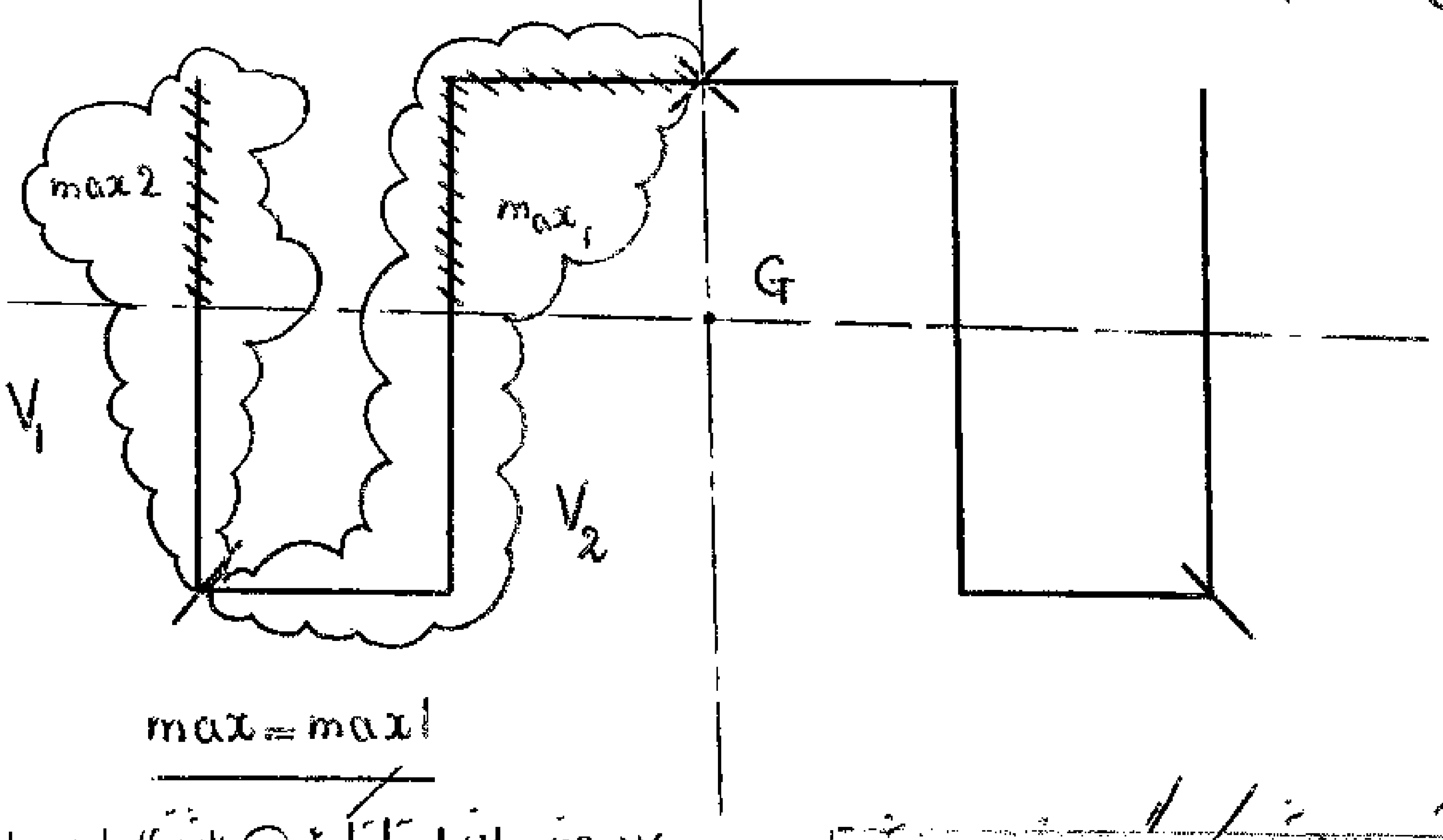
مطلوب است تعیین نقاط مربوط به تنش برشی صفر و تعیین جهت جریان:




*:

اگر شکلی محور تقارن داشته باشد و نیروی برشی در امتداد آن محور اثر کند نقاط محور تقارن و مقطع دارای تنش برشی صفر می باشد.

* نقاط تنش برشی صفر در واقع به عنوان نقاط انفصال مقطع در مقابل تنش های برشی عمل می کنند. *




$max = max1$

* چون جان استاتیک Q بیشتری دارد. *

* با شناخت نقاط تنش برشی صفر مقطع به چند قسمت تقسیم می شود که اگر نیروی برشی به مقطع طوری اثر کند که باعث پیچش مقطع نشود می توان نتیجه گرفت نیروی برشی Q به نسبت ممان اینرسی قسمت های مختلف مقطع تقسیم (توزیع) می شود. *

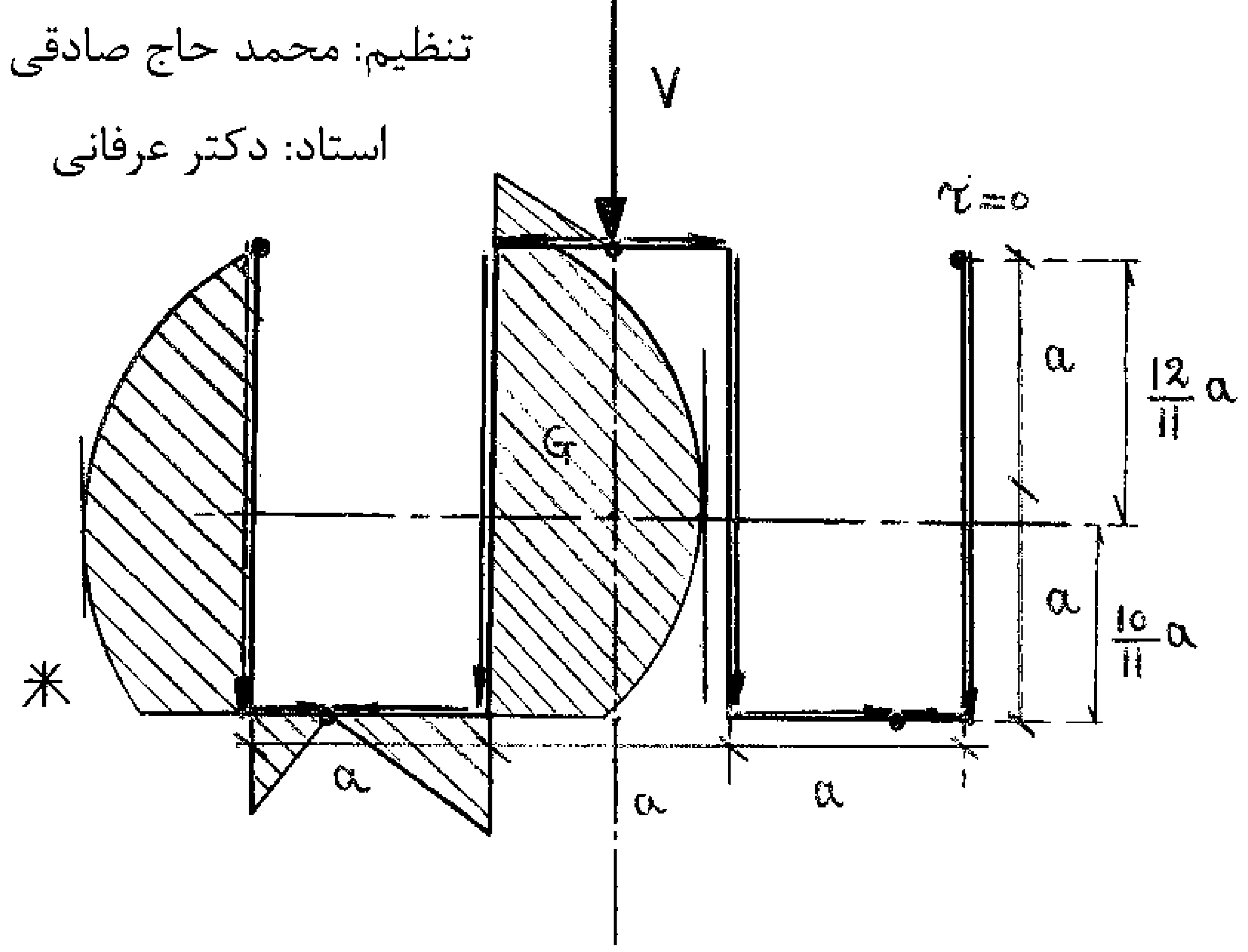
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{I_1}{I_2} \longrightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{(2a)^3}{12}}{\frac{(2a)^3}{12} + 2 \times a \times a^2} = \frac{1}{4}$$

$$, \quad V_1 = \frac{1}{5}\,\frac{V}{2} = 0.1V$$

$$V_2 = \frac{4}{5}\,\frac{V}{2} = 0.4V$$

تنظیم: محمد حاج صادقی

استاد: دکتر عرفانی




$$\bar{y} = \frac{\sum A\bar{y}}{\sum A}$$

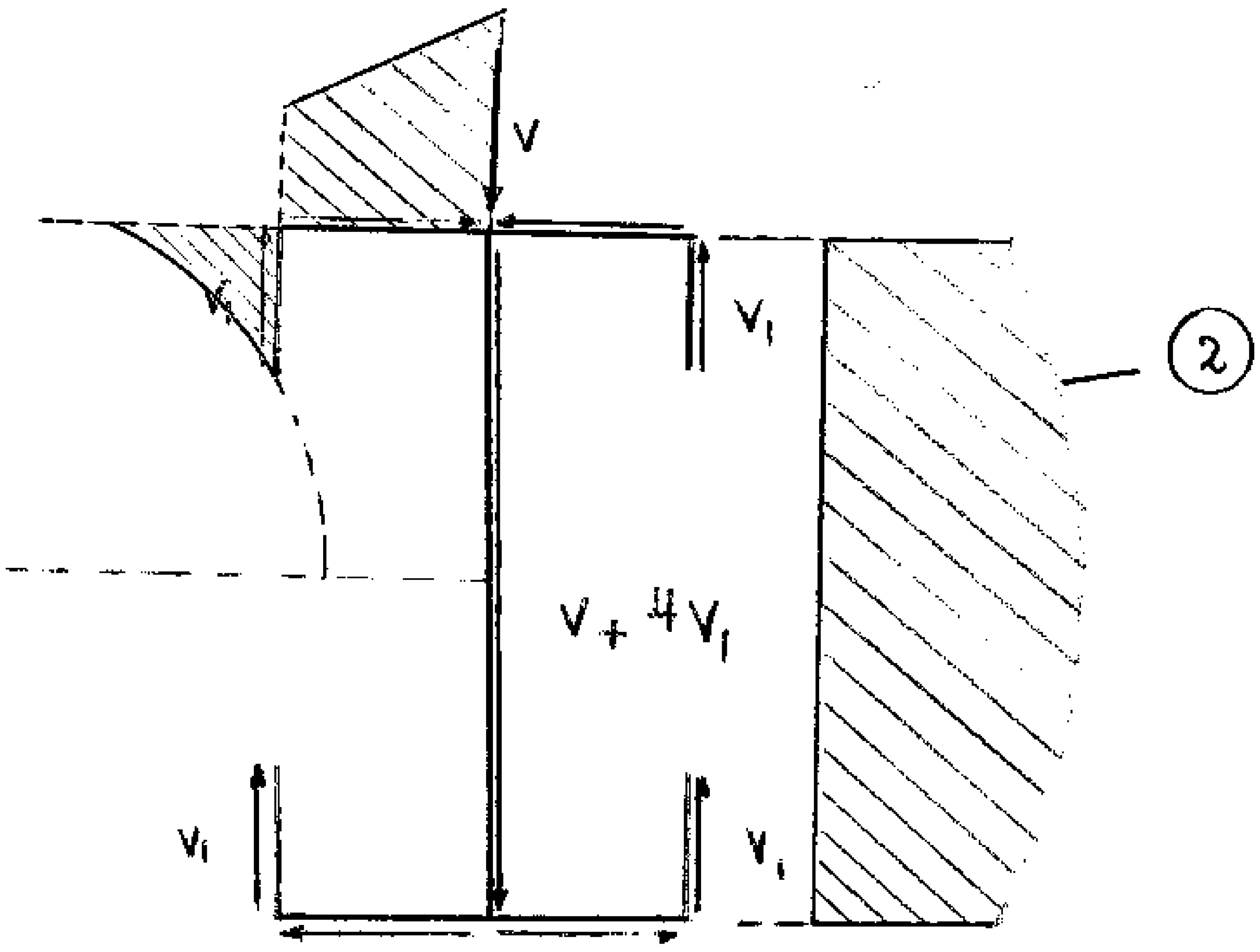
* برای راحتی کار می‌توان محورهای مختصات e در مرکز قرار داد. *

$$\frac{4\times 2a\times a + 1\times a\times 2a}{11a} = \frac{10}{11}a$$

$$\frac{12}{11}a\times\frac{6}{11}a = \frac{10}{11}a\times\frac{5}{11}a + e\times\frac{10}{11}a$$

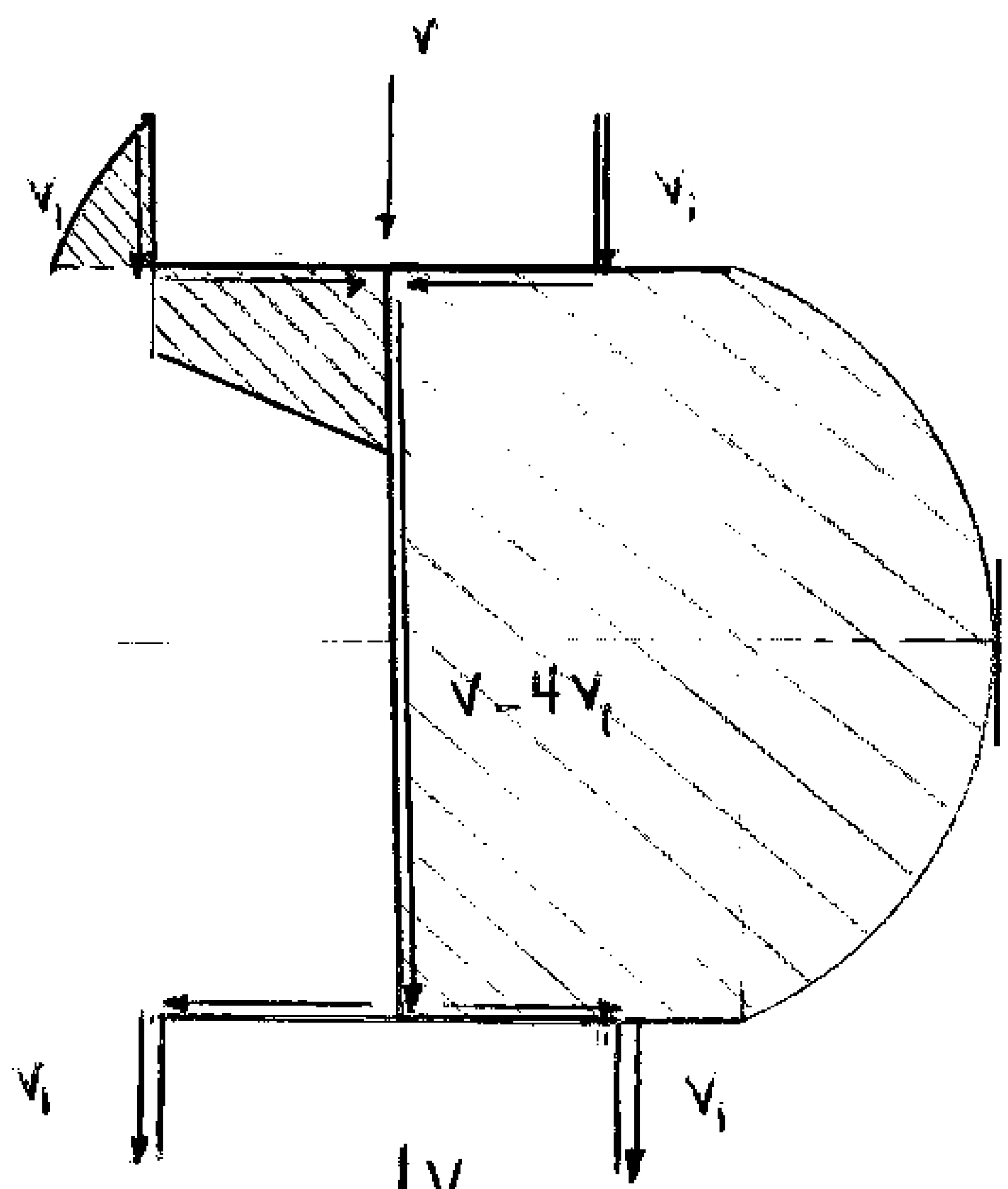
* مساوی قرار دادن جان استاتیک های اول. *

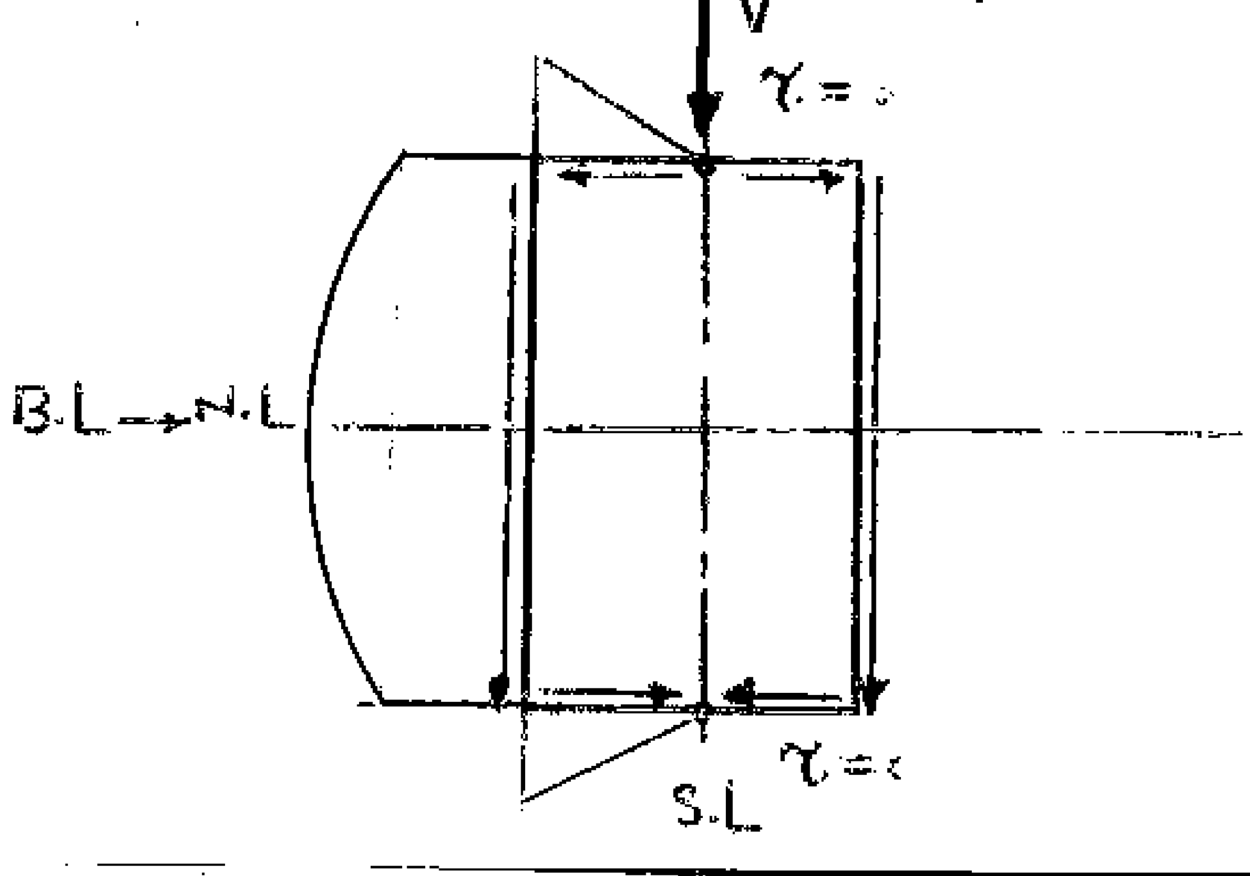
$$\rightarrow \underline{e = 0.2a}$$




* $\boxed{\text{اگر تیر حتی باید بسازد حتی قطع شود}}$ *

باعث می‌شود جان برش زیادی ببرد.

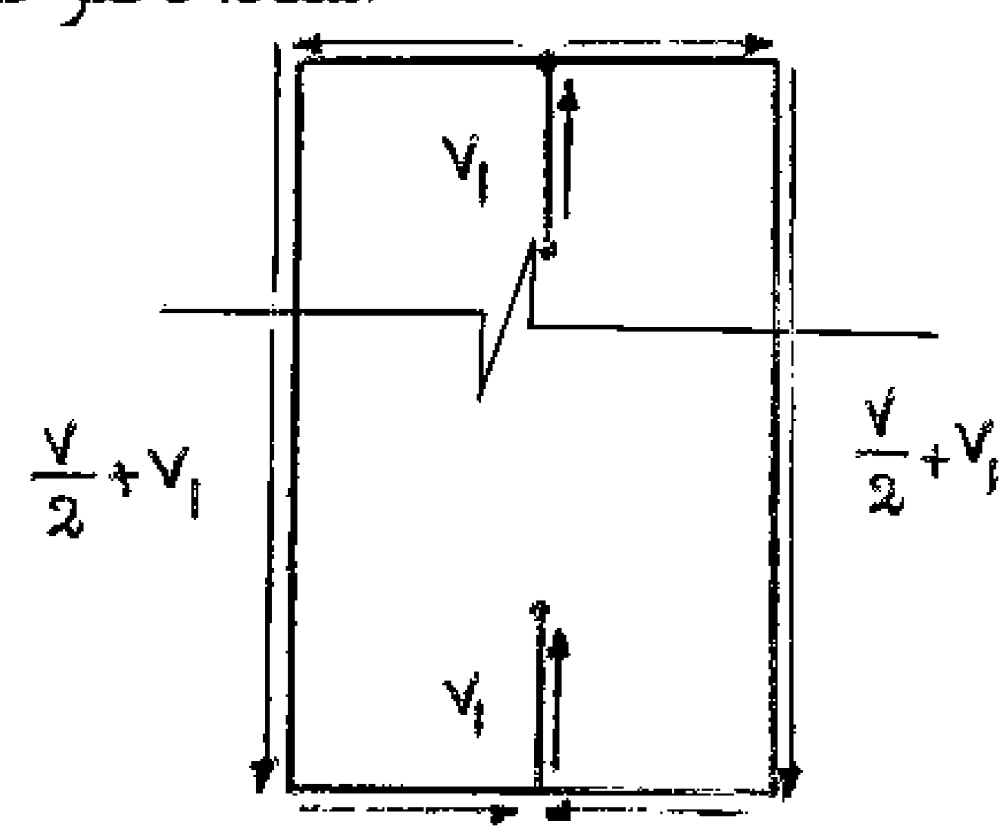


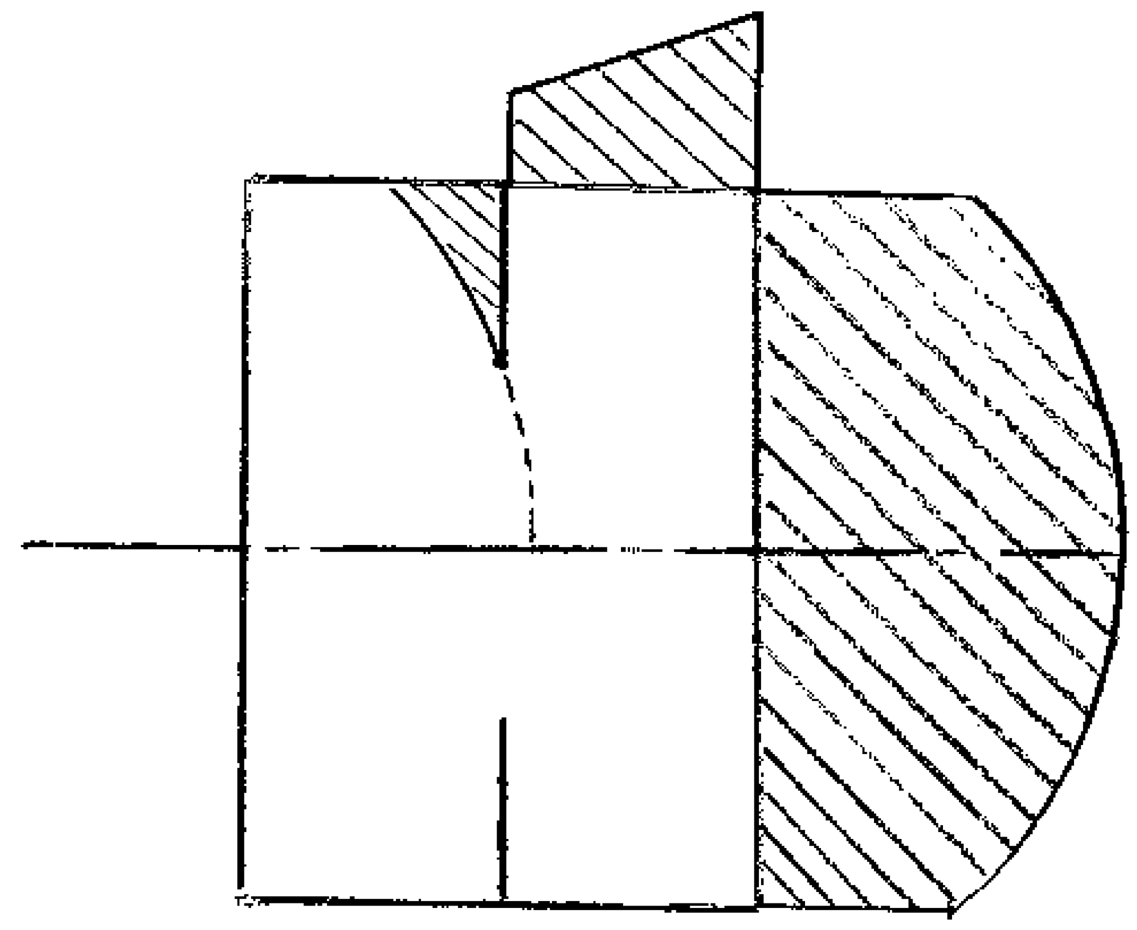

$$\tau = \frac{VQ}{It} \quad \left(\tau = \frac{V(2Q)}{I2t}\right)$$

تنظیم: محمد حاج صادقی

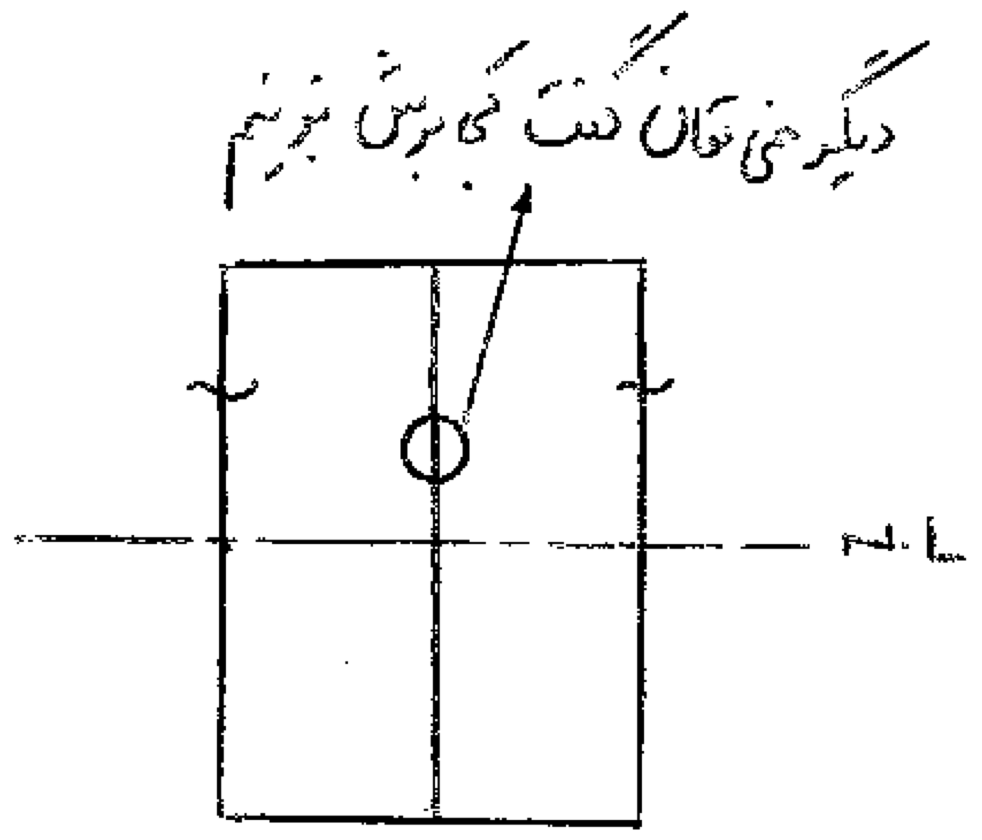
استاد: دکتر عرفانی




$$\tau=\frac{VQ}{It}$$



[illegible]

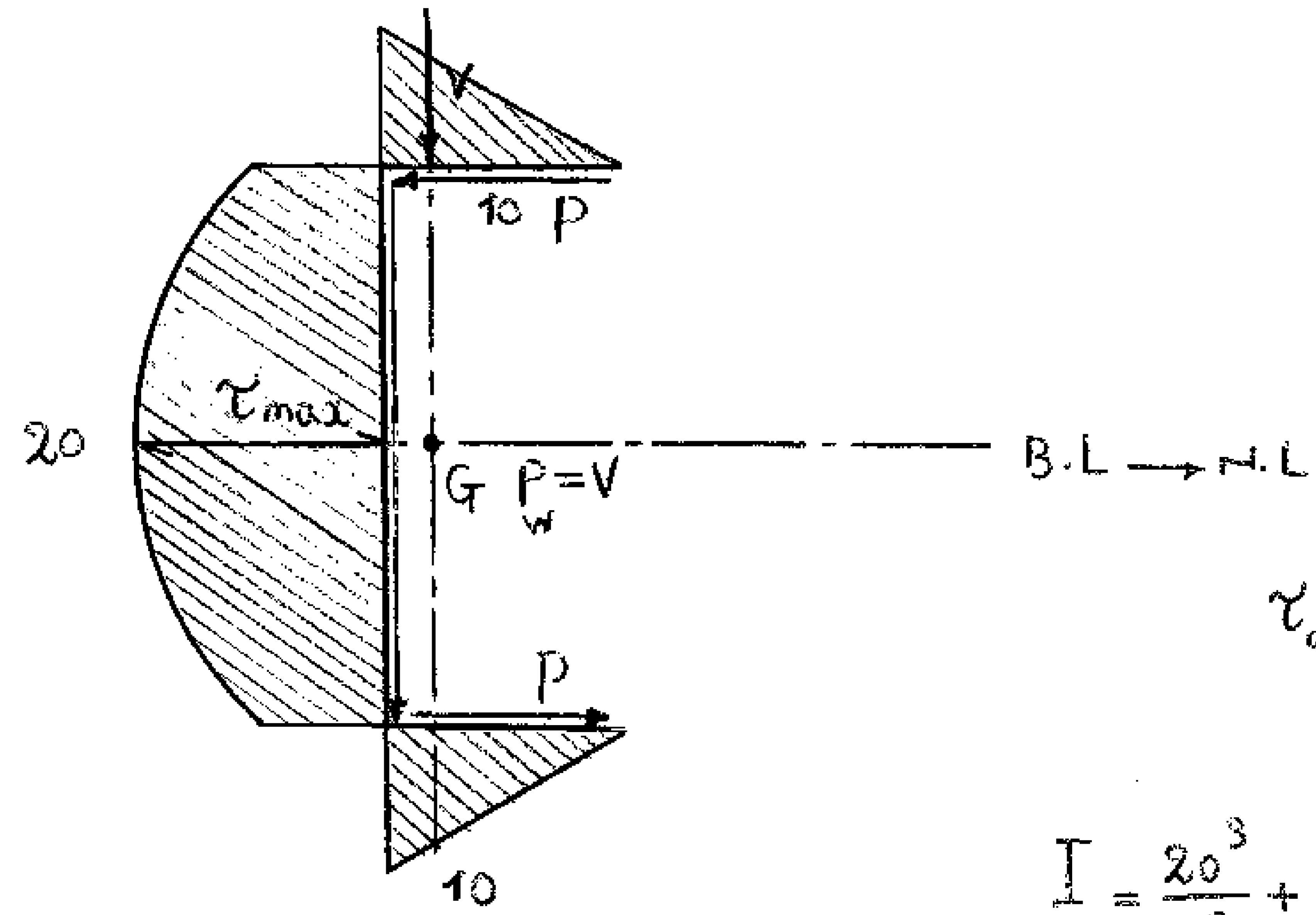



متقارن های بیش از یک سلولی را نمی توانیم بررسی کنیم.

مگر اینکه جان وسطی دارای ضخامت معادل 2t باشد.
(که بعد از نصف کردن دو شکل یکسان حاصل می شود)
- که البته هرکدام متقارن است -

جدار نازک غیر متقارن :

$(t=1)$




$$\tau_o=\frac{V\times10\times10}{I\times1}=\frac{100V}{I}=0.0375\ V$$

$$I=\frac{20^3}{12}+2\times10\times10^2=\frac{32000}{12}=\frac{8000}{3}$$

$$P=\frac{\tau_o+0}{2}\times10\times1=0.1875\ V$$

$$\tau_{max}=\frac{V(10\times10+10\times5)}{I\times1}=150\ \frac{V}{I}=0.05625V$$


$$V\times e=P\times20$$

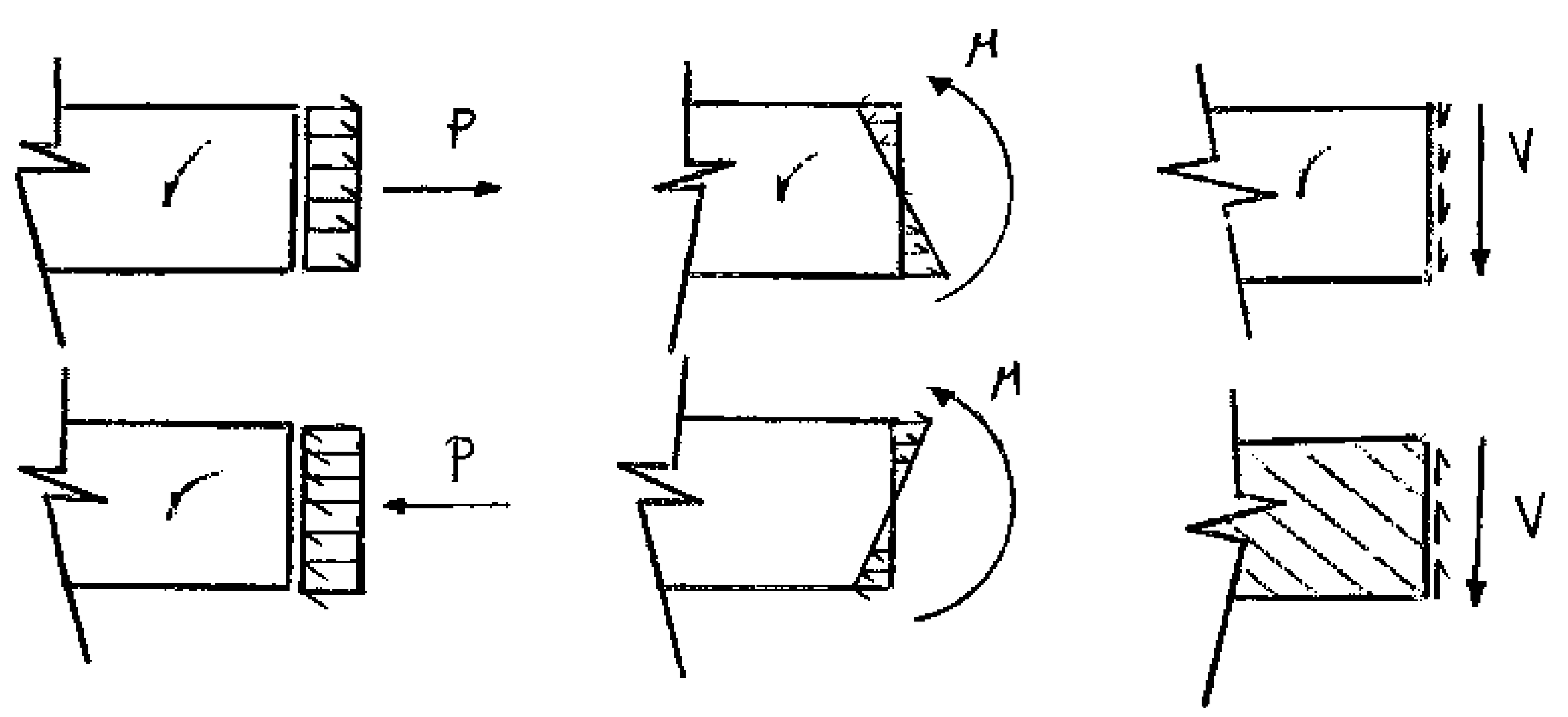
$$e=\frac{P\times20}{V}=\frac{0.1875\ V\times20}{V}=3.74\ cm$$

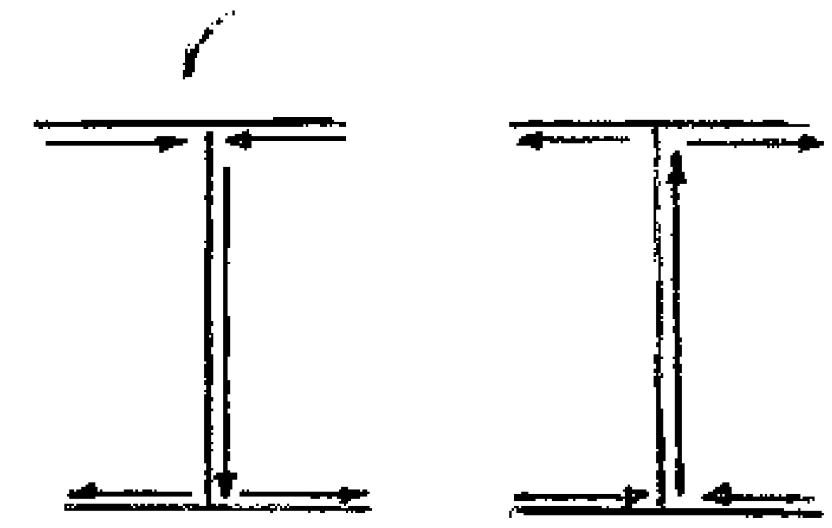
استاد: دکتر عرفانی

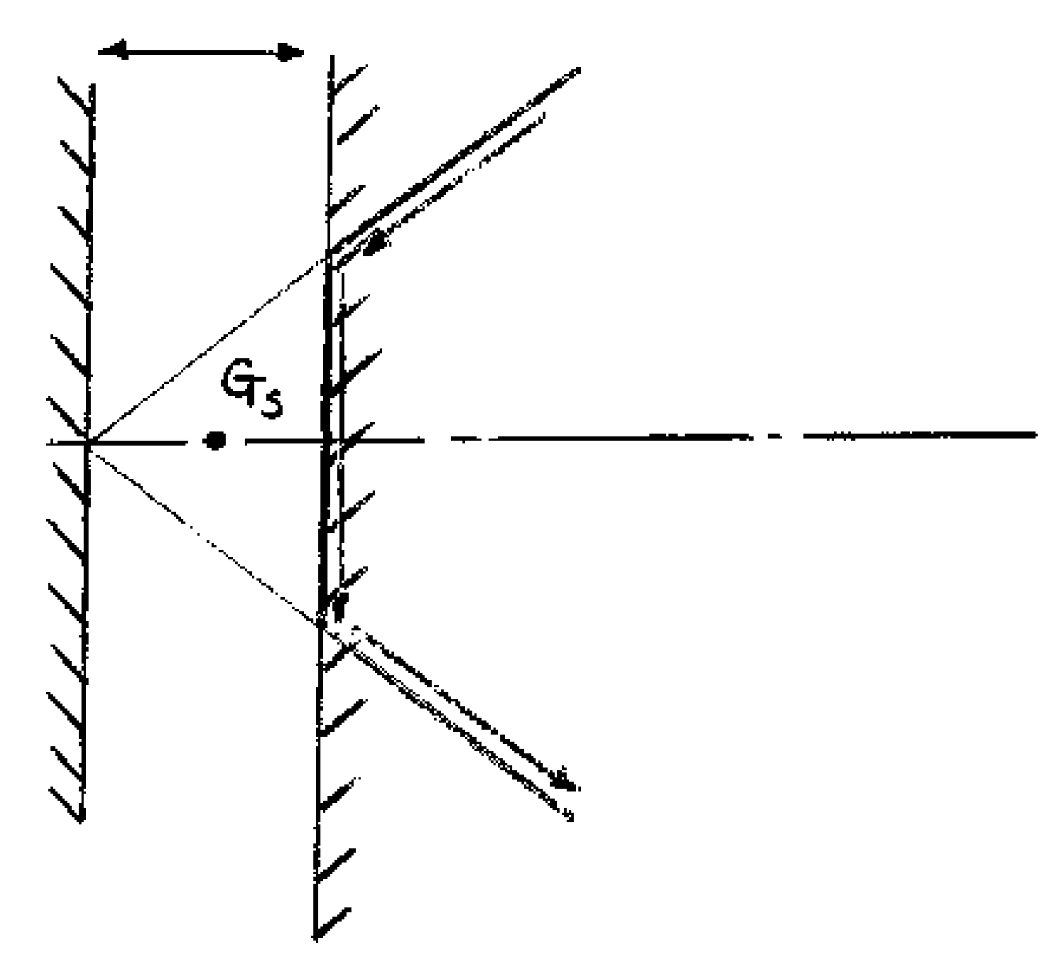
مرکز برش مانند مرکز سطح از مشخصات هندسی مقطع بوده و به بارگذاری مربوط نمی باشد اگر شکلی دارای محور تقارن باشد هم مرکز سطح و هم مرکز برش بر روی آن محور تقارن واقع می شود.

مرکز برش جایی است که اگر نیروی برشی در آن نقطه وارد شود تنش های برشی حاصل از رابطه $\frac{VQ}{It}$ توزیع تنش برشی را در مقطع نتیجه می دهد اگر نیروی برشی در محل دیگری اثر کند با انتقال آن نیرو به محل مرکز برش یک لنگر پیچشی در مقطع حاصل خواهد شد بنابراین در صورت تأثیر نیروی برشی در مرکز برش در مقطع لنگر پیچشی حضور نخواهد داشت. به همین دلیل مرکز برش را مرکز پیچش نیز می گوییم.

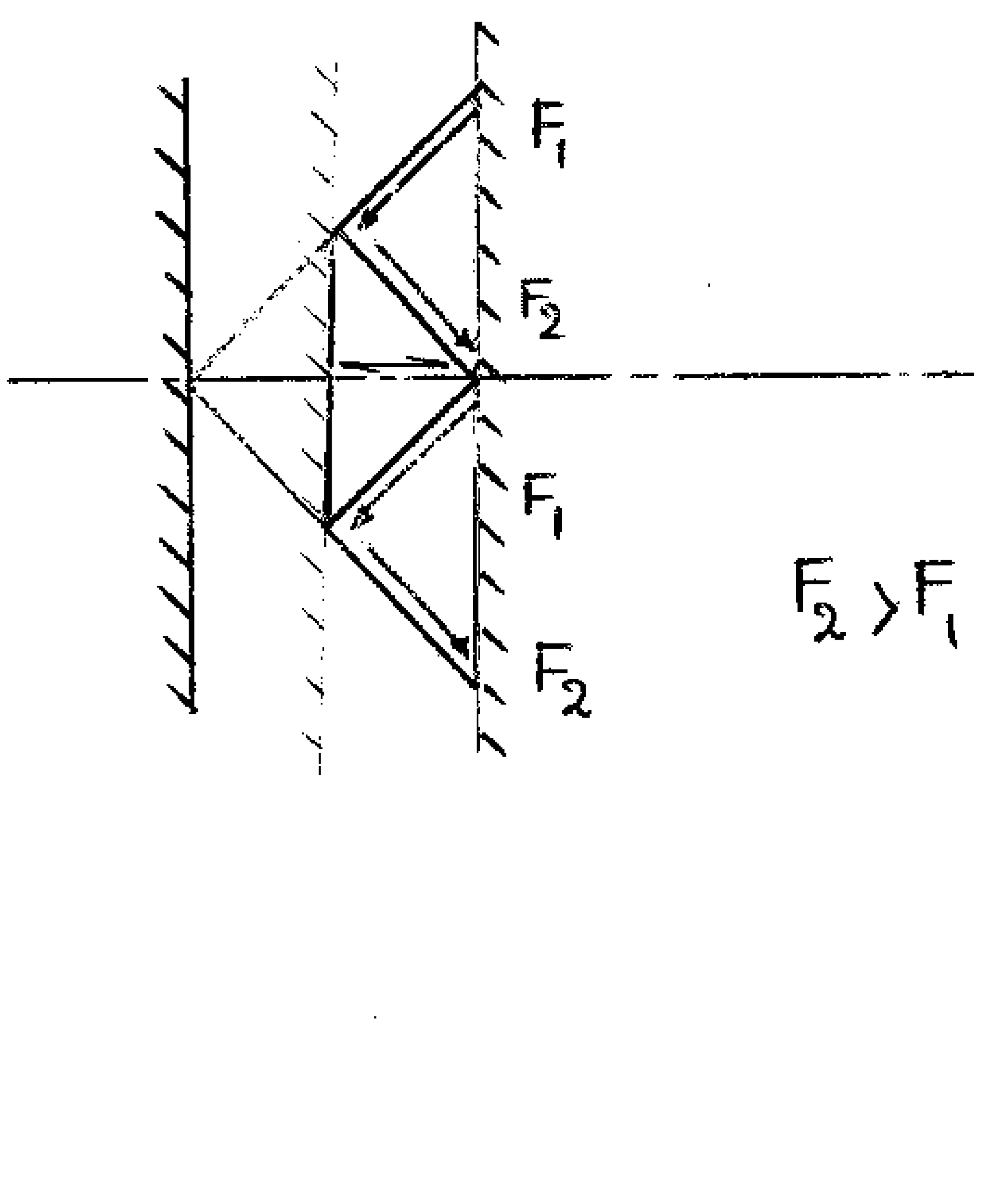
چند نکته در رابطه:






محور تقارن [ مکان هندسی احتمالی مرکز برش ]



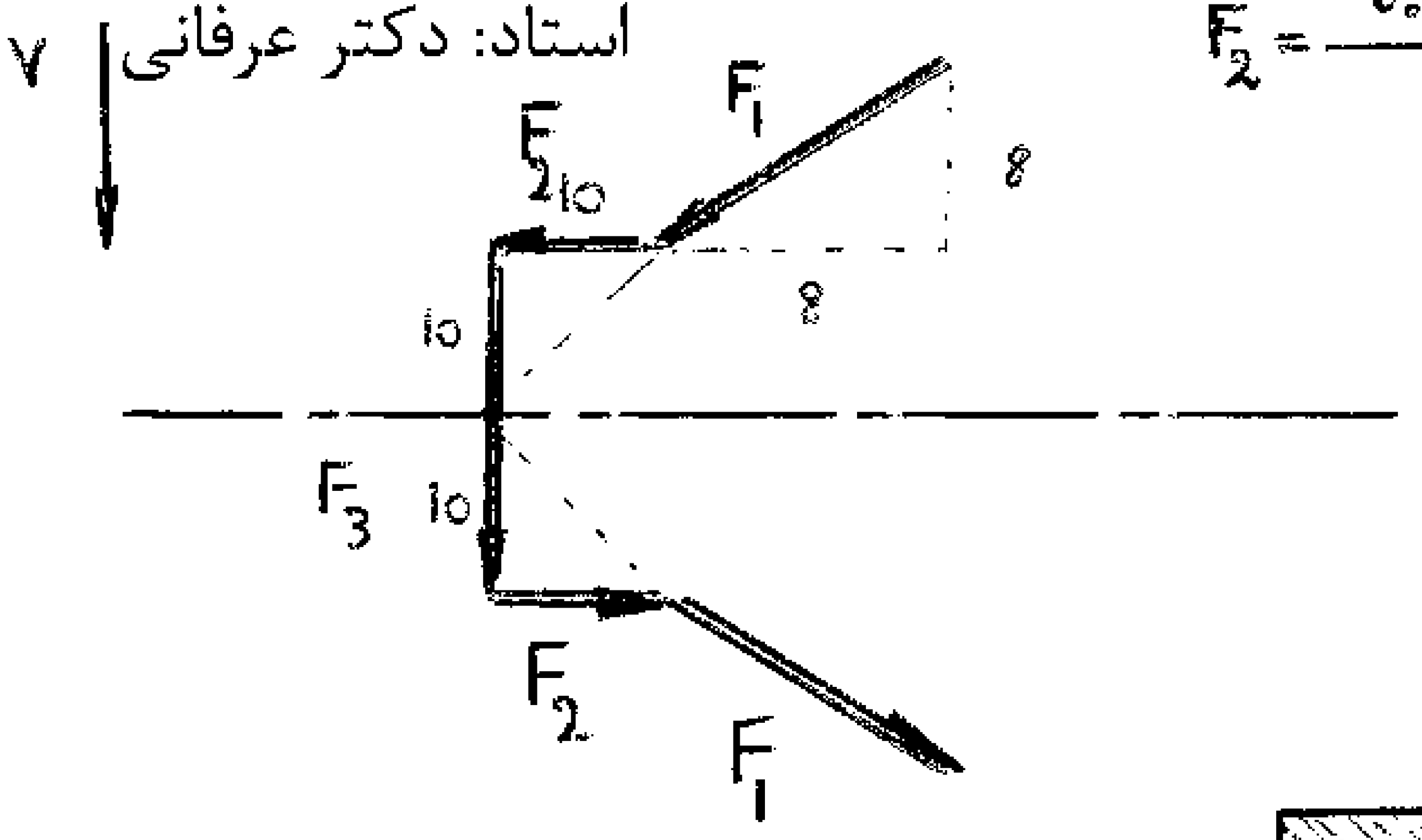

* در مقاطع بسته دارای محور تقارن جریان برش نسبت به محور تقارن دارای تقارن می باشند.
* محل برخورد محور تقارن با مقطع تنش برشی صفر دارد.
* مقاطعی که از دو صفحه مستطیلی جدار نازک تشکیل شده مرکز برش روی محل برخورد دو محور تقارن قرار دارد.

تنظیم: محمد حاج صادقی

استاد: دکتر عرفانی

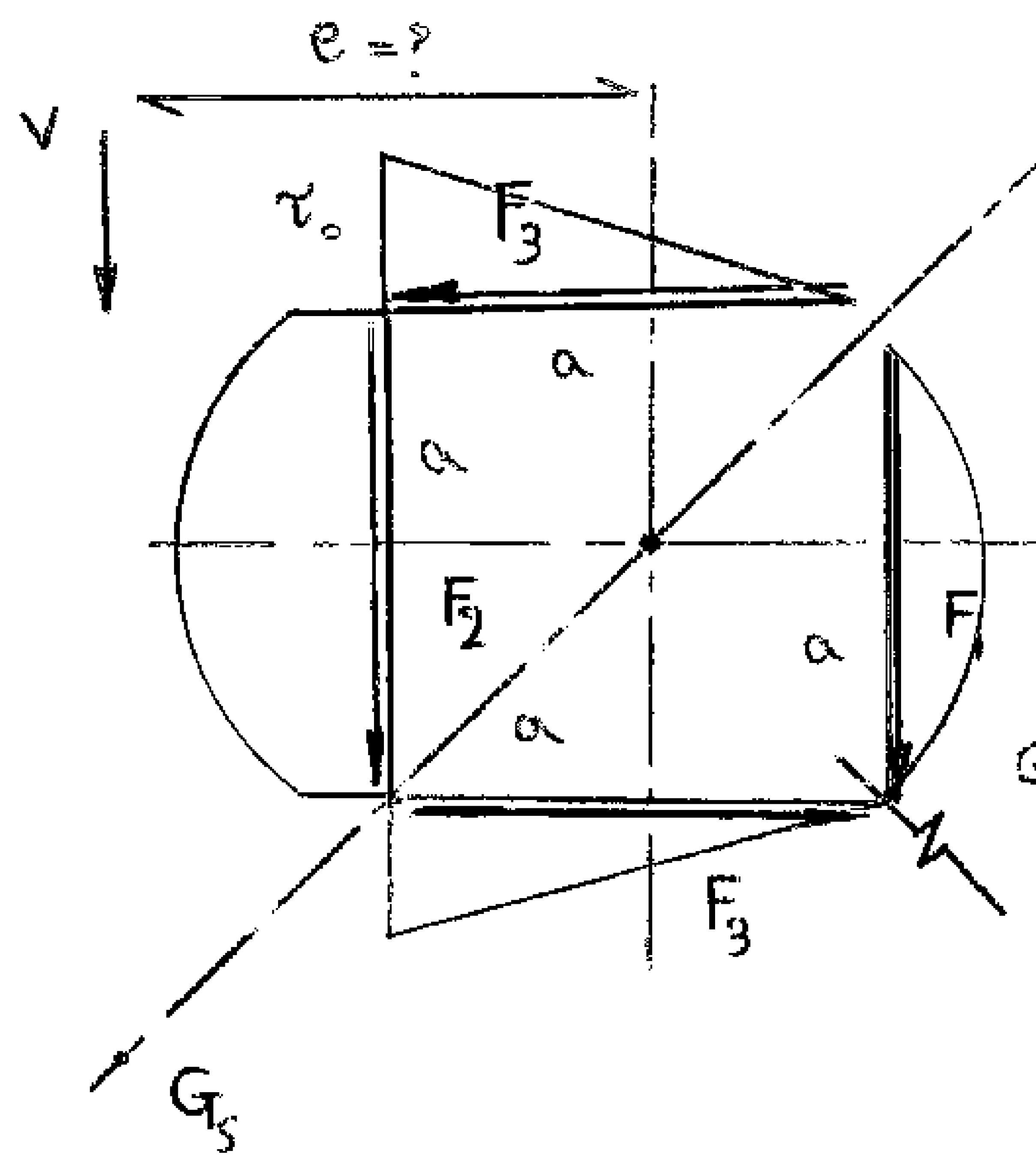
مرکز برش

$$F_2 = \frac{\tau_0 + \tau_1}{2} \times 10$$




$$V \times e = F_2 \times 20$$

مرکز دوران




$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{I_1}{I_2} = \frac{a^3/12}{\frac{a^3}{12} + 2a\left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{1}{7}$$

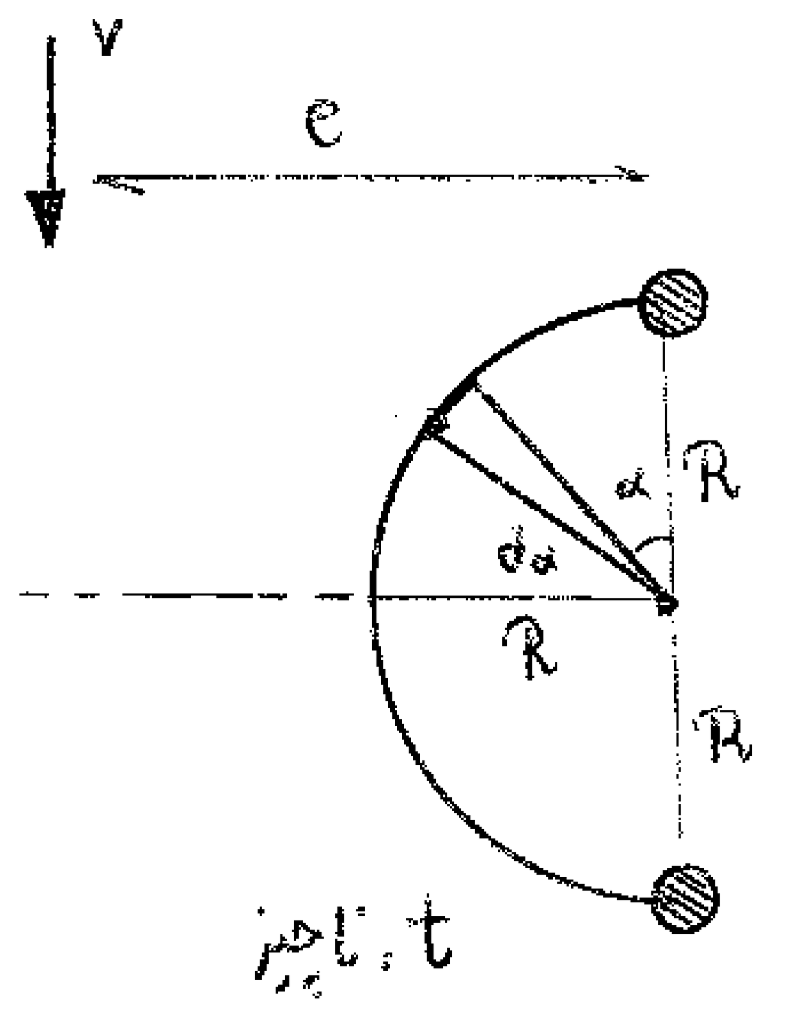
B.L → N.L

$$Q = 0 \longrightarrow \tau = 0 \longrightarrow \begin{cases} F_1 = \frac{1}{8} V \\ F_2 = \frac{7}{8} V \end{cases}$$

$$\tau_0 = \frac{Va(a/2)}{I} \quad , \quad F_3 = \frac{\tau_0}{2} \times a = \frac{Va^3}{4I}$$

$$F_3 = \frac{Va^3}{4\,\frac{8}{12}a^3} = \frac{3}{8} V \quad , \quad \Sigma M_G : V \times e = F_3 \times a + (F_2 - F_1)\left(\frac{a}{2}\right)$$

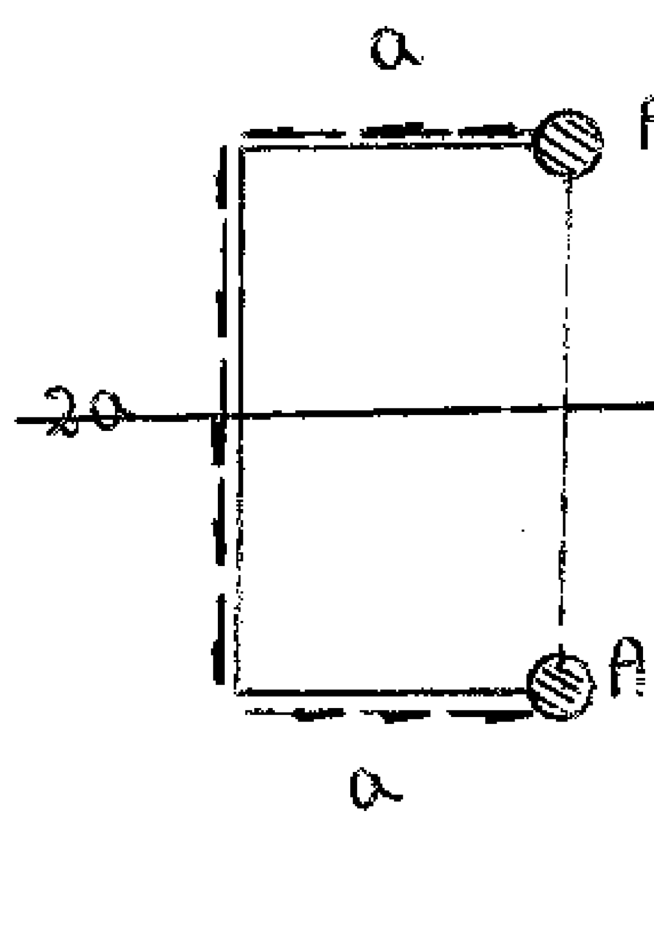
$$\longrightarrow e = 0.75a$$




$$M_0 = \int_0^{\pi} \tau R \, d\alpha \, t R = V \times e$$

$$R^2 t \int_0^{\pi} \frac{VQ}{It} d\alpha = V \times e \longrightarrow \frac{R^2}{I} \int_0^{\pi} Q \, d\alpha = e$$

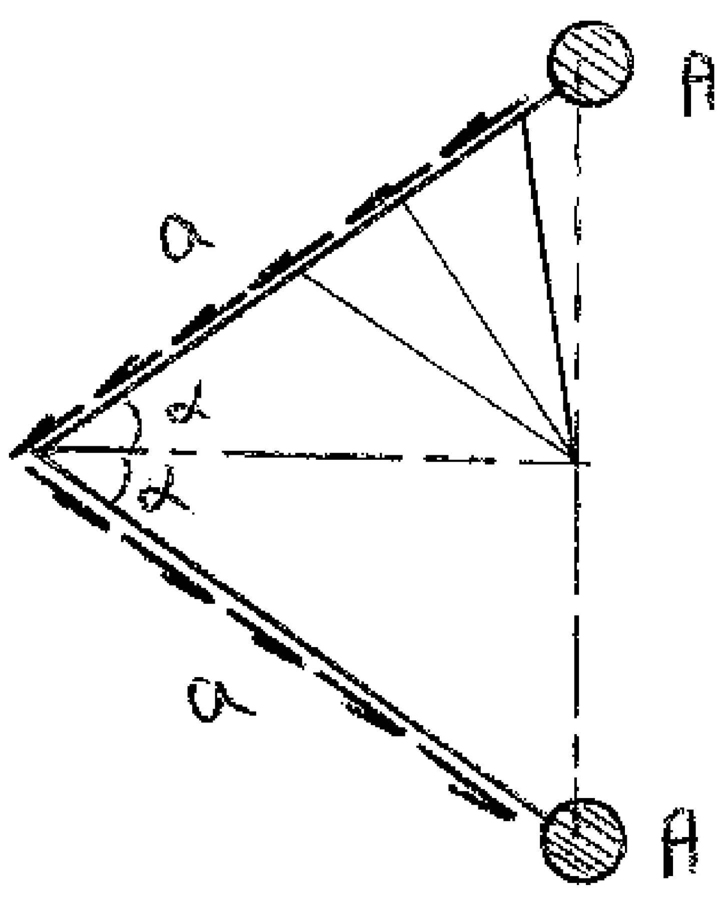
$$\frac{R^2}{I} A R \int_0^{\pi} d\alpha = e \longrightarrow \frac{R R^2 A \alpha |_0^{\pi}}{2AR^2} = e \longrightarrow e = \frac{\pi R}{2}$$




$$e = \frac{a}{2}$$

or

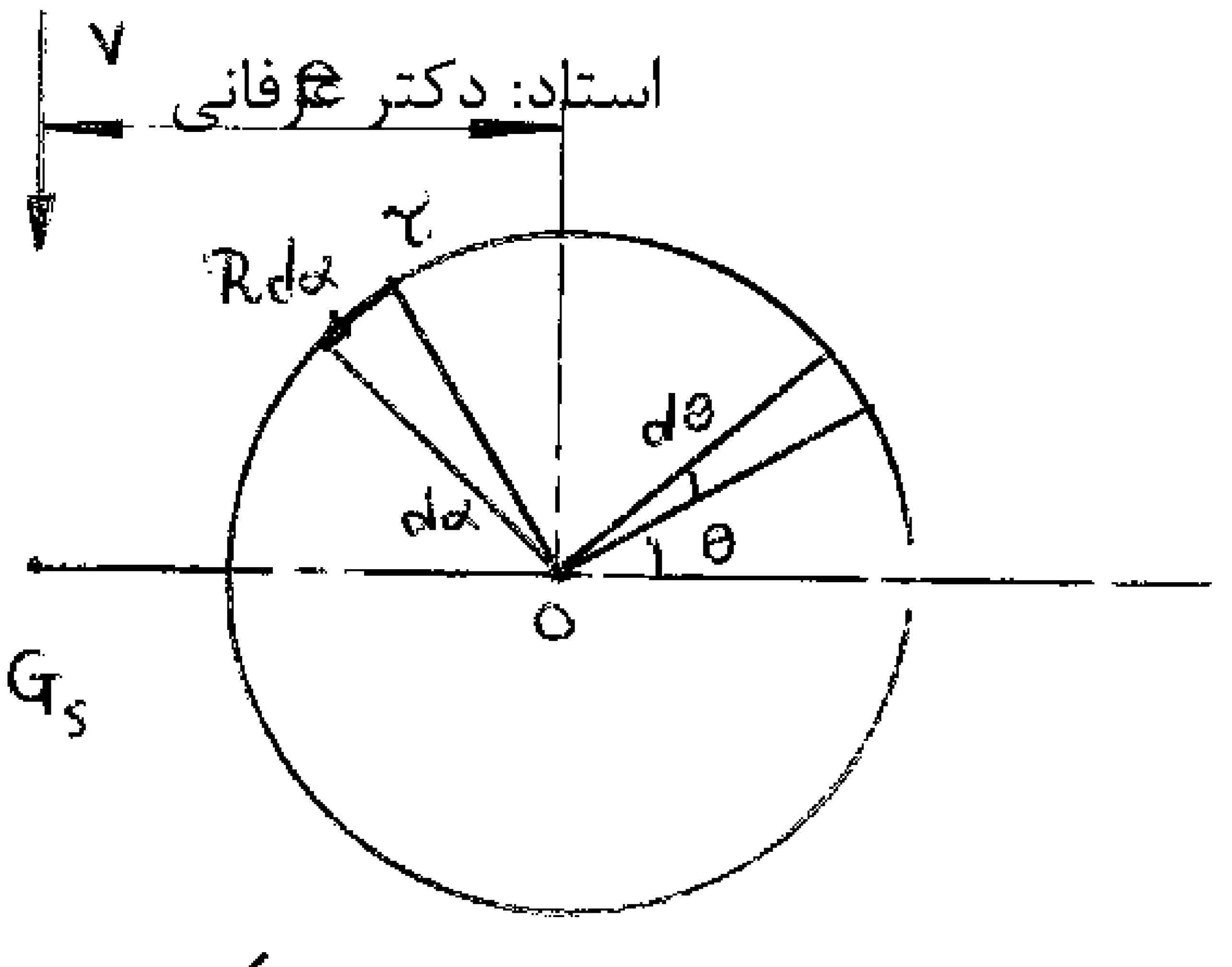
$$e = 2a$$




$$e = a\cos\alpha$$

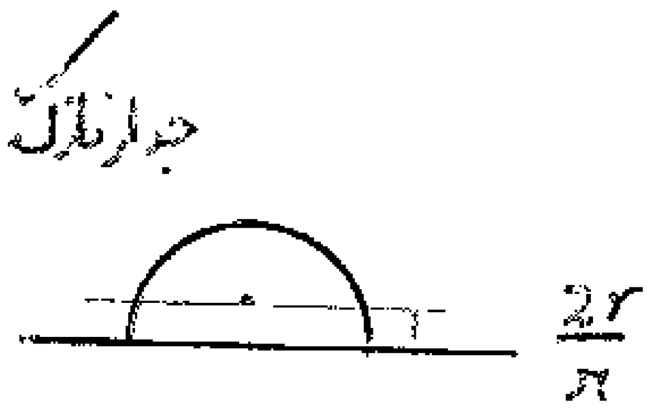
تنظیم: محمد حاج صادقی

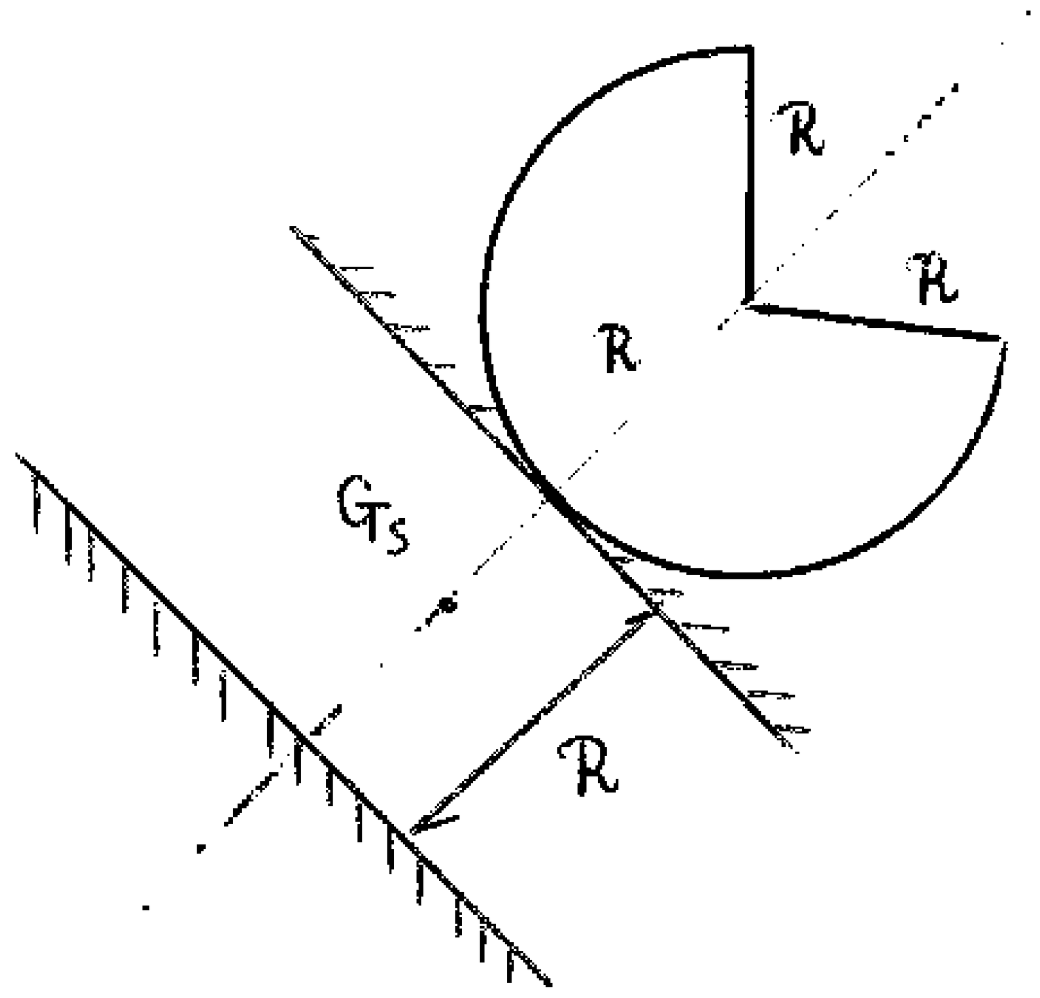
استاد: دکتر عرفانی




$$M_o = \int_0^{2\pi} \tau R\, d\alpha\, t R = V \times e$$

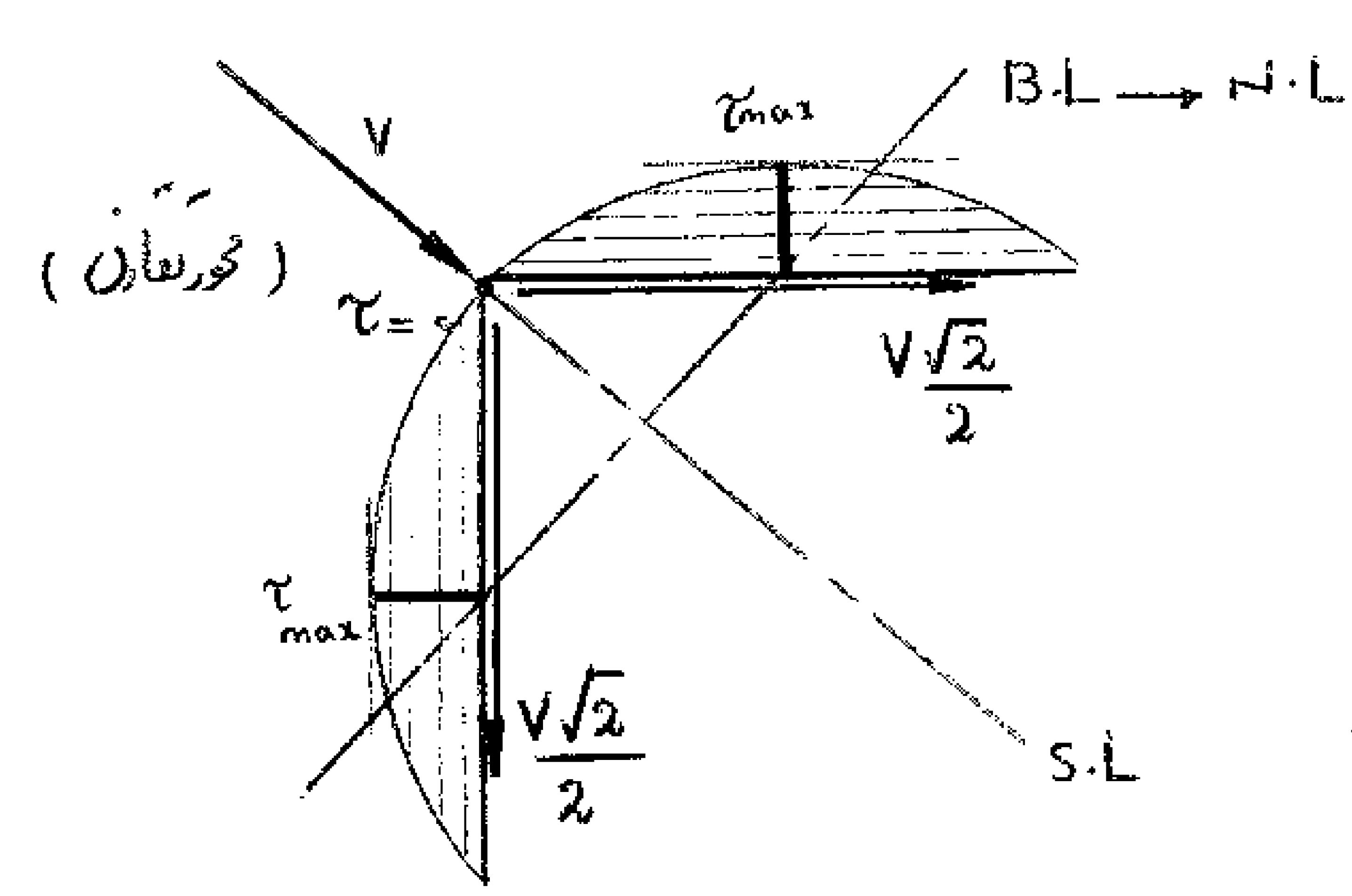
$$\tau = \frac{V\left(Q = \int_0^{\alpha} R\, d\theta\, t R \sin\theta\right)}{(\pi R^3 t)\,t} \longrightarrow \boxed{e = 2R}$$

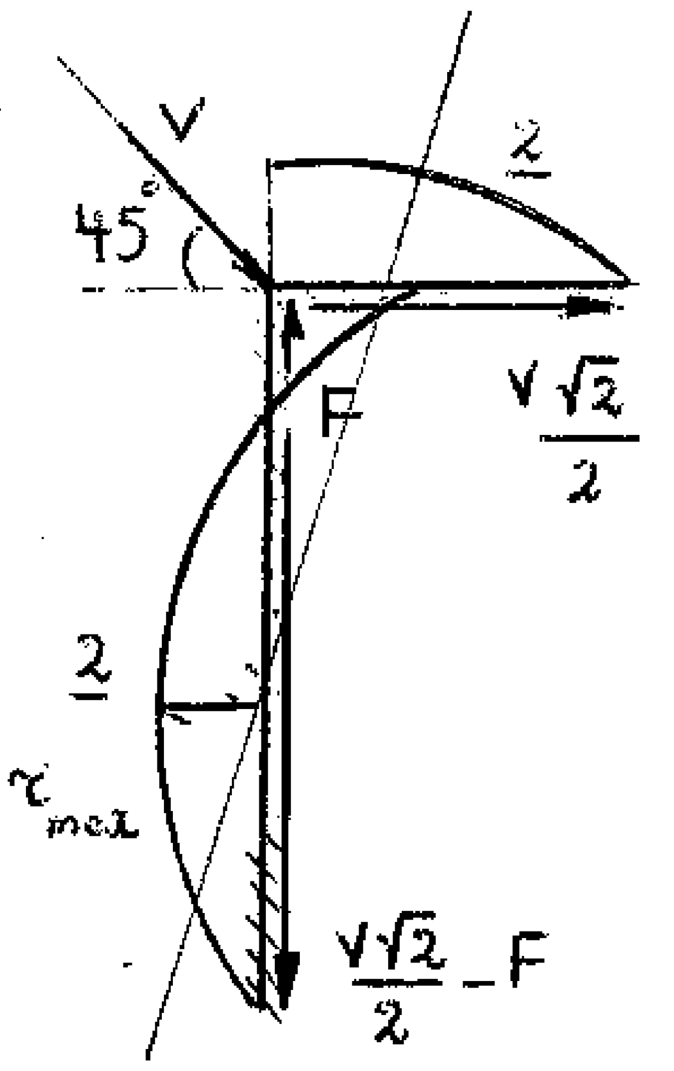


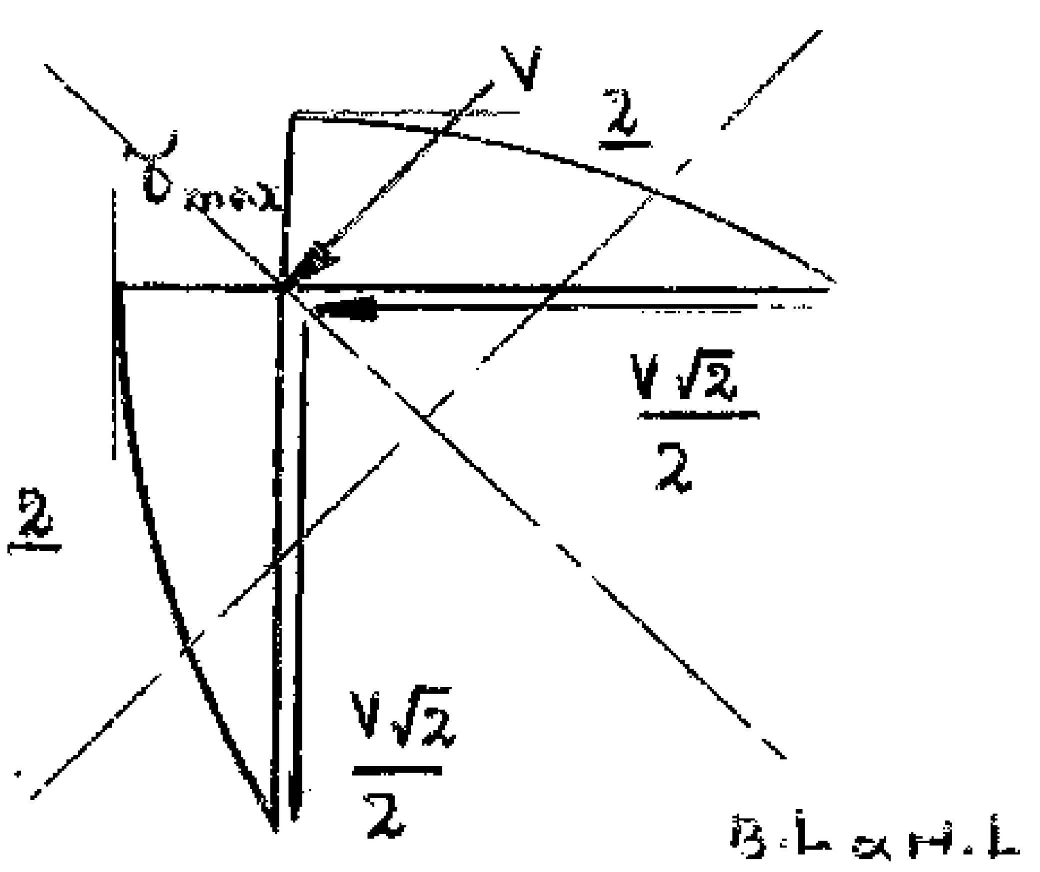



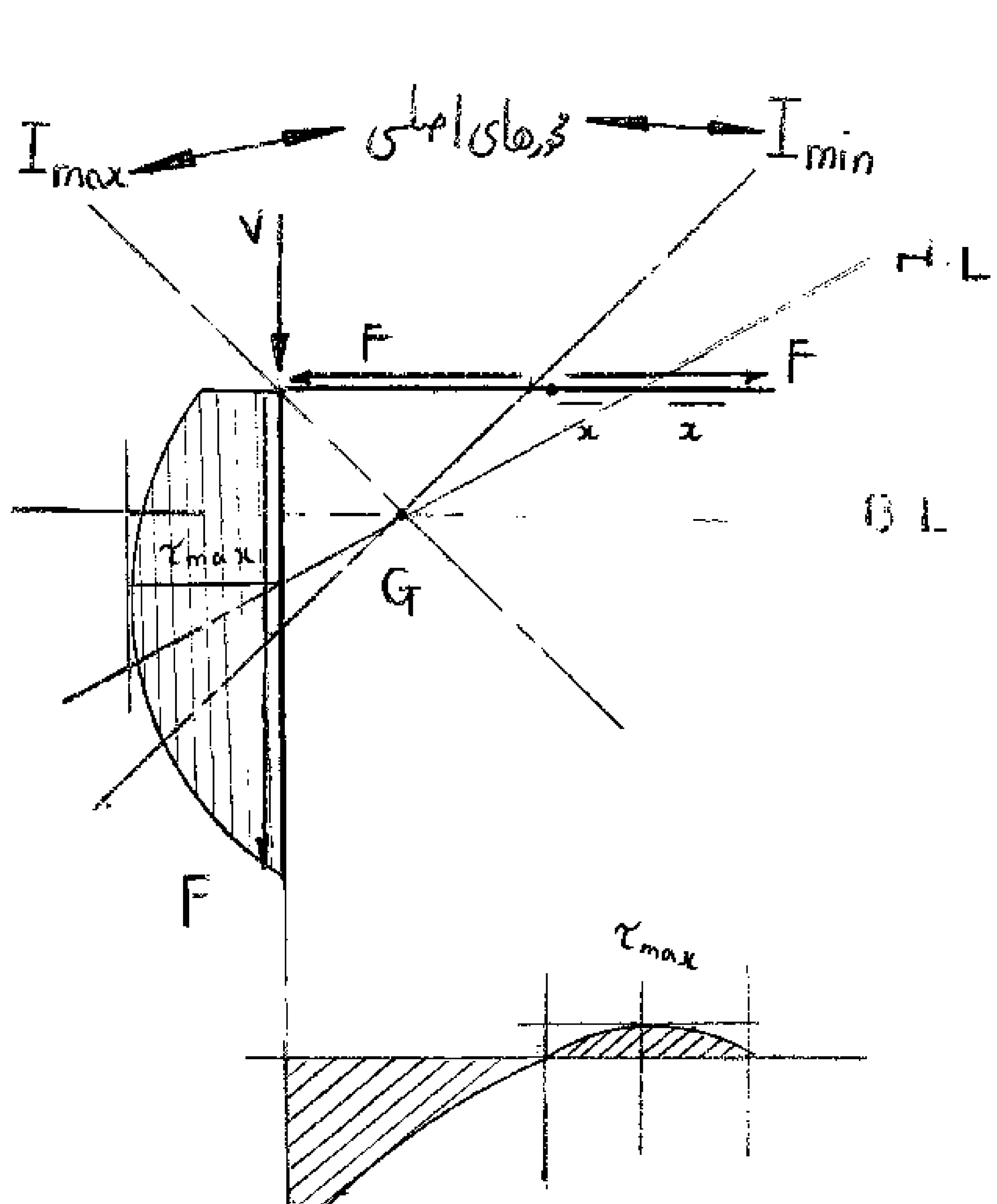

چون بر جدار عمود، پاره خط تبدیل می‌گردد

توزیع تنش بر روی نبشی :



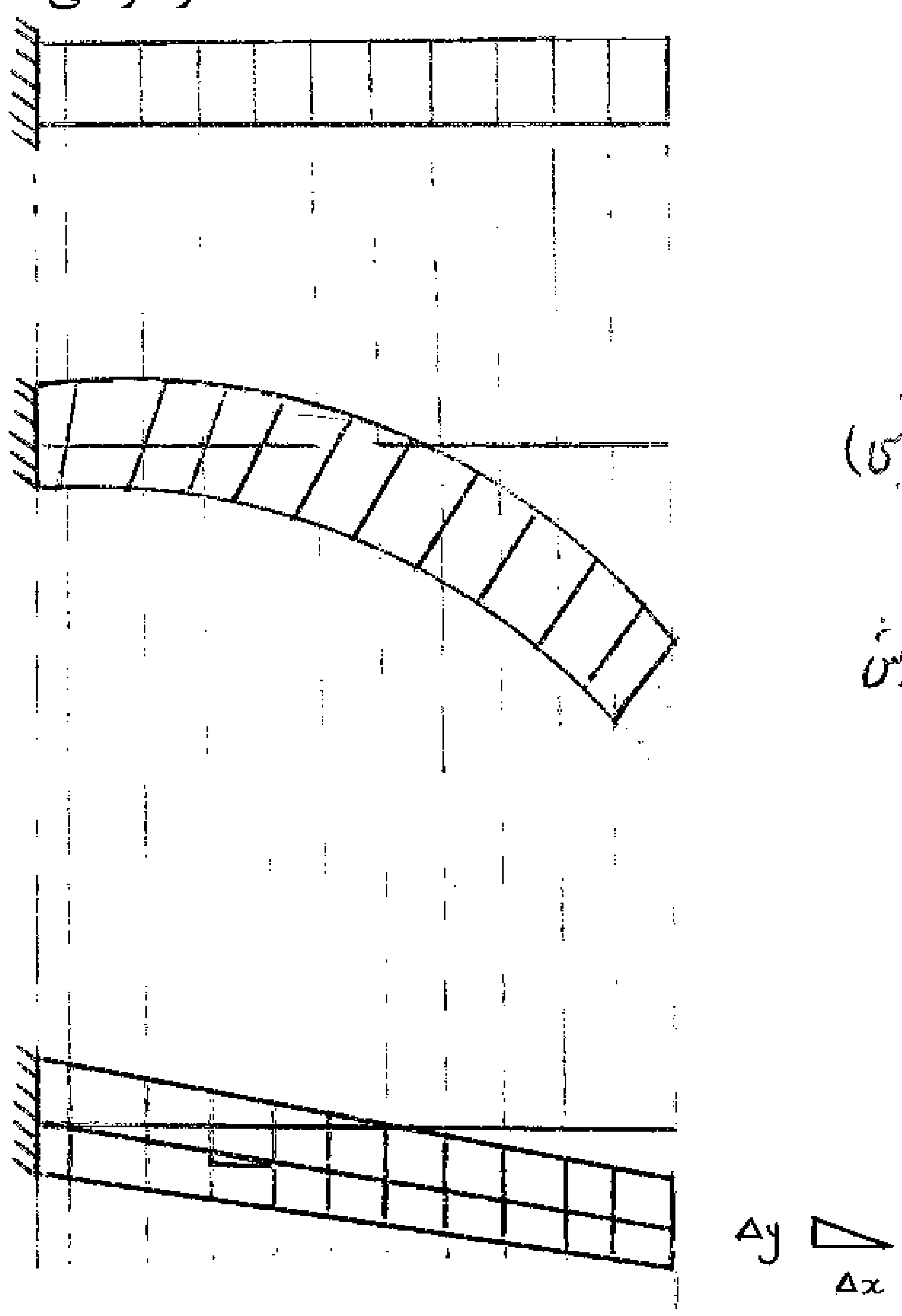



تنظیم: محمد حاج صادقی

استاد: دکتر عرفانی

## تغییر شکل های برشی :




$y'' = \frac{M}{EI}$ تغییر شکل خمشی به واسطه دوران مقاطع ایجاد می شود (دوران نسبی)

تغییر شکل برشی به واسطه لغزش مقاطع ایجاد می شود

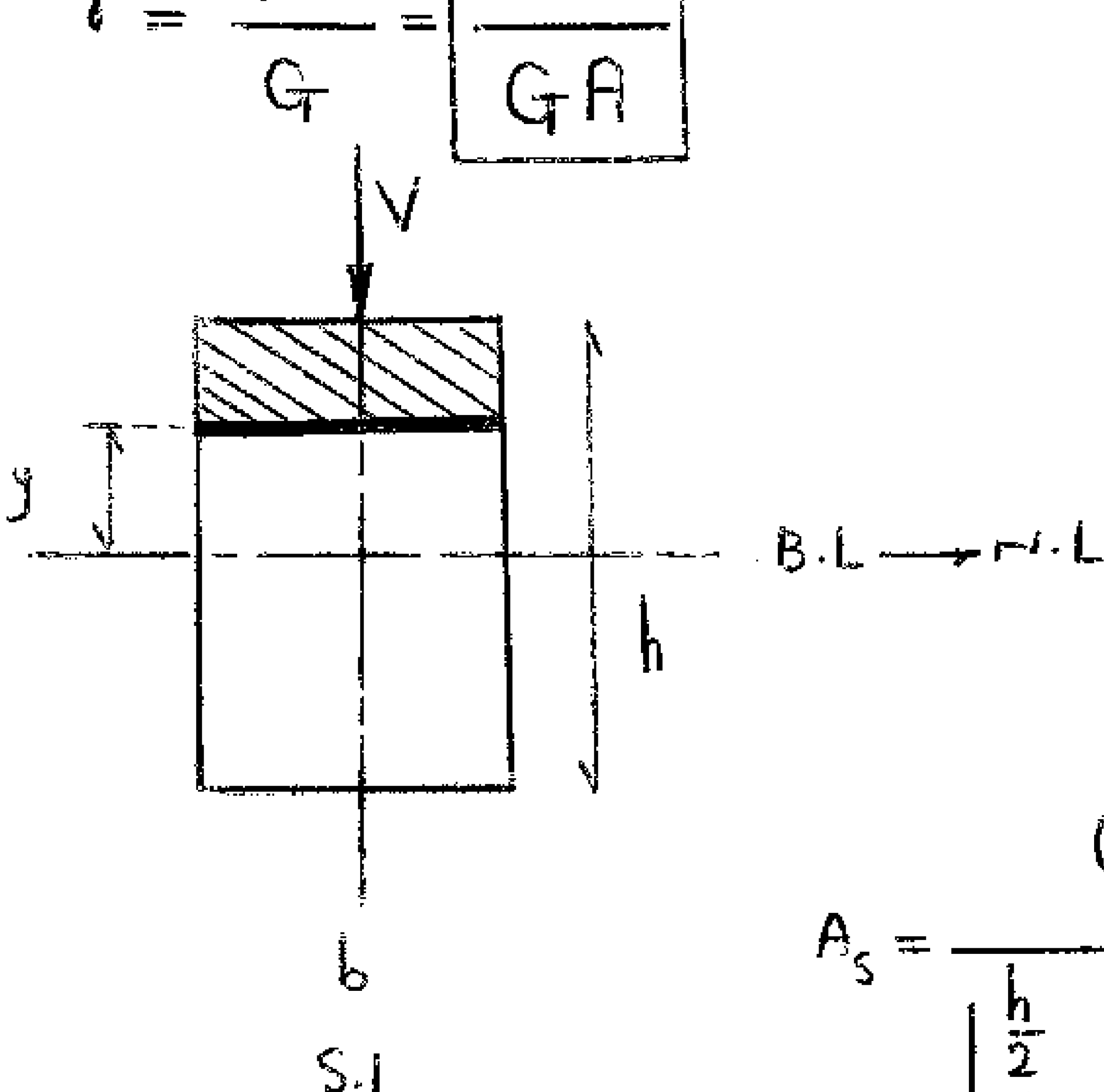
$$\text{لغزش نسبی} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{V}{G\,\dfrac{I^2}{\dfrac{\int \frac{Q^2}{b}\,dy}{dL}}} = \frac{V}{G A_s}$$

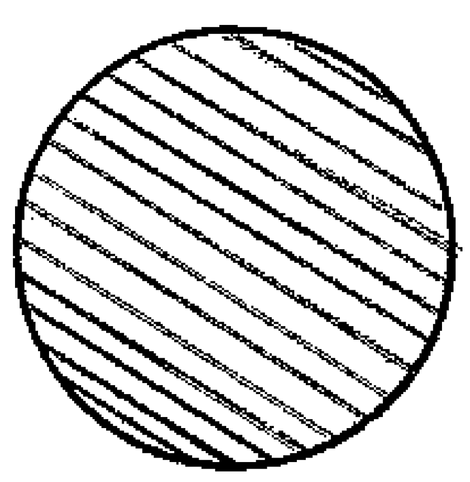
$A_s$ : مساحت برشی

$A_s$ : مساحت شکلی است فرضی که توزیع تنش برشی روی آن یکنواخت بوده ولی تغییر شکل های برشی آن معادل شکل اصلی می باشند.

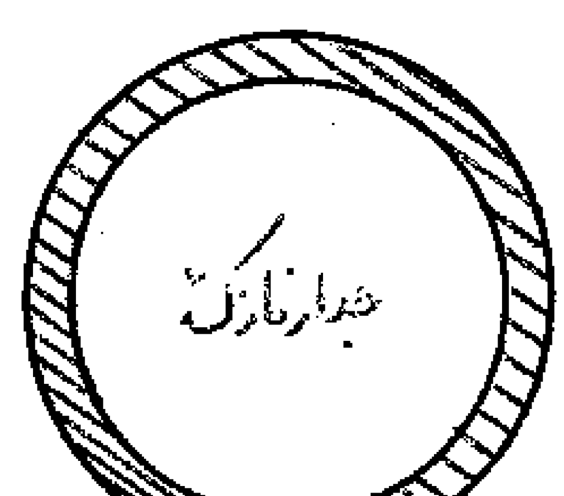
$A_s$ : همواره از $A$ کوچکتر بوده و در صورتی که توزیع یکنواخت تر از تنش برشی بر روی مقطع باشد $A_s$ به $A$ نزدیک تر می شود.

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \boxed{\frac{V}{GA}}$$



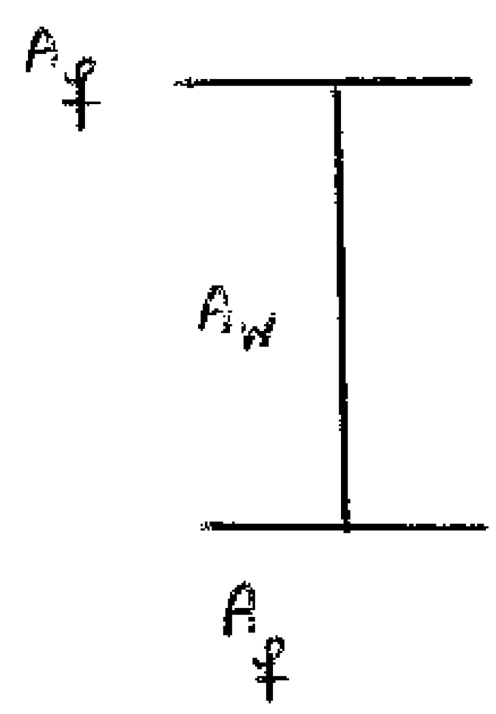



$A_s = \frac{3}{4} A$




$A_s = \frac{1}{2} A = \pi R t$

$$A_s = \frac{\left(bh^3/12\right)^2}{\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\left[b\left(\frac{h}{2}-y\right)\left(\frac{h}{2}+y\right)/2\right]^2}{b}\,dy}$$



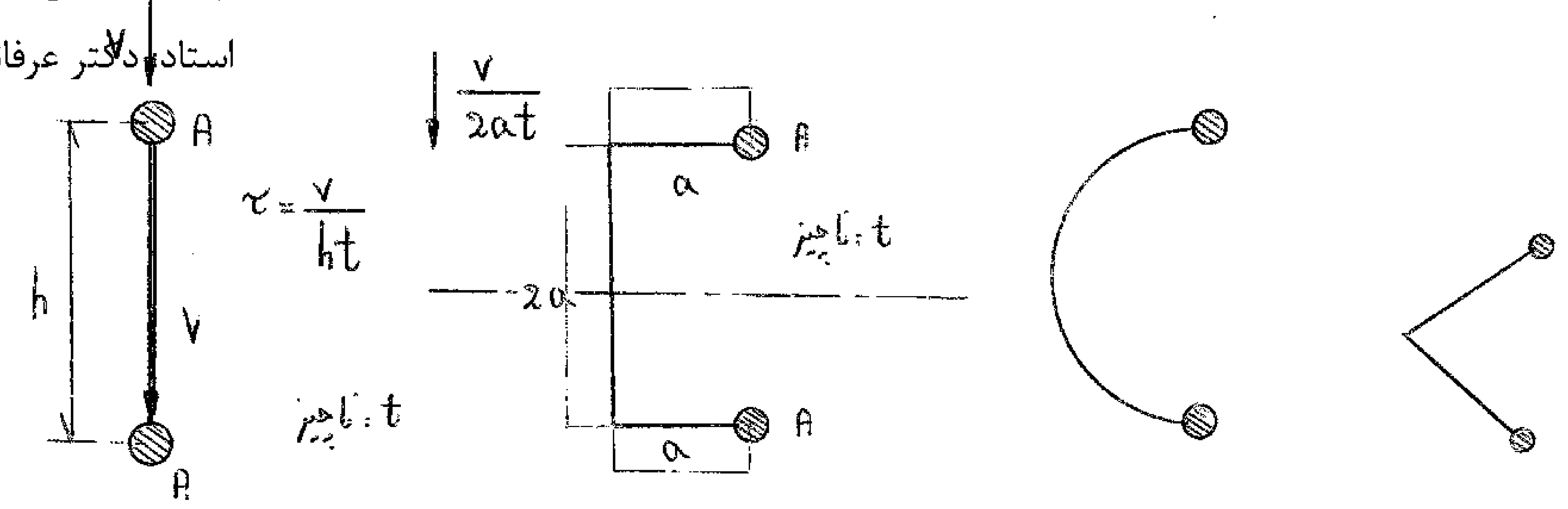

$A_{sy} \approx A_w$

$A_{sx} = \frac{5}{6} \times 2 A_f$

$$\boxed{A_s = \frac{5}{6} A}$$

تنظیم: محمد حاج صادقی

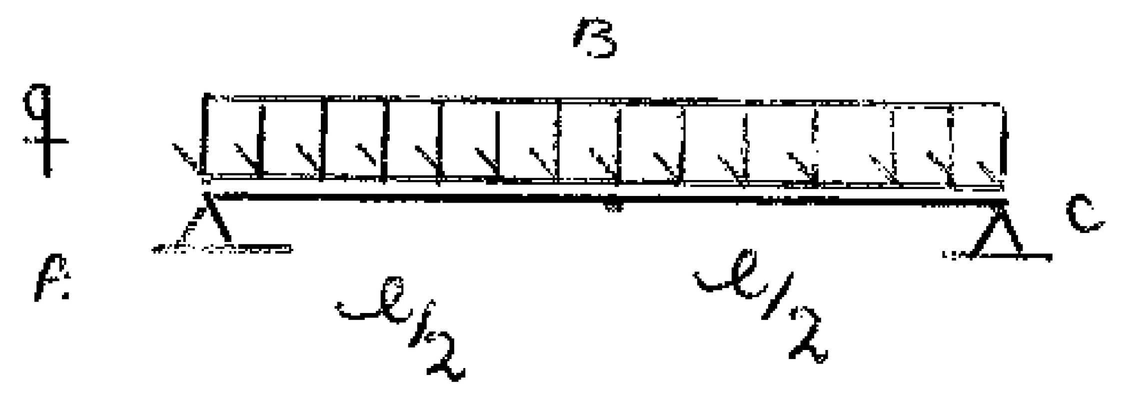
استاد: دکتر عرفانی




$$\tau = \frac{V}{ht}$$

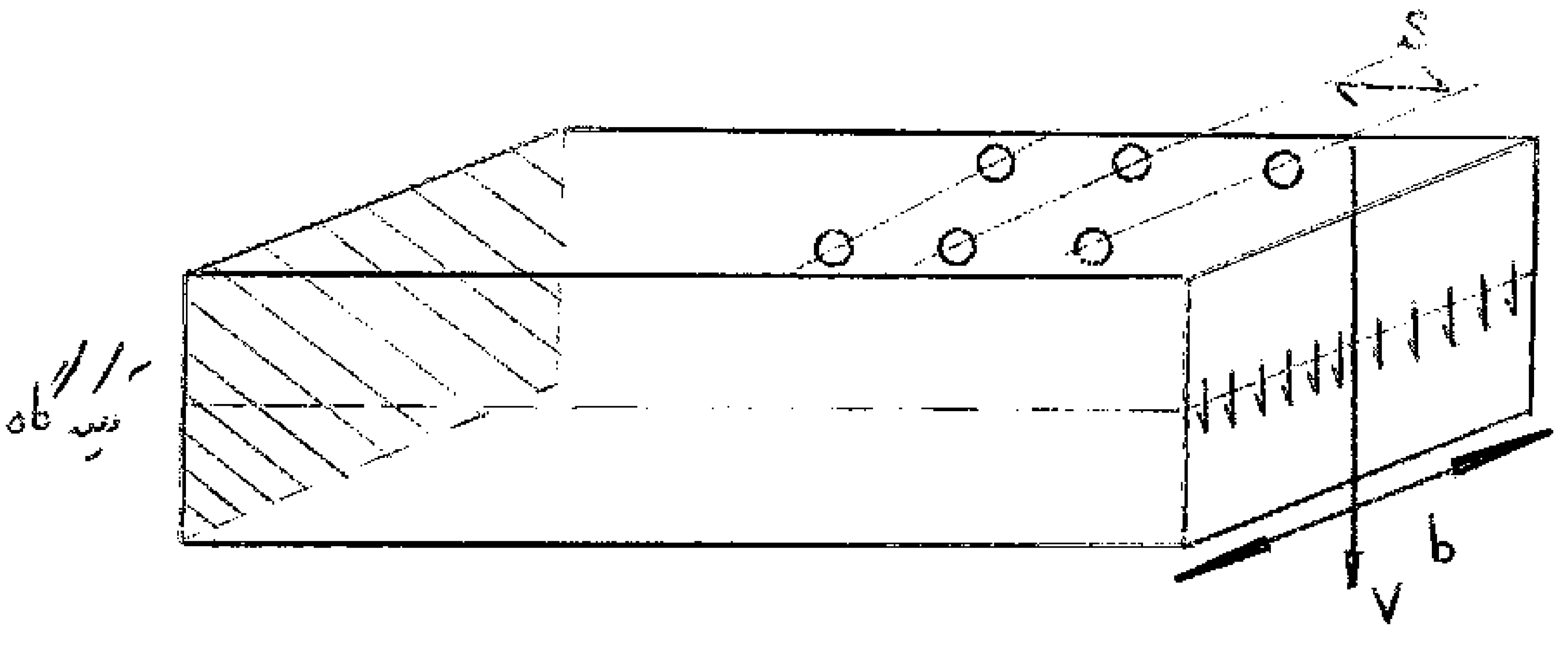
$$A_s = ht \qquad A_s = \frac{\left[2Aa^2\right]^2}{\int \frac{\left[A.a\right]^2}{t}\,dy} = \frac{4A^2a^4}{\frac{A^2a^2}{t}4a} = at$$

مطلوب است تغییر مکان برشی B :

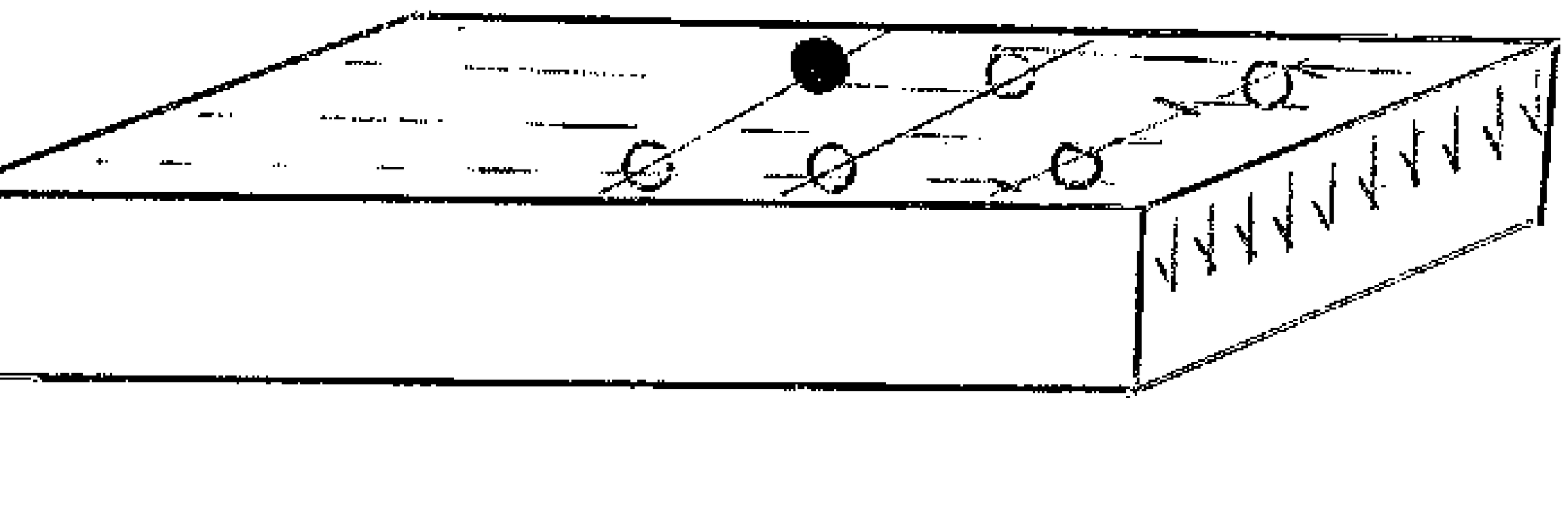



$$\Delta y_{BS} = \int_A^B \frac{\Delta y}{\Delta x}\,dx = \int_A^B \frac{V}{GA_s}\,dx \quad , \quad \Delta y_{BS} = \frac{1}{GA_s}\int_A^B V\,dx = \frac{ql^2}{8GA_s}$$

اتصالات برشی :

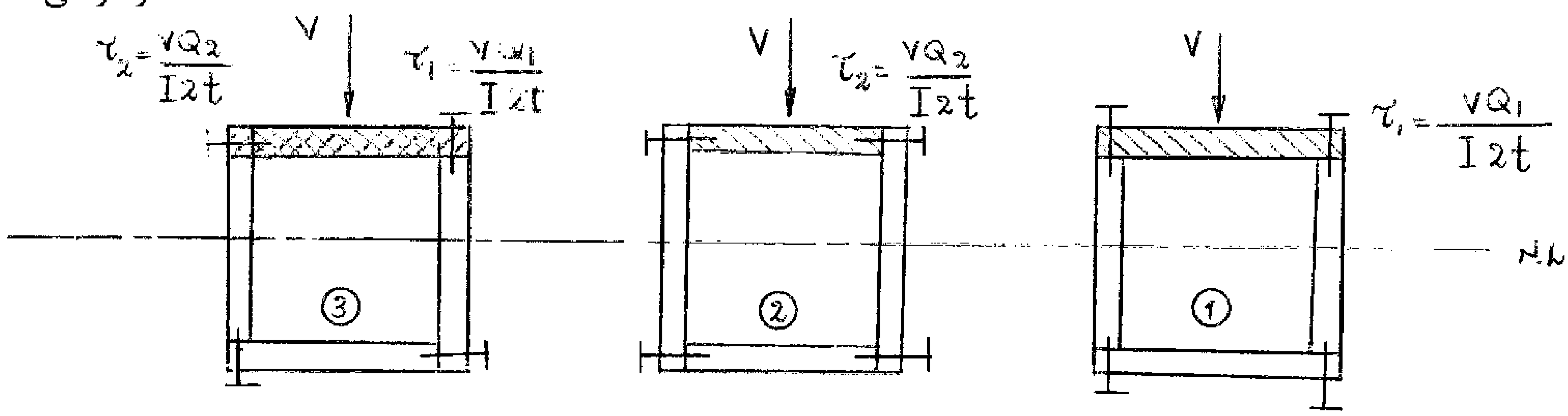



$$\tau = \frac{VQ}{Ib}$$



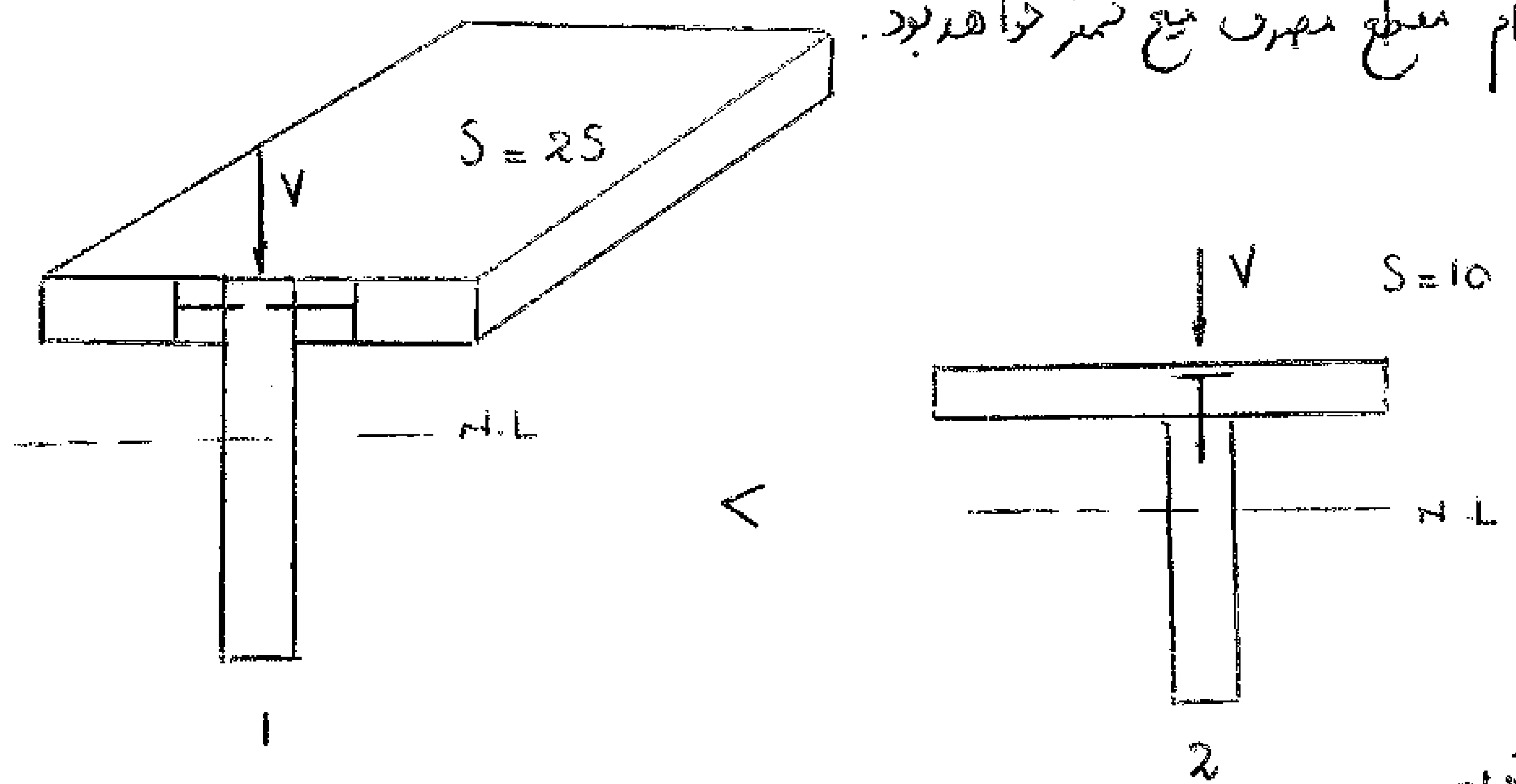
اگر وسیلهٔ اتصال چسب باشد. $\tau = \frac{VQ}{Ib} \leqslant \tau_{\text{مجاز چسب}}$

سهم نیروی هر ردیف اگر وسیلهٔ اتصال میخ باشد. $= (\tau.b)S \leqslant A\tau_{\text{مجاز میخ}} \longrightarrow q.S \leqslant A\tau_{\text{مجاز میخ}}$

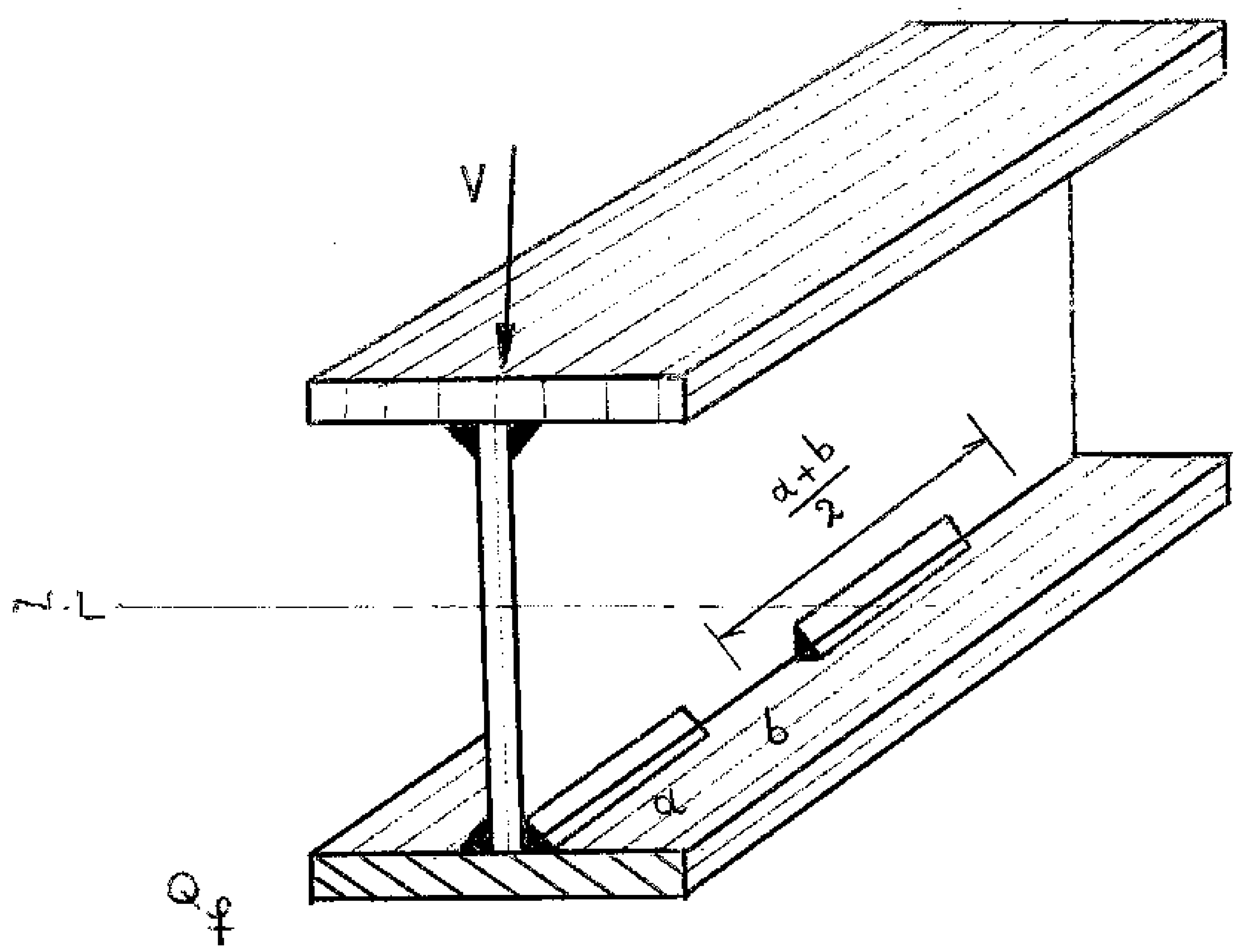



اگر وسیله اتصال چسب باشد در کدام مقطع نیاز به چسب با تنش مجاز بیشتری است. 1 و 3

اگر وسیله اتصال میخ باشد در کدام مقطع مصرف میخ کمتر خواهد بود.



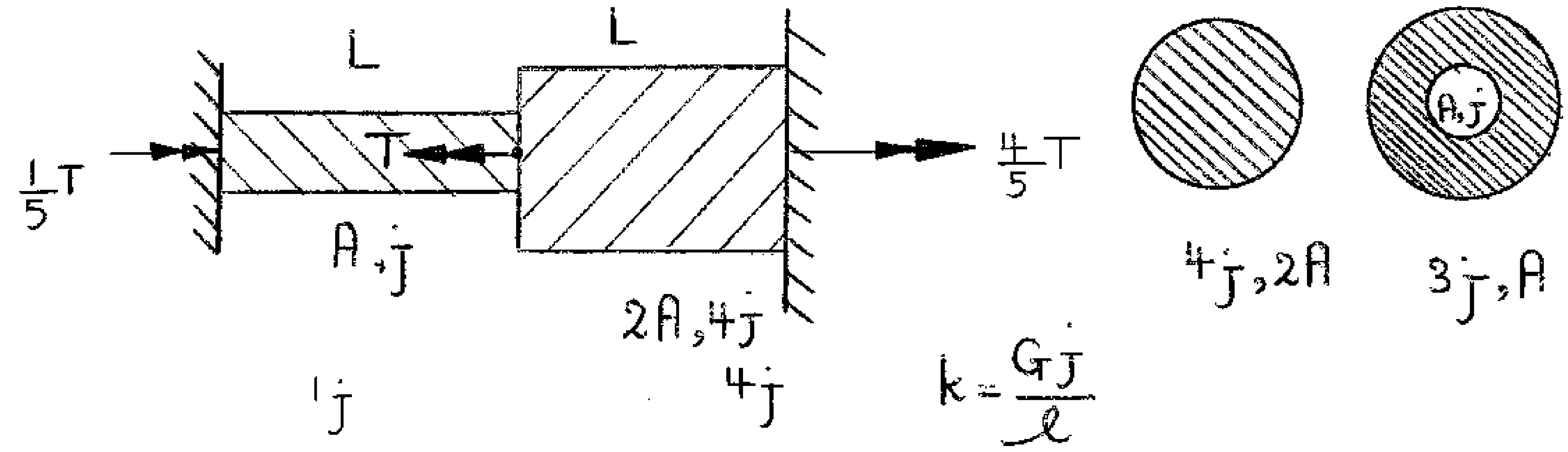

مقطع دوم هم چسب و هم میخ بیشتری می خواهد.




$D_e$

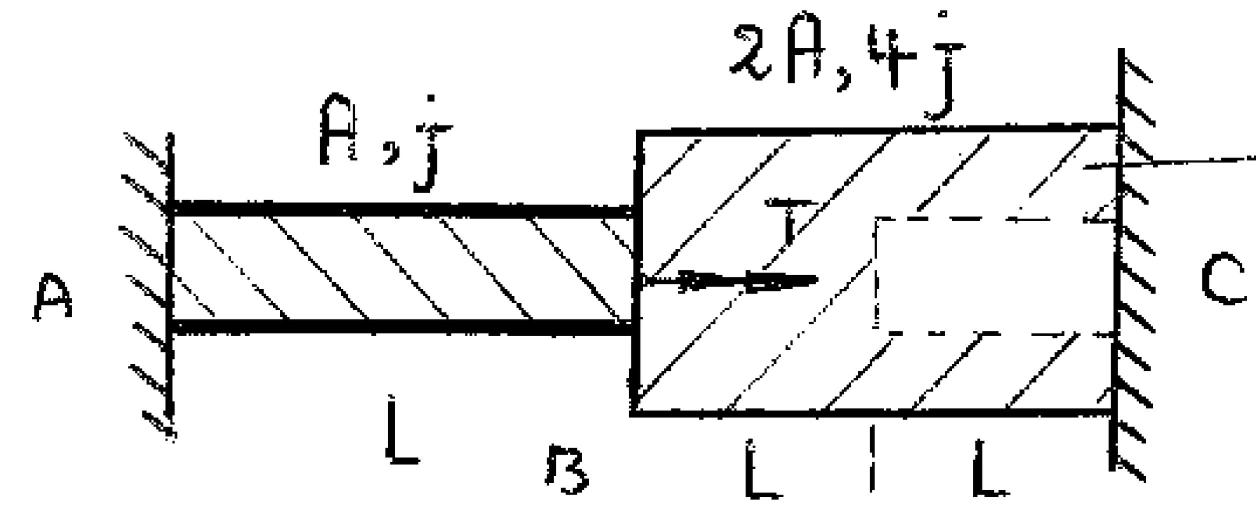
$$(a+b)\left(q_f=\frac{VQ_f}{I}\right) \leq 2aD_e\,\tau_{\text{مجاز برشی}}$$

استاد: دکتر عرفانی




$'j$ $4j$ $k=\frac{Gj}{l}$

اگر در نصف طول عضو با مقطع دایره سمت چپ سوراخی ایجاد کنیم که مساحت مقطع باقی مانده نصف شود تکیه گاه C به چه نسبتی تغییر خواهد کرد.



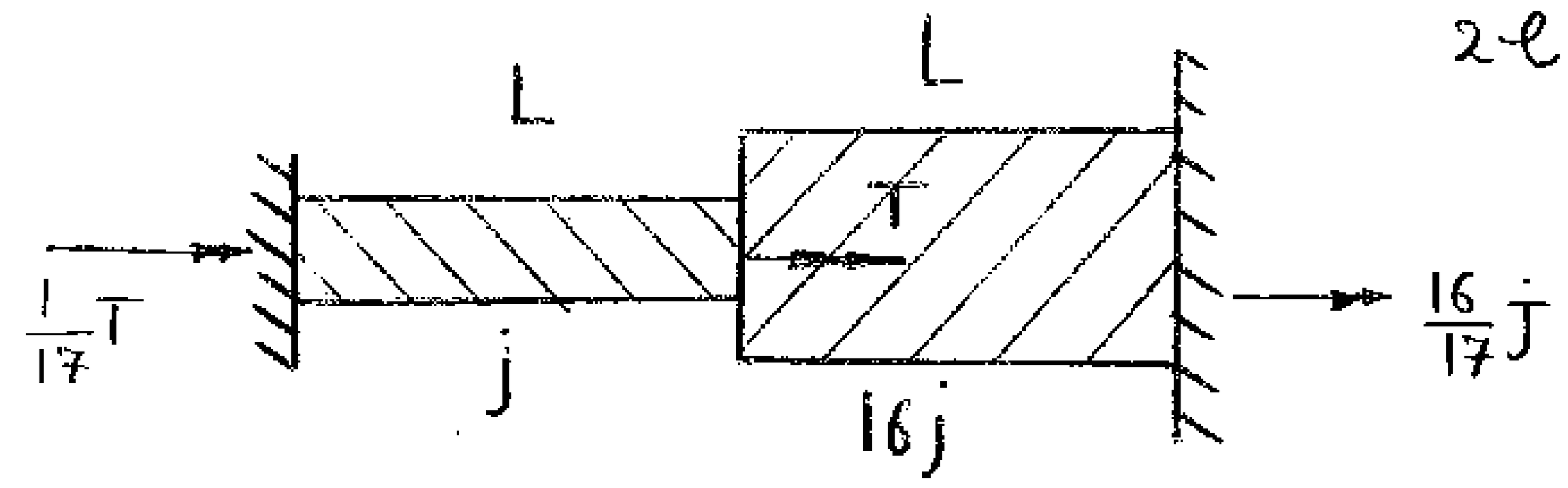

به نسبت سختی قبل از ایجاد سوراخ و بعد از ایجاد سوراخ می نویسیم.

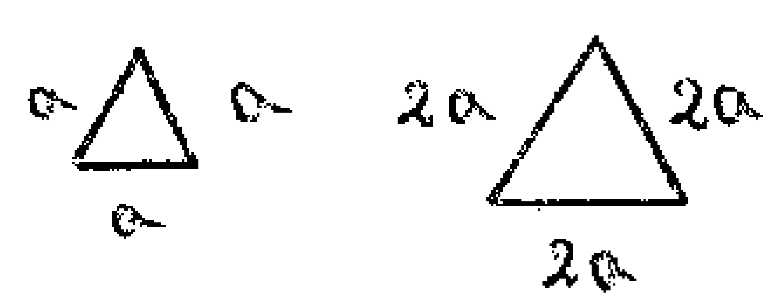
دو فنر با هم سری اند

* حالت ۱: * حالت اولیه قبل از ایجاد سوراخ

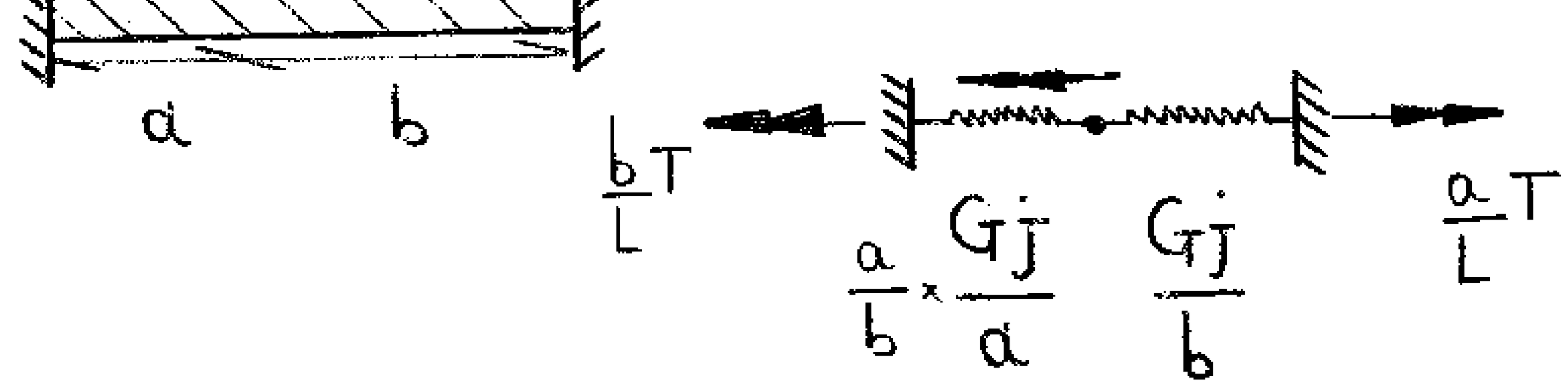
فقط برای تکیه گاه C می نویسیم:

$$\frac{T_{C_2}}{T_{C_1}}=\frac{\dfrac{1}{\frac{L}{G4j}+\frac{L}{G3j}}}{\dfrac{G4j}{2l}}=\frac{\cancel{12}^{6}/7}{\cancel{2}_{1}}=\frac{6}{7}$$

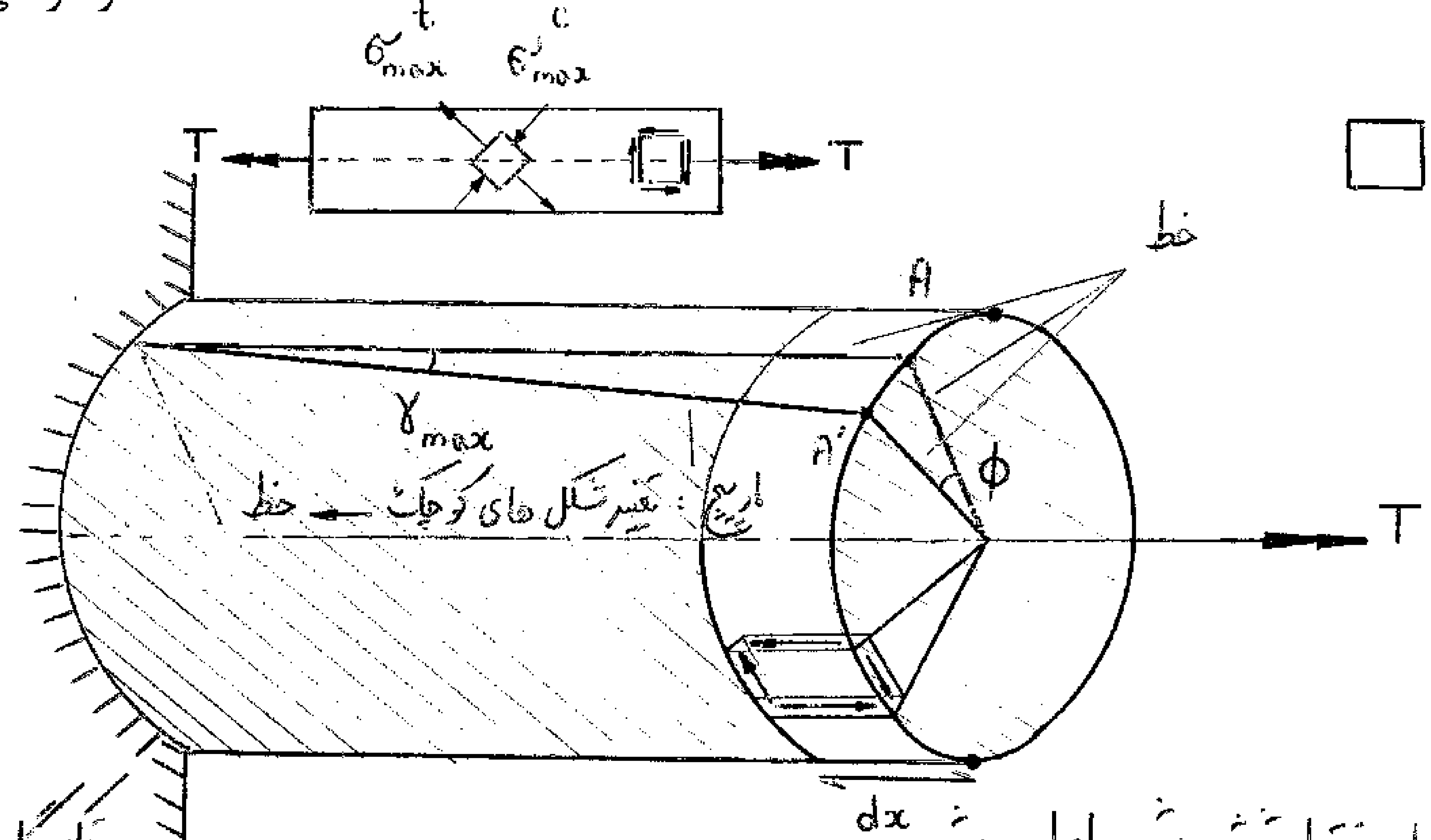


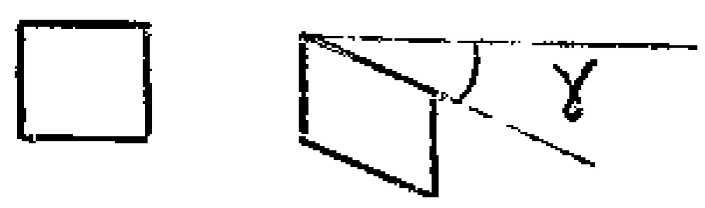




همه روابط مربوط به نیروی محوری و میله ها در مورد گشتاور پیچشی با شفت ها صادق است.



پیچش :



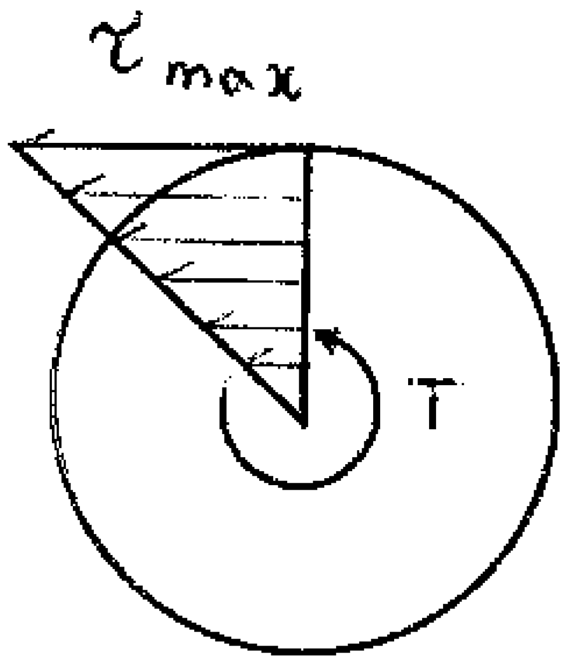




$$\gamma_{max} = \frac{\tau_{max}}{G}$$

می پذیریم که تحت اثر پیچش در مقطع فقط تنش برشی حاصل می شود.

در مقاطع دایره‌ای به دلیل مستقیم باقی ماندن شعاع پس از پیچش، می توان نتیجه گرفت که توزیع کرنش برشی به صورت خطی و متناسب با فاصله از مرکز می باشد.

در صورتی که رابطه تنش کرنش را خطی فرض کنیم توزیع تنش برشی نیز خطی خواهد بود.




$$\boxed{\tau = \frac{T\rho}{J} \quad , \quad J = \frac{\pi R^4}{2} = 2I}$$

$$\tau_{max} = \frac{TR}{J} = \frac{T}{J/R} = \boxed{\frac{T}{W_T}}$$

$W_T$ : اساس مقطع پیچشی

$$\sigma^c_{max} = \sigma^t_{max} = \tau_{max} = \frac{TR}{J}$$

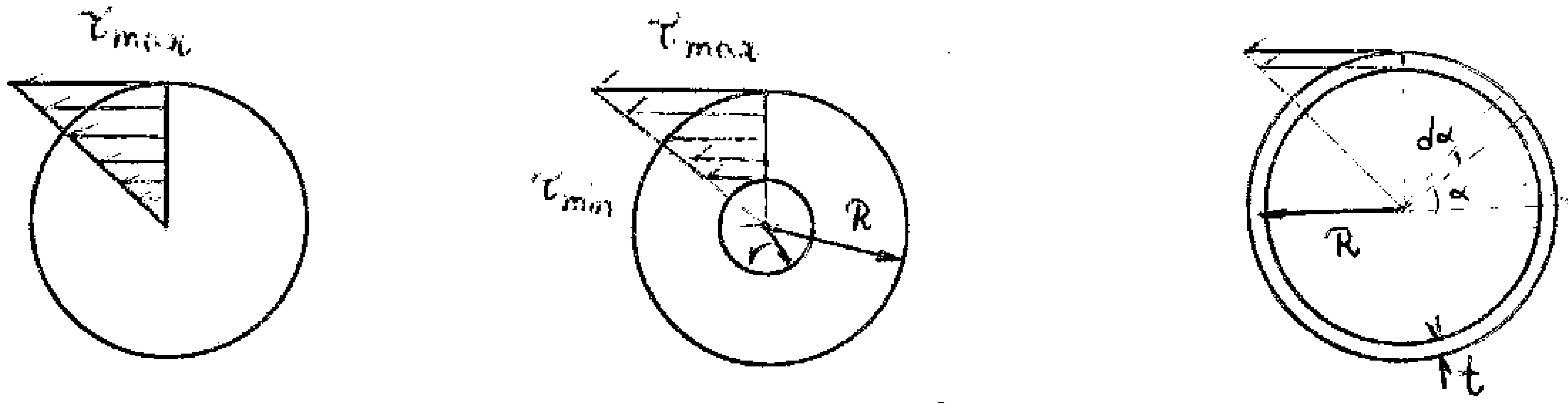
$$AA' = L\gamma_{max} = R\phi \longrightarrow \boxed{\phi = \frac{TL}{GJ}}$$

$\frac{\phi}{l}$ : زاویه پیچش نسبی $= \frac{T}{GJ} = \frac{d\phi}{dx}$

تنظیم: محمد حاج صادقی

استاد: دکتر عرفانی

تحت پیچش چون حالت برش خالص به وجود می آید پس تغییر طول ، سطح و حجم حاصل نشده و فقط تغییر زاویه به وجود خواهد آمد.




$$\tau_{max}=\frac{TR}{J} \qquad J=\frac{\pi R^4}{2}$$

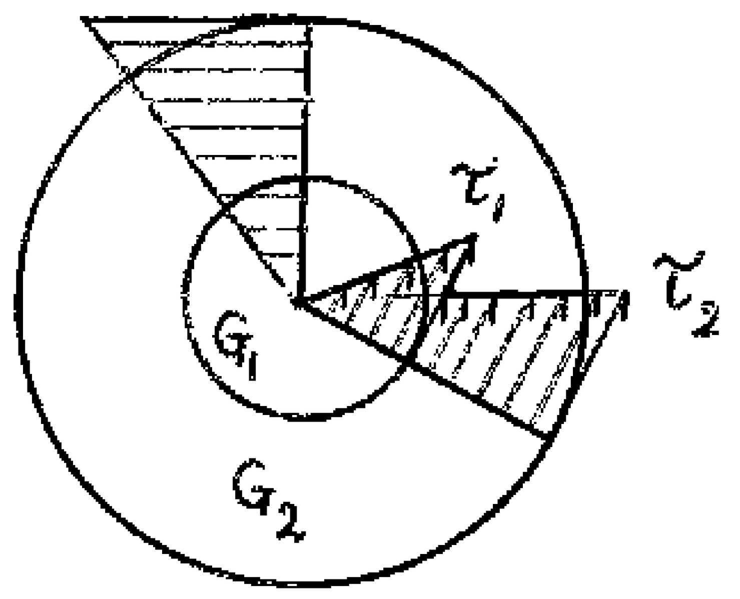
$$\tau_{max}=\frac{TR}{J} \qquad \tau_{min}=\frac{Tr}{J} \qquad J=\frac{\pi}{2}\left(R^4-r^4\right)$$

$$\tau=\frac{TR}{J} \qquad J=2\pi R^3 t$$

$$J=\int(x^2+y^2)\,dA$$
$$J=\int R^2\,dA$$
$$J=R^2\int R\,d\alpha\, t$$
$$J=2\pi R^3 t$$

* توزیع کرنش *

* در مورد مقاطع مرکب کرنش ها یکنواخت می باشد ولی باید دقت کرد با داشتن کرنش یکنواخت برای دو مصالح - کرنش سازگار - تنش های متفاوتی داشته باشیم یا زمان باشد. *



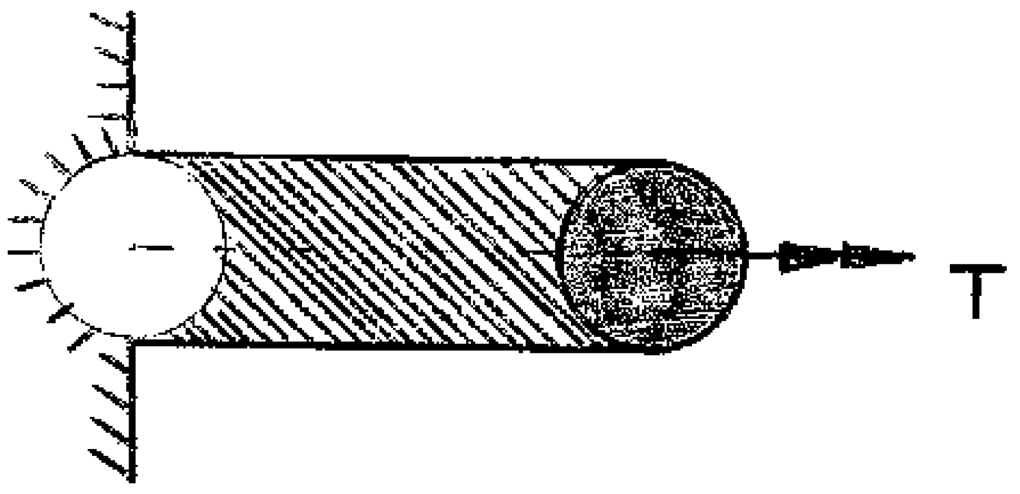

$$\gamma=\frac{\tau}{G}\ ,\ \tau=\frac{T\rho}{J} \longrightarrow \gamma\equiv\rho \qquad \left[\gamma=\frac{T\rho}{GJ}\right]$$

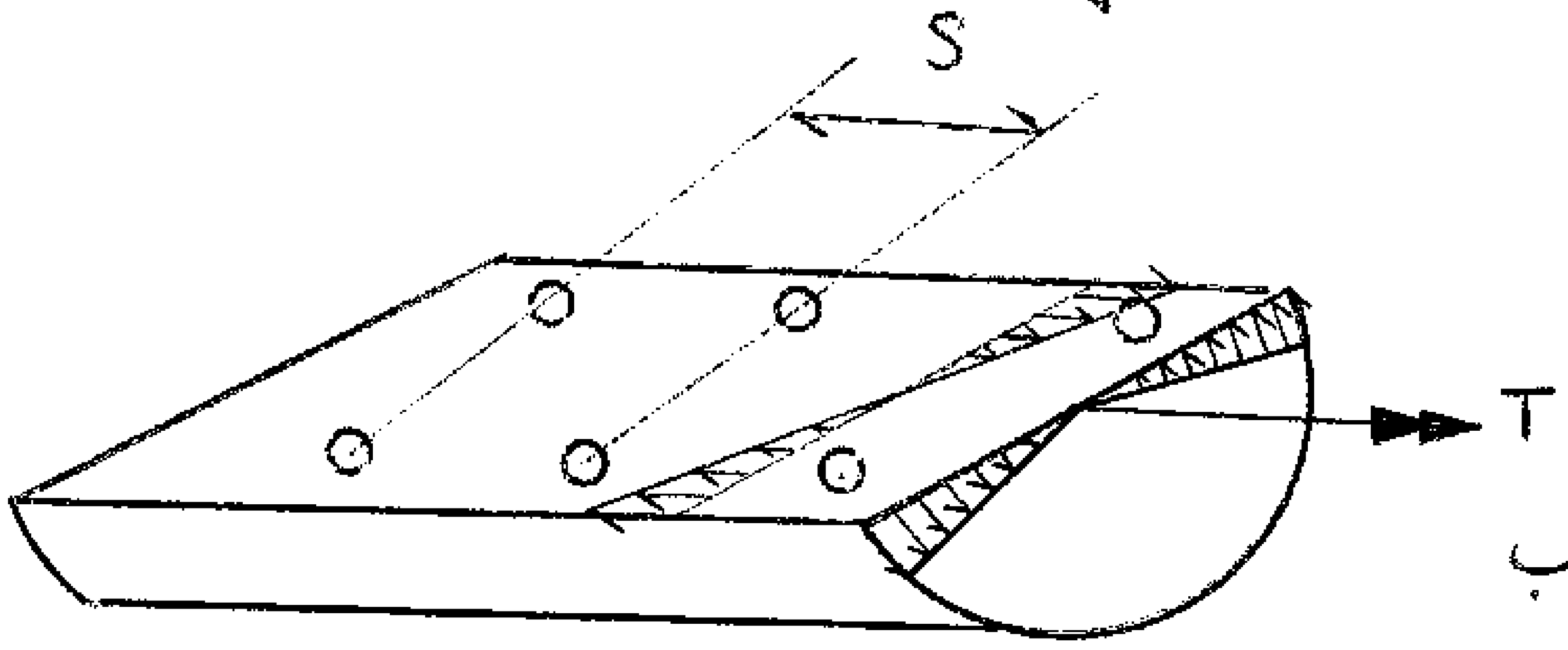
$$\boxed{\tau\equiv\rho G}$$

تنش برشی متناسب است با فاصله از مرکز پیچش در مقطع پیچش مصالح

$$\boxed{\tau_i=\frac{T\rho}{J}\,n_i\ ,\ n_i=\frac{G_i}{G_\phi}}\ ,\ \boxed{GJ=\sum_{i=1}^{n} G_i J=G_\phi\,\bar{J}}$$

$$\boxed{\frac{T_i}{T}=\frac{(GJ)_i}{GJ}}$$

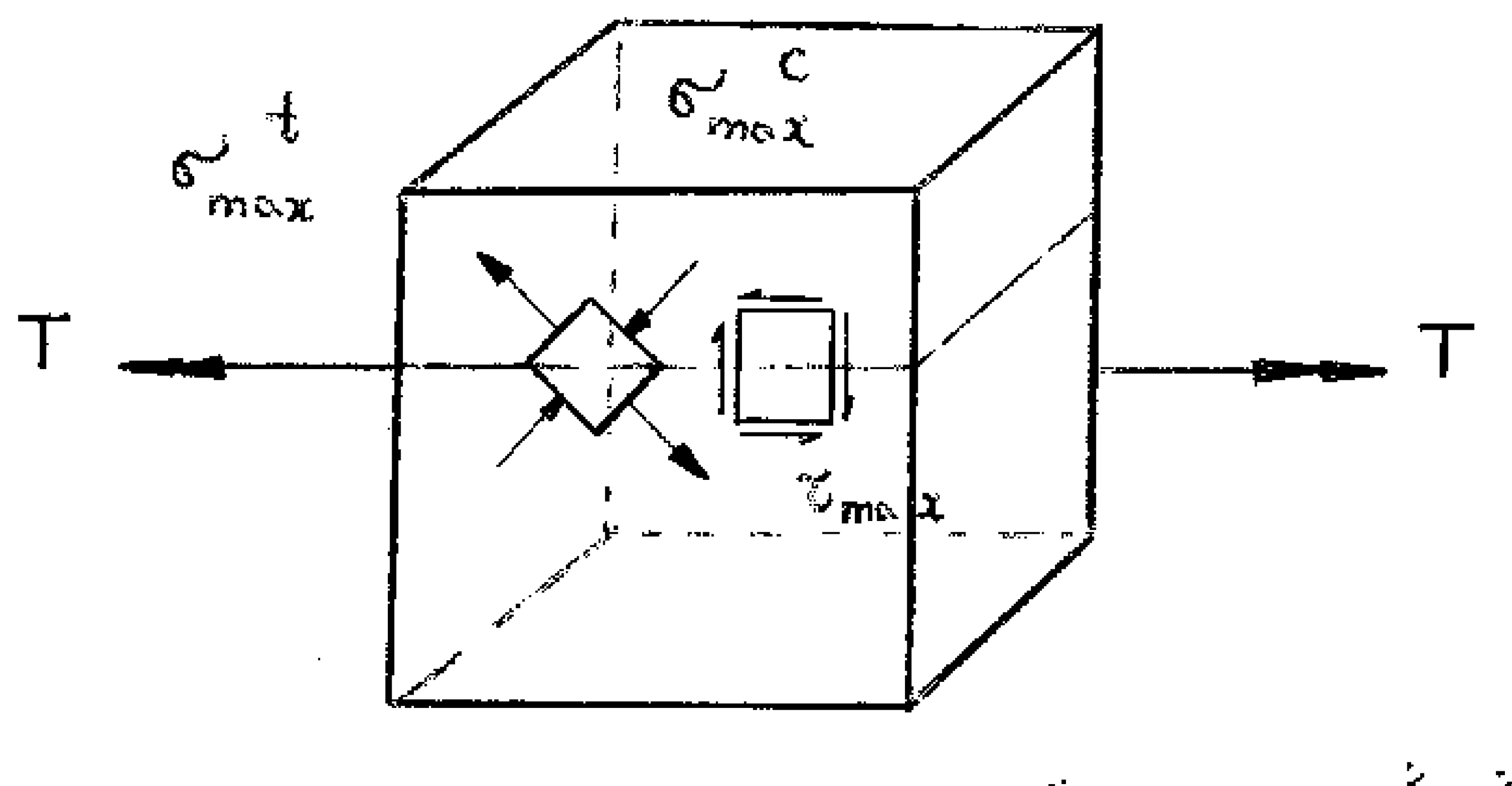



وسیله اتصال چسب ، $\tau_{max}=\dfrac{TR}{J}\leqslant\tau_{\text{مجاز}}$

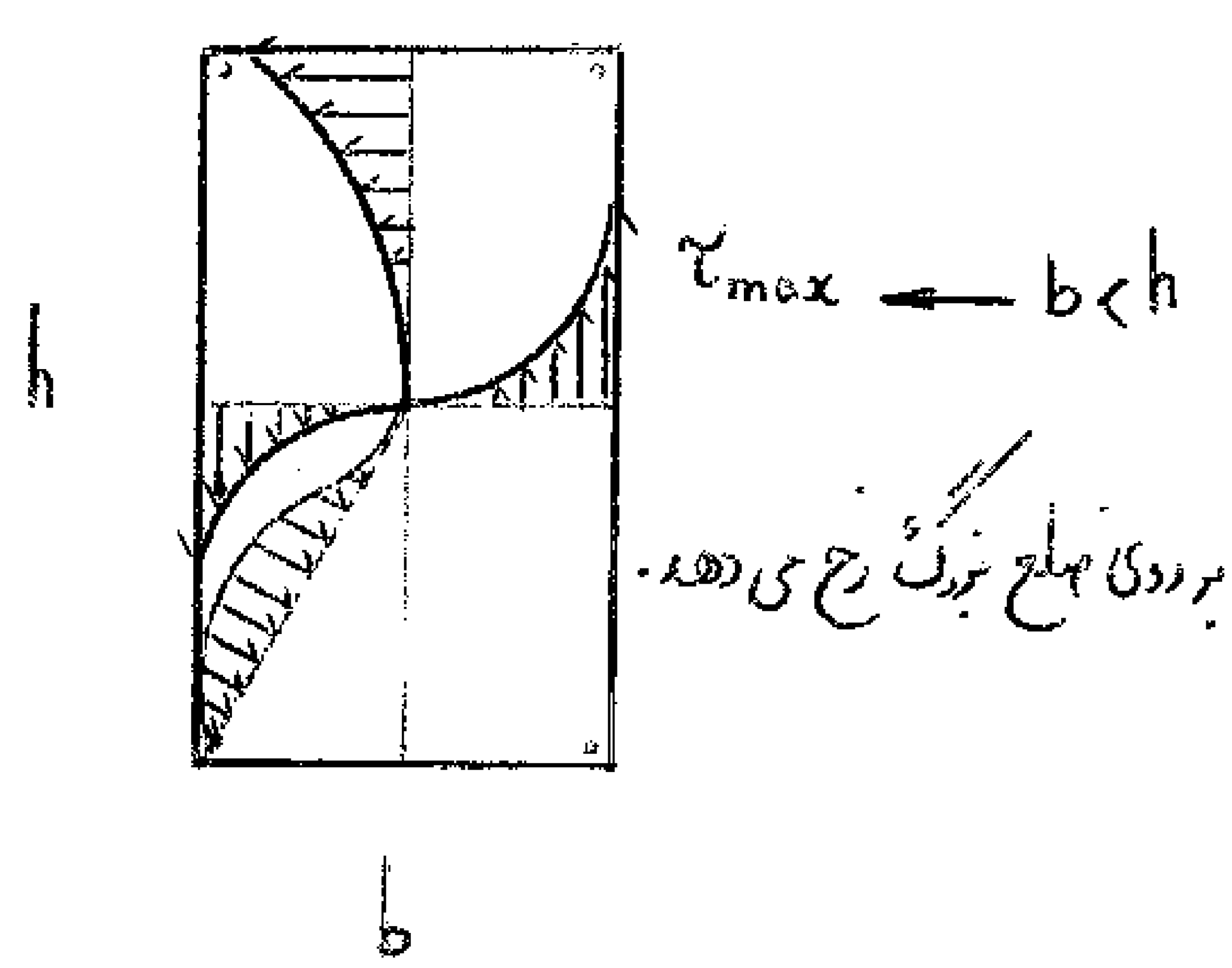
- وسیله اتصال پیچ - سهم هر پیچ $=\dfrac{\tau_{max}R}{2}.S\leqslant A\tau_{\text{مجاز}}$

## مقاطع مستطیلی :




* طبق اصل کوشی در گوشه های محدب مقاطع - کوچکتر از $180^\circ$ - تنش برشی همواره صفر است. *

در مقاطع مستطیلی شکل $\tau_{max}$ در وسط ضلع بزرگتر می باشد.




$$\tau_{max} = \frac{T}{c_1 b^2 h}$$

* همیشه $\tau_{max}$ بر روی ضلع بزرگ رخ می دهد.

| $c_1$ | $h/b$ |
|---|---|
| 0.2 | 1 |
| ⋮ | ⋮ |
| $\frac{1}{3}$ | $\infty$ |

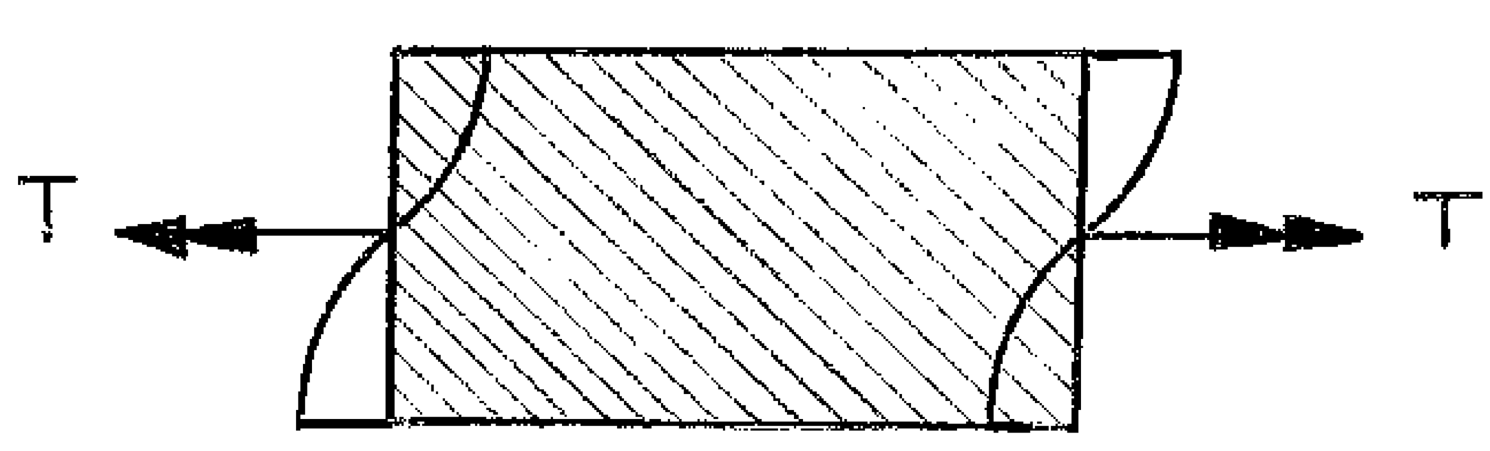
$$\underbrace{\frac{3T}{b^2h}}_{\text{مستطیل کاملاً باریک}} \leq \tau_{max} \leq \underbrace{\frac{5T}{b^2h}}_{\text{مربع}}$$

در مقاطع مستطیلی بر خلاف مقاطع دایره‌ای که سطح مقطع مسطح باقی می‌ماند ، مقاطع پس از پیچش دچار اعوجاج می شوند طوری که قسمت هایی از آن فرو رفته و قسمت های دیگر بیرون می آیند ولی این اعوجاج طوری است که طول هیچ تاری تغییر نکرده

در نتیجه تغییر طول ، تغییر سطح یا تغییر حجم - بوجود نمی آید .

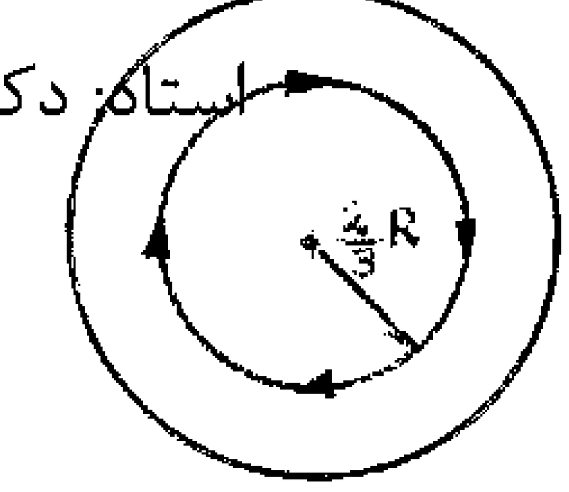
اگر در مقاطع مستطیلی توسط یک قید صلب مانند تکیه‌گاه از اعوجاج مقاطع عرضی جلوگیری شود در مقاطع عرضی علاوه بر تنش های برشی ، تنش های قائم نیز حاصل خواهد شد ولی این تنش های قائم خود ایستا خواهند بود.

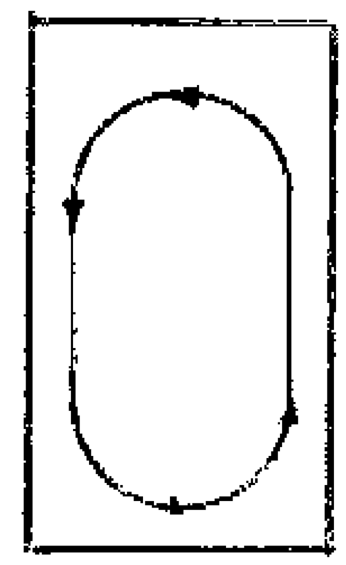
یعنی در هر المان ، تنش های قائم یکدیگر را خنثی می کنند.



تنظیم: محمد حاج صادقی

استاد: دکتر عرفانی



جریان برش ناشی از پیچش

جریان برش ناشی از پیچش همواره یک مدار بسته است ولی جریان برش ناشی از برش مسیر باز می‌باشد.

$$\frac{\phi}{l} = \frac{T}{G J_e}$$

$$J_e = C_2 b^3 h$$

| $C_2$ | $h/b$ |
|---|---|
| 0.15 | 1 |
| ⋮ | ⋮ |
| $1/3$ | $\infty$ |

$$\tau_{max} = \frac{TR}{J} = \frac{TR}{\frac{\pi R^4}{2}} = \frac{2\pi R}{\pi^2 R^4} T = \frac{\text{محیط}}{(\text{مساحت})^2} T$$ دایره

$$\tau_{max} = \frac{T}{c_1 b^2 h} = \frac{Th}{c_1 b^2 h^2} \longrightarrow$$

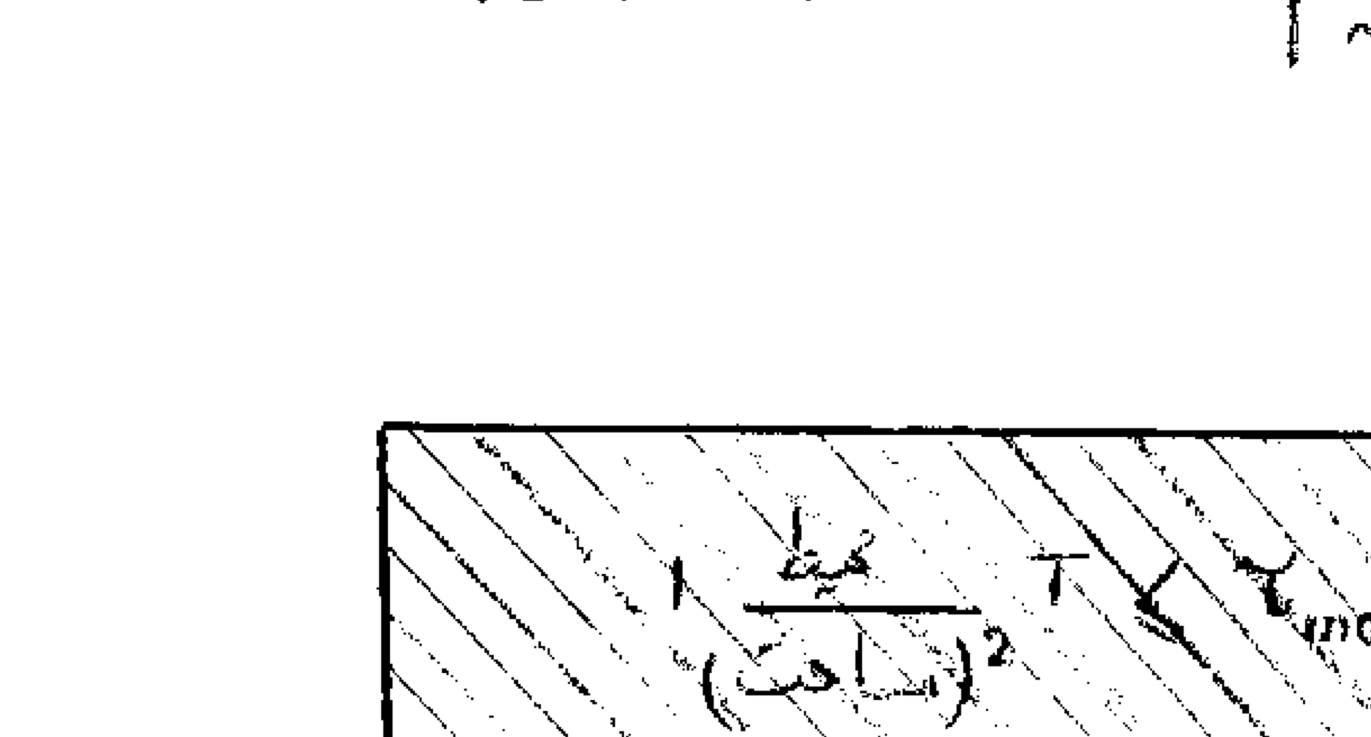
$$\tau_{max} = 1.25 \frac{\text{محیط}}{(\text{مساحت})^2} T$$ مربع

$$\tau_{max} = 1.5 \frac{\text{محیط}}{(\text{مساحت})^2} T$$ مستطیل کاملاً باریک

$$1 \frac{\text{محیط}}{(\text{مساحت})^2} T \leq \tau_{max} \leq 1.5 \frac{\text{محیط}}{(\text{مساحت})^2} T$$

بهترین مقطع: دایره — بدترین مقطع: مستطیل کاملاً باریک

ملاحظه می‌شود با سطح مقطع ثابت هر چه مقاطع متقارن‌تر می‌شوند چون هم محیط‌شان کاهش یافته و هم ضریب مربوطه در نقاط خود از 1.5 به 1 کاهش می‌یابد بنابراین برای پیچش مناسب‌تر می‌شوند.




تحمل لنگر T ۲ بیشتر است.

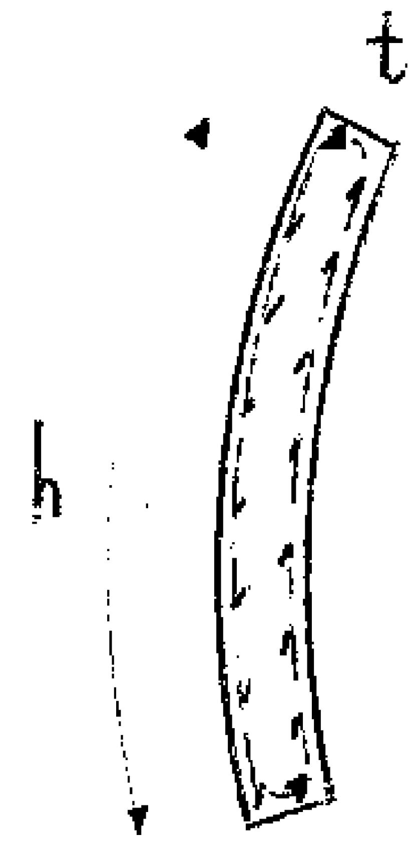
$$\frac{\tau_{max\,2}}{\tau_{max\,1}} \approx < \frac{65}{70}$$

تنظیم: محمد حاج صادقی

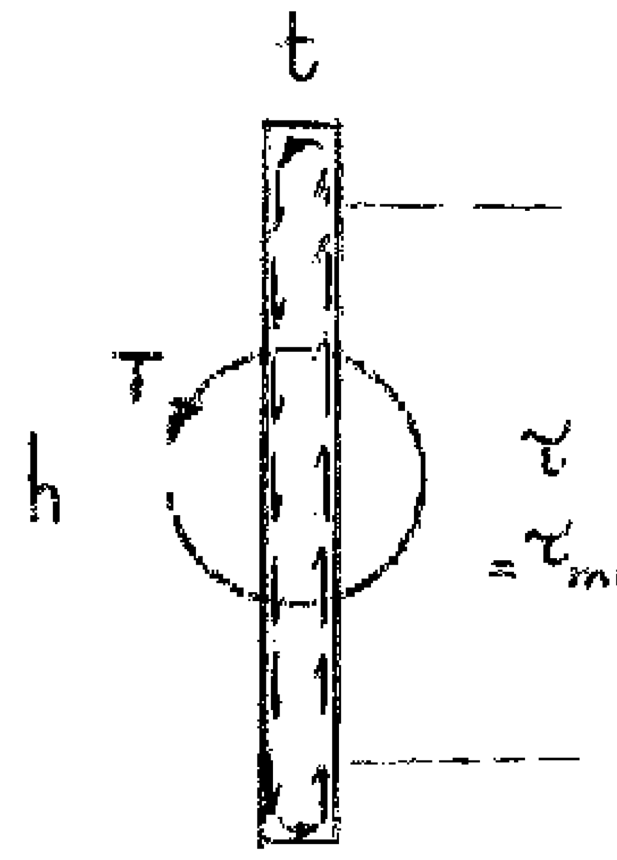
استاد: دکتر عرفانی

* $\boxed{\text{مقاطع جدار نازک باز}}$

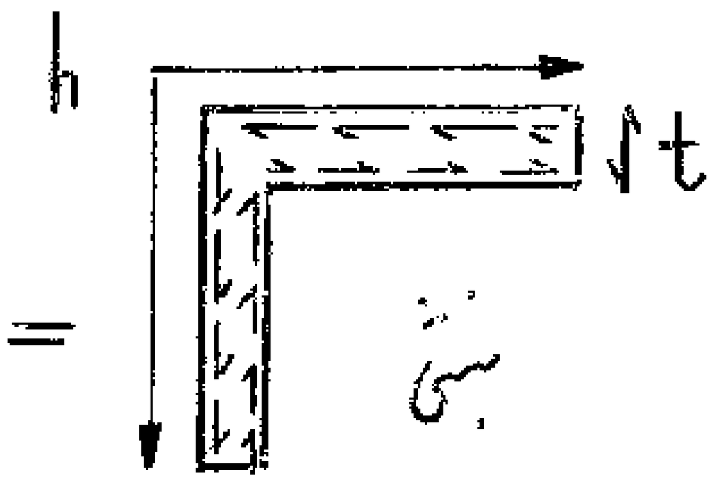
در این مقاطع ضخامت بسیار مهم تر از ابعاد دیگر است زیرا تأمین کننده بازوی لنگر می باشد.
در این مقاطع حداکثر تنش در بیشترین ضخامت ها ایجاد می شوند.



کمی انحناء داشته باشد.



$$\tau = \tau_{max} = \frac{3T}{t^2 h}$$

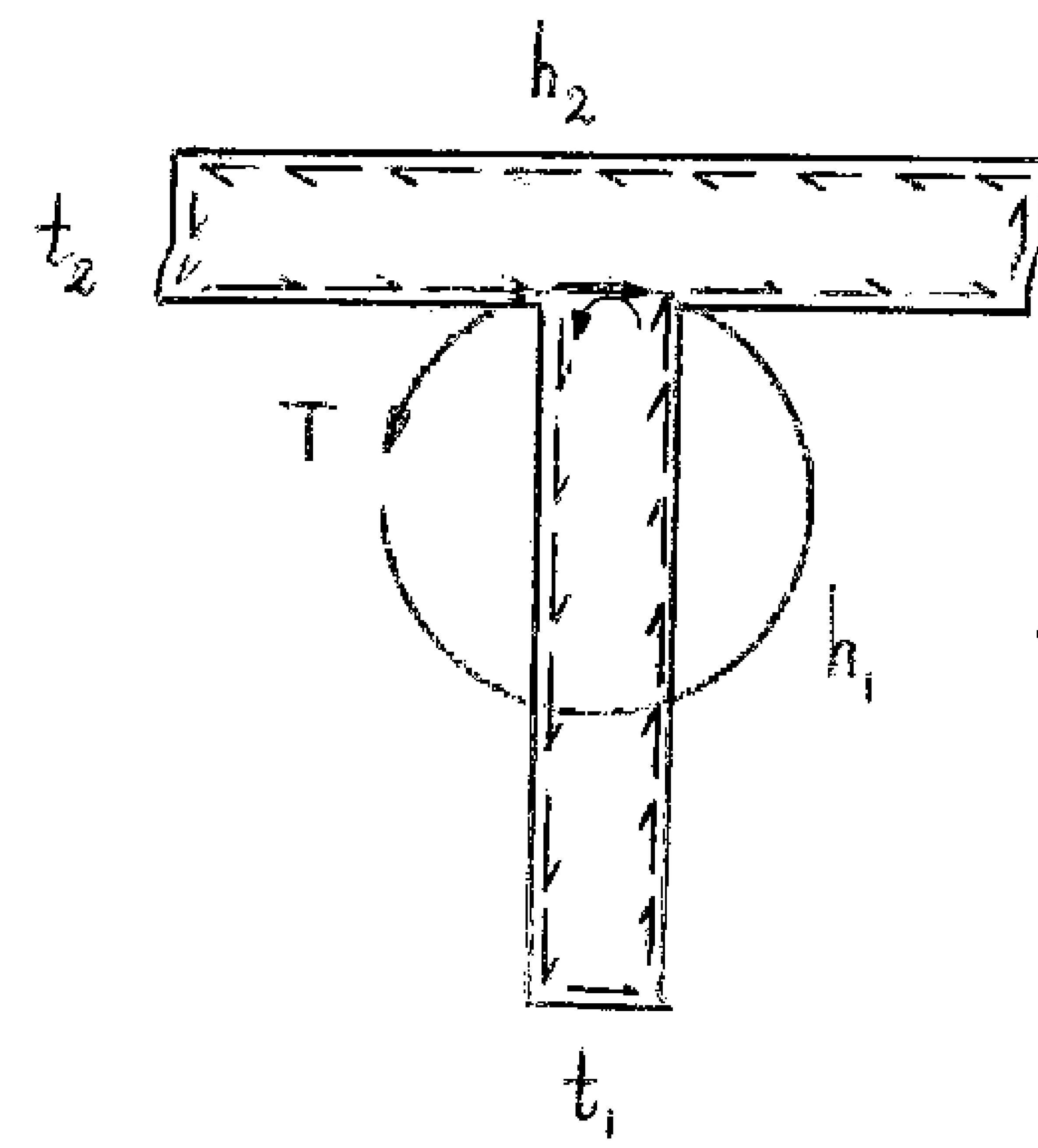


نبشی

$$\frac{\phi}{L} = \frac{T}{G J_e}$$

$$\boxed{J_e = \frac{1}{3} t^3 h}$$

$$\boxed{\tau_i = \frac{3T_i}{t_i^2 h_i}}$$



$$T = \sum_{i=1}^{n} T_i$$

اتصال موازی $\phi_1 = \phi_i = \phi_n$

$$\longrightarrow \boxed{T_i = \frac{(GJ)_i}{GJ} T}$$

$$GJ = \sum_{i=1}^{n} (GJ_e)_i$$

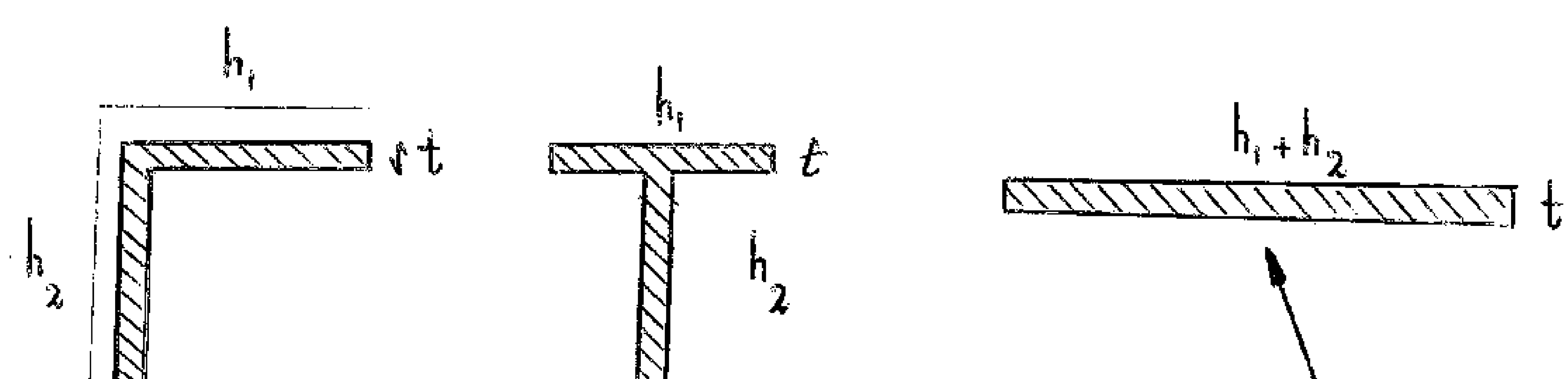
$$GJ = G * \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{3} t_i^3 h_i$$

اگر G ها یکسان باشد $\longrightarrow \boxed{T_i = \frac{J_i}{J} T}$ , $\tau_i = \frac{3T_i}{t_i^2 h_i} = 3\,\frac{J_i/J_e}{t_i^2 h_i}\, T = \boxed{\frac{T}{J} t_i}$

$$\longrightarrow \frac{\tau_i}{t_i} = \frac{T}{J}$$

* در مقاطع جدار نازک باز ضخامت مقطع مهمتر از طول قسمت های دیگر می باشد چون بازوی لنگر توسط ضخامت مقطع تأمین می شود.

در چنین مقاطعی حداکثر تنش در بیشترین ضخامت ها حاصل می شود چون تنش متناسب است با ضخامت:



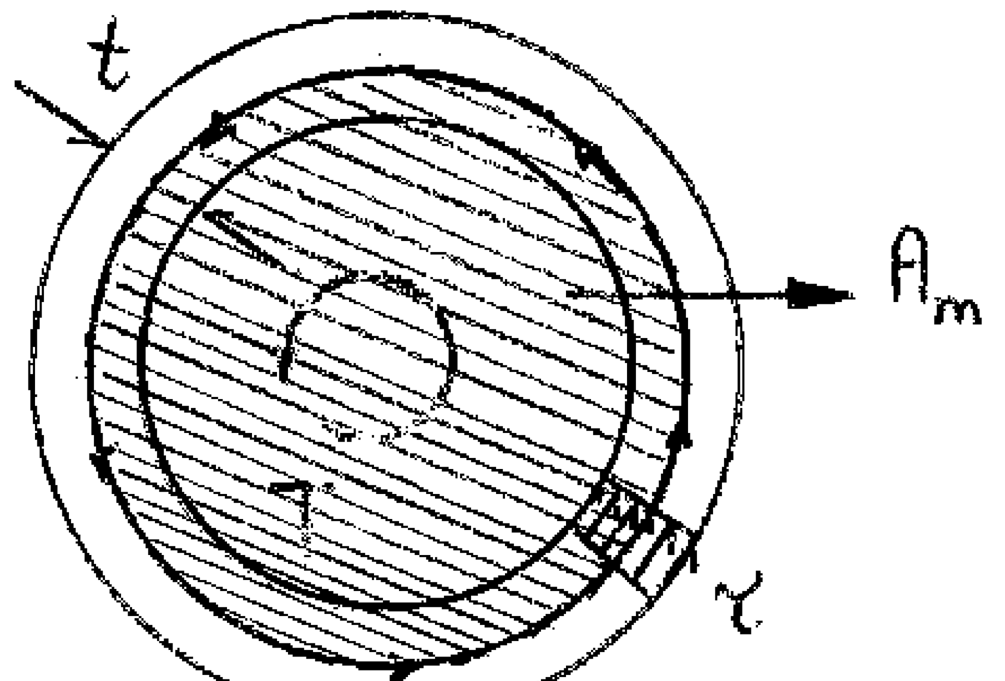
فقط برای ضخامت یکسان

$$\tau = \frac{T}{\frac{1}{3}t^3 h_1 + \frac{1}{3}t^3 h_2}\, t = \frac{T}{\frac{1}{3}t^3 (h_1+h_2)}\, t = \frac{3T}{t^2 (h_1+h_2)}$$

تنظیم: محمد حاج صادقی

استاد: دکتر عرفانی

جدار نازک های بسته :



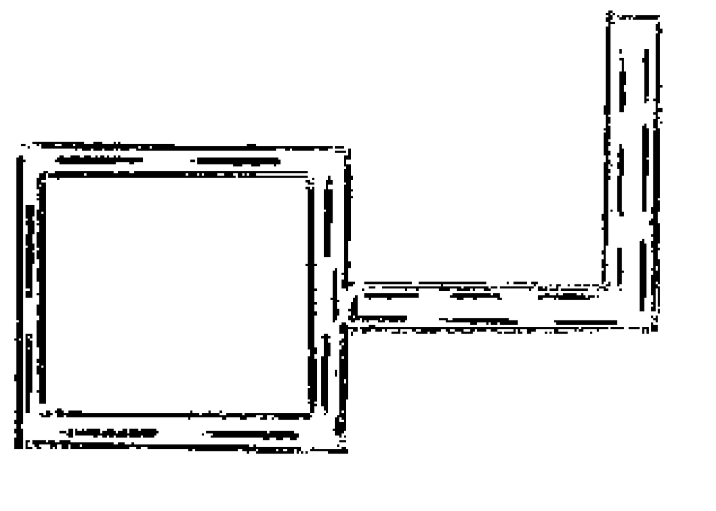

$\boxed{*\ \text{خطی‌تر از باز می‌باشند}}$

$$\boxed{\tau . t = q = \frac{T}{2A_m}}$$

$$\frac{A_{in}+A_{out}}{2} = \text{مساحت میانگین مقطع}$$

$$\boxed{J_e = \frac{4A_m^2}{\oint \frac{ds}{t}}}$$

$$\frac{\phi}{L} = \frac{T}{GJ_e} \quad ; \quad J_e = \frac{4A_m^2}{\oint \frac{ds}{t}}$$



در شکل روبرو با توجه به این فرض که مقاطع از هم جدا شده اند تنها نسبت به مرکزشان تاب می‌شود.

$$\frac{T_i}{T_j} = \frac{J_i}{J_j}$$

ملاحظه می‌شود حداکثر تنش ها در کمترین ضخامت ها حاصل می‌شود و رابطه بار خطی است.

$$*\ T_i = \frac{(GJ_e)_i}{GJ} T$$

G : سختی برشی مصالح

E : سختی محوری مصالح

$GA_s$ : سختی برشی مقطع

$EA$ : سختی محوری مقطع

$EI$ : سختی خمشی مقطع

$GJ_e$ : سختی پیچشی

* W : مقاومت خمشی مقطع

* $W_T$ : مقاومت پیچشی

A : مقاومت محوری

$A_s$ : مقاومت برشی

* اگر یک مقطع دلخواه ، قسمت میانی آن طوری خالی شود که تارخنثی جابجا نشود سختی خمشی و مقاومت خمشی به یک نسبت کاهش می‌یابند (نسبت I)

* اگر یک مقطع دلخواه از قسمت بیرونی تراشیده شود طوری که تارخنثی جابجا نشود سختی خمشی بیشتر از مقاومت خمشی دچار کاهش می‌شود.

* هر دو رابطه فوق برای یک مقطع دایره‌ای تحت پیچش نیز صحیح است.

* اگر در یک مقطع متقارن قسمت میانی طوری خالی شود که تارخنثی جابجا نشود کاهش در مقاومت خمشی بیش از کاهش در سختی خمشی خواهد بود.

* در یک مقطع جدار نازک باز اگر مساحت مقطع را ثابت نگه داریم و ضخامت آن را n برابر کم کرده سایر ابعاد مقطع را $\alpha$ برابر افزایش دهیم سختی پیچشی $\alpha^2$ ~~برابر~~ کاهش شده و مقاومت پیچشی $\alpha$ برابر کاهش می‌یابد.

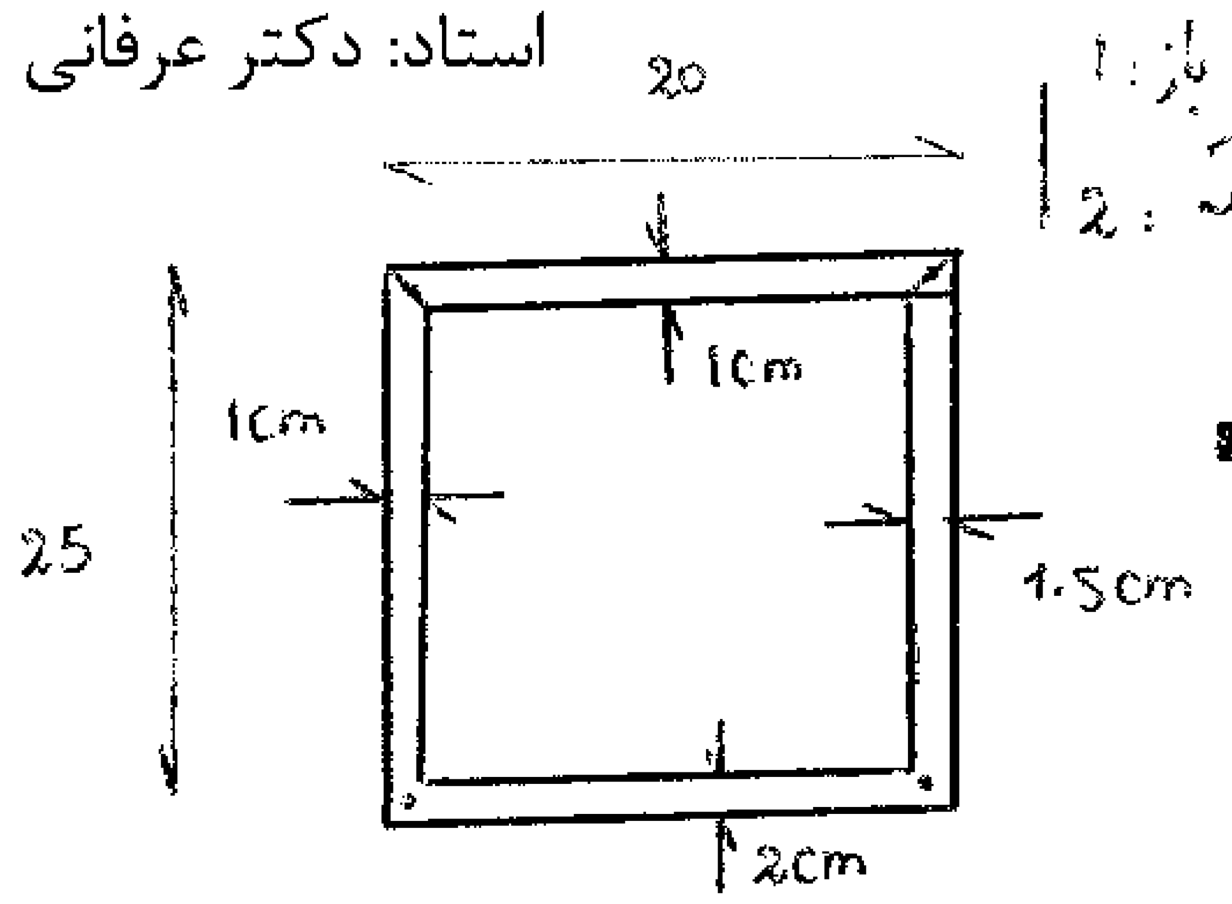
* در یک مقطع جدار نازک بسته اگر مساحت را ثابت نگه داریم ضخامت را $\alpha$ برابر کاهش دهیم سایر ابعاد مقطع را $\alpha$ برابر افزایش دهیم سختی پیچشی $\alpha^2$ برابر افزایش و مقاومت پیچشی $\alpha$ برابر افزایش/افزایش می‌یابد.

تنظیم: محمد حاج صادقی

استاد: دکتر عرفانی

مطلوب است مقایسه سختی و مقاومت پیچشی در دو حالت باز و بسته :

باز : 1
بسته : 2

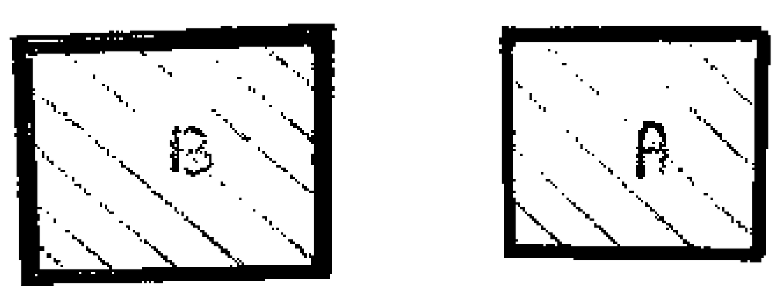


$$\frac{J_{e1}}{J_{e2}} = \frac{\frac{1}{3}\left[1^3\times 19.5 + 1^3\times 23.5 + 2^3\times 18.75 + 1.5^3\times 23\right]}{\dfrac{4\left(\frac{20\times 25 + 17.5\times 22}{2}\right)^2}{\frac{18.75}{1}+\frac{23.5}{1}+\frac{18.75}{2}+\frac{23.5}{1.5}}} = 6\times 10^{-3}$$

با اعمال گشتاور یکسان

$$\frac{\text{مقاومت } 1}{\text{مقاومت } 2} = \frac{\tau_{max\ 2}}{\tau_{max\ 1}} = \frac{\dfrac{T}{2A_m(t_{min}=1)}}{\dfrac{T}{J_{e_1}}(t_{max}=2)}$$

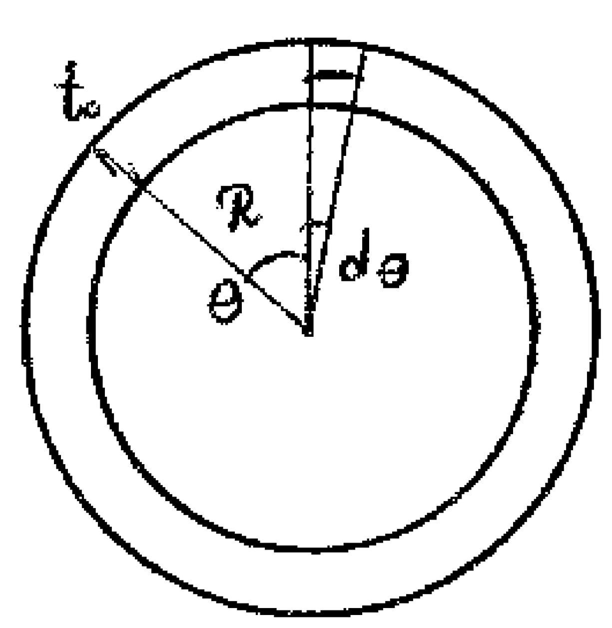
در کدام یک از اشکال A و B به چسب مقاوم تری برای اتصال نیاز دارد.
چون در شکل B ضخامت کمتر است (در محل اتصال)
تنش های ایجاد شده بیشتر بوده و در نتیجه نیاز به چسب مقاومتری
داریم - - به نسبت ضخامت -



اگر وسیله اتصال پیچ باشد مصرف پیچ کدام کمتر است :
مصرف پیچ در هر دو یکسان است :

$$\overline{\tau t}\, s \leqslant A_{\text{پیچ}}\ \tau_{\text{مجاز}}$$ سهم هر پیچ

$$\frac{T}{2A_m}\cdot S \leqslant A\times \tau_{\text{مجاز}}$$



$$\oint \frac{ds}{t} = 2\int_0^{\pi} \frac{R\,d\theta}{t_0\left(\frac{\theta}{\pi}+1\right)}$$

تنظیم: محمد حاج صادقی

استاد: دکتر عرفانی

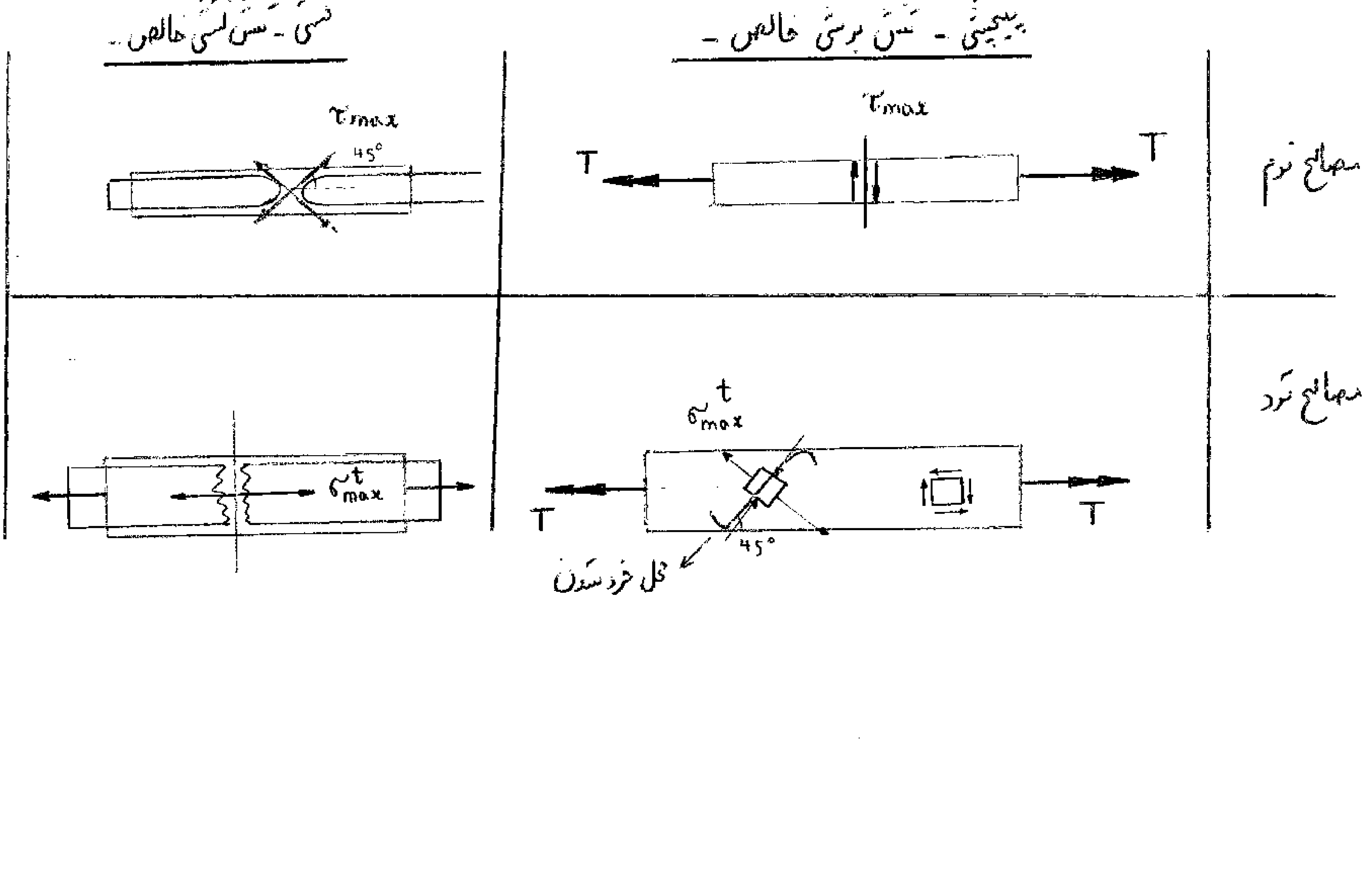
## معیارهای تسلیم

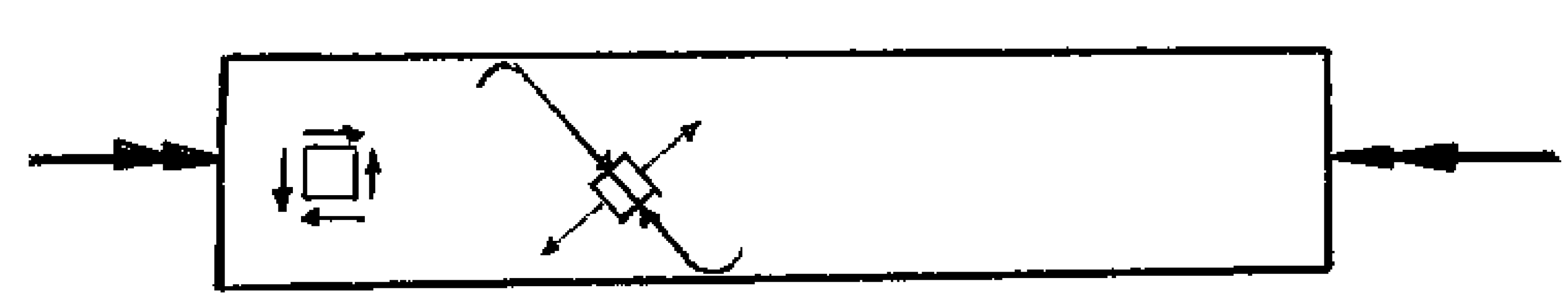
* تنش تک محوره :
* تنش دو محوره :

مصالح اساساً به دو دسته ترد و شکل پذیر تقسیم می شوند که در مصالح ترد پیوندهای کششی ضعیف تر بوده و باعث خرابی می شود و در مصالح شکل پذیر پیوندهای لغزشی ضعیف تر بوده و باعث خرابی است.

بنابراین در مصالح ترد خرابی در مقاطعی رخ خواهد داد که تنش های کششی حداکثر بوده و در مصالح شکل پذیر خرابی در مقاطعی رخ خواهد داد که تنش برشی حداکثر می باشد.

از خصوصیات دیگر مصالح شکل پذیر این است که ظرفیت کششی و فشاری این مصالح در آزمایش محوری یکسان می باشد ولی در مورد مصالح ترد قطعاً ظرفیت کششی کمتر از ظرفیت فشاری است.

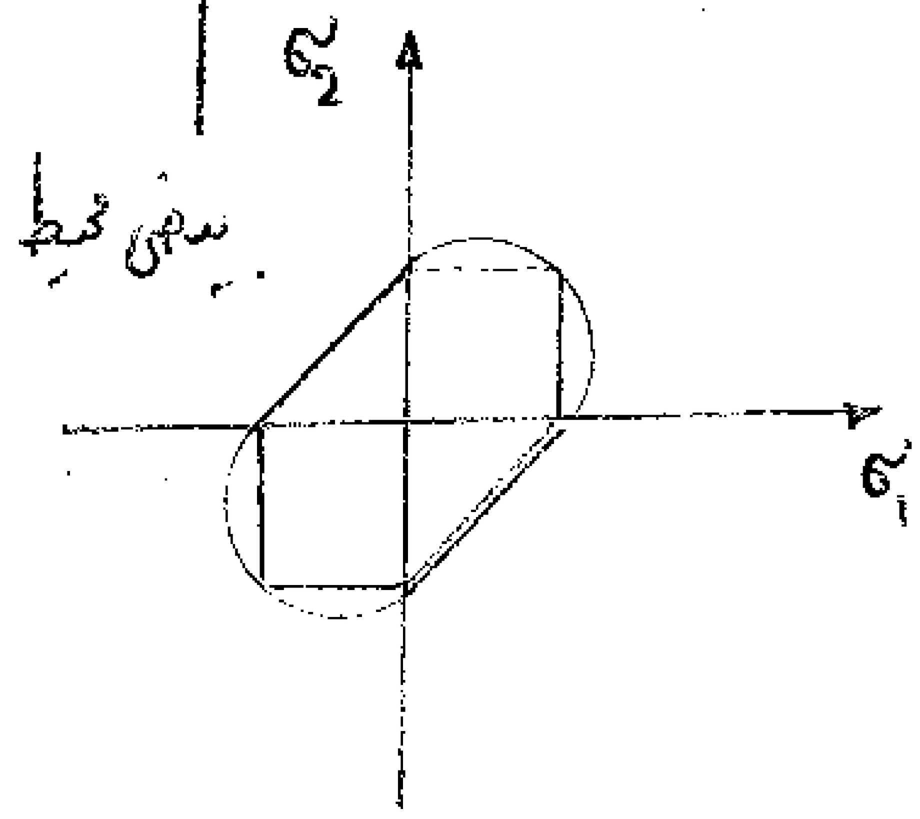


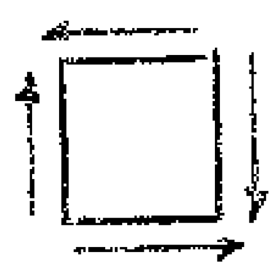
۲- معیار فون میسز :

$2-\ U_{s\ \text{الف}} \leqslant U_{s\ \text{ب}}$

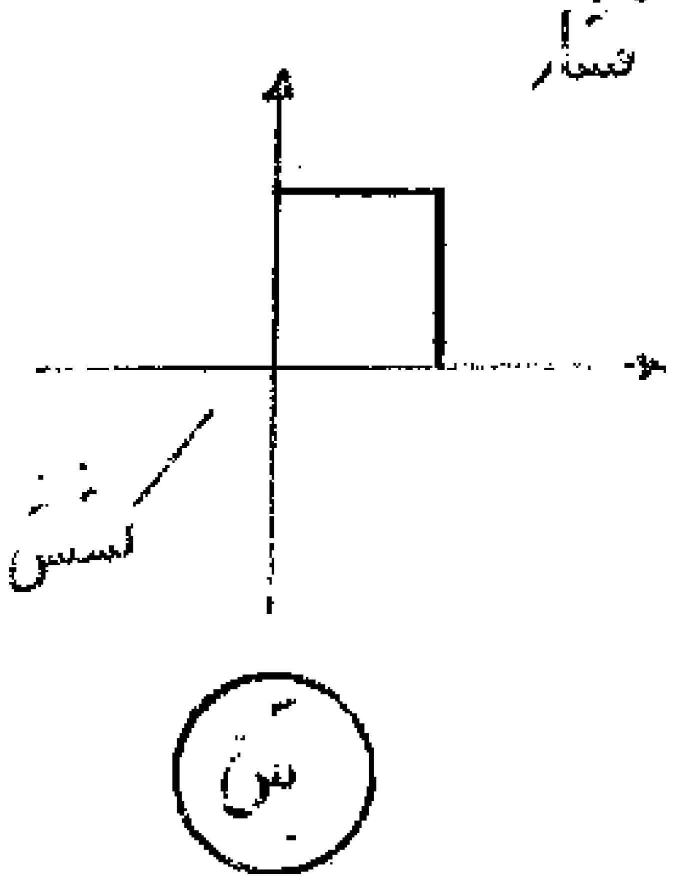
$$* \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2} \leqslant \sigma_y$$




ترسکا محافظه کارانه تر است.



$\tau_y = \dfrac{\sigma_y}{\sqrt{3}}$




سطوح معادل ترد اشکال ترسکا و فون میسز به سمت فشار حرکت می کنند.