بسمه تعالی

نام جزوه: مقاومت مصالح 1

نام استاد: دکتر جوهر زاده

دانشگاه: تهران

علیرضا جوادیان - عمران ۸۲

۸۳/۱۱/۱۲

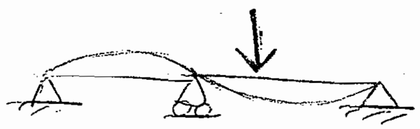
مقاومت مصالح ۱ — به نام خدا

میان ترم ۹ خرداد — ۸ نمره از ۲۰ نمره

پایان ترم ۲۴ خرداد — ۱۰ نمره از ۲۰ نمره

۲ نمره حل تمرین

مسائل نامعین استاتیکی را در مقاومت می توان حل نمود با در نظر گرفتن تغییر شکل اجزای نامعین



مبانی اولیه مقاومت در زمان لئوناردو داوینچی یا گالیله گذاشته شده است :

عملاً تجربه در مقاومت سازه های تأثیر می شود :

به طور تجربی سازه ها را بهبود می بخشیدند .

اولین مواردی که مکتوب وجود دارد در کتاب های مکانیک و فیزیک هست یعنی مقاومت مصالح در درس مکانیک بررسی می شد :

اولین بار در سال ۱۸۲۶ اولین کتاب مقاومت مصالح چاپ شد و از مکانیک جدا شد

* هر سازه ای تا حدی ارتجاعی است یعنی وقتی بار را برداریم به حالت قبل خود برگردد یعنی به حالت الاستیک یا برگشت پذیری گویند : « رفتار الاستیک »

[illegible]

کشسان

در مقابل ارتجاعی ؟ غیرارتجاعی یا برگشت‌ناپذیر یا پلاستیک داریم ؟ «خمیری»

* ارتجاعی ← کشسان
* خمیری یا غیرارتجاعی ← موهسان

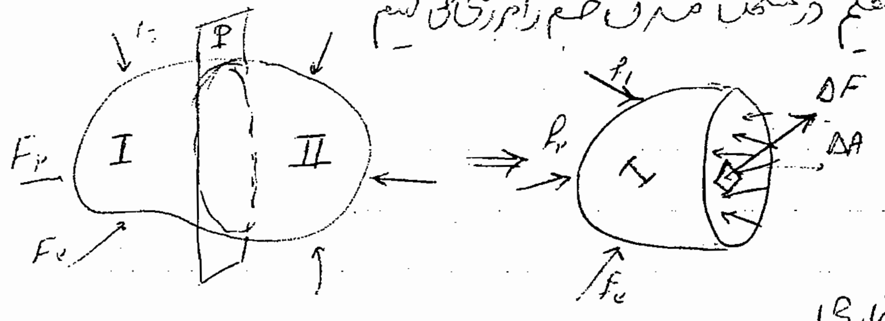
مسئله مهم در مقاومت مصالح پیوستگی سازه است ؟ «همگن»

هیچ ماده‌ای اساساً به خاطر وجود پروتون‌ها و الکترون‌ها

پیوسته نیست ولی عملاً محاسبات انتگرال یا دیفرانسیل اشکالی ایجاد نمی‌کند

در مقاومت ۱ با اجسام ایزوتروپ سروکار داریم

اگر یک مقطع در جسم به هم در قسمت مشترک جسم را بررسی می کنیم



در تعادل جسم به جمع نیروها صفر است.

حال جمع نیروهای خارجی دیگر صفر نیست بلکه باید نیروهای سطح مشترک در نظر گرفته شود.

به هر نقطه سطح یک نیرو وارد می شود

اگر یک جزء ΔA بگیریم یک نیروی ΔF به این سطح وارد می شود:

stress یا تنش $\Rightarrow$ $\boxed{S = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta A}}$

تعریف تقریباً شبیه فشار است؛ با این تفاوت که فشار همیشه نیرویی از یک جسم به طرف جسم دیگر است در حالیکه تنش هم می تواند فشاری یا کششی باشد؛ یا باعث تغییر روی سطح شود یعنی هر نیرویی در واحد سطح داشته باشد؛

$\text{دیمانسیون} = \frac{\text{نیرو}}{\text{سطح}}$

* واحد تنش $\longleftarrow$ $\boxed{1Pa = \frac{1N}{m^2}}$ پاسکال

چون این واحد یک واحد کوچکی است از واحدهای بزرگتر استفاده می شود:

$$\begin{cases} 1000\ Pa = 1\ \dfrac{KN}{m^2} = kPa \\ MPa = 10^6\ Pa = 1\ \dfrac{N}{mm^2} \end{cases}$$ واحدهای علمی

واحدهای صنعتی :

واحد نیرو kgf

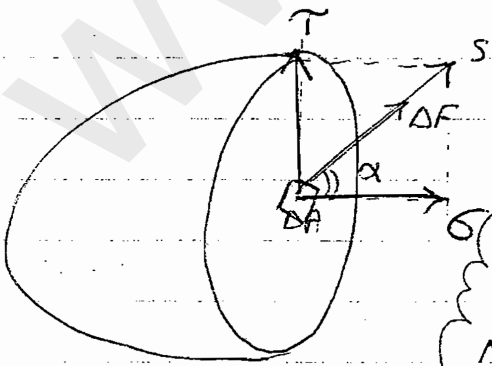
$1\ \dfrac{kgf}{cm^2}$ واحد تنش

یا $1\ \dfrac{kgf}{m^2}$ 〃

یا $1\ \dfrac{tonf}{m^2}$ 〃

$$* \quad 1\ \frac{kgf}{cm^2} \simeq \frac{10\ N}{10^{-4}\ m^2} \simeq 10^5\ \frac{N}{m^2} = 10^5\ Pa$$

$$* \quad 1\ MPa \simeq 10\ \frac{kgf}{cm^2}$$



S در امتداد ΔF است :

S را تجزیه کردیم به دو مؤلفه : σ و τ

تنش عمودی $\sigma = S \cos \alpha$

Normal stress

درحقیقت مؤلفه عمود بر سطح مقطع است :

تنش قائم غلط است ؛ قائم یعنی عمود بر افق ؛ درحالیکه عمود بر سطح مقطع است ؛
درحالیکه عمود بر سطح مقطع ؛ سطح مقطع می تواند مایل باشد ؛

تنش برشی $\tau = S \sin\alpha$

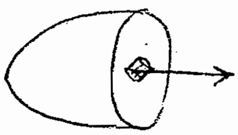
Shear stress

تنش برشی چه وقت می تواند دو مؤلفه شود ؛

مؤلفه ای در سطح واقع می شود تنش برشی است ؛

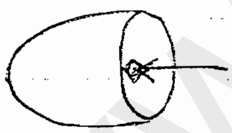
* تنش عمودی دو نوع تعریف می شود ؛

Tensile stress



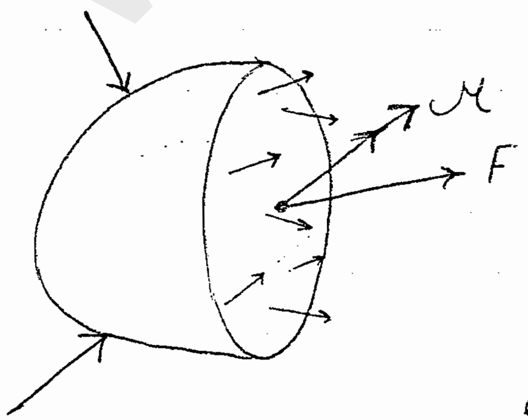
دو قطعه می خواهند از هم دور شوند ← (جهت به بیرون جسم) تنش کششی

Compressine stress



دو قطعه روی هم فشرده می شوند ← (جهت به داخل جسم) تنش فشاری

نیرو در یک جا بیشتر متمرکز شود تنش افزایش می یابد و احتمال خطر گسیختگی است ؛



هدف ما دقیقاً تعیین توزیع نیروها در مقطع است ؛
مثلاً فقط می توانیم برآیندشان را تعیین کنیم ؛

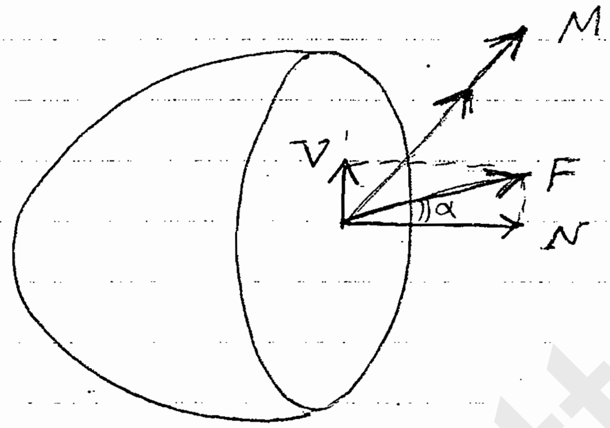
برآیند کلی یک نیرو و یک لنگر است ؛

F ، M را نیروهای داخلی مقطع گویند .

این نیروهای داخلی در استاتیک معین می‌شوند

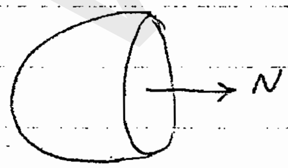
معادلات تعادل

$$\begin{cases} \sum \vec{F} = 0 & \text{F بدست می‌آید} \\ \sum \vec{M}_A = 0 & \text{گشتاور M بدست می‌آید} \end{cases}$$

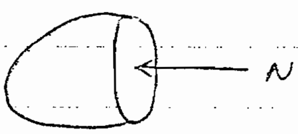


$$\begin{cases} N = F\cos\alpha \longrightarrow \text{نیروی عمودی} \quad \text{Normal Force} \\ V = F\sin\alpha \longrightarrow \text{نیروی برشی} \quad \text{shear Force} \end{cases}$$

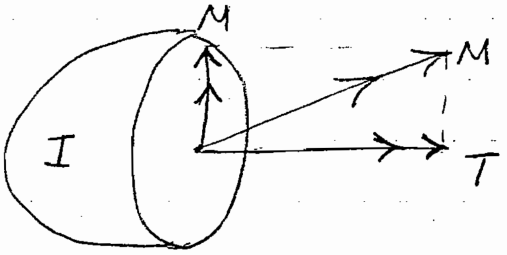
* نیروی عمودی هم می‌تواند فشاری یا کششی باشد 8



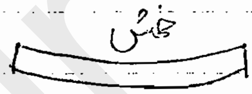
دور از مقطع) نیروی کششی



به طرف مقطع) نیروی فشاری



$M \longrightarrow$ لنگر خمشی $\longrightarrow$ در داخل سطح می‌تواند به ۲ مؤلفه تجزیه شود.



$T \longrightarrow$ لنگر پیچشی — پیچش حول محور لنگر

* نیروی داخلی کلاً ۶ مؤلفه است $\longleftarrow$ ۲ مؤلفه نیروی برشی — Internal Force $\longleftarrow$ نیروی داخلی*

۲ " لنگر خمشی

۱ مؤلفه لنگر پیچشی

۱ مؤلفه نیروی عمودی

این نیروهای داخلی در مقطع هستند چون نیروهای داخلی دیگری نداریم؟

۳ محور داریم یک محور عمود بر سطح و ۲ محور در داخل سطح

* برای به دست آوردن این نیروهای داخلی ؟

$N = ? \longrightarrow \sum F = 0$

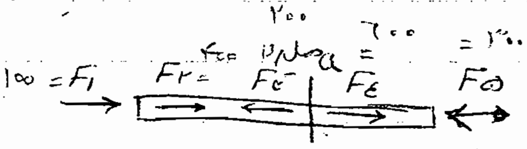
جمع نیروها در امتداد محور عمود بر سطح مقطع

قسمت I نیز قسمت باقیمانده

قسمت II " " حذف شده

* این $\sum$ فقط برای یک قسمت است نیز قسمت باقیمانده و قسمت حذف شده

مثال:



در مقطع aa، N را بخواهیم:

$$F_1 + F_2 - F_3 + N = 0 \Longrightarrow N = F_3 - F_1 - F_2$$

$\Rightarrow$ * $N = -300 \Rightarrow$ فشاری N

* به جای جهت باقیمانده و حذف شده از چپ و راست استفاده می کنیم

چپ = باقیمانده
راست = حذف شده

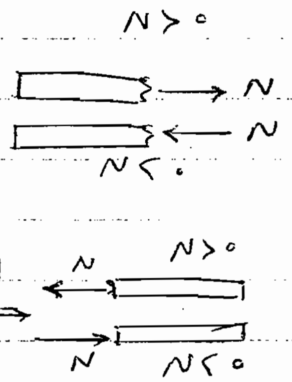
جمع مؤلفه‌های نیروهای وارد بر سمت چپ در امتداد عمود بر سطح مقطع $+ N = 0$

جمع مؤلفه‌های نیروهای وارد بر سمت راست در امتداد عمود بر سطح مقطع $- N = 0$

$N = -$ (جمع مؤلفه‌های نیروهای وارد بر سمت چپ مقطع در امتداد عمود بر سطح مقطع)

یا

$N =$ (جمع مؤلفه‌های نیروهای وارد بر سمت راست مقطع در امتداد عمود بر مقطع)



همان قبل $\longrightarrow N = -(100 + 400 - 200) = -300$

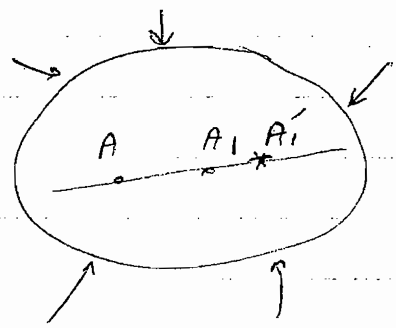
یا $N = (-600 + 300) = -300$

کشش را همیشه مثبت بگیر و فشار را منفی

* تغییر شکلها 8

در تفاوت مصالح نه فقط می‌خواهیم بدانیم که آیا مثلاً یک میله می‌تواند یک نیرو را تحمل کند بلکه می‌خواهیم بدانیم که آیا تغییر شکلی می‌دهد ؟

برای این کار واحدگذاری تعریف می‌کنیم به نام تنجش یا strain 8

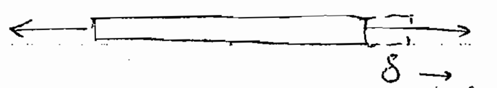


وقتی نیرو به جسم وارد می‌شود
نقطه A_1 به A نزدیک یا دور می‌شود
ممکن است A هم تغییر کند ولی دوباره آن را
به جای اصلی منطبق می‌کنیم

تنجش «تعریف» یا

$$\varepsilon = \lim_{\overline{AA_1} \to 0} \frac{\overline{AA_1'} - \overline{AA_1}}{\overline{AA_1}}$$

چون ممکن است یک جا طول زیاد شود یه جا کم شود پس یا داریم در یک نقطه تعریف کنیم پس مجبوریم طول را خیلی کوچک بگیریم $\overline{AA_1} \to 0$



«نیرو حتماً در امتداد محور باشد.» در اینجا تنجش در همه نقاط یکی است ؛ چون همه یک تغییر طول می‌دهند ؛

* $\varepsilon = \frac{\delta}{L}$ تغییر طول / طول اولیه

ε می‌تواند منفی باشد در این حالت ساده فرم را است .

تنجش یا تغییر طول نسبی یا کرنش ؛ « گاهی تنجش خطی هم گفته می شود » ← (linear)

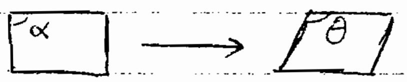
کرنش لغت خوبی نیست ؛

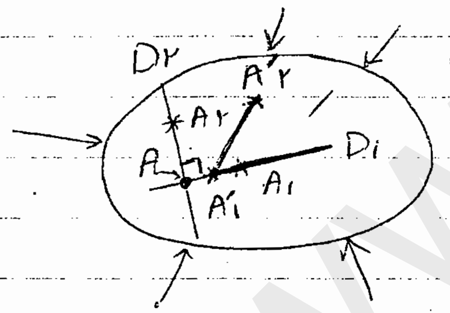
تنجش در فارسی به معنای درهم کشیده شدن و درهم فشرده شدن است ؛
کرنش به معنای تعظیم است یعنی نزدیکی خوبی ندارد ؛

تنجش بدون بعد است ؛

حالت دیگری از تغییر شکل وجود دارد و آن تغییر زاویه است ؛

قبل





D1 و D2 عمودند ؛

تغییر زاویه قائم $\gamma = \lim \left(\frac{\pi}{2} - \widehat{A_1' A A_2'} \right)$

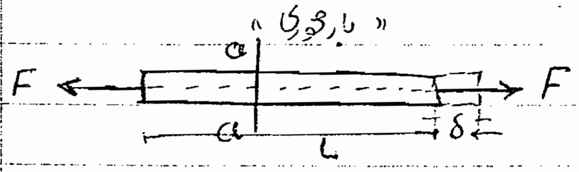
$\overline{A_1A} \to 0$

$\overline{A_2A} \to 0$

* γ تنجش برشی shear strain

هم به شکل نقطه بستگی دارد هم به امتداد

* بار محوری ؛



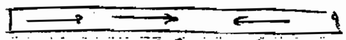
aa ؛ $N = F$

هر چه به کل میله اضافه شود هر تکه آن نیز به همان اندازه طول اضافه می شود.

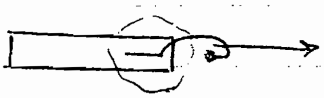
تنجش $\varepsilon_x = \frac{\delta}{L}$ در امتداد x

N به طور یکنواخت در مقطع پخش شده است ؛ = اگر در میله هیچ تغییر مقطعی نداشته باشد ؛

* تنش $\sigma = \frac{N}{A}$

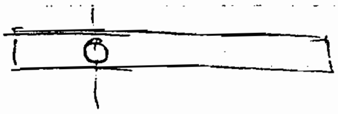


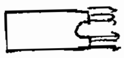
هر تکه زیر اثر یک بار محوری است .



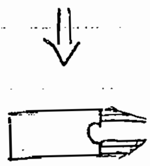
اگر نیرو را توسط قلاب وارد کنیم
دیگر تنش در ناحیه قلاب از رابطه
بالا تبعیت نمی کند

هر تغییری در میله داده شود در حوالی این تغییر
این رابطه صادق نیست !





غلط است ← یکنواخت نیست

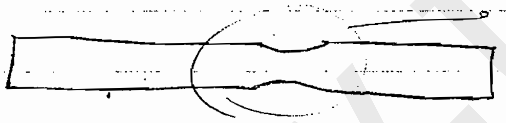


* تنش در نزدیک سوراخ
حدود ۳ برابر دو انتها است ،

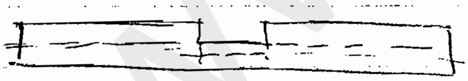
دایره اگر به سمتی نزدیک شود و ضعیف
تمرکز تنش خطرناک تر است و خیلی زود
در اثر نیروی کششی پاره خواهد شد .

از رابطه بالا نمی شود رفت

یا



* از محل تغییر باید به اندازه یک قطر میله دور شویم تا تنش یکنواخت شود ؛ معمول را باید بپذیریم .
تقریباً

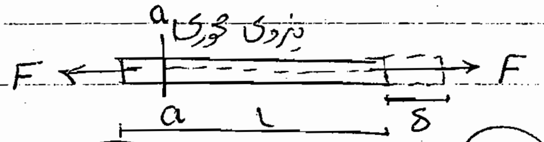


در اینجا محور کلا تغییر می کند
مبحث آن متفاوت است .

این نکته که در حوالی تغییرات تنش زیاد می شود به تمرکز تنش یا stress concentration

موسوم است که در تئوری ارتجاعی کارشناسی ارشد یا در سازه های فولادی در کارشناسی بحث می شود (طراحی سخت)

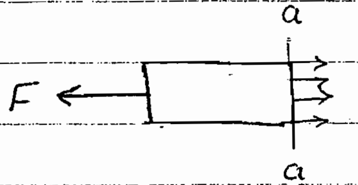
باید در نظر گرفته شوند .



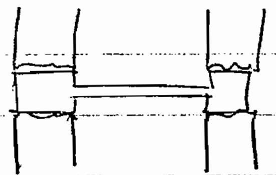
$$\sigma_x = \frac{F}{A}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\delta}{L}$$

میله به طور یکنواخت تغییر طول پیدا می کند



یک نمونه داده را می توانیم تحت آزمایش کشش قرار دهیم تا رابطه بین ε_x و σ_x را می یابیم.



نمونه مورد نظر به صورت مقابل در فک کشش قرار می گیرد

یک جفت از فک ها ثابته تغییر مکان ندارند و یک جفت دیگر با سرعت خیلی کمی حرکت می کنند.

دستگاه برای این که این تغییر شکل را ایجاد کند ناچار است نیرویی به میله وارد کند و به این ترتیب رابطه ای بین نیرو و تغییر طول می یابیم.

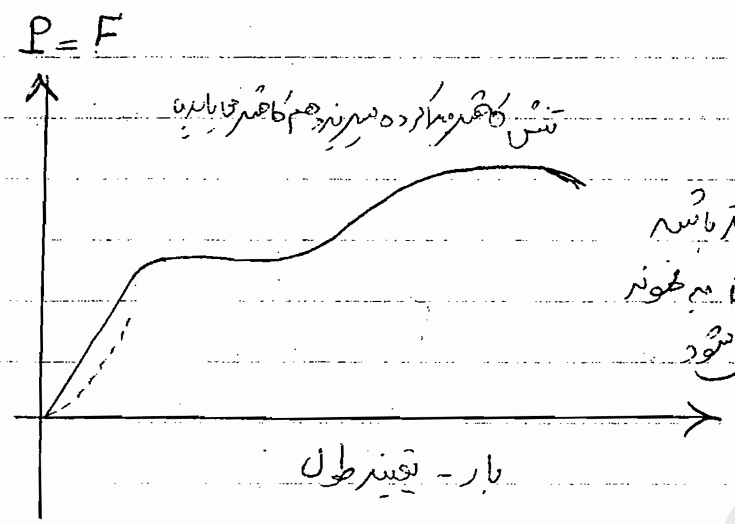
دستگاه های جدید طوری هست که خود دستگاه نیرو و اندازه تغییر را ثبت و رسم می کند و هم تغییر طول و نیرو را به ما می دهد.

و این منحنی در مواد مختلف متفاوت است.

یکی از مصالح مهم مهندسی فولاد سازه ای است یعنی فولادی که در تیرآهن های I یا جعبه گردی

که در بتن مورد استفاده قرار می گیرد + « structural steel »

* منحنی برای فولاد سازه ای δ

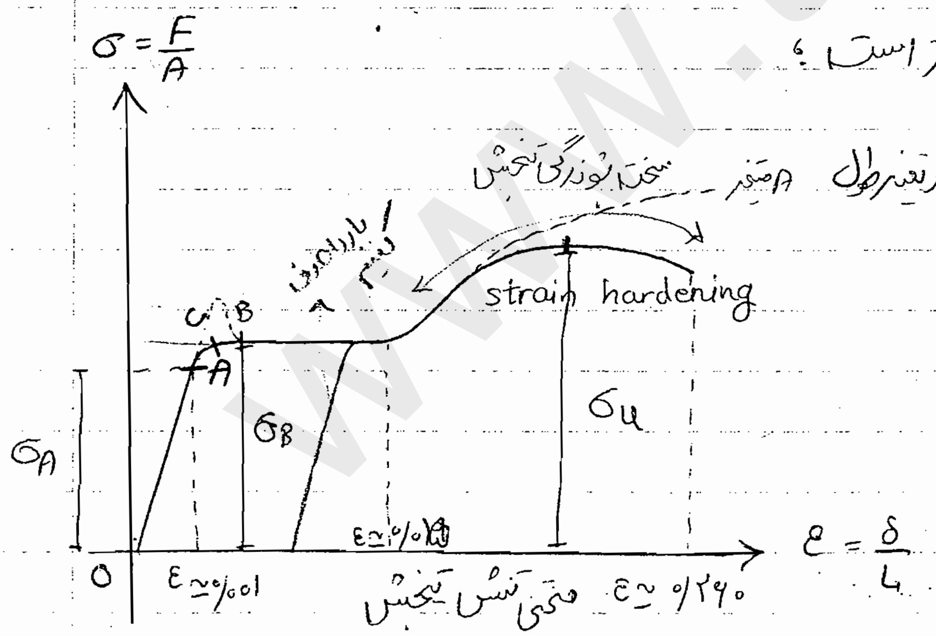


در ابتدای منحنی ممکن است فرق داشته باشد چون ممکن است در شروع فک ها به محور بلغزند و این لغزش جزء δ محسوب می شود ولی تغییر طول واقعی نیست پس ممکن است یک δ اضافه در ابتدا داشته باشیم

نیرو به سطح مقطع بستگی دارد هرچه سطح مقطع میله بزرگتر باشد این نیرو بیشتر و برعکس اند

هرچه میله بزرگتر باشد δ بزرگتر است.

می توانیم با تقسیم F بر A نمودار تغییر طول تنش را رسم کنیم. (A متغیر)



در ابتدای منحنی یک خط داریم که منحنی خطی هم است.

* OA منحنی نسبی یا خطی منحنی تنش - کرنش
رابطه خطی بین این دو وجود دارد یعنی متناسب با هم تغییر می کند

اگر عدم تعادل داشته باشیم منحنی به شکل خط چین در می آید .

نقطه A دارای تنشی است به نام تنش نسبی یا حد نسبی σA
یعنی حدی که تا آنجا نسبت برقرار است و بعد از آن رابطه دیگر خطی نیست

* نقطه B دارای تنشی است به نام تنش تسلیم σyp yield point
نقطه تسلیم «انگلیسی ها»

چون مثل این است که میله در مقابل تغییر طول تسلیم شده است یعنی

دستگاه بدون این نیاز به افزایش نیرو داشته باشد با نیروی ثابت فک ها حرکت می کنند و تغییر طول

می دهند « مقاومتی در مقابل تغییر طول ایجاد نمی کند »

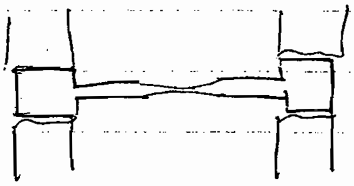
« موسوم است به تنش جاری شدن - تنش سیلان »
* گفتن حد تسلیم درست نیست ؛ چون اینجا حدی نیست ؛ حد جاری شدن غلط است ؛

* در سخت شوندگی تنش فرض شده است تنش مثل یک جسم عمل می کند یعنی دوباره باید نیرو وارد کنیم تا تغییر طول داده شود ؛
* max این منحنی از منحنی به نام تنش نهایی یا تاب موسوم است (σu)

بعد تنش کم می شود و میله قطع می شود ؛

* در تمام این منحنی ها قطر کم می شود ولی با چشم قابل ملاحظه نیست ؛

از شروع سخت شوندگی تغییر قطر به طور واضح اتفاق می افتد.

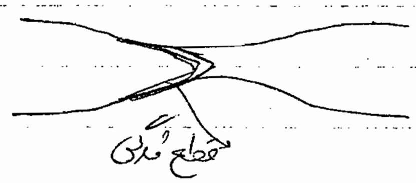


قبلاً می توانستیم این تغییر قطر را ننویسیم بستگی دارد به این که

میله دارای حباب هوا باشد یا ترک کوچکی باشد از طرفی فولاد ترکیبی است از آهن و کربن و ...
پس ممکن است خوب مخلوط نشده باشند و این مخلوط در آنجا ضعیف است و شروع به باریک شدن می کند.

علت این که دوباره در انتها تنش کم می شود به این علت است که A را ثابت گرفتیم درحالیکه باید یک تنش جدید تعریف کنیم

اگر بخواهیم سطح جدید را اعمال کنیم منحنی همواره رو به بالا است یعنی فولاد یا میله در بزرگترین تنش قطع خواهد شد.



در هنگام قطع شدن نیرو max نیست.

* الاستیک - ارتجاعی - برگشت پذیر : هر جسم بعد از حذف نیرو به وضع اول برمی گردد
به این خاصیت الاستیسیته یا خاصیت برگشت پذیری یا
خاصیت ارتجاعی می گویند.

هر جسمی تا یک حدی این خاصیت را دارد. موم را اگر در نظر بگیریم به ظاهر اصلاً این خاصیت را ندارد اما اگر نیرو فوق العاده کم باشد باز هم الاستیسیته داریم ولی مقدار آن خیلی کم است.

* چنین جسمی مثل موم را پلاستیک یا خمیری گویند و به این خاصیت که جسم بعد از حذف نیرو به وضع اولیه برنگردد خاصیت پلاستیسیته یا خمیری گویند.

روی OA هرجا که نیرو را حذف کنیم میله به وضع اولش برمی گردد الاستیک است ؛

اگر از نقطه C رد شویم دیگر میله الاستیک نیست ؟

* هرجا بار را قطع کنیم بعد از C به صورت شکل قبلی منحنی شروع می شود یعنی تغییر شکل در آن باقی می ماند ؟
ممکن است هر ۳ نقطه A و B و C را یکی بگیرند

* حد تناسبی فولاد ساده ای $\simeq 190-220\ MPa$ یا $(1900-2200\ \frac{kgf}{cm^2})$

اگر یک میله ای یک cm^2 سطح مقطع داشته حدود ۲۰۰۰kg می تواند تحمل کند تا به این حد برسد .

* تنش تسلیم فولاد $\simeq 220-250\ MPa \rightarrow (2200-2500\ \frac{kgf}{cm^2})$

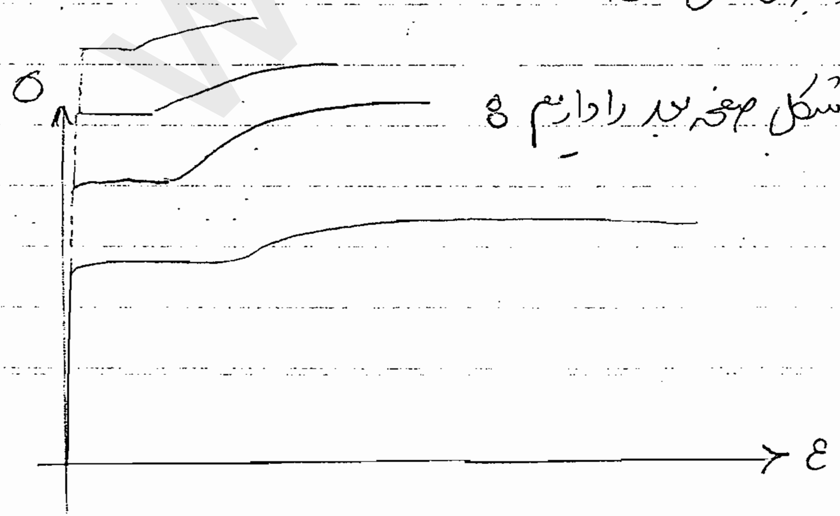
* σ_c یا حد الاستیک چون دقیقاً بعد از آن میله حداکثر می پلاستیک می شود ، $200-230\ MPa \rightarrow (2000-2300\ \frac{kgf}{cm^2})$

* تاب نهایی شکست $\simeq 330-390\ MPa \rightarrow (3300-3900\ \frac{kgf}{cm^2})$

تغییر طول در انتها خیلی بیشتر از ابتدای منحنی است

اگر منحنی را با اشل بزرگ رسم کنیم شکل صفحه بعد را داریم .

منحنی شو زگی خیلی طولانی خواهد بود .



* فولاد در حسب کربن ؛ اگر کربن آن زیاد شود مقاومت اولیه آن بالا می رود

یعنی فولاد می تواند به طور الاستیک مقاومت بیشتری بگیرد ولی تغییر طول در موقع کار کمتر است

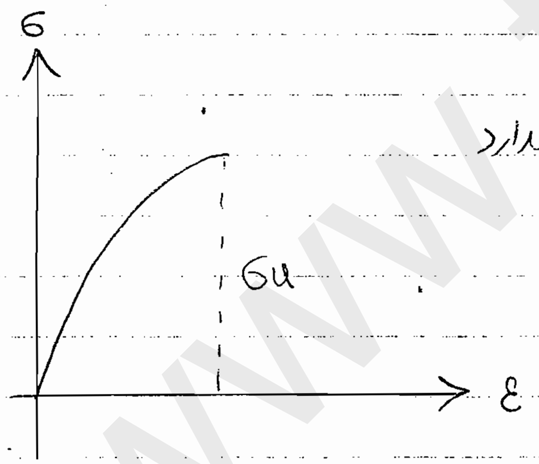
اگر فولاد بخواهد در حالت عادی و بدون ضربه باشد فولادی که مواد ساده دارد خوب است

اگر نیرو ناگهانی وارد شود جسمی بهتر مقاومت می کند که بتواند تغییر طول بیشتری بدهد اگر این تغییر شکل را جسم بتواند تحمل کند گسیخته نمی شود و کشش سخت شوندگی طولانی تر باشد .

* در مقابل ضربه با افزایش کربن فولاد شکسته می شود ؛ «فولاد خشک»

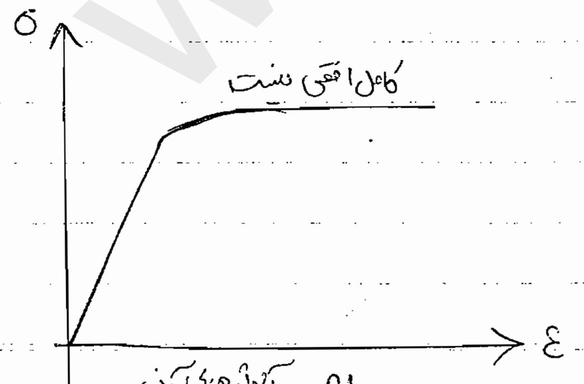
امروزه فقط با کربن فولاد را تغییر نمی دهند با نیکل و کروم و ... خواص مختلفی به فولاد می دهند یکی از این خواص بزرگ بودن تغییر شکل است .

* کربن زیاد در آهن ← چدن



چدن مقاومت بالاتری ندارد قسمت افقی و طولانی ندارد
چون قسمت افقی ندارد جسم زود می شکند ؛

چون ε در موقع پارگی خیلی کم است ؛

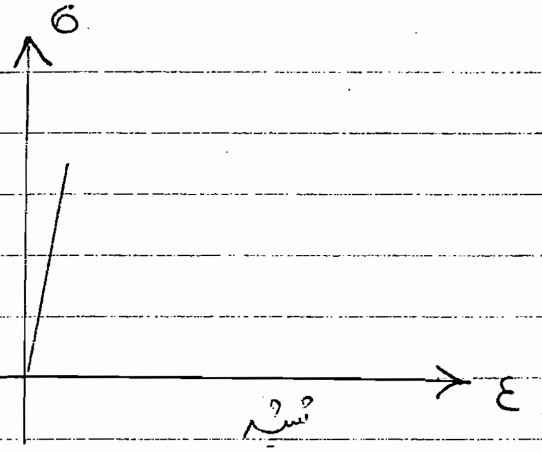


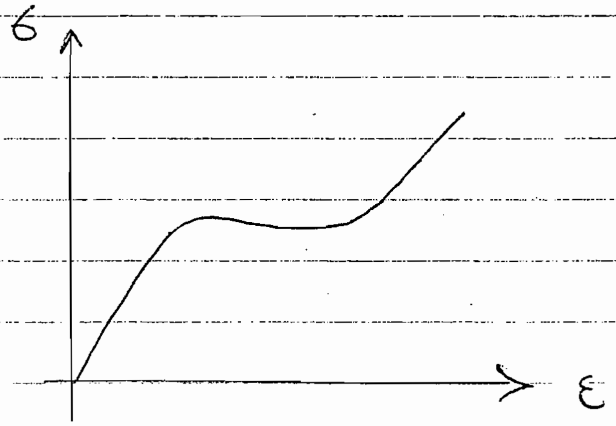
Al و آلیاژهای آن
مس

* آلومینیوم شکسته نیست چون افقی دارد ؛

فولاد کاملترین منحنی را دارد ؛

* در موقع بارگذاری تنش زیادی نمی تواند تحمل کند
چون ε اولیه آن خیلی کم است





* لاستیک

* تمام این منحنی ها با بارگذاری تدریجی نه ناگهانی رسم می شوند :

اگر بارگذاری سریع باشد منحنی ها کمی متفاوت تر بوده کمی بالاتر می روند ؟

* این منحنی ها در درجات معمولی رسم شدند. درجات کم شکستگی مواد را زیاد می کند یعنی تغییر طول زیاد نمی توانند نشان دهند
در درجات بالا مقاومت کمتری نشان می دهند .

در آتش سوزی ها دیگر فولاد مقاومت معمول خود را ندارد .
سازه های فولادی به سرعت فرو می ریزند .

* وقتی سازه را طراحی می کنیم باید توجه کنیم که نباید تغییر شکل زیاد در سازه داشته باشیم یعنی نباید وارد
قسمت های سخت شوندگی شویم باید قسمت هایی باشد که تغییر شکل کم است .

یک سقف را برای یک بارگذاری طراحی می‌کنیم ؛ «شرایط معمولی»
ممکن است در شرایطی بارگذاری بیشتر از حالت معمول روی سقف اعمال شود ؛

* در طراحی باید تنشی را در نظر بگیریم که به آن تنش مجاز می‌گویند که برابر است با :

allowable or working stress

$$\sigma_w = \frac{\sigma_{yp}}{S.F}$$

safety factor S.F

بعضی مواد تنش تسلیم ندارند مثل چدن ؛ ممکن است یک تنشی را تعریف کنند با بستن به شیب خط مماس در منحنی ؛

در مورد بعضی مصالح مجبوریم از تنش ~~تسلیم~~ نهایی استفاده کنیم ؛

$$\sigma_w = \frac{\sigma_u}{S.F}$$

تا σ_u سازه گسیخته نمی‌شود
ممکن هم هست بشود پس
S.F در این مورد زیادتر
باید بزرگتر باشد ؛ چون احتمال
گسیختگی بیشتر است ؛

یک سد خرابی آن باعث خرابی حوزه‌ی شهری شود پس S.F خیلی بیشتری باید بکار برد ؛
S.F را محققین هر رشته تعیین می‌کنند.

* در کارهای معمول ساختمانی ضریب اطمینان حدود ۵/۳ است ؛

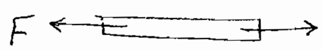
جزوه ۱۷

Hooke's law

* رابطه بین تنش - کرنش :

$$\sigma = E\varepsilon$$

هر دو در یک راستا اند



E = ضریب ارتجاعی یا ضریب کشسانی یا مدول الاستیسیته

ε بدون بعد

σ بعد فشاری است

E از بعد فشار برابر است ضریب گفته می‌شود در مدول ارتجاعی !!

$$\text{فولاد} \quad E = 2\times10^{5}\ MPa \longrightarrow 2\times10^{6}\ \frac{Kgf}{cm^2}$$

* E را مدول یانگ هم می‌گویند ((young's Modulus of Elasticity))

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad , \quad \varepsilon = \frac{\delta}{L} \rightarrow \delta \rightarrow$$

برای یک میله با بار محوری

$$\boxed{\delta = \frac{FL}{EA}}$$

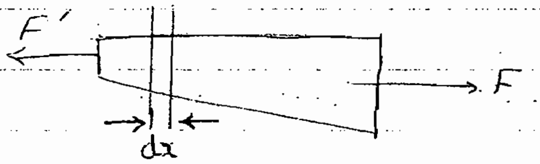
گاهی به این رابطه قانون هوک گفته می‌شود.

* EA را صلبیت محوری گویند هر چه بیشتر باشد تغییر طول کمتر است میله صلب‌تر است؛

* $\frac{EA}{L}$ را سختی محوری گویند ← (axial stiffness) تعبیر سفتی گفته می‌شود که نوعی محوری بوده

نشان می‌دهد مثل فنر است ← $F = k\delta$ نیروی فنری

— اگر میله کمی مخروطی باشد به طوریکه تغییر مقطع شبیه هم نباشد δ



تنش فرق می‌کند ؟
در هر مقطع سطح خودش را دارد

$$\sigma = \frac{F}{A} \longrightarrow$$ A مربوط به هر مقطع است.

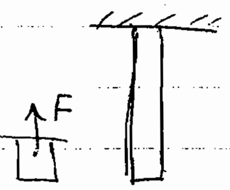
هر تقطع L —

$$d\delta = \frac{F\,dx}{EA}$$ A مربوط به همان مقطع

در طول dx باندازه $d\delta$ تغییر طول داریم ؛

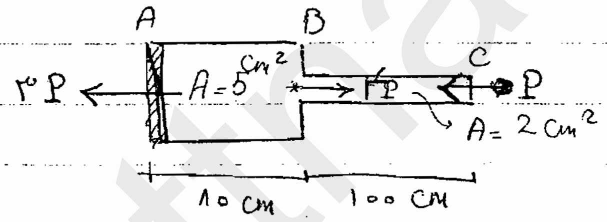
E ثابت است ؛

$$\delta = \int \frac{F\,dx}{EA}$$



وزن این تکه =

میله ای که تحت اثر وزن خودش آویزان است در مقاطع مختلف نیروی مختلفی دارد



$E = ۲\times10^{۵}$ MPa

$\sigma_w = ۱۲۰$ MPa

مثال ۸

در شکل بالا ؛ مقدار مجاز P را تعیین کنید به شرط اینکه تغییر مکان هیچکدام از نقاط A , B , C نسبت به همدیگر نخواهیم از $1\ mm$ بیشتر شود ؟

σ_w —— هر تکه تنش مجاز آن نباید از ۱۲۰ بیشتر شود .

حل ؛

$A-B:\quad N_{AB} = ۳P$ کششی

$N_{BC} = -P$ فشاری

$1\,MPa = 1\ N/mm^2$

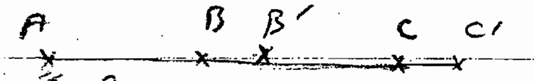
$\sigma_{AB} = \frac{۳P}{۵۰۰}$ چون قرار است مساحت بر حسب mm^2 باشد ؛ تا MPa تبدیل شود ؛

① $\sigma_{AB} \leqslant ۱۲۰ \Rightarrow P \leqslant ۲۰۰۰۰\,N = ۲۰\,KN$

② $|\sigma_{BC}| = \left|\frac{-P}{۲۰۰}\right| = \frac{P}{۲۰۰} \leqslant ۱۲۰ \Rightarrow P \leqslant ۲۴۰۰۰\,N = ۲۴\,KN$

چون می خواهیم با شدت مقایسه کنیم قدر مطلق می گیریم

$$\delta = \frac{FL}{EA}$$



A را ثابت گرفتیم

$B'C' < BC$ تنش فشاری

$\delta_{AB} \leq 1 \text{ mm}$

$|\delta_{BC}| \leq 1 \text{ mm}$

نمی‌دانیم کششی یا فشاری است $|\delta_{AC}| \leq 1 \text{ mm}$

$|\delta_{AC}| = |\delta_{AB} - \delta_{BC}| \leq 1 \text{ mm}$ نیازی به کنترل این آخری نیست؛

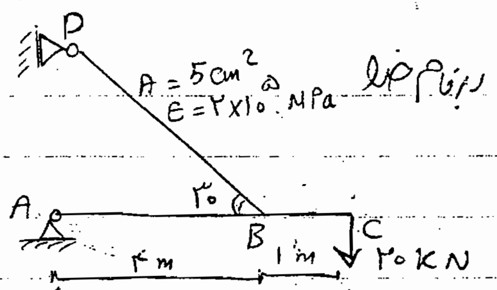
$$\delta_{AB} = \frac{۳P \times ۸۰۰}{۲\times 10^{۵} \times ۵۰۰} \leq 1 \Rightarrow P \leq \frac{10^{۶}}{۲۴} N = ۴۰٫۱ \text{ KN}$$

$$|\delta_{BC}| = \frac{P \times 1000}{۲\times 1۰^{۵} \times ۲۰۰} \leq 1 \Rightarrow P \leq ۴۰ \text{ KN}$$

$\Longrightarrow$ مجاز $P_w = ۲۰ \text{ KN}$ جوابی که در تمام آنها صدق کند؛ کمترین مقداری که شرط‌ها را نقض نکند.

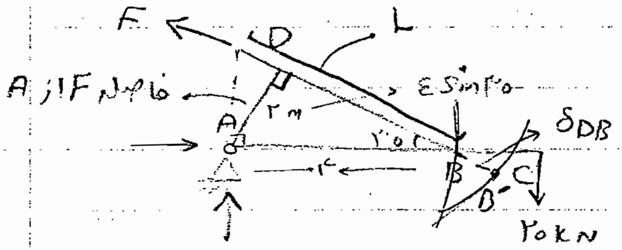
۸۴/۱۲/۳

مثال ۸



در شکل روبرو میله ABC صلب است تغییر مکان نقطه C را تعیین کنید؟

صلب است یعنی تغییر شکل ندارد نه طولش عوض می شود نه خم می شود ولی می تواند حول A دوران کند میله DB طولش تغییر می کند اگر تحت کشش باشد میله در B به سمت پایین حرکت می کند؛ در نتیجه C رو به پایین دوران می کند؛



ابتدا باید نیروی محوری را در DB یافت؛

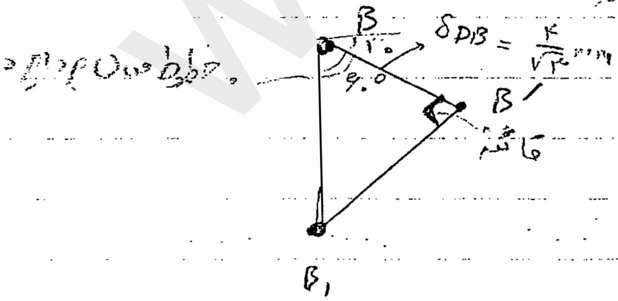
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 20\times5 - F\times2 = 0 \Rightarrow \boxed{F = 50\ kN}$$

$$L = 4/\cos 30$$

$$\delta_{DB} = \frac{FL}{EA} = \frac{50\times1000\times\frac{4000\ mm}{\cos 30}}{2\times10^5\times500}$$

$$\Rightarrow \delta_{DB} = \frac{4}{\sqrt{3}}\ mm$$

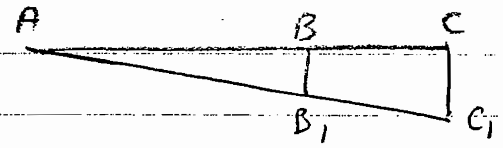
طول AB ثابت است یک دایره به مرکز A به شعاع AB چون مسیر است
برای تعیین B' دایره به مرکز D و به شعاع DB' رسم می کنیم؛ محل تقاطع محل جدید B یعنی B' است؛ به جای دایره ها از خط استفاده می کنیم و دیگر مسائل مقاومت مصالح
چون تغییر شکل ها نسبت به طول ها کوچکند



$$\Rightarrow \overline{BB_1}\times\cos 60 = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

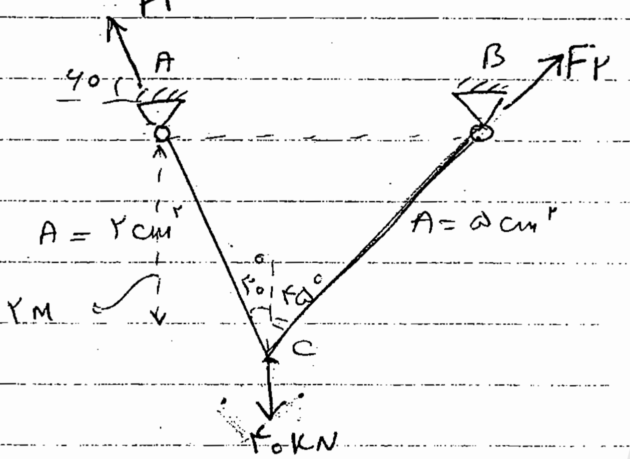
$$\Rightarrow \boxed{\overline{BB_1} = \frac{8}{\sqrt{3}}\ mm}$$

برای یافتن محل C داریم ؛



$$\frac{\overline{CC_1}}{\overline{BB_1}} = \frac{5}{4} \Rightarrow \overline{CC_1} = \frac{10}{\sqrt{3}} \text{ mm}$$

مثال : تغییر مکان نقطه C ؟



$E = 2 \times 10^5$ MPa

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow -F_1 \times \tfrac{1}{2} + F_2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow F_1 = F_2\sqrt{2}$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_1 \frac{\sqrt{3}}{2} + F_2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 40 = 0 \Rightarrow$$

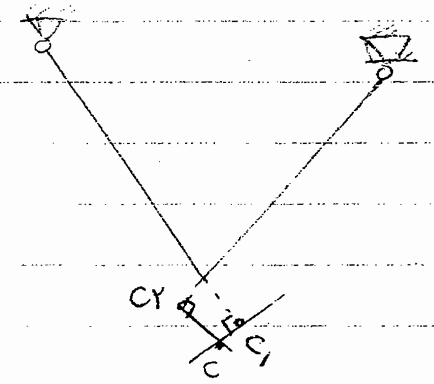
$$\Rightarrow F_2 \left(\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 40$$

$$\Rightarrow F_2 = \frac{80}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = 20.71 \text{ kN}$$

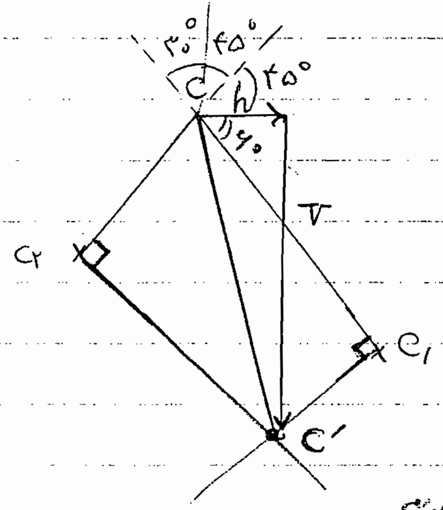
$$\Rightarrow F_1 = 29.28 \text{ kN}$$

$$* \quad \delta_1 = \frac{29280 \times \frac{2000 \times 2}{\sqrt{3}}}{2 \times 10^5 \times 200} = 1.69 \text{ mm}$$

$$* \quad \delta_2 = \frac{20710 \times 2000 \times \sqrt{2}}{2 \times 10^5 \times 500} = 0.59 \text{ mm}$$



به جای دایره خطوط عمود بر شعاع را رسم می کنیم

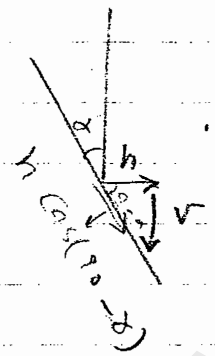


برای یافتن محل C' کافی است h و v یعنی تغییر مکان افقی و قائم را بیابیم:

مجموع مقادیر h و v بار روی ① بار روی ② بدست می آوریم

در بار اول مقدار δ_1 و بار دوم مقدار δ_2 است

جهت + نیز جهتی که طول افزایش پیدا کند:



$$h\sin\alpha + v\cos\alpha$$

$$\Rightarrow h \times \tfrac{1}{2} + v \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \delta_1 = 1/69$$

$$-h \times \frac{\sqrt{2}}{2} + v \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \delta_2 = 0/59$$

* چون h را در جهت خلاف اما طول روی میله ۲ کم می کند

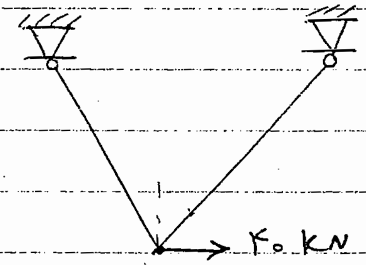
$$\Rightarrow h = 0/71 \longrightarrow$$ سمت راست

$$v = 1/54 \downarrow$$ پایین

اگر منفی بدست می آمد باید جهت را تغییر دهیم

ممکن است یکی از تغییر طولها منفی باشد ؟

مثال :



اگر جهت کاهش طول را منفی بگیریم ؟

δ کاهش طول را باید — گذاشت

* سازه خطی :

با فرض اینکه تغییر شکلها کوچکند می توان همان هندسه اولیه را در سازه بکار برد :

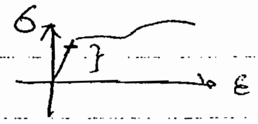
یعنی مثلاً در مثال قبل اگر نیروی قائم ۴۰ را به ۲۰ یا ۸۰ تبدیل کنیم : می توانیم بگوییم δ ها

نصف یا ۲ برابر می شوند

* سازه را خطی گویند اگر نیرو را در یک عدد k ضرب بکنیم تنش ها، تغییر طول ها و نیروها هم در k ضرب شوند :

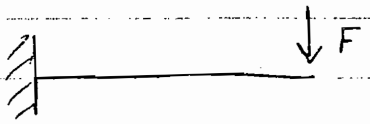
① برای این که این شرط برقرار باشد باید تغییر شکلها کوچک باشند : « از نظر هندسی »

② تنش - کرنش در قسمت خطی باشد : اگر در قسمت های غیرخطی وارد شود بازهم تنش ها دیگر از خطی بودن تبعیت نمی کنند « از نظر مادی »



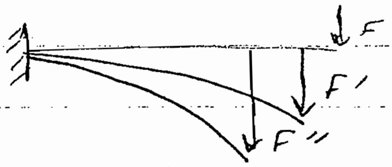
ممکن است یک سازه از نظر مادی خطی باشد ولی از نظر هندسی خطی نباشد ؟

مثلاً کش از نظر هندسی دارای تغییر شکلهای بزرگ است ولی از نظر مادی خطی باقی می ماند.

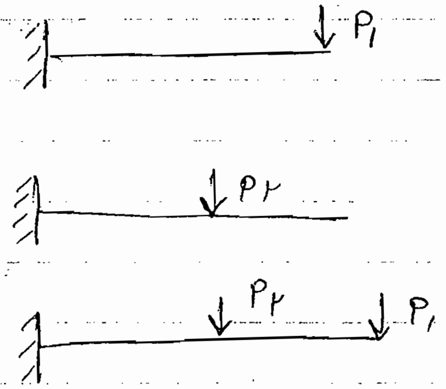


اگر تغییر شکل کم باشد با دوران شدن F ؛ تیر در تکیه گاه دوران می شود

ولی اگر تغییر شکل بزرگ باشد دیگر تیر ممکن نیست دوران شود بلکه تیر خم می شود ؛

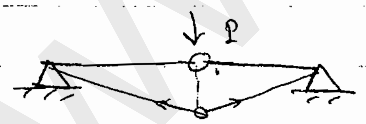


* به طور کلی در سازه خطی روش جمع اثرها برقرار است superposition جمع گذاری



پس اگر حالت اول و دوم را حل کنیم می توانیم بگوییم که در حالت سوم ، تغییر طول از جمع تغییر طول های دو حالت قبل به دست می آید ؛

مثال :

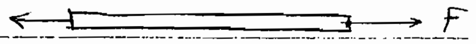


این سازه پایدار نیست پس برای تغییر شکل های کوچک راه حلی برای آن وجود ندارد

زوایا ، زوایای اولیه نیستند ؛ پس سازه خطی نیست ؛

* ضریب پواسن :

یک میله زیر اثر بار محوری تغییر طول ، تغییر شکل آن را حساب کنیم ؛



$\sigma_x = \frac{F}{A}$ $\qquad \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{\delta}{L}$

حال می‌خواهیم ببینیم در امتداد y و z چه تغییری داریم؟

ν ضریب پواسون $= -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x}$

میزان این نسبت برای هر ماده یک مقدار ثابتی دارد.

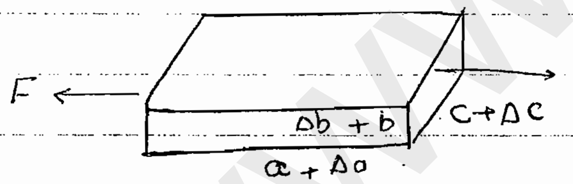
– برای این است چون ν را می‌خواهیم + بدست آوریم (poisson's ratio)

تحت کشش ε_x + است و دیگر کم می‌شود پس ε_y – است؛

هر محوری که در داخل مقطع انتخاب کنیم تغییر در راستای آن محور نسبت به محور x مقدار ثابتی دارد

ضریب پواسون بین صفر و نیم تغییر می‌کند؛ $\quad ۰ < \nu < ۰/۵$

برای اثبات حد بالای ضریب پواسون داریم؛



به هر دلیلی a به اندازه Δa و دیگر طول‌ها نیز تغییر کنند.

① اولیه $V = abc$

$$V + \Delta V = (a+\Delta a)(b+\Delta b)(c+\Delta c)$$

$$= abc + bc\Delta a + ac\Delta b + ab\Delta c + \underbrace{\cancel{c\Delta a\Delta b}}_{\text{صرفنظر}} \dots$$

$$+ \underbrace{\cancel{\Delta a\Delta b\Delta c}}_{\text{بی‌نهایت کوچک} \Rightarrow \text{صرفنظر}}$$

$$\Delta V = bc\Delta a + ac\Delta b + ab\Delta c$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta c}{c}$$

$\varepsilon_v = \frac{\Delta V}{V} \longrightarrow$ تنش حجمی

مجموع تنش در ۳ امتداد عمود بر هم

$$\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

مکعب تحت اثر نیروی F قرار گرفته باشد می توانیم بنویسیم 8

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad , \quad \sigma_x = \frac{F}{A} \Rightarrow \upsilon = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\upsilon\,\varepsilon_x$$

در ε_v می گذاریم

$$\Rightarrow \varepsilon_x - \upsilon\,\varepsilon_x - \upsilon\,\varepsilon_x = \varepsilon_x(1-2\upsilon) = \frac{\sigma_x}{E}(1-2\upsilon)$$

وقتی میله را می کشیم مسلماً حجم آن کم نمی شود اگر فشار دهیم حجم آن نباید زیاد شود

$\sigma_x > 0$ اگر $\Rightarrow \varepsilon_v > 0$ کشش $\Rightarrow 1-2\upsilon \geq 0$

یا $\sigma_x < 0$ اگر $\Rightarrow \varepsilon_v < 0$ فشار $\Rightarrow 1-2\upsilon \leq 0$ $\Rightarrow \upsilon \leq \frac{1}{2}$

صفر υ را هم خودمان انتخاب کردیم با مقدار دادن $-$

* برای فلزات بین $\frac{1}{3}$ تا $\frac{1}{4}$ $\longleftarrow$ برای فولاد $\simeq 0/3$

برای خاک و بتن حدود $0/2$

* هر چه ضریب پواسن به صفر نزدیکتر باشد تغییر حجم زیادتر است هر چه به $0/5$ نزدیکتر باشد تغییر حجم کم

برای موم $\simeq 0/5$

همه این ν ها برای قسمت خطی منحنی ۴-۵ است در قسمت افقی منحنی ۵ همواره مثل موم عمل می‌کند.

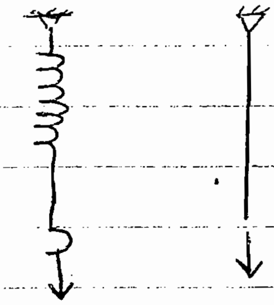
انرژی کرنشی 8 strain energy

در میله ای که تحت اثر نیرو قرار می گیرد چون نقطه اثر نیرو حرکت می کند کار انجام می شود اگر جسم الاستیک باشد این کار در جسم ذخیره می شود هر عضوی از سازه که تغییر شکل بدهد و در قسمت الاستیک باشد یک مقدار انرژی در آن ذخیره می شود ؟

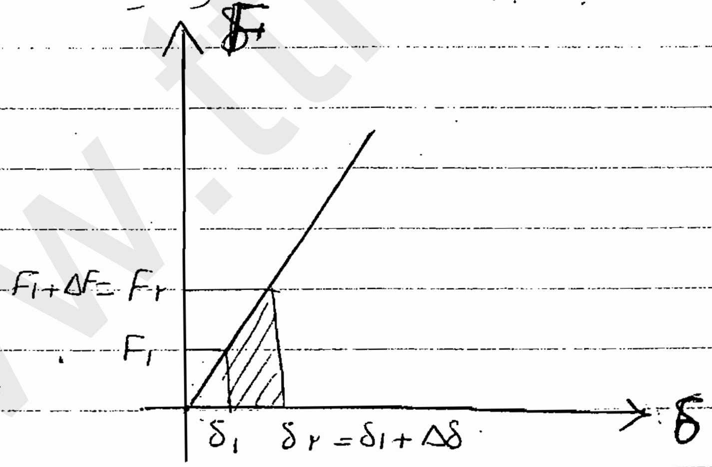
در گذشته هم بوده مثل ساعتهای کوکی که با انرژی ذخیره شده در فنر کار می کردند ؟

انرژی کرنشی از نوع انرژی پتانسیل است چون پتانسیل به محل ماده و فضاشکلی دارد و چون تغییر شکل هم محل ذرات را نسبت به هم عوض کرده است پس این انرژی ، پتانسیل (انرژی) است ؟

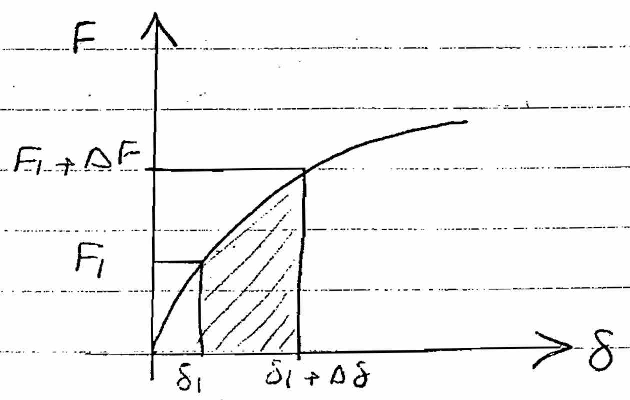
فنر



میله هم مثل فنر است ولی تغییر طول آن کمتر است ؟



بار از ۱ تا ۱۰۰ افزایش دهیم
با افزایش بار تغییر طول هم افزایش می یابد
اگر ۱۰۰ را به ۹۹ برسانیم تغییر طول کم می شود
قدم ای ها کار را نیا؟



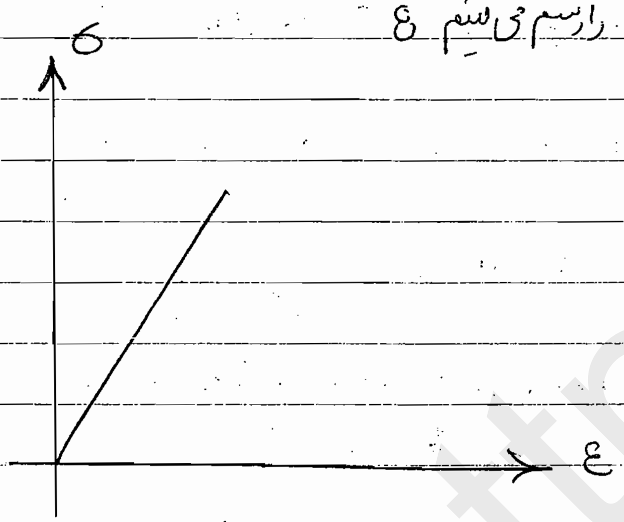
ΔF کار در فاصله $\Longrightarrow \quad \Delta W = (F_1 + \Delta F)\Delta\delta = F_1 \Delta\delta$

مساحت زیر منحنی $F - \delta$ ← کار انجام شده یا انرژی ذخیره شده در دستگاه

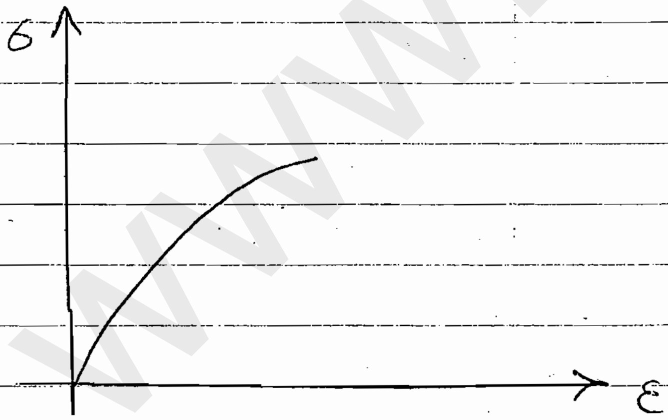
چون اگر الاستیک باشد دوباره روی همین منحنی برمی‌گردد بنابراین انرژی را پس می‌دهد « تماماً »

$$* \quad W = \int_0^F F \, d\delta$$

به جای $F - \delta$ منحنی $\sigma - \varepsilon$ را رسم می‌کنیم ؛



مساحت زیر منحنی به یک حجم تقسیم می‌شود



در اینجا انرژی پخش در واحد حجم را خواهیم داشت که با U نشان داده می‌شود ؛

$$U = \frac{W}{\underset{\text{حجم}}{V}}$$

انرژی تحت واحد حجم $= \dfrac{W}{AL} = \dfrac{W}{A.L}$ (U ، U)

برای مبلیم

$*\quad \delta = \dfrac{FL}{EA} \Rightarrow w = \int_0^{\delta} F\, d\delta = \dfrac{1}{2} F \cdot \delta$

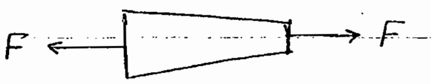
برای حالت خطی

منحنی $\sigma - \varepsilon$

$u =$ سطح زیر منحنی تنش - کرنش

$$\boxed{w = \frac{F^2 L}{2EA}}$$

$*$ غیرخطی $\quad \delta = \int \dfrac{F\,dx}{EA} \Rightarrow \boxed{W \text{ یا } U = \int \dfrac{F^2\,dx}{2EA}}$



U کار

u تنش واحد حجم

$*$ برای حالت خطی $\quad u = \dfrac{\dfrac{F^2 L}{2AE}}{AL \text{ حجم}} = \dfrac{F^2}{2A^2E} = \dfrac{\sigma^2}{2E}$

$u = \dfrac{\sigma^2}{2E} = \left(\dfrac{\sigma}{E}\right)\left(\dfrac{\sigma}{2}\right) =$ مساحت زیر منحنی $\sigma - \varepsilon$ $= \dfrac{1}{2}\sigma\varepsilon$

$*\quad u = \dfrac{\sigma^2}{2E}$

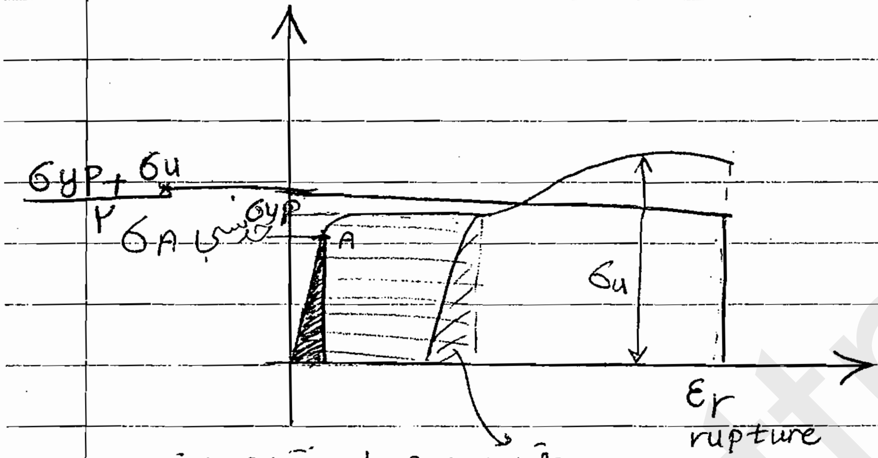
$*\quad u = \dfrac{1}{2}\sigma\varepsilon$

$*\quad u = \dfrac{E}{2}\varepsilon^2$

$$* \quad U = \frac{F^2 L}{2AE}$$

$$* \quad U = \frac{1}{2} F \delta$$

$$* \quad U = \frac{EA\delta^2}{2L}$$



وقتی از A رد می شویم و وارد مرحله
پلاستیک می شویم دیگر کار حالت
برگشتی ندارد ؛
سطح زیر منحنی کار انجام شده می باشد

* وقتی بار را برمی داریم فقط همین قدر
انرژی پس می دهد
در حالیکه به اندازه هاشور مشکی کار انجام
داده بودیم

بقیه انرژی به حرارت تبدیل می شود به صورت
پتانسیل دهنده نمی شود که بعداً پس داده شود.
حرارت در محل قطع شدگی .

مقدار انرژی تا σ_A را ؟

« مقدار انرژی تحت واحد حجم تا رسیدن به حد تناسب را مدول رزیلیانس گویند »

مدول رزیلیانس $= \frac{\sigma_A^2}{2E}$

نشان می دهد چقدر انرژی در واحد حجم در حالت
الاستیک ذخیره می شود .

حد تناسب و الاستیک تقریباً یکی در نظر گرفته شده است :

* فولاد $\sigma_A \simeq 200\ MPa = 2000\ kgf/cm^2$

$E \simeq 2\times10^5\ MPa = 2\times10^6\ \frac{kgf}{cm^2}$

مدول رزیلیانس فولاد نرمه ساختمانی $= 0/1\ MPa$

* $\frac{\text{انرژی}}{\text{حجم}} = \frac{FL}{L^3} = \frac{F}{L^2}$

مدول رزیلیانس $= 1\ \frac{kg}{cm^2}$

* لاستیک معمولی $E \simeq 1\ MPa = 10\ kg/cm^2$

$\sigma_A \simeq 2\ MPa = 20\ kg/cm^2$

مدول رزیلیانس $= 2\ MPa$

انرژی که واحد حجم لاستیک می تواند ذخیره کند و الاستیک بماند ۲۰ برابر فولاد است.

اگر در یک جایی بخواهیم انرژی مستهلک شود مثل نیروی ضربه در لاستیک باشیم و نخواهیم وارد مراحل خمیری شویم می توانیم از لاستیک استفاده کنیم ؛ در نیروهای سریع ارتعاشی !!

* سطح کل زیر منحنی یا کل انرژی که جسم می گیرد :

مدول طاقت

Modulus of toughness

انرژی است که واحد حجم یک جسم می گیرد تا گسیخته شود :

یک ملاکی از شکل پذیری جسم است هر چه این مدول بیشتر باشد جسم شکل پذیرتر است :

برای فولاد با مقاومت بالا سطح سخت شوندگی کمتر می شود نتیجه شکل پذیری آن بیشتر می شود

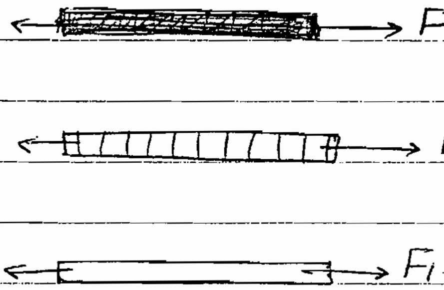
شیشه که اصلاً منطقه خمیری ندارد و سطح زیر آن خیلی کم است

برای محاسبه این مدول سطح را به طور تقریبی مساوی یک مستطیل می‌گیرند با طول ε_r و عرض $\frac{\sigma_{yp}+\sigma_u}{2}$

$$\text{مدول طاقت} = \frac{\sigma_{yp}+\sigma_u}{2} \cdot \varepsilon_r$$

* چون نیرو و انرژی خطی نیستند: $U = \frac{F^2L}{2EA}$

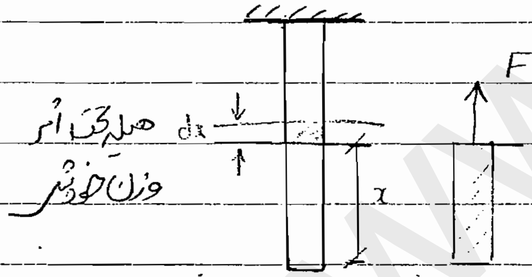
روش جمع اثرها برای محاسبه انرژی درست نیست:



$U_1 = \frac{F_1^2L}{2EA}$

$U_2 = \frac{F_2^2L}{2EA}$

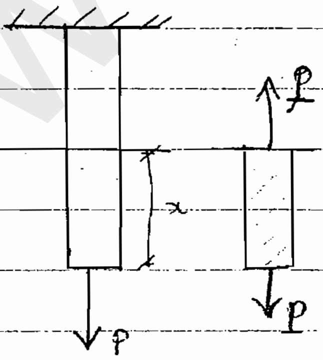
$U \; \cancel{U_1+U_2} \neq \; U = \frac{(F_1+F_2)^2 L}{2EA}$



$F = \gamma V_x = \gamma(Ax)$

$\sigma = \frac{F}{A} = \gamma x$

انرژی در اثر وزن $U_1 = \int_0^L \frac{F^2dx}{2EA} = \int_0^L \frac{\gamma^2A^2x^2dx}{2EA} = \frac{\gamma^2AL^3}{6E}$



$F = \gamma V + P = \gamma Ax + P$

$\sigma = \gamma x + \frac{P}{A}$

پس تنش را می‌توان از جمع اثرها به دست آورد

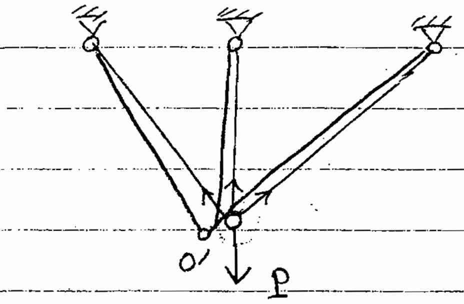
ولی در مورد انرژی غلط می‌شود:

~~P انرژی در اثر~~ $\cancel{U_P = \frac{P^2L}{2EA}}$

در حالیکه $\Rightarrow U = \int_0^L \frac{(\gamma Ax+P)^2}{2EA}dx$

$U \neq U_1 + U_2$

* مسائل هیپراستاتیک در بار محوری 8 «نامعین استاتیکی»



$\Sigma F_x = 0$

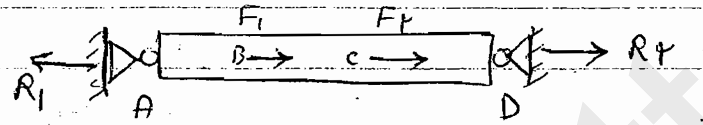
$\Sigma F_y = 0$

دو معادله داریم و با ۳ مجهول

n میله ← $n-2$ درجه هیپراستاتیکی

میله اول و سوم یک تغییر طول می دهد در نتیجه میله دوم هم باید یک مقدار مشخص تغییر طول بدهد

اگر n میله داشته باشیم $n-2$ رابطه بین تغییر طولها نوشته خواهد شد ؛ ۲ معادله هم برای تعادل پس n معادله خواهیم داشت.



$\Sigma F_x = 0$

یک معادله داریم ؛ با دو مجهول ؛

نیاز به یک معادله دیگر داریم A و D تغییر طول نمی توانند بدهند پس $\delta_{AD} = 0$

این δ را اگر بر حسب F ها بنویسیم مجهولات بدست می آیند.

اگر رابطه اضافی پیدا کنیم احتمال اشتباه در آن است ؛ مثلاً $\delta_{AB} = 0$ غلط است زیرا می تواند تغییر طول بدهد.

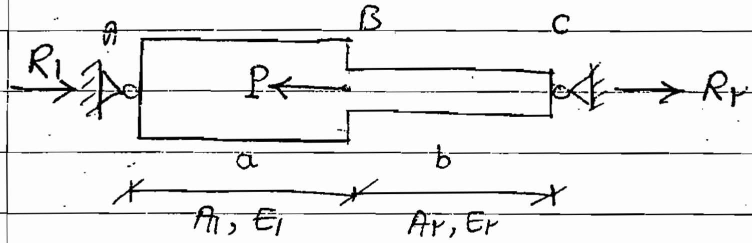
۱ درجه هیپراستاتیکی = ۱ معادله تعادل − دو تا مجهول

درجه هیپراستاتیکی یا درجه نامعینی

پس یک معادله باید از تغییر شکل کمک گرفته شود.

درست به اندازه درجه هیپراستاتیکی باید معادله بنویسیم ؛

مثال 8



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_1 - P + R_2 = 0 \quad ①$$

یکدرجه هیپراستاتیک $\quad \delta_{AC} = 0 \Rightarrow \delta_{AB} + \delta_{BC} = 0$

$$\begin{cases} N_{AB} = -R_1 \\ N_{BC} = -(R_1 - P) = R_2 \quad ① \text{ طبق} \end{cases}$$

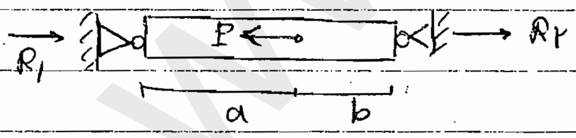
$$\delta_{AB} : \frac{-R_1 a}{E_1 A_1}$$

$$\Rightarrow \frac{-R_1 a}{E_1 A_1} \quad \frac{(R_1 - P) b}{E_2 A_2} = 0 \qquad \text{[illegible]}$$

$$\delta_{BC} : \frac{-(R_1 - P) b}{E_2 A_2}$$

$$\Rightarrow R_1 = \frac{P \dfrac{b}{A_2 E_2}}{\dfrac{a}{E_1 A_1} + \dfrac{b}{E_2 A_2}}$$

$$R_2 = \frac{P \dfrac{a}{A_1 E_1}}{\dfrac{a}{E_1 A_1} + \dfrac{b}{E_2 A_2}}$$

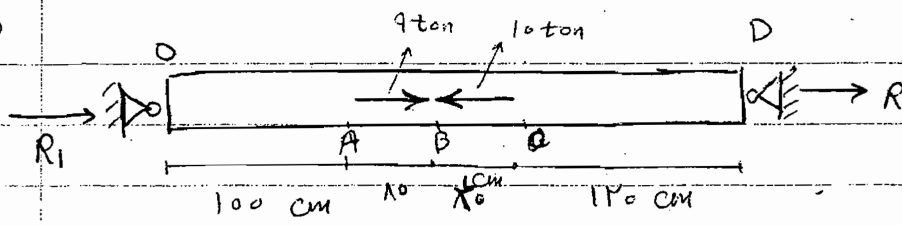


$$R_1 = \frac{Pb}{a+b}$$

مثال 8

$$R_2 = \frac{Pa}{a+b}$$

مثال: R_1, R_2 ؟



در تمام مسائل هیپراستاتیکی هر چیزی که تغییر شکل یا تغییر طول را عوض کند روی جواب مسئله اثر می‌گذارد

تغییر درجه حرارت را می‌توان در مثال قبل در δ_{AC} وارد کرد:

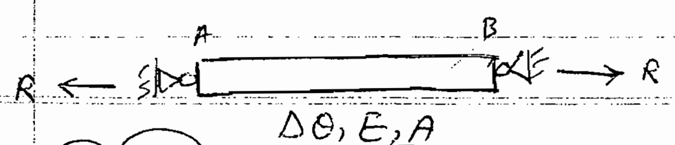
$\delta_{AC} = 0$ همراه است

$\delta_{AB} + \delta_{BC} = 0$

$$\delta = \frac{FL}{EA} + L\alpha\Delta\theta$$ تغییر طول ناشی از حرارت و قانون هوک

دو رابطه باید جداگانه برای AB و BC نوشته شوند. نه برای AC.

* اگر میله هیچ نیرویی به آن وارد نشود و درجه حرارت به اندازه $\Delta\theta$ تغییر کند نیروهایی در تکیه‌گاه ایجاد می‌شود اگر $\Delta\theta$ مثبت شد طول می‌خواهد زیاد شود ولی تکیه‌گاه‌ها نیرو را وارد می‌کند تا تغییر طول ندهد مثل ریل آهن، که طول نباید تغییر کند؟

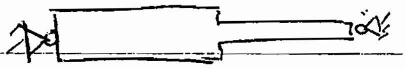


$\delta_{AB} = 0$

$$\frac{RL}{EA} + L\alpha\Delta\theta = 0$$

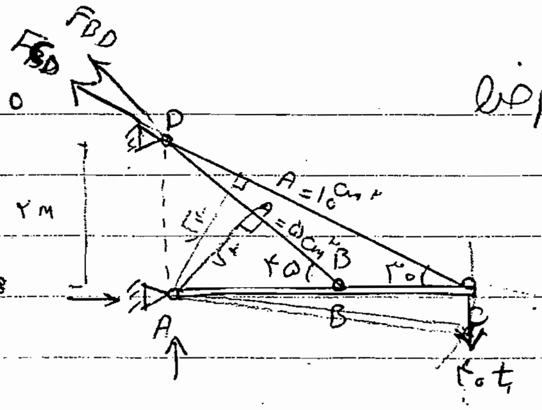
$$\sigma = \frac{R}{A} = -E\alpha\Delta\theta$$

$$R_1 = -EA\alpha\Delta\theta$$



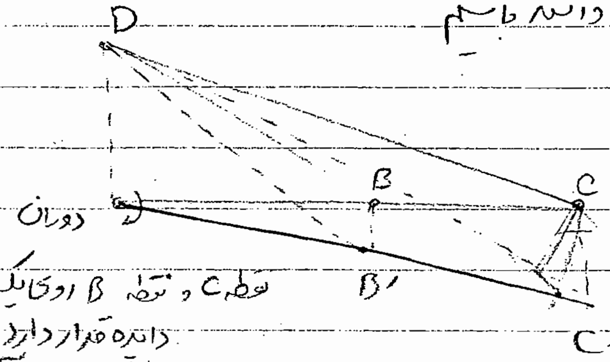
در اینجا با وجود اینکه R ها مساوی اند ولی برای
محاسبه تنش نمی توان از فرمول $-E\alpha\Delta\theta$ استفاده کرد
چون سطح آن یکنواخت نیست.

۸۳/۱۱/۱۰ بنام خدا



مثال: — در شکل روبرو تنش لوله‌های BD و CD را تعیین کنید میله افقی ABC صلب است. تمام میله‌ها از یک جنس‌اند P

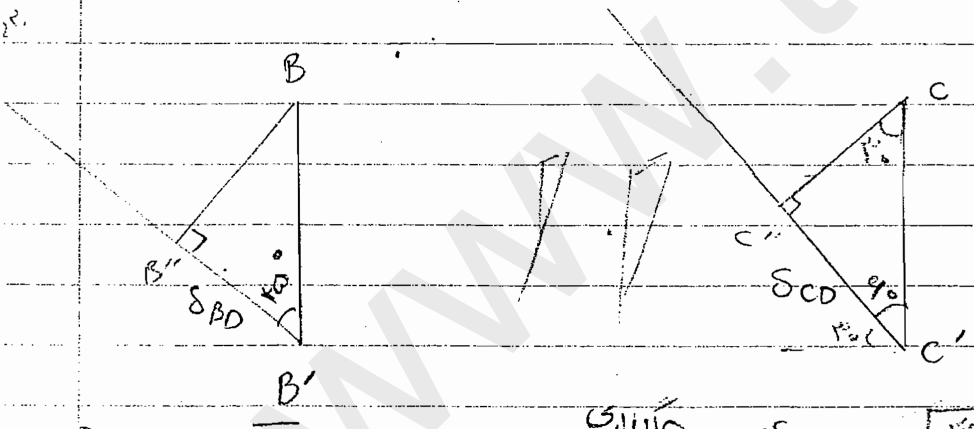
دو میله تحت اثر ۲ نیروی محوری‌اند. ۴ مجهول داریم ۳ معادله تعادل پس ۱ درجه نامعین یا هیپراستاتیک است پس ۱ معادله δ باید داشته باشیم



نقطه C و نقطه B روی یک دایره قرار دارند! همانطور پایین می‌آیند

$$\Rightarrow \frac{CC'}{BB'} = \frac{AC}{AB} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{CC'}{BB'} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$



$$\begin{cases} \delta_{BD} = \overline{BB'} \cos 45 \\ \delta_{CD} = \overline{CC'} \times \cos 60 \end{cases} \xrightarrow{\text{جاگذاری}} \frac{2\delta_{CD}}{\delta_{BD}\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \Rightarrow \frac{2\delta_{CD}}{\delta_{BD}} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{FL}{EA} \Rightarrow \frac{\dfrac{2 \times F_{CD} \times 400}{E \times 10}}{\dfrac{F_{BD} \times 200\sqrt{2}}{E \times 5}} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow F_{DC}\sqrt{2} = F_{BD}\sqrt{3}$$

$$* \quad \sum M_A = 0 \Rightarrow F_{DC}\sqrt{3} + F_{BD}\sqrt{2} - 40 \times \frac{2}{\sqrt{3}} = 0 \quad (2)$$

معادله ۱ و (۲) $\Rightarrow \quad F_{CD} = \sqrt{\frac{3}{2}}\, F_{BD}$

$$\left(\frac{3}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\right) F_{BD} = 80\sqrt{3} \Rightarrow F_{BD} = 16\sqrt{6}\ ton$$

$$F_{CD} = 48\ ton$$

$$* \quad \sigma_{BD} = \frac{16000\sqrt{6}}{5} = 3200\sqrt{6} = 7838.4\ \frac{kg}{cm^2}$$

$$\sigma_{CD} = \frac{48000}{10} = 4800\ \frac{kg}{cm^2}$$

مثال ۸ در مسئله قبل اگر درجه حرارت $20^\circ C$ افزایش یابد تنش میله‌ها را بیابید؟

فولاد $\alpha = 11 \times 10^{-6}\ \frac{1}{^\circ C} \qquad \Delta\theta = 20^\circ C \qquad E = 2 \times 10^6\ \frac{kg}{cm^2}$

اگر مسئله از نوع استاتیکی بود تغییر درجه حرارت تأثیر نداشت ولی در اینجا چون یک درجه نامعین است روی جواب تأثیر می‌گذارد

تناسب δ ها مثل قبل حل می‌شود ولی در مورد δ:

$$\delta = \frac{FL}{EA} + L\alpha\Delta\theta$$

$$\Rightarrow \frac{2\delta_{CD}}{\delta_{BD}} = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{2\left[\frac{F_{CD} \times 400}{2 \times 10^6 \times 10} + 400 \times 11 \times 10^{-6} \times 20\right]}{\frac{F_{BD} \times 200\sqrt{2}}{2 \times 10^6 \times 5} + 200\sqrt{2} \times 11 \times 10^{-6} \times 20}$$

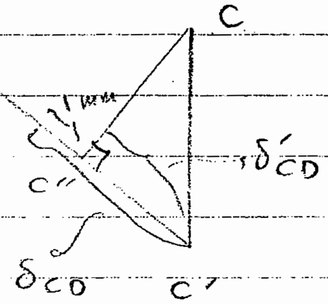
دو معادله را با هم حل کنید

مسئله را یکبار فقط با درجه حرارت حل کنید یکبار هم با پیچ و ؛ از جمع آنها استفاده کنید ؛

مثال ؛ در مسئله قبل اگر میله DC $1\ mm$ از طولی که باید باشد کوتاه ساخته شده باشد شکل چقدر خواهد بود ؟ « بدون حرارت »

در اینجا : هم $4.t$ و هم 1^{mm} را در نظر می گیریم ؛

$$\delta = \frac{FL}{EA} + \text{نقص طول}$$



$$\frac{2\delta'_{CD}}{\delta_{BD}\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

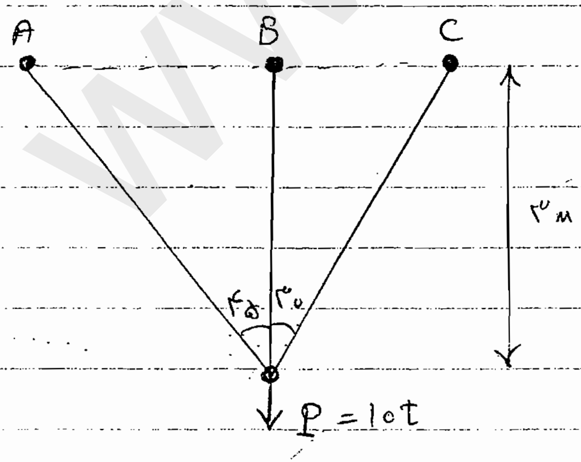
$$\Rightarrow \frac{2\delta'_{CD}}{\delta_{BD}} = \sqrt{3}$$

(کل $\delta_{CD} - 1^{mm}$)

جمع جبری !

$$\Rightarrow \frac{2\left(\frac{F_{CD}\times 400}{2\times 10^{6}\times 10} - 0/1\right)}{\frac{F_{BD}\times 200\sqrt{2}}{2\times 10^{6}\times 5}} = \sqrt{3}$$

مثال ؛ در شکل روبرو سطح مقطع و جنس هر ۳ میله یکسان است
نیروی وارد بر هر میله ؟

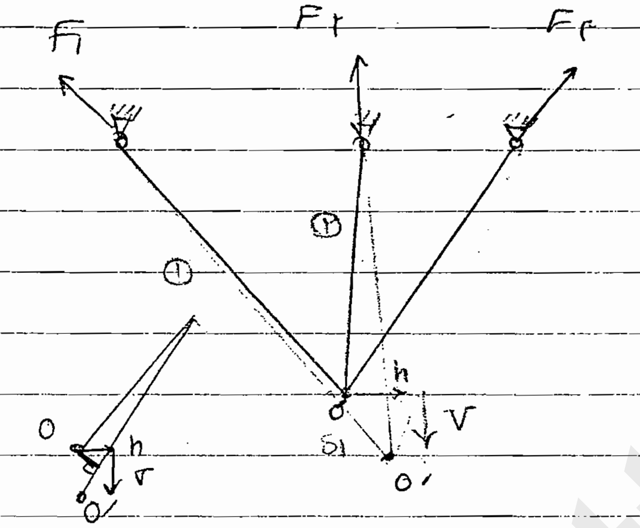


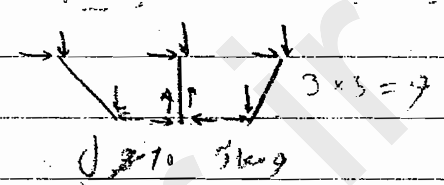
۲ معادله داریم با ۳ مجهول ؛ $\sum F_x = 0$ ، $\sum F_y = 0$ سازه یک درجه نامعین است !

در این نوع میله ها ، متصل به هم ؛ هر است نقطه O را به نقطه دیگر مثل O' می بریم

و حرکت افقی و قائم نقطه را h و v می نامیم ؛ هرکدام از میله ها می تواند تغییر طولش

را برحسب h و v بنویسیم ؛





$$h\cos 45 + v\cos 45 = \delta_1$$
$$v = \delta_2$$
$$-h\cos 60 + v\sin 60 = \delta_3$$

$$\frac{F_1 \times 300\sqrt{2}}{EA} = h\frac{\sqrt{2}}{2} + v\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{F_2 \times 300}{EA} = v$$

طول وتر را تقریباً مساوی طول اولیه می گیریم ؛

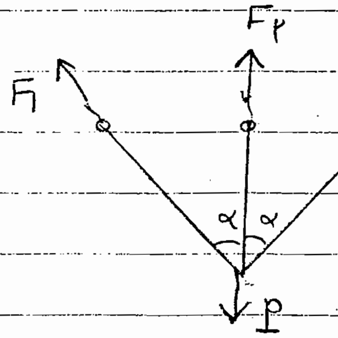
$$\frac{F_3 \times \frac{300 \times 2}{\sqrt{3}}}{EA} = -\frac{h}{2} + v\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -F_1\frac{\sqrt{2}}{2} + F_3 \times \frac{1}{2} = 0$$
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_1\frac{\sqrt{2}}{2} + F_2 + F_3\frac{\sqrt{3}}{2} - 1000 = 0$$

۵ معادله ۵ مجهول ؛

اگر تغییر حرارتی داشته باشیم ؛ جمله $L\alpha\Delta\theta$ اضافه می شود ؛ به سمت راست $h+v=\delta_1+L\alpha\Delta\theta$

اگر میله‌ها تقارن داشتند می‌توانیم با یک مجهول حل کنیم :



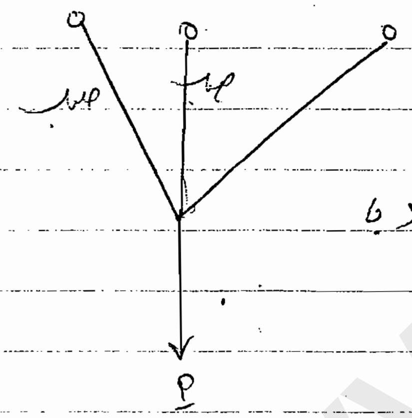
$\Sigma F_y = 0$

دو تا مجهول

تغییر شکل فقط قائم است پس یک مجهول اضافه می‌شود :

اگر میله وسط در مثال قبل صلب بود : $\delta_2 = 0$ می‌شود چون صلب بود ، فقط تغییر مکان افقی داریم :

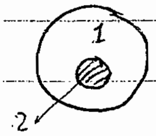
اگر دو میله صلب بود : نقطه O تغییر مکان ندارد پس یک میله الاستیک نیروی آن صفر می‌شود



اگر دو تا میله صلب شد نیروی میله سوم صفر است

نیرو فقط در ۲ تا میله صلب وجود دارد :

* یک میله از دو جنس 8



سطح مقطع

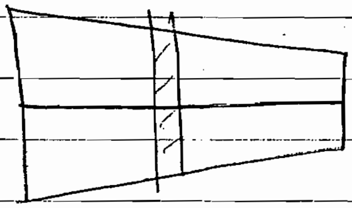
این میله از نظر تنش نامعین است مگر این که به تغییر شکل توجه کنیم

$\Rightarrow \delta_1 = \delta_2$

چون یک میله است با هم تغییر طول می‌دهند :

$\Rightarrow \varepsilon_1 = \varepsilon_2$ ۲ هم‌تراز است :

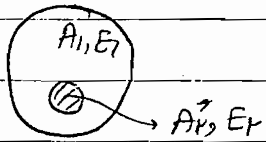
پس تغییر طول‌ها باید مساوی باشد هر کدام جداگانه نمی‌توانند تغییر طول بدهند



میله قرقره (حلقه قرقره)

ماهیت ثابتی وارد ولی ورودی دارد تغییر سطح می‌دهد، باید فلوسیم در Δx تغییر طول

دو قسمت با هم برابر است؛ بنابراین $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ رابطه هندسی است



$\delta_1 = \delta_2 \Rightarrow \dfrac{F_1 L}{E_1 A_1} = \dfrac{F_2 L}{E_2 A_2}$ فقط طول برابر است

$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \Rightarrow \dfrac{F_1}{E_1 A_1} = \dfrac{F_2}{E_2 A_2}$ ①

با $\Rightarrow \boxed{\dfrac{\sigma_1}{E_1} = \dfrac{\sigma_2}{E_2}}$ نسبت تنش‌ها مثل نسبت مدول است

هر قسمتی از میله که E بیشتر دارد σ بیشتر دارد.

مثلاً اگر Al و فولاد داشته باشیم؛ فولاد مدول الاستیک ۳ برابر Al دارد پس تنش آن ۳ برابر فولاد است

اگر چندتا جسم هم باشند باز هم n رابطه می‌توانیم بنویسیم.

رابطه نیرویی: $F_1 + F_2 = F$ (میله ①) کل نیرو ②

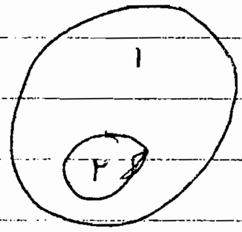
با توجه به ① و ② $\Rightarrow$

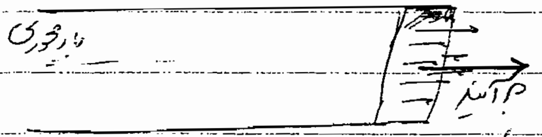
$$* \quad F_1 = F_2 \cdot \frac{E_1 A_1}{E_2 A_2}$$

$$* \quad F_2 = \left(1 + \frac{E_1 A_1}{E_2 A_2}\right) F \qquad \boxed{F_2 = \frac{F}{1 + \frac{E_1 A_1}{E_2 A_2}}}$$

$$* \quad \sigma_2 = \frac{F_2}{A_2} = \frac{F}{A_2 + \frac{E_1}{E_2} A_1}$$

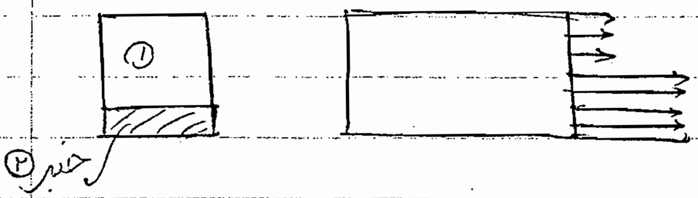
$$* \quad \sigma_1 = \frac{F}{A_1 + \frac{E_2}{E_1} A_2}$$





$$\sigma = \frac{F}{A}$$

از مرکز می گذرد



نیرو بیشتر می گیرد $\Longrightarrow$ تنش متفاوت است :

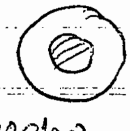
$$\begin{cases} \bar{x} = \dfrac{\int_A x\,\gamma\,dA}{\int_A \gamma\,dA} \\[2ex] \bar{y} = \dfrac{\int_A y\,\gamma\,dA}{\int_A \gamma\,dA} \end{cases}$$

مرکز جنس مقطع دو جنس از روابط زیر بدست می آید

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\int x \frac{E_i}{E_1}\,dA}{\int \frac{E_i}{E_1}\,dA}} \quad : \int x\,dA + \int x \frac{E_2}{E_1}\,dA + \cdots$$

$$\boxed{\bar{y} = \frac{\int y \frac{E_i}{E_1}\,dA}{\int \frac{E_i}{E_1}\,dA}}$$

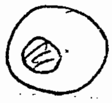
مثلاً دایره



دو دایره هم مرکز

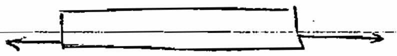
چون متقارن است $\Longrightarrow$ مرکز محل اثر برآیند نیروی محوری است ؛

نامتقارن



$\Longrightarrow$ مرکز نیرو هم مرکز دایره نیست

اگر بار محوری نباشد دیگر از این روابط نمی توانیم استفاده کنیم :



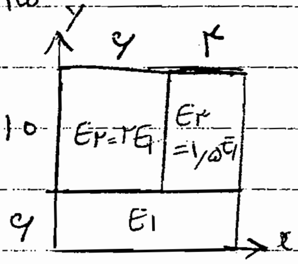
X محور نیست

25

۸۴,۱۲,۱۵

بنام خدا

مثال ۸: مقطع یک میله است ، مرکز مقطع را تعیین کنید؟



حل - $\bar{x}=\dfrac{\int_A x\frac{E_i}{E_1}dA}{\int_A \frac{E_i}{E_1}dA}$ $\qquad$ $\bar{y}=\dfrac{\int_A y\frac{E_i}{E_1}dA}{\int_A \frac{E_i}{E_1}dA}$

$$\Rightarrow \bar{x}=\frac{\overbrace{(6\times10)}^{A_1}\times\overbrace{(5)}^{\bar{x}_1}+\overbrace{2}^{\frac{E_2}{E_1}}(6\times10)(3)+(1/5)\overbrace{(4\times10)}^{A_3}\overbrace{(8)}^{\bar{x}_3}}{6\times10+1/5(4\times10)+2(6\times10)}=\frac{114}{24}=4/75\ cm$$

نکته: $\int_A x\,dA=A\bar{x}$

$$\bar{y}=\frac{(6\times10)(3)+2(6\times10)(11)+(1/5)(40)(11)}{6\times10+1/5(4\times10)+2(6\times10)}=\frac{216}{24}=9\ cm$$

اگر برآیند بار در این نقطه باشد می توانیم از روابط مربوط به تنش حل تمل استفاده کنیم

مثال ۹: اگر در مسئله قبل نیروی $120\,t$ در مرکز جرم تعیین شده وارد گردد ، تنش هر جسم را بیابید؟

حل - $\sigma_1 A_1=F_1$ $\qquad$ $\dfrac{\sigma_1}{E_1}=\dfrac{\sigma_2}{E_2}=\dfrac{\sigma_3}{E_3}$ ①

$\sigma_2 A_2=F_2$ $\qquad$ $F_1+F_2+F_3=F=120000\ kg$

$\sigma_3 A_3=F_3$ $\qquad$ $\xrightarrow{\text{جایگذاری}}$ $60\sigma_1+60\sigma_2+40\sigma_3=120000$ ②

$\begin{cases} E_2=2E_1\ ;\ E_3=1/5E_1 \\ \Rightarrow \sigma_2=2\sigma_1\ ,\ \sigma_3=1/5\sigma_1 \end{cases}$

$\Rightarrow 60\sigma_1+120\sigma_1+60\sigma_1=120000$

$\Rightarrow \sigma_1=500\ \frac{kg}{cm^2}$, $\sigma_2=1000\ \frac{kg}{cm^2}$, $\sigma_3=750\ \frac{kg}{cm^2}$

می توانستیم تنش را از رابطه زیر بیابیم

$$\sigma_1 = \frac{F}{A_1 + A_2\frac{E_2}{E_1} + A_3\frac{E_3}{E_1}}$$

$$\Rightarrow \sigma_1 = \frac{120000}{60 + 60(2) + 40(1.5)} = 500\ kg/cm^2$$

ستونی که در اینجا در عمران اهمیت بیشتری دارد بتن آرمه است:

بتن آرمه عبارت یک مقدار بتن با فولادهایی که داخلش هست:

حتی نیرویی به آن وارد می شود بین این دو حجم تقسیم می شود معمولاً بتن برای فشار محاسبه می شود

معمولاً در محاسبات می گویند بتن کشش را تحمل نمی کند این جور مسئله بیشتر تحت اثر فشار است

مثل ستون های ساختمانهای بتن آرمه. معمولاً متقارن هستند بنابراین مرکز ثقل در مرکز هندسی

است اگر بخواهیم محاسبات را انجام دهیم:

$$\sigma_c = \frac{F}{A_c + A_s\frac{E_s}{E_c}}$$

تنش بتن

$$\sigma_s \Rightarrow \frac{\sigma_c}{E_c} = \frac{\sigma_s}{E_s} \Rightarrow$$

* $E_s \simeq 2\times10^5\ MPa \simeq 2\times10^6\ \frac{kg}{cm^2}$

بتن بسته به مصالحی که در آن ریخته می‌شود متفاوت است مقدار و جنس سیمان و ... طرز عمل آوری ؛

* E_c عدد ثابتی برای تمام بتن‌ها نیست . از ۶ تا ۱۲ و ۱۳ برابر کمتر از فولاد است
بتن خوب ←

مساحت فولاد در حدود ۱ تا ۴ درصد تمام سطح بتن است معمولاً در A_c تمام سطح را می‌گذارند بدون فولاد ؛ از طرفی ضریب $\frac{E_s}{E_c}$ نیز دقیق نیست ؛

معمولاً در این قطعات تنش بتن هست که زودتر به مقدار مجازش می‌رسد مثلاً تنش مجاز بتن ؛

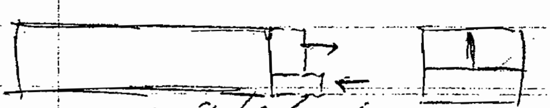
* $\sigma_{cw} = \underset{\frac{E_s}{E_c}\simeq 12}{50} \longrightarrow \underset{\frac{E_s}{E_c}\simeq 6}{150}$

فولاد $\sigma_{yp} = 3000 - 4000$

$\frac{\sigma_{yp}}{S.F} = 1800 - 2400$

تنش فولاد در چنین ستونی معمولاً کمتر از تنش مجاز آن است ؛

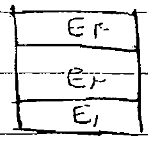
در مسئله‌های چند جسمی باید اثر تغییر درجه حرارت را در نظر داشته باشیم گفتیم که هر مسئله‌ای که هیپر استاتیک باشد با تغییر حرارت نیروهای آن تغییر می‌کند . در مسئله‌های این نوع ، از نظر تنش نامعین اند ؛



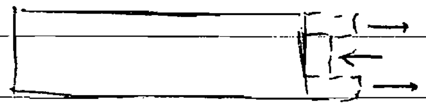
اگر مسئله متقارن باشد تغییر حرارت باعث خم شدن میله می‌شود

یکی تحت کشش یکی تحت فشار باشد اما اگر کشیده شود ستون خم می‌شود .

مثال یک صفحه دو جنسی است که برای قطع و وصل استفاده می شود که با تغییر درجه حرارت کار می کند :



اگر صفحه متقارن باشد خم نمی شود ولی تنش هایی در آن ایجاد می شود چون به طور یکسانی تغییر طول نمی دهند :

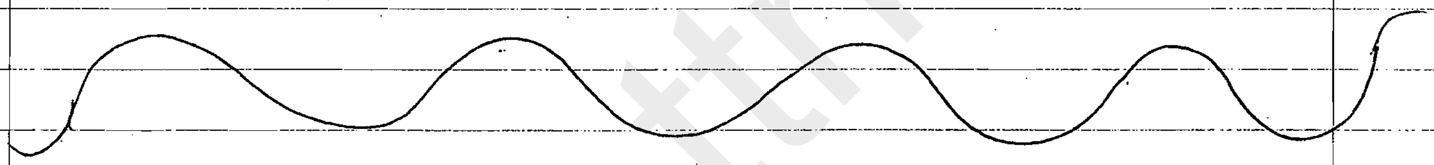


به دلیل تعادل نیروها اثری روی خم شدن صفحه نمی گذارد

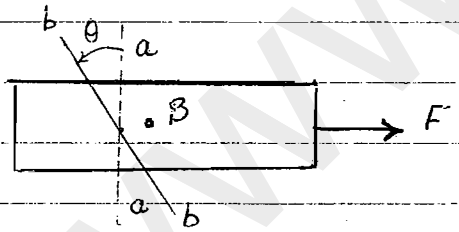
یک لوله کمک می کند ما حیاتات زیادی در تنش ستون آوردند؟ شسته باشیم ؟

① $\alpha_c \simeq \alpha_s$ تقریباً مساوی است

② بتن به آسانی این حرارت را منتقل نمی کند فقط یک قسمت کوچکی از بتن این تغییر را می پذیرد و در سطح آن است ؛ برخلاف فولاد که زیر آفتاب می تواند تا ۵۰ - ۶۰ درجه تغییر درجه حرارت داشته باشد ؛

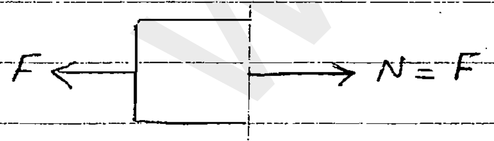


✱ آنالیز تنش 8



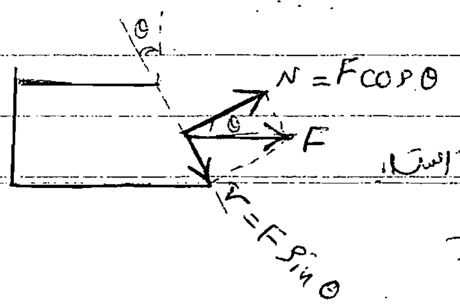
کششی +
فشاری −

θ مثلثاتی +
در جهت حرکت عقربه ساعت −

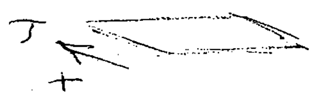


$\sigma_x = \dfrac{F}{A}$ در نقاط تمام این مقطع در امتداد محور x است

اگر مقطع را با زاویه θ در نظر بگیریم ؛



در تمام نقاط مقطع b_b یک تنش مربوط به N و یکی مربوط به V است.



تنش عمودی در سطح مقطع $\left\{ \sigma_\theta = \dfrac{N}{A_1} = \dfrac{F\cos\theta}{A/\cos\theta} = \sigma_x \cdot \cos^2\theta \right.$

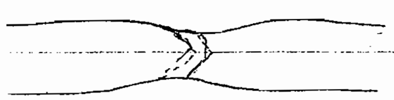
سطح مقطع مورب

برحسب این که این مقطع عوض شود تنش طبق رابطه بالا تغییر می کند

با تغییر امتداد در یک نقطه معین تنش عوض می شود.

تنش برشی $\tau_\theta = \dfrac{V}{A_1} = \dfrac{F\sin\theta}{A/\cos\theta} = \sigma_x \sin\theta\cos\theta = \dfrac{\sigma_x}{2}\sin 2\theta$

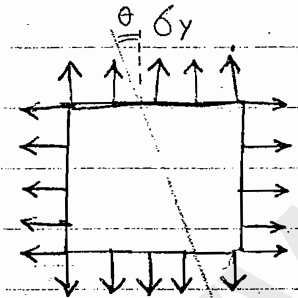
* اگر $\theta = 45$ باشد تنش برشی ماکزیمم یعنی $\dfrac{\sigma_x}{2}$ است.



میله وقتی باریک شده و قطع می شود به شکل روبرو در می آید
پس فقط تنش عمودی نیست که باعث قطع شدن می گردد
بلکه یک تنش برشی هم در آن نقش دارد.

تنش دو محوری

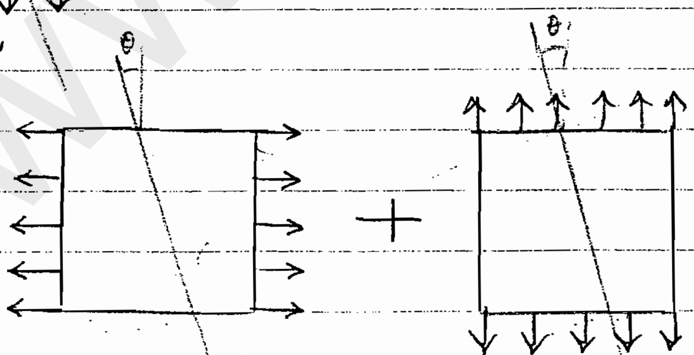
* فرض کنیم یک حجم مکعب مستطیلی داریم «تنش دو محوری»



* $\varepsilon_x = \dfrac{\sigma_x}{E}$

* $\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x = -\dfrac{\nu\sigma_x}{E}$

از ترکیب دو شکل =



مثل یک محوره است.

* $\sigma_\theta = \sigma_x\cos^2\theta$

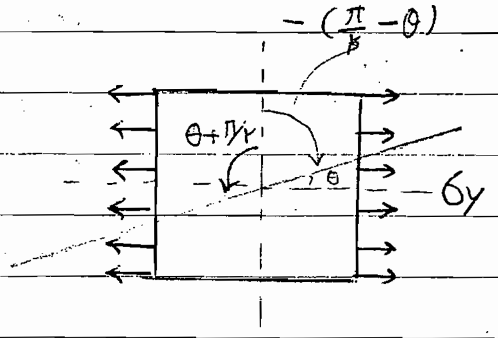
* $\tau_\theta = \dfrac{\sigma_x}{2}\sin 2\theta$

* $\varepsilon_x = \dfrac{\sigma_x}{E}$

* $\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\dfrac{\sigma_x}{E}$

* $\varepsilon_y = \dfrac{\sigma_y}{E}$

* $\varepsilon_x = \varepsilon_z = -\nu\dfrac{\sigma_y}{E}$



برای میله تنش برشی در شکل ۲ داریم :

نکته: اگر تنش τ بخواهد نقطه‌ای در قسمت بالایی المان و نزدیک به نقطه در جهت حرکت عقربه‌های ساعت باشد τ مثبت است

$$* \quad \sigma_\theta = \sigma_y \cos^2(\theta+\pi/2) = \sigma_y \sin^2\theta$$

$$* \quad \tau_\theta = \frac{\sigma_y}{2} \sin[2(\theta+\pi/2)] = -\frac{\sigma_y}{2} \sin 2\theta$$

با توجه به روش جمع اثرها داریم :

$$* \quad \text{کل} \; \sigma_\theta = \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \sin^2\theta = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\theta$$

$$* \quad \tau_\theta = \left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right) \sin 2\theta$$

$$* \quad \varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y)$$

$$* \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x)$$

$$* \quad \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$$

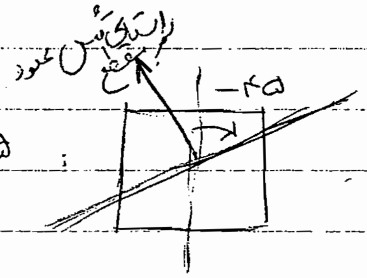
تنش دو محوری با تنش‌های σ_x , σ_y در هر نقطه داریم :

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2} \qquad \sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$$

اگر $\theta = 0$ باشد $\sigma_\theta = \sigma_x$

اگر $\theta = 45$ // $\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$

$\theta = -45$



$\theta = 0$ یا $\theta = 90$ تنش برشی صفر است ؛

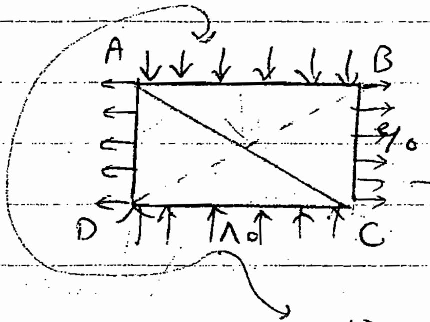
مثال 8 یک مکعب مستطیل

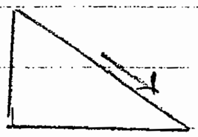
$a = 40 \ cm$

تنش در امتداد AC و BD ؟

تغییر ابعاد را هم حساب کنید ؟

$$\begin{cases} E = 2 \times 10^{6} \ \frac{kg}{cm^2} \\ \nu = 0/3 \end{cases}$$





تنش برشی که روی مقطع است و در امتداد مقطع ؛

فشاری

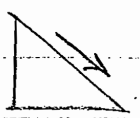
$\sigma_x = \frac{2400000}{\underbrace{60 \times 40}_{a}} = 1000 \ \frac{kg}{cm^2}$ $\qquad$ $\sigma_y = \frac{-1200000}{80 \times 40} = -500 \ \frac{kg}{cm^2}$

$AC = 100 \ cm \qquad \sin\theta = 0/8 \qquad \cos\theta = 0/6$

$* \ \sin 2\theta = 2 \times 0/8 \times 0/6 = 0/96$

$* \ \underset{\text{امتداد } AC}{\tau_\theta} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta = \frac{1000 + 500}{2} \times 0/96 = 750 \times 0/96 = 720 \ \frac{kg}{cm^2}$

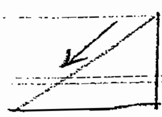
چون مثبت است پس ساعتگرد است .



$* \ \underset{BD}{\tau_\theta} \Rightarrow \sin\theta = -0/8 \Rightarrow \tau_{BD} = -720 \ kg/cm^2$

$\cos\theta = 0/6$

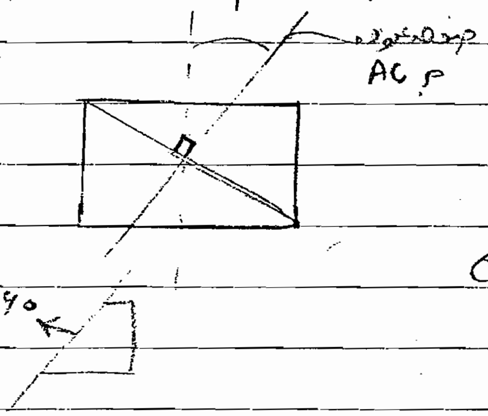
$\sin 2\theta = -0/96$



σ_θ در صفحه عمود بر AC از روابط بدست می‌آید اما در این جا تنش را در امتداد AC خواسته است

$\theta_1 = -(\pi/2 - \theta)$

سیر θ در صفحه ای عمود بر سطح AC است:

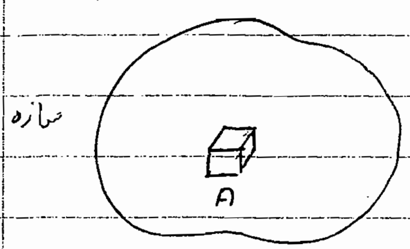


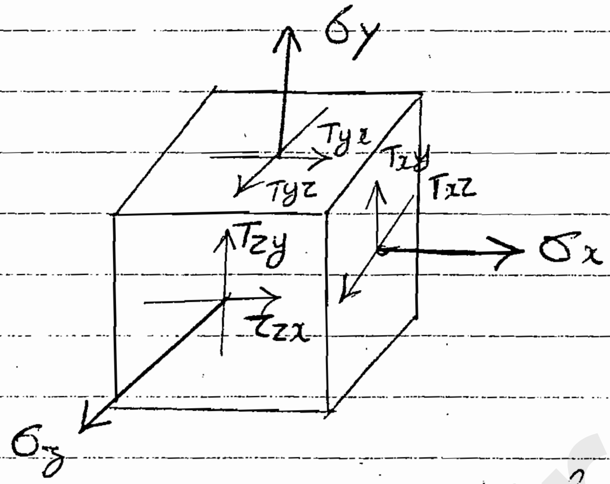
$$\sin\theta_1 = -\cos\theta = -0.6$$
$$\cos\theta_1 = \sin\theta = 0.8$$
$$\sigma_\theta = \sigma_x \cos^2\theta_1 + \sigma_y \sin^2\theta_1$$
$$= 1000(0.8)^2 + (-500)(-0.6)^2$$
$$= 640 - 180 = +460 \ kg/cm^2$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2\times10^6}\left[1000 - 0.3(-500)\right] = \frac{575}{10^6}$$

$$\Delta x = \varepsilon_x \times 80 = \frac{575\times80}{10^6} \ cm$$

- تانسور تنش





۳ تنش عمودی بر روی این المان وجود دارد:

هر سطح دو مؤلفه تنش برشی دارد.

در وجوه نامرئی تنش ها را در خلاف جهت این تنش ها داریم:

تنش برشی با دو اندیس نامگذاری می شود اندیس اول صفحه را نشان می دهد (صفحه عمود بر یک محور)
اندیس دوم امتداد خود تنش را نشان می دهد

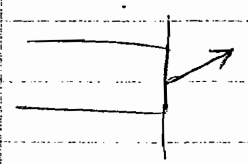
جمعاً ۹ مؤلفه تنش داریم:

کمیت هایی که مؤلفه دارند تانسور گویند

تانسور درجه ۳ مثل درجه حرارت که فقط با یک عدد نشان می دهند

هر چیزی که بشود با بردار نشان داد تانسور درجه یک است

آنهایی که ۹ مؤلفه دارند تانسور درجه دوم گویند پس تنش بردار نیست



اگر مقطع عوض نشود تنش بردار است مثل آنکه تنش در همان مقطع

اگر یک صفحه دلخواه در این المان بزنیم می‌توانیم مؤلفه‌های تنش را برحسب این مؤلفه‌ها بیان کنیم؛

ولی در صفحات دوبعدی می‌توانیم؛

تنش‌های عمودی در این المان هیچ ربطی به هم ندارند

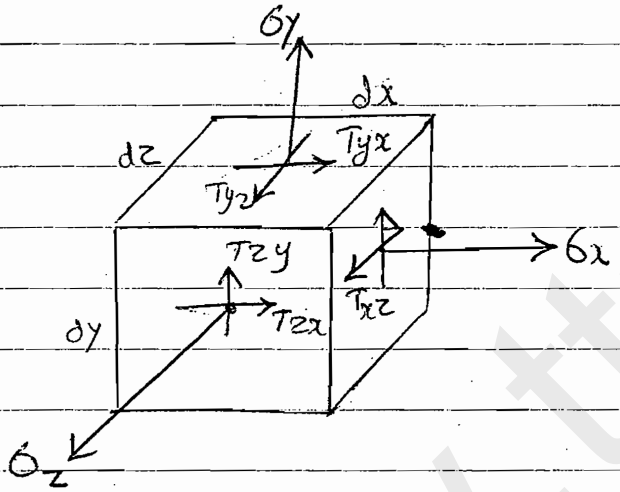
ولی ثابت خواهیم کرد که تنش‌های برشی دو به دو با هم برابرند «از نظر مقدار»

$\tau_{yx} = \tau_{xy}$

$\tau_{yz} = \tau_{zy}$

$\tau_{zx} = \tau_{xz}$

یعنی از ۹ مؤلفه، ۶ مؤلفه از نظر مقدار عددی مستقل می‌شود؛



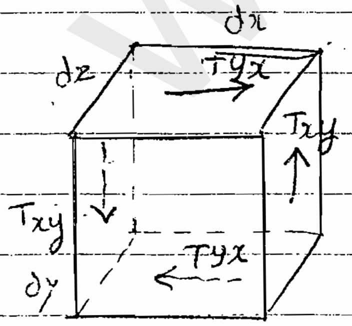
برآیند گشتاور را حول محور z می‌گیریم:

σ_x و σ_y و σ_z گشتاور صفر دارند؛

τ_{yz}, τ_{xz} موازی محورند؛

τ_{zx} و τ_{zy} عمود بر محورند گشتاور صفر دارند

۷ تا مؤلفه صفر اند فقط این مؤلفه‌ها باقی می‌مانند؛



مثل کوپل ← فاصله

$$(\tau_{xy})\underbrace{dy\,dz}_{dA}\ \underbrace{dx}_{\text{فاصله}}$$

$$(\tau_{yx})\,dz\,dx\ \ dy$$

برای این که گشتاور صفر شود باید این دو گشتاور قرینه هم باشند

این دو مقدار مساوی اند از نظر علامت مخالف هم اند ؛

$$* \quad \tau_{xy} = -\tau_{yx}$$

$$\Rightarrow * \quad \tau_{yz} = -\tau_{zy}$$

$$* \quad \tau_{xz} = -\tau_{zx}$$

این ۹ تنش به صورت یک ماتریس ۳×۳ نوشته می شوند ؛

σ_x	σ_y	σ_z

$\sigma_{xx} = \sigma_x$ — تنش عمود بر صفحه x و در راستای (محور) x

$$\begin{vmatrix} \sigma_{x} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

یا می توانیم تنش را با یک حرف و در ماتریس مشخص کنیم ؛

xx ها σ و بقیه نیز τ

یا
$$\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{vmatrix}$$

در ماتریس σ کشش + و فشار منفی است

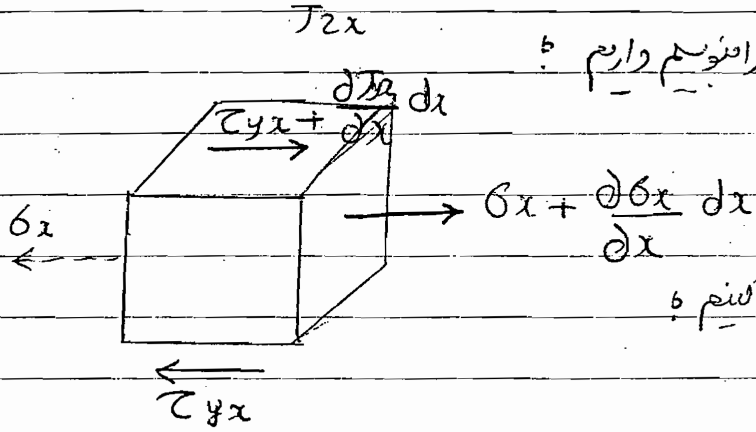
ولی در مورد τ وقتی ماتریسی شان می دهیم جهت محور را به عنوان جهت τ می دهیم

نه ساعتگرد یا پادساعتگرد ؛

ماتریس σ ماتریس متقارن قطری است ؛

تنش در حالت کلی ۹ مؤلفه دارد

اگر بخواهیم روابط بین مشتقات تنش را بنویسیم داریم :

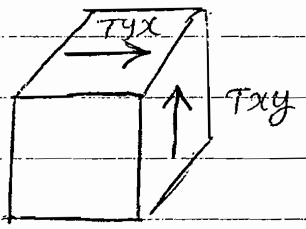


اگر معادله $\sum F_x = 0$ را بنویسیم :

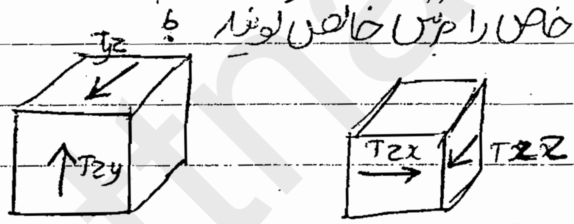
سیگما را در dA ضرب کنیم و روابط را پیدا کنیم :

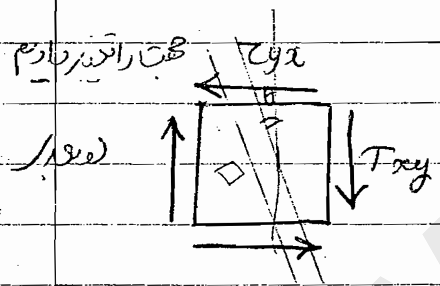
* برش خالص : Pure shear

در برش ها ۲ مؤلفه مساوی برش موجودند :



این حالت خاص را برش خالص گویند :

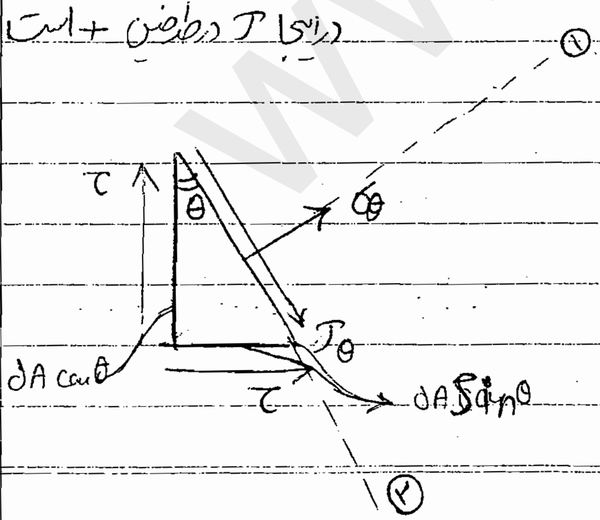




حتماً باید یکی در جهت ساعت و دیگری در خلاف جهت عقربه‌ها است
عکس

* برش خالص نیست :

در اینجا τ در حالت + است



عمود بر نیروها در این امتداد را مساوی صفر قرار دادیم

$$\sum F_{\perp}^{①} = 0$$

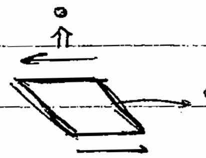
$$\sigma_\theta dA + \tau dA\cos\theta\sin\theta + \tau dA\sin\theta\cos\theta = 0$$

$$\boxed{\sigma_\theta = -2\tau\sin\theta\cos\theta = -\tau\sin 2\theta}$$

$\sum F^{(2)} = 0$ $\quad \tau_\theta dA - \tau dA\cos\theta \cdot \cos\theta + \tau dA\sin\theta \cdot \sin\theta = 0$

$$\boxed{\tau_\theta = \tau\cos^2\theta - \tau\sin^2\theta = \tau\cos 2\theta}$$

در $\theta = 45^\circ$ تنش برشی نداریم



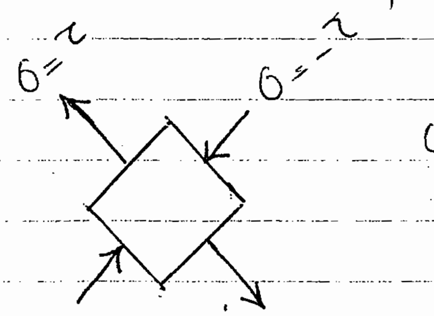
$\Rightarrow$ فشرده می‌شود $\theta = 45$

$* \ \sigma_{45^\circ} = -\tau$

$* \ \sigma_{-45} = \tau$

$$\boxed{\tau_{\pm 45} = 0}$$

τ در عقربه ساعت $+$

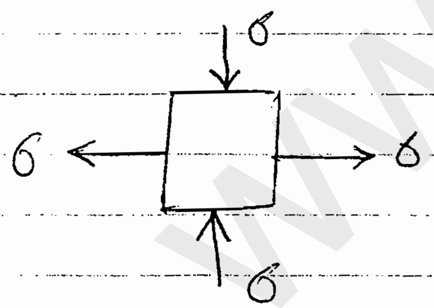


اگر المانی با زاویه ۴۵ درجه بیرون بیاوریم:

یک برش خالص در زوایای 45° می‌شود یک تنش ۲ محوری

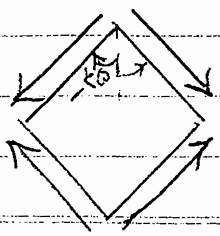
ولی با تنش کششی و فشاری مساوی؛ تا برش خالص شود

ولی در تنش ۲ محوری در حالت کلی الزاما برش خالص نداریم:



$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta$$

$$\tau_\theta = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\theta$$

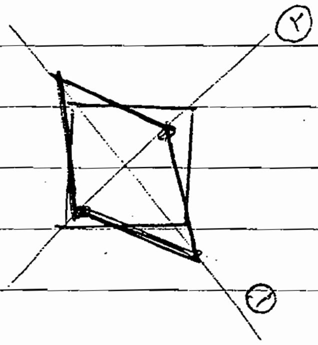


در این حالت

$\sigma_{\pm 45} = 0$

$\tau_{45} = \sigma$

$\tau_{-45} = -\sigma$



یک قطر بزرگتر و یک قطر کوچکتر می شود؟

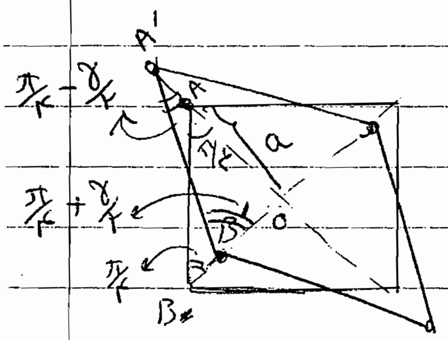
$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu\sigma_2)$$ دو محوری

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}(\sigma_2 - \nu\sigma_1)$$

در امتداد ①   در امتداد ②

$$* \ \varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left[\tau - \nu(-\tau)\right] = \frac{\tau}{E}(1+\nu) = \varepsilon$$

$$* \ \varepsilon_2 = \frac{1}{E}\left[-\frac{\tau}{E}(1+\nu)\right] = -\varepsilon$$



$$OA = a$$
$$AA' = \varepsilon a$$
$$\Rightarrow OA' = (1+\varepsilon)a$$

$$OB = b$$
$$BB' = -\varepsilon a$$
$$OB' = (1-\varepsilon)a$$

زاویه عوض شده بین تنش برشی داریم   کل زاویه می شود $\pi/4 + \gamma$ بین زاویه صادق می شود $\frac{\pi}{4} + \gamma/2$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{OA'}{OB'}$$

$$\frac{\tan\frac{\pi}{4} + \tan\frac{\gamma}{2}}{1 - \tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\gamma}{2}} = \frac{(1+\varepsilon)a}{(1-\varepsilon)a} \Rightarrow \frac{1+\gamma/2}{1-\gamma/2} = \frac{(1+\varepsilon)\cancel{a}}{(1-\varepsilon)\cancel{a}}$$

$\gamma/2$ کوچک است.

$\gamma/2 \quad \varepsilon$

$$\boxed{\gamma = 2\varepsilon = \frac{2\tau}{E}[1+\nu]}$$

کرنش برشی در برش خالص از رابطه بالا بدست می آید :

$$A'B' = \sqrt{\overline{OA'}^2 + \overline{OB'}^2}$$

$$= \sqrt{(1+\varepsilon)^2 a^2 + (1-\varepsilon)^2 a^2}$$

$$= a\sqrt{(1+\varepsilon)^2 + (1-\varepsilon)^2}$$

$$= \underbrace{a\sqrt{2}}_{\text{طول اولیه}} \sqrt{1+\varepsilon^2}$$

بسط می $\Rightarrow$ $\sqrt{1+\varepsilon^2} = (1+\varepsilon^2)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \dots$

ε مقدار کوچک دارد پس می توانیم بنویسیم :

$$\sqrt{1+\varepsilon^2} = 1$$

* پس ضلع طولش عوض نمی شود :

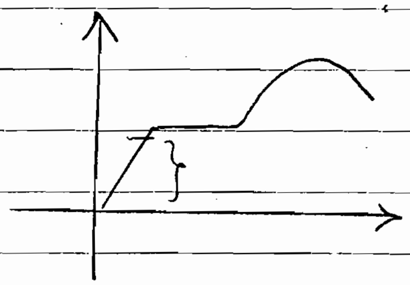
$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$$ در برش خالص

مهم

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\tau - \tau) = 0$$

تنش خطی در برش خالص ε ها صفرند ولی تنش برشی داریم؛

تمام محاسبات ها مربوط به قسمت خطی منحنی σ - ε بوده است؛



و از آنجا نتیجه گرفتیم که γ و τ هم رابطه خطی دارند؛

با توجه این رابطه: $\varepsilon = \dfrac{\sigma}{E}$

می توانیم رابطه زیر را برای γ و τ بنویسیم؛

$$\gamma = \frac{\tau}{G}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

که ⇐ G : مدول الاستیسیته برشی

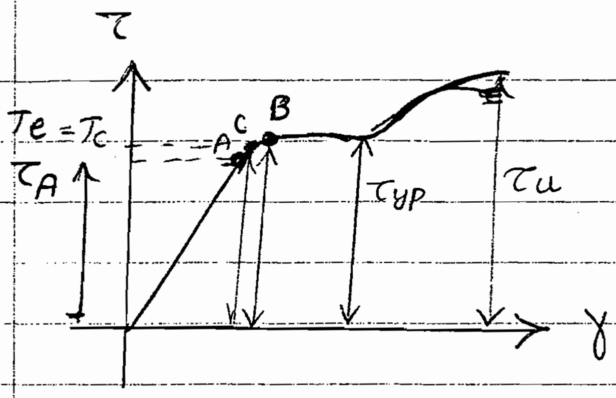
ضریب ارتجاعی برشی

مدول یانگ برشی

مثلاً در مورد فولاد: $G \simeq 0/8 \times 10^{5}\ \mathrm{MPa}$

$\simeq 0/8 \times 10^{6}\ \dfrac{kg}{cm^2}$

E ، G ، μ همه ثابت های مختلف برای مصالح مختلف اند؛ ولی یک معادله بین این ۳ هست یعنی ۲ تا شون مستقل اند؛



منحنی خطی را اثبات کردیم ولی بقیه منحنی
با تجربه ثابت می شود منحنی آخر منحنی
دیگر رو به پایین نداریم رو به بالا است !

* τ_A حد نسبی برشی

* τ_{yp} تنش تسلیم برشی

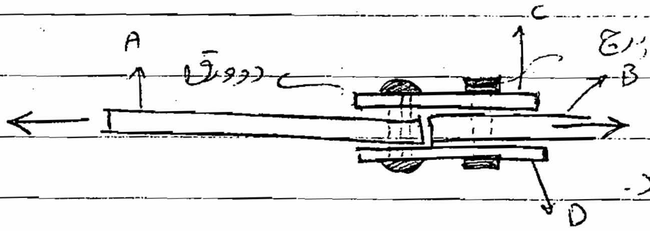
* τ_u تاب برشی - مقاومت نهایی برشی - تنش نهایی برشی

* $\tau_c = \tau_e$ حد الاستیک برشی

این قسمت در کتاب مختلف [illegible]

* تجربه نشان داده که این مقادیر بین 0/55 تا 0/6 مقادیر مربوط به نمودار تنش محوری هستند

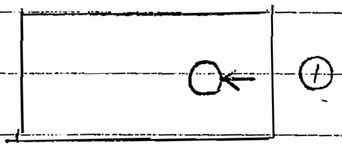
پیچ ها و پرچ ها :



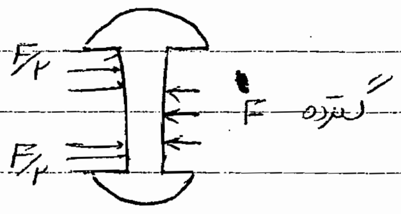
یک صفحه با طول زیاد امکان ندارد که به طور پیوسته ساخته شود باید از اتصال تعداد قطعه ساخته شود.

وقتی نیروی محوری به پرچ ها داریم :

نیرو در پشت پیچ به پیچ وارد می شود :

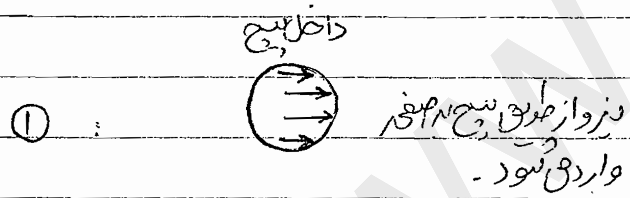


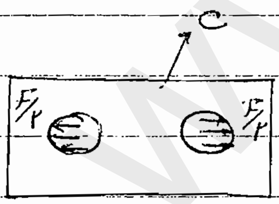
بنابراین مقابل صفحه نیرو نخواهد داشت :



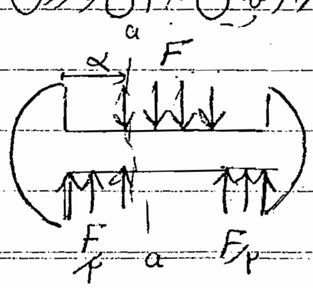
بین صفحه و پیچ همچنین اگر $F/2$ به پیچ وارد شود

به صفحه نظیر همان نیرو در خلاف جهت وارد می شود :



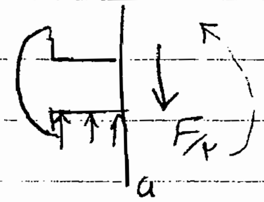


چون پیچ مثل یک تیر عمل می کند که یک مقدار نیرو از بالا و یک مقدار از پایین به آن وارد می شود :



در هر مقطع پیچ نیروی برشی داریم :

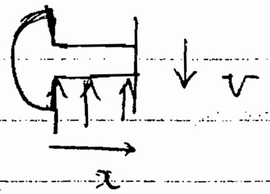
در برش a-a شده من نیروی برشی را داریم با اندازه $F/2$



درست در وسط پیچ نیروی برشی صفر می‌شود چون F و $F/2$ اثر هم را از بین می‌برند:

اگر فرض کنیم تنش برشی در مقطع یکنواخت است داریم:
میانگین نیروی برشی یکنواخت باشد:

$$\tau = \frac{F/2}{A}$$



$$\Rightarrow V = \frac{x}{a}\cdot F/2$$

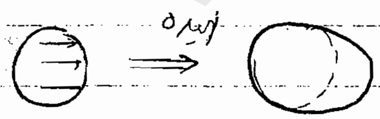
نیروی برشی $x=a$ max است که می‌شود $F/2$

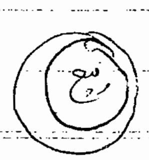
یک نوع تنش در اینجا تنشی است که از پیچ به ورق یا از ورق به پیچ وارد می‌شود:

این تنش را تنش لهیدگی گویند که بین دو جسم اثر می‌کند معمولاً از جنس فشار است کششی یا برشی نیست: bearing stress

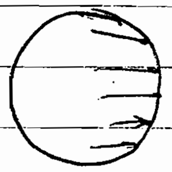
معمولاً جنس ورق نرم‌تر است بنابراین لهیدگی بیشتر ورق را له می‌کند مگر اینکه جنس ورق و پیچ یکی باشد:

پیچ‌های فولادی معمولاً نسبت به فولاد ورق سخت‌ترند.





وقتی قطر پیچ درست مساوی سوراخ نباشد مثل یک سوراخ بزرگتر از پیچ:



$\sigma_b = \frac{F'}{tD}$ لهیدگی

t ضخامت ورق

D قطر دایره :

F' نیروی متناظر با ورق ای است که می خواهیم لهیدگی آن را محاسبه کنیم :

مثلا در مورد ورق B می شود F در مورد دو ورق بالا و پایین می شود $F/2$

اگر ۳ پیچ داشته باشیم نیروی F تقسیم می شود هر کدام $F/3$ در این صورت نیروها به $F/6$ و $F/2$ و $F/3$ تقسیم می شود

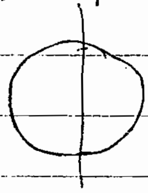
پیچ باید صلب تر از ورق باشد چون ممکن است باعث ایجاد چین در ورق شود :

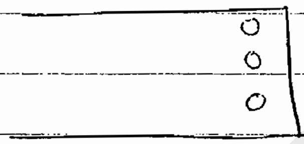
آیین نامه آن را تعیین می کند :

تنش لهیدگی یکنواخت نیست غیر یکنواختی آن از تنش برشی بیشتر است :

در تنش لهیدگی مساحت فرضی را در نظر گرفتیم تصویر نیم استوانه را هم صفحه قائم در نظر گرفتیم :

یک مستطیل ایجاد می شود .





n پیچ یا ۳ تا پیچ $= \tau = \frac{F}{2An}$

ممکن است در دو ردیف پیچ بگذاریم

$V = \frac{F}{2n}$

همیشه نصف نیرو در یک مقطع پیچ وارد می شود :

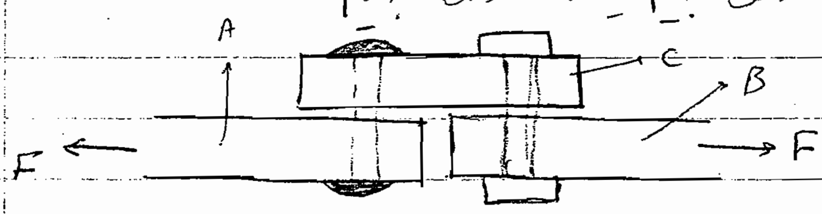
در مثال قبل برای ورق های A , B

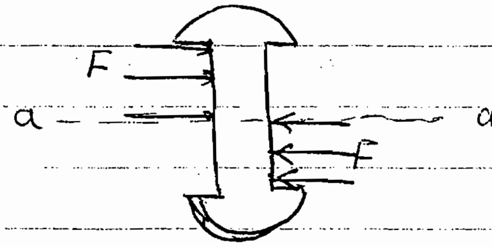
$$F' = F/n$$

D , C "

$$F' = \frac{F}{2n}$$

ممکن است به جای این که دو طرف ورق بگذاریم یک طرف ورق بگذاریم ؟





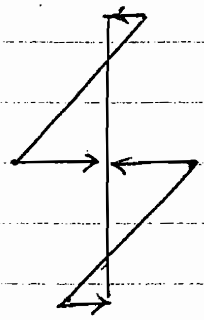
در این مقطع تمام نیروی F را داریم

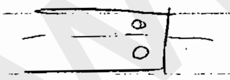
$$\tau = \frac{V}{A}$$

$$\tau = \frac{F}{An}$$

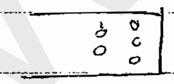
این اتصال ، اتصال خوبی نیست ؛ چون ورق را زیر اثر یک لنگر قرار می دهند ؛ تعادل لنگری ندارد ؛

بنابراین این توزیع عوض می شود ؛ به صورتی در می آید که توزیع متقارن شود

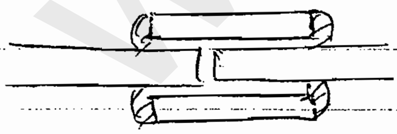




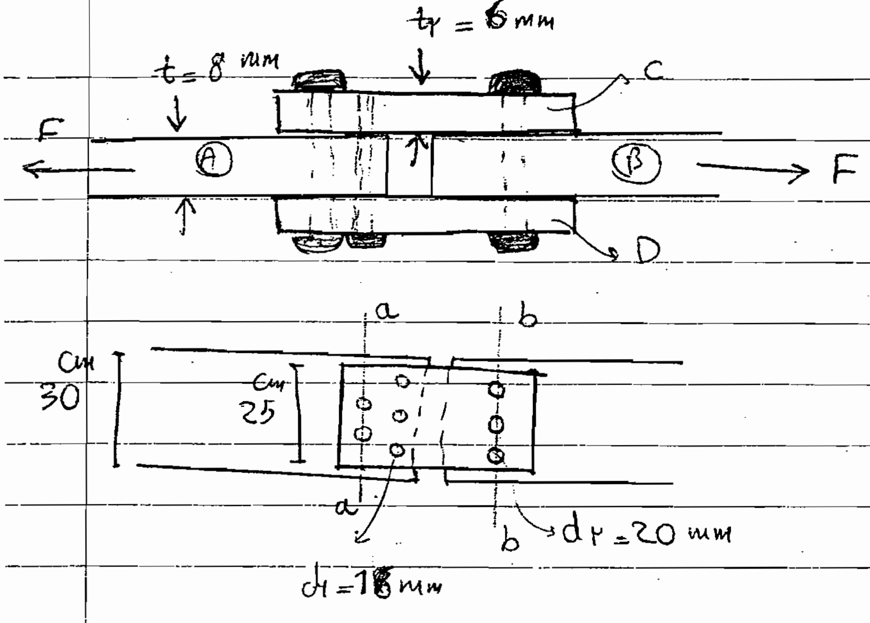
هم این پیچها در حالت متقارن اند .



الزامی نیست که پیچها در یک امتداد باشند ؛



ممکن است به جای پیچ از جوش استفاده شود



مثال 8 مقدار مجاز F ؟

$\sigma_w = 1500\ kg/cm^2$ (ورق‌ها مجاز)

$\tau_w = 1200\ kg/cm^2$ (پیچ‌ها مجاز)

$\sigma_{bw} = 1800\ kg/cm^2$ (لهیدگی مجاز)

حل – A:

اول محاسبه در مورد ورق‌ها:

نیروی بین پیچ‌ها تقسیم می‌شود $\frac{1}{5}$ به هر پیچ

وقتی به دو پیچ می‌رسیم $\frac{2}{5}F$ می‌رود و بقیه $\frac{3}{5}$ بین سه تا پیچ تقسیم می‌شود.

مقطع a-a خطرناک‌ترین مقطع است.

$$\sigma_w \geq \frac{F}{A}$$

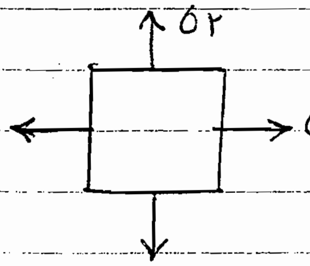
$$1500 \geq \frac{F}{(30-\underbrace{2\times1.6}_{\text{منهای دوتا پیچ}})\times0.8} \Rightarrow F \leq 32160$$

B
$$1500 \geq \frac{F}{(30-3\times2)\times0.8} \Rightarrow F \leq 28800$$

با توجه به محاسبات بالا معلوم می‌شود که سمت راست اتصال از نظر تنش خطرناک‌تر است.

بنابراین سمت راست ورق‌های C و D را در نظر می‌گیریم:

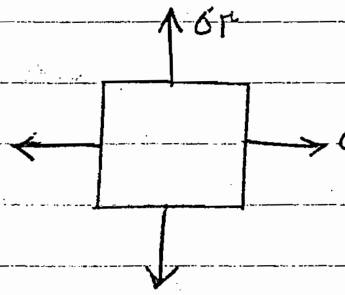
$$1500 \geq \frac{F/2}{(25-3\times2)\times0.6} \Rightarrow F \leq 34200$$



C یا $A \mid \sigma_3 , 0$ ، $B \mid \sigma_2 , 0$

دایره مور آن را می‌کشیم

حال اگر از سوی دیگر به المان نگاه کنیم:



$A \mid \sigma_1 , 0$ ، $C \mid \sigma_3 , 0$

دایره جدید شامل هر دو دایره است!

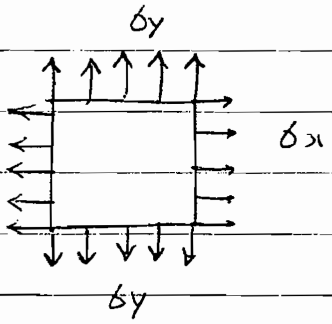
اگر یک صفحه دلخواه عمود بر این صفحه بزنیم تمام تنش های آن روی دایره بزرگ قرار دارد!

اگر یک صفحه ای شامل هر ۳ امتداد باشد نقطه نظیر آن در دایره مورد بحث هاشور خورده خواهد بود:

بزرگترین تنش برشی $\tau_{max} = \pm \dfrac{\text{کوچکترین تنش اصلی} - \text{بزرگترین تنش اصلی}}{2}$ → شعاع دایره بزرگ

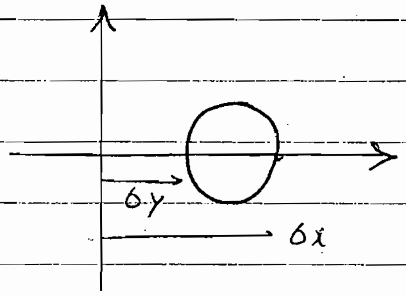
به طور کلی در هر جسمی یا هر المانی که به شکل دو بعدی می‌بینیم در واقع ۳ بعدی است مثلاً در حالت دو مولفه تنش صفر است یا در برش خالص تنش های اصلی را حساب کردیم یک تنش اصلی عمود بر صفحه است که مقدار آن صفر است

یک ورق نازک فولادی
را از دو طرف می‌کشیم



$\sigma_z = 0$

* بزرگترین تنش برشی = $\dfrac{\text{کوچکترین تنش اصلی} - \text{بزرگترین تنش اصلی}}{۲}$



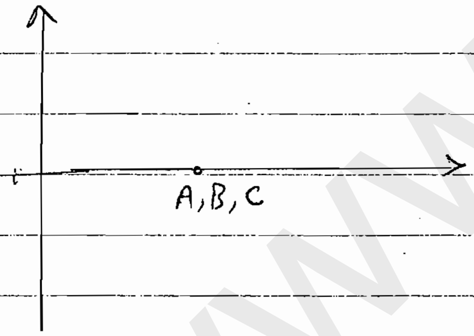
$\sigma_z = 0 \Rightarrow \boxed{\tau_{max} = \dfrac{\sigma_x - 0}{2}}$

حتماً به مؤلفه سوم توجه شود!

تنش کروی:

حالتی که هر ۳ مؤلفه عمودی تنش با هم مساوی باشند:

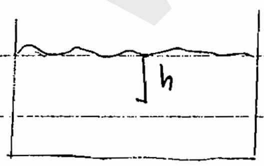
$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$



هر صفحه‌ای در این المان بگیریم
τ صفر است.

تنش عمودی در هر صفحه‌ای همان σ است

به این تنش، تنش هیدرواستاتیک هم گفته می‌شود:



فشار $= \gamma h$

فشار در مایع به امتداد
بستگی ندارد

روابط بین تنش و کرنش در حالت کلی 8

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right]$$

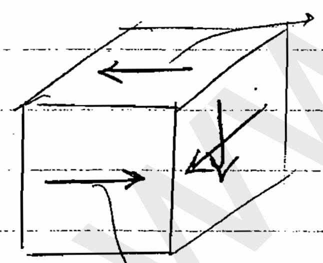
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$



این تنش زاویه قائم
را تغییر می دهد

این τ زاویه صفحه خودش را تغییر
نمی دهد بلکه زاویه صفحه بالایی را
تغییر می دهد.

تنش کروی

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$$

در تنش سطح اگر ۳ بعد توسعه کنیم دو دایره را باید کوچکترین بگیریم تا τ_{max} بدست آید.

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma - \nu(\sigma+\sigma)\right]$$

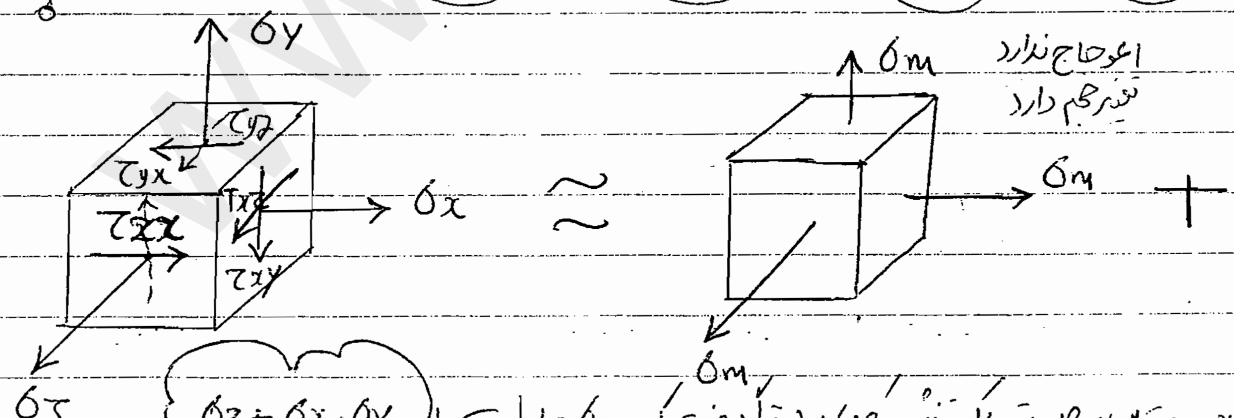
$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = \varepsilon_x = \frac{\sigma}{E}(1-2\nu)$$

$$\text{کرنش حجمی } \varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{3\sigma}{E}(1-2\nu)$$ *

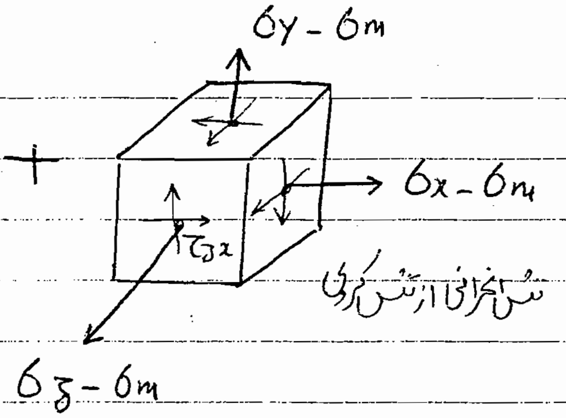
رابطه بین تنش کروی و کرنش حجمی

$$\varepsilon_v = \frac{\sigma}{K} \qquad K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

* K مدول ارتجاعی حجمی یا ضریب الاستیسیته حجمی



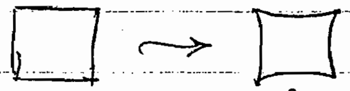
x می‌توان به صورت یک تنش کروی در نظر گرفت که σ_m برابر است با $\dfrac{\sigma_z+\sigma_x+\sigma_y}{3}$



تغییر حجم ندارد
اعوجاج دارد

* تنش کروی فقط تغییر حجم دارد اعوجاج ندارد ،

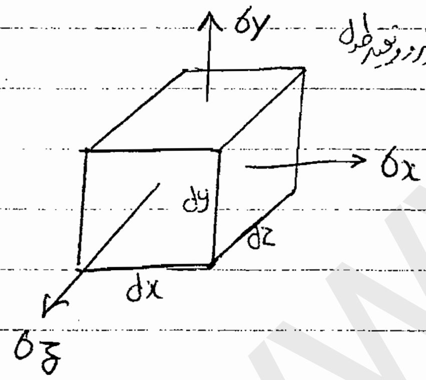
* برای دومی تغییر حجم ندارد و اعوجاج دارد ،



اعوجاج ناشی از تنش برشی است
(Distortion)

انرژی برحسب تنش ها :

$$u = \frac{\sigma_x^2}{2E}$$ انرژی تنش واحد حجم



به خاطر خطی بودن نیرو و تغییر طول — نیرو — مقدار تغییر طول

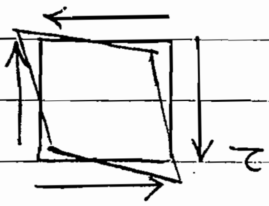
$$\frac{1}{2}\sigma_x (dydz)\times \varepsilon_x dx + \frac{1}{2}\sigma_y (dxdz)\cdot \varepsilon_y dy$$
$$+\frac{1}{2}\sigma_z (dxdy)\cdot \varepsilon_z dz = U$$ کل انرژی درالمان

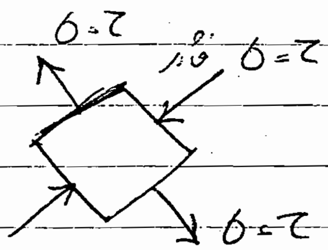
انرژی در واحد حجم $$u = \frac{U}{dx\,dy\,dz} = \frac{1}{2}(\sigma_x\varepsilon_x+\sigma_y\varepsilon_y+\sigma_z\varepsilon_z)$$

$$\boxed{u = \frac{1}{2E}\left[\sigma_x^2+\sigma_y^2+\sigma_z^2-2\nu(\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_z+\sigma_z\sigma_x)\right]}$$

ناشی از تنش عمودی

انرژی ناشی از تنش برشی

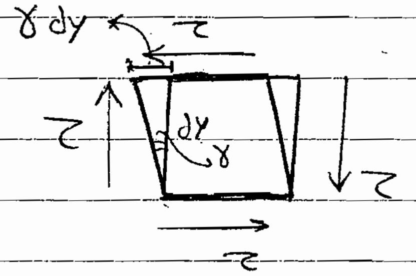




می‌شود المان ۴۵° در نظر گرفت

با استفاده از فرمول بدست آمده انرژی حاصل محاسبه می‌شود

در روش دوم شکل تغییر شکل یافته را طوری دوران می‌دهیم که ضلع پایینی منطبق بر شکل اصلی شود؛



فقط نیروی بالا کار انجام می‌دهد با اندازه γdy

$$U = \frac{1}{2}(\tau\, dx\, dy)\cdot \gamma\, dy$$

در واحد حجم $u = \frac{1}{2}\tau\gamma = \frac{1}{2}\frac{\tau^2}{G}$ در حالت برش خالص

G: مدول الاستیسیته برشی

ناشی از ۳ تا تنش برشی $u = \frac{1}{2G}\left[\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2\right]$

$u_{کل} = u_1 + u_2$

* فقط تنش برشی هست که اعوجاج ندارد یعنی حجمی را از ۳ طرف با تنش های یکسان بکشیم باز داریم

در حالت‌های بالا فقط در صفحه محوری اعوجاج نداریم در صفحات دیگر اعوجاج داریم؛

۸۴/۸/۲۷ به نام خدا

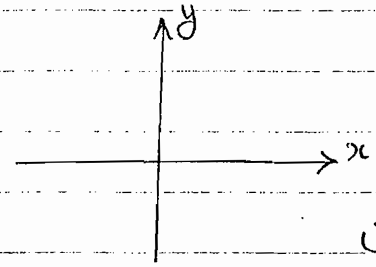
آنالیز تنش :

تنش ۹ مؤلفه دارد سه تا تنش از نوع خطی : $\varepsilon_x , \varepsilon_y , \varepsilon_z$

۶ تا تنش برشی : $\gamma_{yx} , \gamma_{xy}$

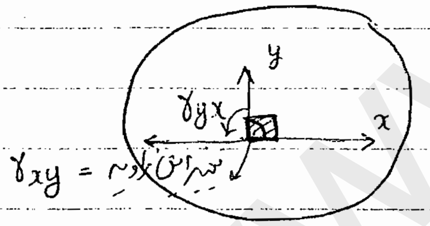
$\gamma_{yz} , \gamma_{zy}$

$\gamma_{zx} , \gamma_{xz}$

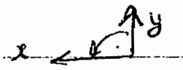


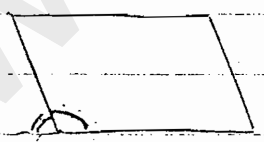
* فرق γ_{xy} , γ_{yx} :

* γ_{xy} تغییر زاویه قائمی که بین امتداد اول x و y است



* γ_{yx} اول محور y بعد محور x را عمود کنیم بر آن در جهت مثلثاتی





این دو زاویه همیشه با هم تغییر می‌کنند پس γ_{yx} و γ_{xy} با هم مساوی و در خلاف جهت هم اند

$$\begin{cases} \gamma_{xy} = -\gamma_{yx} \\ \gamma_{yz} = -\gamma_{zy} \\ \gamma_{zx} = -\gamma_{xz} \end{cases}$$

* محور اول انتخاب می‌شود محور دوم فقط امتداد را نشان می‌دهد به طوریکه از محور اول در جهت مثلثاتی حرکت (تا راستا عمود گردد) می‌کنیم محور دوم به دست می‌آید؟

می شود ثابت کرد که تنش هم ۳ امتداد اصلی دارد مثل تنش که در آن امتدادها تنش برشی نداریم :

یعنی این ۳ امتداد عمود بر هم تحت هر نوع تغییر شکلی ، زاویه بین آنها تغییر نمی کند

تنش خطی در امتداد یکی از آنها بیشترین و در امتداد یکی دیگر کوچکترین مقدار است .

در حالت کلی امتدادهای اصلی تنش و تنش بر هم منطبق نیستند :

* برای موادی که تنش و تنش خطی دارند در صحت خطی محورهای اصلی تنش و تنش با هم برابرند :

* تنش مسطح : plane strain

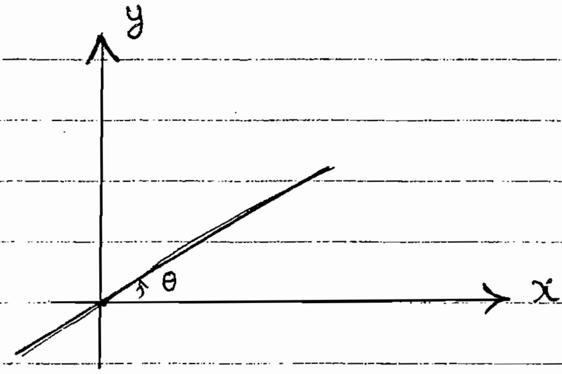
حالتی از تنش است که ε_x , ε_y , γ_{xy} , γ_{yx} داریم :

$$\begin{cases} \varepsilon_x , \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} = -\gamma_{yx} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_z = 0 \\ \gamma_{yz} = -\gamma_{zy} = 0 \\ \gamma_{zx} = -\gamma_{xz} = 0 \end{cases}$$

در روابط مربوط به تنش مسطح اگر $\sigma \rightarrow \varepsilon$, $\tau \rightarrow \gamma/2$ تبدیل شود همه

روابط درست خواهند بود

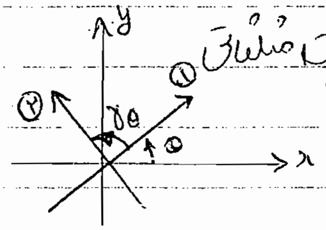


- ما می‌توانیم در یک امتداد دیگر که با x زاویه θ می‌سازد تنش‌ها را بیابیم ؛

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos2\theta - \tau_{xy}\sin2\theta$$

$$\boxed{\varepsilon_\theta = \frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\cos2\theta - \frac{\gamma_{xy}}{2}\sin2\theta}$$

$$\tau_\theta = \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin2\theta + \tau_{xy}\cos2\theta$$



γ_θ یعنی محور اول با زاویه θ انتخاب شده است محور دوم عمود آن در جهت مثلثاتی

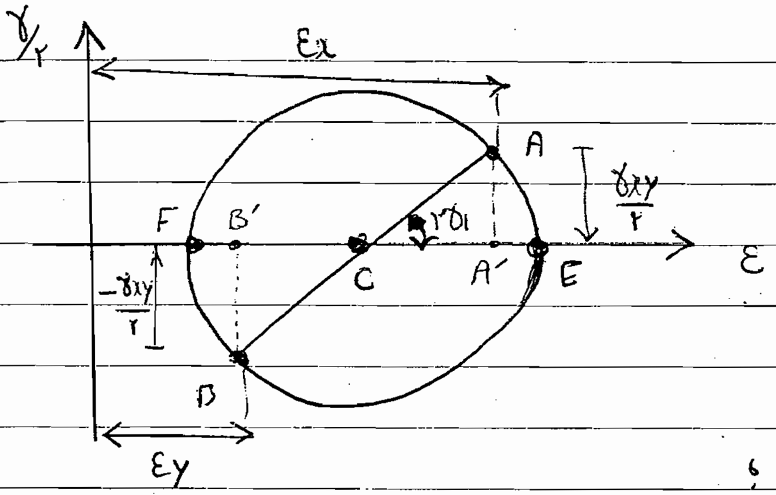
$$\boxed{\tau \rightarrow \frac{\gamma}{2}}$$

$$\boxed{\frac{\gamma_\theta}{2} = \frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\sin2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\cos2\theta}$$

برای تنش هم می‌توانیم دایره مور داشته باشیم ؛

$A\left|\begin{matrix}\sigma_x\\ \tau_{xy}\end{matrix}\right.$; $B\left|\begin{matrix}\sigma_y\\ -\tau_{xy}\end{matrix}\right.$

حال $\Rightarrow$ $A\left|\begin{matrix}\varepsilon_x\\ \frac{\gamma_{xy}}{2}\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}\varepsilon_y\\ -\frac{\gamma_{xy}}{2}\end{matrix}\right.$



نقاطی که روی دایره اند نظیر محورها هستند ؛

مرکز دایره $C \left| \begin{array}{l} \dfrac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2} \\ 0 \end{array} \right.$

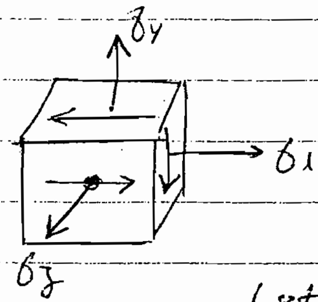
$$R=\sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\right)^2+\left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

$$\tan 2\gamma_1=\frac{-\gamma_{xy}}{\varepsilon_x-\varepsilon_y}$$

$$* \quad \varepsilon_{max}=\overline{OC}+R=\sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\right)^2+\left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}+\frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2}$$

$$* \quad \varepsilon_{min}=OF=\overline{OC}-R=\frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2}-\sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\right)^2+\left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

* اگر $\varepsilon_x , \varepsilon_y$ و ε_z را داشته باشیم تنش داخل سطح نیست ولی می توان روابط را بکار برد $\gamma_{xy} - \gamma_{yz}$



* اندازه گیری تنش « مجرّبی » تنش سنج (strain guage)

- یک سیمی را به جسمی که می خواهیم تنش آن را اندازه بگیریم در همان جهت می چسبانیم وقتی طول زیاد شود

مقاومت سیم زیاد و شدت جریان کم می شود طول سیم باید کوچک باشد و گرنه تغییر طول متوسط را به ما

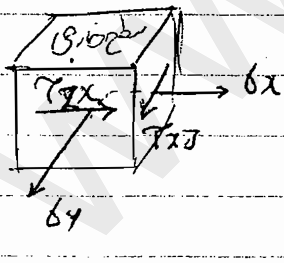
می دهد ؛ هنوز دستگاهی اختراع نشده که تنش برشی را اندازه بگیرد ؛

می توانیم ε را در ۳ امتداد اندازه بگیریم $\varepsilon_x , \varepsilon_y$ و ε_θ را داریم γ_{xy} بدست می آید ؛

معمولاً سیم را روی سطح سازه می گذارند و گرنه باید هنگام ساخته شدن سیم را داخل بگذاریم

جایی که تنش را اندازه می گیریم تنش سطح خواهیم داشت چون سیم را در سطح خارجی وصل می کنیم

و اگر در سطح خارجی نیرویی وارد نشود تنش برشی و عمودی در آن صفر است ؛



$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu(\sigma_z + \sigma_y)\right)$$

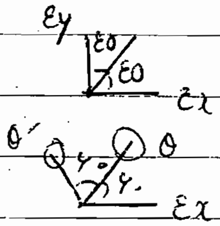
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)\right)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left(\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right)$$

* وقتی تنش سطح باشد تنش سطح نیست و بر عکس

چون ε_z داریم ؛

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$



تنش سنج ها را به صورت زاویه 45° یا 60° به هم وصل می کنند

در ۴۵ می شود یکی را ε_x و ε_y و دیگری را بدست آورد

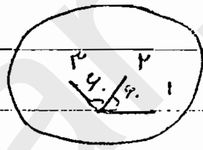
در حالت 60° روابط را دو بار می توان نوشت و ε_y و γ_{xy} را بدست آورد .

مثال ۵ در یک نقطه از سازه ای تنش ها را در ۳ امتداد با زاویه 60° اندازه گرفتیم و مقادیر زیر بدست آمده است :

$\varepsilon_1 = 200\times10^{-6}$ یا ۲۰۰ میکرواسترین ~~Micro~~ Micro strain $= 10^{-6}$

$\varepsilon_2 = -400\times10^{-6}$

$\varepsilon_3 = 300\times10^{-6}$



$$\begin{cases} E = 2\times10^{6}\ \frac{kg}{cm^2} \\ \nu = 0/3 \end{cases}$$

حل - تنش های اصلی را می خواهیم پیدا کنیم ؛ و تنش برشی Max ؟

اول باید در دو امتداد x و y تنش ها را داشته باشیم تا بتوانیم دایره مور را رسم کنیم :

$\varepsilon_x = \varepsilon_1 = 200\times10^{-6}$

دو بار روابط ε_θ را می نویسیم :

$$\varepsilon_{60} = \varepsilon_2 = \frac{200\times10^{-6}+\varepsilon_y}{2} + \frac{200\times10^{-6}-\varepsilon_y}{2}\cos120 - \frac{\gamma_{xy}}{2}\sin120 = -400\times10^{-6}$$

$$\varepsilon_{120} = \varepsilon_3 = \frac{200\times10^{-6}+\varepsilon_y}{2} + \frac{200\times10^{-6}-\varepsilon_y}{2}\cos240 - \frac{\gamma_{xy}}{2}\sin240 = 300\times10^{-6}$$

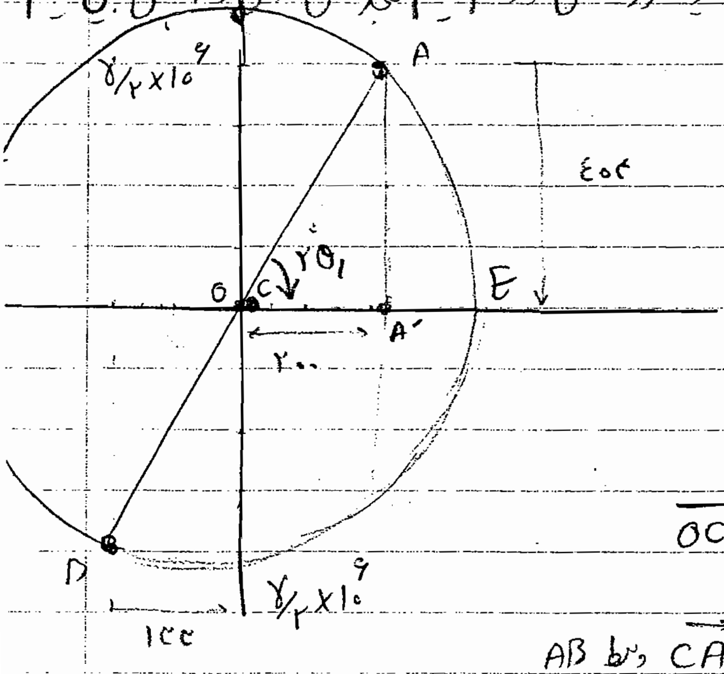
$$\Rightarrow -400\times10^{-6} = 50\times10^{-6} + \frac{3}{4}\varepsilon_y - \frac{\sqrt{3}}{4}\gamma_{xy}$$

$$300\times10^{-6} = 50\times10^{-6} + \frac{3}{4}\varepsilon_y + \frac{\sqrt{3}}{4}\gamma_{xy}$$

$\varepsilon_y = -133\times10^{-6}$ $\gamma_{xy} = 808\times10^{-6}$

دو راه حل داریم: یکی این که تنش های اصلی را بدست آوریم بعد تبدیل به کرنش کنیم

یا از اول به کرنش تبدیل کنیم و دایره مور کرنش را رسم کنیم بعد کرنش های اصلی را به تنش تبدیل کنیم



A | $200\times10^{-6} = 200$ — ε_x

$\frac{\gamma_{xy}}{2} = 404$ — $\frac{\gamma_{xy}}{2}$

B | -133 — ε_y

-404 — $\frac{\gamma_{yx}}{2}$

* O, C منطبق نیستند:

$$\overline{OC} = \frac{200-133}{2} = 33.5$$

AB قطر $\overrightarrow{CA'} = \frac{200+133}{2} = 166.5$

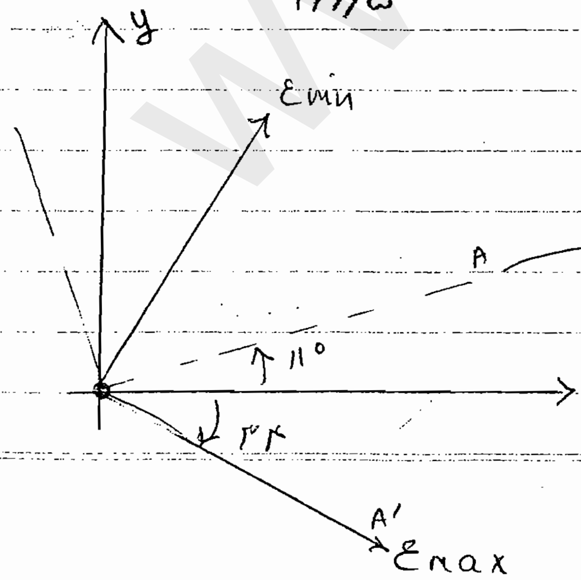
$$R = \sqrt{\overline{CA'}^2 + AA'^2} = \sqrt{166.5^2 + 404^2} = 437$$

$$10^6 \times \varepsilon_{max} = 33.5 + 437 = 470.5$$

$$10^6 \times \varepsilon_{min} = 33.5 - 437 = -403.5$$

$$10^6 \times \frac{\gamma_{max}}{2} = 437 \Rightarrow \gamma_{max} = 874\times10^{-6}$$

$$\tan 2\theta_1 = \frac{404}{166.5} \Rightarrow \theta_1 = 34$$



کرنش برشی بین دو خط

چنین max مقدار را دارد

چون A, A' در دایره 90° اختلاف دارند

پس در صفحه 45° پس زاویه مجموعه 79 می‌شود

$\Rightarrow 110°$

$\varepsilon_{max} = 470.5 \times 10^{-6}$

$\varepsilon_{min} = -403.5 \times 10^{-6}$

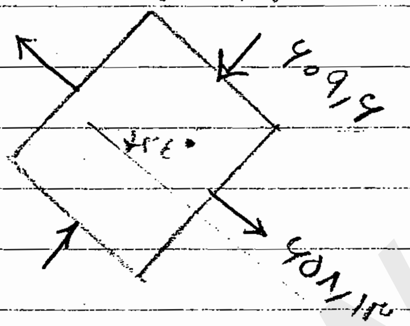
$\gamma_{max} = 874 \times 10^{-6}$

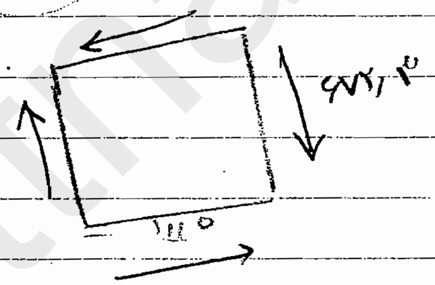
در بعدی $\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu\sigma_2) \Rightarrow 470.5 \times 10^{-6} \times 2 \times 10^{6} = \sigma_{max} - 0.3\sigma_{min}$

$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}(\sigma_2 - \nu\sigma_1) \Rightarrow 403.5 \times 10^{-6} \times 2 \times 10^{6} = \sigma_{min} - 0.3\sigma_{max}$

$\gamma_{max} = \frac{\tau_{max}}{G}$ که $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

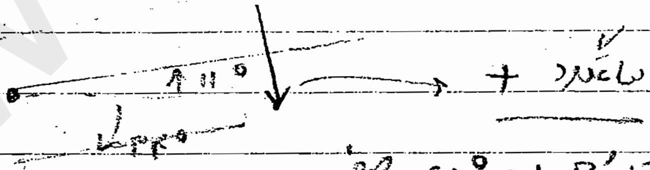
$\Rightarrow \frac{874 \times 10^{-6} \times 2 \times 10^{6}}{2(1+0.3)} = \tau_{max}$





از نقطه E تا τ_{max} در دایره 90° یعنی در صفحه 45° اضافه شود را

که در این محور در صفحه مورد نظر آن تنش برشی + است یعنی ساعتگرد است.



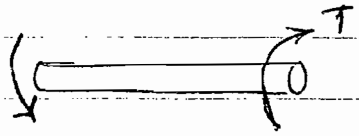
* چون از E تا B′ باید 45° در صفحه،

هم یعنی در صفحه خود تنش برشی +

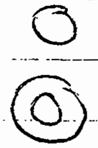
است.

۸۴/۱/۲۹ بنام خدا ج ۱۴

پیچش Torsion



۲ حالت مورد بررسی



شرایط مسئله :

۱- تغییر شکلها کوچک‌اند

۲- تنش‌ها و پیچش‌ها در محدوده خطی منحنی تنش - پیچش قرار دارند

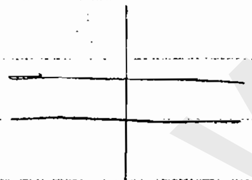
* اگر چنین وضعیتی را داشته باشیم با تجربه و مطالعات دقیق نشان می‌دهد که :

۱- محور میله مستقیم باقی می‌ماند

۲- مقطع میله به صورت مدور باقی می‌ماند

۳- طول میله تغییر نمی‌کند

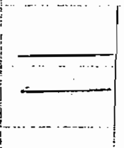
۴- (اندازه قطر) میله تغییر نمی‌کند



قبل تغییر شکل

۵- مقاطع اولیه عمود بر محور میله ، مسطح باقی می‌مانند

* نقاط مختلف مقطع حرکت عمود بر مقطع ندارند

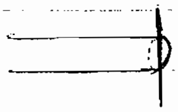


بعد از تغییر شکل warping

تاب برداشتن مقطع

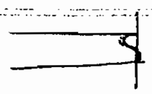
یعنی مقطع از حالت

مسطح خارج می‌شود



از حالت عمود خارج شود

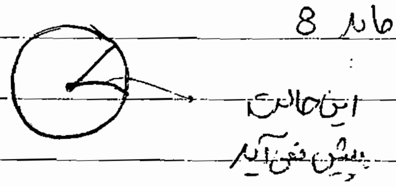
یا



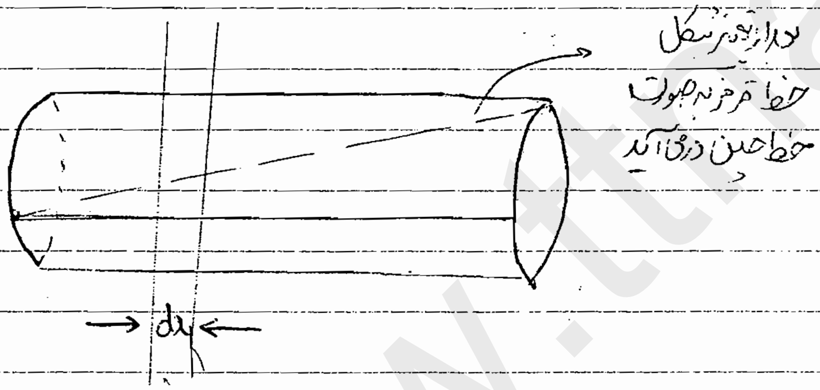
اعوجاج با تاب برداشتن متفاوت است

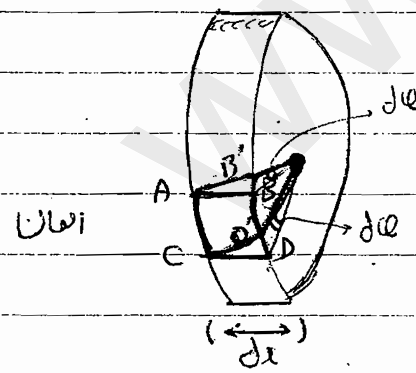
اعوجاج تغییر زاویه قائمه ناشی از تنش برشی است ولی تاب برداشتن فقط مقطع از حالت مسطح خارج می شود

۶ _ هر قطری با هر شعاع به صورت شعاع یا قطر باقی می ماند 8



فرض این است که میله از بی نهایت صفحه نازک صلب تشکیل شده که هنگام پیچش این صفحات روی هم دوران می کنند خود صفحات هیچ تغییر شکلی ندارند فقط نسبت به هم دوران می کنند

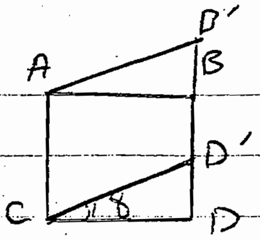




المان ABCD به صورت AB'D'C در آمده است

چون صفحه صلب است همه نقاط به صورت صلب یک دوران dα دارند

$$\overline{BB'} = \overline{DD'} = R\,d\alpha \Rightarrow \overline{B'D'} = \overline{BD}$$



به دلیل کوچکی تغییر شکل‌ها BB' یا DD'

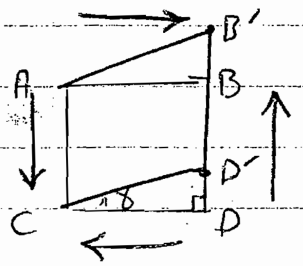
نسبت به DC و BA :

زاویه γ زاویه کوچکی خواهد بود پس داریم :

$$D'C = DC$$

* : یعنی در این المان بعد از تغییر شکل تغییر طولی اتفاق نیفتاده است :

چون فقط تغییر زاویه قائمه داریم و برشی است پس المان تحت برش خالص است :



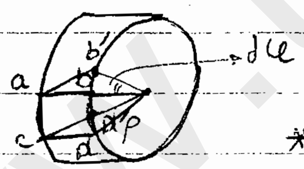
$$\gamma = \frac{DD'}{DC} = \frac{R\,d\varphi}{dx}$$

$\frac{d\varphi}{dx}$ را دوران در واحد طول گویند :

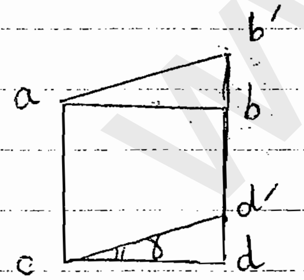
* اگر المان‌های حلقه با شعاع

یک حلقه با شعاع R

ρ در نظر بگیریم :



* $\overline{bb'} = \overline{dd'} = \rho\, d\varphi$
* $\overline{b'd'} = \overline{bd}$
* $cd = cd'$



γ با قبلی متفاوت است $\quad \gamma = \frac{\overline{dd'}}{cd} = \frac{\rho\, d\varphi}{dx}$ باز هم مرحله دوران در واحد طول بدست آید

* یعنی مقدار γ در دو المان با فاصله از مرکز مقطع متناسب است

$\frac{d\varphi}{dx}$ برای تمام نقاط مقطع مقدار ثابتی است ؟

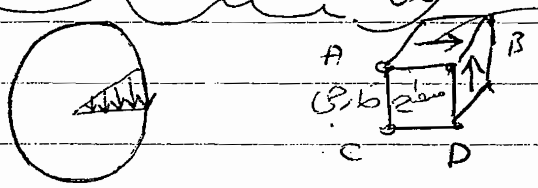
پخش برشی در مرکز صفر است هر چه از مرکز دور شویم به طور خطی زیاد می شود

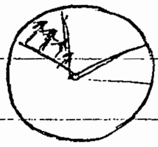
* یعنی وقتی میله را می پیچانیم محور میله تحت پیچش قرار می گیرد وقتی از محور دور شویم تنش برشی زیاد می شود ؟

$$* \quad \tau = G\gamma = G\rho\frac{d\varphi}{dx}$$

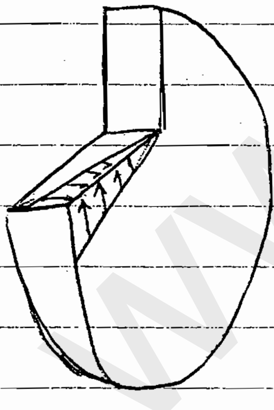
عمود بر مقطع است

تمایل محور میله





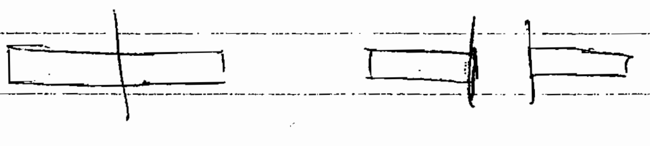
عمود بر شعاعی است که از آن نقطه رد می شود ؛



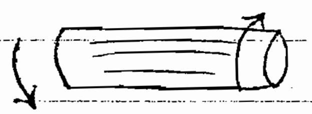
یک مؤلفه در امتداد طول میله

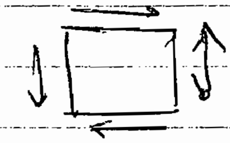
یک مؤلفه عمود بر محور میله

مثلاً در مواد وقتی تحت پیچش قرار می گیرد با یک مقطع سطح قطع خواهد شد



اگر استوانه چوبی باشد الیاف چوب در امتداد طول مقاومت زیاد دارند ولی پیوستگی در این راستا کمتر است





الیاف از هم جدا می شوند تحت برش بالا و پایین

در زوایای 45° ما کشش max داریم با همان مقدار تنش برشی
〃 〃 -۴۵ فشار 〃 〃 〃 〃

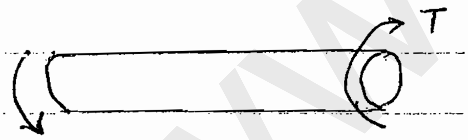
گچ را که در مقابل کشش ضعیف اند یک میله گچی تحت پیچش قاعدتاً باید تحت کشش از بین برود

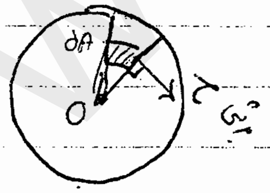
زاویه قطع میله گچی تقریباً 45° خواهد بود چون تحت کشش قطع می شود

در مورد فشار اجسام خیلی نازک فشار را تحمل نمی کنند و تحت فشار خم می شوند

* وقتی جسم قطع یا خراب شد دیگر روابط برقرار نخواهد بود.

محاسبه مقدار 8





$$dF = \tau\, dA$$
$$\tau \quad G\rho \frac{d\varphi}{dx}$$
$$dF \quad G\rho \frac{d\varphi}{dx} \cdot dA$$

حول o: $dM_o = (dF)\rho = G\rho^2 \frac{d\varphi}{dx} dA$

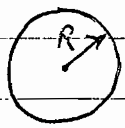
$$T=\int_A dM_O=\int G\rho^2\frac{d\varphi}{dx}\,dA=G\frac{d\varphi}{dx}\underbrace{\int_A \rho^2 dA}_{\text{ممان اینرسی}}$$

$$\boxed{\begin{matrix} I_O \\ \text{یا} \\ J_O \end{matrix}=\int_A \rho^2 dA}$$

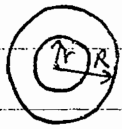
گشتاور دوم
یا ممان
نسبت به O

$$\boxed{T=G\,J_O\,\frac{d\varphi}{dx}} \qquad (۳)$$

$$\boxed{\tau_{\text{برشی}}=\frac{T\rho}{J_O}} \qquad (۴)$$

توپر 

$$* \quad J_O=\frac{\pi R^4}{2}$$

دو مقطعی 

$$J_O=\frac{\pi}{2}(R^4-r^4)$$

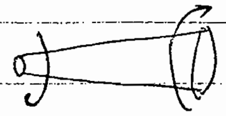
$$\tau_{max}=\frac{TR}{J_O} \qquad r=R$$

✓ تنش روی مقطع است
max که به مقطع نیروی
مقطع

مقدار دوران
تغییر زاویه

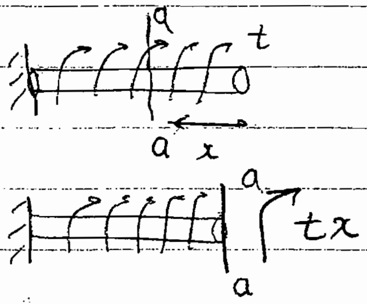
$$* \; d\varphi = \frac{T\,dx}{GJ_0} \Rightarrow \varphi = \int_0^L \frac{T\,dx}{GJ_0} \Rightarrow \varphi = \frac{TL}{GJ_0}$$

وقتی قطر ثابت باشد یا T ثابت باشد



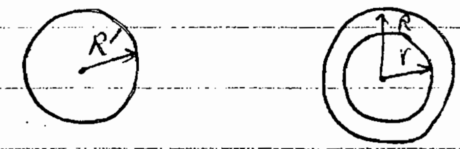
مثل رابطه $\delta = \frac{FL}{EA}$ است

در رابطه GJ_0 را صلبیت پیچشی گویند



T گسترده دیگر ثابت نیست

یک میله تحت پیچش است کدام مقطع بهتر است



* مساحت یکی دارند

$$A' = A$$

$$\pi R'^2 = \pi(R^2 - r^2) \Rightarrow R' = \sqrt{R^2 - r^2}$$

$$J_0' = \frac{\pi R'^4}{2}$$

$$J_0 = \frac{\pi}{2}(R^4 - r^4)$$

$$\tau'_{max} = \frac{TR'}{J_0'}$$

$$\Rightarrow \frac{\tau'_{max}}{\tau_{max}} = \frac{R'}{J_0'} \times \frac{J_0}{R} = \frac{R'(R^4 - r^4)}{R'^4 \cdot R} = \frac{(R^2 - r^2)(R^2 + r^2)}{R'^3 \cdot R}$$

$$\tau_{max} = \frac{TR}{J_0}$$

$$= \frac{R^2 + r^2}{RR'}$$

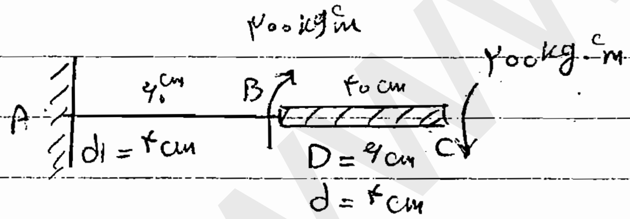
ازرابطه $R' = \sqrt{R^2 - r^2}$ می‌توان نتیجه گرفت $R > R'$ پس $R^2 > RR'$

پس $\frac{R^2+r^2}{RR'} > 1$ است پس مقطع دوم بهتر است چون تحت T یکسان مقطع دوم τ_{max} کمتری را تحمل می‌کند ؟

$$\varphi = \frac{TL}{GJ_0} \qquad \varphi' = \frac{TL}{GJ_0'} \Rightarrow \frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{J_0}{J_0'} \quad \frac{R^4-r^4}{R'^4} \quad \frac{R^2+r^2}{R'^2} > 1$$

* پس میله اول هم تنش برشی دارد پس مقاومت آن کمتر است
* کلاً جسمی که تحت بارگذاری یکسان تنش برشی می‌گیرد مقاومت آن کمتر است ؟
* هر جسمی که تحت اثر بارگذاری یکسان تغییر شکل برشی داشته باشد سختی کمتر است ؟

بارگذاری چه موقع باشد چه پیچشی ← نسبت محور دوران بر ؟



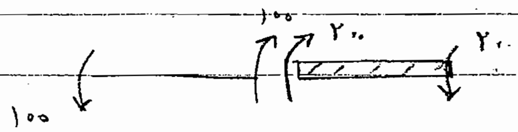
$G = 0/8 \times 10^6$

مثال 8 در شکل زوم و تنش های max هر قسمت میله را بیابید و دوران نقاط B, C را بیابید ؟

kg/cm

حل - $\tau_{max} = \frac{TR}{J_0} = \frac{(100)(2)\times 100}{\frac{\pi}{2}(2)^4} = \frac{2500}{\pi}$ AB

$$\tau_{max} = \frac{200\times 100\times 3}{\frac{\pi}{2}(3^4-2^4)} = \frac{120000}{65\pi}$$



$$\varphi_{AB} = \frac{TL}{GJ_0} = \frac{100\times100\times60}{0/8\times10^{6}\times\frac{\pi(24)}{4}} = \frac{3}{32\pi} \approx 0/0298\ Rad$$

واحد رادیان باید باشد؛

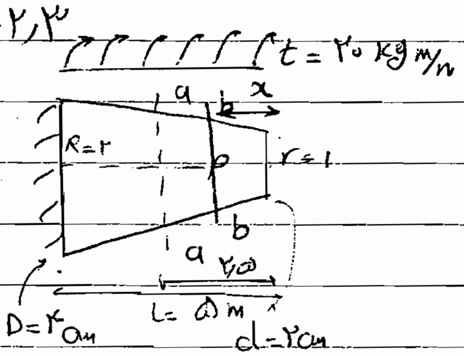
اگر بر حسب درجه خواهیم در $\frac{180}{\pi}$ ضرب می کنیم؛

$$\varphi_{BC} = \frac{TL}{GJ_0} = \frac{200\times100\times40}{0/8\times10^{6}\times\frac{\pi}{2}(3^4-2^4)} = 9{,}794\times10^{-3}$$

$\theta_B = \varphi_{AB}$ چون A ثابت است هر قدر میله دوران کند نقطه B هم همان قدر دوران می کند

$\theta_C = \varphi_{AB} - \varphi_{BC} =$ چون در جهات مختلف هستند؛ $= 0/02$

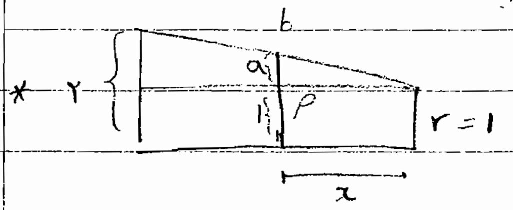
۸۴،۲،۳ نمونه ۱۵ ج



$G = 0.8\ MPa$

سوال ۵ تنش ماکزیمم bb و دوران میله حول محور میله کدام؟

$$\begin{cases} T_{bb} = tx = 20\ kg\,m/m = 20\ kg\,cm/cm \\ T_{bb} = 20x \end{cases}$$



$$\Rightarrow \frac{a}{x} = \frac{1}{500} \Rightarrow a = \frac{x}{500} = 0.002x$$

$$\rho = 1 + a = 1 + 0.002x$$

$$J_0 = \frac{\pi\rho^4}{2} = \frac{\pi}{2}(1+0.002x)^4$$

$$* \ \tau_{max} = \frac{T\rho}{J_0} = \frac{T\rho}{\frac{\pi\rho^4}{2}} = \frac{2T}{\pi\rho^3} \Rightarrow ①$$

aa مقطع $= * \ \rho = 1 + (0.002)(250) = 1.5\ cm \Rightarrow \tau_{max} = \dfrac{(20\times 250)(2)}{\pi(1.5)^3}$

$$= 943.1$$

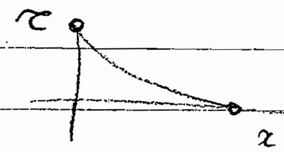
مقطع تکیه‌گاه ob $\Rightarrow \rho = 2\,cm \Rightarrow T = 20 \times 500 = 10000$

$$\Rightarrow \tau_{max} = \frac{2\times 10000}{\pi(2^3)} = 795.7\ kg/cm^2$$

برای بدست آوردن بیشترین τ_{max} در میله باید از رابطه ① نسبت به x مشتق بگیریم

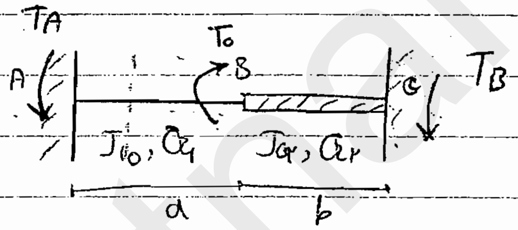
$$\tau_{max} = \frac{2\times 20x}{\pi(1+0/002x)^4} \Rightarrow \tau' = 0$$

ممکن است ماکزیمم جبری ندهد مشتق بگیریم دلیل در اینجا $x=250$ که همان وسطی است؛



$$* \quad \varphi = \int_0^{500} \frac{T\,dx}{GJ_0} = \int_0^{500} \frac{20x\,dx}{\frac{\pi}{2}(1+0/002x)^4} \times \frac{1}{G} = 0/34$$

مثال 8



عکس العملها در C ، A بیابید؟

مسئله هیپراستاتیک است بنابراین باید از تغییر شکل برویم؛

۱ درجه نامعین است

$$T_A + T_B - T_0 = 0$$

سازگاری: $\varphi_{AB} + \varphi_{BC} = 0$. در جهات مختلف چرخند پس جمع شد:

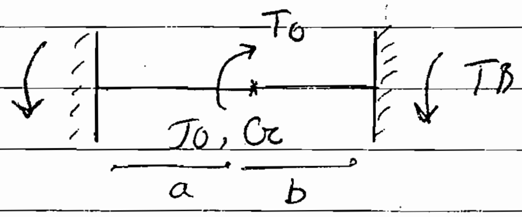
$$\varphi_{AB} = \frac{T_A a}{G_1 J_{10}}$$

$$\varphi_{BC} = \frac{(T_A - T_0)}{G_2 J_{20}}$$

$$\Rightarrow \frac{T_A a}{G_1 J_{10}} + \frac{(T_A - T_0) b}{G_2 J_{20}} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{T_A = \frac{T_0 \frac{b}{G_2 J_{20}}}{\frac{a}{G_1 J_{10}} + \frac{b}{G_2 J_{20}}}}$$

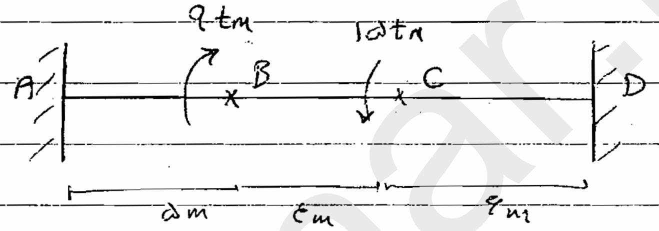
$$TB = \frac{T_0 \dfrac{a}{G_1 J_{10}}}{\dfrac{a}{G_1 J_{10}} + \dfrac{b}{G_2 J_{20}}}$$



$$* \quad TA = \frac{T_0 b}{a+b}$$

$$* \quad TB = \frac{T_0 a}{a+b}$$

مثال:

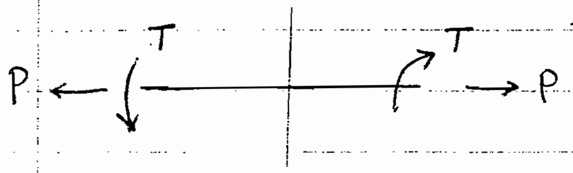


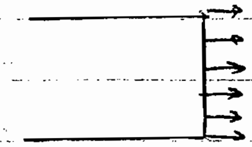
از دو روش یکی با دانستن روابط بالا و یکی با استفاده از جمع آثارها و سازگاری حل کنید؟

? ✓

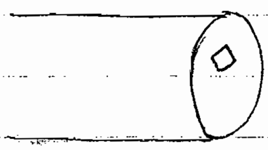
حل-

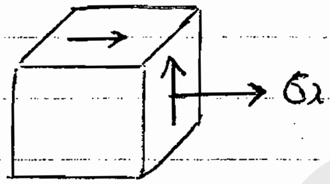
* اگر میله ای تحت اثر پیچش و بار محوری باشد 8

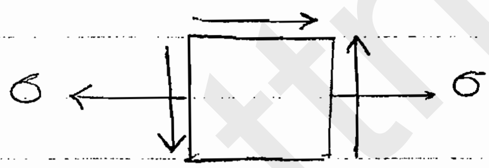




$$\sigma = \frac{P}{A}$$







در اثر بار محوری یک تنش عمودی است ، و در اثر پیچش یک نیروی باعث ایجاد تنش برشی در امتداد طول میله و عمود بر طول می شود

تنش عمودی مقدار ثابت دارد ولی تنش برشی τ تغییر می کند و روی محیط بیشترین مقدار را دارد

$$\sigma_1, \sigma_2 \ (\max, \min) = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

تنش های اصلی

$$\tau_{max} = \pm \sqrt{(\sigma/2)^2 + \tau^2}$$

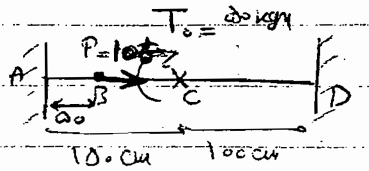
به علت وجود نیروی محوری تنش برشی موجود در میله افزایش می یابد

هم چنین به علت وجود پیچش طبق رابطه با تنش عمودی اصلی از σ بزرگتر خواهد بود

مثال 8

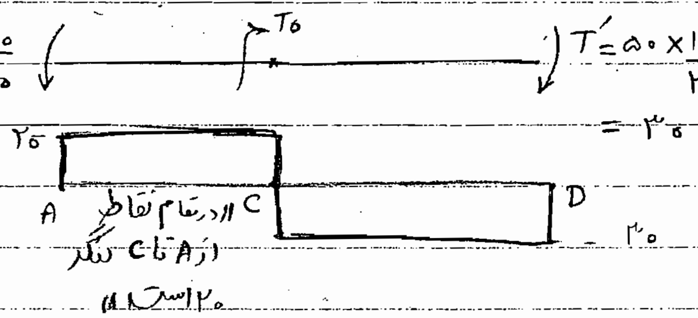
بزرگترین تنش برشی و
بزرگترین تنش عمودی P
هم فشاری هم کششی !

$d = 6\ cm$



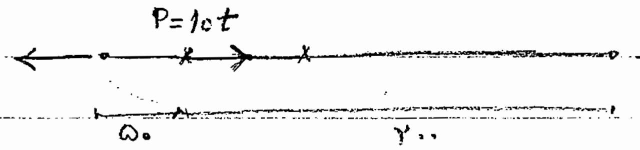
$T = 50 \times \frac{100}{250} = 20$

$T' = 50 \times \frac{150}{250} = 30$



$10 \times \frac{200}{250} = R_1 = 8t$

$R_2 = 10 \times \frac{50}{250} = 2t$



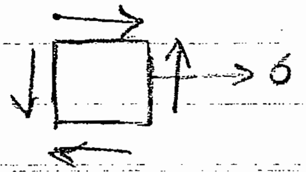
$R_1 = \frac{Pb}{a+b}$, $R_2 = \frac{Pa}{a+b}$

$$\begin{cases} AB: & N = 8\ ton, \quad T = 20 \\ BC: & N = -2\ ton, \quad T = 20 \\ CD: & N = -2\ ton, \quad T = -30 \end{cases}$$

برای تنش T مثبت یا منفی بودن آن تاثیری ندارد ولی در زاویه دوران باید نوشته شود

AB: $\sigma_{\text{عمودی}} = \frac{8000}{\pi (3)^2} = 282.9\ kg/cm^2$

برشی $\tau_{max} = \frac{2T}{\pi R^3} = \frac{2 \times 20 \times 100}{\pi (3)^3} = 47.2$



$$\tau_{max} = \pm\sqrt{\left(\frac{۲۸۲,۹}{۲}\right)^{۲} + \underbrace{۴۷,۲^{۲}}_{}} = ۱۴۹,۱ \ \ kg/cm^{۲}$$

چرخانی از بخش ۸

$$\begin{matrix}\sigma_1 \\ \sigma_2\end{matrix} = \frac{۲۸۲,۹}{۲} \pm ۱۴۹,۱ \Rightarrow \begin{matrix}\sigma_1 = \text{کشش} = ۲۹۰,۵ \\ \sigma_2 = \text{فشاری} = -۷\end{matrix}$$

$\overline{BC}$:

$$\sigma = \frac{-۲۰۰۰}{\pi(۳)^{۲}} = -۷۰,۷ \ \ kg/cm^{۲}$$

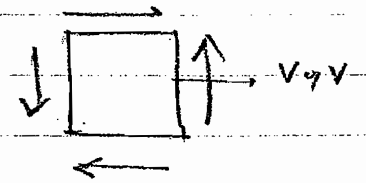
$$\tau = ۴۷,۲ \ kg/cm^{۲}$$

$$\Rightarrow \tau_{max} , \begin{matrix}\sigma_1 \\ \sigma_2\end{matrix} =$$

$\overline{CD}$: محوری $\sigma = \dfrac{-۲۰۰۰}{\pi(۳)^{۲}} = -۷۰,۷ \ \ kg/cm^{۲}$

پیچشی در این قسمت $\tau = \dfrac{۲(۳۰)(۱۰۰)}{\pi(۳^{۳})} = ۷۰,۷$

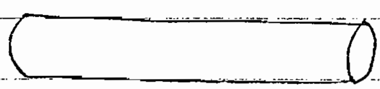
$$\Rightarrow \tau_{max} , \begin{matrix}\sigma_1 \\ \sigma_2\end{matrix} =$$

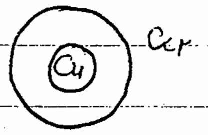


بین فشارها و کششها یکی را انتخاب میکنیم ؛

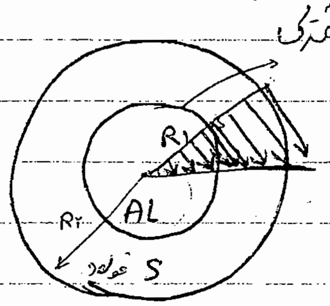
جهت تنش خیلی زیاد مهم نیست

* میله چند جنسی و پیچش 8





هر کدام از میله‌ها در هنگام اعمال پیچش در ناحیه مشترک
بین دو میله تنش‌ها یکی نیست این حجم مثل تنش عمودی . در ناحیه مشترک تنش‌ها به نسبت G ها
توزیع می شوند
ولی تنش برشی دو از ناحیه مشترک تابع تغییرات تنش خطی خواهد بود .



مثال : حداکثر بار گشتاور پیچشی مجازی را که به میله می توان وارد کرد بیابید ؟

$G_s = 3 G_{Al}$

$\tau_{w\,Al} = 500 \ kg/cm^2$

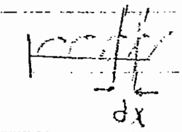
$\tau_{w\,s} = 1000 \ kg/cm^2$

$R_1 = 3 \ cm$ کوچک

$R_2 = 4 \ cm$ بزرگ خارجی

$\varphi_{Al} = \varphi_s$ چون با هم دوران می کنند $\qquad \dfrac{TL}{GJ_0}$

$\varphi = \int \dfrac{T\,dx}{GJ_0} \Leftarrow$



ولی اگر

$$\frac{T_{Al} L}{G_{Al} J_{0Al}} = \frac{T_s L}{G_s J_{0s}}$$

$$\Rightarrow \frac{T_a}{G_a J_{0a}} = \frac{T_s}{G_s J_{0s}} \Rightarrow \frac{T_a}{\frac{\pi}{2}(3^4)} = \frac{T_s}{3 \times \frac{\pi}{2}(4^4 - 3^4)}$$

$$\Rightarrow \boxed{T_s = 6/48\ T_a}$$

$\tau_{Al} = 500$ اگر $\Rightarrow$ $\tau_s =$ از ۱۰۰۰ تجاوز می‌کند ؛

بند ۳

$\Downarrow$ (1)

$$\tau_{al\,max} = \frac{2T_a}{\pi R^3} \Rightarrow 500 = \frac{2T_{al}}{\pi(3^3)} = 6750\pi$$

$$T_s = 137400\ kg \times cm$$

$$\tau_{s\,max} = \frac{T_s \times \overbrace{R_{max}}^{4}}{\frac{\pi}{2}(4^4 - 3^4)} \cong 2000\ kg/cm^2$$

که این قابل قبول نیست

چون از تنش مجاز بزرگتر است و قابل قبول نیست ؛

اگر $\tau_{s\,max} = 1000 \Rightarrow T_s = 68700\ kgcm$

$T_a = 10600\ kgcm$

$$\Rightarrow T_w = T_s + T_a = 79300\ kgcm$$

چون دیدیم اگر تنش al را به مقدار مجاز محدود کنیم تنش فولاد از مجاز بیشتر می‌شود

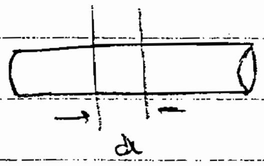
پس آمدیم و تنش مجاز فولاد را به مجاز رساندیم تنش al را حساب کردیم که از مقدار مجاز

کمتر بود پس تنش ها را یافتیم ؛

اگر $T_{w\,فولاد} = 2000$ بود $\tau_{s\,max}$ قابل قبول بود و اگر Al را برداشتیم فولاد تنها مقدار آسیبی

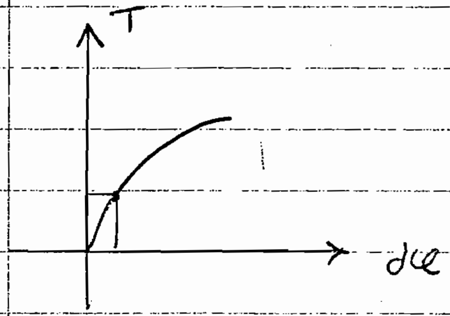
را نسبت به این مسئله می‌توانست تحمل کند . فولاد تنها می‌تواند گشتاور بیشتری را تحمل کند

انرژی کرنش پیچشی



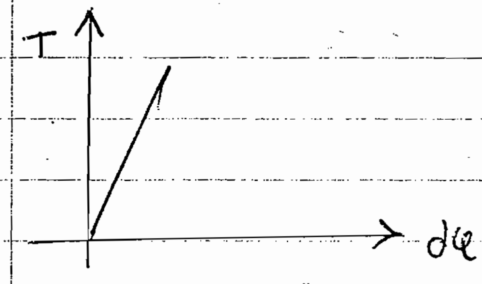
$T \quad , \quad d\varphi$

$\frac{1}{2} T\, d\varphi$



$$dU = \frac{1}{2} T\, d\varphi$$

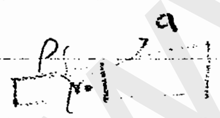
$$U = \int_0^L \frac{1}{2} T\, d\varphi$$

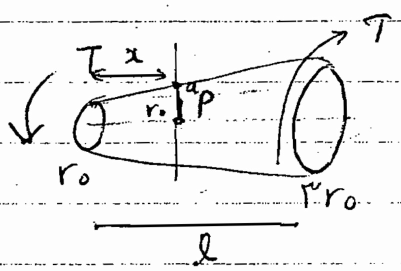


$$d\varphi = \frac{T\,dx}{G J_0}$$

$$U = \int_0^L \frac{T^2\,dx}{2 G J_0}$$

مواد خطی $\quad U = \frac{T^2 L}{2 G J_0}$





مثال ۶

$$\frac{a}{2r_0} = \frac{x}{L} \Rightarrow a = 2r_0 \frac{x}{L} \Rightarrow \rho = r_0 + a = r_0\left(1 + \frac{2x}{L}\right)$$

$$J_0 = \frac{\pi \rho^4}{2} \Rightarrow J_0 = \frac{\pi r_0^4}{2}\left(1 + \frac{2x}{L}\right)^4$$

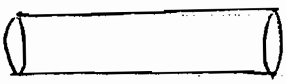
$$U=\int_0^L \frac{T^2dx}{2GJ_0}=\frac{T^2}{2G}\int_0^L\frac{dx}{J_0}=\frac{T^2}{2G}\int_0^L\frac{dx}{\frac{\pi r_0^4(1+\frac{2x}{L})^4}{2}}$$

$$=\frac{T^2}{G\pi r_0^4}\int_0^L\frac{dx}{(1+\frac{2x}{L})^4}=\frac{T^2}{G\pi r_0^4}(1+\frac{2x}{L})^{-3}\times\left(\frac{1}{-3}\times\frac{L}{2}\right)\Big|_0^L$$

$$=\frac{T^2}{G\pi r_0^4}\times\left[\frac{3^{-3}L}{-6}-\frac{1^{-3}L}{(-6)}\right]$$

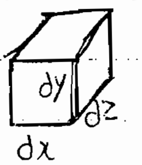
$$=\frac{T^2}{G\pi r_0^4}\left[\frac{-L}{6\times 27}+\frac{L}{6}\right]$$

یک میله را در نظر می‌گیریم ؛

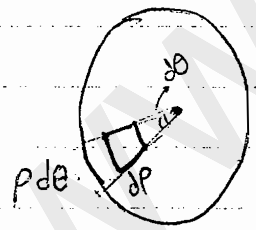


$$\tau=\frac{T\rho}{J_0}$$

المان بیرون آوردیم



$$*\,du=\frac{\tau^2}{2G}\underbrace{dx\,dy\,dz}_{dV}$$



$$du=\frac{\tau^2}{2G}\rho\, d\rho\, d\theta\, dx$$

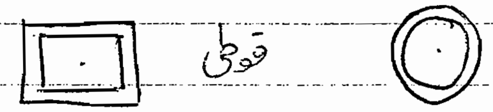
* با انتگرال‌گیری از این du باید به رابطه قبلی برای U برسیم ؛

* پیچش در مقاطع جدار نازک بسته 8

تا اینجا در مورد مقاطع توپر و توخالی صحبت کردیم با مقطع مدور.

در اینجا مقطع میله می‌تواند هر مقطع نازک باشد که جداره‌اش کوچک باشد.

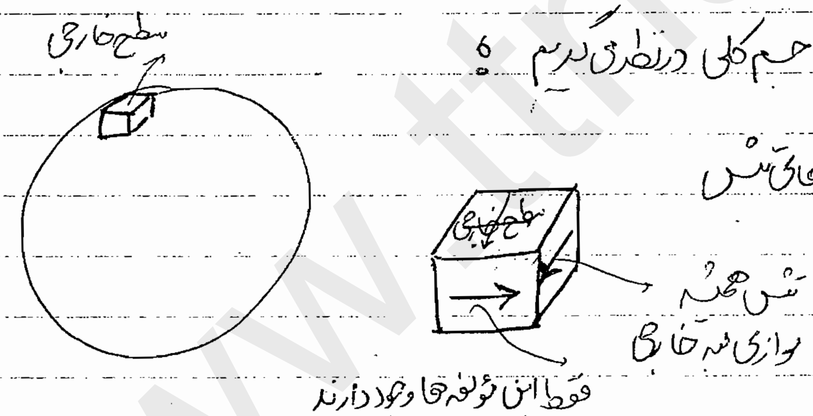
ضخامت جدار باید کم باشد.



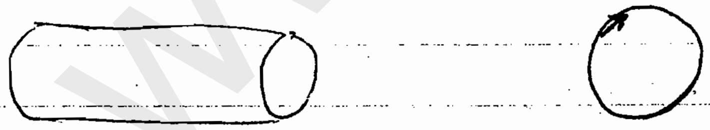
در اینجا نمی‌توانیم بگوییم که تنش با فاصله از مرکز متناسب است برخلاف مقطع مدور که مسطح باقی می‌ماند اینجا اینطور نیست چون مقطع تاب برمی‌دارد ولی مسلماً مقطع مسطح باقی نخواهد ماند.

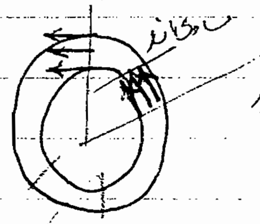
یک المان برای یک حجم کلی در نظر می‌گیریم.

در سطح خارجی مؤلفه‌های تنش صفراند (۲)



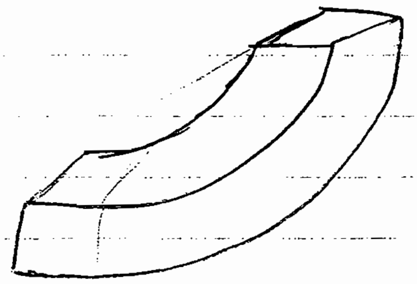
* در مقطع مدور هم دیگر تنش برشی باشد باید موازی لبه خارجی باشد.

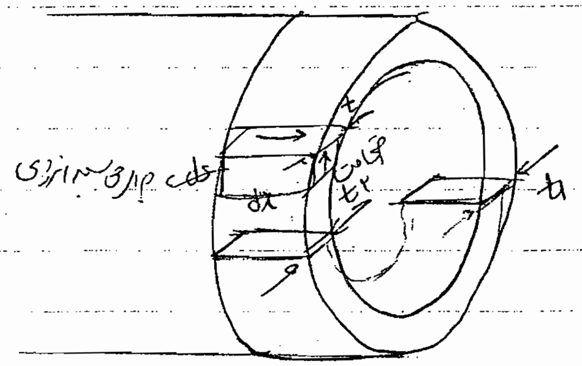


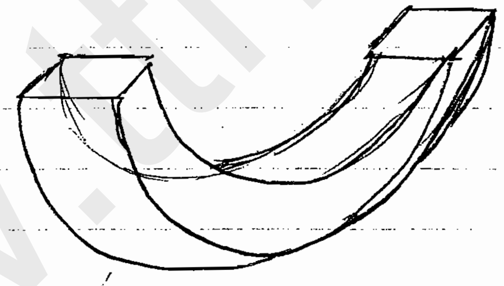


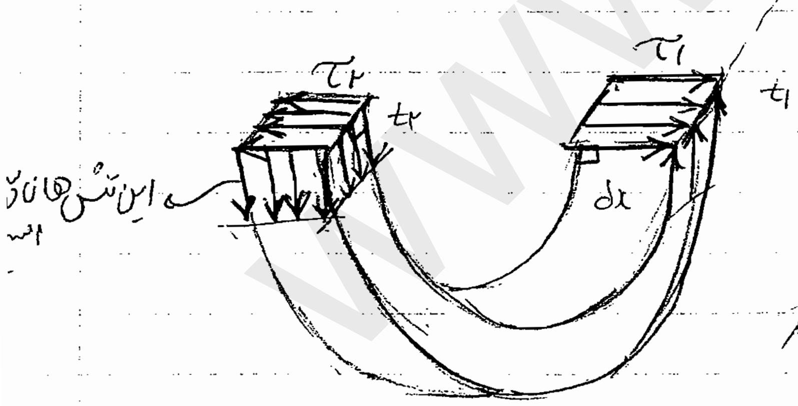
با تقریب نسبتاً خوب می‌توانیم فرض کنیم تنش برشی ثابت می‌ماند و موازی لبه‌ها است.

این فرض خطا دارد









تنش برشی در پیچش هم در امتداد طول میله است هم در مقطع

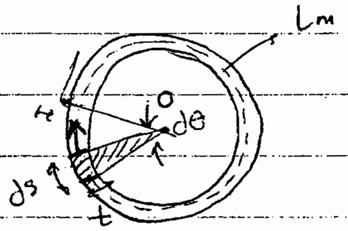
* τ_1 و τ_2 با هم الزاماً مساوی نیستند ولی با هم موازی اند

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \tau_1 (dx\, t_1) - \tau_2 (t_2\, dx) = 0$$

$$\tau_1 t_1 = \tau_2 t_2$$

می توانیم رابطه را به صورت زیر بنویسیم 8

$$\boxed{\tau t = cte}$$



$$dF = \tau t\, ds$$

$$\int dM_O = \int \tau t\, ds \cdot \overline{OH}$$

* $\boxed{T = \oint \tau t\, ds \cdot \overline{OH}}$ برای هر شکل کلی

* $ds \cdot \overline{OH} = 2 \times$ مساحت مثلث هاشور خورده
* $\tau t =$ مقدار ثابتی است

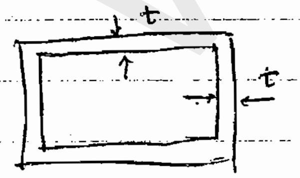
$$T = \tau t \oint ds \cdot \overline{OH}$$

$$= \tau t \cdot 2A_m$$

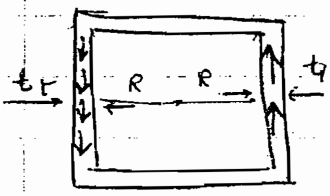
A_m مساحت محصور در خط میانی
A_m مساحت ،، در جدار نازک

$$\boxed{\tau = \frac{T}{2A_m t}}$$

اگر ضخامت ثابت باشد تنش در همه جا یکی است
ولی اگر یک جدار ضخامت بیشتری داشته باشد تنش کمتر است



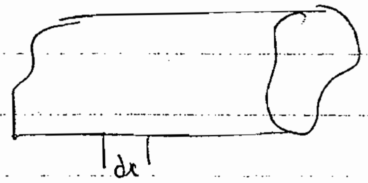
$\int \frac{T\,dx}{JG}$



$t_1 < t_2$

تنش دیگر به فاصله کاری ندارد با وجود این که
R ها مساوی اند ولی تنش های ۲ طرف یکی نیستند

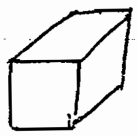
$$U = \frac{1}{2} T \varphi$$



$$d\varphi = \frac{1}{2} T\, d\varphi \quad ①$$

برای یک حلقه

$d\varphi$ برای جزء کوچک dx



برای یک المان $\quad d(du) = \underbrace{\frac{\tau^2}{2G}}_{\text{در واحد حجم}} . dv$

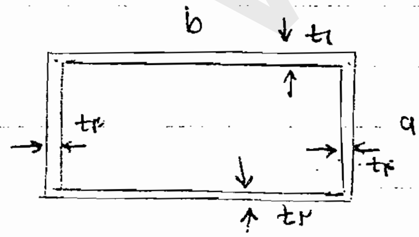
$$* \quad d(du) = \frac{\tau^2}{2G}\, dx \,.\, t \,.\, ds$$ « شکل در صفحات قبلی »

$$* \quad du = \oint \frac{\tau^2}{2G}\, t\, dx\, ds$$

$\tau t = cte$

$$* \quad du = \frac{\tau^2 t^2}{2G} \oint_s \frac{ds}{t}\, dx = \frac{\tau^2 t^2 dx}{2G} \oint_s \frac{ds}{t}$$

* چون dx برای المان حلقه مقدار ثابتی است :



$$* \quad \oint \frac{ds}{t} = \frac{b}{t_1} + \frac{b}{t_2} + \frac{a}{t_3} + \frac{a}{t_4}$$

اگر ثابت نباشد تمام محیط را باهم جمع می کنیم :

* $dU = \frac{T^2}{4A_m^2 G} dx \oint \frac{ds}{t}$ ②

از ① و ② می توان $d\varphi$ را حساب کرد $\Rightarrow$

$$d\varphi = \frac{T\,dx}{4A_m^2 G} \oint \frac{ds}{t}$$

در مقطع مدور $d\varphi$ $\frac{T\,dx}{G J_0}$

در تمام مقاطع دیگر نیز شبیه با فرمول بالا $d\varphi = \frac{T\,dx}{G J_t}$

* ثابت پیچش J_t :

* $$J_t = \frac{4A_m^2}{\oint \frac{ds}{t}}$$

$$du = \frac{T^2\,dx}{2 G J_t}$$

* برای همه مقاطع انرژی و دوران از روابط بالا بدست می آید:

اگر t ثابت باشد $J_t = \frac{4A_m^2 t}{L_m}$

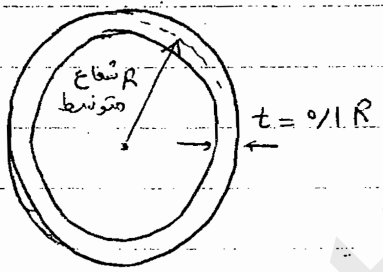
طول خط چین یا محیط خط چین

محیط جدار نازک یعنی متوسط آن را یک خط کشیده و محیط آن را حساب کنیم:

$$\varphi = \int_0^L \frac{T\,dx}{GJ_t} \qquad\qquad U = \int_0^L \frac{T^2\,dx}{2GJ_t}$$

اگر T و J_t هر دو ثابت باشند:

$$\begin{cases} \varphi = \dfrac{TL}{GJ_t} \\[2ex] U = \dfrac{T^2L}{2GJ_t} \end{cases}$$



مثال ۶: فرمولهای دقیق و تقریبی جدار نازک را در مورد مقطع نشان داده شده مقایسه کرده و خطای فرمولهای جدار نازک را تعیین کنید؟

حل ـ دقیق: $\tau = \dfrac{T\rho_{max}}{J_0}$ که $J_0 = \dfrac{\pi}{2}\left((1.05R)^4 - (0.95R)^4\right)$

$$J_0 = \frac{\pi}{2} \times 0.401\,R^4$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{T(1.05R)(2)}{\pi \times 0.401\,R^4} \quad (1)$$

جدار نازک: $\tau' = \dfrac{T}{2A_m t} = \dfrac{T}{2\pi R^2 \times 0.1R} = \dfrac{T}{0.2\pi R^3}$

$$\Rightarrow \frac{\tau'}{\tau} = \frac{1/0.2}{\dfrac{(1.05)(2)}{0.401}} = 0.954$$

خطا در حدود ۵٪ است

در فرمول تقریبی تنش را در جدار نازک ثابت گرفتیم ولی در فرمول دقیق تنش در جدار حالت خطی دارد نه ثابت.

بنابراین یک خطایی داریم که در حدود ۵ ٪ است و در کارهای هندسی قابل قبول است

و این ضخامت ۱۰ ٪ قابل قبول است یعنی ضخامت در حدود ۱۰ ٪ شعاع یا حتی کمتر باشد می‌توان

آن را جدار نازک گرفت و از فرمول‌های آن استفاده کرد

دیگر فقط شعاع را باید با نصف ضخامت کمتر مقایسه کرد و ۱۰ ٪ آن را در نظر گرفت؛

ادامه حل:
$$\varphi = \frac{TL}{GJ_0} = \frac{TL}{G} \times \frac{1}{\frac{\pi}{2} \times \%401 R^4} = \frac{2TL}{\pi G \times \%401 R^4}$$

جدار نازک
$$\varphi' = \frac{TL}{GJ_t}$$

$$\Rightarrow \frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{J_0}{J_t} = ?$$

$$J_t = \frac{4A_m^2}{\int \frac{ds}{t}} = \frac{4(\pi R^2)^2 \times 0/1R}{2\pi R} = 0/2\pi R^4$$

ضخامت

L_m محیط دایره متوسط

$$\Rightarrow \frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{\pi \times /401 R^4}{2 \times 0/2\pi R^4} = 1/0025$$

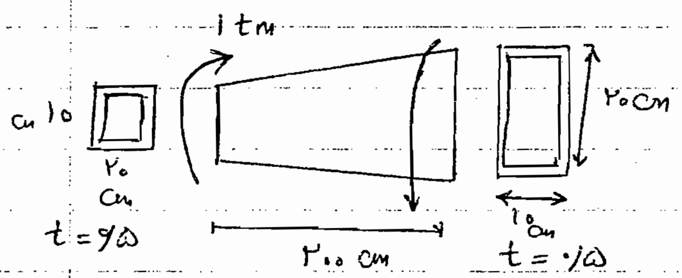
خطا می‌شود ۲/۵ در ۱۰۰۰ که خیلی کم است و فرمول را می‌شود استفاده کرد

در حالت کلی $\underline{GJ_t}$ را صلبیت پیچشی گویند

62 ۸۴/۲/۱۰ به نام خدا جلسه ۱۷

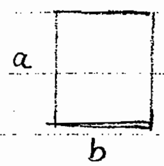
$10 + 5M = 20$ ، $a = 20 + 5x$

0	۲۰	0	۱۰
۲۰۰	۱۰	۲۰۰	۲۰



$G = 0.8\times10^{6}\ kg/cm^2$

مثال ؟
شکل روبرو مقطع جدار نازکی را نشان می دهد که ضخامت آن ثابت و مساوی 0.5^{cm} می باشد ابعاد مقطع مطابق شکل به طور خطی تغییر می کند بزرگترین تنش برشی و مقدار دوران میله را بیابید ؟



$$\begin{cases} a = 10 + \dfrac{(20-10)}{200}x = 10 + 0.05x \\ b = 20 - 0.05x \end{cases}$$

مساحت داخل جدار نازک $A_m = ab = (10 + 0.05x)(20 - 0.05x)$

$$\tau = \frac{T}{2A_m t} = \frac{1\times10^{3}\times10^{2}}{2(10+0.05x)(20-0.05x)(0.5)}$$

τ وقتی max است که مخرج min A_m کمترباشد!

$$\frac{dA_m}{dx} = 10 - 0.1x = 0 \Rightarrow x = 100$$

$$\begin{cases} A_m \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow 200$$

$$\begin{cases} A_m \\ x=100 \end{cases} \Rightarrow 15\times15 = 225$$

یعنی در این x مقدار A_m ماکزیمم مقدار خود می شود
یعنی کمترین مقدار A_m در انتها اتفاق می افتد ؟

$(A_m)_{min} = 200\ cm^2$

$$\tau_{max} = \frac{10^{5}}{2\times200\times\frac{1}{2}} = 500\ kg/cm^2$$

اگر از τ مشتق می گیریم باید مقدار ۲ انتها را نیز کنترل کنیم و کمترین مقدار را اسم

$$\varphi = \int_0^L \frac{T\,dx}{G J_t} \qquad J_t = \frac{4 A_m^2}{\oint \frac{ds}{t}} = \rightarrow$$

$$* \quad \oint \frac{ds}{t} = \frac{2(a+b)}{0.5} = 120$$

t ثابت
ds هم می‌شود
محیط

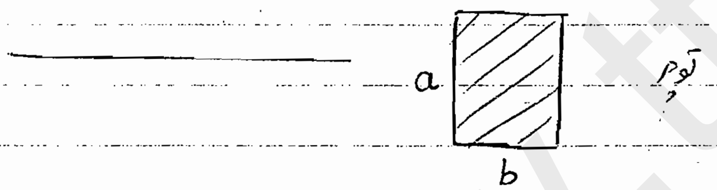
چون جمع a+b مستقل از x می‌شود + و − خنثی می‌شود؛

$$* \quad J_t = \frac{4(10+0.05x)^2(20-0.05x)^2}{120}$$

$$\varphi = \frac{T}{G} \times 30 \int_0^{200} \frac{dx}{(10+0.05x)^2(20-0.05x)^2} = 0.0160$$

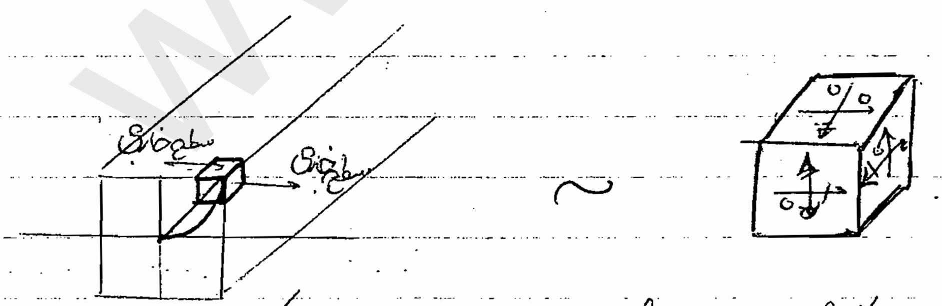
باید ۳ رقم معنی‌دار باشد؛

* مقطع مستطیل 8



* با توجه به تئوری از آنجایی که مقطع تاب برمی‌دارد بنابراین فرمول مقطع مدور در اینجا صادق نیست؛

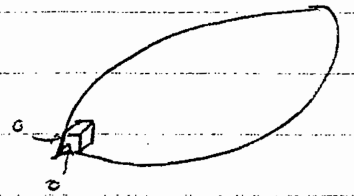
کلاً هرجا مقطع تاب بردارد نمی‌توان رابطه تنش با فاصله از مرکز را توجیه کرد؛



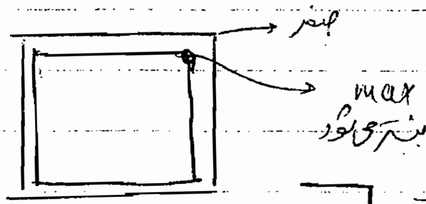
در دورترین نقاط مقطع یعنی گوشه‌ها تنش برشی صفر است برخلاف مدور که مقدار در دورترین نقطه ماکزیمم می‌شود؛

به طور کلی هر جا که شکستگی در گوشه داشته باشیم تنش برشی صفر است چون مؤلفه تنش برشی که عمود بر جدار بود صفر می شد پس دوتا مؤلفه در ۲ امتداد صفر می شود پس حتماً آن هم دار صفر است ؛

این نکته همیشه صادق است و به پیچش مقطع بستگی ندارد

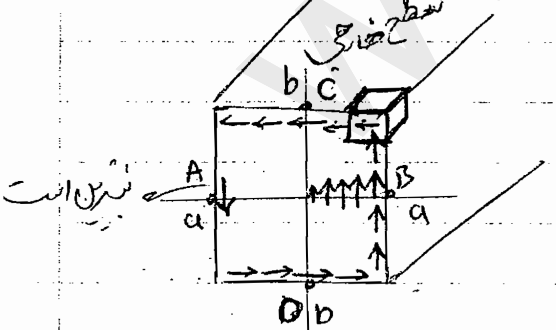


در جدار نازک هم در گوشه‌های بیرونی تنش برشی صفر است اما در گوشه داخلی تنش برشی max می شود معمولاً



گوشه داخلی را مدور می کنند تا تمرکز تنش کمتر شود ؛

به خصوص اگر بارگذاری دینامیکی باشد چون تنش ها به سرعت عوض می شوند پیچش مرتباً تغییر می کند دیگر فرصت تطبیق تنش ها با هم نیست در نتیجه قسمت گوشه خیلی سریع دچار ترک و شکست می شود.



در قطر افقی تنش از مرکز به طرف لبه رو به افزایش است اما مقدار آن خطی تغییر نمی کند

تکمیل * در قطر قائم هم این مقدار تنش زیاد می شود اما نه خطی ؛

* بیشترین مقدار تنش در مجاورت ضلع a از همه جا بیشتر است یعنی روی قطر افقی

$$(\tau_{max})_{A,B} = \frac{T}{\alpha\, a b^2}$$

$\frac{a}{b}$	α	β	η
۱	۰/۲۰۸	۰/۱۴۱	۱
۱/۵	۰/۲۳۱	۰/۱۹۶	۰/۸۵۹
۲	۰/۲۴۶	۰/۲۲۹	۰/۷۹۵
۳	۰/۲۶۷	۰/۲۶۳	۰/۷۵۳
۴	۰/۲۸۲	۰/۲۸۱	۰/۷۴۵
۶	۰/۲۹۹	۰/۲۹۹	۰/۷۴۳
۸	۰/۳۰۷	۰/۳۰۷	۰/۷۴۲
۱۰	۰/۳۱۳	۰/۳۱۳	〃
∞	۱/۳ = ۰/۳۳۳	۱/۳ = ۰/۳۳۳	〃

α ، $\frac{a}{b}$ از محاسبات مربوط به تئوری الاستیسیته بدست می آیند

اگر اعداد بالا نشان داده نشده باید با درونیابی مقدار مورد نظر را یافت

$$\varphi = \int_0^L \frac{T\,dx}{G J_t}$$

$$\boxed{J_t = \beta a b^3}$$

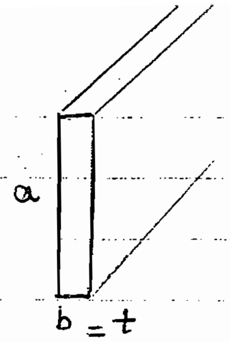
β بدون بعد اما با a و b تغییر می کند؛

* تنش در نقاط C و D ،8

$$\boxed{\tau_{c,d} = \eta\, \tau_{max}}$$

η معمولاً از یک
کوچکتر است ولی اگر مقطع مربع باشد
$\eta = 1$ است

$a >> b$

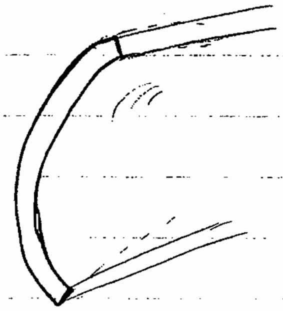


* می‌توانیم b را برابر t بگیریم 8

$$\tau_{max} = \frac{T}{\frac{1}{3}at^2}$$

اگر حدود ۱۰ برابر باشد می‌شود از فرمول بالا استفاده کرد و خطا را صرف‌نظر کرد؛

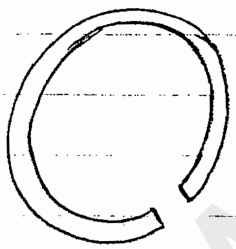
$$J_t = \frac{1}{3}at^2$$



برای این مقطع هم می‌شود این فرمول ها را بکار برد

a محیط کمان است!

جدار نازک باز

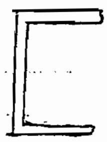


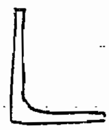
فرمول بالا در این مقطع هم صادق است

تقسیم به مستطیل می‌کنند
جداگانه حساب می‌کنیم
$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3$

$$T = \sum_{i=1}^{3} T_i$$

* توانایی تاب خوردن مقاطع جدار نازک باز زیاد است
* هرچه مستطیل باریک‌تر شود b کوچک‌تر شود تاب خوردن بیشتر می‌شود

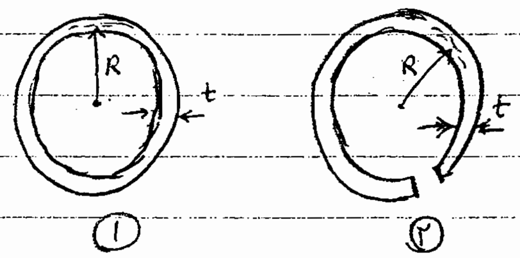




تیرآهن I در مقابل پیچش خیلی سریع از حالت مقطع خارج می‌شود؛
جایی که پیچش داریم باید مقاطع مدور بکار ببریم یا مقاطع جدار نازک البته که مقدار تاب برداشتن آن کم است.

فرمول هایی که برای مقاطع I و ... در کتابهاست برای فقط یک حالت خاص است که پیچش در ۲ انتها وارد می‌شود یعنی پیچش یکنواخت است.

uniform torsion



مثال: مقاومت و سختی ۲ لوله جدار نازک را که یکی بسته و یکی باز است مقایسه کنید؟

تحت پیچش یکسان کدام مقطع ضعیف‌تر و کدام یک قوی‌تر است؟

با تنش ثابت: هرکدام که لنگر بیشتری بگیرد قوی‌تر است و هرکدام که لنگر کمتری بگیرد ضعیف‌تر است

$$\tau_1 = \frac{T}{2A_m t} \qquad \tau_2 = \frac{T}{\frac{1}{3} a t^2}$$

$$\frac{\text{مقاومت مقطع ۱}}{\text{۲ 〃 〃}} = \frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{2A_m t}{\frac{1}{3} a t^2} = \frac{2(\pi R^2)}{\frac{1}{3}(2\pi R)t} = \frac{3R}{t}$$

جدار نازک را معمولاً وقتی می‌گوییم که $\frac{R}{t}$ از ۱۰ بزرگتر باشد.

* پس مقطع جدار نازک بسته قوی‌تر از مقطع جدار نازک باز است مثلاً حدود ۳۰ برابر $3 \times \overset{10}{\frac{R}{t}} = 30$ قوی‌تر است.

$$* \quad d\varphi = \frac{T\,dx}{G J t}$$

$$\frac{\text{سختی مقطع ۱}}{\text{۲ 〃 〃}} = \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} = \frac{J_1 t}{J_2 t} = \frac{\frac{4(\pi R^2)^2}{\frac{2\pi R}{t}}}{\frac{1}{3}(2\pi R)t^3}$$

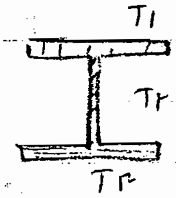
*

$$= \frac{3R^2}{t^2}$$

* پیچش سفتی مقطع ① برای $\frac{R}{t} \approx 10$ حدود ۳۰۰ برابر سخت‌تر از مقطع باز است

یا به عبارتی φ آن کمتر است.

* در مقابل پیچش مقطع باز خیلی ضعیف عمل کرده و خیلی زود زیر اثر تنش پیچشی می‌شود ؟



$$T = T_1 + T_2 + T_3 \qquad ①$$

رابطه $(n-1)$

$$\underbrace{d\varphi_1 = d\varphi_2 = d\varphi_3 = d\varphi}_{\text{n رابطه n مجهول}} = \frac{T\,dx}{G J_t}$$

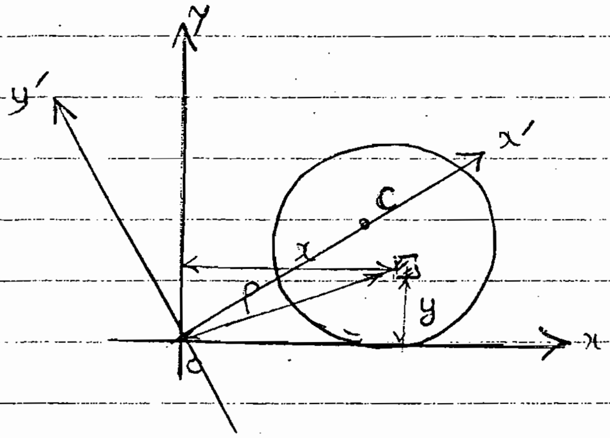
$$\tau_{i_{max}} = \frac{T t_i}{\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n} a_i t_i^3}$$

$\varphi \rightarrow$

$$\text{کل مقطع}\quad J_t = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n} a_i t_i^3$$

* وقتی در مقطع بسته t متغیر باشد در t بیشتر تنش کمتر داریم ولی در جدار نازک باز t در صورت کسر است یعنی بطوری که t بزرگتر باشد تنش آن جا بیشتر است.

مشخصات هندسی مقاطع مانند
محورهای اصلی اینرسی
رسم منحنی‌های برش و ... می‌کنند



ممان سطح 8

ممان استاتیک یا لنگر اول یا گشتاور اول

$\boxed{\text{عزم}}$

* $Q_x = \int_A y\,dA$ ممان استاتیک نسبت به محور x از بعد $(L)^3$

* $Q_y = \int_A x\,dA$

اگر یک نقطه به مختصات $\bar{x}$ و $\bar{y}$ به صورت زیر تعیین کنیم

$$\begin{cases} \bar{x} = \dfrac{\int x\,dA}{A} \\[2ex] \bar{y} = \dfrac{\int y\,dA}{A} \end{cases}$$

این نقطه را مرکز مقطع گویند.

اگر مقطع یک سطح جرم دار یا وزن دار فرض شود با جرم مخصوص یکسان این نقطه همان مرکز جرم یا مرکز ثقل آن است

در غیر این صورت آن را مرکز مقطع می گویند C.

* اگر نیروهای گسترده روی تمام سطح باشد و شدت آن یکسان باشد برآیند این بار از نقطه C عبور می کند.

ممان اینرسی یا گشتاور دوم یا گشتاور ماند 8

* نسبت به محور x $I_x = \int y^2 dA$ ابعاد (L^4)

* نسبت به محور y $I_y = \int x^2 dA$

حاصلضرب اینرسی نسبت به محورهای x و y * $I_{xy} = P_{xy} = \int xy\,dA$

ممان اینرسی نسبت به نکته نقطه O یا ممان اینرسی قطبی * $I_o = \int_A \rho^2 dA$ ، J_o

Q_x و Q_y می تواند مثبت یا منفی باشد اما ممان اینرسی ها I_x و I_y و I_o همیشه مثبت اند
اما I_{xy} می تواند مثبت یا منفی باشد

* $I_x + I_y = I_o$ ①

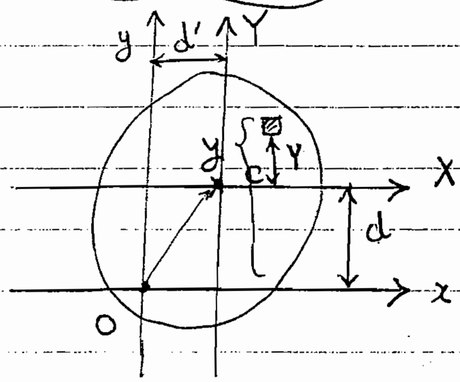
* $I_x + I_y = I_x' + I_y'$ برای دو دستگاه که از یک نقطه رد می شوند جمع ممان اینرسی ها با هم برابر است

* شعاع گردش یا شعاع ژیراسیون $r = \sqrt{\frac{I}{A}}$ ابعاد (L)

* $r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$, $r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$, $r_o = \sqrt{\frac{I_o}{A}}$

با توجه به ① و تقسیم طرفین به A داریم

$$\boxed{r_x^2 + r_y^2 = r_o^2}$$



$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_A (Y+d)^2 dA = \int_A Y^2 dA + \int_A d^2 \cdot dA + \int_A 2Yd \cdot dA$$

$$= I_X + d^2 \cdot A + 2d\underbrace{\cancel{\int Y dA}}_{0}$$

* ممان استاتیک نسبت به محوری که از مرکز (C) عبور میکند صفر است چون $\bar{Y} = 0 \Leftarrow \int YdA = 0$

* $$\boxed{I_x = I_X + A \cdot d^2}$$

$$I_y = \int x^2 dA = I_Y + A \cdot d'^2$$

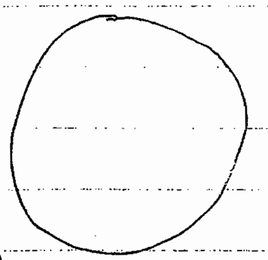
* $$\boxed{I_y = I_Y + A \cdot d'^2}$$

* $$\boxed{I_O = I_C + \overline{OC}^2 \cdot A}$$

* $r_x^{2} = r_{x}^{2} + d^{2}$

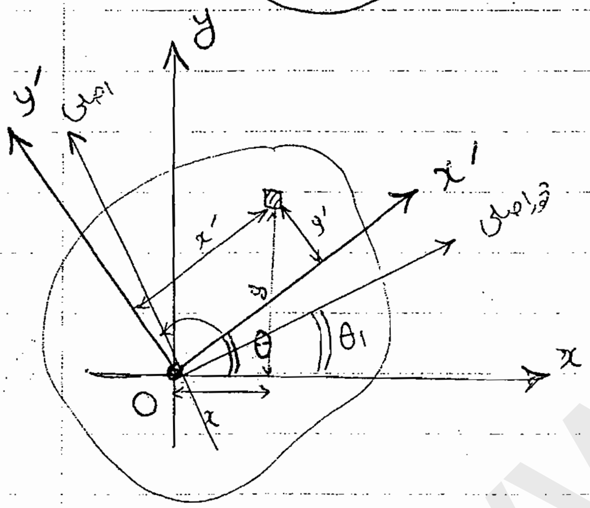
* $r_y^{2} = r_{y}^{2} + d'^{2}$

* $r_o^{2} = r_c^{2} + \overline{oc}^{2}$



$$P_{xy} = P_{xy} + A \cdot x_c \cdot y_c$$

علامتش ورد هم است



* روابط حاصل از دوران شبیه روابط تنش و تنجش اند ؟

با تبدیل $\sigma \rightarrow I$ و $\tau \rightarrow P$

* $\sigma_\theta = \dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\theta - \tau_{xy}\sin 2\theta$

* $\tau_\theta = \dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta$

* $I_\theta = \dfrac{I_x+I_y}{2} + \dfrac{I_x-I_y}{2}\cos 2\theta - P_{xy}\sin 2\theta = I_{x'}$

* $P_\theta = \dfrac{I_x-I_y}{2}\sin 2\theta + P_{xy}\cos 2\theta = P_{x'y'}$

*

محور اول x' و عمود بر آن در جهت مثلثاتی

می‌توان این روابط را به صورت زیر استنباط کرد :

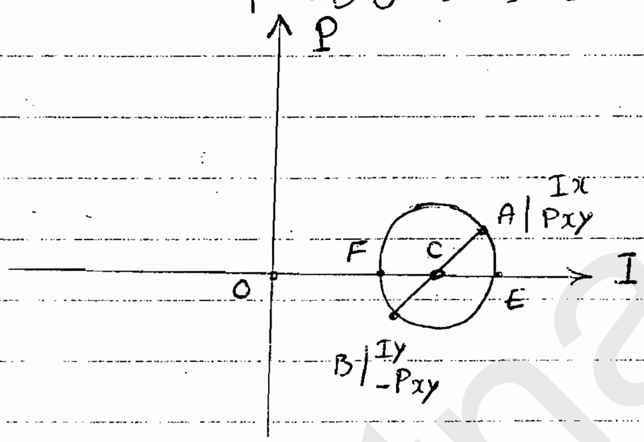
$$\begin{cases} x' = x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' = -x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

$$I_x = \int y^2 \, dA$$
$$I_y = \int x^2 \, dA$$
$$I_{x'} = \int y'^2 \, dA$$

* در اینجا هم دایره مور را عیناً مثل دایره مور تنش می‌شود رسم کرد :

$\sigma \longrightarrow I$

$\tau \longrightarrow P$



I_{max} OE

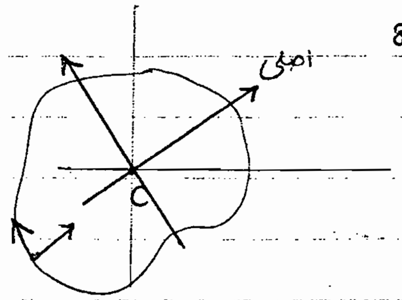
I_{min} OF

* دو تا محور عمود بر هم داریم پس به هر نقطه که I حاصلضرب در آن آنجا صفر است یعنی $P_{xy} = 0$:

* $$\tan 2\theta_1 = \frac{-2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

* $$\boxed{\tan 2\theta_1 = \frac{-2P_{xy}}{I_x - I_y}}$$ زاویه محورهای اصلی

اگر این محورهای اصلی را نسبت به مرکز سطح تعیین کنیم :

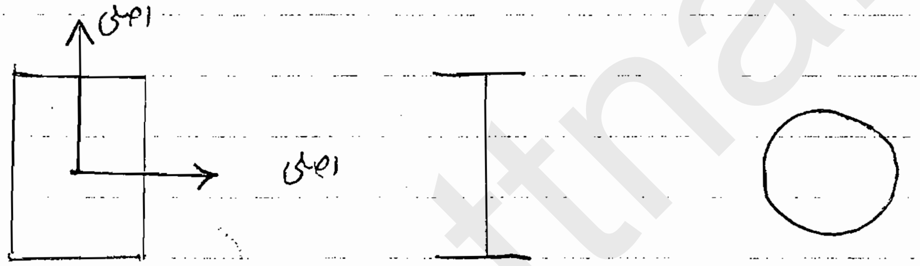


* به این محورها محورهای اصلی مرکزی اینرسی گویند :

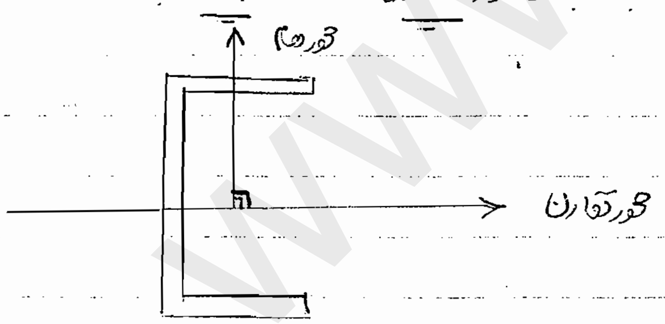
الزاماً با محورهای اصلی دیگر نقاط موازی نیستند
در هر نقطه امتداد دلخواهی دارند

در تقاوت محورهای اصلی مرکزی اینرسی اهمیت دارند :

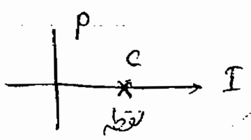
* اگر مقطعی نسبت به هر دو محور قرینه باشد محورهای اصلی مرکزی همان محور تقارن شکل اند :



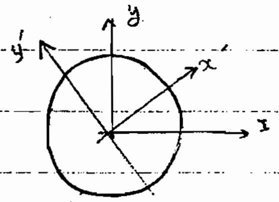
* اگر یک محور تقارن هم داشته باشیم : Pxy نسبت به آن محور صفر می‌شود محور دوم عمود بر آن می‌شود :

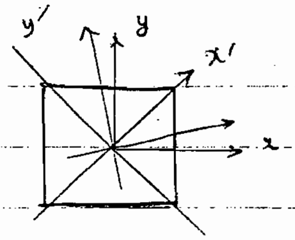


* در یک دایره هر محور آن را می‌شود یک محور تقارن در نظر گرفت همه محورهای آن محور اصلی می‌شوند :



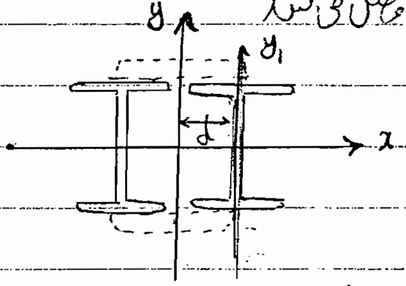
اگر دایره دور یک نقطه شود همه محورها محورهای اصلی می‌شوند





دایره محور آن یک نقطه
می‌شود.

در ایران تیرها را از پهلوی هم قرار دادن دو تیر شبیه هم می‌سازند و به هم وصل می‌کنند

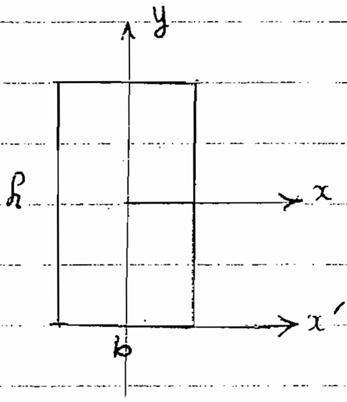


اگر ممان اینرسی یکی را نسبت به محور x داشته باشیم: I_{x_1}

* ممان کل مقطع نسبت به محور x می‌شود: $2I_{x_1}$

* ممان یک مقطع از این دو نسبت به محور y می‌شود: $I_1y = Iy_1 + Ad^2$

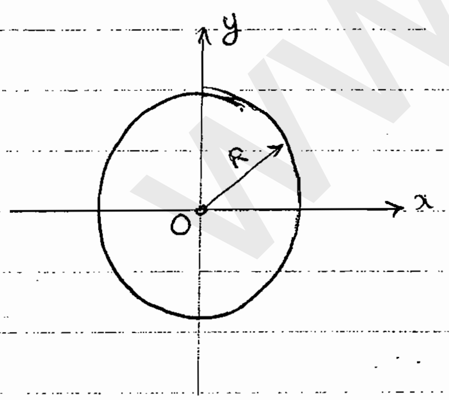
* ممان کل نسبت به محور y می‌شود: $Iy = 2I_1y = 2Iy_1 + 2A.d^2$



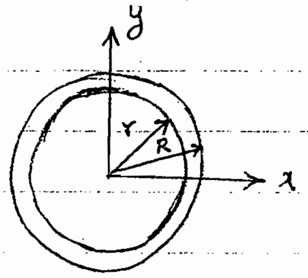
* $I_x = \frac{bh^3}{12}$ * $r_x^2 = \frac{h^2}{12}$

* $I_y = \frac{hb^3}{12}$ * $r_y^2 = \frac{b^2}{12}$

* $I_{x'} = \frac{bh^3}{3}$

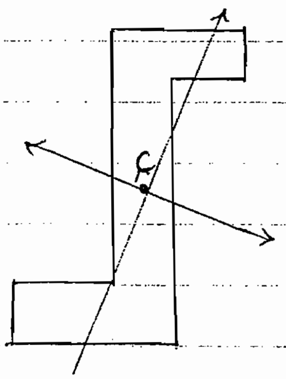


* $I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{4}$ * $r_x^2 = r_y^2 = \frac{R^2}{4}$



$$I_x = I_y = \frac{\pi}{4}(R^4 - r^4)$$

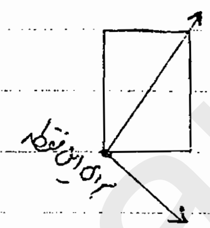
$$* \quad r_x^2 = r_y^2 = \frac{R^2 + r^2}{4}$$



محور اصلی مرکزی

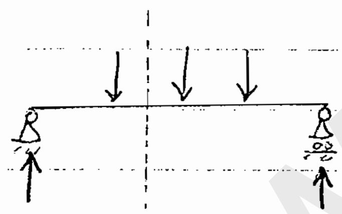
سطوح باید دورترین فاصله

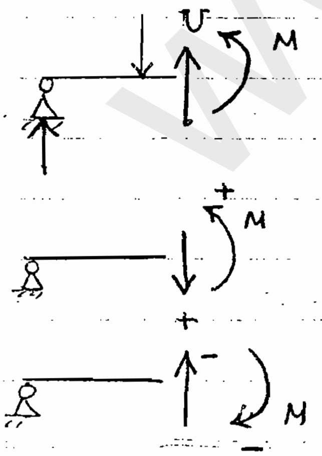
را تا محور داشته باشند



چون نسبت به یک محور ممان max و نسبت به یکی min است پس یک محور باید طوری باشد که تقریبی سطحها کمترین فاصله را تا آن داشته باشند.

* منحنی های نیروی برشی و لنگر خمشی 8





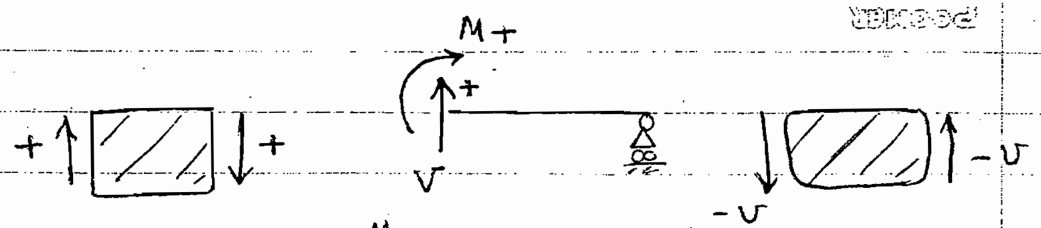
V نیروی برشی

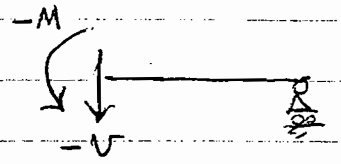
M لنگر خمشی

قرارداد علامت V رو به پایین +

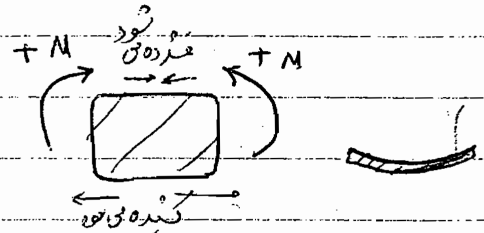
M در جهت مثلثاتی +

یک تکه از تیر را بیرون می‌آوریم



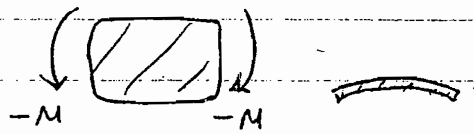


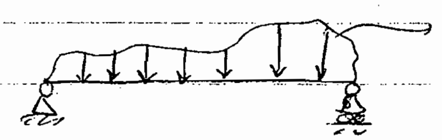
** V در جهت عقربه ساعت +



از راست به چپ گشتاور M + است

* گشتاور خمشی + بالای تیر را فشرده و پایین تیر را کشیده می‌کند.





معمول‌تر است

* $\dfrac{dV}{dx} = q$ ↑+ رو به بالا * $\dfrac{dV}{dx} = -q$ ↓+ رو به پایین

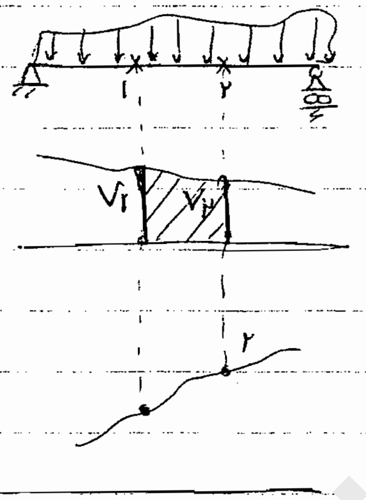
* $\dfrac{dM}{dx} = V$

* $\dfrac{d^2M}{dx^2} = \dfrac{dV}{dx} = q$

اگر $q=0$ باشد V مقدار ثابت و M یک خط

〃 $q=cte$ 〃 V یک خط و M منحنی است

* $V_2 - V_1 = \int_1^2 q\,dx$



تغییر نیروی برشی از نقطه ① تا ② = مقدار بار وارده بین دو نقطه ① و ②

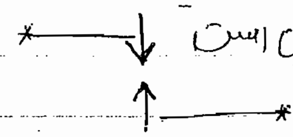
* $M_2 - M_1 = \int_1^2 V\,dx$

تغییر لنگر خمشی از نقطه ① تا ② = مساحت سطح زیر منحنی نیروی برشی بین ① و ②

$V = +$ (جمع نیروهای سمت چپ) $\uparrow$

$= -$ (جمع نیروی سمت راست) $\uparrow$

جهت V در این حالت رو به پایین است

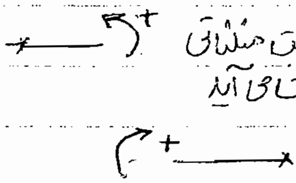


$M = +$ (جمع لنگرهای سمت چپ)

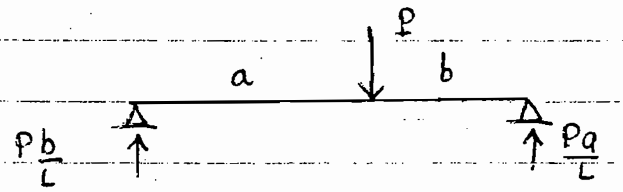
$-$ (جمع لنگرهای سمت راست)

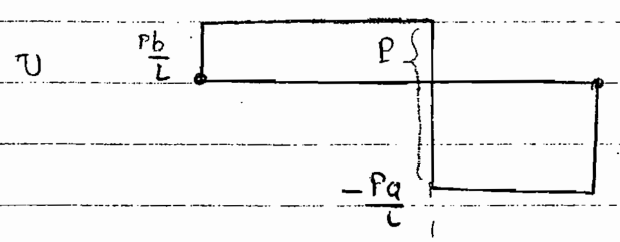
جمع لنگرهای سمت راست

M در جهت مثلثاتی + بدست می آید



مثال 8

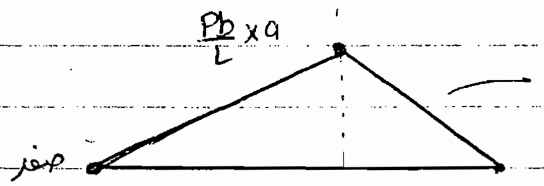




$dx_1 - dx_2$

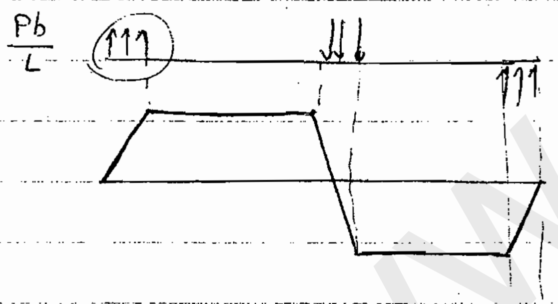
در نقطه P بین dx این طرف و dx در طرف مقابل برابر بار وارده است

تغییر گشتاور برابر مساحت زیر V است



تغییر گشتاور منفی است چون نمودار V زیر محور قرار گرفته

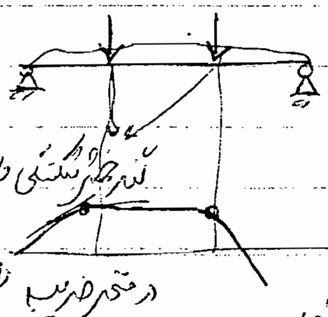
خطوط عمودی نمودار نیروی برشی هستند باید پیوسته باشد روی خط قائم نیروی برشی مبهم است بینهایت نیروی برشی خواهیم داشت



شکل اصلی منحنی باید به این شکل باشد
چون امکان ندارد که نیرو دقیقاً در یک
نقطه وارد شود بنابراین به تدریج
نیروی برشی افزایش می یابد تا به $\frac{Pb}{L}$ می رسد

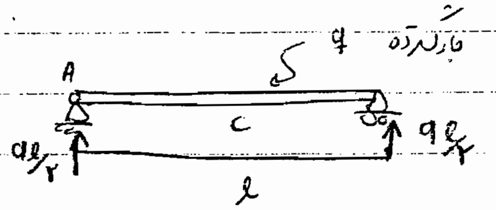
* وقتی بار متمرکز داشته باشیم نیروی برشی به اندازه بار متمرکز تغییر می کند

* گشتاور خمشی هم در نقطه بار متمرکز شکستگی دارد

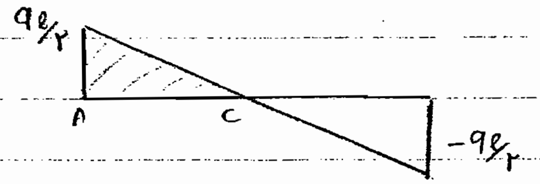


در متمرکز شیب زاویه دو طرف بار متمرکز متفاوت خواهد بود ⟸ شکستگی گشتاور خمشی داریم

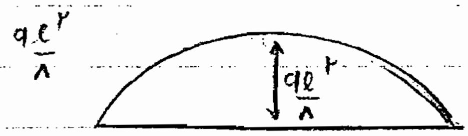
مثال:



شیب = شدت بار
$-ql$



$$A_{A-C} = \frac{1}{2}\,\frac{ql}{2}\,\frac{l}{2} = \frac{ql^2}{8}$$



دوباره به صفر می‌رسد

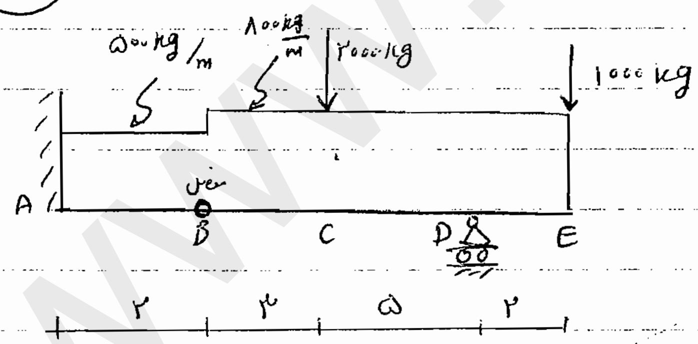
از A تا C به اندازه این
مساحت به لنگر خمشی اضافه
می‌شود؛

$$\max V = \frac{ql}{2}$$

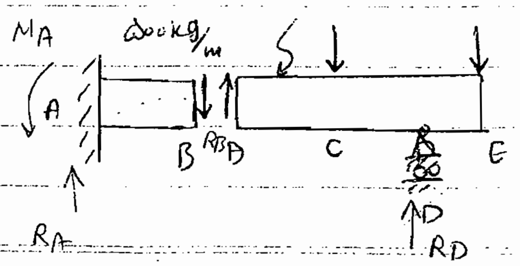
$$\max M = \frac{ql^2}{8}$$

* نتیجه این مثال و مثال قبل را می‌توان در مسائل بکار برد

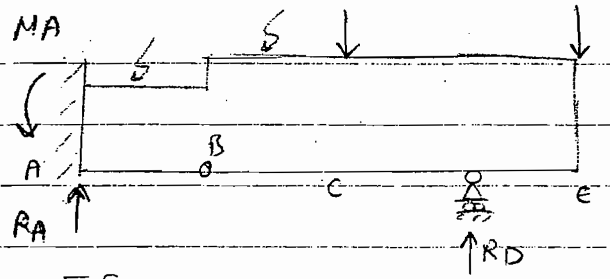
مثال:



می‌شود مسئله را جدا جدا حل کرد با یک برش B



اول باید عکس العمل‌ها را بدست آورد.



در نقطه B ، لنگر خمشی صفر است
چون از این طرف به آن طرف
B لنگری منتقل نمی‌شود

$\sum F_y = 0$

$\sum M = 0$

لنگر خمشی $M_B = 0$

بار گسترده

$+ \; M_B^R$ (راست) $= -1000 \times 10 + 8R_D - 2000 \times 3 - (800 \times 10)(5) = 0$ به سمت داخل صفحه

6000
10000
16000

$\Rightarrow R_D = 7000\,kg$

$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_A - (500 \times 2) - (800)(10) - 2000 - 1000 + 7000 = 0$

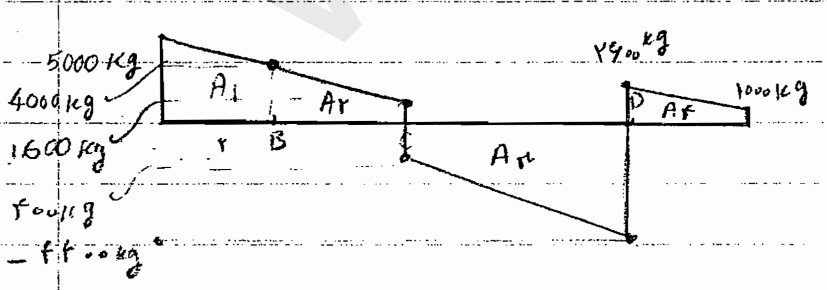
$\Rightarrow R_A = 5000\ kg$

$\sum M_B = 0 \Rightarrow \sum M_B^L$ (چپ) $+ \underbrace{\sum M_B^R}$ (راست) $= 0$

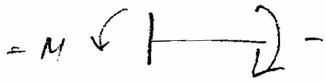
این قسمت قبلاً
صفر قرار داده شده
فقط سمت چپ را داریم ؛

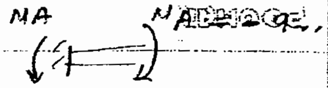
$\sum M_B = 0 \Rightarrow \sum M_B^L = 0 \Rightarrow M_B^L = 5000 \times 2 - M_A - (500 \times 2)\overbrace{(1)}^{\text{فاصله}} = 0$

$\Rightarrow M_A = 9000\,kg.m$



نیروی برشی
از A تا B بار گسترده یکنواخت داریم
پس V یک خط می‌شود با شیب خط = ۵۰۰
در ۲ متر به اندازه ۱۰۰۰ تا کم می‌شود
می‌شود ۴۰۰۰ kg و
دوباره یک خط داریم با شیب م که اندازه ۲×۸۰۰ کم می‌شود .
از C تا D یک خط با شیب −۸۰۰ ؛ و همین نیروی برشی به صفر می‌رسد



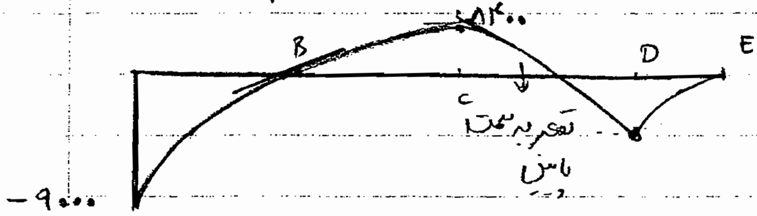


$A_1 = \frac{1}{2}(5000+4000)\times 2 = 9000$

$A_2 = \frac{1}{2}(4000+1600)\times 2 = 8400$

درتکیه‌گاه یک لنگر متمرکز داریم

به اندازه -9000



در مفصل B لنگر صفر باید شود

پس A_1 حتماً باید 9000 درآید؛

تا با -9000 شود صفر؛

درغیر این صورت اشتباه است.

در نقطه B، شیب نمودار یکسان است

شیب در نقطه D می‌شود ارتفاع منفی V در آن نقطه؛

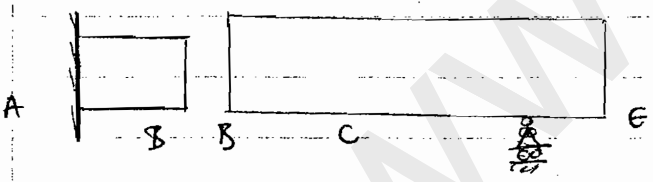
$A_3 = \frac{1}{2}(400+4400)(5) = 12000$

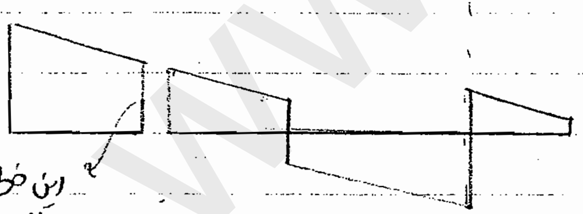
سپس به اندازه 12000 از 8400 کم می‌شود؛

در نقطه E شیب منحنی صفر نیست چون نیروی برشی داریم؛

$\left\{ \frac{d^2M}{dx^2} = q \right.$ تقعر رو به پایین چون مساحت V منفی است و M در حال کاهش است

$\rightarrow$ چون q منفی است پس تقعر رو به پایین است

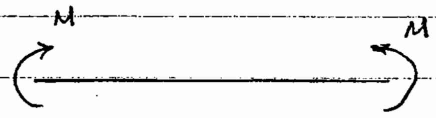




این خط درهنگام رسم دقیق حذف می‌شود

خمش 8 bending

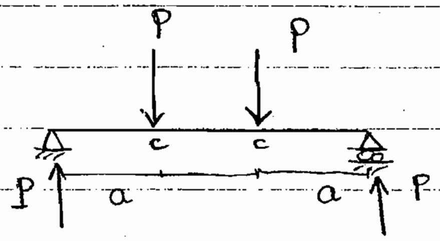
لنگر پیچشی را بررسی کردیم اکنون به بررسی لنگر خمشی می پردازیم :



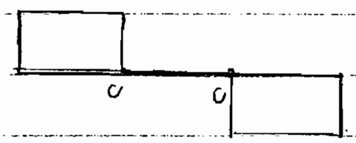
نیروی برشی اکنون نداریم در هر مقطع فقط لنگر خمشی داریم :

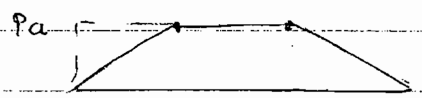
« خمش خالص »

« Pure bending »



در قسمت c نیروی برشی صفر است
از طرفی لنگر خمشی هم ثابت است





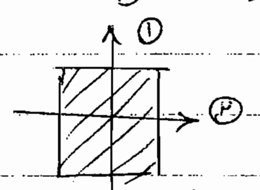
ولی حالت غالب این است که خمش خالص نیست
بلکه همراه با نیروی برشی است که به آن خمش ساده یا
« simple bending » گویند :

V و M

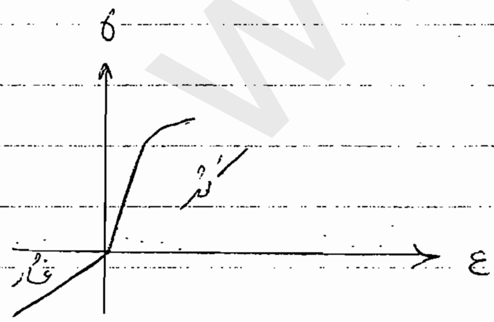
فرض :

* لنگر خمشی حول یک از محورهای اصلی مرکزی اینرسی مقطع باشد :

مثلاً در مقطع مستطیل



لنگر خمشی حول ① یا ② خواهد بود :

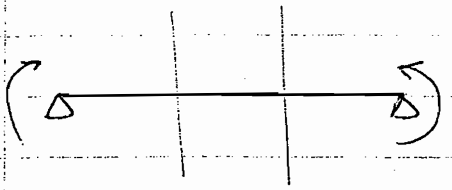


* مدول ارتجاعی در کشش و فشار یکی است

یعنی اجسام ممکن است در کشش و فشار نمودار ε-σ
آنها متفاوت باشد چون E ضریب زاویه این خط
است

* تنش ها و کرنش ها در جهت خطی متی تنش پیچش قرار دارند

* تغییر شکلها کوچکند

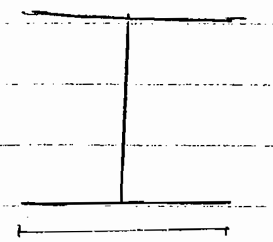


عمود بر محور میله

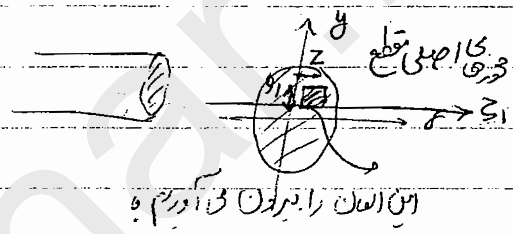
* مقطع های تیر تاب خوردگی نمی شود؛ مقاطع عمود بر محور میله مسطح باقی می مانند؛

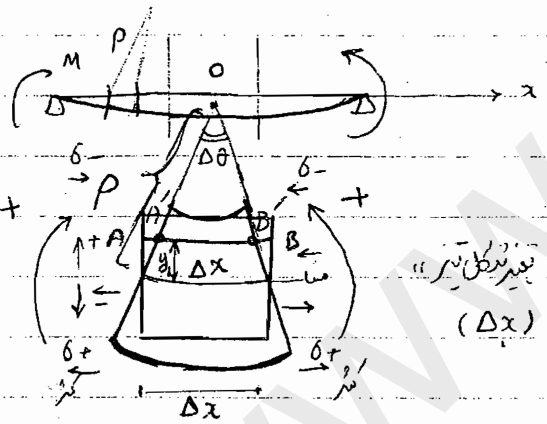
این فرضیه به نام « فرضیه سن ونان » معروف است. Saint Venent

این فرضیه در اکثر موارد درست است مگر اینکه مقطع جدار نازک خیلی نازک باشد؛



۲۰ cm → t = ۳-۴ mm





تیر در اثر خمش خم خواهد شد

« تغییر شکل تیر »

چون تغییر شکلها کوچکند طول قوس و خطی را با طول اولیه یکی می گیریم؛ (Δx)

مثلاً طولش AB از Δx هم $A'B'$ رسیده است؛

ρ شعاع انحنای محور خنثی تیر است؛

$$* \quad \Delta x = \rho \Delta\theta$$

$$* \quad \overline{A'B'} = (\rho - y_1)\Delta\theta$$

$$* \quad \varepsilon_x = \frac{\overline{A'B'} - \overline{AB}}{\overline{AB}} = \frac{(\rho - y_1)\Delta\theta - \rho\Delta\theta}{\rho\Delta\theta} = -\frac{y_1}{\rho}$$

* تغییر خمش به طور خطی؛ قدر مطلق مقدارش زیاد می شود در بالا کم و در پایین زیاد می شود؛

$$* \quad \varepsilon_x = \frac{\sigma}{E} \Rightarrow \sigma_x = E\varepsilon$$

پس σ هم به طور خطی تغییر می کند

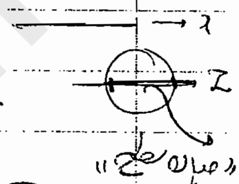
$$\sigma_x = -\frac{E y_1}{\rho}$$

$* \quad$ محور $N = \int \sigma \, dA = 0$ چون فقط خمش داریم

$* \quad \int -\frac{Ey_1}{\rho} dA = 0 \Rightarrow -\frac{E}{\rho}\int y_1 \, dA = 0$

چون این انتگرال صفر شده پس y_1 باید مختصه c باشد یعنی y_1 باید نسبت به Z که از مرکز مقطع می‌گذرد سنجیده شود ؛

در واقع یک سطح است که محور x عمود بر آن است ؛ = از این به بعد همان Δx است که به صورت یک خط دیده می‌شود ؛ = میان تار یا میان سطح



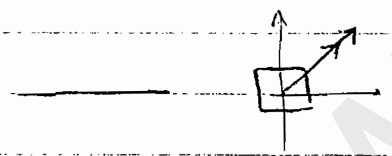
* در واقع سطحی است که از محور x و z تشکیل می‌شود ؛

$* \quad M_y = \int_A (\sigma \, dA) z = 0$

$= \int -\frac{Eyz}{\rho} dA = 0 \Rightarrow -\frac{E}{\rho}\int yz \, dA = 0$

چون I حاصلضرب صفر شد پس y و z محورهای اصلی مقطع اند

و همچنین ولی فرض کردیم که لنگر خمشی حول یکی از محورهای اصلی مرکزی باشد



اگر لنگر حول محور اصلی نباشد در مقاومت (۲) با تجزیه آن روی محورهای اصلی استفاده می‌کنیم

لنگر نسبت به z $\quad M_z = -\int_A (\sigma \, dA) y = -\int -\frac{Ey^2}{\rho} dA$ $\quad \left.\begin{matrix} -y \text{ و } +\sigma \\ +y \text{ و } -\sigma \end{matrix}\right\}$ با توجه به شکل

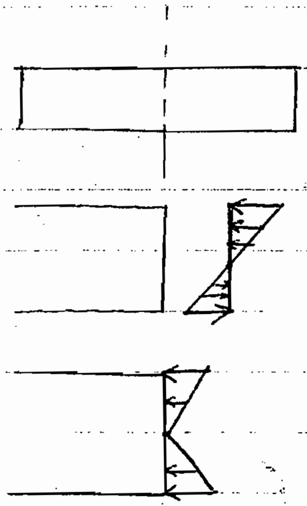
$= +\frac{E}{\rho} \times \int y^2 dA$

$\Rightarrow \quad M_z = \frac{E \, I_z}{\rho}$

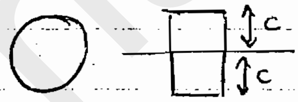
* $\varepsilon = -\frac{y}{\rho}$ * $\sigma = -\frac{Ey}{\rho}$ * $M_z = \frac{EI_z}{\rho}$

با حذف $\frac{E}{\rho}$ داریم

$$\boxed{\sigma = \frac{-M_z y}{I_z}}$$

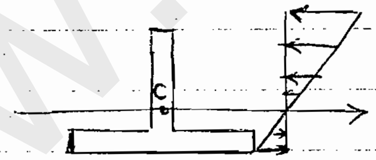


اگر مقطع نسبت به محور z متقارن باشد 8



تنش های بالا و پایین با هم برابرند!

ولی اگر نامتقارن باشد 8



هم برابر نخواهد بود

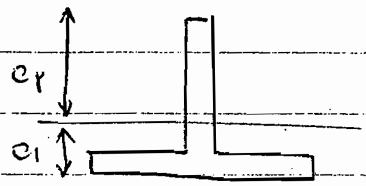
مقطع متقارن

$$\sigma_{max} = \pm \frac{M_z y_{max}}{I_z} = \pm \frac{M_z C}{I_z}$$

$$\boxed{\sigma_{max} = \pm \frac{M_z}{W_z}} \quad * \; W_z = \frac{I_z}{c} \; *$$

اساس مقاومت

مقطع نامتقارن 8 در اینجا ۲ مدول مقطع خواهیم داشت



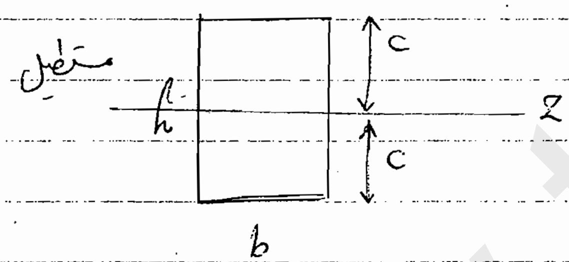
$$W_{1z} = \frac{I_z}{c_1}$$

$$W_{2z} = \frac{I_z}{e_2}$$

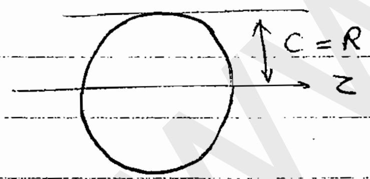
$$\sigma_{1max} = \frac{M_z}{W_{1z}}$$

$$\sigma_{2max} = \frac{M_z}{W_{2z}}$$

اگر جسمی کشش و فشار را یکسان تحمل نکند مثل گچ یا بتن که فشار را به تنهایی بهتر تحمل می کنند بنابراین اگر مقطع مثل بالا داشته باشیم بهتر است

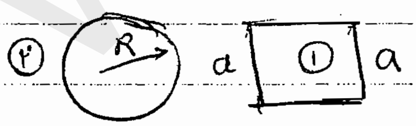


$$W_z = \frac{bh^2}{6}$$



$$W_z = \frac{\pi R^3}{4}$$

* دو مقطع داریم یکی دایره و یکی مستطیل با مساحت مساوی می خواهیم ببینیم کدامیک مقاومت خمشی بیشتر دارند؟



باید ببینیم کدامیک تنش کمتری دارد؟

$$A = a^2 = \pi R^2$$

با شرایط مساوی هر کدامیک چون W بیشتری داشته باشد تنش کمتر و مقاومت بیشتر دارد؟

$* \quad a = R\sqrt{\pi}$

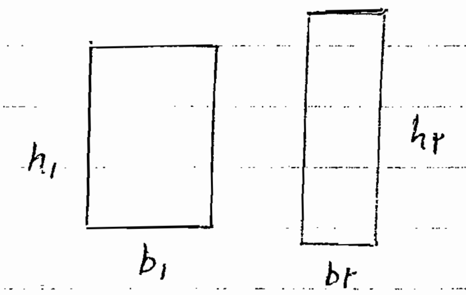
$$W_1 Z = \frac{a^3}{6} = \frac{R^3 \pi \sqrt{\pi}}{6}$$

$$W_2 Z = \frac{\pi R^3}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{W_1 Z}{W_2 Z} = \frac{4\sqrt{\pi}}{6} = 1.19$$

* مدول مقطع مربع حدود ۲۰٪ بیشتر از مدول مقطع دایره است پس با لنگر مساوی مربع برای تحمل تنش بهتر است.

* در پیچش برعکس بود مقطع مدور بهتر از مربع بود.

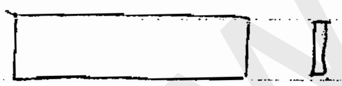


$A = bh = cte$

$$* \quad WZ = \frac{bh^2}{6} = A\frac{h}{6}$$

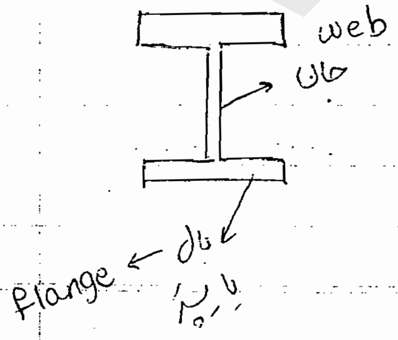
* با مقطع ثابت هرچه ارتفاع بیشتر باشد مدول مقطع بیشتر است یعنی مقطع دوم بهتر است چون $h_2 > h_1$ است

ولی از نظر پایداری حدی دارد.



این تیر با این مقطع نازک از نظر پایداری دچار اشکال است

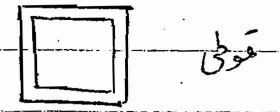
* برای این که این مشکل را حل کنیم مقطعی به شکل زیر ایجاد کنیم.



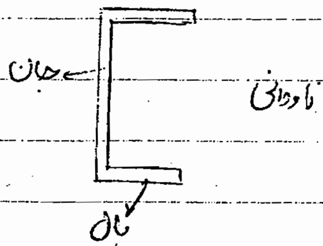
مقطع I

مصالح در بالا و پایین تیراند.

چون I مقطع زیاد شده W هم اضافه می‌شود.



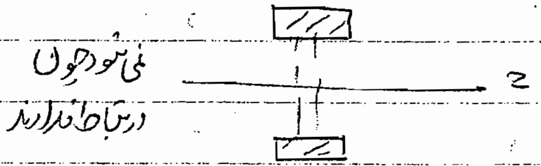
در اینجا هم مصالح در بازاء باشن اند
ولی از دو طرف به هم وصل شدند
برای تحمل لنگر خمشی مقطع خوبی است



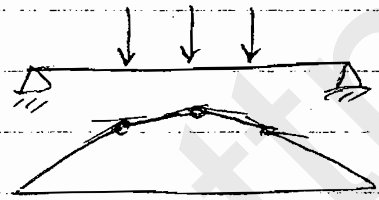
برای تحمل خمش باید مصالح را دور از محور خمش ببریم :

در پیچش امکان پذیر بود که می توانستیم یک لوله درست کنیم

ولی در خمش نمی توان این کار را کرد باید یک اتصالی بین آنها برقرار باشد



اگر خمش ساده باشد :

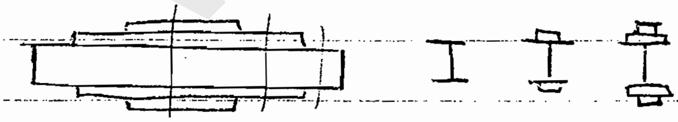


$$\sigma_{max} = \pm \frac{M_{z\,max}}{W_z}$$

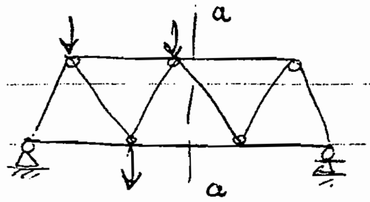
اگر مقطع متغیر باشد ... هم متفاوت خواهد بود باید از مشتق گیری استفاده شود .

این فرمولها در حوالی بارهای متمرکز خطا دارد اما قابل صرفنظر کردن است .

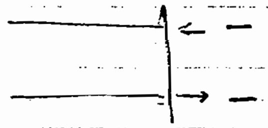
گاهی اوقات یک تیر را در قسمت هایی از آن تقویت می کنند هر جا لنگر خمشی زیاد شود اتصال را زیاد می کنیم
که از نظر اقتصادی این کار انجام می شود



در بعضی موارد که دهانه خیلی زیاد است از خرپا استفاده می شود :

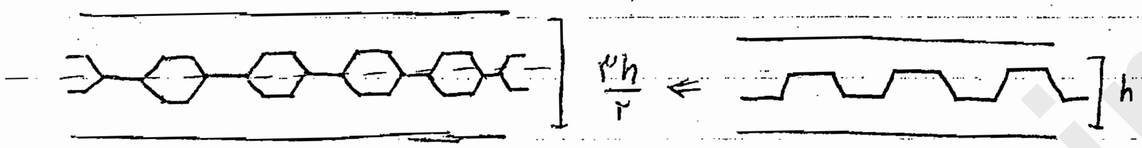


دو قسمت بالا و پایین را با استفاده از اتصالات داخلی به هم متصل می کند.



اتصال داخلی را دیگر به حساب نمی آوریم فقط بال بالا و پایین را می گیریم.

* تنش از بالا تا پایین طبق رابطه تنش خطی تغییر می کند



ارتفاع زیادتر می شود پس ممان زیادتر و در نتیجه S زیادتر می شود ولی

نکته این است که فرمول خمش را نباید برای تیرهای لانه زنبوری استفاده کرد.

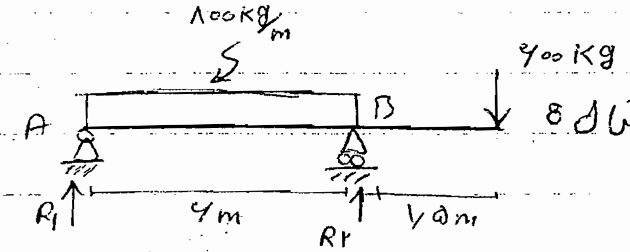
در ساختمان های معمولی بکار بردن لانه زنبوری اشتباه است.

در حالی که حدبا استفاده می شود در دهانه کمتر می شود از آن ها استفاده کرد در ساختمان های مسکونی و تالارها حق استفاده را نداریم.

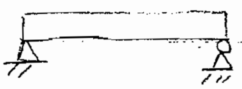
مثال 8

مقدار h را بیابید که

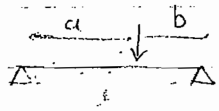
$\sigma_w = 100 \frac{kg}{cm^2}$



باید گیر max تیر را داشته باشیم؛ برای ممنت های خطی از قبل می دانیم که $M = \frac{ql^2}{8}$



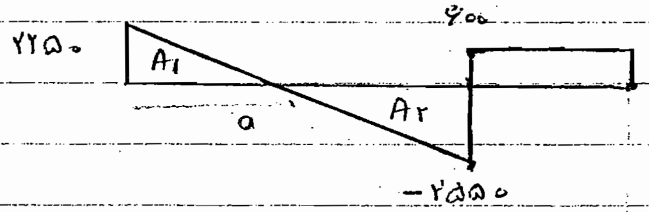
$\frac{ql^2}{8}$



$\frac{Pab}{L}$

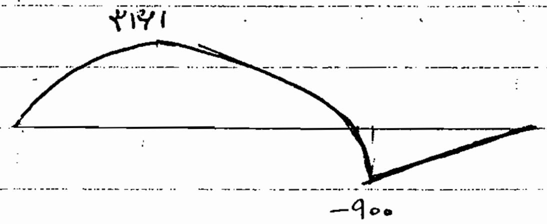
$* \quad \Sigma M_A = ۸۰۰ \times ۶ \times ۳ - ۶R_۲ + ۶۰۰(۷/۵) = ۰ \Rightarrow R_۲ = ۳۱۵۰\ kg$

$* \quad \Sigma F_y = R_۱ + ۳۱۵۰ - (۸۰۰)(۶) - (۶۰۰) = ۰ \Rightarrow R_۱ = ۲۲۵۰\ kg$



نیروی برشی

$a = \frac{۲۲۵۰}{۸۰۰} = ۲/۸۱\ m$



$A_۱ = \frac{۱}{۲}(۲/۸۱)(۲۲۵۰)$

$= ۳۱۶۱\ kg \cdot m$

$A_۲$ باید ۹۰۰ تا بیشتر از ۳۱۶۱ باشد؛

اگر max دیگر فرقی ندارد که + یا − باشد؛ هرکدام بزرگتر بود از نظر قدر مطلق.

$\underbrace{\sigma_{max}}_{\sigma_w} = \pm \frac{M_{z\,max}}{W_z} \qquad |\sigma_{max}| \leqslant \sigma_{w_{\text{مجاز}}}$

$\frac{kg}{}$

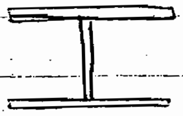
$۱۰۰ \geqslant \frac{|M_{z\,max}|}{W_z}$

$۱۰۰ \geqq \frac{۳۱۶۱ \times ۱۰۰}{W_z} \Rightarrow W_z \geqslant ۳۱۶۱\ cm^۳$

$\frac{bh^۲}{۶} \geqslant ۳۱۶۱\ cm^۳$

$\frac{۱۵}{۶} h^۲ \geqslant ۳۱۶۱$

با این مقدار یا بزرگتر از آن تیر ما پایداری می‌کند $\quad \boxed{h \geqslant ۳۵/۶\ cm}$



بال پهن

مثلاً تیر مثال قبل را می‌خواهیم با INP یا IPE طراحی کنیم :

$\sigma_w = 1500 \frac{kg}{cm^2}$

$|M_{max}| = 3161 \times 100 \ kg \cdot cm$

$|\sigma_{max}| \le \sigma_w \Rightarrow 1500 \ge \frac{3161 \times 100}{W_z}$

$W_z \ge 211 \ cm^3$

در جدول نگاه می‌کنیم که W_z کجا ۲۱۱ است که می‌شود INP 200^{mm} $\left\{ W = 214 \ cm^3 \quad 26.2 \ kg/m \right.$

برای IPE باید IPE 220 بکار ببریم که $\left\{ W = 252 \ cm^3 \quad 26.2 \ kg/m \right.$

* قاعدتاً IPE در خمش بهتر است زیرا با هم وزن، W IPE بیشتر از W INP است پس
بار را به مقدار ناچیزی می‌شود اضافه کرد. مخصوصاً در شماره‌های بالاتر بهتر در برابر خمش عمل می‌کنند.

*  $W = \frac{I_{کل}}{c} = \frac{2 I_{یکی از تیرها}}{c} = 2W_1$

نیز در مثال بالا باید W_z را نصف کنیم :

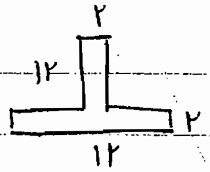
$2I\,160^{mm} \longrightarrow W = 2(117)\ cm^3 \rightarrow G = 17.9 \ kg/m \times 2$

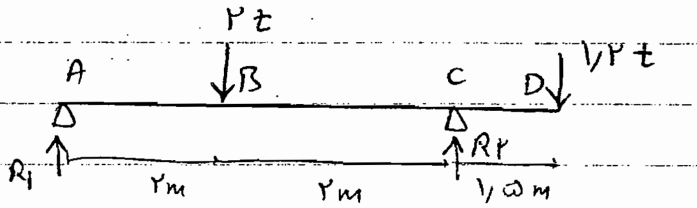
$2\,IPE\,160^{mm} \longrightarrow W = 2(109)\ cm^3 \rightarrow G = 15.8 \ kg/m \times 2$

بنابراین کاربرد دو تا تیر به صرفه نیست چون وزن بیشتری خواهد داشت.

$\frac{W}{A}$ هر کدام بیشتر بود
بهتر است

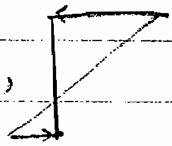
مثال ٤





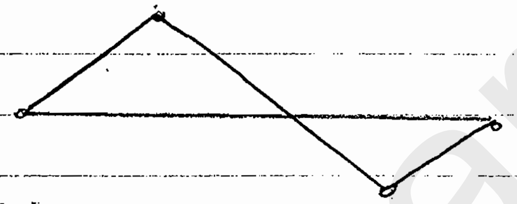
تنش های max کششی و فشاری را بیابید؟

حل ـ مقطع یک مقطع نامتقارن است ؛ اگر لنگر هم مثبت باشد
خواهیم داشت ولی اینجا هم لنگر + داریم هم ـ



در بالا بیشترین تنش را

$$2R_1 = 2(0.55) = 1.1\ t.m$$



$$\Sigma M_C = 4R_1 - 2\times 2 + 1.2\times 1.5 = 0$$

$$\boxed{R_1 = 0.55\ t}$$

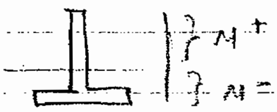
1.2×1.5

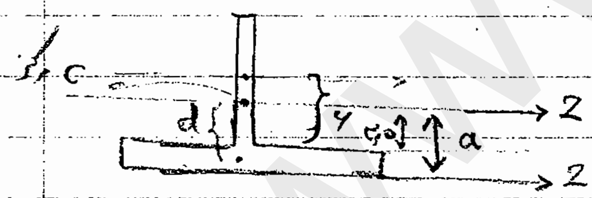
۱٫۲ شد حول C

$$M^{+}_{max} = 1.1\ t.m$$

$$M^{-}_{max} = 1.8\ t.m$$

مهم * در این مسئله چون نامتقارن است max تنش
ممکن است از هر کدام ناشی شود ؛ هر دو را باید حساب کرد ؛





$$a = \frac{(12\times 2)\times 1 + (12\times 2)\times 8}{(12\times 2)\times 2} = 4.5\ cm$$

ما می توانستیم بگوییم مقطع تا نیم مرکز تنش در ۶ cm
مقطع دومی است مقطع پایینی در 1 cm
می شود $3.5 = \frac{7}{2}$ که با 1 جمع شود
۴٫۵ cm می آید.

مستطیل پایینی $I_z = \frac{(12)(2^3)}{12} + (2\times 12)(3.5)^2$

مستطیل بالا $I_z = \frac{(2)(12)^3}{12} + (2\times 12)(3.5)^2$

$$\Rightarrow I_{z_{کل}} = 884\ cm^4$$

در بالار B

بالای مقطع B فشار $\sigma = \dfrac{1,1 \times 10^{5} \times 9,5}{884} = 1182 \ kg/cm^{2}$

پایین مقطع C فشار $\sigma = \dfrac{1,8 \times 10^{5} \times 6,5}{884} =$ —

گر مثبت بالای تیر را فشاری کند
گر منفی پایین تیر را فشاری می کند

بالای مقطع C $= \dfrac{1,8 \times 10^{5} \times 9,5}{884} = 1934, \ \dfrac{kg}{cm^{2}}$

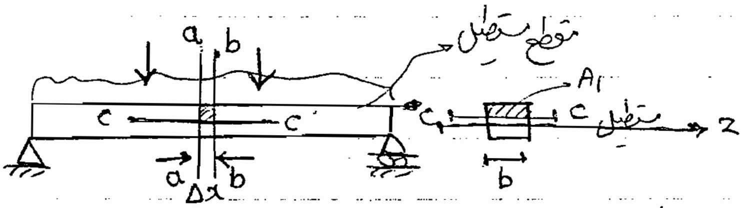
علیرضا جوادیان -

۸٤,۲,۲٤

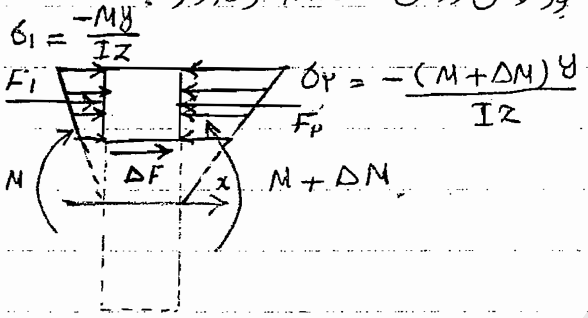
بنام خدا

ج ۲۱

تنش برشی در خمش ساده تیرها :



این روش را اولین بار یک مهندس روسی به نام جوراوسکی در سال ۱۸۷۵ ارائه داد :



بخش هاشور زده را بررسی می کنیم

به خاطر وجود لنگر M تنش عمودی داریم :

$$F_1 = \int_{A_1} \sigma_1 dA \quad ; \quad F_2 = \int_{A_1} \sigma_2 dA$$

* F_1 با F_2 مساوی نیست چون لنگر تغییر کرده است بنابراین برای تعادل نیاز به ΔF داریم :

* $\Delta F = F_2 - F_1$

* ΔF به صورت یک نیروی برشی در مقطع c-c عمل می کند و یک تنش برشی ایجاد می شود :

* $$\Delta F = \int_{A_1} -\frac{(M+\Delta M)y}{Iz} dA - \int_{A_1} -\frac{My}{Iz} dA$$

* $$\Delta F = \int_{A_1} -\frac{(\Delta M)y}{Iz} dA = -\frac{\Delta M}{Iz} \int_{A_1} y dA = -\frac{\Delta M}{Iz} Q_{1z}$$

مربوط به مقطع A_1 است

* می دانیم $\frac{\Delta M}{\Delta x \to 0} = V$ نیروی برشی

$$\Delta F = \frac{\Delta M Q_{1z}}{Iz}$$

جهت ΔF را از روی شکل بدست می آوریم با توجه به جهت F_1 ، F_2 :

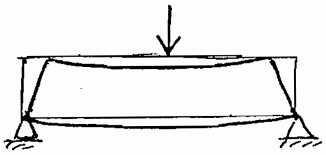
$$\Delta F = \frac{V\,\Delta x}{I_z} Q_{1z}$$

مقدار نیروی برشی در واحد طول را شار برشی گویند :

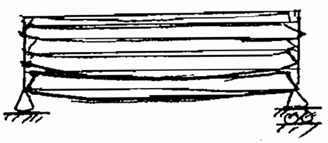
شار برشی برای طول کم

$$q = \frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{V}{I_z} Q_{1z}$$

شدت نیروی برشی است



به صورت تجربی

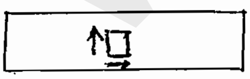


بالای تیر با نیرو فشرده و طول آن کم شده و پایین تیر بالایی کشیده و طول آن زیاد شده است پس دو قسمت در تمام لایه ها روی یکدیگر می لغزند اگر آزاد بود حرکت می کرد اما چون یک جسم یکپارچه اند یک نیروی به وجود می آید که نیروی برشی است

تنش برشی افقی و قائم

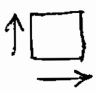
$$\tau = \frac{\Delta F}{b\Delta x} = \frac{q}{b} = \frac{VQ_{1z}}{I_z b}$$

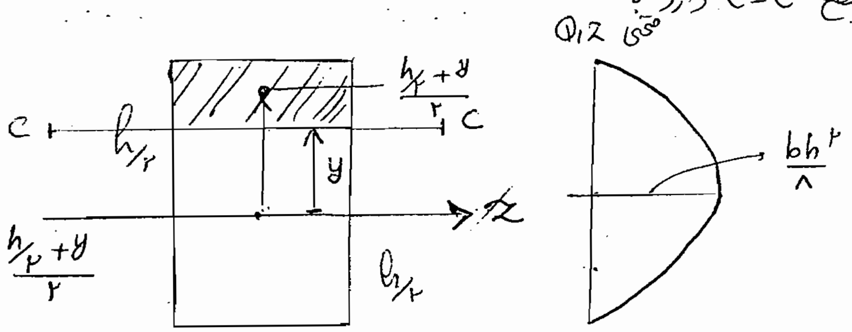
یا $\frac{VQ_{1z}}{I_z t}$



در یک مقطع V و I و b ثابت اند فقط Q تغییر می کند که بستگی به مقطع C-C دارد

در یک المان تنش برشی در دو سطح عمود هم با هم برابرند





$$Q_{1z} = b\left(\frac{h}{2} - y\right) \times \frac{\frac{h}{2}+y}{2}$$

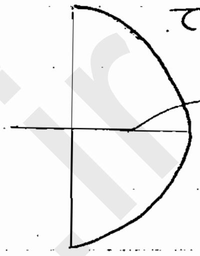
$$* \; Q_{1z} = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

$\frac{1}{2} \times b \times 2(\frac{h}{2}-y)$
$+2b(\frac{h}{2}-y)(\frac{h}{2}$

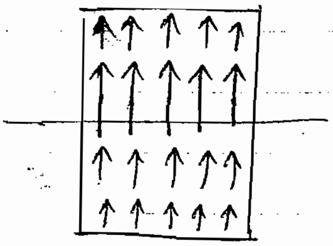
وقتی c-c به محور z میرسد بیشترین Q_z را داریم اگر مقطع c-c پایین محور z بیاید قسمت بالایی همان
+ و قسمت پایین همان − دارد که در مجموع Q_z کم می شود در پایین هم Q_z صفر می شود چون همان نسبت به محور مرکزی صفر است

* در بالا و پایین Q_z صفر است تنش برشی در محور z max است و در بالا و پایین صفر است ؛

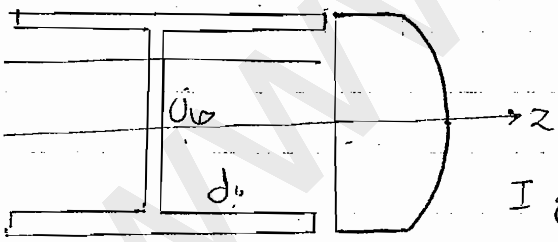
$$\tau = \frac{V \cdot b/2 \cdot (\frac{h^2}{4}-y^2)}{\frac{bh^3}{12}\cdot b} = \frac{6V}{bh^3}\left(\frac{h^2}{4}-y^2\right)$$



* مقدار max تنش برشی می شود = $\frac{3}{2}\tau_m$ (متوسط) ؛

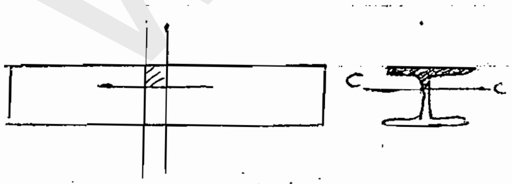


* برای یک مقطع I ؛

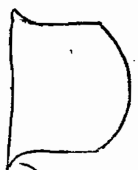


در بال تیر به علت پهنای زیاد نمی شود رابطه بالا را بکار برد

اما در جان تیر می شود این رابطه را بکار برد پس برای تیر با مقطع I سطح A_i می شود سطح هاشور زده ؛

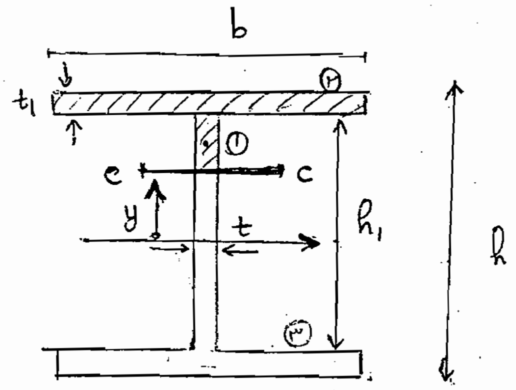


اگر نمودار آن را بکشیم یک سهمی خواهد بود ولی مقدار آن در بال صفر نخواهد بود ؛



در محور z ها max است ولی تغییرات آن از بال تا پایین تیر زیاد نیست

این منحنی درست نیست
چون در بال نمی شود منحنی را سهمی
در نظر گرفت



$t_1 = \frac{h-h_1}{2}$ معمولاً $t < t_1$ است ؛

* معادله سهمی تغییرات ① و τ را بیابید ؟

$$① \Rightarrow Q_{1z} = t\left(\frac{h_1}{4}+\frac{y}{2}\right)\left(\frac{h_1}{2}-y\right) = \frac{t}{2}\left(\frac{h_1}{2}+y\right)\left(\frac{h_1}{2}-y\right) = \frac{t}{2}\left(\frac{h_1^2}{4}-y^2\right) *$$

$$② \Rightarrow Q_{2z} = t_1(b)\left(\frac{h_1}{2}+\frac{t_1}{2}\right) \Rightarrow t_1 = \frac{h-h_1}{2}$$

$$\Rightarrow Q_{2z} = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2-h_1^2}{4}\right)$$

$$\boxed{\Rightarrow Q_t = \frac{t}{2}\left(\frac{h_1^2}{4}-y^2\right) + \frac{b}{8}\left(h^2-h_1^2\right)}$$

$$① \quad I_z = \frac{1}{12}(t)(h_1^3)$$

$$③② \quad I_z = 2I_{z2} \Rightarrow I_{z2} = \frac{1}{12}(b)(t_1^3) + (bt_1)\left(\frac{h_1}{2}+\frac{t_1}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow I_{z2} = \frac{1}{12}b\left(\frac{h-h_1}{2}\right)^3 + b\left(\frac{h-h_1}{2}\right)\left(\frac{h_1}{4}+\frac{h}{4}\right)^2$$

$$\Rightarrow I_{z2} = \frac{b}{32}(h-h_1)\left[\frac{1}{3}\left[h-h_1\right]^2 + (h+h_1)^2\right]$$

$$\Rightarrow I_{z_t} = I_{z1} + 2I_{z2} = \frac{1}{12}th_1^3 + \frac{b}{16}(h-h_1)\left[\frac{1}{3}(h-h_1)^2 + (h+h_1)^2\right] *$$

* نکته 8

یک تقریب برای محاسبات این است که h را یک ارتفاع در نظر بگیریم ؛ یعنی تنش برشی در جان یکنواخت است ؛
تقریب دوم این است که بگوییم ٪۹۰ نیروی برشی در جان تیر است ؛ البته بسته به ابعاد مقطع متفاوت است ؛
ما فرض می‌کنیم که تمام نیروی برشی در جان است ؛

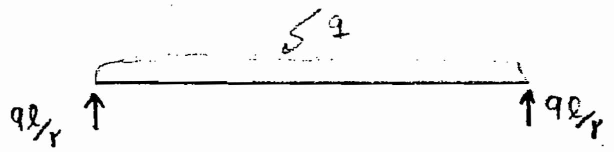
جان → web

* فرمول تقریبی

$$\boxed{\tau_{web} = \frac{V}{t\,h_1} = \frac{V}{A_{web}}}$$

در سازه‌های فولادی از این رابطه استفاده می‌شود.

با تقریب خوبی τ_{web} نزدیک به τ_{max} جان در می‌آید اما خطا دارد و مقدار دقیق نیست ؛



* $v_{max} = \frac{ql}{2}$

درتمام تیرها جایی τ ماکزیمم است که v هم max باشد .

کل تیر : $\tau_{max} = \frac{3}{2}\frac{v_{max}}{bh} = \frac{3ql}{4bh}$

$\tau_{max} = \tau_w$ «مجاز»

* $M_{max} = \frac{ql^2}{8}$ $\qquad \sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W} = \frac{\frac{ql^2}{8}}{\frac{bh^2}{6}} = \frac{3ql^2}{4bh^2}$

$\sigma_{max} = \sigma_w$

نتیجه : $\frac{L}{h} = \frac{\sigma_w}{\tau_w}$

مثلاً فولاد نسبت تنش عمودی مجاز به برشی مجاز آن حدود $\frac{5}{2}$ است

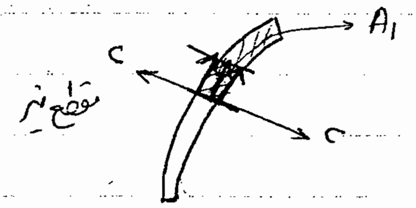
در مقاطع مستطیل $\sigma_w = \frac{3}{2}\sigma_{yp}$

$\tau_w = 0/6\,\sigma_{yp}$ $\qquad \Rightarrow \frac{\sigma_w}{\tau_w} = \frac{5}{2}$

یعنی طول تیر از ۲ برابر ارتفاع کمتر است .

* اگر $\frac{L}{h}$ از مقدار بیشتر باشد ، σ زودتر به مقدار مجاز می‌رسد چون با توان دوم $\frac{L}{h}$ ارتباط دارد ؟

معمولاً تیرها با تنش خمشی محاسبه می‌شوند .



به طور کلی اگر یک جدار نازک داشته باشیم :

* تنش برشی در هر نقطه در لبه جدار مماس بر جدار است

چون جدار نازک است می توانیم روی ضخامت جدار تنش برشی را یکسان بگیریم :
در مقطع مستطیل هم می توان این فرض را کرد خطایی ایجاد نمی شود

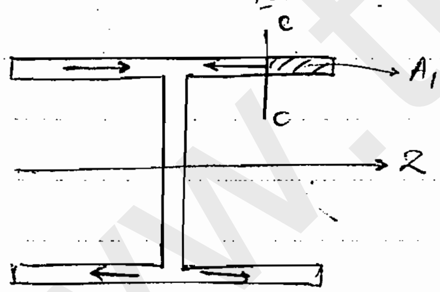
پس داریم

$$\tau = \frac{V.Q_z}{I_z \cdot t}$$

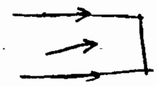
مقطع C-C حائل ولی
عمود بر جدار است

در بال تیر می شود فرمول را بکار برد ولی مقطع C-C به صورت زیر است

A_1 مساحتی که با C-C
قطع شده است .



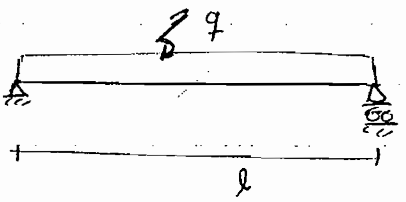
پس به طور تقریبی تنش برشی را در بال موازی
لبه ها می گیریم :
پس با تغییر مقطع C-C می توانیم تنش برشی
را با تقریب در بال حساب کنیم

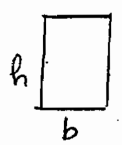


البته دقیقاً درست نیست چون در قطع بال تنش های قائم برشی هم می توانیم داشته باشیم ولی با تقریب می توانیم
آن را یکنواخت بگیریم

در بال Q_z به صورت خطی خواهد بود چون فاصله مرکز مقطع A_1 تا z تغییر نمی کند بلکه ثابت است

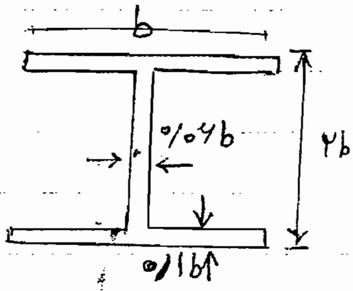
* مثال 8





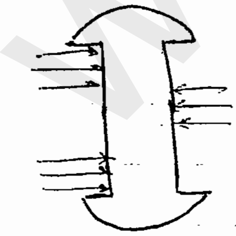
ابعاد تیر چه نسبتی داشته باشند تا تنش خمشی و تنش برشی عمودی هر دو با هم به مقدار مجاز خود برسند ؟

در مقاطع I با جان نازک « اقتصادی تر » تنش برشی نسبت به مقطع مستطیل خیلی بیشتر می‌شود بنابراین نسبت $\frac{L}{h}$ دیگر $\frac{5}{3}$ نیست تا حدود ۱۰ ادامه می‌شود ؛



مثال 5 $\frac{L}{h}$ ؟ مثل مثال قبل حل شود.

* اگر طول تیر حدود ۱۰ ادامه و بیشتر باشد نسبت به h معمولاً خمش حاکم است برای طراحی تیر ولی کمتر از آن برش حاکم است در نزدیکی ۱۰ هر دو را باید حساب کنیم ؛



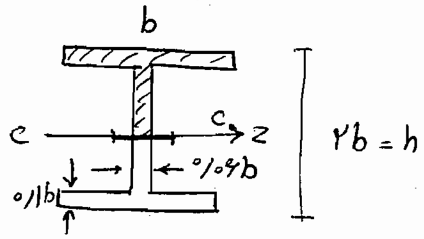
در پیچ‌ها و پرچ‌ها در واقع با یک تیر سروکار داریم که هم تنش خمشی دارد هم تنش برشی ؛

اگر طول پیچ بزرگتر باشد نسبت به قطر تنش عمودی را باید در نظر گرفت

برای مقاطع I

* $\tau_{max} = \dfrac{VQ_{12}}{I_z . t}$ دقیق جان

* $\tau_{web} = \dfrac{V}{A_w}$ تقریبی جان



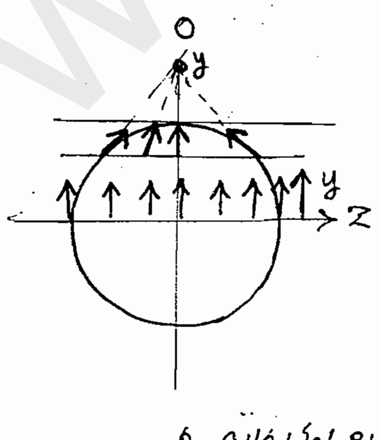
* $Q_{12} = (b \times ۰/۱b)(۰/۹۵b) + (۰/۰۶b)(۰/۹b)(۰/۴۵b)$
$= ۰/۱۱۹\, b^{۳}$

* $I_z = \dfrac{b\,((۲b)^{۳})}{۱۲} - ۲\left(\dfrac{۰/۴۷b \times (۱/۸b)^{۳}}{۱۲}\right) = ۰/۲۰۹\, b^{۴}$

* $\tau_{max} = \dfrac{V \times ۰/۱۱۹\, b^{۳}}{۰/۲۰۹\, b^{۴} \times ۰/۰۶b} = ۹/۴۸۹\, \dfrac{V}{b^{۲}}$

* $\tau_w = \dfrac{V}{۱/۸b \times ۰/۰۶b} = ۹/۲۵۹\, \dfrac{V}{b^{۲}}$

$\dfrac{\tau_w}{\tau_{max}} = \dfrac{۹/۲۵۹}{۹/۴۸۹} = ۰/۹۷۵$



* مقطع دایره :

روی محور y به علت تقارن تنش برشی باید قائم باشد.

در حالی که در اینجا می‌شود این است که مولفه‌های قائم تنش برشی باید مساوی باشند :

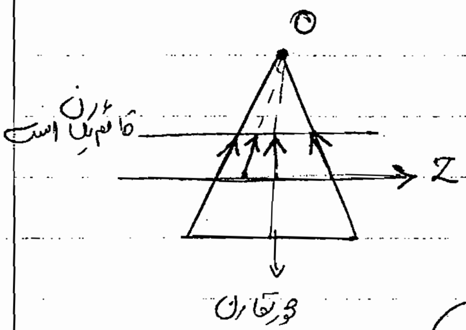
فرض یکنواخت بودن تنش برشی قائم خطا ایجاد می‌کند در روی محور y بیشتر است ولی این تقریب کمتر از آن به‌دست می‌آورد

برای محاسبه τ در نقطه از نقطه O به آن وصل کرده و با خط تنش های قائم تقاطع می دهیم تا هم جهت و هم مقدار آن بدست آید

$$\tau = \frac{V Q_z}{I_z b}$$

* b در اینجا متغیر است :

در مقاطع مثلث هم می شود از این روش استفاده کرد 8



متساوی الساقین

* در مقطع دایره τ_{max} روی محور Z می شود $\frac{4}{3}\tau_m$ متوسط

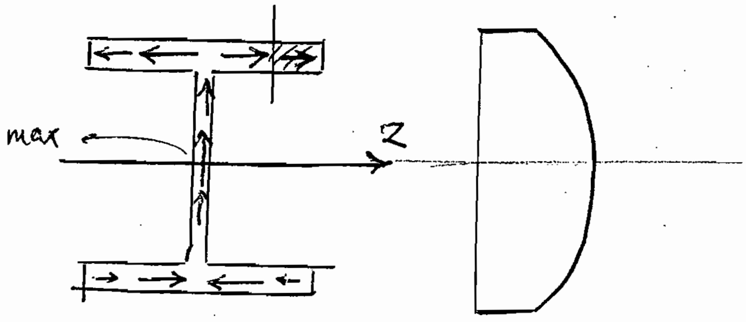
تئوری ارتجاعی ولی تنش برشی را یکنواخت نمی داند روی محور Z

$$\begin{cases} \tau_{max} = 1{,}38\ \tau_m \\ \tau_{لبه} = 1{,}24\ \tau_m \end{cases}$$

ولی در مقاومت مصالح τ را یکسان می گیرند :

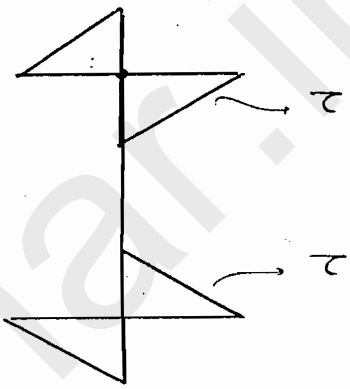
* برای max شدن τ باید $\frac{Q_z}{b}$ را حساب کرده مشتق بگیریم و مقدار max را بدست آوریم
مثلاً در مثلث حساب کنید روی محور Z نمی شود بلکه بالاتر از محور Z می شود :

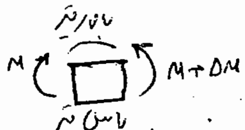
چرا ما برای محاسبات تیر تنش را حساب می‌کنیم که بار زیادی است ؟



$$\tau_{\text{بال}} = \frac{VQ_z}{tI_z}$$

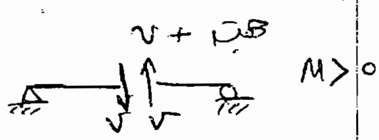
* روی بال به طور خطی از لبه به طرف جان زیاد می‌شوند



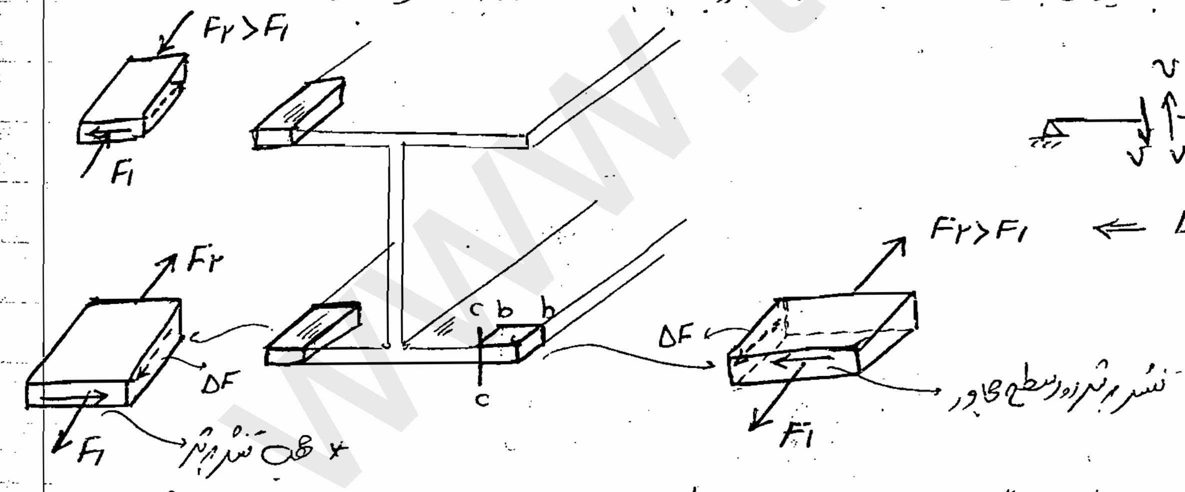


بالای تیر نیروی فشاری دارند

برای تعیین جهت نیروی برشی روی جان اگر V رو به بالا باشد τ رو به بالا خواهد بود

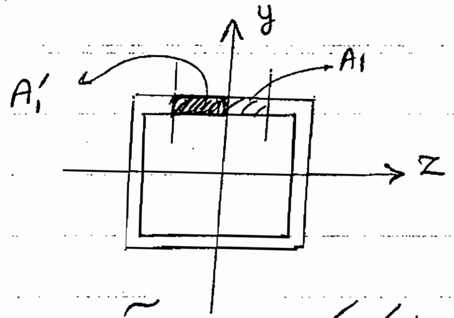


* چون $\Delta M > 0$ ⇐ $F_2 > F_1$



برای تعادل دو مقطع نزدیک به هم گرفتیم و یک مقطع عمود بر آن گرفتیم در مقطع مستطیل عمود بر دو مقطع a, b می‌شد

در جدارهای نازک τ همیشه موازی جدار است ؟



close

* جدار نازک بسته متقارن 8

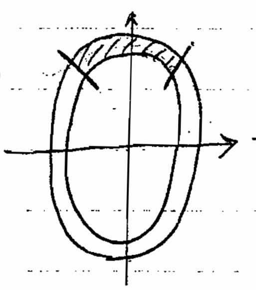
متقارن نسبت به محور خمش (محور y)

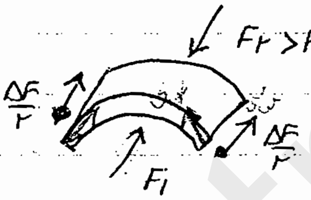
تفاوت جدار نازک بسته و باز در این است که در جدار نازک باز با ۳ مقطع یک تکه از تیر بیرون می‌آید.

ولی در جدار نازک بسته باید به جای یک مقطع C-C دو تا مقطع بزنیم در این صورت باید ببینیم ΔF را چطور

تقسیم کنیم ولی اگر نسبت به محور y متقارن باشد می‌توانیم ΔF را به طور مساوی تقسیم کنیم.

متقارن





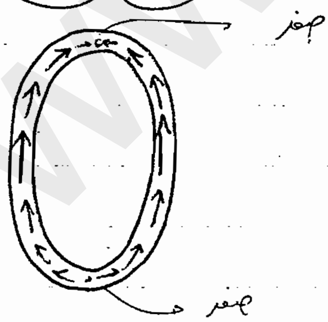
نصف ΔF به هر سطح طرفین می‌رسد

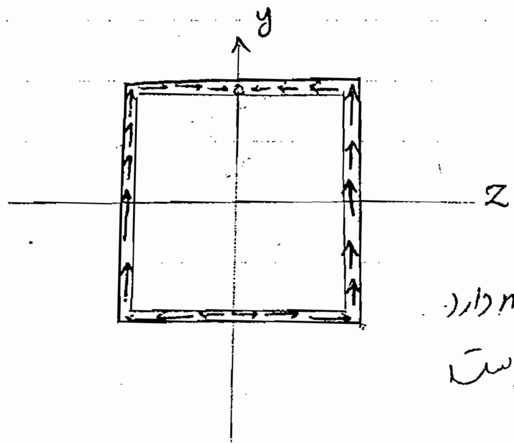
$$\tau = \frac{VQ_z}{2 I_z t}$$

$$\tau = \frac{VQ'_z}{I_z t}$$

$Q'_z \longrightarrow A_1$ مربوط به سطح

از محور تقارن تا مقطع برش



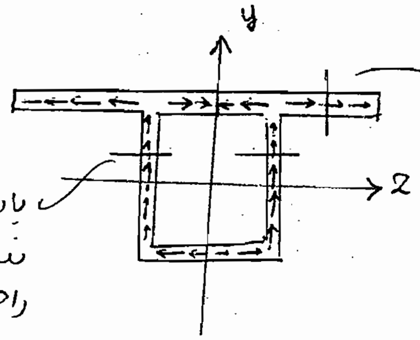


روی محور z مقدار max دارد

روی محور تقارن τ صفر است

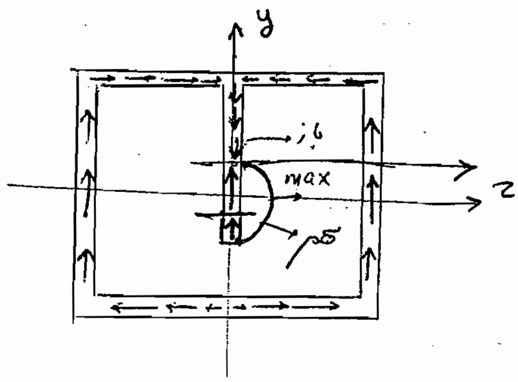
POOMAR

مقطع مرکب از بسته و باز



در اینجا فرمول باز ~~صادق~~ صادق است با یک قطع

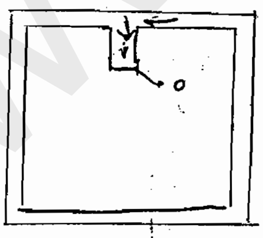
با دو قطع می‌زنیم با یک قطع نسبت به محور تقارن Q آن را حساب می‌کنیم.

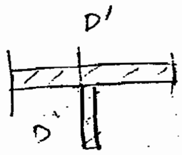


صفر ⟵ نسبت به پایین مقطع متقارن است نیز

برای تعیین جهت می‌توان تجسم کرد که نسبت به محور z ها اگر از دورترین نقاط شروع کنیم شبیه جریان یک رود است که از دورترین نقاط جریان به تدریج زیاد می‌شود تا این که در انتهای جریان به تدریج مصرف و به صفر می‌رسد.

در مقطع‌های قائم همیشه نمودار τ سهمی می‌شود. اگر با محور z تقاطع داشته باشد.





برای محاسبه Q_E یا Q_F باید مقطع T شکل مساحت آن را بیابیم :

$$Q_{zE} = Q_{zF} = \frac{1}{2}(1\times 20\times 3.75 + 19\times 1\times 14.25) = 172.87$$

$$* \quad \tau_E = \tau_F = 3.443 \times 172.87 = 595.19 \ \frac{kg}{cm^2}$$

$$Q_a = Q_F + (1\times 1\times 14.25) = 172.87 + 14.25 = 187.12$$

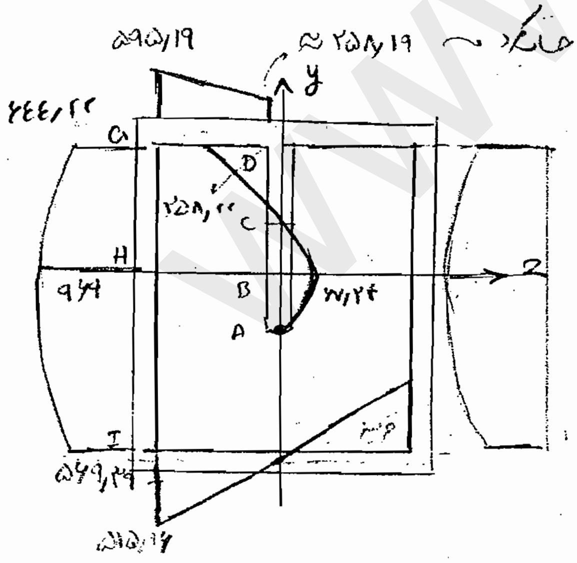
$$* \quad \tau_a = 3.443 \times 187.12 = 644.25 \ \frac{kg}{cm^2}$$

$$* \quad \tau_H = 3.443 \times (Q_a + \underbrace{Q_{aH}}_{\text{اتصال محور تقارن}}) = 3.443 \times \left[(187.12\times 1) + (13.75)\left(\frac{13.75}{2}\right)\right]$$

$$= 969.73 \ kg/cm^2$$

$$* \quad \tau_I = 3.443(10.5\times 1\times 15.75) = 569.39 \ kg/cm^2$$

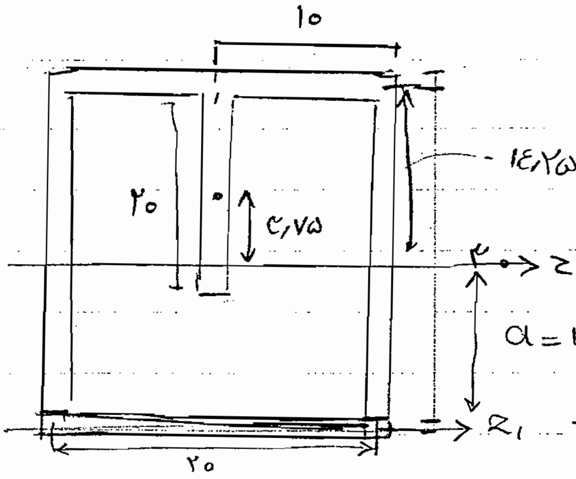
$$* \quad \tau_J = 3.443(9.5\times 1\times 15.75) = 515.16 \ kg/cm^2$$

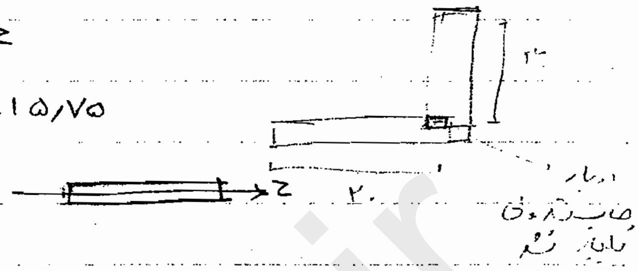


مثال ۸ نمودار تنش برشی؟

$t = 1\ cm$

$V = 50\ t$





اول باید محور z تعیین شود:

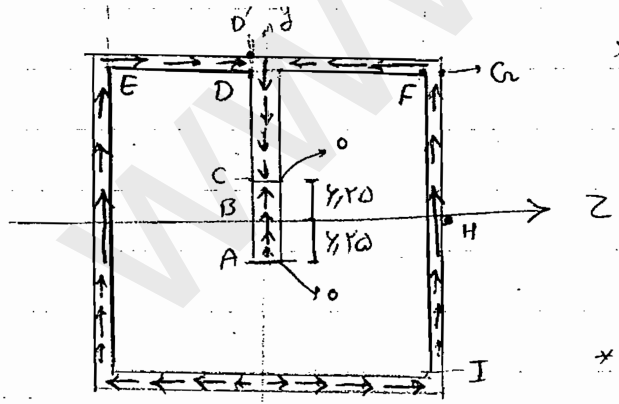
$$* \quad a = \frac{2\times(29\times1)\times15 + (21\times30) + (20\times1\times19.5)}{2\times30 + 2\times20 + 20} = 15.75\ cm$$

$$* \quad I_z = \underbrace{\frac{21\times1^3}{12} + (21\times1)(15.75)^2}_{\text{پایین}} + \underbrace{\frac{21\times1^3}{12} + (21\times1)(14.25)^2}_{\text{بالای}}$$

$$+ 2\underbrace{\left[\frac{1\times29^3}{12} + (1\times29\times0.75)^2\right]}_{\text{پهلوها}} + \frac{1\times20^3}{12} + (1\times20)(3.75)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{I_z = 14520\ cm^4}$$

مستطیل‌های ریز پایین را می‌شود صرف‌نظر کرد چون ناچیز بود



در ۶/۲۵ بالا و پایین τ صفر می‌شود چون تقارن دارد

$* \quad \tau_A = 0$

$$* \quad \tau = \frac{VQ_z}{I_z t} = \frac{50000\,Q_z}{14520\,(t=1)} = 3.443\,Q_z$$

$$q = \tau t = \frac{VQ_z}{I_z}$$

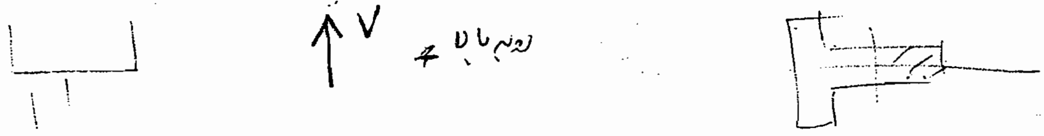
اگر t متغیر باشد، باید q شار برشی را تعیین کنیم که در این حالت t ثابت بود

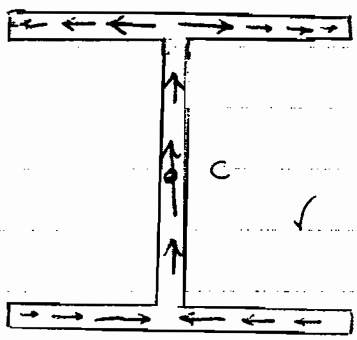
$$* \quad \tau_B = 3.443\,(1\times6.25)\left(\frac{6.25}{2}\right) = 67.44\ \frac{kg}{cm^2}$$

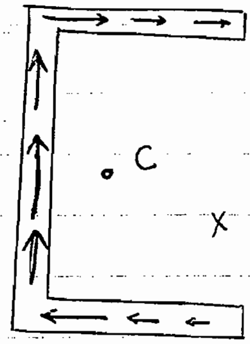
$$* \quad \tau_C = 0$$

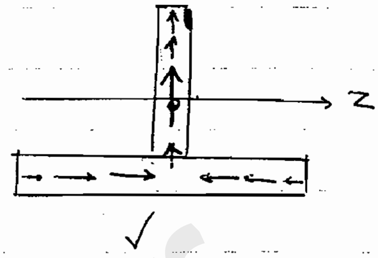
$$* \quad \tau_D = 3.44\times(1\times20)(3.75) = 258.22\ \frac{kg}{cm^2}$$

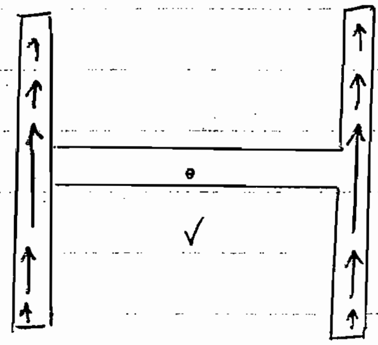
86

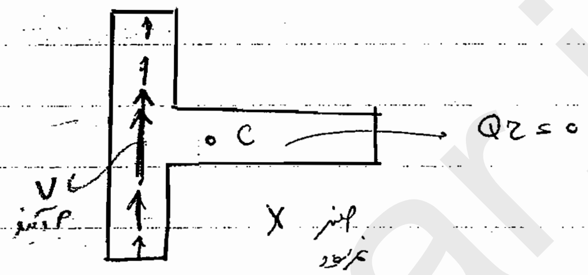


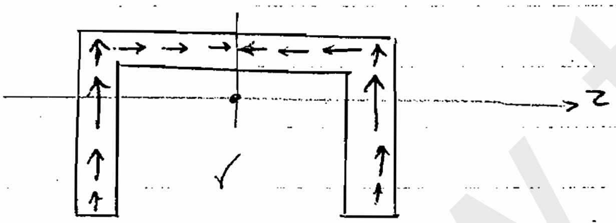


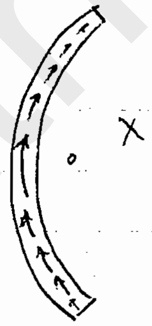


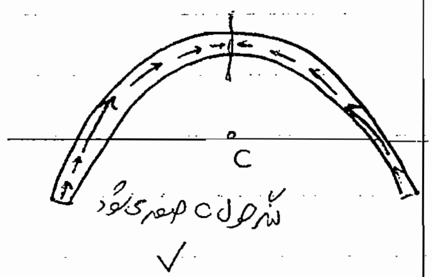


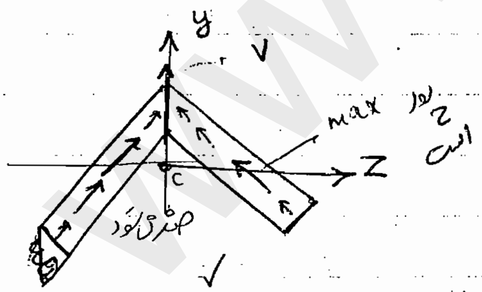


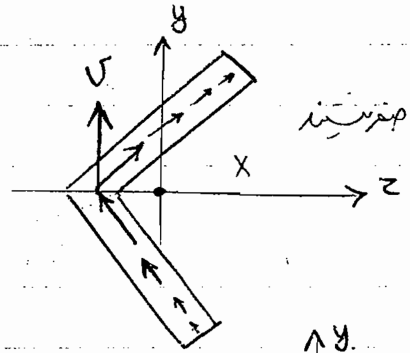




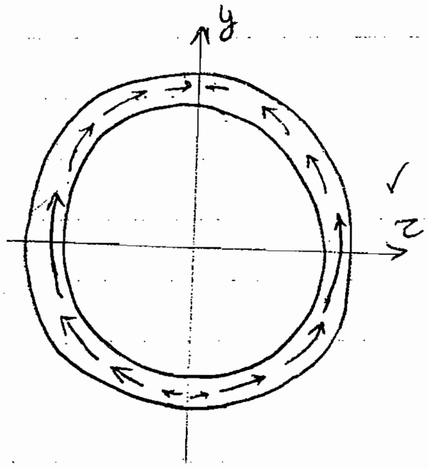


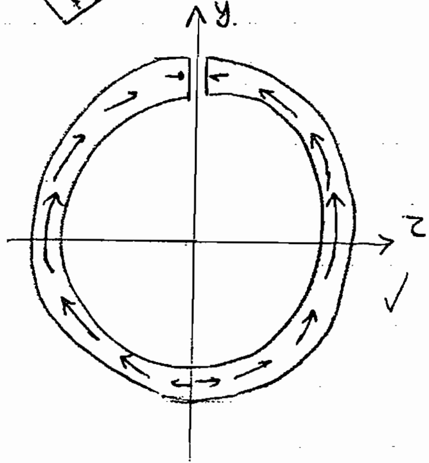




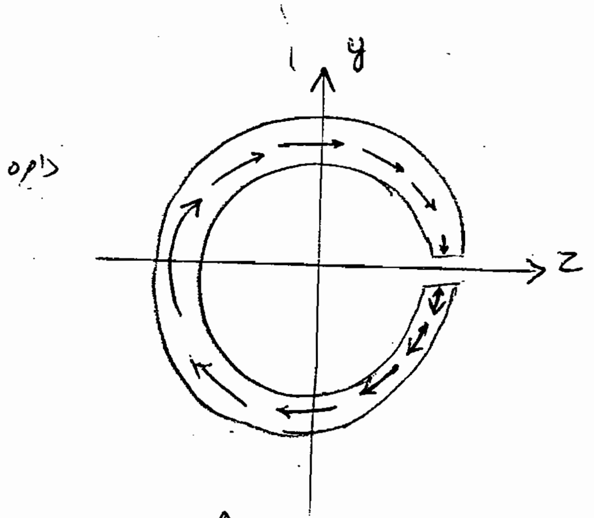


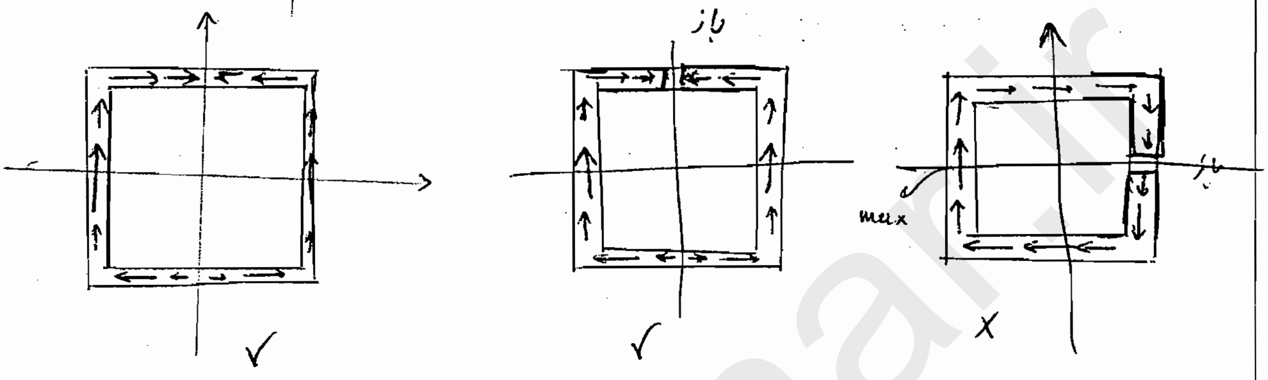
در همه جدار نازک‌ها؛
جایی که جدار نازک است
τ صفر است.





چون محل اندازه‌گیری q
در جدار نازک باز دقیقاً جایی
است که τ صفر می‌شود
پس خود به خود یکی شد





اشکالی که گشتاور آنها حول مرکز سطح صفر می‌شود محور برش آنها محور تقارن است ؛

در غیر این صورت بقیه اشکال دارای یک گشتاوری نسبت به محور c یعنی محور x گذرنده از مرکز مقطع هستند

یعنی یک گشتاور پیچشی دارند ؛

برآیند نیرو در حالت کلی همه اشکال بالا V است ؛

تنش‌هایی بارگذارده در سطح اند:

در هر مقطعی اگر برآیند همه نیروهای وارد بر سطح را حساب کنیم همان V خواهد بود گشتاور را نسبت به c می‌گیریم

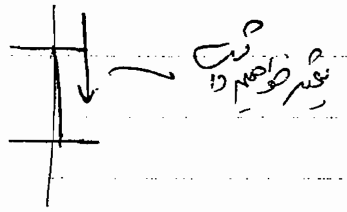
V را در جایی قرار می‌دهیم که همان گشتاور را نسبت به c ایجاد کند ؛

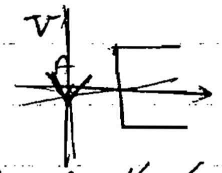
* $M_t = Ve$

فاصله V از مرکز سطح

اگر نیروی برشی هم در مقطع متقارن چه در نامتقارن اگر نیروی برشی از نقطه مورد نظر عبور نکند چه باید بکنیم

در این صورت یک پیچش اضافی در مقطع ایجاد می شود





در اینجا نیروی V باید از A بگذرد ولی نمی گذرد

در حالت دیگری هم اتفاق که باعث ایجاد یک گشتاور پیچشی می شود

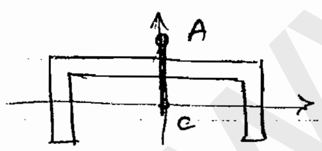
این عبارت زیاد بکار می رود

مرکز برشی — shear centre

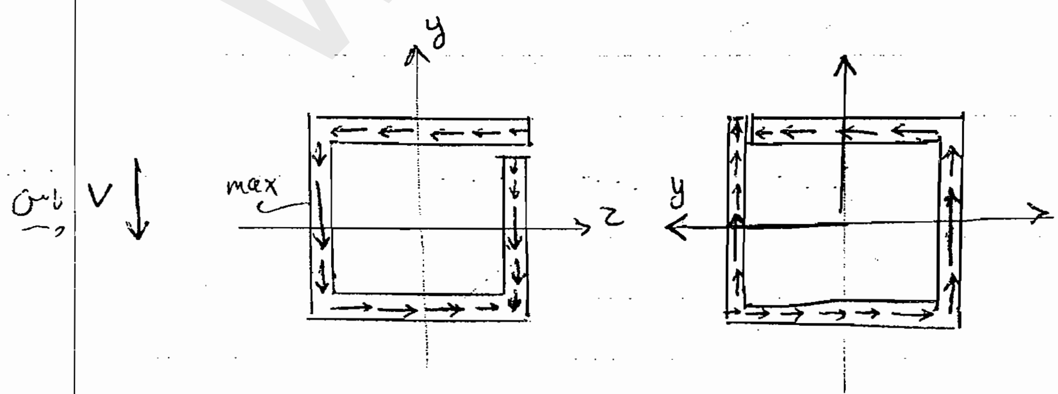
یا مرکز پیچش — centre of twist

تنش های برشی را در مقطع تعیین کردیم هر آنچه را حساب کردیم که اگر مقطع متقارن نباشد هر آنچه از نقطه ای می گذرد که به آن مرکز برشی گویند در مقطع متقارن همان C است

نیروی برشی نسبت به نقطه مرکز گشتاور پیچشی تولید نمی کند اما اگر از مرکز برشی نگذرد پیچش اضافه داریم



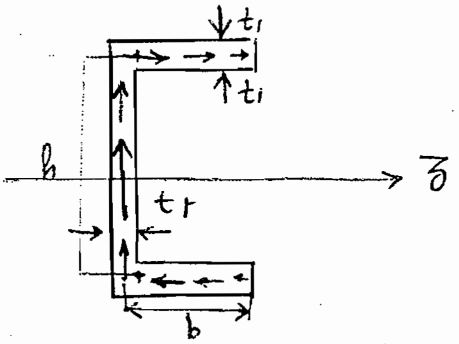
در یک شکل کلی برای محاسبه مرکز برشی باید هم نسبت به z و هم به y گشتاور بگیریم تا محل A بدست آید



چون شکاف روی هیچ کدام از محورها نیست هیچ کدام محور تقارن نیستند پس مرکز برشی روی هیچ محوری نیست

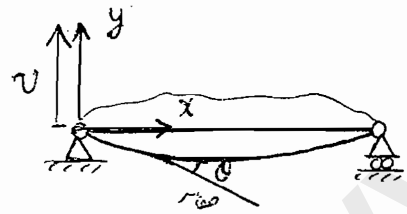
به نام خدا

علیرضا جوادیان
۸۴/۲/۳۱



* در جدارهای نازک می‌شود مرکز برش را تعیین کرد :

اول باید توزیع تنش های برشی را تعیین کنیم :



تغییر شکل تیر 8

یک تیر زیر اثر بار تغییر شکل می دهد :
تیر در امتداد محور y چه تغییری می کند

$\xrightarrow{x}$ در امتداد تیر

↑ y رو به بالا

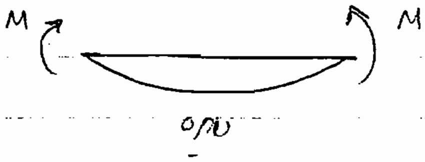
⊙ z رو به بیرون

محور تغییر شکل را محور v گویند :

* $\frac{EI}{\rho} = M$ ρ شعاع انحنای منحنی تغییر شکل تیر

* اگر M ثابت باشد ρ هم ثابت خواهد بود یعنی تیر به صورت دایره خم خواهد شد :

$(1+v'^2)^{3/2}$ $\quad 1 + \frac{3}{2}v'^2$



ولی اگر M ثابت نباشد ρ هم تغییر خواهد کرد پس
منحنی دیگر دایره نخواهد بود .

فرض ما این است که تغییر شکلها کوچک است پس طول قوس با طول تیر یکی است به علت کوچکی V :

$v \rightarrow$ چون که کوچک است طول
۲ ضلع را یکی می گیریم :

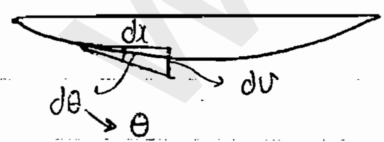
* $ds \approx dx$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} \quad , \quad \frac{EI}{\rho} = M$$

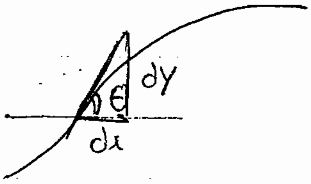
$$\frac{1}{\rho} = \frac{v''}{(1+v'^2)^{3/2}}$$

* $$\frac{EI\,v''}{(1+v'^2)^{3/2}} = M$$

حل این معادله به این شکل ساده نیست و به انتگرالهای
بیضوی منجر می شود چون تغییر شکلها کوچکند , $ds = dx$ داریم $\quad \tan\theta \simeq \theta$



$$\theta \leftarrow d\theta = \frac{dv}{dx} = v'$$



چون v' کوچک است پس از v'^2 در مقابل
1 صرفنظر می کنیم

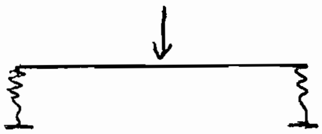
مثلاً اگر $v' = 0/1$ باشد $(1+v'^2)^{3/2} = 1/015$
یعنی خطا ۰/۰۱۵ است .

* پس می شود با یک خطای کوچک رابطه زیر را نوشت :

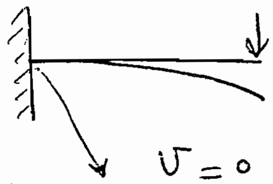
* $EI\,v'' = M$

اگر تیر روی ۲ تکیه‌گاه باشد تغییر شکل آن یا صفر است یا معلوم است که در انتگرال‌گیری به عنوان مقدار اولیه در نظر گرفته می‌شود

اگر تکیه‌گاه فنری داشته باشیم در تکیه‌گاه : در این صورت در تکیه‌گاه یک مقدار تغییر شکل به صورت تغییر مکان نقطه ناشی از نیروی فنر داریم که دیگر صفر نیست



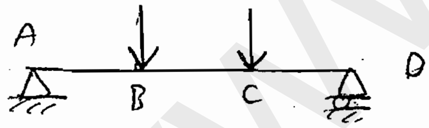
اگر تکیه‌گاه گیردار داشته باشیم مقادیر اولیه به صورت زیرند



$v = 0$

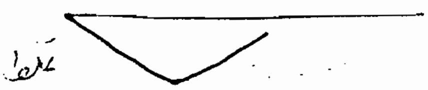
به خاطر کوچکی ← $\theta = v' = 0$ چون این نقطه قید گیردار دارد پس دوران نمی‌کند

* ممکن است تیر از چند بخش تشکیل شده باشد که برای هر بخش باید رابطه $EIv''=M$ را حل کرد

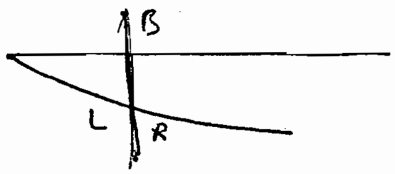


که شامل ۶ مقدار اولیه می‌شود :

برای بدست آوردن آنها باید در نقطه B منحنی تغییر شکل پیوسته باشد



چون در B : نمی‌توان v' متفاوت داشت



$$\begin{cases} v_L = v_R \\ \mathring{v}_L = \mathring{v}_R \end{cases}$$

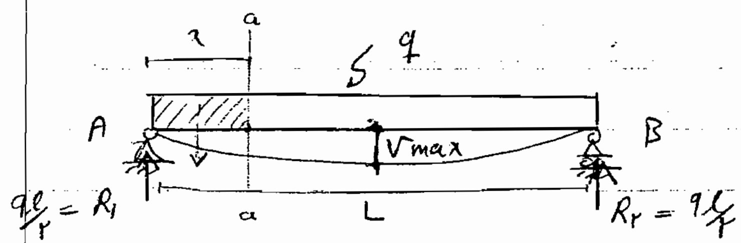
پس برای هر نقطه فصل مشترک ۲ شرط به صورت زیر می‌شود ایجاد کرد

n بخش باشد $n-1$ نقطه پیوستگی که هر نقطه ۲ رابطه

$\underbrace{2(n-1)+2}_{\text{تکیه‌گاه}} = 2n$ معادله لازم را می‌شود نوشت

$2n$ = مجهول

مثال 8



حل ـ $M = (\frac{ql}{2})x - (qx)\frac{x}{2}$ حول مقطع aa

$$EIv'' = \frac{ql}{2}x - (\frac{qx^2}{2})$$

$$EIv' = \frac{ql}{4}x^2 - \frac{q}{6}x^3 + A$$

$$EIv = \frac{qlx^3}{12} - \frac{qx^4}{24} + Ax + B$$

۲ ثابت اولیه داریم که باید از روی تکیه‌گاه‌ها استفاده کرد:

① در نقطه A $\Rightarrow x = 0 \Rightarrow v = 0$

$\Rightarrow B = 0$

② در نقطه B $\Rightarrow x = l \Rightarrow v = 0$

$\Rightarrow 0 = \frac{ql^4}{12} - \frac{ql^4}{24} + A(L) \Rightarrow A = -\frac{ql^3}{24}$

معادله تغییر شکل: $EIv = \frac{ql}{12}x^3 - \frac{q}{24}x^4 - \frac{ql^3}{24}x$

$EIv'' = M$ $\quad EI\frac{d^2v}{dx^2} = M$ $\quad$ M = مشتق دوم

V = مشتق ۳ $\quad V = \frac{dM}{dx} = EI\frac{d^3v}{dx^3}$

q = مشتق ۴ $\quad q = \frac{dV}{dx} = EI\frac{d^4v}{dx^4}$

$$\theta = \frac{dv}{dx}$$

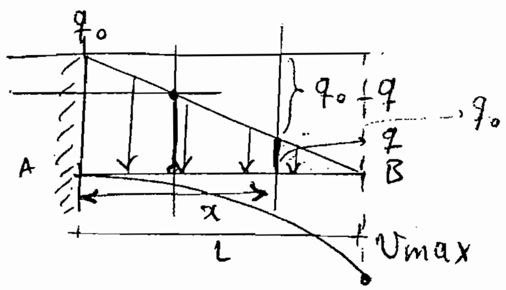
محاسبه v_{max} مثال قبل :

$$x=\frac{L}{2} \Rightarrow EIv_{max}=\frac{qL}{12}\left(\frac{L}{2}\right)^3-\frac{q(L/2)^4}{24}-\frac{qL^3}{24}(L/2)$$

$$=-\frac{5qL^4}{384} \Rightarrow v_{max}=-\frac{5qL^4}{384EI}$$

* این v_{max} را می شود برای تیر با بار پیوسته بکار برد قابل قبول است
چون v رو به بالا را مثبت گرفتیم پس منفی می شود پس منفی نشان می دهد که تیر رو به پایین خم شده
است اگر v رو به پایین را مثبت می گرفتیم $-M$ ظاهر می شد * $EIv''=-M$ *

مثال 8



حل - $\frac{q}{q_0}=\frac{L-x}{L}$ تشابه مثلث کوچک یا $\frac{q_0-q}{q_0}=\frac{x}{L}$ تشابه مثلث قسمت بالایی

$$q=q_0\left(1-\frac{x}{L}\right)$$

* $M=$ اگر از سمت چپ برویم باید لنگر تکیه گاه و لنگر ناشی از بار عکس العمل A
و لنگر بار ذوزنقه ای را حساب کنیم پس از راست می رویم

$$\Rightarrow M=-\frac{q(L-x)}{2}\times\underbrace{\frac{(L-x)}{3}}_{\text{نقطه اثر بار مثلثی در } L/3 \text{ است.}}$$

$$M=-q_0\frac{(L-x)^3}{6L}$$

$$* \quad EIv'' = -q_0 \frac{(L-x)^3}{6L}$$

$$EIv' = +q_0 \frac{(L-x)^4}{24L} + A$$

$$* \quad EIv = \frac{-q_0 (L-x)^5}{120L} + Ax + B$$

$$\underbrace{v' = 0}_{\text{دوران ندارد}} \quad , \quad \underbrace{v = 0}_{\text{تغییر مکان ندارد}} \quad \& \quad x = 0 \quad \gg$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \frac{-q_0 L^4}{120} + B \Rightarrow B = \frac{q_0 L^4}{120}$$

$$v' = 0 \Rightarrow \quad 0 = \frac{q_0 L^4}{24L} + A \Rightarrow A = -\frac{q_0 L^3}{24}$$

$$\Rightarrow \quad * \; EIv = \frac{-q_0 (L-x)^5}{120L} - \frac{q_0 L^3}{24} x + \frac{q_0 L^4}{120}$$

$* \quad x = L$ — v_{max} از نظر ریاضی نه بلکه بزرگترین مقدار تغییر شکل است
چون max تابع وقتی است که مشتق آن صفر شود :

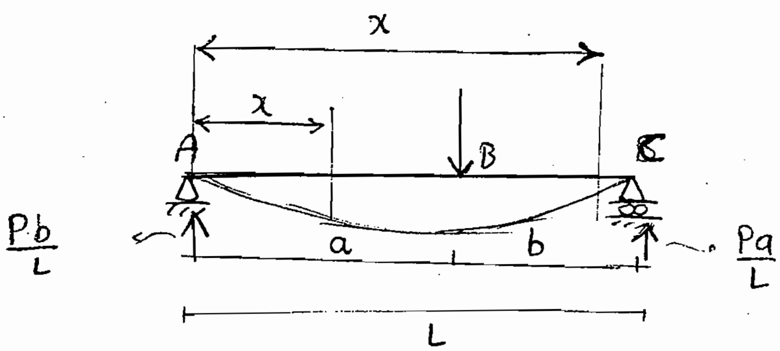
$$\Rightarrow EIv_{max} = -\frac{q_0 L^4}{24} + \frac{q_0 L^4}{120} = \frac{-q_0 L^4}{30}$$

$* \quad x = L$

$$\Rightarrow \quad EIv'_{max} = A = -\frac{q_0 L^3}{24}$$

مقدار θ max :
با فرض EI

مثال 8



حل -

در اینجا ۲ مقطع داریم :

$AB: \quad 0 < x < a$ $\qquad$ $BC: \quad a \leqslant x \leqslant \frac{b+a}{L}$

$M = (\frac{Pb}{L})x$ $\qquad$ $M = (\frac{Pb}{L})x - P(x-a)$

$EIV'' = \frac{Pb}{L}x$ $\qquad$ $EIV'' = \frac{Pb}{L}x - P(x-a)$

$EIV' = \frac{Pb}{2L}x^2 + A_1$ $\qquad$ $EIV' = \frac{Pb}{2L}x^2 - \frac{P}{2}(x-a)^2 + A_2$

$EIV = \frac{Pb}{6L}x^3 + A_1 x + B_1$ $\qquad$ $EIV = \frac{Pb}{6L}x^3 - \frac{P}{6}(x-a)^3 + A_2 x + B_2$

۲ تا شرط مربوط به تکیه‌گاه‌ها است ، ۲ تا معادله با استفاده از مفصل مشترک بدست می‌آید :

شیب نمودار در نقطه B

$* \quad x = a \Rightarrow v'_L = v'_R \Rightarrow A_1 = A_2$

$x = a \Rightarrow v_L = v_R \Rightarrow B_1 = B_2$

مقدار در نقطه B

* در هر سه گذر برابر $(x-a)$ را نباید باز کرد تا اینکه گذر را همه از سمت چپ بنویسیم تا بتوانیم حالات را تکرار کنیم تا حالات قبلی در مفصل مشترک بوجود آید به علاوه حالات اضافه که در مفصل مشترک باید صفر شوند .
اگر حالات مثلاً حالات قبلی باشد به علاوه حالاتی که در مفصل مشترک صفر شوند دیگر نیازی نیست A_1 ، A_2 یا B_1 و B_2 بگذاریم می‌توانیم از اول یک مقدار بگذاریم .

$* \quad x = 0 \Rightarrow v = 0 \Rightarrow \boxed{B_1 = 0} \Rightarrow B_1 = B_2 = 0$

با استفاده از معادلات دوم داریم : $x = L \Rightarrow v = 0 \Rightarrow 0 = \frac{Pb}{6}L^2 - \frac{P}{6}b^3 + A_2 L$

$\Rightarrow \boxed{A_2 = -\frac{Pb}{6L}(L^2 - b^2)}$

$* \quad x = a \Rightarrow EIV_B = \frac{Pba^3}{6L} - \frac{Pba(L^2-b^2)}{6L} = \boxed{-\frac{Pab}{6L}(-a^2 + L^2 - b^2)}$

در هر دو معادله مشترک است . با استفاده از هر معادله‌ای :

* تغییر شکل نقطه B

* برای محاسبه تغییر شکل max اول مختص AB را بررسی می‌کنیم ؛

$$v' = 0 \Rightarrow \frac{Pb}{2L}x^2 - \frac{Pb}{6L}(L^2-b^2) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{L^2-b^2}{3} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{L^2-b^2}{3}} \qquad ①$$

وقتی $a<b$ یا $a \geq b$ هر دو یکی است پس روی $a \geq b$ بحث می‌کنیم ؛

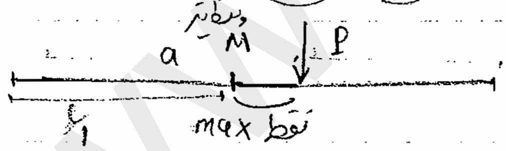
فرض $a \geq b \Rightarrow b \leq L/2 \Rightarrow x > \sqrt{\frac{L^2-(\frac{L}{2})^2}{3}} = \frac{L}{2}$

* اگر $a>b$ باشد $x > \frac{L}{2}$ خواهد بود $\quad x > L/2$

$$x = \sqrt{\frac{(L-b)(L+b)}{3}} = \sqrt{\frac{a(L+b)}{3}}$$

$$x < \sqrt{\frac{a(2a+a)}{3}} = a \qquad \begin{matrix} L=2a \\ b=a \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \frac{L}{2} < x < a$$



نقطه max بین a , $L/2$ خواهد بود

از ① داریم $EIv_{max} = \frac{Pb}{6L}\left(\frac{L^2-b^2}{3}\right)^{3/2} - \frac{Pb}{6L}(L^2-b^2)\left(\frac{L^2-b^2}{3}\right)^{1/2}$

تغییرشکل max $= \frac{Pb}{6L}(L^2-b^2)^{3/2}\left[\frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right] = \frac{-bP}{9\sqrt{3}L}(L^2-b^2)^{3/2}$

تغییرشکل وسط

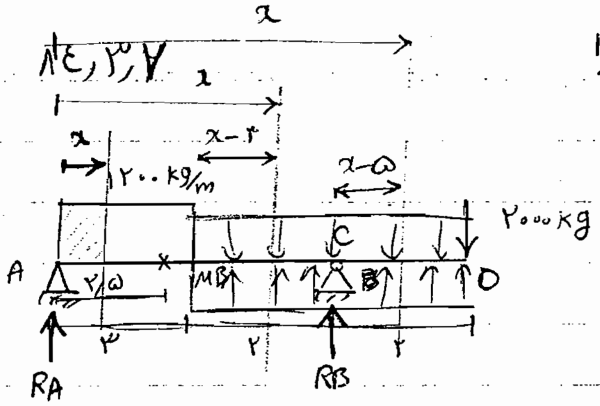
* $x = L/2$
* $EIv_M = \frac{Pb}{6}\left(\frac{L^2}{8}\right) - \frac{Pb}{6\times 2}(L^2-b^2) = \frac{Pb}{48}[L^2 - 4L^2 + 4b^2]$

$$\Rightarrow EIv_M = -\frac{Pb}{48}[3L^2 - 4b^2]$$

* همیشه اختلاف بین تغییر شکل وسط و تغییر شکل max کمتر از ۲/۵ درصد است حتی برای چندبار هم تغییر شکل وسط را به عنوان تغییر شکل max می‌پذیرند.

92

۱۴,۳,۲۷ — به نام خدا — ج ۲ ۴



مثال: در شکل روبرو خیز مکان نقاط M وسط دهانه تیر و D انتهای آزاد را تعیین کنید

$I = 50000$

$E = 2\times10^{6}$

AB , BC , CD معادلات جدا دارند

$* \quad \sum M_A = (1200)(3)(1.5) + (-R_B)(5) + (2000)(7) = 0$

$R_B = 3880\ kg$

$* \quad \sum F_y = (R_A) + 3880 - 1200(3) - 2000 = 0$

$R_A = 1720\ kg$

AB $\quad 0 < x < 3$

$M = (1720)x - (1200)(x)(x/2)$

$EIV'' = M$

$EIV' = 860x^2 - 200x^3 + A$

$EIV = \frac{860}{3}x^3 - 50x^4 + Ax + B$

$* \quad \begin{cases} x=0 \\ V=0 \end{cases} \Rightarrow B = 0$

$\begin{cases} x=5 \\ V=0 \end{cases} \Rightarrow$ در معادله دوم

BC $\quad 3 \le x \le 5$

بار معادل

$M = 1720x - 600x^2 + \frac{1200(x-3)^2}{2}$

$EIV'' = M$

$EIV' = 860x^2 - 200x^3 + 200(x-3)^3 + A$

$EIV = \frac{860}{3}x^3 - 50x^4 + 50(x-3)^4 + Ax + B$

$0 = \frac{860}{3}(5^3) - 50(625) + 50(16) + A(5) + \cancel{B}$

$\Rightarrow A = -1077$

CD $\quad 5 < x \le 7$

$M = 1720x - 600x^2 + 600(x-3)^2 + 3880(x-5)$

$EIV'' = M$

$EIV' = 860x^2 - 200x^3 + 200(x-3)^3 + 1940(x-5)^2 + A$

$EIV = \frac{860}{3}x^3 - 50x^4 + 50(x-3)^4 + \frac{1940}{3}(x-5)^3 + Ax + B$

برای این معادلات اگر کار آسونه فرض می‌کنیم بار گسترده تا D ادامه دارد و یک بار گسترده رو به بالا هم اعمال می‌کنیم.

$M \Rightarrow x = 2.5 \Rightarrow EIV_M = \frac{860}{3}(2.5)^3 - 50(2.5)^4 - 1077(2.5) = -166$

$* \quad EI = 2\times10^{6}\times 50000\ kg\,cm^2 = 10^{6}\ kg.m^2$

$* \quad v_M = -0.166\ mm$

$x = 7$ معادله سوم $\Rightarrow EIv_D = \frac{865}{3}(7)^3 - 50(7^4) + 50(4^4) + \frac{1940}{3} \times 8 - 1077 \times 7$

$EIv_D = -11289 \Rightarrow v_D = -11.29\ mm$

اشکال این روش این است که مجبوریم برای قسمت های مختلف یک معادله بنویسیم با استفاده از قراردادی که ماکالی پیشنهاد کرد می توان این معادلات را به حداقل رساند

ماکالی

تابعی جدید به صورت $\langle x-a \rangle^n$ تعریف می کنیم:

$$\begin{cases} x \leqslant a & \text{صفر} \quad \text{اگر} \\ x > a & (x-a)^n \quad \text{اگر} \end{cases}$$

در مثال قبل، می توان معادله سوم را برای همه نقاط تیر بکار برد

چون در $x<3$ جملات $(x-3)^n$ حذف می شوند

$$* \quad EIv'' = 1720x - 900x^2 + 900\underbrace{\langle x-3 \rangle^2}_{\text{ماکالی}} + 3880\underbrace{\langle x-5 \rangle}_{\text{ماکالی}}$$

$x<3 \Rightarrow$ صفر

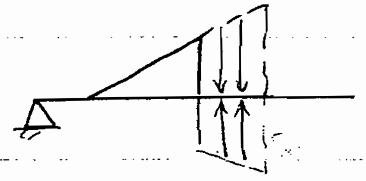
$x>3 \Rightarrow (x-3)^2$

* تابع اولیه ماکالی: $\boxed{\frac{1}{n+1}\langle x-a \rangle^{n+1}}$

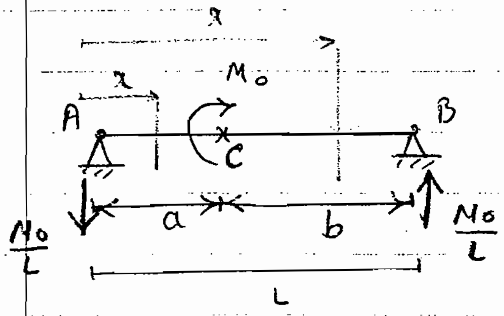
بعد از بدست آمدن EIv شرایط مرزی را می نویسیم $\begin{cases} x=0 \\ v=0 \end{cases}$, $\begin{cases} x=5 \\ v=0 \end{cases}$

اول از همه عکس العمل را می نویسیم

جمله $\langle x-2\rangle^{4}$ و $\langle x-5\rangle^{3}$ بازای $x=2/5$ صفر می‌شوند
در $x=7$ همه جملات حساب می‌شوند



* نیروی ۱ مثلثی هم
برای این که معادلات
تکرار شوند بار را ادامه
می‌دهیم؛



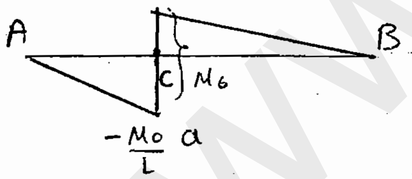
گشتاور متمرکز

چون M_0 در جهت مثلثاتی
است پس نیروی در A و B باید
در جهت عکس باشند؛
تا بتوانند کوپل نیرو باشند.

* $M = -\frac{M_0}{L}x \qquad 0 \leq x \leq a$

* $M = -\frac{M_0}{L}x + M_0 \qquad a \leq x \leq L$

برای این که جملات تکرار شوند و در شروع هم صفر باشد
M را می‌نویسیم



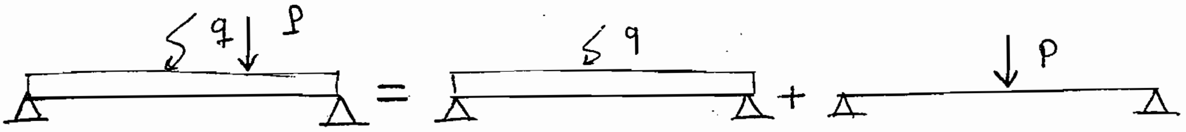
* $M = -\frac{M_0}{L}x + M_0\langle x-a\rangle^{0}$

برای هر ۲ قسمت درست است

* تابع اولیه .. + $M_0\langle x-a\rangle^{1}$

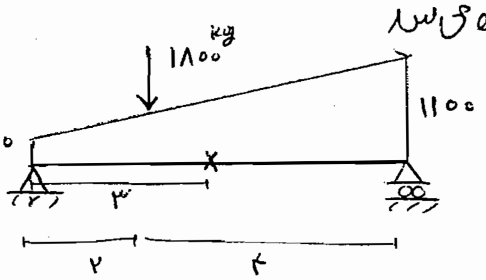
.. + $\frac{M_0}{2}\langle x-a\rangle^{2}$

روش جمع آثرها 8 Superposition



در این روش حالتهای ساده بارگذاری را از جداول استفاده می کنند

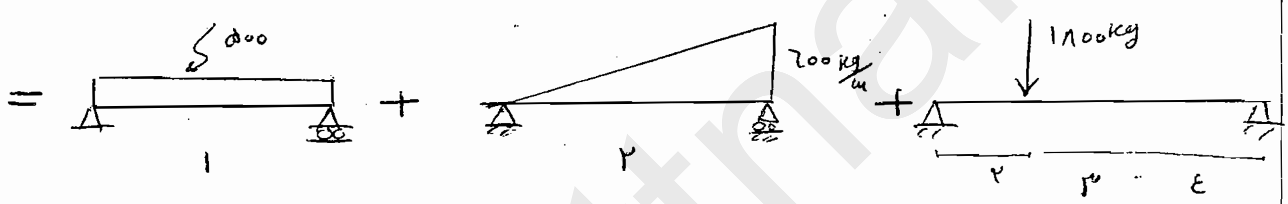
مثال 8 ۵۰۰



EI 10^6 kg m^2

10^{10} kg cm^2

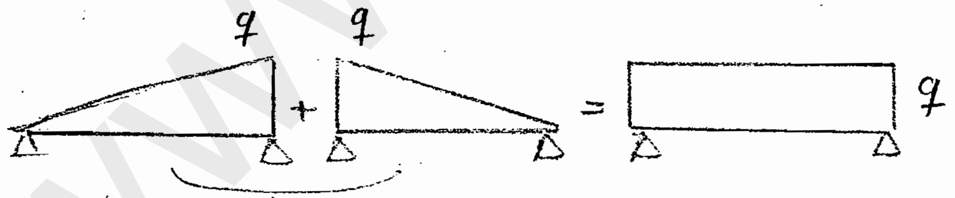
تغییر مکان وسط تیر را بیابید ?



* تغییر مکان هر ۳ را با هم جمع کنیم تغییر مکان وسط تیر را بیابید ?

$$V_{1M} = \frac{5qL^4}{384EI} = \frac{5(500)(6^4)}{384\times10^6} = 8/4375\times10$$

② برای

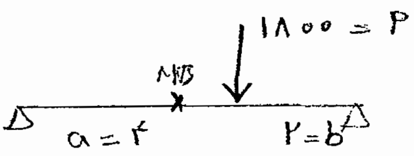


تغییر مکان وسط این دو با هم برابر است

پس تغییر مکان هر یک نصف تغییر مکان V_M است

$$V_{2M} = \frac{5qL^4}{768EI} = \frac{5(600)(6^4)}{768\times10^6}$$

③

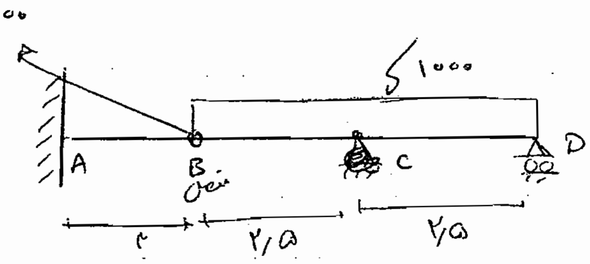


$$a \geq b \Rightarrow V_{3M} = \frac{Pb(3L^2-4b^2)}{48EI}$$

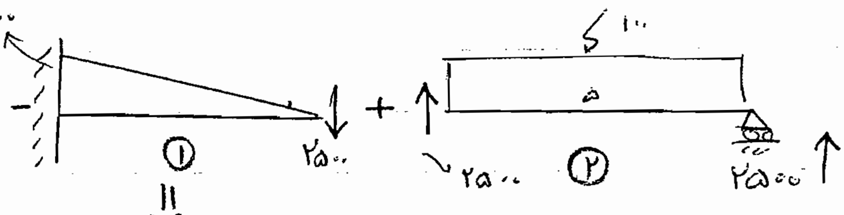
$$= \frac{1800\times2\times(3(36)-4(4))}{48\times10^6}$$

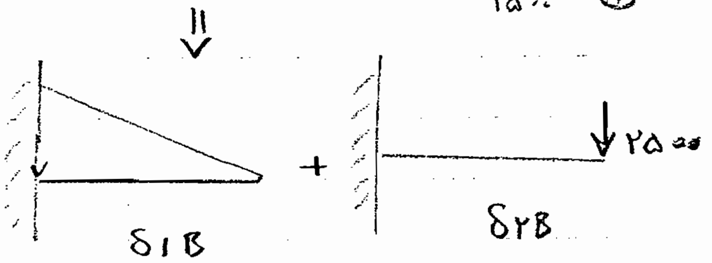
$V_M =$ mm $\longrightarrow \Rightarrow 20/39\times10^{-3}$

مثال :



حل -

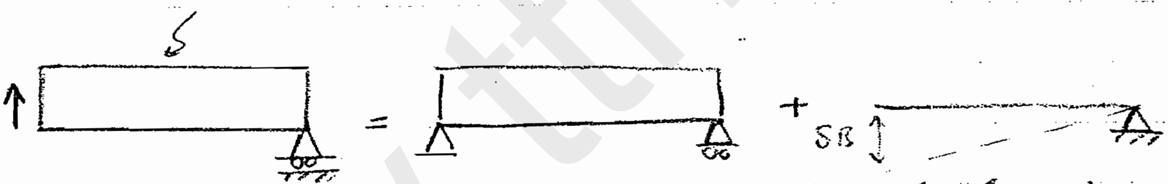




در حل داریم

$\delta B = \delta_{1B} + \delta_{2B}$

② :



فرض می کنیم که نیرو نداریم
ولی یک تغییر مکان داریم که
در مرحله قبل بدست آمد
از روی این شکل تغییر مکان
تمام نقاط بدست می آید.

پیچ ها $\tau_w \geq \dfrac{V}{A}$

مقطع چپ : $1200 \geq \dfrac{F/10}{(0/8)^2 \pi} \Rightarrow F \leq ۲۴۱۳۰$

مقطع راست : $1200 \geq \dfrac{F/6}{(1)^2 \pi} \Rightarrow F \leq ۲۲۶۲۰$

ورقی :

Ⓐ ورق $1800 \geq \dfrac{F/5}{0/8 \times 1/6} \Rightarrow F \leq 11520$

Ⓑ ورق $1800 \geq \dfrac{F/3}{0/8 \times 2} \Rightarrow F \leq 8640$

مقطع ضعیف ورق

سمت چپ C, D : $1800 \geq \dfrac{F/10}{0/6 \times 1/6} \Rightarrow F \leq$

سمت راست C, D $1800 \geq \dfrac{F/6}{0/6 \times 2}$

$\Rightarrow \boxed{F_w = 8640} \text{ kg}$

معلوم می شود که ضعف از ورقی است ؛

به طور کلی هر چه قطر پیچ را بزرگتر کنیم ؛ تعداد کمتر ؛ قطر زیاد هم باعث می شود که ابعادی
وضعیت خطرناکتری پیدا کند در حالیکه نیرو ... قطر به توان ۲

بهتر است تعداد پیچ ها را زیاد و قطر را کم کنیم ؛ تا ورقی بیشتر شود ؛

اشکال این اتصال این است که سطح پیچ ها کم است ؛

۸۴/۱/۱۵ به نام خدا ج ۱۱

آنالیز تنش در ۳ مورد صورت گرفت :

تنش ناشی از بار محوری

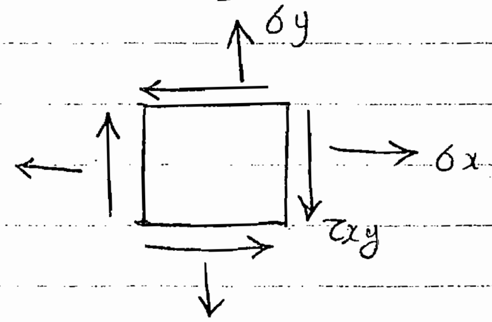
تنش دو محوری

برش خالص

حال به بررسی تنش مسطح می پردازیم :

تنش مسطح

حالتی از تنش است که مولفه های تنش در امتداد دو محور هستند تنش هایی که در امتداد محور سوم هستند صفر می شوند :



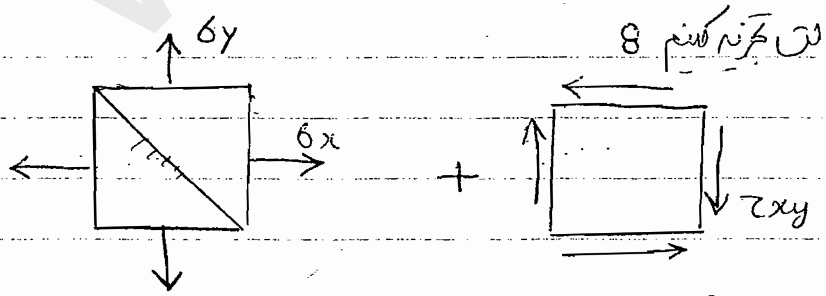
$\sigma_x\ ,\ \sigma_y\ ,\ \tau_{xy} = -\tau_{yx}$

$\sigma_z = 0$

$\tau_{xz} = -\tau_{zx} = 0$

$\tau_{yz} = -\tau_{zy} = 0$

می توانیم تنش مسطح را به دو حالت تجزیه کنیم :



تنش دو محوری برش خالص

کرنش خالص

$$\varepsilon_x = 0$$

$$\varepsilon_y = 0$$

$$\varepsilon_z = 0$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad *$$

$$\gamma_{yz} = 0 \quad *$$

$$\gamma_{zx} = 0 \quad *$$

تنش دو محوری

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x)$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$$

$$\gamma_{xy} = 0$$

$$\gamma_{xz} = 0$$ نیز زاویه عوض نمی‌شود

$$\gamma_{zx} = 0$$

$$\gamma_{xy} = 0$$

پس در تنش سطح داریم 8

تنش سطح

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x)$$

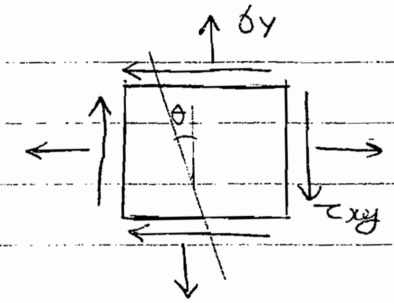
$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\gamma_{yz} = 0$$

$$\gamma_{zx} = 0$$

همه این روابط مربوط به
قسمت خطی منحنی تنش-کرنش است.



در این حالت باز هم به دو صورت تجزیه می کنیم :

برش خالص

$$\sigma_\theta = -\tau_{xy}\sin 2\theta$$

$$\tau_\theta = \tau_{xy}\cos 2\theta$$

تنش دو محوری

$$\sigma_\theta = \sigma_x\cos^2\theta + \sigma_y\sin^2\theta$$

$$\Rightarrow$$

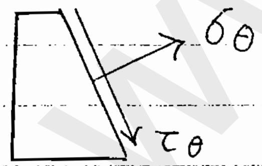
$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\theta$$

$$\tau_\theta = \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\theta$$

تنش مسطح

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\theta - \tau_{xy}\sin 2\theta$$

$$\tau_\theta = \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta$$



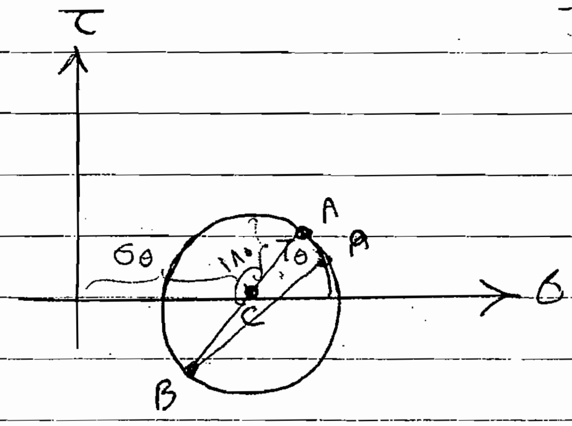
در سطوح خارجی اگر نیروی خارجی وارد نشود تنش مسطح داریم

$$* \quad \left(\sigma_\theta - \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_\theta^2 = \left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2$$

این رابطه مستقل از θ است و در واقع معادله یک دایره است :

* $(X-\alpha)^2 + Y^2 = R^2$

یعنی تنش ها طوری تغییر می کنند که در معادله یک دایره صادق اند 8



O مرکز دایره $\left| \begin{array}{l} \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \\ 0 \end{array} \right.$

به این دایره، دایره مور برای تنش ها — Mohr's circle for stresses

مور دانشمند آلمانی است

برای رسم دایره یکبار صفحه قائم و یکبار صفحه افقی را در نظر می گیریم

در صفحه افقی $\theta = 0$ است پس یک نقطه به این صورت است — $A \left| \begin{array}{l} \sigma_x \\ \tau_{xy} \end{array} \right.$

〃 〃 قائم $\theta = 90$ 〃 〃 〃 〃 〃 〃 — $B \left| \begin{array}{l} \sigma_y \\ \tau_{yx} = -\tau_{xy} \end{array} \right.$

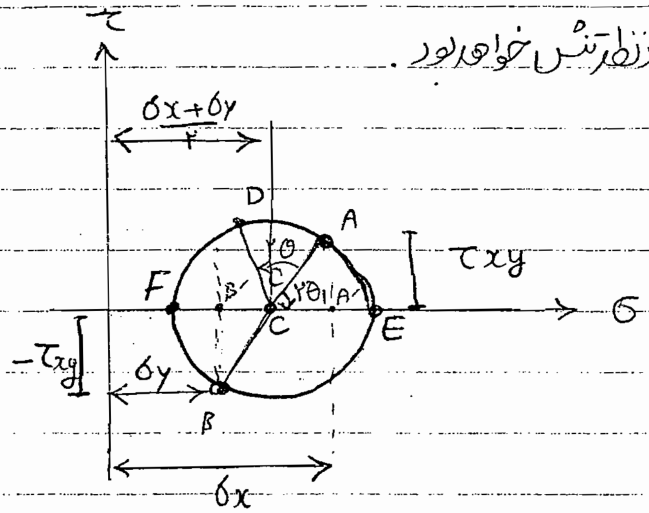
$\overline{AB}$ در واقع قطر دایره مور است چون O در وسط AB قرار می گیرد

کافی AB را مشخص کرده و به قطر AB یک دایره بزنیم.

دو صفحه در المان به اندازه 90° اختلاف دارند ولی روی دایره مور به اندازه 180°

* به طور کلی اگر زاویه بین دو صفحه α باشد زاویه بین دو نقطه نظیر آنها در دایره 2α خواهد بود.

وقتی دایره مور رسم شد در یک صفحه با زاویه θ می‌خواهیم تنش‌ها را بیابیم از A در دایره مور با اندازه 2θ جدا می‌کنیم نقطه مورد نظر دارای مقادیر مورد نظر تنش خواهد بود.



E و F نقاطی هستند که σ_{max} است و τ_θ نیز صفر است.

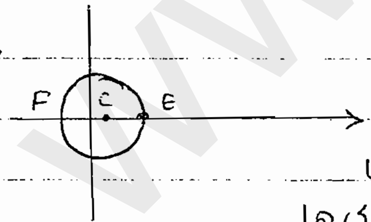
$$B'A' = \sigma_x - \sigma_y \quad , \quad AA' = \tau_{xy} \Rightarrow AC^2 = CA'^2 + AA'^2 = R^2$$

$$\sigma_{max} = \overline{OC} + R = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{min} = \overline{OC} - R = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

تنش‌های اصلی

اگر دایره به صورت روبرو باشد

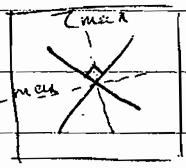


E دارای بزرگترین تنش فشاری است یعنی تنش منفی است و فشاری و بزرگترین جزای فشاری ها.

E دارای بزرگترین تنش کششی است یا همان σ_{max} از نظر جبری؛

جهت در عقربه ساعت $\tan 2\theta_1 = \dfrac{\tau_{xy}}{\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}} = \dfrac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}$

با مشخص شدن $2\theta_1$ می توان زاویه بین صفحات را در المان یافت
این صفحات را صفحات اصلی گویند که تنش های اصلی روی آنهاست

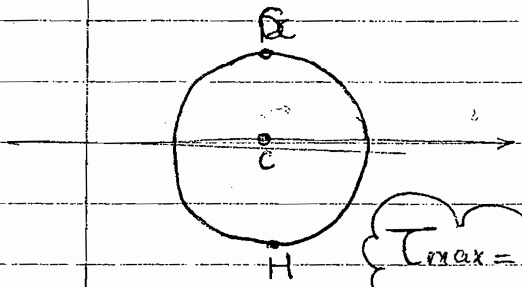


صفحات اصلی ⟵ principal planes

دو صفحه عمود بر هم اند

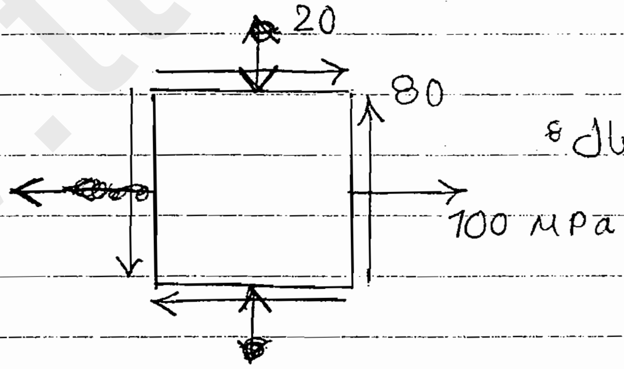
تنش برشی ندارند F و E

محورهای اصلی در واقع عمود بر صفحات اند یعنی در امتداد دو تنش اصلی اند ؛ principal axes



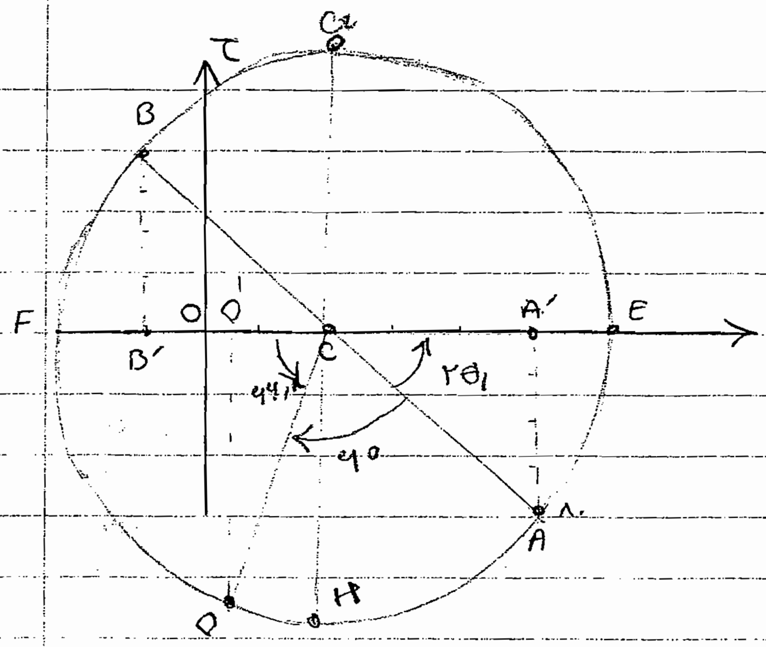
H و G در صفحاتی هستند که تنش برشی max دارند که در واقع صفحات نیمساز صفحات اصلی اند

مقدار تنش برشی ماکزیمم برابر شعاع دایره است ؛ $\tau_{max} = \pm R$



مثال ؛ در نقطه ای از سازه که تنش مسطح است مؤلفه های تنش مطابق شکل می باشند اولاً صفحات اصلی و تنش های اصلی را بیابید؟ ثانیاً تنش برشی max و صفحاتی که دارای این تنش اند را معین کنید؟ ثالثاً تنش ها را در صفحه ای که زاویه ۳۰° با جهت عقربه ساعت با صفحه قائم می سازد بیابید؟

حل ـ $A \left| \begin{array}{l} 100 = \sigma_x \\ -80 = -\tau_{xy} \end{array} \right.$ $\quad B \left| \begin{array}{l} -20 \\ 80 \end{array} \right.$ فشاری، جهت در عقربه ساعت



$* \ \overline{OA'} = ۱۰۰$

$* \ \overline{OB'} = ۲۰$

$* \ \overline{A'B'} = ۱۲۰$

$* \ \overline{CA'} = ۶۰$

$* \ R = \overline{CA} = \sqrt{۶۰^۲ + ۸۰^۲}$

$= ۱۰۰$

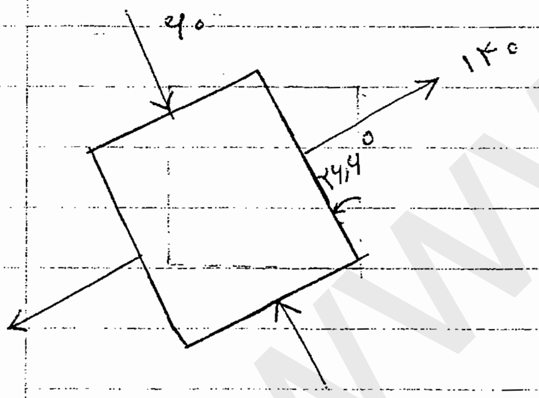
$$\tan ۲\theta_1 = \frac{AA'}{CA'} = \frac{۸۰}{۶۰} = \frac{۴}{۳} \Rightarrow ۲\theta_1 = ۵۳٫۲^\circ$$

$$\Rightarrow \theta_1 = ۲۶٫۶^\circ$$

* اگر از A که در صفحه قائم است به اندازه °۲۶٫۶ در جهت مثلثاتی دوران دهیم به صفحه اصلی می‌رسیم

$\overline{OE} = \overline{OC} + R = ۴۰ + ۱۰۰ = ۱۴۰$ کشش

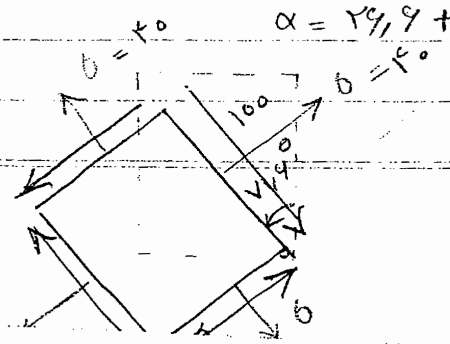
$\overline{OF} = ۱۰۰ - ۴۰ = ۶۰$ فشار



ب » $\tau_{max} = \pm R = \pm ۱۰۰$

صفحات آن [illegible] صفحات اصلی اند

$\alpha = ۲۶٫۶^\circ + ۴۵^\circ = ۷۱٫۶^\circ$



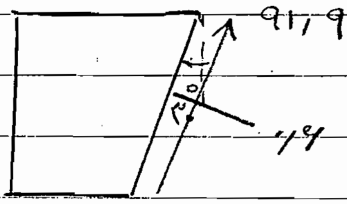
* در اینجا تنش عمودی هم داریم برخلاف قسمت قبل؛
حرکت τ از نقطه A در صفحه قائم
شروع شد.

ج

روی دایره از نقطه که نقطه نظیر روی صفحه قائم است
باندازه 60° جدا می کنیم :

$$OD' = OC - CD' = 40 - 100 \cos 66.8 = 0.6$$

$$DD' = 100 \sin 66.8 = 91.9$$



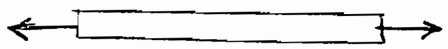
91,9 → با دایره گرد

صفحه ای که به صفحه قائم نزدیکتر است تنش آن به تنش صفحه قائم نزدیکتر است وقتی از فرمول استفاده می کنیم

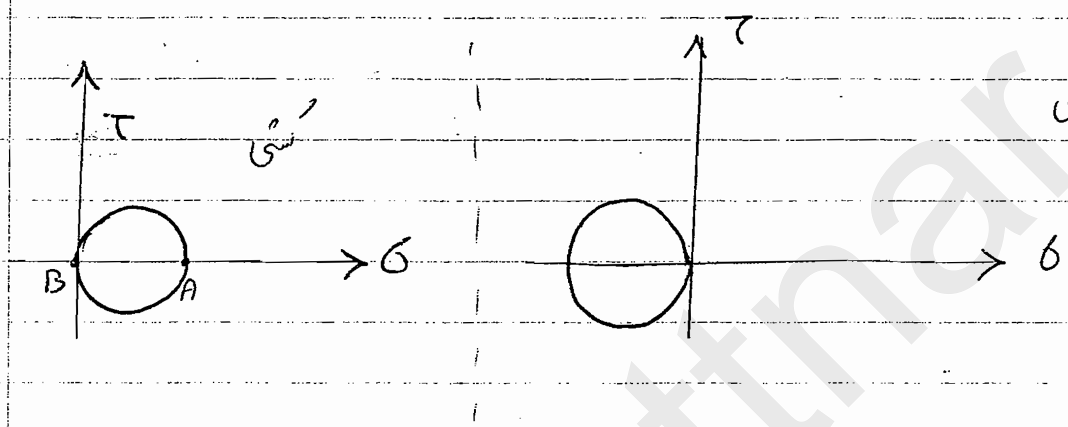
در تنش برشی هم یک صفحه به قائم نزدیکتر است تنشی صفحه ای که به صفحه قائم نزدیکتر است علامت تنش برشی صفحه قائم را دارد.

مثال ۱۲-۲۴-۱۲ از بیر و جانستون P

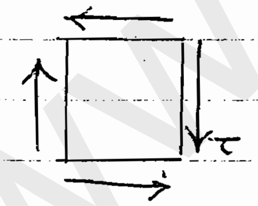
دایره موهر برای یک بار صفحه ای در یک صفحه :



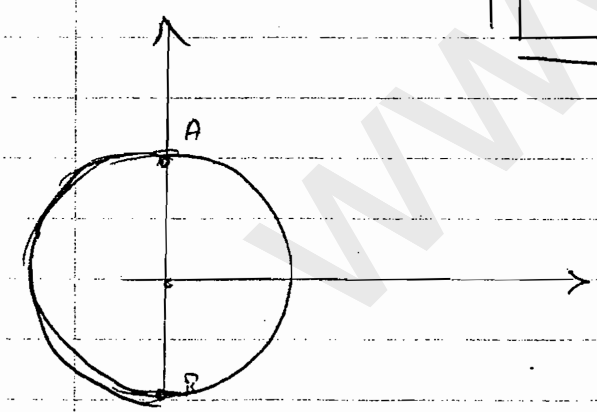
$A\,|\,{}^{\sigma_x}_{0}$ $B\,|\,{}^{0}_{0}$



دایره مور در برش خالص :



$A\,|\,{}^{0}_{\tau}$ $B\,|\,{}^{0}_{-\tau}$



$O\,|\,{}^{0}_{0}$

اگر مرکز دایره مور در $\overset{0}{\,}|$ باشد حتماً برش خالص داریم

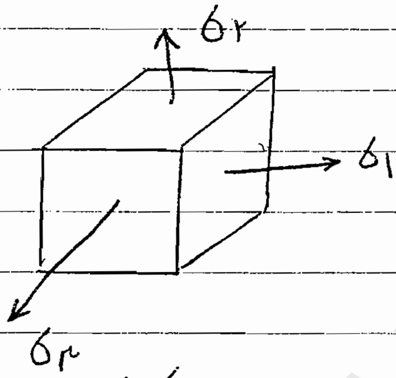
حالت کلی تنش همه مؤلفه‌ها را داریم. در تنش مسطح دو صفحه عمود بر هم داشتیم که تنش های max و min روی آنها قرار داشت

در حالت کلی تنش ۳ صفحه عمود بر هم داریم که این صفحات تنش برشی ندارند و یکی بزرگترین تنش و دیگری کوچکترین تنش را دارد

این صفحات را صفحات اصلی گویند ۳ صفحه اصلی داریم:

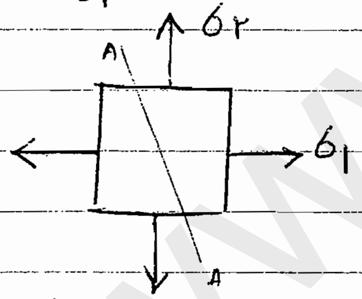
امتداد اصلی تنش یا ۳ امتداد داریم: در مسطح ۲ تنش اصلی ۲ صفحه اصلی و ۲ امتداد اصلی داشتیم:

المان از ۳ بعدی



برای هر صفحه المان می توان دایره مور را رسم کرد

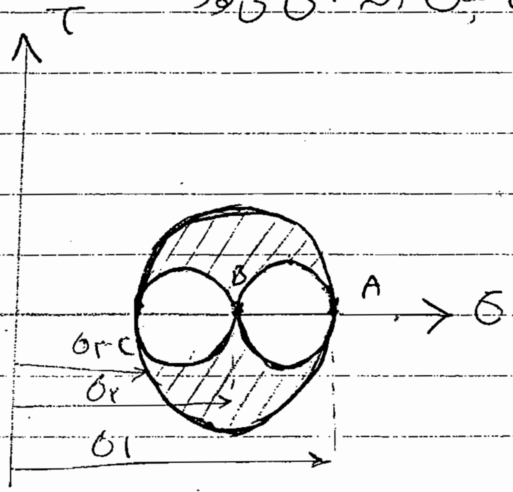
این تنش تنش مسطح نیست چون σ_3 را عمود بر صفحه داریم:



ولی این σ_3 در فرمولهایی که بدست آوردیم اثری ندارد

چون اثر آن با σ_3 پشت صفحه خنثی می‌شود

$A \left| \begin{matrix} \sigma_1 \\ 0 \end{matrix} \right.$, $B \left| \begin{matrix} \sigma_2 \\ 0 \end{matrix} \right.$



دایره مور برای دو بعد ① و ② است

تنش های صفحه A - A روی این دایره کوچک قرار دارند.