SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

۱۳ تا ۲ حل تمرین (۲۰۴)

شنبه ۳ / ۸۳ / ۶

مهسا محمدی

مقاومت مصالح ۱

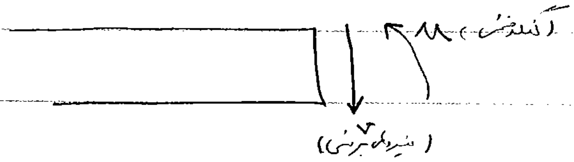
استاد سیروس غلامپور

دانشگاه صنعتی شریف

STAEDTLER

چپ به راست

در تیر :



بازو = سطح مقطع مستطیلی

میله = سطح مقطع دایروی

بارگذاری محوری = یعنی در امتداد یک محور نیرو وارد شود [مثلاً فقط در امتداد محور x ها به سازه نیرو وارد شود]

بارگذاری چند محوری = یعنی در امتداد چند محور نیرو وارد شود [مثلاً در امتداد هر سه محور مختصات به سازه نیرو وارد شود]

الف) محاسبات سازه

۱) بارگذاری لنگر و نیرو: تعیین کنیم بار خارجی به سازه وارد می‌شود به کجا وارد می‌شود و مقدار آن چقدر است [یعنی تعیین نیروها و لنگرهای خارجی وارد بر سازه] ، [بارگذاری، مهندسی زلزله، پل سازی، ...]

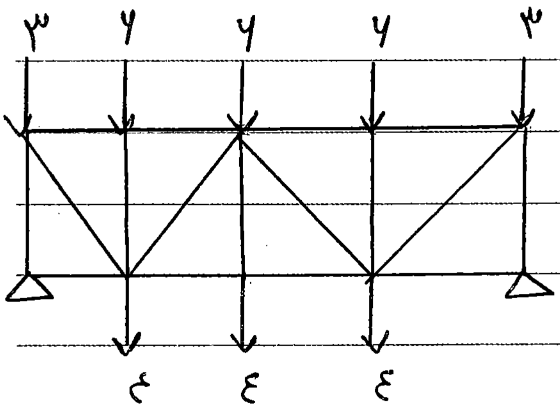
۲) تحلیل (استاتیک ـ تحلیل سازه‌های ۱ و ۲): (نیروی داخلی را بدست آوریم) تعیین نیروها و لنگرهای داخلی وارد بر سازه

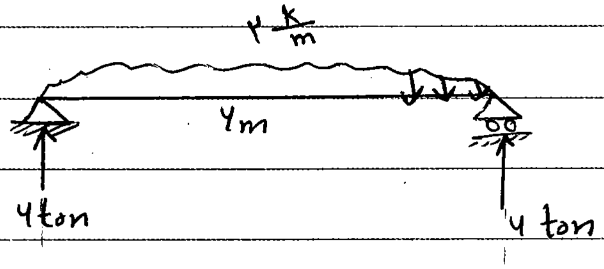
تعیین سازه‌های معین ـ تعیین سازه‌های نامعین

۳) طراحی: مقاومت مصالح ۱ و ۲ (طراحی سازه) ـ طراحی سازه‌های فولادی ۱ و ۲ ـ طراحی سازه‌های بتن آرمه ۱ و ۲

به مقاومت مصالح بستگی دارد

ب) اجرا

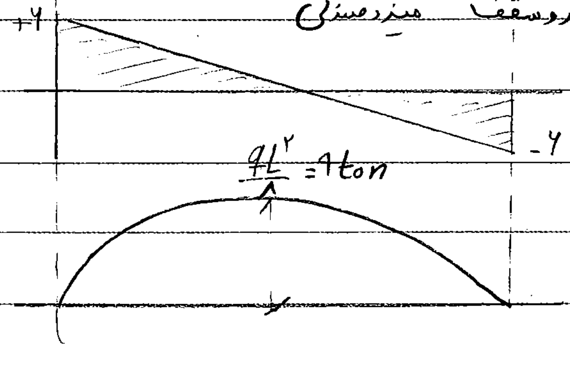




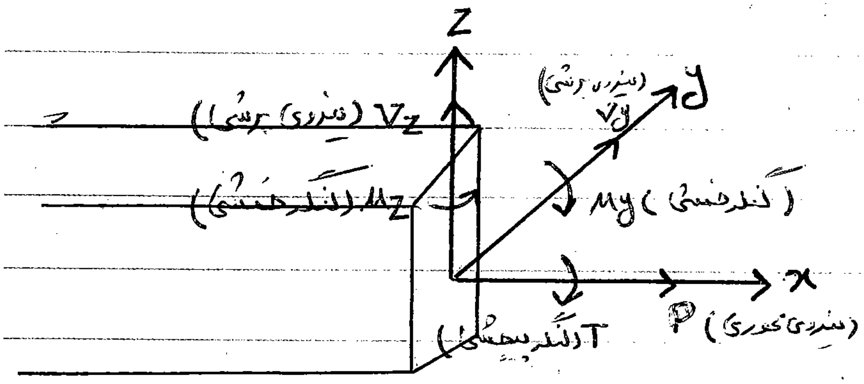
بارگذاری: بار ثقل یا بار عمودی ـ بار جانبی یا افقی

(بار مرده و بار زنده)   (زلزله ـ باد ـ ...)

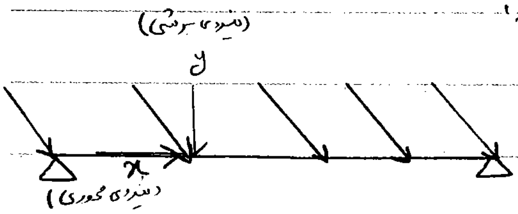
دیوار و سقف   میز و صندلی



تیر مقطع: ۳ نیرو و ۳ لنگر دارد.

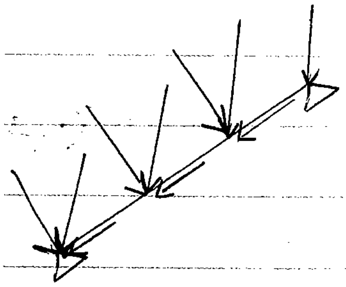


در خرپا فقط نیروی محوری داریم چون عضو دو نیرویی دارد.
P

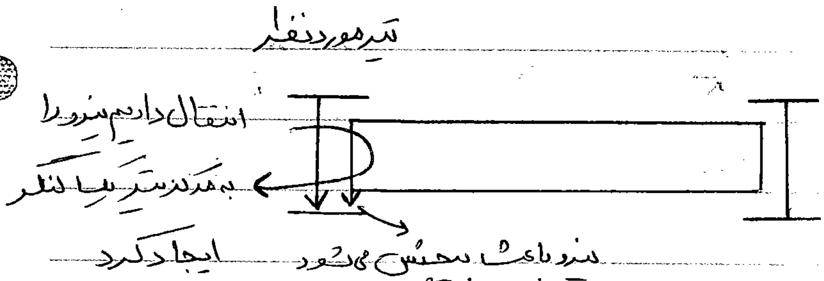


در تیر: حتما نیروی برشی و لنگر خمشی هست

نیروی محوری هم در تیر می‌تواند وجود داشته باشد مانند: تیرهای مورب یا
تیر سقف راه پله



ولی تیر می‌تواند پیچش هم داشته باشد



نکته:

بارگذاری برای تحلیل مهم است — برای طراحی، تحلیل مهم است

در نیروی محوری، علامت مهم است. چون مقاومت مصالح در کشش و فشار با هم فرق می‌کند

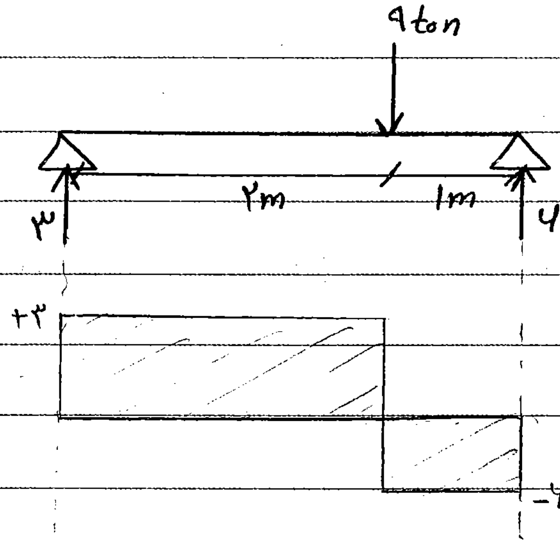
رفتار مصالح در کشش و فشار با هم فرق دارد.

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

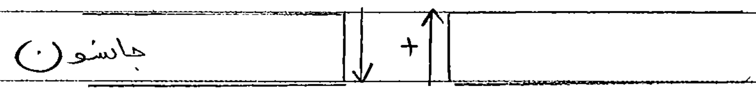
نتیجه: در طراحی می‌خواهیم انجام دهیم علامت مهم است

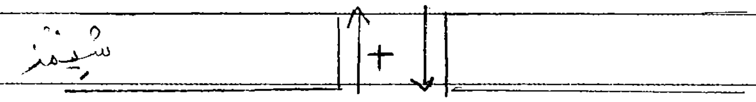
مقاومت برشی مصالح در مثبت و منفی فرقی ندارد.



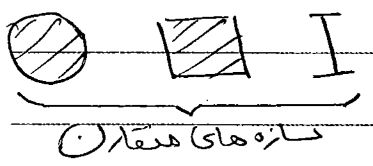
این تیر باید تحمل 6ton برش را داشته باشد علامت مهم نیست

نکته:



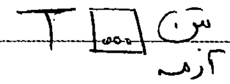


نکته: تنش برشی هم در علامت فرق ندارد اما تنش خمشی در علامت مهم است



فقط برای سازه‌های متقارن علامت در تنش خمشی مهم نیست!

اما برای سازه‌های غیرمتقارن مانند: بتن آرمه



علامت مهم است.

در تنش خمشی و نیروی محوری علامت مهم است ولی در نیروی برشی و تنش پیچشی علامت مهم نیست و قراردادی است.

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

نکته: نیرو و لنگر برای مقطع است = استاتیک
تنش برای نقطه است = مقاومت مصالح
و برای رسیدن به نقطه باید مقطع بزنیم

« فصل اول »

« stress مفهوم تنش »

تنش : نیروی وارد بر واحد سطح

محوری (نیروی داخلی) — برشی (نیروی داخلی)

نیروی محوری همواره در راستای محور عضو و عمود بر مقطع می باشد

تنش قائم (محوری) : نیروی محوری وارد بر واحد سطح

$$\sigma_{Ave} = \frac{P}{A}$$

سیگما — تنش قائم — نیروی محوری — مساحت مقطع

نیروی برشی مماس بر مقطع و عمود بر محور عضو است.

در صورتی که توزیع تنش را یکنواخت بگیریم

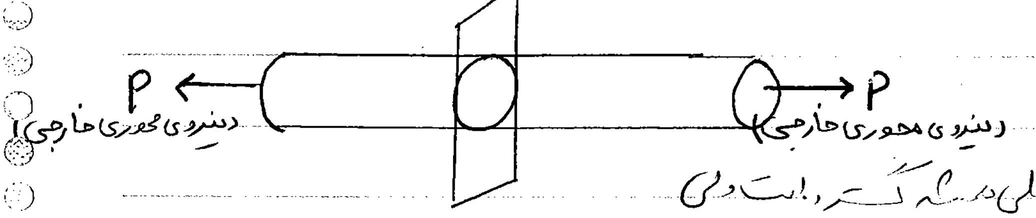
تنش برشی : نیروی برشی وارد بر واحد سطح

$$\tau_{Ave} = \frac{V}{A}$$

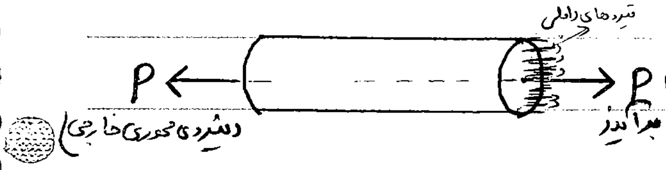
تنش برشی (تاو) — نیروی برشی — سطح مقطع

$\sigma_{Ave} = \frac{P}{A}$ و $\tau_{Ave} = \frac{V}{A}$ بیانگر مقدار میانگین تنش روی مقطع است

به جای این که تنش در نقطه‌ای به خصوص از سطح مقطع باشد



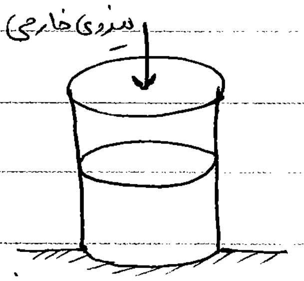
نکته: وقتی برش می زنیم نیروهای داخلی همیشه گسترده است ولی نیروی خارجی هم متمرکز و هم گسترده می تواند باشد.



(نیروی محوری داخلی)

نکته: اگر بار یا نیروهای خارجی گسترده باشند توزیع تنش یکنواخت است
اما اگر بار یا نیروی خارجی متمرکز باشد توزیع تنش بعد از مقطع یکسان نیست و تنش در مرکز بیشتر است.

— نیروی متمرکز یا نقطه‌ای بر سطحی وارد می شود که در مقایسه با سطح کل بسیار ناچیز است.



— نیروی داخلی همیشه گسترده است.

— نیروی خارجی می تواند هم گسترده هم نقطه‌ای باشد.

$\sigma = \frac{P}{A}$ تنش محوری یا قائم

$10^3 \frac{kg}{cm^2} = 1 \frac{ton}{cm^2}$

$psi = \frac{lb}{in^2}$

$ksi = \frac{klb}{in^2}$ کیلو

1 میلیون $pa = 1\ M pa$ (مگا) $= \frac{N}{mm^2}$ (10^6)

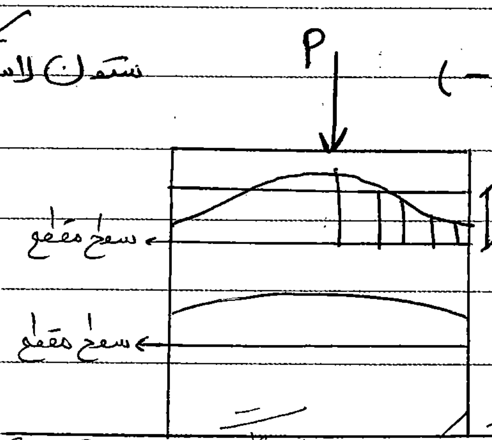
$pa = \frac{N}{m^2}$

نکته: علامت تنش همیشه به علامت نیرو بستگی دارد (نیروی کششی مثبت است)

اگر نیروی محوری کششی (+) ← تنش کششی (+)

اگر نیروی محوری فشاری (−) ← تنش فشاری (−)

ستون لاستیکی

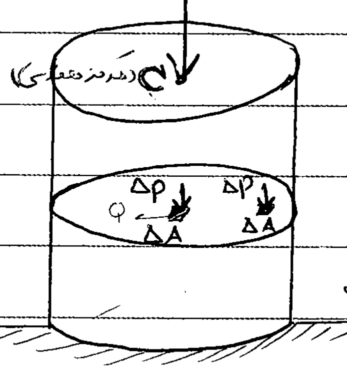


$$\sigma_{ave} = \frac{P}{A}$$

هرچه فاصله بیشتر شود، تنش یکنواخت تر شد.

پس تنش به فاصله و جنس مصالح بستگی دارد.

برای تعریف تنش در نقطه‌ی مفروض Q از مقطع عرضی، می‌بایست یک سطح کوچک ΔA را در نظر بگیریم. با تقسیم مقدار ΔP بر ΔA مقدار میانگین تنش روی ΔA را به دست آوریم. با میل دادن ΔA به 0 تنش در نقطه‌ی Q را به دست می‌آوریم.



$$\sigma = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta A} = \frac{dP}{dA}$$

صفحه جا شود

$$dP = \sigma \cdot dA \Rightarrow \boxed{P = \int \sigma \cdot dA}$$

برآیند نیروهای داخلی است.

اگر σ ثابت باشد یا ثابت فرض شود ← $P = \sigma \cdot A$ یا $\sigma = \frac{P}{A}$

یعنی توزیع تنش یکنواخت باشد.

هرجا σ بود منظور σ_{ave} است.

تنش قائم
- تنش موجود (ما به دست می‌آوریم)
- تنش مجاز (صورت مسئله می‌دهد) که در آزمایشگاه به دست می‌آید.

کنترل

اگر تنش موجود > تنش مجاز ⇐ شکستگی اتفاق می‌افتد

(تنش نهایی)

SUBJECT :

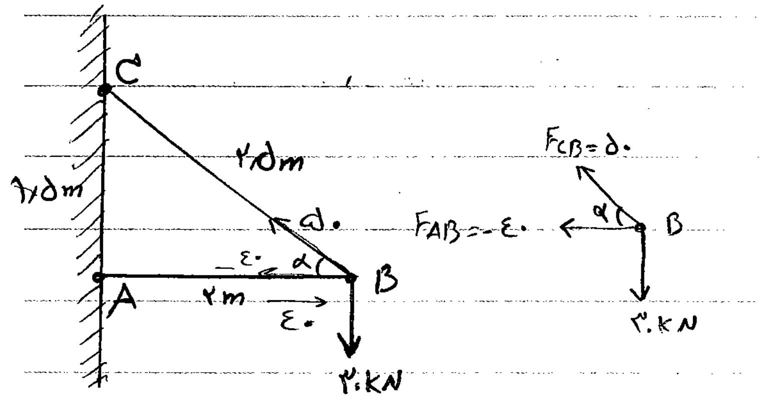
Year (   ) Month (   ) Date (   )

کنترل :

$\sigma_{موجود} = \frac{P_{موجود}}{A_{موجود}} \le \sigma_{مجاز}$ okk ✓

در غیر این صورت یا باید سطح را قوی‌تر کرد یا جنس را قوی‌تر کرد.

مثال: الف) میله‌ی BC به قطر ۲۰mm و از فولاد با $\sigma = 140\ Mpa$ کنترل نمایید
سطح مقطع دایره‌ای



تحلیل:

$\sum F_y = 0 \rightarrow$

$\sum F_x = 0 \rightarrow$

$F_{BC} = 50$ کششی

$F_{AB} = -40$ فشاری

$\alpha = Arctan \frac{1.5}{2} \Rightarrow \alpha = 37°$

طراحی:

$140\ Mpa = \frac{N}{mm^2}$ $\qquad \sigma_{موجود} = \frac{50 \times 10^3\ N}{\pi (10)^2\ mm^2} = 159 \frac{N}{mm^2}$ یا $Mpa \le 140\ Mpa$ okk✓

سطح اقتصادی است

$$\boxed{\sigma_{مجاز} = \frac{\sigma_{نهایی\ یا\ تسلیم}}{ضریب\ اطمینان\ S.F} = \frac{240\ Mpa}{1.5} = 140\ Mpa}$$

چون σ نهایی ۲۴۰ بوده چون ما به ۱٫۵ تقسیم کرده‌ایم در اطمینان هستیم

چون بارگذاری، تحلیل، طراحی با خطا و تقریب است از ضریب اطمینان استفاده می‌کنیم و بیشتر ضریب اطمینان بالا را به کار می‌برند که در اجرا هم خطا وجود دارد و ضریب اطمینان بستگی به دقیق بودن محاسبه و اجرا دارد و بستگی به نوع سازه دارد که چی می‌خواهیم بسازیم

- ظرفیت باربری: $P_{حداکثر\ مجاز} = \sigma_{مجاز} \cdot A_{موجود}$ به سمت پایین گرد می‌شود
- طراحی: $A_{حداقل\ مورد\ نیاز} = \frac{P_{موجود}}{\sigma_{مجاز}}$ به سمت بالا گرد می‌شود

ب) قطر میله BC از آلومینیوم با $\sigma_{مجاز} = 100\ Mpa$ را طراحی نمایید.

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

$$A = \frac{P}{\sigma} = \frac{\overset{F_{BC}}{٥٠\times ١٠^{٣}}}{١٠٠} = ٥٠٠\,mm^{٢} = \frac{\pi d^{٢}}{٤}$$

قطر لازم $d = ٢٥,٢mm$

طراحی $\boxed{d = ٢٤mm}$

یادآوری:

تنش قائم (محوری): نیروی محوری وارد بر واحد سطح

$$\overset{\text{سیگما}}{\sigma_{Ave}} = \frac{P^{\text{نیروی محوری}}}{A_{\text{مساحت مقطع}}}$$

تنش برشی: نیروی برشی وارد بر واحد سطح

$$\overset{\text{تاؤ یا تو}}{\tau_{Ave}} = \frac{V^{\text{نیروی برشی}}}{A_{\text{مساحت مقطع}}}$$

نیروی برشی یعنی عمود وارد شود

+ یا منفی بودن تنش قائم به P بستگی دارد و + یا − تنش برشی به V بستگی دارد.

تنش برشی + با تنش برشی − فرقی ندارد.

اگر در صورت مسئله نیروی محوری کششی بود برای کنترل باید این طوری عمل کنیم

$$\underline{\sigma_{\text{موجود کششی}}} = \frac{P_{\text{موجود کششی}}}{A_{\text{موجود}}} \le \underline{\sigma_{\text{مجاز کششی}}}$$

〃 〃 〃 〃 〃 فشاری بود 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃

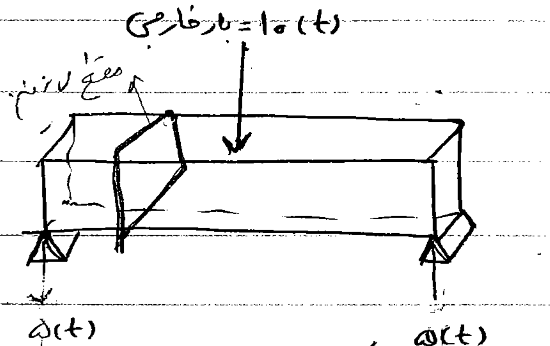
$$\underline{\sigma_{\text{موجود فشاری}}} = \frac{P_{\text{موجود فشاری}}}{A_{\text{موجود}}} \le \underline{\sigma_{\text{مجاز فشاری}}}$$

پس نیروی کششی و فشاری $\underset{(-)}{}$ $\underset{(+)}{}$ با هم فرق دارند اما نیروی برشی (+) یا (−) فرق نمی‌کند.

STAEDTLER

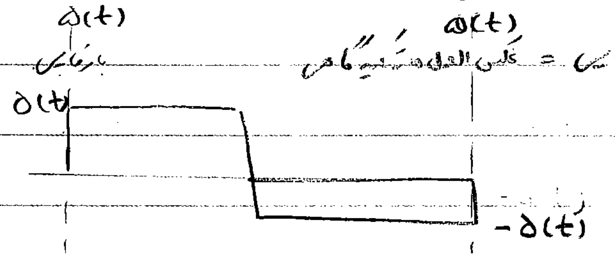
نکته: معمولاً تنش های برشی در پیچ ها، پین ها و میخ پرچ ها، برای اتصال عضوهای مختلف سازه ها و اجزای ماشین به کار می روند، یافت می شوند

مثال: تیر چوبی

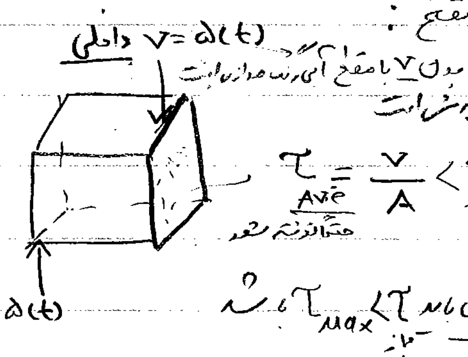


(مثال برای تنش برشی)

نیروی داخلی مقطع ناشی از برش است:



دیاگرام مقطع:



$$\tau_{Ave} = \frac{V}{A} < \tau_{مجاز}$$

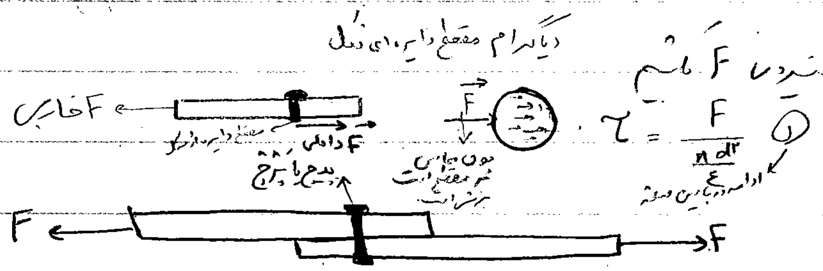
(میانگین تنش)

در اصل باید $\tau_{max} < \tau_{مجاز}$ باشد

(البته آنها اضافه می شود)

* در این جا τ مثبت است چون در این دیاگرام نیروی برشی 5(t) + است طبق نمودار نیروی برشی *

مثال: فرض کنیم دو ورق را با پیچ ببندیم و با نیروی F بکشیم

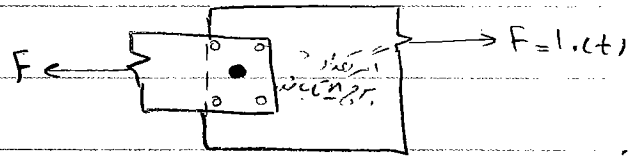


$$\tau = \frac{F}{\frac{\pi d^2}{4}} \quad (1)$$

ادامه در پایین صفحه

برای دایره (شعاع $\pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4}$)

دیاگرام وقتی از بالا به آن نگاه می کنیم:



نکته: اگر مقطعی که می بریم عمود بر F باشد تنش قائم و اگر مماس بر آن باشد تنش برشی است. (یا موازی)

ادامه (1): $\tau = \frac{F_{داخلی}}{n \times \frac{\pi d^2}{4}} < \tau_{مجاز\ پیچ\ یا\ پرچ}$ در صورتی که همه پیچ ها مثل هم باشند (از نظر قطر جنس) (اگر تعداد پیچ n تا بود) ***

n ← تعداد پیچ یا پرچ

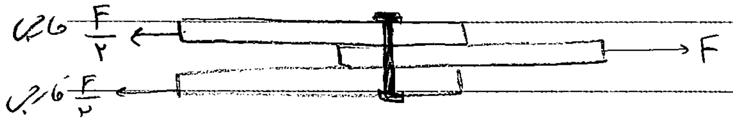
مثلاً اگر پیچ ها از نظر قطرها فرق داشتند (مثلاً یکی قطرش 2mm و 4 تا دیگر 3mm باشد) آنگاه:

$$\tau = \frac{F}{1 \times \frac{\pi (2)^2}{4} + 4 \times \frac{\pi (3)^2}{4}}$$

SUBJECT :

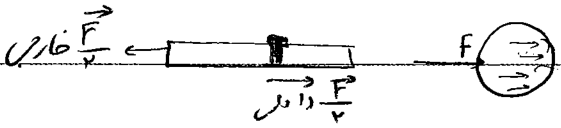
Year ( ) Month ( ) Date ( )

اگر اتصال دو برشی باشد یعنی برای جدا کردن اتصال به ۲ برش داشته باشیم



اگر ۳ تا ورق داشتیم ۲ برش می شود.
اگر ۴ تا ورق داشته ۳ برش می شود

مثلا در شکل (الف) ...



$$\tau = \frac{\frac{F}{2}}{\frac{\pi d^2}{4}}$$

دیاگرام ورق بالایی:

کنترل:

$$\tau = \frac{F}{n \cdot m \cdot \frac{\pi d^2}{4}} \leq \tau_{\text{مجاز پیچ یا پرچ}}$$

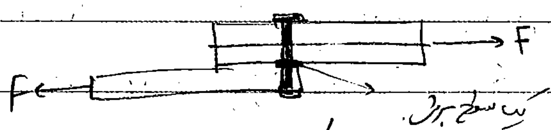
n تعداد پیچ یا پرچ

m تعداد سطوح برشی هر پیچ

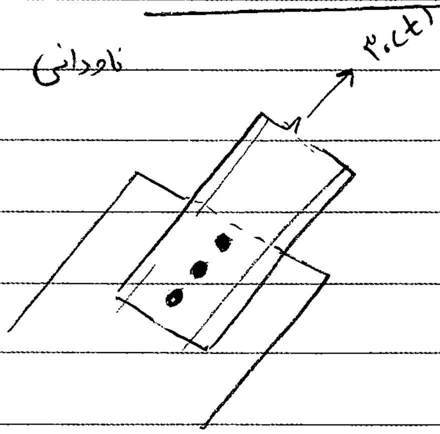
مساحت پرچها $= n \cdot m \cdot \frac{\pi d^2}{4}$

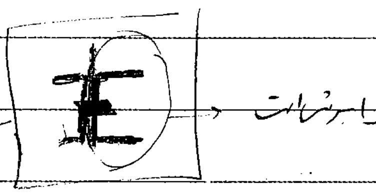
$\boxed{n \cdot m = \text{تعداد سطوح برشی}}$

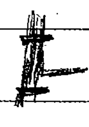
الف) زمانی می توانیم بگوییم که تعداد سطوح برشی یکی از تعداد ورق ها کمتر است که تعداد ورق های ما در خلاف جهت هم باشند



(شکل الف)







اتصال ۱ برشی که ۲ تا پیچ دارد
و ۱ سطح برش.

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

- کنترل: $\tau_{\text{موجود}} = \frac{V_{\text{موجود}}}{A_{\text{موجود}}} \le \tau_{\text{مجاز}}$

- ظرفیت باربری (به سمت پایین روند شود): $\underset{\text{حداکثر}}{V_{\text{مجاز}}} = \tau_{\text{مجاز}} \times A_{\text{موجود}}$

- طراحی: (به سمت بالا روند شود) (d را به سمت بالا گرد می‌کنیم): $\underset{\text{حداقل}}{A_{\text{لازم}}} = \frac{V_{\text{موجود}}}{\tau_{\text{مجاز}}}$

در طراحی F موجود معلوم است و A مجهول است.

نکته: (این معادله ۲ مجهول بی‌نهایت جواب دارد) مثل: $2x+3y=10$

در جوش مساحت جوش برابر است: تعداد جوش × طول جوش × ضخامت جوش (در مقاومت مصالح است)

تنش لهیدگی (تکیه‌گاهی):

$\sigma_{B_{\text{مجاز}}}$ = براساس جنس صفحه مقاومت

$$\sigma_B = \frac{P}{A} \le \sigma_{B_{\text{مجاز}}}$$

تنش لهیدگی مجاز — از دو صفحه ضعیف‌تر است، هر کدام از این دو جسم لهیده

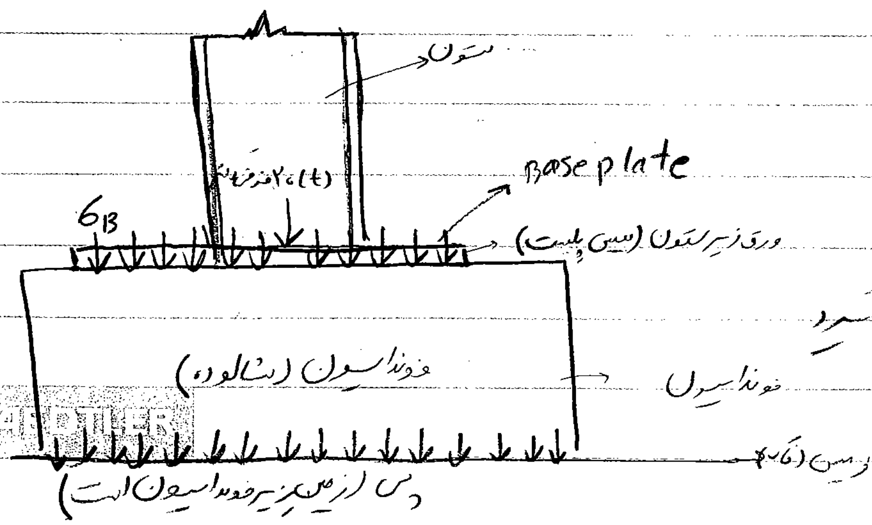
(حالت خاصی از تنش قائم است)

و فرق آن با تنش قائم این است که اگر دو جسم را به‌طور تکیه‌گاهی به هم وصل کنیم امکان دارد یکی له شود (آنی که σ کمتری دارد = ضعیف‌تر است له می‌شود)، به هم فشار وارد می‌کنند و له می‌شود.

تنش لهیدگی (تکیه‌گاهی) بین ۲ دو جسم است و فقط فشاری که به صفحه می‌شود فشاری است و (خاص است)

اما تنش قائم داخل یک جسم است و هم کششی می‌تواند باشد هم فشاری

ستون فولادی



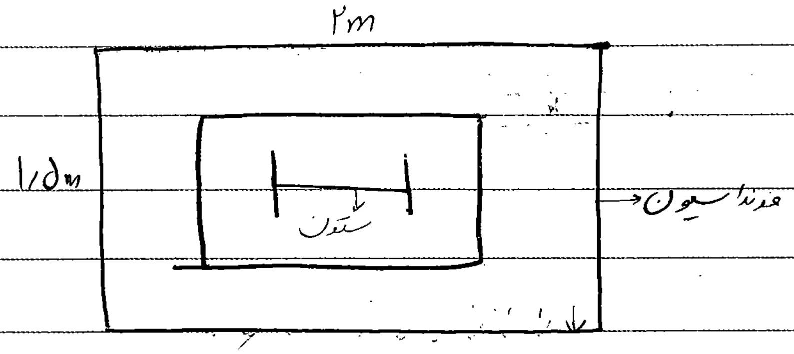
تنش لهیدگی = σ_B

کنترل: $\sigma_B = \frac{P}{A} \le \sigma_{B_{\text{مجاز}}}$

پس: خاک به بار باربری آن فشار وارد می‌شود

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )



از بالا به شکل مستطیل نگاه می‌کنیم

چند جا ممکن است لهیدگی اتفاق بیافتد (بین هر ۲ جسم)

حتی در جسم بین فونداسیون و سنگ هم (لهیدگی داریم) باید $A = ۲/۵ \times ۱/۵$ مساحت فونداسیون و P آن هم می‌شود $۲۰t$ به علاوه‌ی وزن فونداسیون که $\frac{۲۰t + \omega}{۲/۵ \times ۱/۵} \leq \sigma_B$ خاک (بی)

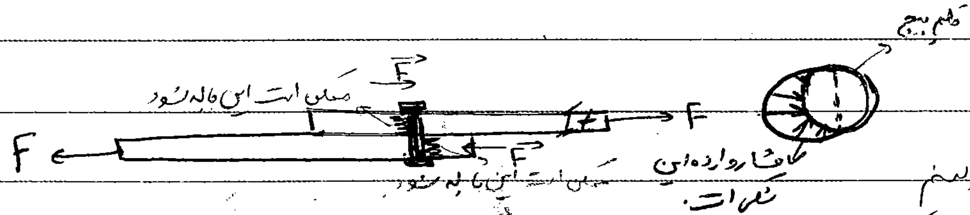
چاک را در نظر می‌گیریم چون ضعیف‌تر است.

بین فونداسیون و بیس پلیت هم تنش لهیدگی وجود دارد.

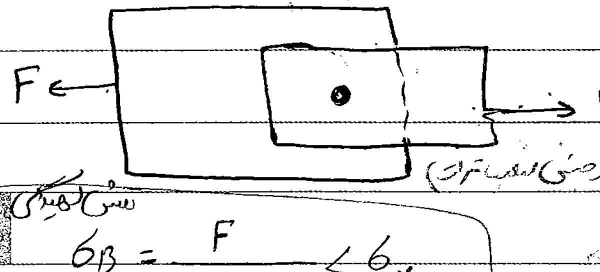
$P = ۲۰t + \omega$ وزن بیس پلیت

برای سطح مقطع (مقطع مشترک) هم چون تنش را می‌گیریم به سطح مقطع کمتر را دارد.

بین بیس پلیت و ستون سنگی به همان دارد که کدام ضعیف‌تر و قویتر است.



اگر سطح استوانه را تصویر کنیم یک مستطیل به ابعاد $d \times t$ می‌شود)



$$\sigma_B = \frac{F}{t \cdot d} \leq \sigma_{B_{مجاز}}$$

جایی که ضعیف‌تر است را قرار می‌دهیم
بستگی به جنس دارد (آن ماده‌ای که ضعیف‌تر است)
را قرار می‌دهیم

تنش لهیدگی

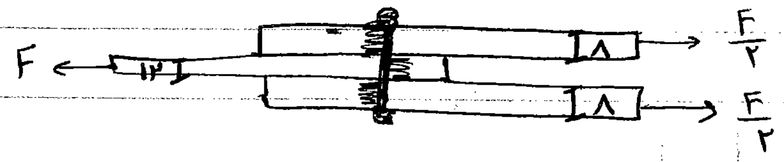
$$\sigma_B = \frac{F}{n \cdot t_{min} \cdot d} \leq \sigma_{B_{مجاز}}$$

تعداد پیچ یا پرچ
مینیمم ضخامت ورق
قطر پیچ یا پرچ

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

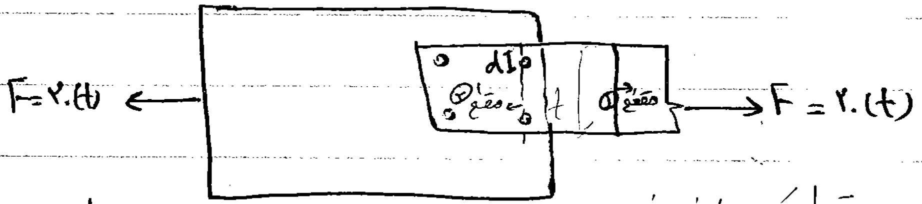
۲- برشی

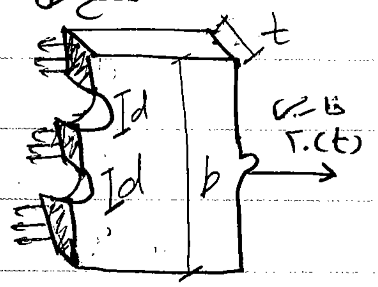


اگر ۱ برشی بود t_{min} ورقی که نازک‌تر است را می‌گیریم.

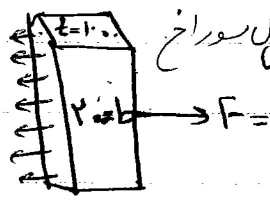
اگر ۲ برشی متقارن بود ۱ ورق را با مجموع ۲ ضخامت ۲ ورق دیگر در نظر می‌گیریم و آن که کوچکتر است را می‌گیریم.

اگر ۳ برشی نامتقارن بود مجموع ۲ تا ورق را با مجموع ۲ تا ورق دیگر با هم بررسی می‌کنیم و آن که کوچکتر است را می‌گیریم.





اگر F فشاری باشد در مقطع ۱ به سوراخ‌ها فقط جهت نیروها عوض می‌شود اما در پیچ سوراخ خارج هم جهت برش نیرو و هم در داخل خود سوراخ نیرو وجود دارد (تعداد سوراخ‌ها مهم است)



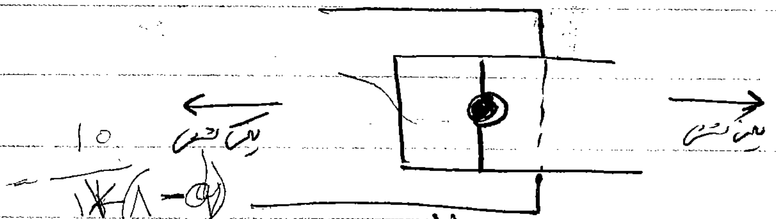
$$\sigma = \frac{20}{1\times 20} = 1 \ \frac{(t)}{cm^2}$$

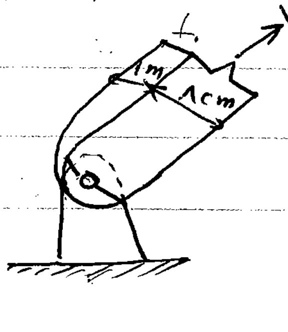
بیشترین تنش

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A_n} = \frac{P}{t(b-2d)}$$

سطح مقطع خالص که در این جا سوراخ یک مستطیل کامل منهای ۲ مستطیل کوچک

$$\sigma = \frac{20}{1(20-2\times 2)} = 1.25$$



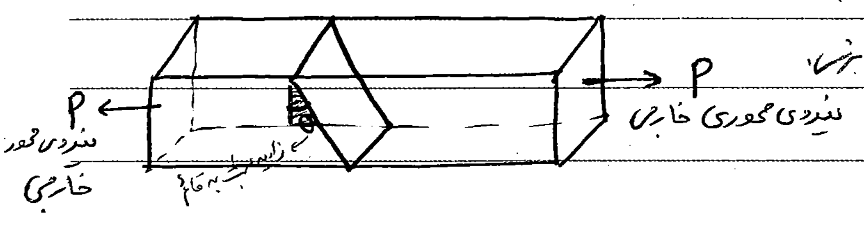


سطح مقطع = $8cm \times 1cm$ منهای قطر دایره

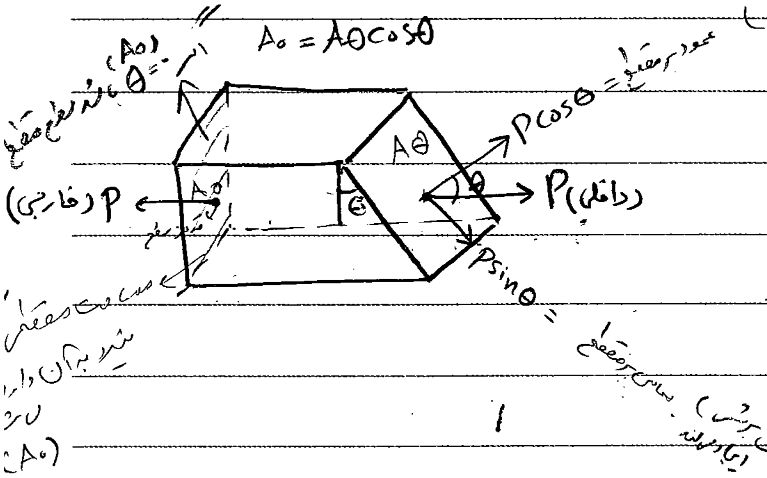
مثلاً اگر فشاری هم بود سطح مقطع عوض نمی‌گردد.

تنش در مقاطع مورب (مایل) تحت بار محوری :

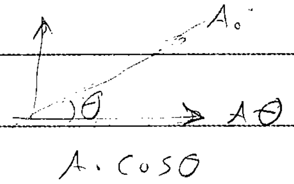
پس در مقاطع مورب دو نوع تنش داریم { تنش قائم / تنش برشی



θ = زاویه‌ای است که سطح مورب با عمود بر نیرو می‌سازد (تنش قائم)



A_0 = مساحت سطح مقطع عمود بر نیرو



بنابراین با توجه به شکل بالا

تنش قائم

$$\sigma_\theta = \frac{P\cos\theta}{A_\theta} = \frac{P\cos\theta}{\frac{A_0}{\cos\theta}} = \frac{P}{A_0}\cos^2\theta \leq \sigma \quad (1)$$

مجاز چسب یا جوش

اگر $\theta = 0$ باشد آن سطح مقطع ما است در دو یا ...

تنش برشی

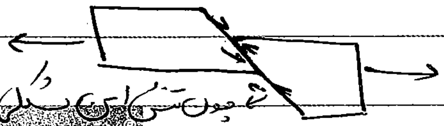
$$\tau = \frac{P\sin\theta}{A_\theta} = \frac{P\sin\theta}{\frac{A_0}{\cos\theta}} = \frac{P}{A_0}\sin\theta . \cos\theta = \frac{P}{2A_0}\sin 2\theta \leq \tau \quad (2)$$

مجاز چسب یا جوش

اگر ① و ② برقرار نباشد :

چون تنش این شکلی است و چسب کنده می‌شود پس $\sigma_\theta \leq \sigma$ مجاز نیست

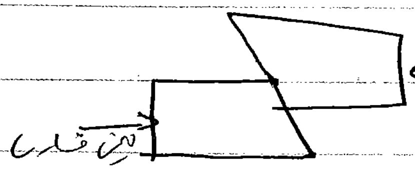
اگر ① و ② برقرار باشند هیچ اتفاقی در چسب یا جوش‌ها اتفاق نمی‌افتد



چون تنش این شکلی است و چسب برید شده پس $\tau_\theta \leq \tau$ مجاز نیست

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )



این باهم برش است

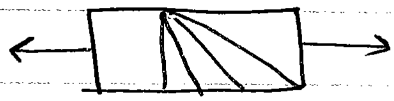
اما شده و فشاری است

به صحبت شده‌ها توجه شود

اگر بخواهند دو تا چوب را به هم بچسبونیم بهترین زاویه کدام است؟

اگر یک مقطع یا یک پارچه یا چوب در اختیار داشته باشیم.

** ۴۵° بیشترین تنش برشی را دارا است **



هر مقطعی که تحت کشش یا فشار باشد باید چک گردد

یعنی هر مقطع یا پارچه که داشتیم باید از فرمول تنش مشتق بگیریم و max و min آن را بدست آوریم.

$$\sigma_\theta = \frac{P}{A_0}\cos^2\theta \qquad \frac{d\sigma_\theta}{d\theta} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \theta = 0 \Rightarrow \boxed{\sigma_{max} = \frac{P}{A_0} \leq \bar{\sigma}} \\ \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sigma_{min} = 0 \end{cases}$$

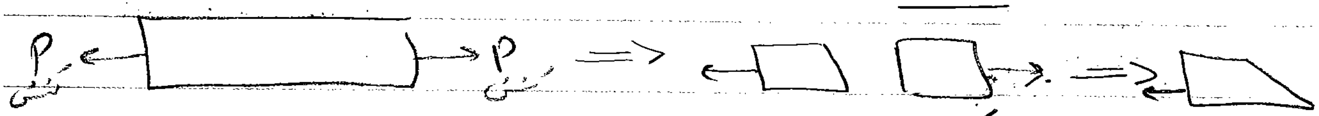
مجاز چسب یا فولاد

$$\tau_\theta = \frac{P}{2A_0}\sin 2\theta \qquad \frac{d\tau_\theta}{d\theta} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \boxed{\tau_{max} = \frac{P}{2A_0} \leq \bar{\tau}} \\ \theta = 0 , \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tau_{min} = 0 \end{cases}$$

مجاز چسب یا فولاد

_ اگر یک مقطع یا پارچه تحت کشش یا فشار بود در بیشترین تنش نرمال زاویه $\theta = 0$ باشد و $\sigma_{max} = \frac{P}{A_0} \leq \bar{\sigma}$
مجاز چسب یا فولاد یا ...

اگر مقطع یا پارچه‌ای را بخواهیم ببریم در صورتی بریده می‌شود که $\theta = \frac{\pi}{4}$ باشد. و در صورتی کنده می‌شود که $\theta = 0$ باشد.



کنده شده یعنی $\sigma_{max} \leq \bar{\sigma}$ نیست

بریده شده

یعنی $\tau_{max} < \bar{\tau}$ نیست

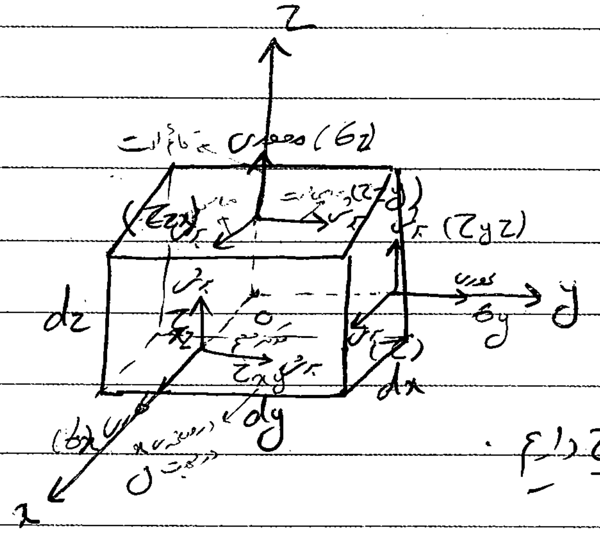
SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

اگر عضو یکپارچه داریم نتیجه $\sigma_{max} = \frac{P}{A_0} < \sigma_{مجاز}$ و $\tau_\theta = \frac{P}{2A_0} < \tau_{مجاز}$ را کنترل کنیم ولی اگر
یعنی چسب و جوش نداشتیم

یکپارچه نبود و چسب و جوش داشت علاوه بر این دو فرمول $\sigma_{max} = \frac{P}{A_0}\cos^2\theta < \sigma_{چسب}$ و $\tau_{max} = \frac{P}{2A_0}\sin 2\theta \leq \tau$
را کنترل کردیم باید ۲ فرمول بالا را برای یکپارچه بودن هم کنترل کنیم

مولفه‌های تنش :



یک المان است.

در هر مقطع یک تنش محوری و دو تا تنش برشی داریم.

پس همیشه در هر سطح دلخواهی یک σ و دو تا τ داریم.

بنابراین :

σ_x ، σ_y ، σ_z

$$\begin{cases} \tau_{xy} = \tau_{yx} \\ \tau_{xz} = \tau_{zx} \\ \tau_{zy} = \tau_{yz} \end{cases}$$

پس به جای ۹ تا مجهول
۶ مجهول داریم

نتیجه
که باید اثبات شود:
دو تنش برشی جای اندیس‌هایشان را می‌توان عوض کرد (۱)
و در دو سطح عمود بر هم ~~...~~ دو تنش که همدیگر هستند با هم برابرند (۲)

اثبات :

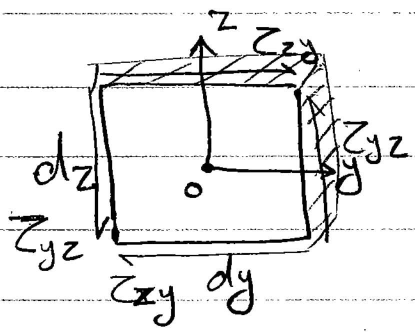
اگر $\sum M_z = 0$ باشد آنگاه اثبات می‌شود که $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ، اگر $\sum M_y = 0$
باشد آنگاه $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ اثبات می‌شود و اگر $\sum M_x = 0$ باشد $\tau_{zy} = \tau_{yz}$ اثبات می‌شود

SUBJECT :

Year (　　) Month (　　) Date (　　)

اثبات : $\tau_{zy} = \tau_{yz}$:

صفحه ی zy را در نظر می گیریم : $\tau = \frac{P}{A}$



ثابت شد

$$\sum M_x = 0 \Longrightarrow \tau_{zy}\underbrace{(\cancel{dx}\times dy)}_{\text{نیرو}}\times \underbrace{dz}_{\text{فاصله}} = \tau_{yz}\underbrace{(\cancel{dx}\times dz)}_{\text{نیرو}}\underbrace{dy}_{\text{فاصله}} \Longrightarrow \boxed{\tau_{zy} = \tau_{yz}}$$

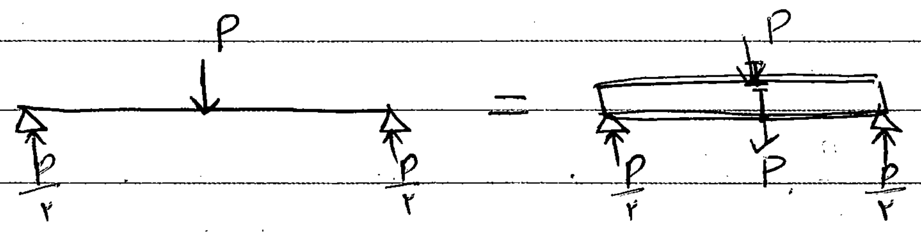
این رنگی ها باهم برابرند

$$\begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

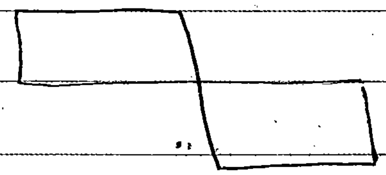
قطر اصلی تنش ها

می توان این تنش ها را به صورت ماتریس متقارن نشان داد.

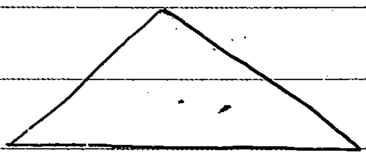
«فصل دوم» «رابطه‌ی تنش ـ تنمش و تغییر طول اعضا تحت بار محوری»



برش :



خمش :

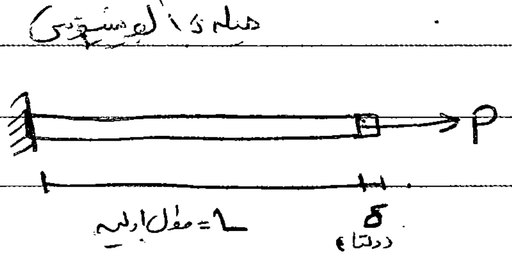


برای یک سازه‌ی آهنی عملاً فرقی نمی‌کند بار محوری آن باشد یا داخل آن باشد اما در استاتیک فرقی نمی‌کرد چون ما اجسام را صلب فرض می‌کردیم. وقتی در استاتیک صلب فرض می‌کردیم یه فرض دقیقی نیست اما با این وجود به محاسبات استاتیک لطمه وارد نمی‌کرد چون در نهایت عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی که ما در استاتیک می‌خواستیم درست به دست می‌آمد (صلب = تغییر شکل نمی‌دهد)

در این فصل منظور از تغییر شکل تغییر طول است که اگر نیرو + باشد (کششی) افزایش طول داریم و اگر نیرو − باشد (فشاری) کاهش طول داریم

stress (تنش) : نیروی وارد بر واحد سطح ، $\sigma = \frac{P}{A}$ تنش قائم یا محوری

میله‌ی الاستیک — این میله تحت کشش یا فشار است



L = طول اولیه ، δ (دلتا)

$\delta =$ تغییر طول (دلتا)

strain (تغییر طول نسبی / کرنش / تنمش) : تغییر طول واحد طول

$\varepsilon = \frac{\delta}{L}$ — δ : تغییر طول ، L = طول اولیه ، ε : تغییر طول نسبی، واحد ندارد یعنی بدون بعد است

L همیشه مثبت است بنابراین علامت ε به δ بستگی دارد که اگر δ + باشد (کششی) ε هم مثبت است

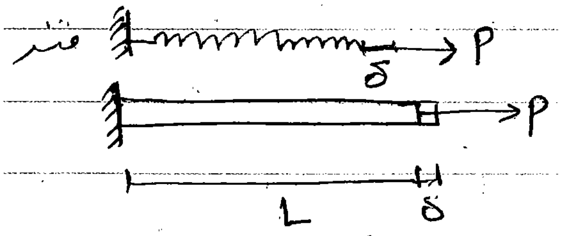
SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

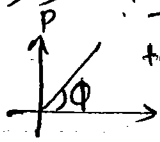
* ε تغییر طول واحد طول را می‌دهد یعنی مثلاً تغییر طول 1m یا 1mm یا 1in و ... را می‌دهد *

مثلاً اگر $\delta = 2mm$ و $L = 200mm$ باشد $\varepsilon = \frac{2}{200} = 0/01$ می‌شود؛ یعنی 1mm، ۰/۰۱ تغییر طول دارد.

قطعاً بین تنش و کرنش رابطه وجود دارد یعنی طبق رابطه‌ی $\sigma = \frac{P}{A}$ هرچه P بیشتر باشد σ بیشتر می‌شود و در نهایت طبق رابطه‌ی $\varepsilon = \frac{\delta}{L}$ هرچه δ بیشتر باشد ε هم بیشتر می‌شود طبق شکل صفحه‌ی قبل (میله‌ی آلومینیومی)



در حقیقت نمودار میله با فنر فرض می‌کند

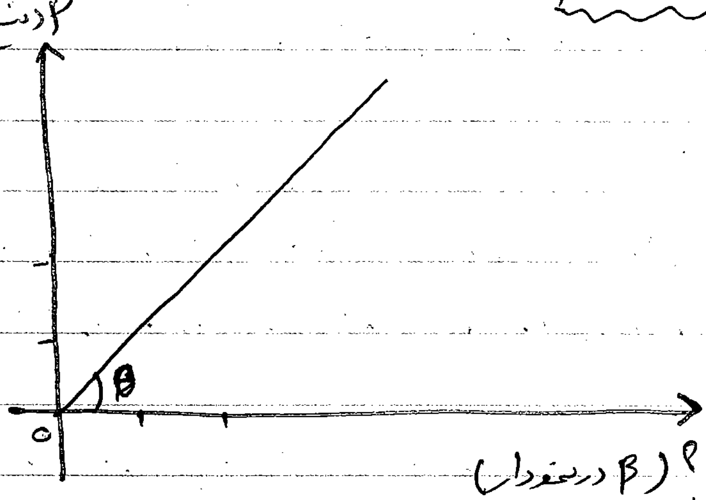


$\tan\phi = k$

سختی فنر $k = \frac{P}{\delta}$

فرض می‌کنیم رابطه خطی باشد

حتی منحنی هم می‌تواند باشد



شیب نمودار به چه عواملی بستگی دارد؟ (β در نمودار)

δ به ۴ عامل بستگی دارد. طبق رابطه‌ی P، L، E و A

تغییر طول $\delta = \frac{PL}{EA}$ بعداً اثبات می‌شود

E سختی (هرچه ماده قوی‌تر باشد تغییر طولش کمتر می‌شود)

A مساحت

شیب نمودار؟ شیب نمودار $\tan\theta = \frac{P}{\delta} = \frac{EA}{L}$

در حقیقت نقش K در فنر را بازی می‌کند

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

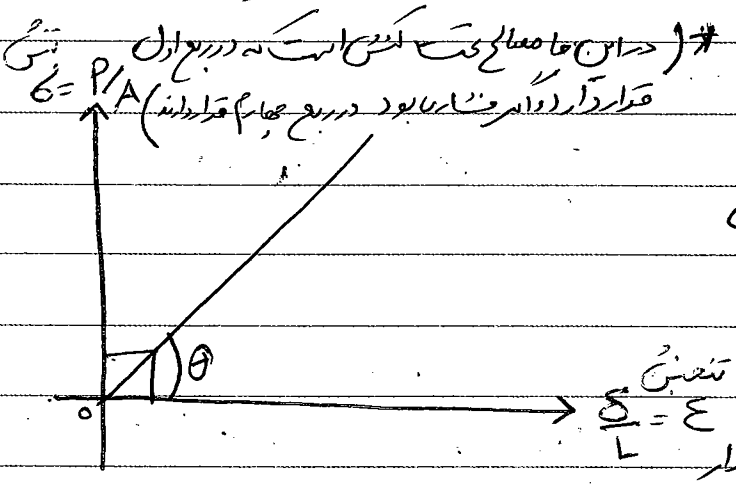
پس نمودار نیرو-تغییر طول به عوامل زیر بستگی دارد: (در حقیقت شیب نمودار هم به عوامل زیر بستگی دارد)

۱- جنس مصالح (آلومینیوم-فولاد و...)   ۲- مساحت مقطع   ۳- طول عضو

* و هر وقت می‌خواهیم نمودار نیرو-تغییر طول را معرفی کنیم برای یک شیء باید هر سه اینها (جنس مصالح - مساحت مقطع و طول عضو را بدهیم) * = این نمودار زیاد در مقاومت کاربرد ندارد.

** ما در حقیقت نمودار را می‌خواهیم که فقط هم به جنس مصالح بستگی دارد یعنی ما نمودار تنش-تغییر را می‌خواهیم **

*(در اینها مصالح تحت کشش است که در ربع اول قرار دارد (اگر فشاری بود در ربع چهارم قرار دارند)



(این نمودار فقط به جنس مصالح بستگی دارد و این نمودار برای ما مهم است)

اگر ما در این نمودار شیب را بدانیم این نمودار تعریف می‌شود پس برای ما $\tan\theta$ مهم است.

$$(1-1)\ \tan\theta = \frac{\sigma}{\varepsilon} = E$$ (واحد E هم واحد σ است) (چون ε واحد ندارد)

(همان جنس مصالح که قبلاً مطرح شد) مدول الاستیسیته (ضریب ارتجاعی) (مدول یانگ)

نکته: σ و ε همواره در هر نقطه هم علامت هستند بنابراین نتیجه می‌شود که E همواره مثبت است

- رابطه‌ی 1-1 معمولاً به صورت: $\boxed{\sigma = E.\varepsilon}$ کاربرد بیشتری دارد که به قانون هوک معروف می‌باشد.

E در صورت مسئله داده می‌شود.

E_{st} (فولاد) $= 2.1\times10^6 \frac{kg}{cm^2} = 2.1\times10^5 \frac{N}{mm^2} = $ [illegible] $\frac{t}{cm^2}$ (تن) $= 29\times10^6 \frac{Lb}{in^2}$ (پوند)

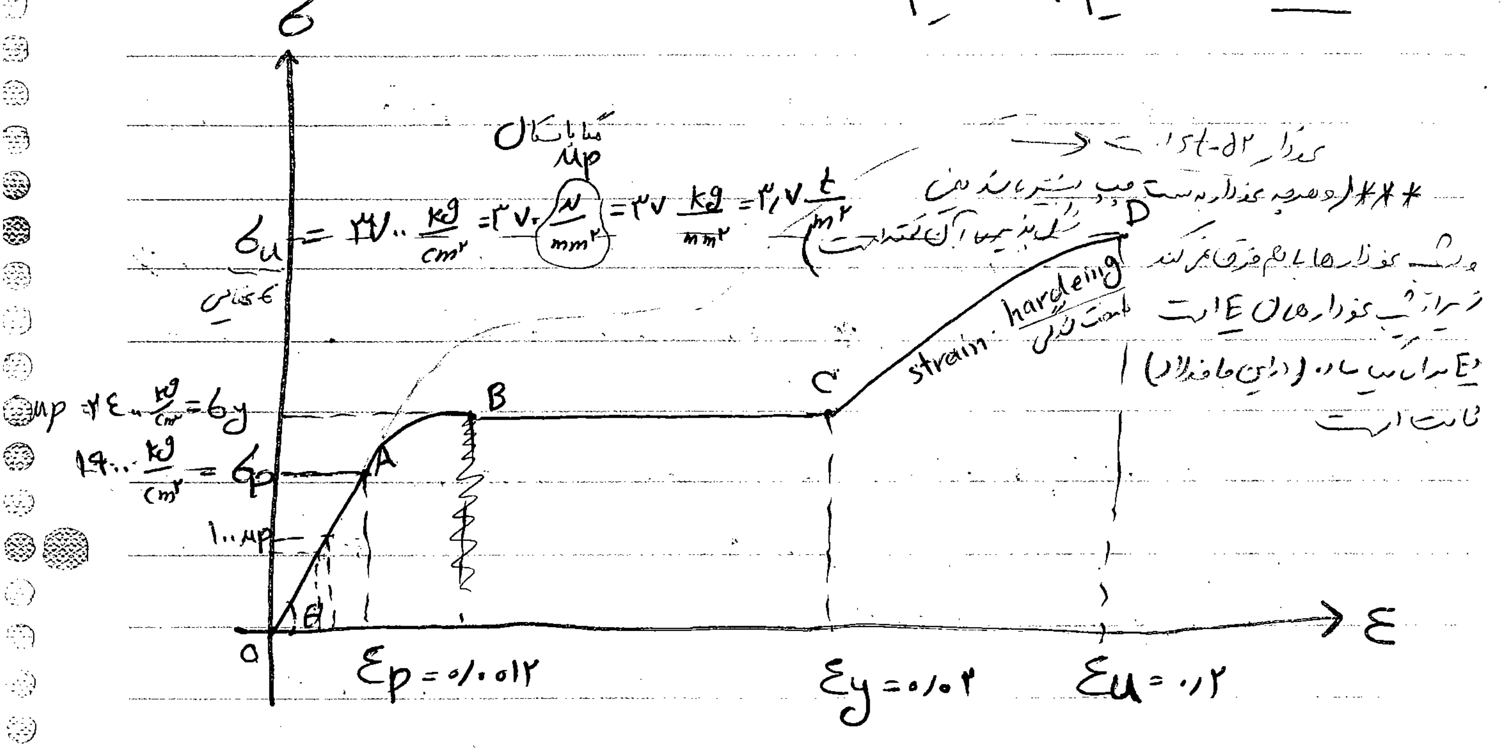
نکته: E مثل k در فنر برای هر ماده ثابت است مثلاً:

E_{al} (آلومینیوم) $= 0.7\times10^6 \frac{kg}{cm^2}$ E_c (بتن) $= (0.21$ تا $0.35)\times10^6 \frac{kg}{cm^2}$

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

نمودار فولاد را می‌خواهیم بررسی کنیم :



اگر یک میله فولادی تحت کشش باشد و ما بخواهیم نمودار تنش - تغییر شکل آن را رسم کنیم طبق نمودار بالا می‌شود.

الاستیک مثل فنر = فنر اگر تغییر شکل داد آن را ول کنیم به حالت اولیه برمی‌گردد

با توجه به نمودار بالا :

یعنی منحنی نیست (سبز در نمودار)

OA = منطقه‌ی الاستیک خطی

یعنی برگشت پذیر یا ارتجاعی یا کشسان (قسمت قرمز نمودار)

دبیرستانی

AB : منطقه‌ی الاستیک غیرخطی

BC : (منطقه‌ی) پلاستیک (عمدتاً افزایش است ولی تنش ثابت است) و الاستیک و ارتجاعی نیست

CD : منطقه سخت شدگی مجدد تنش

و نقطه‌ی D ، نقطه‌ی گسیختگی (پاره شدن) فولاد است.

st به معنای فولاد است

مثلاً st37 یعنی فولادی که مقاومت گسیختگی آن $37 \frac{kg}{mm^2}$ است

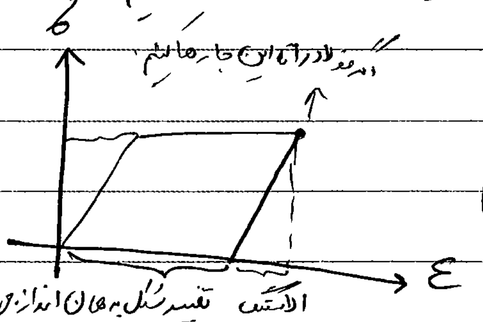
نکته در مورد نمودار تنش به شکل :

در عمل و در واقع از منحنی AB (الاستیک غیرخطی) صرف نظر می کنند [اما در تئوری باید باشد]

و در عمل ملاک ما 370 Mp نیست بلکه 240 Mp است یعنی اگر تنش بیش از 240 باشد تغییر شکل خیلی زیاد می شود.

[برای شکل پذیری به ε و برای سختی به σ توجه می کنیم]

فرض می کنیم که فولاد تا 240 تحمل می کند و ضریب اطمینان را 240 قرار می دهیم.



(معمولاً نمودار فولاد را به همین شکل رسم می کنند)

اثبات $\delta = \frac{PL}{EA}$:

قانون هوک : $\sigma = E \cdot \varepsilon$

تغییر طول در اثر کشش یا فشار

$$\frac{P}{A} = E \cdot \frac{\delta}{L} \Rightarrow (I)\ \boxed{\delta = \frac{PL}{EA}}$$

علامت δ به P بستگی دارد و طول و E و A را همواره مثبت هستند

الف) برای استفاده از فرمول (I) باید در تمام طول عضو (L) سه شرط زیر برقرار باشد :

1) عضو دو نیرویی باشد (P ثابت باشد)

2) همگن باشد (E ثابت باشد)

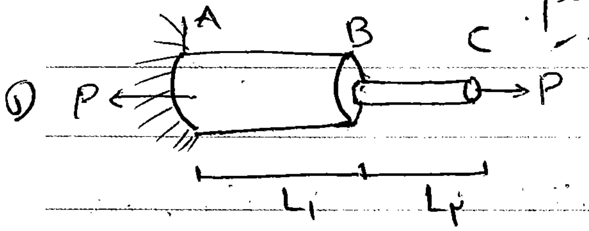
3) مقطع عضو یکنواخت باشد (A ثابت باشد)

در صورت برقراری این شرط از فرمول I استفاده می کنیم.

SUBJECT :

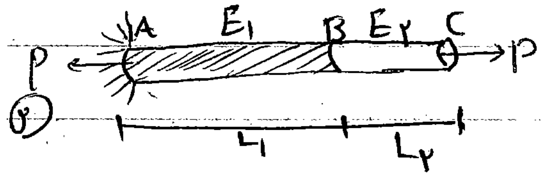
Year (   ) Month (   ) Date (   )

ب) اگر در طول عضو نیرو (P) یا جنس (E) یا مساحت مقطع (A) به طور ناگهانی یا غیر تدریجی تغییر نماید، عضو را به چند قسمت جزئی تقسیم می‌کنیم که هر قسمت آن به طور مجزا ۳ شرط صفحهٔ قبل را دارا باشد و از فرمول زیر تغییر طول کل عضو را بدست می‌آوریم:

① 

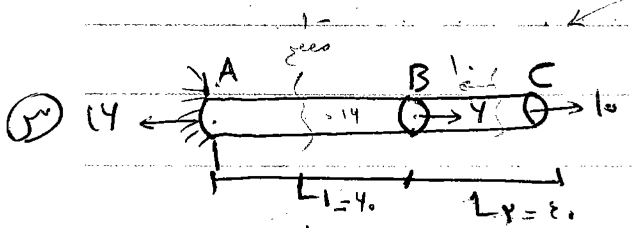
A ثابت است

$$\boxed{\delta=\sum_{i=1}^{n}\delta_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{P_iL_i}{E_iA_i}} \quad (II)$$

② 

E ثابت است

$P + ۹ - ۱۶ = ۰$

③ 

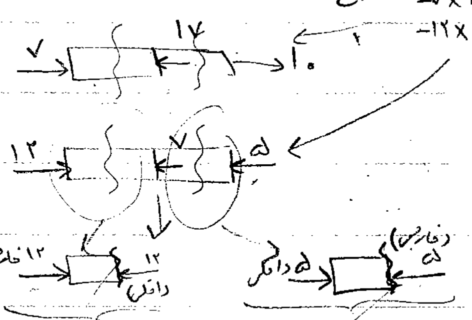
P ثابت است

$$\delta=\frac{1}{EA}\left(P_1L_1+P_2L_2\right)$$

۱۲×۶۰   ۱۰×۴۰

−۷×۶۰   ۱۰×۴۰

−۱۲×۶۰   −۵×۴۰



چون فشاری است پس ۱۲− برای این مقطع فشاری است

چون فشاری است پس ۱۲− است

برای این مقطع فشاری است

برای شکل ①:

از آنجایی که ثابت است آن را بیرون

$$\delta=\frac{P}{E}\left(\frac{L_1}{A_1}+\frac{L_2}{A_2}\right)$$

برای شکل ②:

$$\delta=\frac{P}{A}\left(\frac{L_1}{E_1}+\frac{L_2}{E_2}\right)$$

برای شکل ③:

$$\delta=\frac{1}{EA}\left(P_1L_1+P_2L_2\right)$$

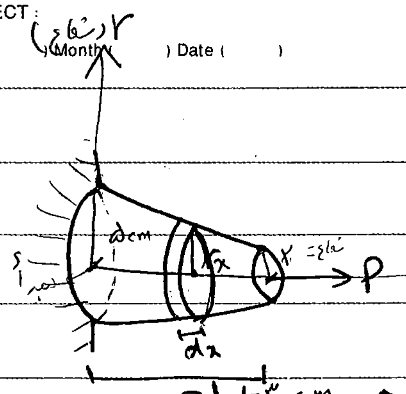
ج) اما اگر نیرو (P) و جنس (E) و یا مساحت (A) در طول عضو به طور تدریجی تغییر نماید از فرمول انتگرالی زیر استفاده می‌کنیم:

$$\boxed{\delta=\int_0^L\frac{P_x\,dx}{E_xA_x}} \quad (III)$$

تابعی برحسب x

تابعی برحسب x

SUBJECT: (درس ۲)
Year ( ) Month ( ) Date ( )



مخروط ناقص
مساحت آن به طور تدریجی تغییر کرده

تغییر طول این المان می‌شود:

$$\delta = \frac{P\,dx}{E \cdot A}$$

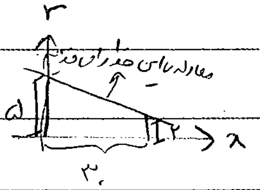
اما برای کل شکل باید از این المان انتگرال گرفت که می‌شود تغییر طول کل.

$$\boxed{\delta = \frac{P}{E}\int_0^L \frac{dx}{A_x}} \Rightarrow \frac{P}{E}\int_0^{30} \frac{dx}{\pi r_x^2}$$

$r = ax + b$

$\begin{cases} x = 0 \rightarrow r = ? \\ x = L \rightarrow r = ? \end{cases}$

مثلاً در مثال زیر:



معادله این خط را می‌نویسیم

$r = ax + b$

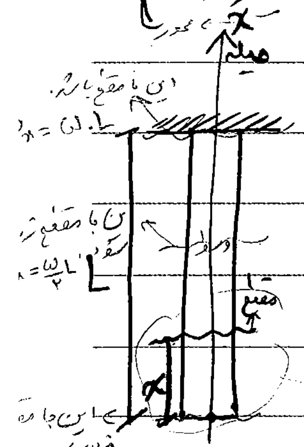
$r_x = 5 - 0.1x$

$\begin{cases} x = 0 \rightarrow r = 5 \\ x = 30 \rightarrow r = 2 \end{cases}$

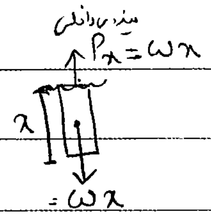
$$\delta = \frac{P}{E}\int_0^{30} \frac{dx}{\pi(5 - 0.1x)^2}$$

برای فرض به مساحت تدریجی تغییر کند

** مثال برای این که P تدریجی تغییر کند: (وزن کاربرد دارد) [مثال تغییر طول در اثر تغییر وزن]



A ثابت است
E ثابت است
P متغیر است



نیروی داخلی $P_x = \omega x$
نیروی خارجی $= \omega x$

$$\delta = \frac{1}{EA}\int_0^L P_x\,dx = \frac{1}{EA}\int_0^L \omega \cdot x\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{\omega}{EA}\left[\frac{x^2}{2}\Big|_0^L\right] = \frac{\overbrace{\omega L}^{W = \omega \cdot L}{}^2}{2E \cdot A} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta = \frac{W \cdot L}{2EA}}$$

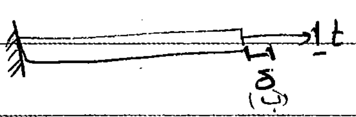
این فرمول $\frac{1}{2}$ برابر فرمول اول است.

ω = وزن واحد طول (ثابت)

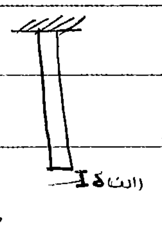
وزن کل میله $= W = \omega \cdot L$

نکته: نیروی داخلی در جایی که مقطع زده می‌شود وارد می‌شود.

$\delta = ?$



(ب)

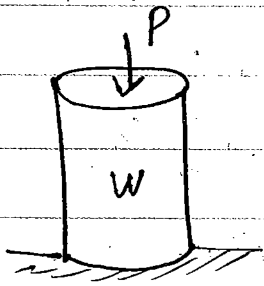


(الف)

تغییر طول الف نصف تغییر طول ب است.

نتیجه مهم: تغییر طول ناشی از وزن نصف تغییر طول ناشی از کشیدن است
کنکوری

مثال: ستون است که کاهش طول ناشی از:

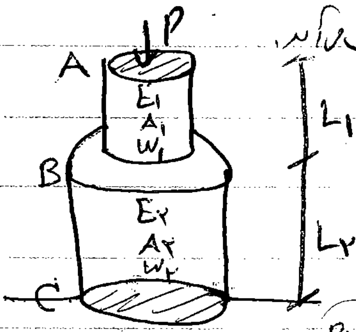


مقدار کاهش طول الف) $\frac{WL}{2EA} + \frac{PL}{EA}$ ج) ... + ...

ب) ... + ... د) ... ✓ (تغییر طول خواست گزینه‌ها درست بود)

تست: مقدار کاهش ارتفاع کل ستون ؟؟

تغییر ارتفاع کل ستون یعنی تغییر ارتفاع AC که از جمع AB + BC بدست می‌آید

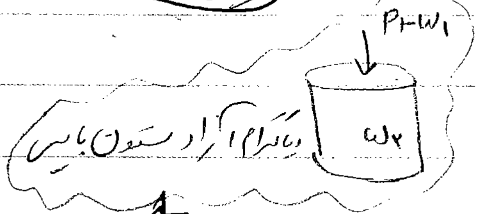


$\delta_1 + \delta_2$

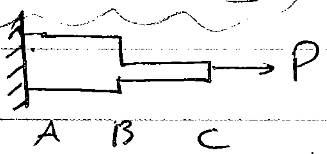
ستون بالایی

$$\delta_{AC} = \delta_{AB} + \delta_{BC} = \left[\frac{PL_1}{E_1A_1} + \frac{W_1L_1}{2E_1A_1}\right] + \left[\frac{(P+W_1)L_2}{E_2A_2} + \frac{W_2L_2}{2E_2A_2}\right]$$

با دادن مدل مسئله قبل هم استفاده کنیم ما به دو نتیجه
آیدال تاریم چون

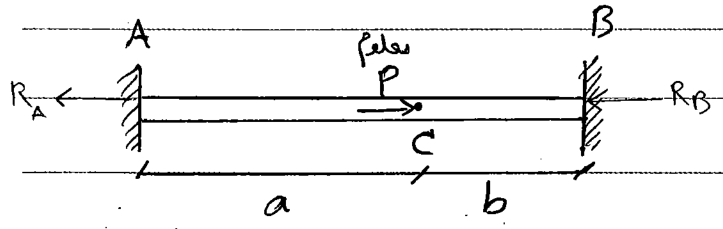


تست: تغییر مکان (جابجایی) نقطه C = ؟؟



δ_C (تغییر مکان (جابجایی) نقطه C) $= \delta_{AC}$

حل مسائل نامعین استاتیکی :

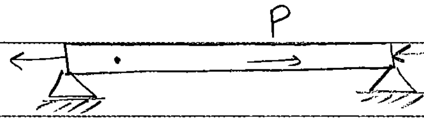


اگر نیروی P عمودی بود هر تکیه‌گاه ۳ عکس العمل داشت، ولی چون نیرو افقی است هر تکیه‌گاه یک عکس العمل دارد

معادله‌ی تعادل : $\Sigma F_x = 0$ $\boxed{R_A + R_B = \overset{\text{معلوم}}{P}}$ ①

معادله‌ی سازگاری : تغییر شکل‌ها (تغییر طول‌ها) (در مقاومت)

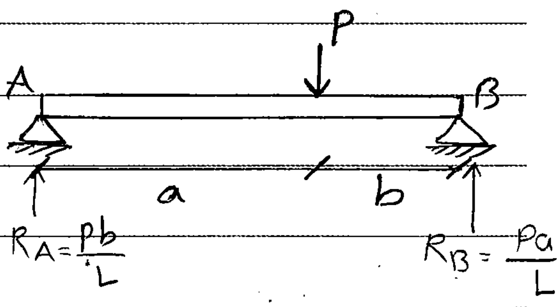
$\delta_{AB} = 0 \Longrightarrow$ یا



$\delta_{AC} + \delta_{BC} = 0$

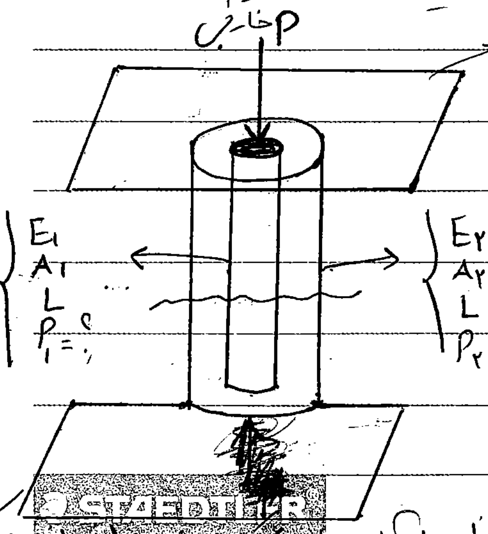
$\boxed{\delta = \frac{PL}{EA}}$ $\boxed{\frac{\overset{\text{کششی}}{R_A \cdot a}}{E \cdot A} + \frac{\overset{\text{فشاری}}{-R_B \cdot b}}{EA} = 0}$ ②

$$\Longrightarrow \begin{cases} R_A = P\frac{b}{L} \\ R_B = P\frac{a}{L} \end{cases}$$



** در استاتیک معین در ترم قبل یاد می‌گرفتیم و این جوری حل می‌کردیم

** با حل در مقاومت نامعین در ترم دوم برابر بود **



مثال: نیروی میله و لوله را بدست آورید.

الف) $\Sigma F_y = 0$

معادله‌ی تعادل : $\boxed{P_1 + P_2 = P \text{ معلوم}}$ ①

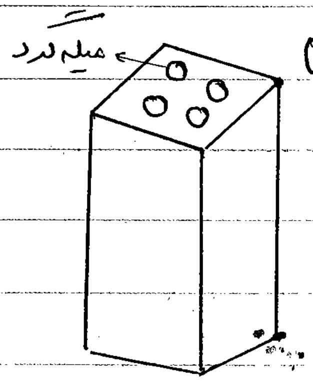
معادله‌ی سازگاری تغییر طول‌ها : $\delta_1 = \delta_2$ تغییر طول در لوله و میله یکسان است به خاطر وجود صفحه‌ی صلب

$\boxed{\frac{P_1 L}{E_1 A_1} = \frac{P_2 L}{E_2 A_2}}$

یک میله‌ی فولادی داخل یک لوله‌ی مسی بین دو صفحه‌ی صلب قرار دارد. صفحه‌ی صلب روی آن قرار داریم و بار گسترده‌ی P به ترتیب آن نشان داده شده است.

$$\begin{cases} P_1 = P\dfrac{E_1A_1}{E_1A_1+E_2A_2} \\ P_2 = P\dfrac{E_2A_2}{E_1A_1+E_2A_2} \end{cases}$$

می‌توانیم از فرمول بالا استفاده کنیم؟



$$\begin{cases} P_1 = P\dfrac{E_1A_1}{E_1A_1+E_2A_2} \\ P_2 = P\dfrac{E_2A_2}{E_1A_1+E_2A_2} \end{cases} \Longrightarrow$$

در ستون شکل مقابل سهم بتن نسبت به فولاد؟ $\dfrac{P_1}{P_2} = ?$

$$\Rightarrow \frac{P_1}{P_2} = \frac{E_1A_1}{E_2A_2}$$ (این نسبت صلبیت محوری)

ب) تنش در هر کدام را بدست آورید؟

$$\begin{cases} \sigma_1 = \dfrac{P_1}{A_1} = P\dfrac{E_1}{\Sigma EA} \\ \sigma_2 = \dfrac{P_2}{A_2} = P\dfrac{E_2}{\Sigma EA} \end{cases} \quad \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{E_1}{E_2}$$

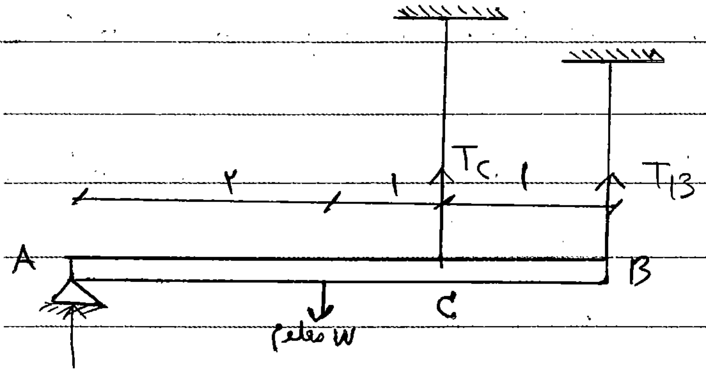
به نسبت مدول الاستیسیته

ج) $$\begin{cases} \varepsilon_1 = \dfrac{\sigma_1}{E_1} = \dfrac{P}{\Sigma EA} \\ \varepsilon_2 = \dfrac{\sigma_2}{E_2} = \dfrac{P}{\Sigma EA} \end{cases} \qquad \boxed{\sigma = E\varepsilon}$$

د) $$\begin{cases} \delta_1 = \varepsilon_1 L = \boxed{\dfrac{PL}{\Sigma EA}} \\ \delta_2 = \varepsilon_2 L = \dfrac{PL}{\Sigma EA} \end{cases}$$

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

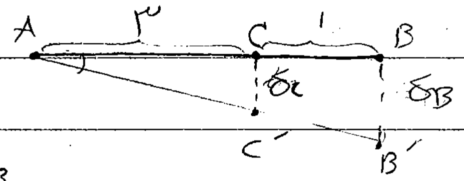


با وجود نیروی W میله حول نقطه A که ثابت است می‌چرخد و در کابل‌ها تغییر طول ایجاد می‌شود.

معادلات تعادل

$$R_A + T_B + T_C = W_{\text{معلوم}}$$

گشتاور حول A : $\quad ۴T_B + ۳T_C = ۲W$

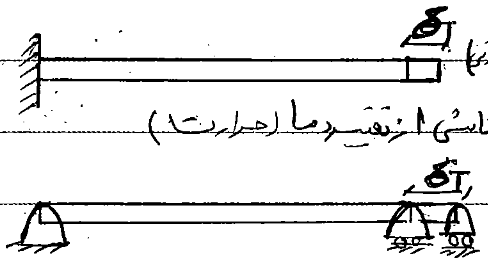


معادلات سازگاری تغییر طول‌ها :

$$\frac{\delta_C}{\delta_B} = \frac{۳}{۴} \rightarrow \delta_C = \frac{۳}{۴}\delta_B$$

$$\frac{T_C \cdot L_C}{E_C \cdot A_C} = \frac{۳}{۴}\,\frac{T_B \cdot L_B}{E_B \cdot A_B}$$

اثرات تغییر دما : (در اثر دما تغییر طول داریم)



(تغییر طول حرارتی)

تغییر طول ناشی از تغییر دما (حرارتی)

$$\boxed{\underset{(mm)}{\delta_T} = \underset{1/°C}{\alpha} \cdot \underset{(mm)}{L} \cdot \underset{(T_2-T_1)}{\Delta T^{(°C)}}}$$

ضریب انبساط طول حرارتی — طول — تغییر دما

به مساحت بستگی ندارد

$$\boxed{\delta = \frac{PL}{EA}}$$

تغییر طول در اثر کشش است.

تنش حرارتی

$$\boxed{\varepsilon_T = \frac{\delta_T}{L} = \alpha \cdot \Delta T}$$

میله‌ای را گرم کنیم و $\sigma_T = ۰$ تنش

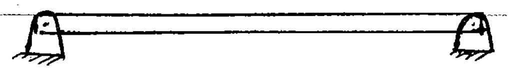
افزایش طول دهد یا سرد کنیم و کاهش طول دهد تنش صفر است.

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

- اثر تغییر دما بر میله هایی که می توانند تغییر طول داشته باشند کنش سر میله آزاد است

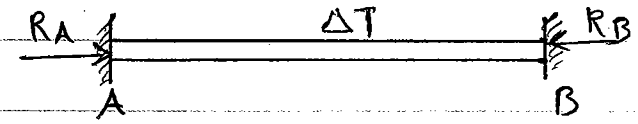
- اثر تغییر دما بر میله هایی که نمی توانند تغییر طول داشته باشند ؟



δ تغییر طول $= 0$

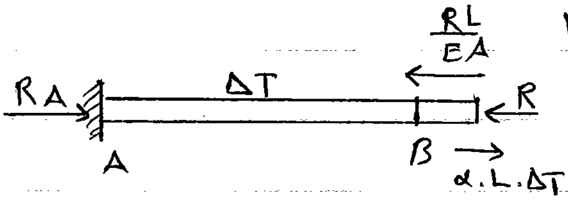
$\varepsilon = 0$

σ تنش $= ?$



معادله ی تعادل : $\Sigma F_x = 0 \Longrightarrow R_A = R_B = R$

فرض: اگر تکیه گاه B نبود؟



معادله ی سازگاری تغییر طول ها : $\delta_{AB} = 0$

$$(\alpha . L . \Delta T) + \left(\frac{RL}{EA}\right) = 0$$

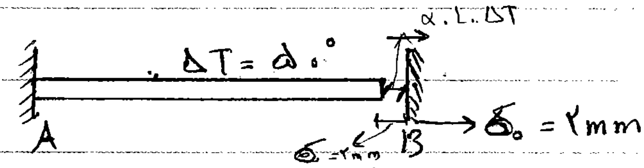
عکس العمل $\boxed{R = -EA \cdot \alpha \cdot \Delta T}$

اگر سرد کنیم $+R \leftarrow - \leftarrow \Delta T$

اگر گرم کنیم $-R \leftarrow + \leftarrow \Delta T$

$$\underline{\underline{\sigma_{\text{تنش}}}} = \frac{R}{A} = -E . \alpha . \Delta T$$

مثال: σ تنش $= ?$



δ_T تغییر طول $= \underbrace{\alpha . L . \Delta T}_{5}$

$5 \le \underbrace{\delta_0}_{2}$ نمی خورد به تکیه گاه B

$5 > \underbrace{\delta_0}_{2}$ می خورد به تکیه گاه B

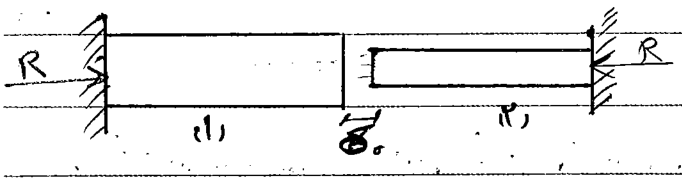
معادله ی سازگاری : $\delta_{AB} = 2mm$

$$\underbrace{\alpha . L \Delta T}_{5} + \frac{R . L}{\underbrace{E . A}_{-3}} = 2 \longrightarrow \boxed{R = 2}$$

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

مثال: $R = ?$



معادله‌ی سازگاری: $\delta_1 + \delta_2 = \underset{\text{معلوم}}{\delta_0}$

$$\left(\alpha_1 \cdot L_1 \cdot \Delta T + \frac{R \cdot L_1}{E_1 \cdot A_1}\right) + \left(\alpha_2 \cdot L_2 \cdot \Delta T + \frac{R L_2}{E_2 A_2}\right) = \delta_0$$

اگر دو میله‌ی بالا به هم چسبیده بود و تنش را می‌خواست: $\delta_0 = 0$ چون اثرش در معادله بالا

نسبت پواسون (ضریب پواسون): ص ۵۲ کتاب

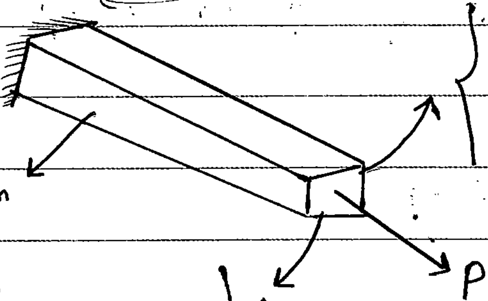
فرض: یک میله‌ی فولادی را در آزمایشگاه تحت کشش قرار می‌دهیم می‌بینیم طول آن 1mm اضافه شده اما تغییر طول در راستای Z و y کمتر می‌شود.

$\sigma_x = \frac{P}{A}$

$\sigma_y = \sigma_z = 0$ اما $\varepsilon_y = \varepsilon_z \neq 0$

$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \varepsilon_x$

$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$ ← مدول کشسانی



$L_z = 20\,mm$

$\delta_z = -0.004\,mm$

$\varepsilon_z = -0.0002\,mm$

$L_x = 1000\,mm$

$\delta_x = 1\,mm$

$\varepsilon_x = 0.001 \quad \frac{\delta}{L}$

$L_y = 30\,mm$

$\delta_y = -0.009\,mm$

$\varepsilon_y = -0.0003$

$\varepsilon_x = \frac{\delta_x}{L_x}$

$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$

(برای مواد ایزوتروپ)

$$\underset{\text{(نسبت پواسون)}}{\overset{\text{نو}}{\nu}} = \left| \frac{\text{تغییر طول نسبی جانبی}}{\text{تغییر طول نسبی محوری}} \right| = \frac{-\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = \frac{-\varepsilon_z}{\varepsilon_x} \quad \text{یا} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\underbrace{\varepsilon_y = \varepsilon_z}_{\text{کرنش های جانبی}} = -\nu \underbrace{\varepsilon_x}_{\text{کرنش محوری}}} \qquad \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \leftarrow \text{مدول الاستیسیته} \qquad \sigma_x = \frac{P}{A}$$

همگن: خواص ماده در تمام نقاط ماده یکسان و ثابت باشند. (خواص عددی) یا اسکالر

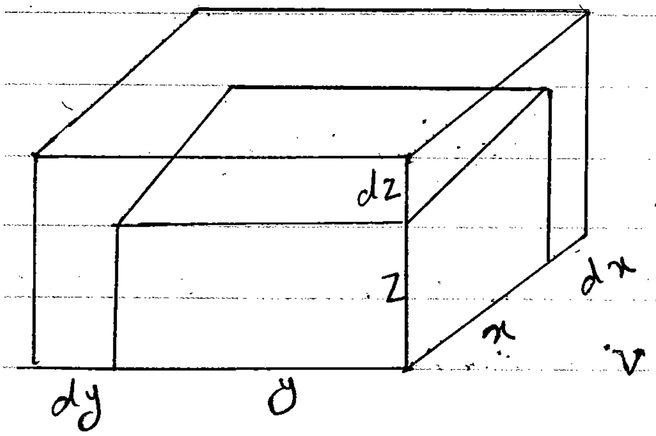
STAEDTLER

ایزوتروپیا: ماده‌ای ایزوتروپ است که کلیه‌ی خواص آن در تمام جهات یکسان باشد

مثال: مثلاً اگر یک مکعب فولادی را در آب جوش بیندازیم به همان شکل مکعب می‌ماند چون تغییر طول در تمام بعدها یکسان است

$v' - v$ تغییر حجم

تغییر حجم نسبی: $\left(\varepsilon_v = \frac{\delta_v}{v}\right)$ تغییر حجم نسبی



$$V = x.y.z$$

حجم ثانویه $V' = [(x+dx)(y+dy)](z+dz)$

$$[xy + xdy + ydx](z+dz)$$

$$V' = xyz + yzdx + xzdy + xydz$$

$$\varepsilon_v = \frac{yzdx + xzdy + xydz}{xyz}$$

$$\boxed{\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}$$ (I) فرمول کلی

** اگر حجمی به هر دلیلی تغییر کرد [نیرو یا گرما]، تغییر حجم نسبی برابر است با مجموع سه تغییر طول نسبی **

کاربرد فرمول: الف) تغییر حجم نسبی ناشی از تغییر دما:

ب) تغییر حجم نسبی ناشی از نیروی محوری: (تغییر نیرو)

SUBJECT :

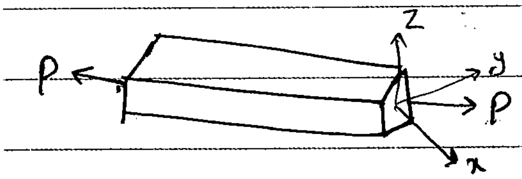
Year ( ) Month ( ) Date ( )

الف) تغییر حجم نسبی ناشی از تغییر دما:

$$\varepsilon_v = \underset{\alpha\Delta T}{\varepsilon_x} + \underset{\alpha\Delta T}{\varepsilon_y} + \underset{\alpha\Delta T}{\varepsilon_z} \Longrightarrow \boxed{\varepsilon_v = 3\alpha \cdot \Delta T} \quad (\mathrm{I})$$

3α: ضریب انبساط حجمی حرارتی

ب) تغییر حجم نسبی ناشی از نیروی محوری:



$$\varepsilon_v = \varepsilon_x + \underset{-\nu\varepsilon_x}{\varepsilon_y} + \underset{-\nu\varepsilon_x}{\varepsilon_z} \Longrightarrow$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x$$

$$\Longrightarrow \boxed{\varepsilon_v = \varepsilon_x(1-2\nu)} \quad (\mathrm{II})$$

اگر $\nu = 0 \Longrightarrow \varepsilon_v = \varepsilon_x$

اگر $\nu = 0.5 \Longrightarrow \varepsilon_v = 0$

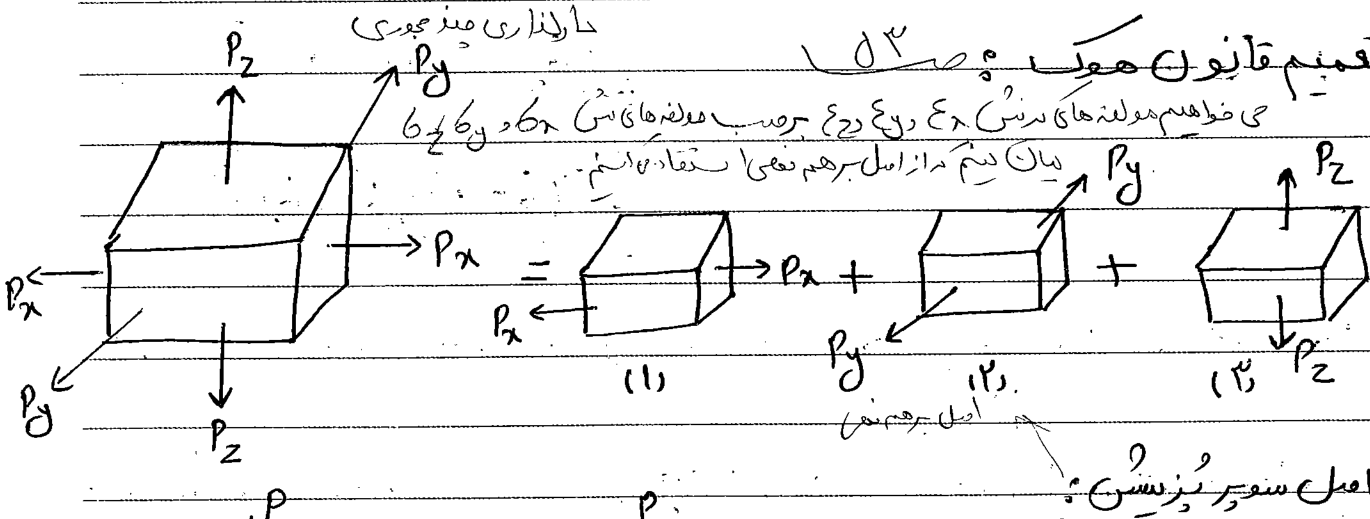
$\Longrightarrow \boxed{0 < \nu < 0.5}$

نتیجه: ν بین ۰ تا ۰.۵ است ν برابر صفر وجود ندارد اگر $\nu = 0.5$ باشد امکان ندارد.

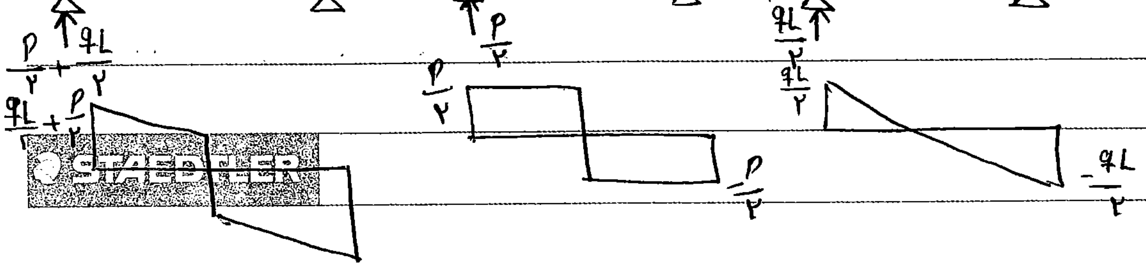
تعمیم قانون هوک: ص ۵۳

بارگذاری چند محوری

می خواهیم مولفه های کرنش ε_x و ε_y و ε_z را برحسب مولفه های تنش σ_x و σ_y و σ_z بیان کنیم از اصل برهم نهی استفاده می کنیم.



اصل سوپرپوزیشن:

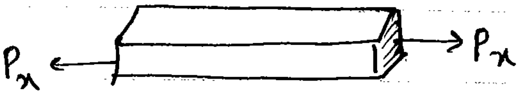


SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

هوک : $\sigma_x = E\varepsilon_x$

پواسون : $\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x$



$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \qquad \varepsilon_y = -\nu\frac{\sigma_x}{E}$$

تحت کشش

$$\varepsilon_z = -\nu\frac{\sigma_x}{E}$$

$$\begin{cases}
\varepsilon_x = +\dfrac{\sigma_x}{E} & -\nu\dfrac{\sigma_y}{E} & -\nu\dfrac{\sigma_z}{E} \\
\varepsilon_y = -\nu\dfrac{\sigma_x}{E} & +\dfrac{\sigma_y}{E} & -\nu\dfrac{\sigma_z}{E} \\
\varepsilon_z = -\nu\dfrac{\sigma_x}{E} & -\nu\dfrac{\sigma_y}{E} & +\dfrac{\sigma_z}{E}
\end{cases}$$

بارگذاری در امتداد x (۱) — بارگذاری در امتداد y (۲) — بارگذاری در امتداد z (۳)

اگر از دو یا ۳ جهت نیرو وارد شود (کلاً اگر از تمام وجه ها تحت کشش باشد)

$$\begin{cases}
\varepsilon_x = +\dfrac{\sigma_x}{E} - \nu\dfrac{\sigma_y}{E} - \nu\dfrac{\sigma_z}{E} = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right] + \alpha\Delta T \\
\varepsilon_y = \text{------} = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right] + \alpha\Delta T \\
\varepsilon_z = \text{------} = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right] + \alpha\Delta T
\end{cases}$$

اگر علاوه بر اعمال نیرو در هر سه جهت دما را نیز تغییر دهیم

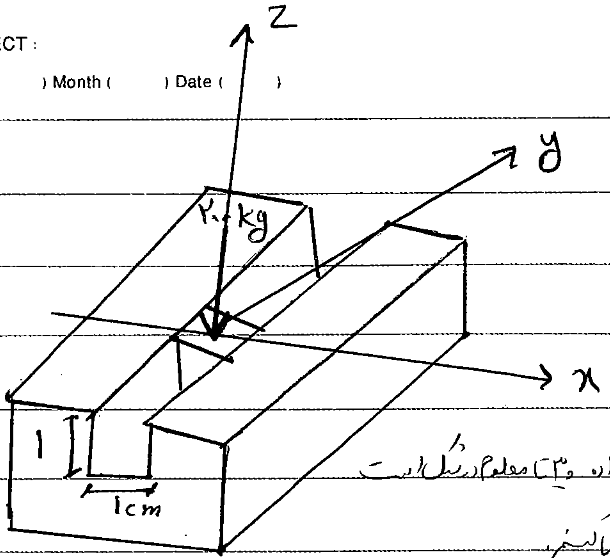
مثال: قطعه‌ی صلب فولادی که یک شیار به عمق و عرض 1cm دارد و یک قطعه‌ی لاستیکی (صلب) به ابعاد 1cm در داخل

شیار کاملاً فیت شده است و یک فشار ۲۰۰kg به لاستیک اعمال شده به لاستیک را تحت فشار

قرار داده و E و ν لاستیک معلوم می‌باشد.

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )



~~ε_x~~ ε_y ε_z

فشاری

σ_x ~~σ_y~~ $\sigma_z \rightarrow -200 \frac{kg}{cm^2}$

نیروی وارد بر هر مکعب تنش آن وجه محسوب می‌شود.

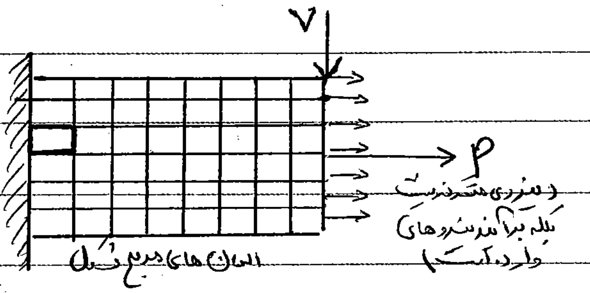
۳ تا مجهول داریم ۲ تا معلوم را مسئله داده و ۳ تا معلوم در شکل است

حال در ۳ معادله بالا قرار داده و حل می‌کنیم

ε_z صفر است چون دقیقاً داخل شیار است و ε نداریم، σ_y نداریم چون ε_y آن آزاد است و هیچ نیرویی به آن وارد نمی‌شود.

مگر $\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\nu \frac{\sigma_z}{E}$ ؟؟ پس پارادوکس جا ... است

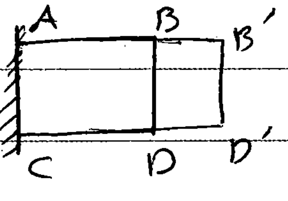
قانون هوک برای تنش‌ها و تنجش‌های (کرنش‌های) برشی :



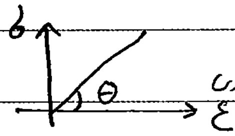
تحت کشش قرار می‌دهیم

در اثر کشش مربع به مستطیل می‌شود

در اثر برش مربع به متوازی الاضلاع می‌شود



تنجش محوری $\varepsilon = \frac{BB'}{AB}$

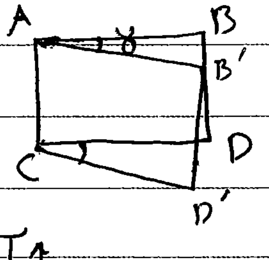


$\tan\theta = E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$

تنش محوری

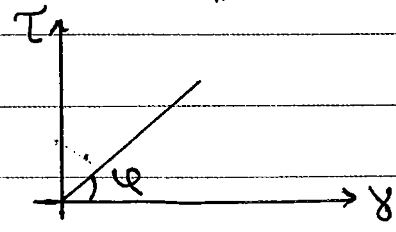
مدول الاستیسیته محوری

تنجش محوری



$\tan\gamma = \gamma = \frac{BB'}{AB}$

تنجش برشی



$\tan\varphi = G = \frac{\tau}{\gamma}$

تنش برشی

تنجش برشی

مدل الاستیسیته برشی

STAEDTLER

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

$$\begin{cases} \text{تنش محوری } \sigma = \underset{\text{مدول الاستیسیته}}{E} \cdot \varepsilon \text{ کرنش محوری} \\ \text{تنش برشی } \tau = \underset{\text{مدول برشی}}{G} \cdot \underbrace{\gamma \text{ کرنش برشی}}_{\text{زاویه برش هم هست}} \end{cases}$$

اگر دو تا را داشته باشیم سومی بدست می‌آید.

$$\boxed{G = \frac{E}{2(1+\nu)}}$$

مثال! $G = \frac{E}{2(1+\nu)} \Rightarrow \frac{E}{G} = 2(1+\underset{0.5}{\overset{0}{\nu}}) \Rightarrow 2 < \frac{E}{G} < 3$

الف) $1 < \frac{E}{G} < 2$

ب) $2 < \frac{E}{G} < 3$ ✓

ج) $3 < \frac{E}{G} < 4$

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

فصل سوم : پیچش :

پیچش مقاطع مدور :

در استاتیک ما P (نیروی محوری)، V (نیروی برشی)، T (گشتاور پیچشی) و M (گشتاور خمشی) را بدست می‌آوردیم.

در مقاومت می‌خواهیم ببینیم که P، V، T و M چه نتیجه‌ای می‌دهند (چه تنشی می‌دهند)

نیروی محوری P $\Longrightarrow$ $\sigma_{Ave} = \frac{P}{A}$ تنش محوری نتیجه می‌دهد و برای تغییر شکل $\Longleftarrow$ $\underset{\text{تغییر طول}}{\delta} = \frac{PL}{E \cdot A}$

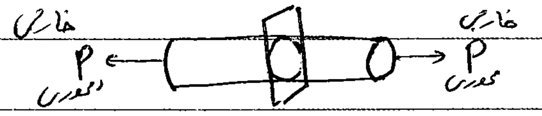
نیروی برشی V $\Longrightarrow$ $\tau_{Ave} = \frac{V}{A}$ تنش برشی نتیجه می‌دهد.

گشتاور پیچشی T $\Longrightarrow$ $\tau = ?$ و $\phi = ?$ $\Longleftarrow$ برای تغییر شکل (تغییر زاویه)

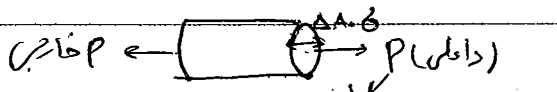
ماژیک را بپیچونیم تا حالتی که از دست آن خارج شود، بریده می‌شود و بنابراین تنش برشی ایجاد می‌کنند

گشتاور خمشی M $\Longrightarrow$ $\sigma = ?$ در فصل چهارم خوانده می‌شود

ماژیک را هم خم کنیم



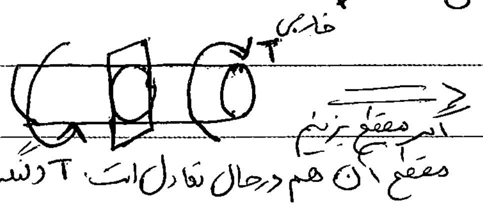
این میله در حال تعادل است پس هر مقطعی از آن هم باید تعادل داشته باشد.



این نیرو ناشی از سطح است.

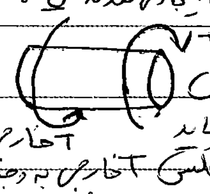
$$P = \int \sigma \cdot dA$$

فرض: میله‌ی مدور داریم که تحت پیچش است (مانند شکل مقابل)



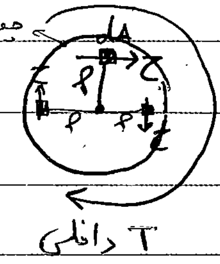
اگر مقطع بزنیم مقطع آن هم در حال تعادل است. T گشتاور پیچشی خارجی

چون مماس بر سطح است τ ایجاد می‌کند نه σ.



برای اینکه تعادل داشته باشد باید گشتاور پیچشی عکس T خارجی به وجود آید

که گشتاور داخلی ناشی از تنش است اما گشتاور خارجی این طور است



تنش در تعادل متقارن بر ρ عمود است

$$\underset{\text{نیرو}}{\tau dA} \cdot \underset{\text{فاصله}}{\rho} = \underset{\text{گشتاور}}{T} \Longrightarrow$$

$P = \int \sigma dA$ $\Longleftarrow$ نیرو کل

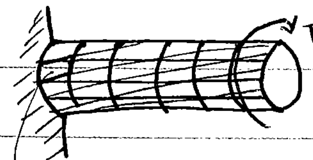
$P = \sigma \cdot A$

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

$\boxed{T = \int_A \rho \tau \, dA}$ (این فرمول کاربردی نیست) گشتاوری که به مقطع وارد می شود

فرض: اگر این میله تحت گشتاور T قرار گیرد خطوط افقی مورب می شود و خطوط عمود بر افق دور محورش دوران می کنند و شکل آن تغییر می کند:



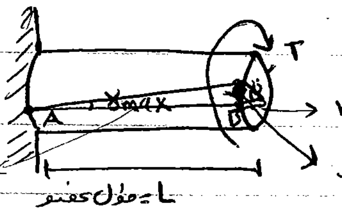
نتیجه: طول تغییر نمی کند (پس تنش برشی است) و زاویه ایجاد می شود.

هر تغییر طول ناشی از تنش و فشار است $\sigma = E \cdot \varepsilon$

ما تغییر زاویه ناشی از پیچش است $\tau = G\gamma$

به شبه متوازی الاضلاع شده. پس برشی است.

* فرض:



وقتی میله تحت گشتاور پیچشی T قرار گیرد نقطه ی B تبدیل به B' می شود و زاویه ی γ ایجاد شود که بی نهایت کوچک است (شعاع r)

(منظور ϕ است در فصل قبلی) زاویه ی پیچش = φ

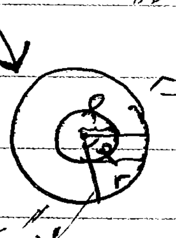
γ های که روی میله می بینیم max است. هرچه داخل تر برود γ کوچکتر می شود.

می خواهیم رابطه ای بین γ و φ بنویسیم (هرچه γ بیشتر شود φ هم بیشتر می شود)

* برای اینکه بین γ و φ رابطه داشته باشیم باید عضو مشترک آن ها که قوس BB' است را در نظر بگیریم.

$$\begin{cases} \overset{\text{کمان}}{BB'} = r\varphi \\ BB' = L\gamma_{max} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\gamma_{max} = r\frac{\varphi}{L}}$$

اگر γ بی نهایت کوچک باشد کمان BB' مانند خط می شود



اگر گشتاور پیچشی شعاع r بیشتر شود

پس اگر میله ای فرض در داخل میله ی اصلی بگیریم φ تغییر نمی کند اما γ تغییر می کند. پس γ ای که روی میله اتفاق می افتد:

$$\gamma_{max} = r\frac{\phi}{L}$$

r: شعاع میله اصلی

ولی γ ای که داخل تر اتفاق می افتد:

$$\gamma = \rho\frac{\phi}{L}$$

ρ: شعاع میله ی داخل

بس

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

در پیچش :

(۱) $\boxed{T = \int_A \rho \tau \, dA}$

(۲) $\boxed{\gamma = \rho \frac{\phi}{L}}$ که به صورت خطی برحسب ρ تغییر می‌کند.

(۳) $\boxed{\gamma_{max} = r \frac{\phi}{L}}$

(۴) $\boxed{\gamma = \frac{\rho}{r} \gamma_{max}}$

با توجه به قانون هوک $\tau = G\gamma$ اگر طرفین رابطه ۲ را در G ضرب کنیم تنش برشی ایجاد می‌شود.

$$\tau = G\gamma = G\rho \frac{\phi}{L}$$

اگر طرفین رابطه ۳ را در G ضرب کنیم تنش برشی max ایجاد می‌شود.

$$\tau_{max} = G\gamma_{max} = Gr\frac{\phi}{L}$$

پس τ_{max} در دورترین نقاط از مرکز ایجاد می‌شود.

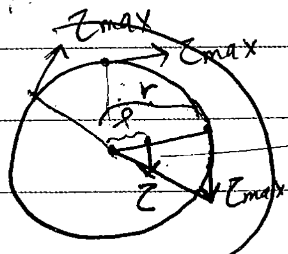
* بیشترین تنش در دورترین نقاط از مرکز ایجاد می‌شود *

$$\frac{\tau}{\tau_{max}} = \frac{\rho}{r} \Rightarrow \boxed{\tau = \frac{\rho}{r} \cdot \tau_{max}} \quad (۵)$$

اگر طرفین رابطه (۵) را در G ضرب کنیم

$$G\gamma = \frac{\rho}{r} G\gamma_{max} \Rightarrow \boxed{\tau = \frac{\rho}{r}\tau_{max}} \quad (۶)$$ کاربردی

مهم.



با توجه به شکل می‌فهمیم که رابطه بین τ و τ_{max} و r و ρ خطی است. یعنی:

$$\frac{\tau}{\tau_{max}} = \frac{\rho}{r}$$

معکوس گشتاور پیچشی قرار گرفته.

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

نتیجه‌ی مهم: تنش خطی تغییر می‌کند و به فاصله بستگی دارد [دورترین فاصله از مرکز بیشترین تنش]

طبق رابطه‌ی ۵ و ۱ : ۵ را داخل ۱ می‌گذاریم.

$$①,⑤ \Rightarrow T=\int_A \rho\left(\frac{\rho}{r}\tau_{max}\right)dA \Rightarrow$$

حل انتگرال در صفحه‌ی الف

$$T=\frac{\tau_{max}}{r}\int_A \rho^2\,dA \Rightarrow \boxed{T=\frac{\tau_{max}\cdot J}{r}} \ (6) \Rightarrow \boxed{T_{\text{مجاز}}=\frac{\tau_{\text{مجاز}}\cdot J}{r}}$$

J : ممان اینرسی

ظرفیت باربری (حداکثر)

مهم‌ترین فرمول

$$\boxed{\tau_{max}=\frac{Tr}{J}} \ (7)$$

موجود، موجود — فرمول کنترل: کنترل، فضای پیچشی — خیلی مهم، کاربردی، مجاز

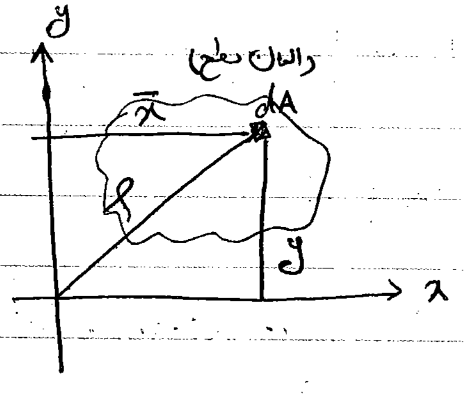
* باربری: بیشترین نیرو یا گشتاور خارجی وارد بر سازه
پس ظرفیت باربری در مقطع یعنی یک مقطع
چقدر نیرو را تحمل می‌کند (P) *

$$\boxed{\tau=\frac{T\rho}{J}} \ (8)$$

خیلی مهم، کاربردی

شعاع داخلی (فاصله از مرکز) از نقطه‌ای که می‌خواهیم تنش را در آن به دست آوریم

یادآوری استاتیک (ممان اینرسی):



فاصله x همان چیز = گشتاور هر چیز
(ساحت، نیرو)

$$Q_x=\int y\,dA$$ (ممان استاتیک نسبت به محور x ها) (گشتاور اول سطح نسبت به محور x ها) یا گشتاور سطح — کاربردی

اگر این رابطه را بر A تقسیم کنیم $\bar{y}$ به دست می‌آید یعنی:

$$\boxed{\bar{y}=\frac{\int y\,dA}{A}}$$ مختصات y مرکز سطح

$$\boxed{\bar{x}=\frac{\int x\,dA}{A}}$$ مختصات x مرکز سطح

$$\boxed{Q_y=\int x\,dA}$$ کاربردی

مرکز جرم:

$$\bar{x} = \frac{\int x\,dm}{m} \quad (dm = \rho\,dv) \Rightarrow \text{مکان مرکز جرم}$$

$$\bar{y} = \frac{\int y\,dm}{m}$$

مرکز ثقل:

$$\bar{x} = \frac{\int x\,dw}{w} \quad (dw = g\,dm,\ w = mg) \quad \text{مکان مرکز ثقل}$$

$$\bar{y} = \frac{\int y\,dw}{w}$$

مرکز حجم:

$$\bar{x} = \frac{\int x\,dv}{v}$$

$$\bar{y} = \frac{\int y\,dv}{v}$$

در صورتی که جسم همگن باشد مرکز جرم همان مرکز حجم است

و در صورتی که g ثابت باشد مرکز ثقل و مرکز جرم برابر است.

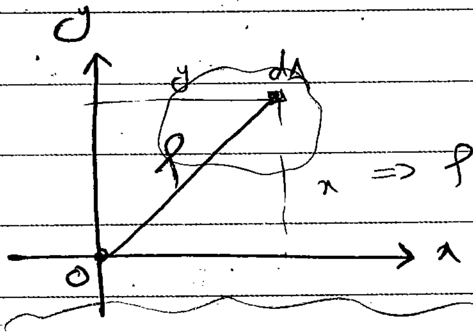
$$I_x = \int y^2\,dA$$ (ممان اینرسی نسبت به x) (گشتاور دوم سطح نسبت به محور x ها)

$$I_y = \int x^2\,dA$$ (گشتاور دوم سطح نسبت به محور y ها)

ممان اینرسی قطبی

$$J = \int \rho^2\,dA \xrightarrow[\rho^2 = x^2+y^2]{} I_x + I_y = J$$

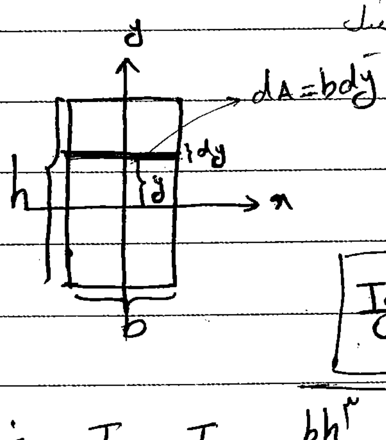
فاصله از محور z ها یعنی فاصله از محور x ها و y ها باشد یا فاصله از نقطه O



$$\rho^2 = x^2 + y^2$$

نکته: برای مقاطع مدور بیشتر می‌خواهیم (دایره، نیمدایره) و مستطیل

مستطیل:



$$I_x = \int y^2\,dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 (b\,dy) = b\left[\frac{y^3}{3}\right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{bh^3}{12}$$ حفظ شود.

$$\boxed{I_y = \frac{hb^3}{12}}$$ حفظ شود.

$$J = I_x + I_y = \frac{bh^3}{12} + \frac{hb^3}{12}$$ برای مستطیل

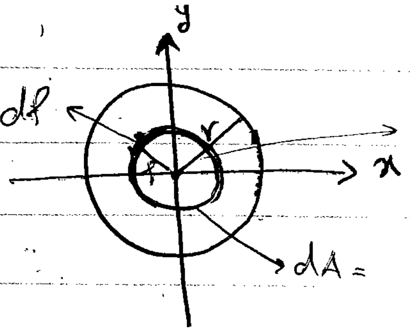
STAEDTLER

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

ص الف

دایره :



تبدیل به مستطیل می‌شود

$$dA = 2\pi\rho \, d\rho$$

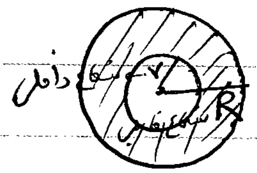
$$J = \int \rho^2 dA = \int_0^r \rho^2 (2\pi\rho \, d\rho) = 2\pi \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^r \Rightarrow \boxed{J = \frac{\pi r^4}{2}}$$

برای دایره

برای دایره $\Rightarrow$ $\boxed{I_x = I_y = \frac{J}{2} = \frac{\pi r^4}{4}}$

$$\begin{cases} I_x + I_y = J \\ I_x = I_y \\ I_x + I_x = J \Rightarrow I_x = I_y = \frac{J}{2} \end{cases}$$

سوال: $J = ?$

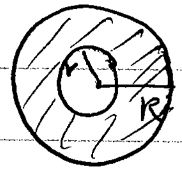


$$J = \left(\frac{\pi R^4}{2}\right) - \left(\frac{\pi r^4}{2}\right)$$

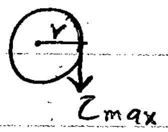
هاشور زده — دایره خارجی — دایره داخل

لوله‌ی توخالی

حالا حالت : میله‌ی توخالی (لوله‌ی توخالی)



$$J = \frac{\pi}{2}\left(R^4 - r^4\right)$$



$$J = \frac{\pi r^4}{2}$$

میله‌ی توپر :

برای میله‌ی توپر :

کنترل : $\tau_{max} = \frac{Tr}{J}$ $\xrightarrow[\text{برای توپر}]{J = \frac{\pi r^4}{2}}$ $\tau_{max} = \frac{2T_{\text{موجود}}}{\pi r^3} \leq \tau_{\text{مجاز}}$

در کنترل τ_{max} را قیاس

ظرفیت باربری : $T_{\text{حداکثر مجاز}} = \frac{\tau_{\text{مجاز}} \cdot J}{r} = \tau_{\text{مجاز}} \times \frac{\pi r^3}{2}$

به سمت پایین رند شود

طراحی : $r_{\text{لازم حداقل}} = \sqrt[3]{\frac{2 \times T_{\text{موجود}}}{\tau_{\text{مجاز}} \times \pi}}$

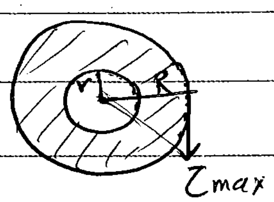
در رند کردن به سمت بالا رند شود

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

در میله توپر τ_{min} مقدارش یعنی تنش در مرکز صفر است.

برای لوله ها:



(۱) کنترل: $\tau_{max} = \dfrac{T_{موجود} \times R}{\frac{\pi}{2}(R^4 - r^4)} \le \tau_{مجاز}$

(۲) ظرفیت باربری: $T_{مجاز} = \dfrac{\tau_{مجاز} \times \frac{\pi}{2}(R^4 - r^4)}{R}$

حداکثر — به سمت پایین رند شود.

در طراحی چون بی نهایت جواب داریم یعنی ۱ معادله و ۲ مجهول می شود: طراحی (جواب های مشخص داریم) که در طراحی یا r یا R مجهول است و یا نسبت $\frac{R}{r}$ یا $\frac{r}{R}$ را می دهند یا مثلاً می گویند لوله ای داریم به ضخامت ... یعنی اختلاف R و r ضخامت ورق را می دهد

---

(۷) $\Rightarrow \tau_{max} = \dfrac{Tr}{J}$

هوک: $\gamma_{max} = \dfrac{\tau_{max}}{G}$

$\boxed{\gamma_{max} = \dfrac{Tr}{GJ}}$ (۸) کاربردی است

(۳): $\gamma_{max} = r\dfrac{\phi}{L}$

(۹): $\gamma_{max} = \dfrac{Tr}{GJ}$

$r\dfrac{\phi}{L} = \dfrac{Tr}{GJ} \Rightarrow \boxed{\phi = \dfrac{TL}{GJ}}$ (۱۰) خیلی مهم و کاربردی است.

$\sigma = \dfrac{P}{A} \le \sigma$ مجاز

$\tau_{max} = \dfrac{Tr}{J} \le \tau_{مجاز}$

$\delta = \dfrac{PL}{EA}$ دلتا — تغییر شکل طولی (تغییر طول) — صلبیت محوری — سختی

$\phi = \dfrac{TL}{GJ}$ زاویه پیچش (تغییر زاویه در پیچش) — صلبیت پیچشی

ادامه در صفحه بعد

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

در کشش فشار ٪ مساحت مهم است اما در پیچش G مهم است.
در برش هم مساحت مهم است.

$$\delta^{mm} = \frac{PL^{(mm)}}{EA_{(mm^2)}}$$

$(\frac{N}{mm^2})$

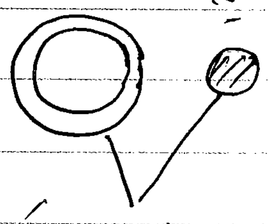
رادیان (بدون بعد)

$$\Phi = \frac{TL^{(mm)}}{GJ}$$

(N.mm) , $(\frac{N}{mm^2})$, (mm^4)

چند درجه بپیچد $x^{\circ} = \frac{\pi}{180} \times x$

لوله میله



جنس و مساحت یکسان

چون جنس و مساحت یکسان است
طبق رابطه‌ی
$P = \sigma \times A$
معمود مجاز
پس هر دو در مقابل کشش و فشار
گنجایش دارند.

~~مقابل کشش تو پر مقاومت است~~

$$P_{معمود} = \sigma_{مجاز} \times A$$
مجاز

طرح درجه:
قوی‌ترین بودن τ مجاز بیشتر (در مقابل کشش و فشار)
صلب‌تر بودن Φ مجاز کمتر

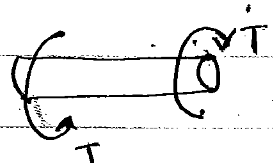
تغییر شکل ندهد
صلبیت پیچشی به J بستگی دارد.

صلبیت محوری به E و A بستگی دارد چون در این شکل
جنس و مساحت یکسان است پس صلبیت محوری یکسان است.

$$\varphi = \Phi = \frac{TL}{GJ}$$ کاربرد فرمول شماره‌ی ۱۰؟

الف) برای به کاربردن فرمول ۱۰ در تمام طول میله باید ۳ شرط زیر برقرار باشد:

شرط اول: گشتاور پیچشی (T) فقط در ۲ سر عضو اعمال شود (T ثابت باشد)



شرط دوم: همگن باشد (G ثابت باشد)

هم‌جا ثابت است و ۲ گشتاور
اعمال شده است.

شرط سوم: مقطع یکنواخت باشد (J ثابت باشد)

SUBJECT :

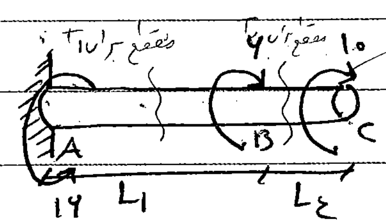
Year ( ) Month ( ) Date ( )

$x^c = \frac{\pi}{180} \times x$

ب) اگر T ، G یا J در طول عضو به صورت ناگهانی (غیر تدریجی) تغییر کند زاویه ی پیچش

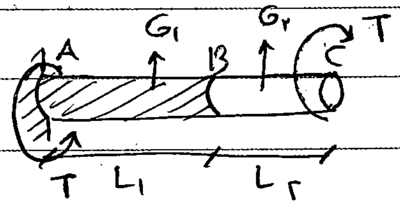
کلی میله [یعنی در کل میله چقدر می پیچد] از مجموع زیر بدست می آید:

$$\varphi = \Phi = \sum_{i=1}^{n} \phi_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{T_i L_i}{G_i J_i}$$



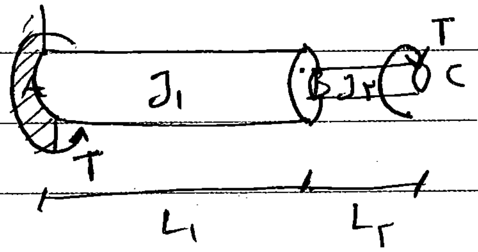
T تغییر کرد

$$\varphi = \frac{1}{GJ}\left(T_1 L_1 + T_2 L_2\right)$$



چون (G) تغییر کرد

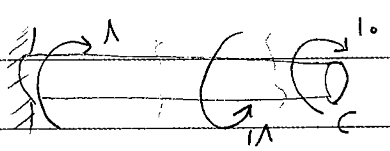
$$\varphi = \frac{T}{J}\left(\frac{L_1}{G_1} + \frac{L_2}{G_2}\right)$$



J تغییر کرد

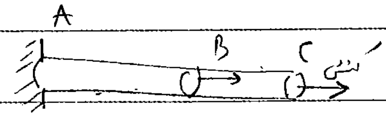
$$\varphi = \frac{T}{G}\left(\frac{L_1}{J_1} + \frac{L_2}{J_2}\right)$$

سوال:



$$\varphi = \frac{1}{GJ}\left(T_1 L_1 + T_2 L_2\right)$$

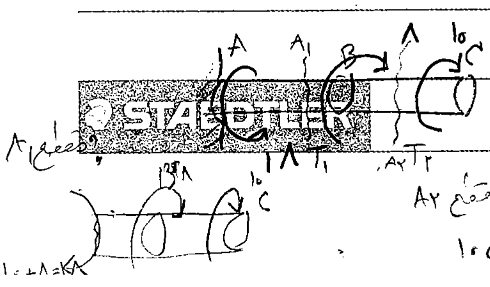
سوال:



جابجایی نقطه

$$\delta_C = \delta_{AC} = \delta_{AB} + \delta_{BC} = \delta_{CA} = \delta_{BA} + \delta_{CB}$$

اما در پیچش این صفت نیست: $\varphi_{AB} \neq \varphi_{BA}$



$$\varphi_C = \varphi_{AC} = \varphi_{AB} + \varphi_{BC} \neq \varphi_{AB} + \varphi_{CB}$$

$\varphi_{CB} \neq \varphi_{BC}$

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

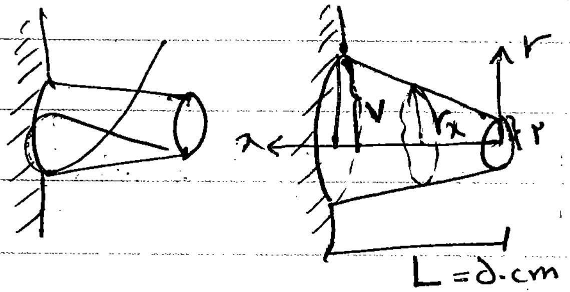
ج) اگر T، G و J در طول عضو به طور تدریجی تغییر کنند، از فرمول انتگرالی زیر زاویه φ را

بدست می‌آوریم:

$$\varphi = \int_0^L \frac{T_x dx}{G_x J_x}$$

که این فرمول سه حالت دارد یعنی J تدریجی تغییر کند

تبدیل به مخروط ناقص می‌شود:



$$\varphi = \frac{T}{G}\int_0^L \frac{dx}{J_x} = \frac{T}{G}\int_0^L \frac{dx}{\frac{\pi}{2} r_x^4}$$

معادله‌ی خط است.

$$\boxed{r_x = 2 + 0.1x}$$

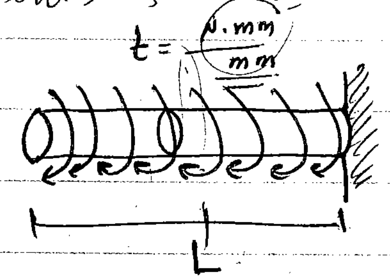
برای این که G تدریجی تغییر کند (چنین تدریجی تغییر کند نداریم)

$$\underbrace{T = t \cdot L}_{(N.mm)}$$ ← کل گشتاور پیچشی

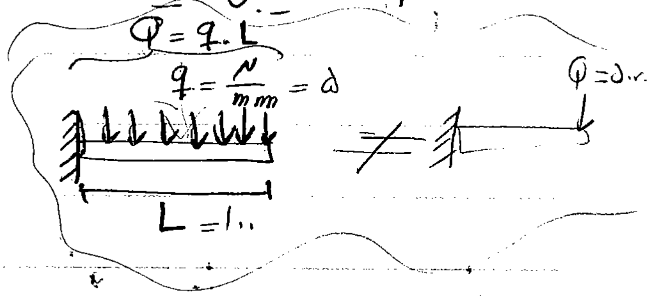
یعنی هر 1mm چقدر گشتاور تحمل می‌کند

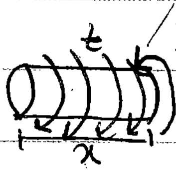
$t = \frac{N.mm}{mm}$

*** — حالت سوم گشتاور تدریجی تغییر کند (از همه مهم‌تر است):



شبیه ⇒





$T_x = t \cdot x$

$$\varphi = \frac{1}{GJ}\int_0^L T_x dx = \frac{1}{GJ}\int_0^L t \cdot x\, dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{t}{GJ}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^L = \frac{tL^2}{2GJ} = \boxed{\frac{T \cdot L}{2GJ}}$$

(یعنی: اگر میله‌ای را به طور گسترده پیچ بدهیم زاویه‌ی پیچش آن برابر است با نصف حالتی که یک گشتاور در وسط میله داشته باشیم، چون دوبار پیچ و پیچیده شده) چون؟

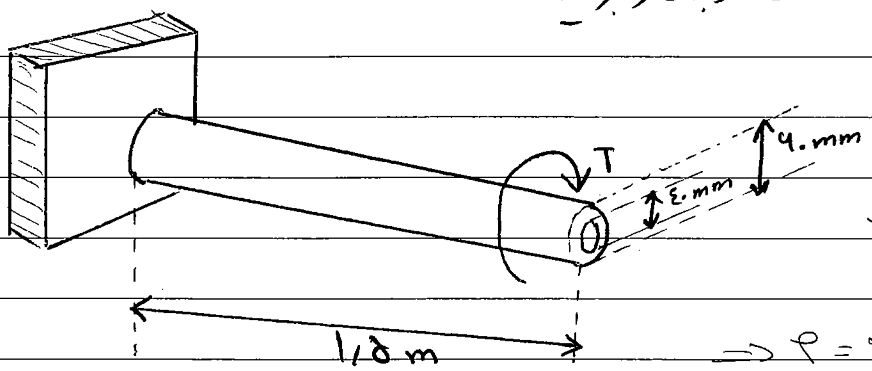
مثلاً دو تا فرمول:

$$\left.\tau_{max} = \frac{Tr}{J} \quad و \quad \varphi = \frac{TL}{GJ}\right\}$$ که برای دایره هستند

No...............

مثال ۲.۳ ص ۹۲ :

چه گشتاوری باید بر انتهای میل گردان وارد کرد تا پیچشی برابر با ۲° ایجاد شود؟ برای مدول صلابت فولاد مقدار $G = 77 Gpa$ را به کار برید



$T = ?$

$\varphi = 2^\circ = \frac{\pi}{180} \times 2 = 0.03491 \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi = 34.9 \times 10^{-3}\ rad$

$$\varphi = \frac{TL}{GJ} \Rightarrow T = \frac{\varphi G J}{L} = \frac{34.9 \times 10^{-3} \times 77 \times 10^{9} \times \frac{\pi}{2}\left((30 \times 10^{-3})^4 - (20 \times 10^{-3})^4\right)}{1.5} = 1.830\ kN.m$$

*مثال ۳.۳ ص ۹۲ :

تنش برشی $70 Mpa$ بر سطح داخلی میل گردان های فولادی توخالی مثال قبل چه زاویه ی پیچشی را ایجاد کند؟

چون تنش در سطح داخلی را داده، یعنی ما دیگر به سطح خارجی احتیاج نداریم. و همه جا سطح داخلی می گذاریم

$\varphi = ?\quad \tau = 70 \times 10^{6}\ pa \qquad \varphi = \frac{TL}{GJ} \Rightarrow \tau = \frac{TR}{J}$

$$T = \frac{\tau \cdot \frac{\pi}{2}(r^4)}{r} = \frac{70 \times 10^{6} \times \frac{\pi}{2}(20 \times 10^{-3})^4}{20 \times 10^{-3}} = 879.64\ (N.m)$$

1319.468918

$$\varphi = \frac{TL}{GJ} = \frac{879.64 \times 1.5}{77 \times 10^{9} \times \frac{\pi}{2}(20 \times 10^{-3})^4} = 0.06818 = 68.18 \times 10^{-3}\ rad$$

$$\boxed{\varphi^\circ = 68.18 \times 10^{-3} \times \frac{180}{\pi} = 3.91^\circ}$$

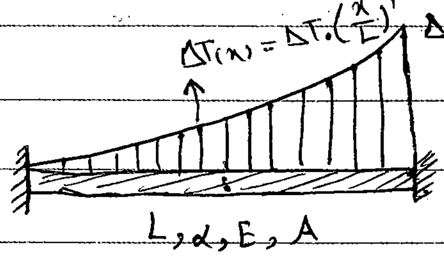
No.

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

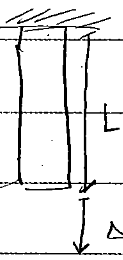
مقاومت ۱ — حل تمرین :

$F_{\text{محوری}} = 0$

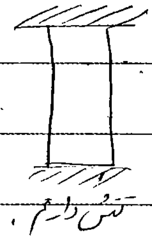


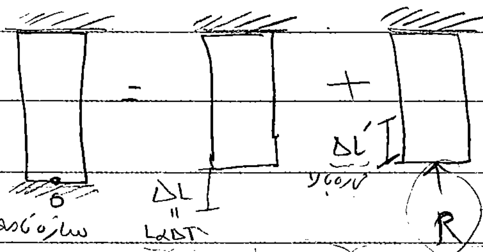
$\Delta L = L\alpha\Delta T$ تغییر طول

تنش: مقاومت در برابر تغییر شکل



چون تکیه‌گاه سر آن باز است پس تنش $\sigma = 0$ است چون هر چقدر دما به آن اعمال شود طول آن افزایش می‌یابد ولی اگر آن را ببندیم در این صورت تنش داریم.





اصل برهم نهی

$\Delta L' = \frac{RL}{EA}$

چون کاهش طول است ⊖ می‌گیریم

چون افزایش طول است ⊕ می‌گیریم

طبق اصل سازگاری

$\Delta L + \Delta L' = 0$

$L\alpha\Delta t - \frac{RL}{EA} = 0$

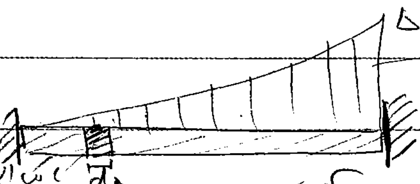
$\cancel{L}\alpha\Delta T = \frac{R\cancel{L}}{EA}$

$\Rightarrow \boxed{R = E\cdot A\cdot\alpha\Delta T}$

$\sigma = \frac{E\cdot \cancel{A}\cdot\alpha\Delta T}{\cancel{A}} = E\cdot\alpha\cdot\Delta T \Leftarrow \sigma = \frac{P}{A}$ اگر تنش را می‌خواست با توجه به اینکه

اگر نیروی داخلی را هم خواست همان R که بدست آوردیم می‌شود.

حل مسئله :



چون دما به صورت متغیر است تغییر طول به راحتی بدست نمی‌آید تغییر طول یک جزء از آن را در نظر می‌گیریم که طول آن dx است و از آن

یک المان از آن را

$\Delta_{dx} = L\times\alpha\cdot\Delta T = dx\times\alpha\times\Delta T$ تغییر طول المان — انتگرال می‌گیریم

$\Delta = \int_0^L \alpha\Delta T\,dx = \int_0^L \alpha\left(\Delta T_0\frac{(x)^2}{L^2}\right)dx = \frac{RL}{EA} \Rightarrow \frac{\alpha\Delta T_0}{L^2}\int_0^L x^2\,dx = \frac{RL}{E}$ تغییر طول کل میله ناشی از دما

$\Rightarrow R = \frac{E\times\alpha\times A\times\Delta T_0}{3}$, $\sigma = \frac{E\alpha\Delta T_0}{3}$

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

مثال: (خیلی مهم (امتحانی)) در شکل مقابل میله‌ی وسط را کشیده و به وسط قطعه‌ی صلب AB (نقطه‌ی C) متصل
میله‌ی
می‌کنیم سپس ۳ میله را به اندازه‌ی $\Delta T = 50°C$ گرم می‌کنیم، تنش در ۳ میله را بدست آورید.

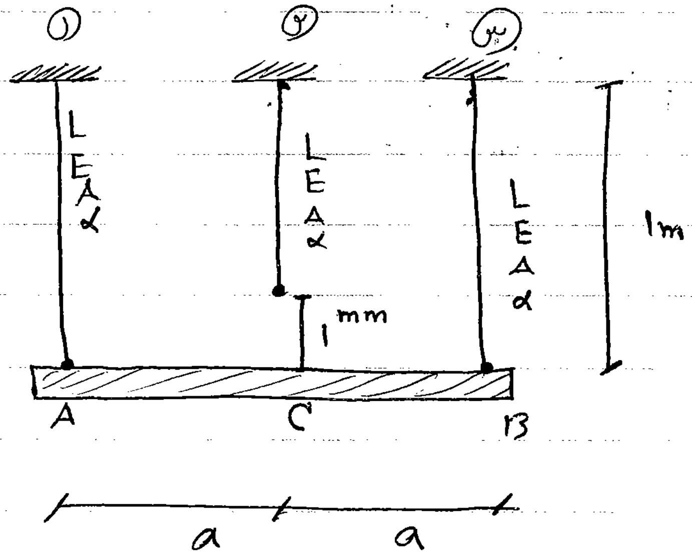
جدول الاستیسیته

$E = 2\times10^{5}\ (\frac{N}{mm^2})$

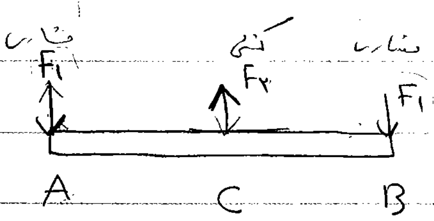
$A = 300\ mm^2$

$\alpha = 1.2\times10^{-5}\ \frac{1}{C°}$

$L = 1m$



وقتی میله‌ی وسط کشیده می‌شود میله‌های کناری فشرده می‌شوند. یعنی در میله‌ی ① و ③ تنش فشاری داریم و
در میله‌ی ② تنش کششی داریم.



سه تا نیرو و سه تا مجهول داریم، و چون طبق استاتیک
می‌دانیم اگر از نقطه‌ی وسط (C) گشتاور بگیریم آن‌گاه
$F_1 = F_3$ برابر می‌شوند که ما F_1 می‌گیریم،
پس کلاً دو نیروی مجهول داریم.

افزایش طول میله‌ی میانی + کاهش طول میله‌های کناری = 1^{mm}

تعادل در راستای قائم: $F_2 - 2F_1 = 0 \Longrightarrow F_2 = 2F_1$

افزایش طول میله‌ی میانی $= L\alpha\Delta T + \frac{2F_1 L}{EA}$

کاهش طول میله‌های کناری $= L\alpha\Delta T - \frac{F_1 L}{EA}$

← چون فشاری است برای میله‌ی کناری منفی

$$\Longrightarrow \left(L\alpha\Delta T + \frac{2F_1 L}{EA}\right) + \left(L\alpha\Delta T - \frac{F_1 L}{EA}\right) = 1$$

$$\Longrightarrow F_1 = \frac{\overset{2\times10^5}{E}\times \overset{300}{A}\times 1}{3\underset{1000\,mm}{L}} = \boxed{20{,}000\ (N)} = 20\,kN$$

$$\boxed{F_2 = 40{,}000} = 40\,kN$$

SUBJECT :

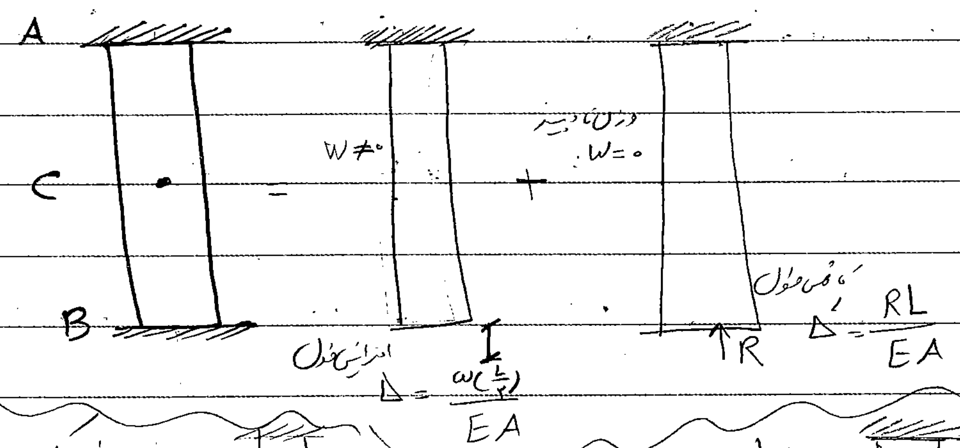
Year (   ) Month (   ) Date (   )

$$\sigma_{①} = \frac{F_1}{A} = \frac{۲۰۰۰}{۳۰۰}$$

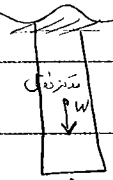
$$\sigma_{②} = \frac{۴۰۰۰}{۳۰۰} \qquad \sigma_{③} = \frac{۲۰۰۰}{۳۰۰}$$

مثال: میله‌ای با مشخصات داده شده (E و A و L و W) مطابق شکل به دو تکیه‌گاه صلب A و B متصل شده است تنش را در نقاط A و B و C (وسط میله) تعیین نمایید.

وزن میله



نکته:



$$\Delta L = \frac{W \times \frac{L}{2}}{EA}$$

تغییر طول میله تحت تاثیر وزن خود

وقتی وزن ناچیز نباشد وزن را باید در مرکز ثقل آن قرار داد که در این صورت L تبدیل به $\frac{L}{2}$ می‌شود.

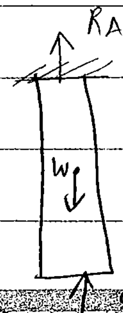
اما

$$\Delta L = \frac{PL}{EA}$$

تغییر طول میله تحت نیروی خارجی

معادله سازگاری: $|\Delta| = |\Delta'| \Longrightarrow \frac{WL}{2EA} = \frac{RL}{EA} \Longrightarrow \boxed{R = \frac{W}{2}}$

$$R_A = \frac{W}{2} \longrightarrow \boxed{\sigma_A = \frac{W}{2A}}$$



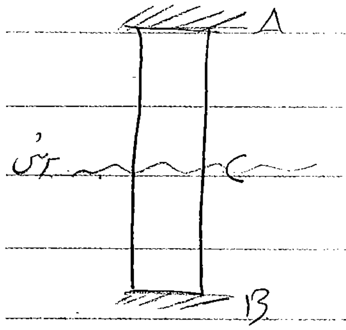
$$R_B = \frac{W}{2} \longrightarrow \boxed{\sigma_B = \frac{W}{2A}}$$

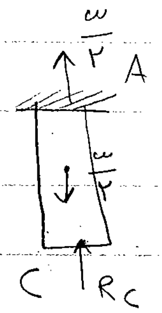
SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

تنش در نقطه‌ی C :

در هر نقطه‌ای تنش می‌خواهیم باید برش بزنیم .

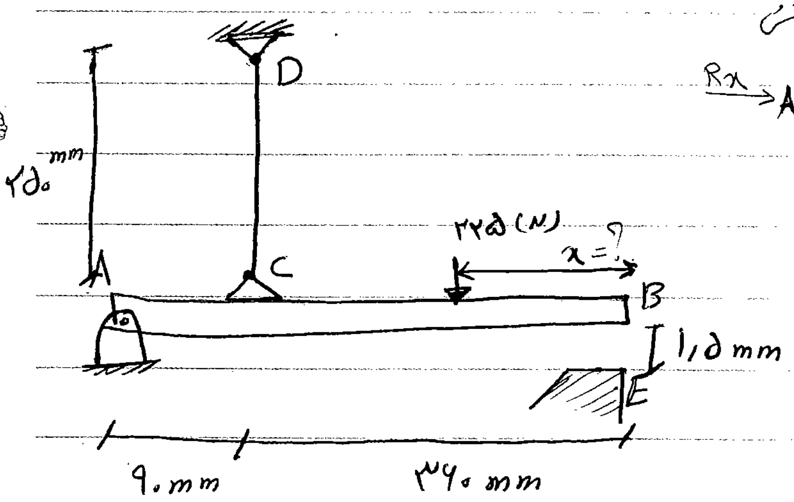


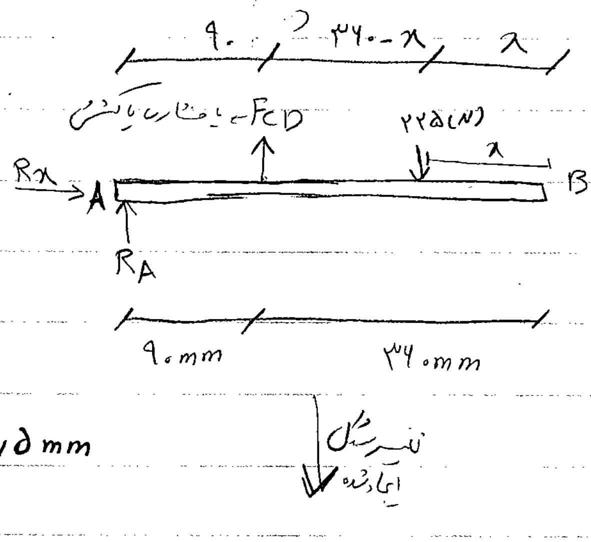


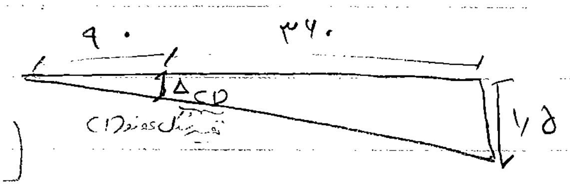
$\sum F_y = 0 \Rightarrow \boxed{R_C = 0} \rightarrow \boxed{\sigma_C = 0}$

مثال: طول سیم فولادی CD به قطر 2mm طوری تنظیم شده است بدون اینکه باری بر آن وارد شود بین نقطه‌ی B (انتهای تیر صلب AB) و تکیه‌گاه E فاصله‌ی 1.5mm وجود داشته باشد. با دانستن $E = 200\,GPa$ برای سیم فولادی کشش باید در چه نقطه‌ای بار 225(N) را باید بر تیر وارد کرد تا بین نقاط B و E تماس حاصل شود؟

در محل تماس B و E شروع عکس‌العمل نداریم چون فقط در حد تماس است







تالس / تشابه مثلث: $\frac{\Delta}{1.5} = \frac{90}{360} \Rightarrow \boxed{\Delta = 0.3\,mm}$

$\Delta_{CD} = \frac{F_{CD}L}{EA} \Rightarrow 10^{-3}\times 0.3 = \frac{F_{CD}\times 250\times 10^{-3}}{200\times 10^{9}\times \pi(10^{-3})^2} \Rightarrow \boxed{F_{CD} = 754\,N}$

قطر = 2mm

شعاع = 1mm

جهت F_{CD} را درست زدیم چون مثبت درآمده.

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

اگر حول نقطه‌ی A گشتاور بگیریم x بدست می‌آید:

$\sum M_A = 0 \Longrightarrow \boxed{x = 141.4\,mm}$

مثال: صفحه‌ی آلومینیومی به ابعاد $20\,mm \times 150\,mm \times 200\,mm$ مطابق شکل تحت تنش $\sigma_x = 120\,MPa$ و $\sigma_y = -90\,MPa$ واقع شده است در صورتی که داشته باشیم

$E = 7\times10^4\,MPa$

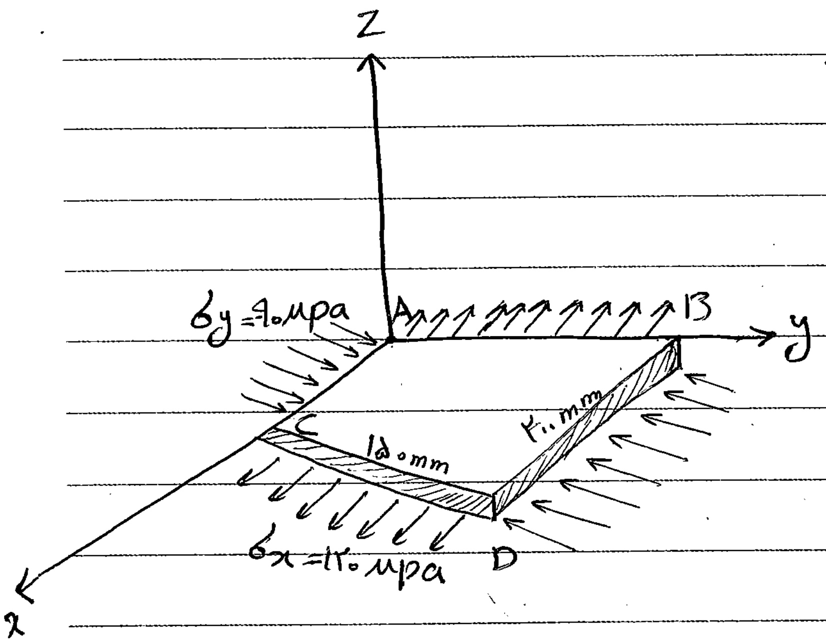
$\nu = \frac{1}{3}$ ضریب پواسون

پس از اعمال تنش‌های فوق مطلوبست:

الف) طول قطر AC

ب) ضخامت صفحه

ج) حجم صفحه

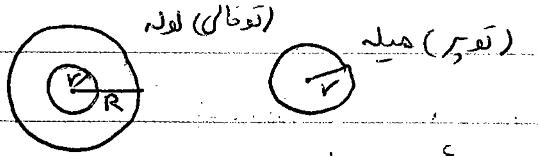


SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

یادآوری: مقطع برای مقاطع مدور:

$$\tau = \frac{Tr}{J} \quad و \quad \varphi = \frac{TL}{GJ}$$



$$J = \frac{\pi}{2}(R^4 - r^4) \qquad J = \frac{\pi}{2} r^4$$

این فرمول ها چه جداره نازک باشد
چه نباشد کاربرد دارد

$$\tau_{max} = \frac{TR}{\frac{\pi}{2}(R^4 - r^4)} \qquad \tau_{max} = \frac{T}{\frac{\pi}{2} r^3}$$

$$\varphi = \frac{TL}{G\frac{\pi}{2}(R^4 - r^4)} \qquad \varphi = \frac{TL}{G\frac{\pi}{2} r^4}$$

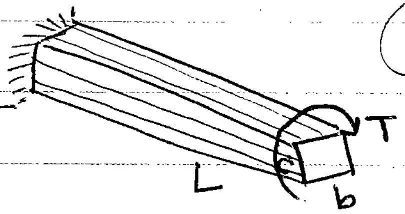
پیچش مقاطع مستطیلی توپر: (یعنی میله‌ای که مقطع آن مستطیل است)

* $b > c$ میباشد

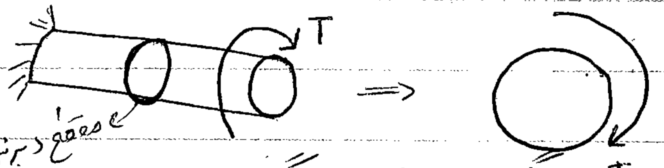
$b =$ طول مقطع مستطیل شکل

$c =$ عرض مقطع

$L =$ طول میله

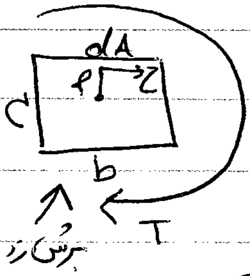


مثلاً برای دایره:



$T = \int$

T باید گشتاور درخلاف جهت گشتاور اصلی اعمال کنیم



$$\boxed{T = \int \rho \tau \, dA}$$

* این قانون که اساس بعد از گشتاور گذاری خطوط موازی می‌مانند

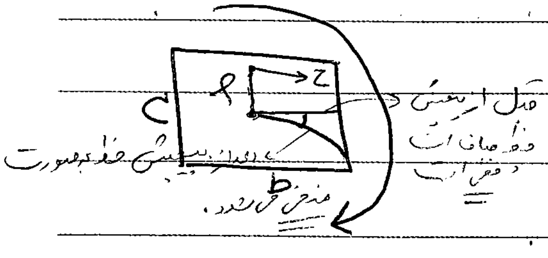
فقط برای دایره صادق است *

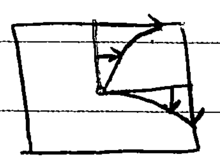
یعنی در این جا برای مستطیل خطوط موازی که روی مستطیل توپر کشیده شده اگر تحت گشتاور T قرار

بگیرد خطوط آن موازی نمی‌مانند

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

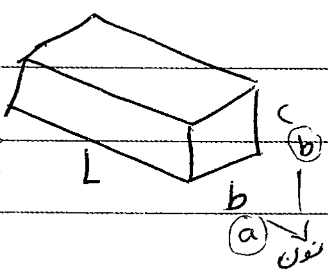




توزیع تنش به این صورت است.

T

در مقطع مستطیلی اگر فرض کنیم ابعاد مقطع b و c باشد، طول L باشد، تحت پیچش قرار بگیرد در آن گاه:



$$\tau_{max} = \frac{T}{\alpha b c^2}$$

$$\varphi = \frac{TL}{G \beta b c^3}$$

$\frac{a}{b}$ یا $\frac{b}{c}$	1	۲	۳	.....	۱۰	>۱۰
C_1 α	۰/۲۰۸	۰/۲۱۹			0.۳۱۲	0.333
C_2 β	۰/۱۴۶				0.۳۱۲	0.333

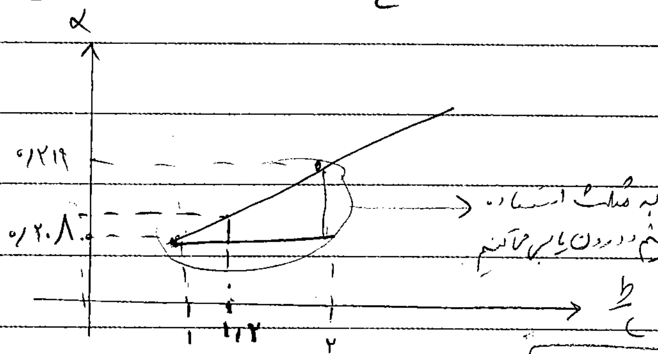
α و β را باید از جدول بیابید

باید دقت کنیم α و β به $\frac{b}{c}$ بستگی دارد.

(α و β داده می‌شود یا از طریق جدول داده می‌شود)

if $\frac{b}{c} = 1$ یعنی مقطع مربع است

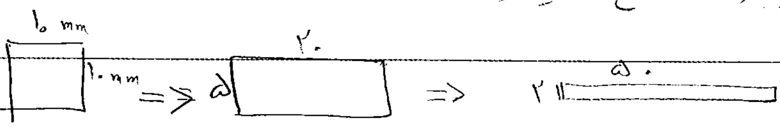
درون یابی:



از روش تشابه مثلث استفاده می‌کنیم و درون یابی می‌کنیم

بهترین مقطع مستطیلی مربع است، یعنی $\frac{b}{c}=1$ است

هر چه $\frac{b}{c}$ بیشتر باشد مقطع ضعیف‌تر است.



$\frac{b}{c} = 1$ میله

راحت‌تر از دو له پیچش می‌یابد $\frac{b}{c} = 4$

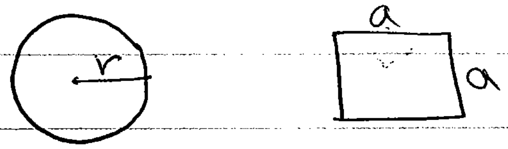
راحت‌تر از همه می‌پیچد.

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

سؤال امتحانی: میله ی توپر به شعاع r (سؤال مفهومی)

مربع به اضلاع a



$\tau_{max} = \frac{T}{\frac{\pi}{2} r^3} < \tau$ مقایسه $\tau_{max} = \frac{T}{\alpha b c^2} = \frac{T}{0.208 a^3} < \tau$

$\varphi = \frac{TL}{G\frac{\pi}{2}r^4}$ مقایسه $\varphi = \frac{TL}{G\beta b c^3} = \frac{TL}{G(0.1406)a^4}$

الف) در صورتی که جنس و مساحت یکسان باشد — باید نسبت گشتاورها را بیابیم

وقتی جنس ها برابرند یعنی G و ... [illegible]

نسبت قدرت باربری: $\frac{T_{1\,مجاز}}{T_{2\,مجاز}} = ?$

چون مساحت یکسان است پس داریم $\pi r^2 = a^2$ باید r^3 و a^3 را داشته باشیم، طرفین را به توان $\frac{3}{2}$ می رسانیم: $\pi\sqrt{\pi} r^3 = a^3$

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\tau_{مجاز}\times\frac{\pi}{2}r^3}{\tau_{مجاز}\times(0.208)a^3} = \frac{\frac{\pi}{2}r^3}{(0.208)(\pi\sqrt{\pi}r^3)} = 1.356 > 1$$

هر دایره از هر مربع ۳۶٪ قوی تر است

یعنی یک میله ی دایره ای از یک میله ی مربع شکل گشتاور بیشتری تحمل می کند

ب) در صورتی که طول یکسان باشد و گشتاور پیچشی یکسان تحمل کنند (یعنی علاوه بر موارد فوق) — می خواهیم ببینیم کدام φ کمتری دارد.

$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = ?$

مساحت یکسان: $(\pi r^2 = a^2)^2$ باید r^4 و a^4 را داشته باشیم، به توان ۲ می رسانیم

$\pi^2 r^4 = a^4$

$$\frac{\varphi_{1\,دایره}}{\varphi_{2\,مربع}} = \frac{\frac{\cancel{TL}}{\cancel{G}\frac{\pi}{2}r^4}}{\frac{\cancel{TL}}{\cancel{G}(0.1406)a^4}} = 0.88 < 1$$

دایره از مربع ۱۲٪ کمتر می پیچد

یعنی دایره مقاوم تر است و کمتر دوران می کند

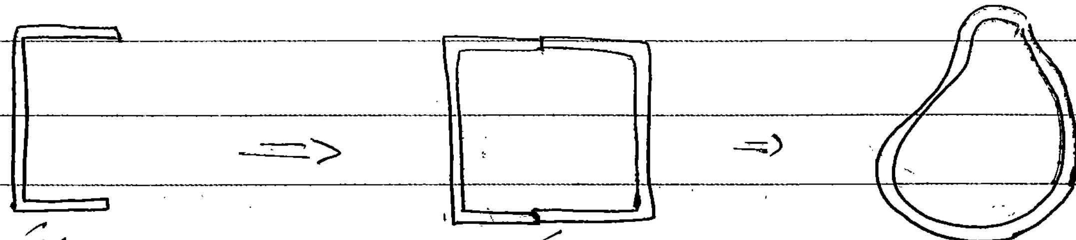
به طور کلی در ... هر چه تعداد اضلاع بیشتر باشد بهتر است پس با فرض جنس و مساحت یکسان بهترین دایره است (چون ضلع n) و بدترین مثلث است

از نظر مقاومت ... [illegible]

هرچه T بزرگتر و φ کمتر باشد ... بهتر است

پیچش مقاطع جدار نازک بسته [جدار نازک تو خالی] :

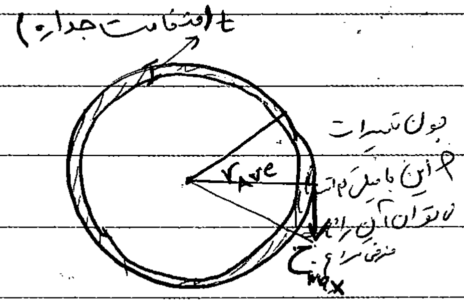
ضخامت جداره کم باشد.



جدار نازک باز ⟸ جدار نازک بسته ⟸ جدار نازک بسته

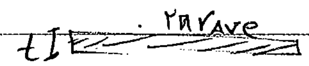
این نوع مقاطع به ۲ دسته تقسیم می‌شوند: مقاطع مدور _ مقاطع کلی

پیچش مقاطع مدور جدار نازک بسته :



$$J=\int \underbrace{\rho^2}_{r_{Ave}} dA \cong r_{Ave}^2 \times A = r_{Ave}^2 \times (2\pi r_{Ave} \times t) = 2\pi r_{Ave}^3 t$$

تقریبی



چون ρ برابر است پس تنش برابر است ⟸ $\tau_{max} = \frac{T r_{Ave}}{J} = \frac{T r_{Ave}}{2\pi r_{Ave}^3 \times t} = \frac{T}{2\pi r_{Ave}^3 t} \leq \tau_{مجاز}$ کنترل :

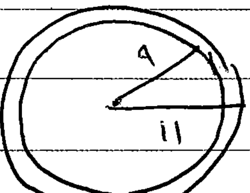
تنش

$$\boxed{\tau_{max} = \frac{T}{2\pi r_{Ave}^2 \times t}}$$

برای جدار نازک

اگر مقاطع دایره‌ای و ضخامت دارند نباید از این فرمول استفاده کرد. چون دیگر جدار نازک نیست

مثلاً



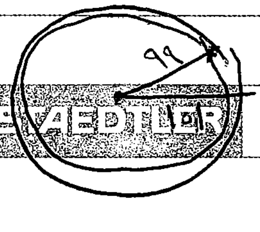
J دقیق $= \frac{\pi}{2}(11^4 - 9^4)$

J تقریبی $= 2\pi \underbrace{(10)^3}_{r_{Ave}} \times 2$

نکته مهم است :

$\text{if } \frac{r_{Ave}}{t} \geq 10$ یا $\frac{t}{r_{Ave}} \leq \frac{1}{10}$ پس

آن گاه جداره نازک است



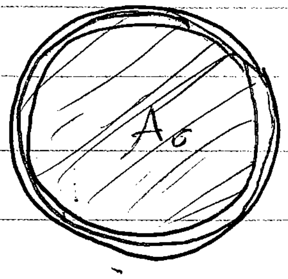
J دقیق $= \frac{\pi}{2}(101^4 - 99^4)$

J تقریبی $= 2\pi (100)^3 \times 2$

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

بحث مقاطع کلی جدار نازک است:



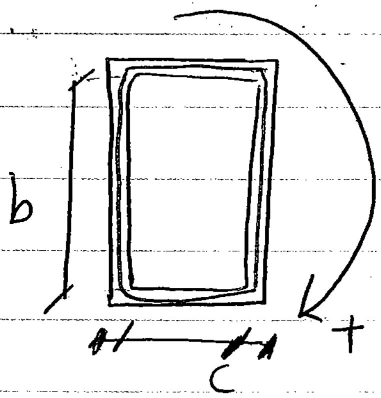
$$A_0 = \pi r_{Ave}^2$$

$$\boxed{\tau_{max} = \frac{T}{2A_0 t_{min}}}$$

فرمول کلی

A_0 می‌تواند هر چیزی باشد

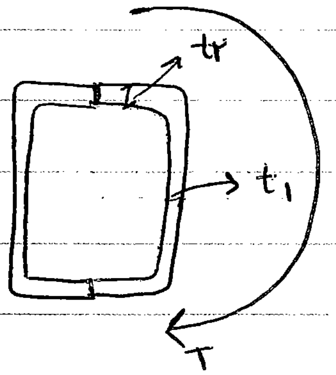
فرمول خیلی کاربردی است برای جدار نازک



$$\tau_{max} = \frac{T}{2\underbrace{bc}_{A_0}t} < \tau_{مج}$$

$$A_0 = b \times c \qquad \varphi = \frac{\tau_{max}\,[2(b+c)] \times L}{2bcG}$$

با توجه به فرمول مختصر میشه



برای مقاطع مدور:

φ را داریم:
$$\varphi = \frac{TL}{GJ} = \frac{\tau_{max} \times 2\pi r_{Ave}^2\, t \times L}{G \times 2\pi r_{Ave}^3\, t} =$$

$$\Longrightarrow \boxed{\varphi = \frac{\tau_{max} \times L}{G \times r_{Ave}}}$$

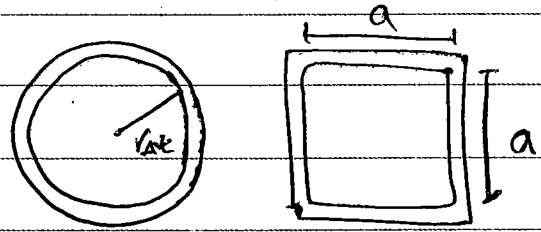
برای مقاطع مدور
جدار نازک

برای مقاطع کلی داریم: $(\times t)$ را از صورت و مخرج باهم ساده کنیم.

$$\varphi = \frac{TL}{GJ} = \frac{\tau_{max} \times 2\pi r_{ave}^2 t \times L}{G \times 2\pi r_{ave}^3 t} = \frac{\overbrace{2\pi r_{ave}}^{S=\text{محیط}} \times \tau_{max} \times L}{\underbrace{2\pi r_{ave}^2}_{\text{مساحت}=A_0} \times G} \Longrightarrow \boxed{\varphi = \frac{\tau_{max} \cdot S \cdot L}{2A_0 \cdot G}}$$

فرمول برای مقاطع کل جدار نازک

مثال: سوال امتحان.



الف) در صورتیکه مساحت (t, S) و جنس یکسان باشد. یعنی A_0 ثابت ...

$$\frac{T_1 \ \text{ساز}}{T_2 \ \text{ساز}} = ? \quad \frac{T_1 \ \text{دایره}}{T_2 \ \text{مربع}} = \frac{\cancel{\tau} \times 2\pi r_{ave}^2 \cancel{t}}{\cancel{\tau} \times 2\underbrace{a^2}_{\frac{\pi^2 r^2}{4}} \times \cancel{t}} =$$

محیط یکسان: $2\pi r = 4a$, $\pi r = 2a$, $\pi^2 r^2 = 4a^2$

$$= \frac{4}{\pi} = 1.27 > 1$$

با شرایط یکسان لوله دایره‌ای گشتاور بیشتری از مربع تحمل می‌کند.

ب) در صورتیکه طول یکسان و گشتاور یکسان قرار بگیرد.

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = ?$$

از رابطه $\frac{TL}{GJ}$ استفاده نمی‌توان کرد

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{\frac{\tau_1 \cancel{S} \cancel{L}}{2A_{01}\cancel{G}}}{\frac{\tau_2 \cdot \cancel{S} \cdot \cancel{L}}{2A_{02}\cancel{G}}} = \frac{\tau_1}{\tau_2} \times \frac{(A_{02})}{(A_{01})} = \frac{\pi}{4} \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{16} = 0.61 < 1$$

$$\frac{(A_0)_2}{(A_0)_1} = \frac{a^2}{\pi r_{ave}^2} = \frac{\frac{\pi^2 r^2}{4}}{\pi r^2} = \frac{\pi}{4}$$

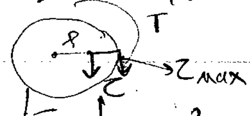
(در این جا هم برای مقطع دایره‌ای بهتر است / مقطع ... بهتر است)

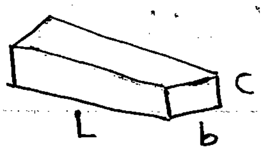
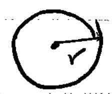
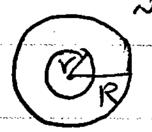
$$\frac{(\tau_1)_{max}}{(\tau_2)_{max}} = \frac{\frac{T}{2A_{01} t}}{\frac{T}{2A_{02} t}} = \frac{\pi}{4}$$

خلاصه:

در این جا ما فراسیم تنش را در یک نقطه ی دلخواه که در فاصله ρ از مرکز قرار دارد بدست آورید

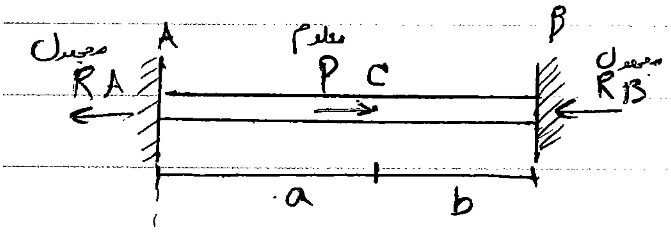
$\tau = \frac{T\rho}{J}$ تنش در هر نقطه ی دلخواه



پیچش مقاطع مدور		پیچش مقاطع مستطیلی توپر	پیچش مقاطع جدار نازک بسته (جدار نازک توخالی)	
$\tau_{max} = \frac{Tr}{J}$ و $\varphi = \frac{TL}{GJ}$			مدور	کلی
میله 	لوله 			
$J = \frac{\pi}{2} r^4$	$J = \frac{\pi}{2}(R^4 - r^4)$	$\tau_{max} = \frac{T}{\alpha b c^2}$	$\tau_{max} = \frac{T}{2\pi r_{Ave}^2 t}$	$\tau_{max} = \frac{T}{2A_0 t_{min}}$
$\tau_{max} = \frac{T}{\frac{\pi}{2} r^3}$	$\tau_{max} = \frac{TR}{\frac{\pi}{2}(R^4 - r^4)}$	$\varphi = \frac{TL}{G\beta b c^3}$	$\varphi = \frac{\tau_{max} \times L}{G \times r_{Ave}}$	$\varphi = \frac{\tau_{max} \cdot s \cdot L}{2A_0 G}$
$\varphi = \frac{TL}{G\frac{\pi}{2} r^4}$	$\varphi = \frac{TL}{G\frac{\pi}{2}(R^4 - r^4)}$			

حل مسائل نامعین: تعداد مجهولات > تعداد معادلات = نامعین از نظر استاتیکی

در میله ی دوسرگیردار:



یادآوری:

$$\begin{cases} R_A = P\frac{b}{L} \\ R_B = P\frac{a}{L} \end{cases}$$

اگر P در وسط وارد شود در حالت خاص $\Rightarrow R_A = R_B$

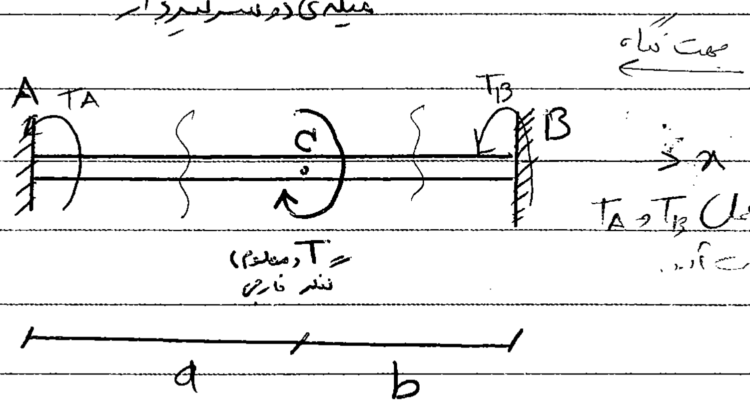
SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

مثال: حل مسائل نامعین :

میله‌ی دو سر گیردار

$T_A = ?$ $T_B = ?$



وقتی T اعمال وارد شود عکس‌العمل T_A و T_B به وجود می‌آید که باید آنها را بدست آورد.

معادله‌ی تعادل : $\Sigma M_x = 0 \Rightarrow \boxed{T_A + T_B = T_{معلوم}}$

معادله‌ی سازگاری تغییر شکل : $\varphi_{AB} = 0 \Rightarrow \boxed{\varphi_{AC} + \varphi_{CB} = 0}$ معادله‌ی سازگاری

$\frac{TL}{GJ}$ $\frac{TL}{GJ}$

بین C و A مقطع برش می‌زنیم گشتاور برابر با T_A است.

بین C تا B برش می‌زنیم

$$\frac{T_A \cdot a}{G \cdot J} + \frac{(T_A - T)\cdot b}{GJ} = 0$$

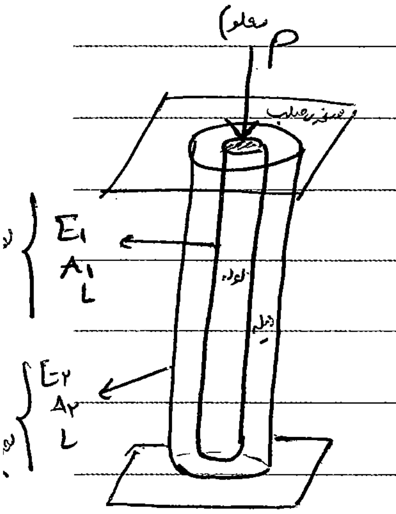
معادله‌ی یک مجهولی (T_A مجهول است) T معلوم است.

$$T_A = T\frac{b}{L}$$

$$T_B = T\frac{a}{L}$$

گشتاور به هر میله که نزدیکتر باشد سهم آن میله که از لحاظ مقداری و ارزشی بیشتر می‌شود.

مثال: برای ... داریم:



معادله‌ی تعادل : $P_1 + P_2 = P$

معادله‌ی سازگاری : $\delta_1 = \delta_2$

تغییر طول

سختی محوری

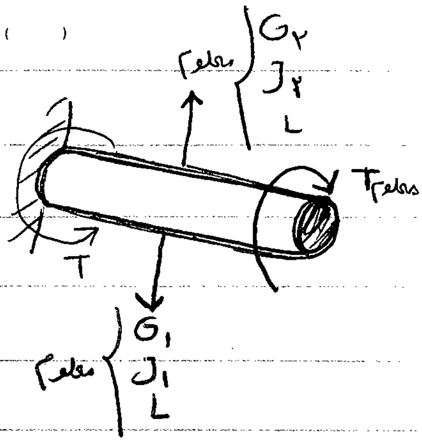
$$P_1 = P\frac{E_1 \cdot A_1}{\Sigma EA}$$

$$P_2 = P\frac{E_2 \cdot A_2}{\Sigma EA}$$

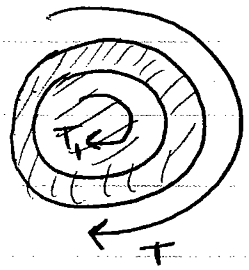
حال می‌خواهیم این میله و لوله را با هم بپیچانیم (یعنی میله و لوله با هم درگیر باشند) مثل شکل صفحه‌ی بعد.

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )



مقطع مرکب است یعنی میله و لوله
با هم ثابت هستند (روی هم سوار هستند)
فرض کنیم تحت پیچش قرار گیرد.



معادله‌ی تعادل: $\underbrace{T_1 + T_2 = \overset{\text{معلوم}}{T}}$

معادله دو مجهول است پس معادله سازگاری می‌خواهد،

معادله‌ی سازگاری: $\varphi_1 = \varphi_2$

$$\frac{T_1 \cancel{L}}{G_1 J_1} = \frac{T_2 \cancel{L}}{G_2 J_2} \Rightarrow$$ از این رابطه T_1 برحسب T_2 بدست می‌آید

درصد از T سهم T_1 است

و مقدار T_1 را در معادله‌ی تعادل قرار دهیم از آن T_2 بدست می‌آید

$$\begin{cases} T_1 = T\dfrac{G_1 J_1}{\sum GJ} \\ T_2 = T\dfrac{G_2 J_2}{\sum GJ} \end{cases} \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{G_1 J_1}{G_2 J_2}$$

صلابت پیچشی

نکته: σ ، ε ، φ : تنش‌ها، طراحی

معین ← استاتیک ← معادله‌ی تعادل

نامعین ← مقاومت ← معادله‌ی سازگاری

تحلیل
تعیین تنش‌ها
و کنترل‌ها با آن‌ها

بارگذاری
تعیین تنش‌های خارجی

$$(\overset{\text{تنش}}{\tau_1})_{max} = \frac{T_1 \overset{\text{شعاع میله}}{r_1}}{J_1} \quad \text{جای } \tau_1, \quad J_1 \Rightarrow \frac{\pi r^4}{2}$$

$$(\tau_2)_{max} = \frac{T_2 \overset{\text{شعاع خارجی}}{r_2}}{J_2} \quad \text{جای } \tau_2, \quad J_2 = \frac{\pi}{2}(R^4 - r^4)$$

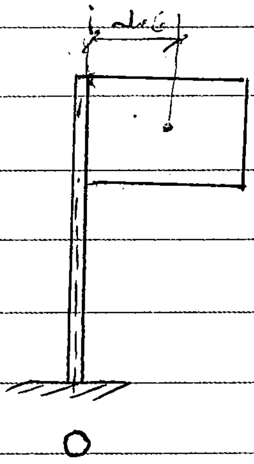
نکته: هر مسئله‌ی نامعین را اول باید نامعینی‌اش را از بین ببریم یعنی معادله‌ی سازگاری را می‌خواهد

STAEDTLER

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

سؤال امتحانی دکل تابلوی تبلیغاتی:



فشار باد داده شده است

$\frac{N}{mm^2}$ یا $\frac{N}{km^2}$

مساحت تابلو × فشار باد = نیرو ← این نیرو باعث گشتاور پیچشی می‌شود.

این نیرو به مرکز نیروها هست در وسط تابلو وارد می‌شود.

فاصله × نیرو = گشتاور پیچشی

طول محور لوله

استاتیک: مساحت تابلو × فشار باد = F نیرو

T گشتاور $= F \times e$

فاصله نیرو

اگر مجاز نیاز نبود

$$\tau_{max} = \frac{TR}{\frac{\pi}{2}(R^4 - r^4)} \le \tau_{مجاز}$$

$$\varphi = \frac{TL}{G\frac{\pi}{2}} \le \varphi_{مجاز}$$

تبدیل درجه به رادیان

$$3^\circ = \frac{\pi}{180} \times 3$$

وقتی زاویه از حدی بیشتر باید بپیچد یعنی آن φ مجاز را به ما داده

نکته: لوله‌ها دو تا مجهول دارند R و r و یا r_{Ave} و t

تمام مسائل کدام یکی از ۴ حالت زیر است

در ۴ حالت

(۱) یک معادله یک مجهول
- $r_{Ave} = ?$ و t معلوم
- $t = ?$ ، $r_{Ave} =$ معلوم

(۲) دو معادله دو مجهول $t = ?$ و $r_{Ave} = ?$

τ از τ مجاز بیشتر نشود

φ از φ مجاز بیشتر نشود

۲ معادله

$\tau =$ فرمول = مقدار

$\phi =$ فرمول = مقدار

(۳) یک معادله دو مجهول => بی نهایت جواب دارد (در امتحان نمی‌آید)

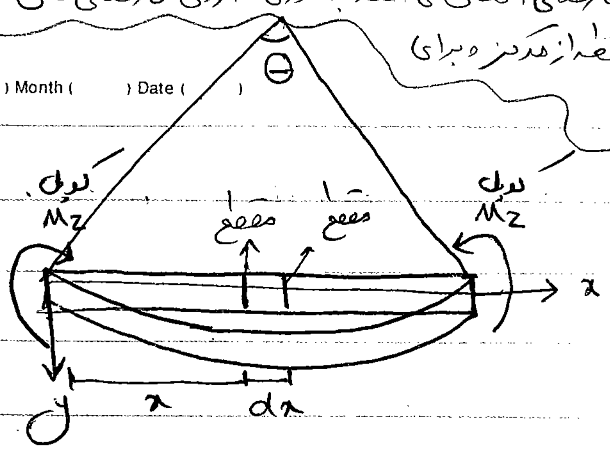
(۴) دو معادله یک مجهول => $r_{Ave} =$ معلوم

دو جواب بدست می‌آید که آن که بزرگتر است را انتخاب می‌کنیم ولی اگر مقدار t باید ۲ تا t بدست می‌آید و یا ۲ تا r_{Ave} بدست می‌آید که ما بزرگتره را باید در آن انتخاب کنیم.

ولی اگر شعاع خارجی‌ها دست ما باشد ما باید کوچکتره را انتخاب کنیم. یعنی شعاع داخلی را از شعاع خارجی کم کنیم باید شعاع داخلی کوچکتر را انتخاب کنیم

نکته: در بحث خمش بیشترین تنش در دورترین نقطه از تار خنثی اتفاق می‌افتد به طوری که روی تار خنثی تنش صفر است
اما در بحث پیچش برای مقاطع مدور بیشترین تنش در دورترین نقطه از مرکز و برای مقاطع مستطیلی در نزدیک‌ترین نقطه به مرکز اتفاق می‌افتد

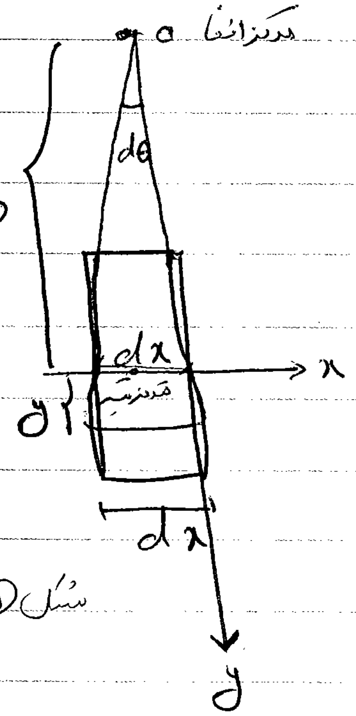
فصل ۶: خمش



وقتی تیر تغییر شکل می‌دهد انحنا پیدا می‌کند
در مرکز انحنا همدیگر را قطع می‌کنند

برای پیدا کردن مرکز انحنا به فاصله‌ی x یک مقطع می‌زنیم و مقطع دیگری به فاصله‌ی dx می‌زنیم این دو مقطع را اگر در نظر بگیریم

شعاع انحنا
ρ = فاصله‌ی مرکز انحنا تا مرکز تیر



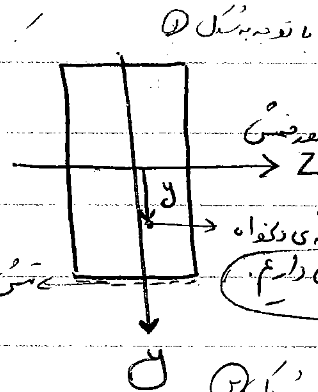
⟹

بعد از تغییر شکل طول در بالا از dx کمتر است و در پایین طول از dx بیشتر است و در واقع فقط وسط dx است.

طبق شکل: $dx = \rho\, d\theta$

قبل از لنگر (شکل تیر خود کارایی)
بعد از لنگر (شکل تیر خود کار نمی‌کند)

مقطع تیر است (طول تیر نیست) که در این جا محور z دیده می‌شود: (برشی از طول تیر)



تنش در این جا max است

y زیر تار خنثی + است
پس زیر تار خنثی افزایش طول داریم.
یعنی کشش است

$$\boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx}} \quad ①$$

مقطع تیر

یک نقطه‌ی دلخواه در این مقطع به فاصله‌ی y از محور zها در نظر می‌گیریم و هدف بدست آوردن تنش در این نقطه‌ی دلخواه است.

$\sigma = E\,\varepsilon$ — کرنش (تغییر طول)

برای پیدا کردن تنش در این جا از فرمول اول ثابت می‌نویسیم طبق قانون هوک:

نکته: زیر تار خنثی ← y>0 ← افزایش طول ← کشش ← کشیده شدن و ترک خوردن
بالای تار خنثی ← y<0 ← کاهش طول ← فشار ← خطر لهیدگی خوردن

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

طول اولیه تار $= dx = \rho\, d\theta$

طول ثانویه $= (\rho + y)\, d\theta = (1+\frac{y}{\rho})\,\rho\, d\theta = dx + \frac{y}{\rho}\,dx$

تغییر طول $= \delta = \frac{y}{\rho}\,dx$

تغییر طول نسبی $\varepsilon = \frac{\delta}{dx} = \frac{y}{\rho}$

نقطه‌ای دلخواه که می‌خواهیم تنش در آن را بدست آوریم

فاصله عمودی دلخواه از تار خنثی

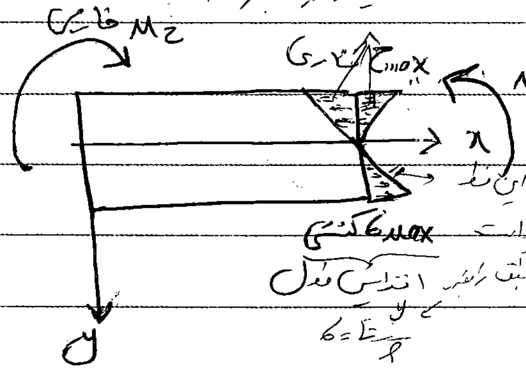
$\sigma = E\varepsilon = E\frac{y}{\rho}$ پس: (۲) $\boxed{\varepsilon = \frac{y}{\rho}}$ و $\boxed{\sigma = E\frac{y}{\rho}}$ (۳)

ρ به سادگی ~~به سادگی~~ بدست نمی‌آید

علامت ε به y بستگی دارد (چون ρ همیشه + است) [زیر تار خنثی $y>0 \Rightarrow \varepsilon>0$ و برعکس]

در فرمول (۲) y و ε با هم به صورت خطی ارتباط دارند و (ε, σ) با هم رابطه‌ی خطی دارند

جهت را با قرمز یا سبز (به هر دو صورت) نشان می‌دهند



(لنگر داخلی ناشی از تنش است)
(پس باید تنش وجود داشته باشد)

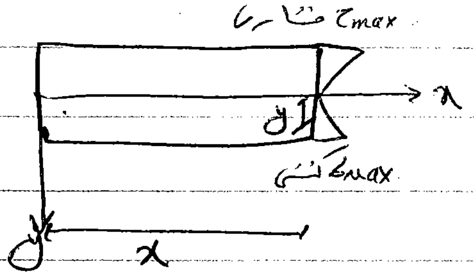
شیب این خط $\frac{E}{\rho}$ است

برآیند نیروی کششی پایین و برآیند نیروی فشاری بالا با هم یک کوپل را تشکیل داده اند [illegible] $\sigma = E\frac{y}{\rho}$

که نشان دهنده همان M داخلی است)

(مقدار نیرویی که به سطح کششی وارد می‌شود باید با مقدار نیرویی که به سطح فشاری وارد می‌شود برابر باشد تا کوپل را تشکیل دهد)

نکته: اگر شکل متقارن باشد تار خنثی از وسط شکل عبور می‌کند ولی اگر نامتقارن باشد باید مرکز سطح را بدست آوریم (مهم)



درمعادله تعادل حل میکنیم.

این معادله تعادل $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow$ یعنی نیروی خارجی در راستای x $\Rightarrow$ $0 = \int_A \overbrace{\sigma dA}^{\text{نیرو}} = \int_A \frac{Ey}{\rho} dA =$

باید با نیروی داخلی در راستای x برابر شود

نیروی خارجی که نداریم یعنی صفر است $= \frac{E}{\rho}\boxed{\int y dA = 0}$

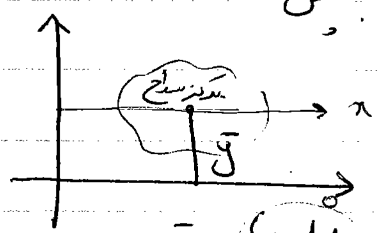
و برآیند نیروهای داخلی هم صفر میشود $\int \sigma dA$

(4)

یعنی تار خنثی از مرکز سطح عبور میکند

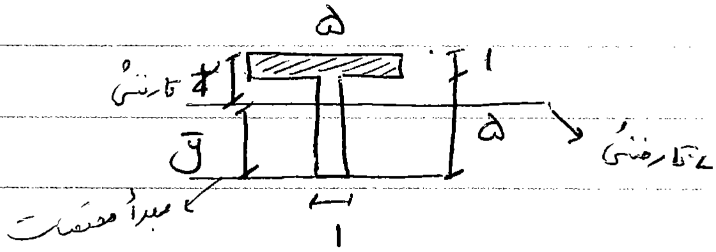
پس: $\boxed{\int y dA = 0}$ گشتاور اول سطح نسبت به محورها صفر است

یعنی مرکز سطح روی محورها قرار دارد.



$$\bar{y} = \frac{\int y dA}{A} = 0$$

مثلاً: برای شکل زیر



$$\bar{y} = \frac{(5\times5.5)+(5\times2.5)}{10} = 4\,cm$$

در معادله تعادل $\Sigma M_z = 0 \Rightarrow M_z = \int_A \underbrace{\underbrace{y}_{\text{فاصله}} \times \underbrace{\sigma dA}_{\text{نیرو}}}_{\text{گشتاور}} = \int_A y\left(E\frac{y}{\rho}\right) dA =$

گشتاور دوم نسبت به محور z ها که در اینجا با محور ها است (با توجه به تار خنثی)

$$\Rightarrow \boxed{M_z = \frac{E}{\rho}\underbrace{\int_A y^2 dA}_{I_z = \text{ممان اینرسی}}} \quad (5) \quad \text{یا} \quad \boxed{M_z = \frac{EI_z}{\rho}} \quad (5) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{M}{\underbrace{EI}_{\text{صلبیت خمشی}}}} \quad (6)$$

SUBJECT :
Year (   ) Month (   ) Date (   )

فاصله‌ی نقطه‌ی مورد نظر از محور z ها (محور خمشی)

③ , ④ $\Longrightarrow$ $\boxed{\sigma = \dfrac{M_z y}{I_z}}$ ⑦

تنش در هر نقطه‌ی دلخواه ناشی از خمش

مهم‌ترین فرمول (که فرمول شماره‌ی 3 کاربرد زیادی دارد چون ρ)

③ : $\sigma = E\dfrac{y}{\rho}$

④ : $\dfrac{1}{\rho} = \dfrac{M}{EI}$

ممان اینرسی نسبت به محور خمشی را می‌خواهد

تنش در هر نقطه‌ی دلخواه ناشی از پیچش: $\tau = \dfrac{T\rho}{J}$

فاصله‌ی نقطه‌ی مورد نظر از مرکز (محور پیچشی)

همان ρ_{max} است

$$\tau_{max} = \frac{T_{max} \times r}{J}$$

ممان اینرسی نسبت به محور z ها (ممان اینرسی قطبی) (محور پیچشی)

$J = \int \rho^2 dA$

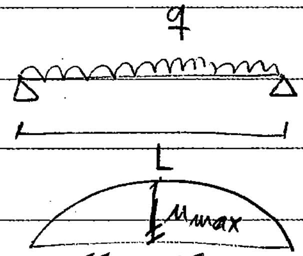
همان y_{max} است

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max} \cdot c}{I} < \sigma_{\text{مجاز}}$$

این را می‌خواهیم min

صبر، M_{max} را پیدا کنیم؟!

مثلاً:



$M_{max} = \dfrac{qL^2}{8}$

** M_{max} را باید با رسم دیاگرام لنگر بدست آوریم **

صلبیت محوری $EA \Longrightarrow \delta = \dfrac{PL}{EA}$

یادآوری:

صلبیت برشی GA

** آن چه که در این فرمول‌ها مهم است خاصیت هندسی آن‌هاست.

صلبیت پیچشی $GJ \Longrightarrow \varphi = \dfrac{TL}{GJ}$

اگر مقطعی را بکشیم یا فشار دهیم یا ببریم A (مساحت) مهم است

صلبیت خمشی $EI \Longrightarrow \dfrac{1}{\rho} = \dfrac{M}{EI}$

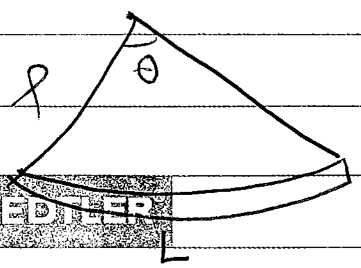
و اگر مقطعی را بپیچیم J مهم است

و اگر خم شود I مهم است. **

اگر عضوی بخواهد در برابر خمش قوی‌تر شود باید I را زیاد کنیم که در این صورت ρ زیاد شود. هرچقدر I را زیاد کنیم تنش کمتر می‌شود.

$\sigma = \dfrac{Mc}{I}$, $\dfrac{1}{\rho} = \dfrac{M}{EI}$

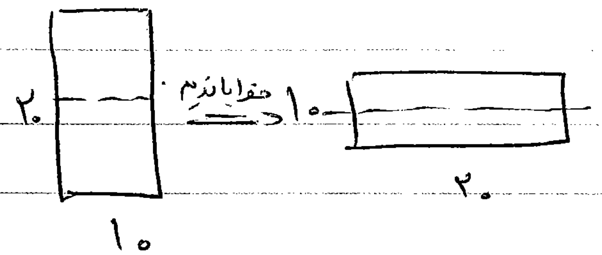
(هر چه قدر ρ بیشتر باشد یعنی کمتر خم شده است)



SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

مثلاً تیر چوبی با ابعاد ۲۰×۱۰ داریم می‌خواهیم آن را بخوابانیم.



$$I=\frac{bh^3}{12}=\frac{10(20)^3}{12} > I=\frac{20\times(10)^3}{12} \Rightarrow$$

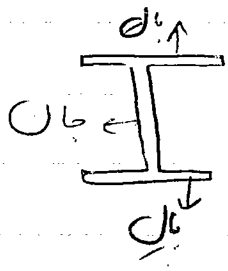
هرچه I بزرگتر باشد σ کمتر می‌شود و ایمنی بیشتر می‌شود.

$$I=\int y^2\,dA$$

y: فاصله از محور خنثی

در خمش همیشه باید I را زیاد کنیم یعنی y را زیاد کنیم حلق؟

در تیر I شکل:



~~تا آنجا که می‌توانیم جان را نازک می‌کنیم~~ و

زیاد جان را نازک می‌کنیم و عرض بال آن را هم افزایش می‌دهیم

نکته: به نسبت $\frac{I}{c}$ ، S هم گفته می‌شود که مدول مقطع (اساس مقطع) نام دارد.

$$\frac{I}{c}=S \quad (cm^3 - mm^3)$$

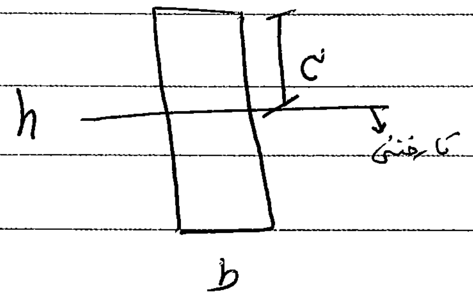
S: مدول مقطع (اساس مقطع)

$$\boxed{\sigma_{max}=\frac{M_{max}\cdot c}{I}=\frac{M_{max}}{S}\le\sigma_{مجاز}}$$

(۸) در واقع فرمول کشش است.

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )



$$S = \frac{I}{c} = \frac{\frac{bh^3}{12}}{\frac{h}{2}} = \frac{bh^2}{6}$$ حفظ شود

کنترل: $\sigma_{max_{موجود}} = \frac{M_{max_{موجود}} \times c}{I_{موجود}} = \frac{M_{max}}{S} \le \sigma_{مجاز}$

اگر شکل نامتقارن بود باید σ کششی و σ فشاری را جداگانه چک کنیم.

ظرفیت باربری: $\underset{\text{حداکثر (به سمت پایین)}}{M_{مجاز}} = \sigma_{مجاز} \times \frac{I_{موجود}}{c} = \sigma_{مجاز} \times S_{موجود}$

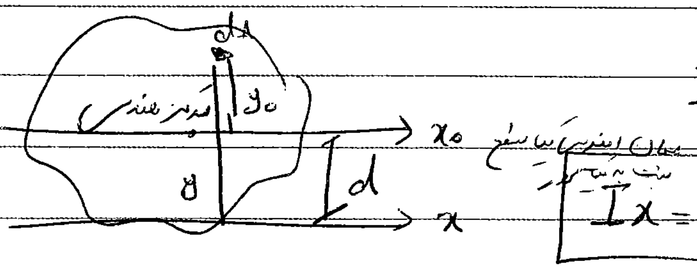
در حقیقت برای طراحی ما I را می‌خواهیم

طراحی: $\underset{\text{حداقل (به سمت بالا)}}{S_{لازم}} = \frac{M_{max_{موجود}}}{\sigma_{مجاز}}$

اما اگر I را می‌خواستیم آن‌گاه b هم مجهول بود پس در این جا برای طراحی ما S را می‌خواهیم.

مقاطع ساده با مستطیل به $I = \frac{bh^3}{12}$ و $M_{max} = \frac{qL^2}{8}$ ، $S = \frac{bh^2}{6}$ است.

اما در مقاطع مرکب I را باید.



I_{x_0} = معلوم I_x = مجهول

ممان اینرسی حول محور مرکزی سطح

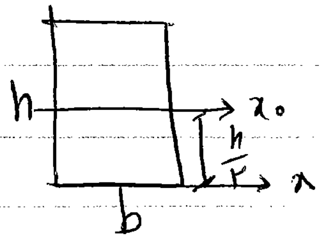
$$\boxed{I_x = I_{x_0} + Ad^2}$$

اثبات:

ممان استاتیک نسبت به سطح صفر است

$$I_x = \int y^2 dA = \int (y_0+d)^2 dA = \underbrace{\int y_0^2 dA}_{I_{x_0}} + \underbrace{d^2 \int dA}_{Ad^2} + 2d\cancel{\int y_0 dA}$$

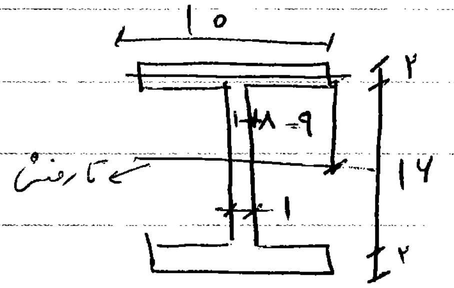
مثال:



$$I_x = \frac{bh^3}{12} + \overbrace{(bh)}^{A}\overbrace{\left(\frac{h}{2}\right)^2}^{d^2} = \frac{bh^3}{3}$$

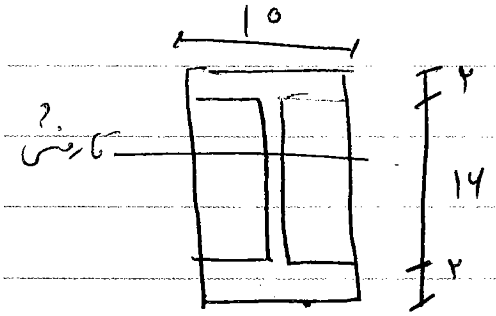
(دایره به درد پیچش می‌خورد اما مستطیل به درد خمش می‌خورد)

مثال ۲:

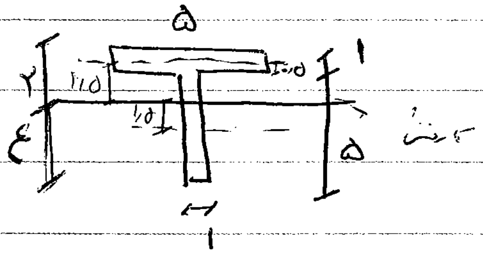


$$I_{\text{کل شکل}} = I_{\text{جان}} + 2I_{\text{بال}}$$

$$\left[\frac{1(14)^3}{12}\right] + 2\left[\frac{10(2)^3}{12} + (10\times 2)(9)^2\right]$$



$$I = \frac{10(20)^3}{12} - 2\left[\frac{4.5(14)^3}{12}\right] =$$

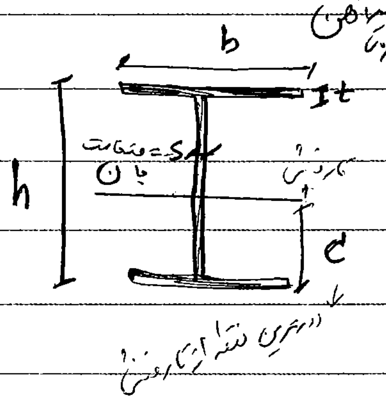


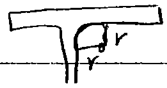
$$I = I_{\text{بال}} + I_{\text{جان}}$$

$$\left[\frac{5(1)^3}{12} + \underbrace{5(1.5)^2}_{Ad^2}\right] + \left[\frac{1(5)^3}{12} + 5(1.5)^2\right]$$

SUBJECT :

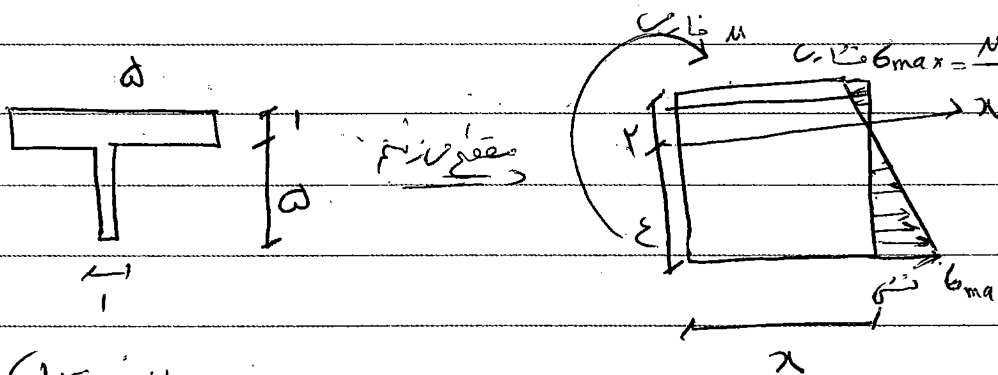
Year ( ) Month ( ) Date ( )





IPE	h	b	t	s	r	A	G	I	S	
	ارتفاع تیرآهن = شماره آن					سطح مقطع		ممان اینرسی	اساس مقطع	
۸۰										
۱۰۰										
۱۲۰										
۶۰۰										

سومین مقطع، مقطع پروفیل های استاندارد (کارخانه ای)



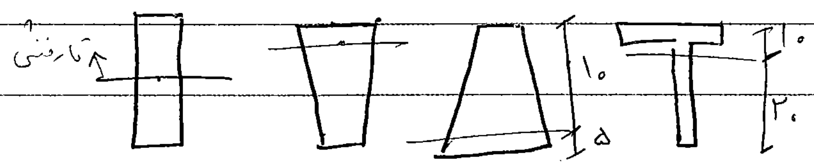
$\sigma_{max} = \frac{M \times 2}{I} = 30 \leq \sigma$ فشاری مثلا ۲۵ مجاز

$\sigma_{max} = \frac{M \times 4}{I} = 60 \leq \sigma$ کششی مجاز مثلا

سازه نامتقارن

سئوال: مساحت ها مساوی [اگر

برای خمش کدام مناسب است.



محل فشار را بهتر تحمل می کند

الف ب ج د

اگر کشش بالا باشد (ج) درست است

ولی اگر کشش پایین باشد ب و د درست است

برای متقارن ها مناسب است.

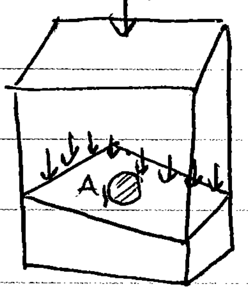
SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

نکته ۱: اگر عضوی تحت کشش باشد (منظور تحت نیروی محوری باشد) و نیروی کل سطح A باشد و ما بخواهیم ببینیم بخشی از این سطح مثلا سطح A_1 چقدر نیرو تحمل کند

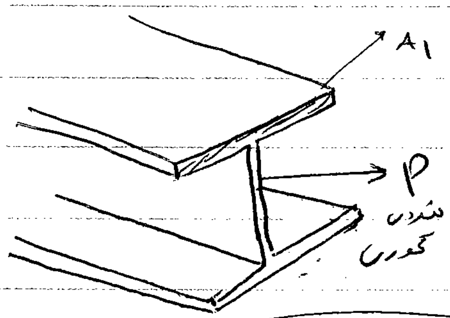
(P نیروی محوری = فشاری)

P ← متمرکز نیست برآیند نیرو است



با فرض این که تنش یکنواخت باشد (یعنی تنش ثابت است از انتگرال بیرون می‌آید) نیرو به نسبت مساحت توزیع برای یک بخش بدست می‌آید

سهم A_1 از کل نیروی محوری برابر است با:



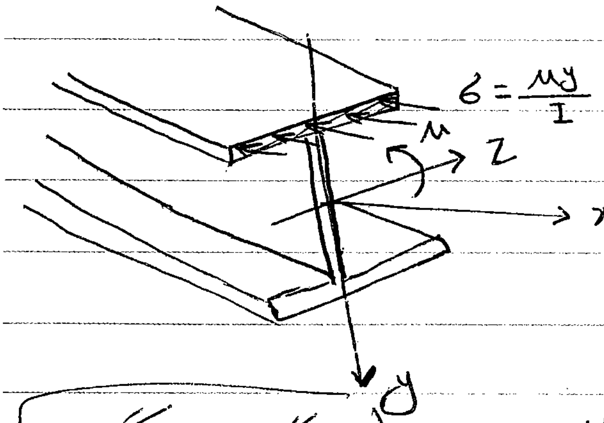
$$P_1 = \int_{A_1} \sigma \, dA = \frac{P}{A} \underbrace{\int_{A_1} dA}_{A_1} = \boxed{P \frac{A_1}{A}}$$

نتیجه بسیار مهم

می‌خواهیم ببینیم P_1 چند درصد P است

$\boxed{\text{سهم نیرو ناشی از نیرو}}$

نکته ۲:



چه مقدار از لنگر را سطح A_1 تحمل می‌کند؟

$$M_1 = \int_{A_1} y \, \sigma \, dA = \int_{A_1} y \left(\frac{My}{I} \right) dA =$$

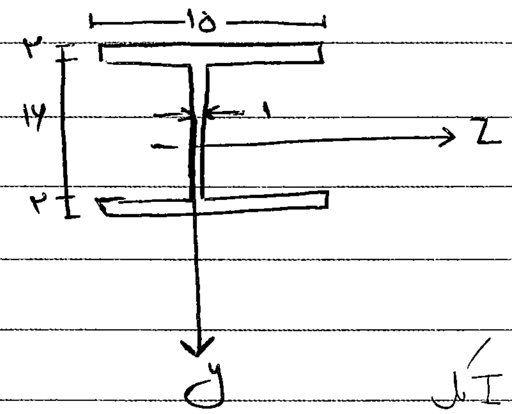
$$= \frac{M}{I} \underbrace{\int_{A_1} y^2 \, dA}_{I_1} = \boxed{M \frac{I_1}{I}}$$

نتیجه بسیار مهم

$\boxed{\text{سهم لنگر ناشی از لنگر}}$

اگر عضوی تحت خمش قرار بگیرد و بخشی از آن (مثلا سطح A_1) چند درصد لنگر را تحمل می‌کند به نسبت ممان اینرسی است ولی برای نیرو به نسبت مساحت است.

مثال برای نکته ی ۲: تیر آهن



سؤال: چند درصد لنگر را بال و چند درصد را جان تحمل می کنند؟

وقتی می گوییم چند درصد یعنی نسبت $\frac{I_1}{I}$ را می خواهیم و M را هم نداریم اشکال ندارد

I کل را باید با جمع ۳ مستطیل بدست آوریم

$$I_{کل} = I_{جان} + 2 I_{بال}$$

چند درصد را جان تحمل می کند $= \frac{I_{جان}}{I_{کل}}$

هر چه مساحت دورتر از تار خنثی باشد تأثیرش بیشتر است

چند درصد را بال ها تحمل می کنند $= \frac{2 I_{بال}}{I_{کل}}$

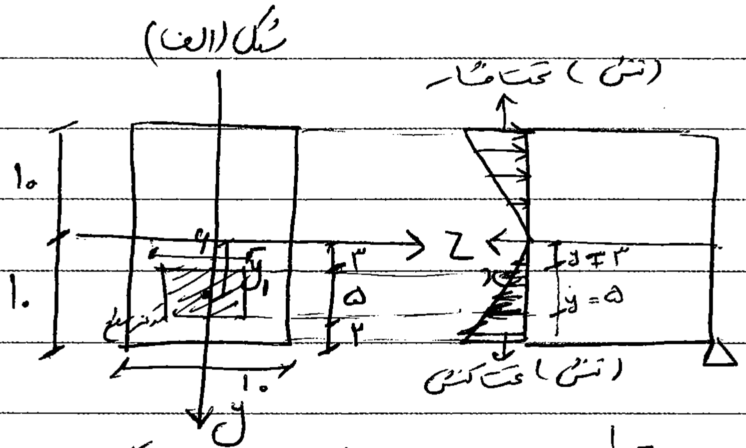
نکته ی ۳:

وقتی تحت لنگر قرار گرفت نیرویی به بال وارد شود چقدر است؟

$\sigma = \frac{My}{I}$

کشش در پایین بیشتر است.

شکل (الف)



مقطع (برش زدیم = مقطع سمت راست را گرفتیم)

جمع نکته ی ۳ با نکته ی ۱ و ۲ (در این با نیرویی که در اثر لنگر ایجاد می شود)

روش اول بهترین روش

سهم نیروی ناشی از لنگر

لنگری که به مقطع وارد می شود

$$F_1 = \int_{A_1} \sigma \cdot dA = \int_{A_1} \left(\frac{My}{I}\right) dA = \frac{M}{I} \int_{A_1} y\, dA = \frac{MQ}{I}$$

نیرویی که به سطح ها شود وارد می شود

ناشی از لنگر است یعنی در اثر لنگر به وجود آمده

Q_1 = ممان استاتیک

ممان اینرسی کل مقطع نسبت به تار خنثی

ممان استاتیک سطح هاشور خورده نسبت به تار خنثی

اگر در مقطعی دلمان خواست تحت لنگر است چه نیرویی به آن مقطع وارد می شود باید از فرمول $\frac{MQ}{I}$ استفاده شود.

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

$\bar{y}_1$: فاصله ی مرکز سطح سطح هاشور خورده از تار خنثی

روش دیگر

$$F_1 = \frac{M}{I}(\underbrace{\bar{y}_1 A_1}_{Q_1}) = \underbrace{\left(\frac{M\bar{y}_1}{I}\right)}_{\text{تنش در مرکز سطح هاشور خورده}} . A_1$$

تنش مرکز سطح هاشور خورده

این تنش در یک نقطه است در یک مقطع

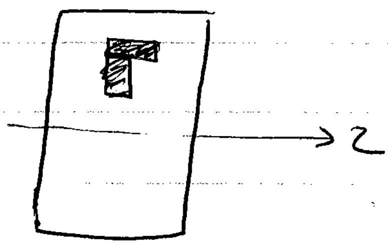
(با توجه به شکل الف $\bar{y}_1$ در شکل نشان داده شده)

(مثلاً برای مثلث این مورد) تنش در مرکز سطح برای این مقطع به مستطیل شکل (ثابت) نمی شود

روش سوم : $F_1 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} . A_1$

← تنش ~~میانگین~~ مرکز سطح [تنش در بالای مقطع (σ_1) و تنش در پایین مقطع (σ_2) را بدست آوردم و تقسیم بر ۲ کردم]

مثال:



Q_s سطح هاشور خورده

برابر است با جمع Q در مستطیل.

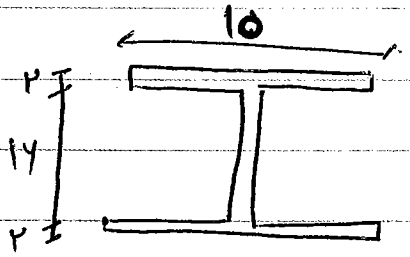
مثال: M و I و ابعاد مقطع و ν و E = معلومات مسئله

مدول الاستیسیته ی مثلاً فولاد ← E

ضریب پواسون ← ν

الف) عرض بال فوقانی = ؟ P مجهول

بعد از اعمال لنگر



یعنی باید δ_z را بدست آوردم

تغییر طول در جهت z

چون فشار است باید منفی بگذارد ← $\frac{Mc}{I}$

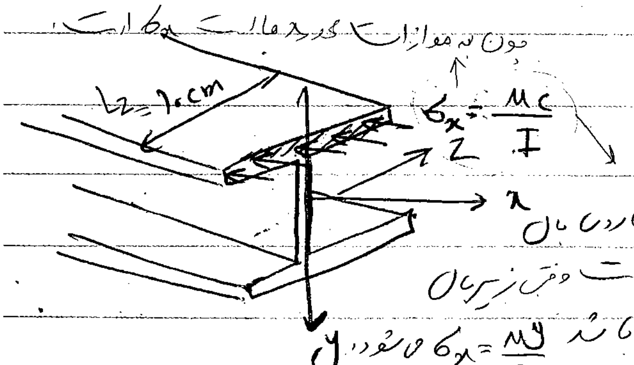
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right] =$$

جواب + بدست می آید

یعنی انبساط پیدا کرده

$$\delta_z = \varepsilon_z \cdot L_z$$

در این جا $1 cm$



چون به موازات محور ها است صفر است.

$L_z = 1 cm$

$\sigma_x = \frac{Mc}{I}$

برای روی بال است وقتی زیر بال باشد

می شود $\sigma_x = \frac{My}{I}$

ب) ضخامت بال فوقانی = ؟ P

یعنی اول باید δ_y را بدست آوردم

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right]$$

جواب + است

یعنی ضخامت بال هم زیاد شده

منفی × منفی = مثبت

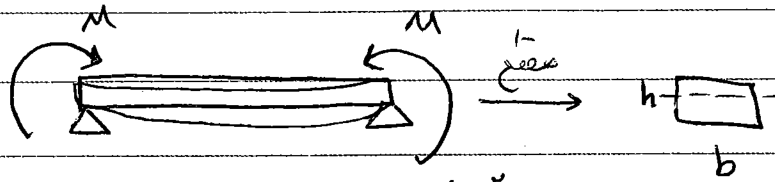
$$\sigma_x = -\frac{M \times 9}{I}$$

$$\delta_y = \varepsilon_y \times L_y = \varepsilon_y \times 2 cm$$

(پس در کل طول بال کم می شود ولی عرض بال و ضخامتش زیاد می شود)

مثال: تیر چوبی:

حالت اول: تیر چوبی

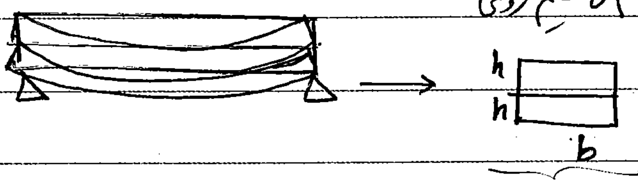


$M_{1\,مجاز} = \sigma_{مجاز\,چوب} \times S_{1\,موجود} = \sigma_{مجاز} \times \frac{bh^2}{6}$

حالت دوم:

یادآوری:

دو تیر چوبی مشابه هم را روی هم می‌گذاریم (بدون اتصال) (بدون جوش = بدون چسب)
وقتی آن‌ها را خم می‌کنیم روی هم می‌لغزند.



$\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{M}{S} < \sigma_{مجاز}$

$S_{موجود} \cdot \sigma_{مجاز} = M_{مجاز}$

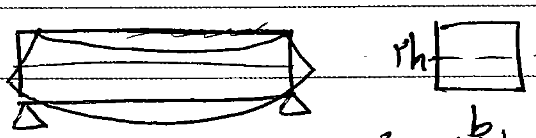
$S_{لازم} = \frac{M}{\sigma}$

$S_{مستطیل} = \frac{I}{c} = \frac{\frac{bh^3}{12}}{\frac{h}{2}} = \frac{bh^2}{6}$

دو تار خنثی داریم چون شکل مرکب نیست و هر کدام از تیرها جداگانه در پایین افزایش طول و در بالا کاهش طول دارند.

$M_{مجاز} = 2M_{مجاز} = 2\sigma_{مجاز} \times \frac{bh^2}{6}$

حالت سوم: دو تیر را آن‌ها را به هم می‌چسبانیم (در واقع یک تیر داریم).



چون با چسب به هم متصل کردیم دیگر روی هم نمی‌لغزند یعنی چسب جلوی این لغزش را می‌گیرد (تنش برشی)

به صرفه‌تر است از حالت قبلی است.

$$M_{مجاز} = \sigma_{مجاز} \times S_{موجود} = \sigma_{مجاز} \times \frac{b(2h)^2}{6} = 4M_{1\,مجاز}$$

وقتی روی این تیر بار بیاید یک پارچه تغییر شکل می‌دهد (چون در واقع یکی است)

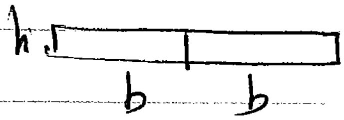
** نکته: در خمش ملاک اساس مقطع است (S) و یا I (ممان اینرسی است)

SUBJECT :

Year (　　) Month (　　) Date (　　)

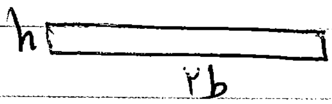
حالت چهارم :

کنار هم هستند (بدون اتصال)



$M_{\text{مجاز}} = 2 M_{1\,\text{مجاز}}$

کنار هم جوش کردیم



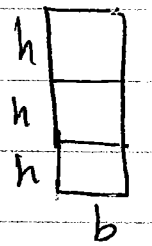
$M_{\text{مجاز}} = \sigma_{\text{مجاز}} \times S = \sigma_{\text{مجاز}} \times \frac{(2b)h^2}{6} = 2 M_{1\,\text{مجاز}}$

پس اگر دو تیر کنار هم باشند [چه جوش کنیم چه نکنیم مقاومت خمشی آن ها یکسان است]

ولی اگر روی هم بگذاریم [جوش کنیم (برای مستطیل) ۴ برابر می شود و اگر جوش نکنیم (برای مستطیل) ۲ برابر می شود]

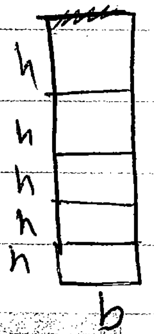
وقتی می گوییم وقتی روی هم بگذاریم جوش کردن مهم است با فرض این که است که بار از بالا به آن وارد می شود (بار ثقلی وارد شود) ولی اگر بار افقی وارد شود جای h و b عوض می شود : $S = \frac{hb^2}{6}$

تست کنکوری : سه تیر می خواهیم آن ها را بچسبانیم مقاومت چند برابر حالتی است که نچسبانیم



چسباندن $= 9 M_1$ برابر تکی

نچسباندن $= 3 \times M_1$ برابر تکی



بچسبونیم $= 25 M_1$

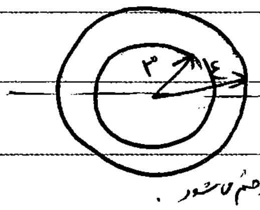
ببندیم هم افقی بود :

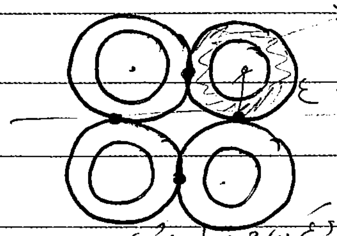
SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

مثال:

لوله‌ی فولادی به شعاع داخلی ۳ و شعاع خارجی ۴ و حول محور رنگ شده خم می‌شود.





$\pi(4^2-3^2)$

شعاع جسم ۴

تار خنثی

چون جوش کردیم تا هم واحد شده و یک تار خنثی دارد.

اگر ۴ تا از این لوله‌ها را استفاده می‌کنیم

حول این محور خم می‌شود.

M_1 چند برابر می‌شود؟

$$S_1 = \frac{I_1}{C} = \frac{\frac{\pi}{4}(4^4-3^4)}{4}$$

دورترین نقطه از تار خنثی

الف) اگر این ۴ تا را جوش نکنیم ⟸ $4M_1$ جواب

ب) اگر جوش کنیم ⟸ باید کل مجموعه را حول این محور در نظر بگیریم یعنی باید $\frac{I}{C}$ را حساب کنیم (برای مستطیل فقط هستیم که $\frac{bh^2}{6}$ حساب شود)

برای ۴ تا لوله جوش شده:

$$I = 4\left[I_1 + A_1 d^2\right] = 4\left[\frac{\pi}{4}(4^4-3^4) + \pi(4^2-3^2)(4)^2\right]$$

$$S = \frac{I}{C} = \frac{I}{8}$$

$$\boxed{\frac{S}{S_1} = 7.2}$$

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

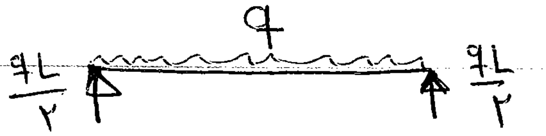
«فصل پنجم» «تنش برشی در تیرها»

در تیرها تنش برشی باید کنترل شود و دیگری تنش خمشی باید کنترل شود
یعنی باید کنترل کنیم تیر ما می‌بُرد یا نه

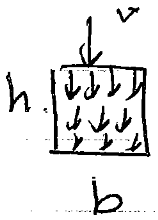
معمولاً در امتحان فصل ۴ و ۵ با هم می‌آید یعنی هم تنش برشی و هم تنش خمشی کنترل شود.

$\sigma = M\frac{c}{I} \le \sigma_{مجاز}$

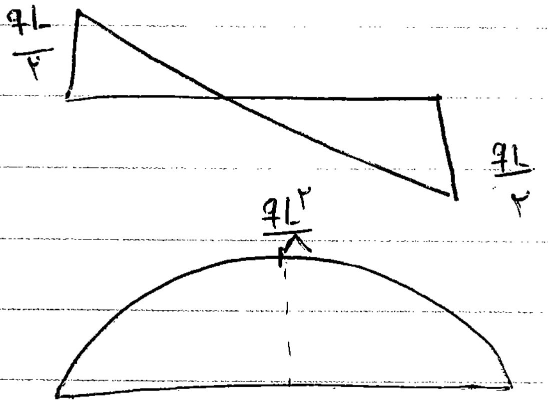
$\tau = \frac{VQ}{It} < \tau_{مجاز}$



مقطع

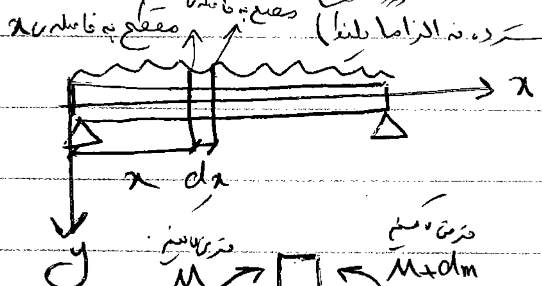


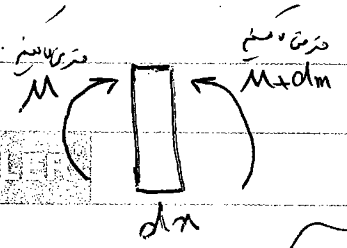
$\tau_{Ave} = \frac{V}{A} \le \tau_{مجاز}$
اگر توزیع تنش یکنواخت باشد.



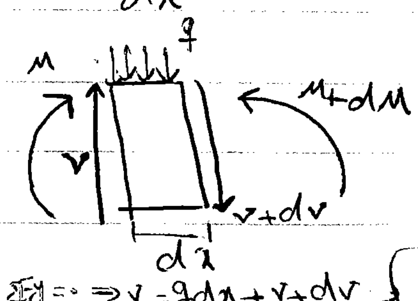
در فصل اول گفتیم $\tau_{Ave} = \frac{V}{A}$ اگر این رابطه
تحت از τ مجاز به مقطعی نتیجه که تیر گسیخته می‌شود باید $\tau_{max} < \tau_{مجاز}$ باشد.

تیری را در نظر بگیریم که تحت بار است: (تحت بار گسترده نه الزاما یکنواخت)





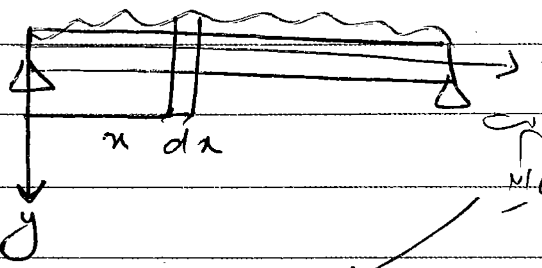
یادآوری از استاتیک: $V = \frac{dM}{dx}$



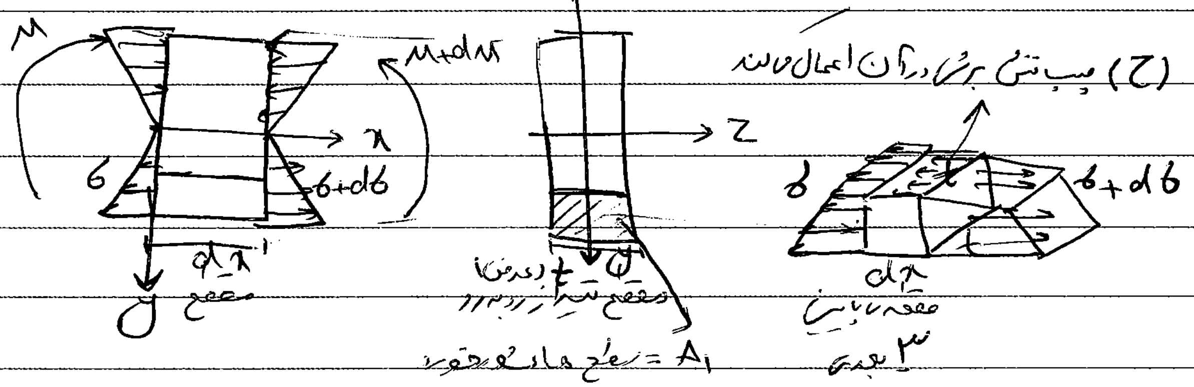
معادلات تعادل: $\sum F_y = 0 \Rightarrow V = q\,dx + V + dV \Rightarrow q = -\frac{dV}{dx}$

$\sum M = 0 \Rightarrow M + V\,dx = q\,dx\left(\frac{dx}{2}\right) + M + dM \Rightarrow \boxed{V = \frac{dM}{dx}}$

پس: $V = \dfrac{dM}{dx} \Longrightarrow M = \int V\,dx$



M باعث تنش فشاری در بالا
و تنش کششی در پایین می‌شود.
چون تکیه داخلی ناشی از تنش است
پس تنش به وجود می‌آید



$$\sum F_x = 0 \Longrightarrow \underbrace{\int_{A_1} \sigma\, dA}_{\text{نیرو از راست به چپ}} + \tau t\,dx = \int_{A_1} (\sigma + d\sigma)\, dA$$

$$\int_{A_1} \frac{My}{I}\, dA + \tau t\,dx = \int_{A_1} \frac{(M+dM)y}{I}\, dA$$

$$\tau t\,dx = \frac{dM}{I} \underbrace{\int_{A_1} y\, dA}_{Q} \Longrightarrow$$

Q: ممان استاتیک مقطع جدا شده نسبت به تار خنثی

(مقطعی که از محل ضربه جدا می‌شود (سطح هاشور خورده))

(نیروی برشی در مقطع V_{max})

$$\Longrightarrow \tau = \underbrace{\frac{dM}{dx}}_{V} \cdot \frac{Q}{It} \Longrightarrow \boxed{\tau = \frac{VQ}{It}}$$

← مهم

مهم‌ترین فرمول تمام مسائل پایانی

(فرمول دقیق برشی)

فرمول محل مقطع

تنش برشی در هر نقطه از مقطع

ضخامت مقطع مورد نظر

ممان اینرسی مقطع مورد نظر نسبت به تار خنثی

فرمول تقریبی برشی: $\tau = \dfrac{V}{A}$

SUBJECT

Year (Month (Date (

$$\sigma = \frac{My}{I}$$

σ: تنش قائم در نقطه‌ی مورد نظر (ناشی از خمش) (برای تنش)

M: لنگر خمشی در مقطع مورد نظر

y: فاصله‌ی نقطه‌ی مورد نظر از تار خنثی — خیلی مهم

I: ممان اینرسی (I کل مقطع) مقطع مورد نظر

$$\tau = \frac{VQ}{It}$$

τ: تنش برشی در نقطه‌ی مورد نظر

V: نیروی برشی در مقطع مورد نظر

Q: ممان استاتیک مقطع جدا شده در نقطه‌ی مورد نظر

I: ممان اینرسی مقطع مورد نظر [در تیر]

t: ضخامت مقطع در نقطه‌ی مورد نظر

نتیجه: نقطه‌ی مورد نظر یعنی مثلاً نقطه‌ای که حساب می‌کنیم

نیرو و لنگر برای مقطع است	= در استاتیک باید بدست آوریم
ولی تنش برای نقطه است	= در مقاومت مصالح

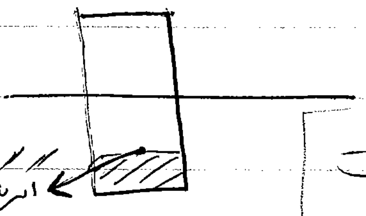
مهم

نکته: طبق فرمول $\tau = \frac{V \cdot Q_{max}}{I\, t_{min}}$ وقتی Q_{max} و t_{min} باشد بیشترین مقدار یعنی بیشترین تنش

برای رسیدن به نقطه باید اول مقطع معلوم شود. پس مقدار M.

(چه در خمشی چه در برشی ممان اینرسی مقطع مورد نظر را می‌خواهیم)

نکته:

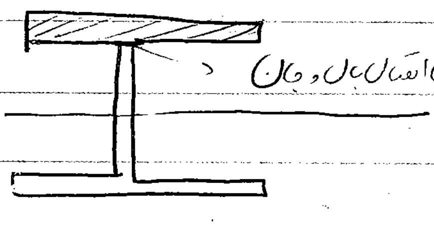


اگر بخواهیم تنش در این نقطه [illegible]، Q می‌شود سطح هاشور خورده [illegible]

Q_{max} در تار خنثی اتفاق می‌افتد یعنی در تار خنثی τ ماکزیمم است

کلاً ممان استاتیک بخشی از مقطع با بقیه‌ی مقطع همیشه برابر است.

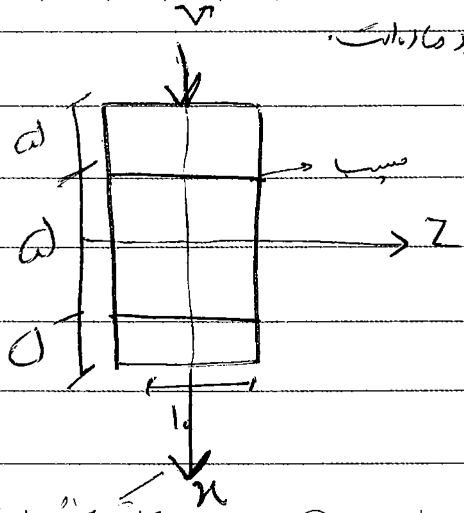
مثال: تنش برشی را در محل اتصال بال به جان پیدا کنید



t = ضخامت جان می‌شود

ممان استاتیک کل سطح صفر است.

فقط برای چسب نیست برای خود ماده است.



$$\tau = \frac{VQ}{It} \le \tau_{\text{مجاز چسب}}$$

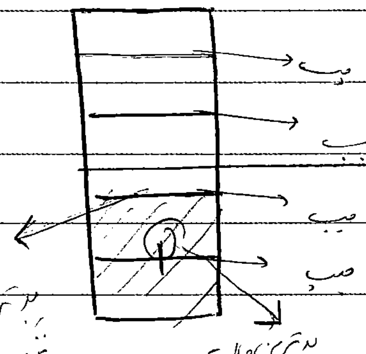
چسب = جایی که چسب خورده.

$$\tau = \frac{VQ}{It} \le \tau_{\text{مجاز چوب}}$$

چوب = تار خنثی

باید هر دو تا را کنترل کنیم (مثل مقطع هم)

در این فرمول V از روی دیاگرام برش بدست می‌آید، t = عرض چسب است، Q = ممان استاتیک بخشی از مقطع است که به تار خنثی یا ممان استاتیک بخش مستقیم آن برابر است



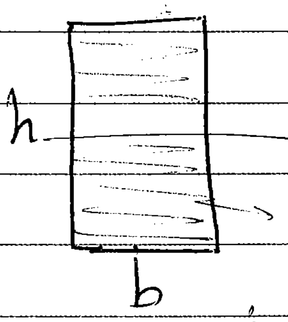
این چسب وضعیت بدتری است چون به تار خنثی نزدیکتر است

$$\tau = \frac{VQ}{It} \le \tau_{\text{مجاز چسب}}$$

هر چه چسب به تار خنثی نزدیکتر باشد Q بزرگتر است (وضعیت بحرانی است).

کنترل چسب اگر چند لایه بود باید کدام را چک کنیم کدام به تار خنثی نزدیکتر است.

اگر تیر چوبی یکپارچه به عرض b و ارتفاع h داشتیم



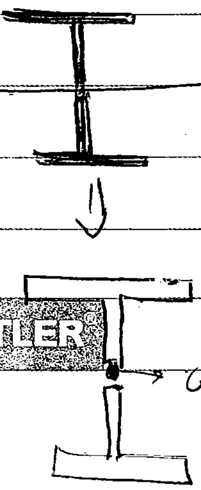
تک تک لایه‌ها ممکن است روی لایه‌ی بالایی یا پایینی بلغزند.

برای تیر چوبی که یکپارچه است فقط V باید $\tau \le \tau_{\text{مجاز چوب}}$ باشد.

اما برای تیری که واقعاً چسب خورده $\tau \le \tau_{\text{مجاز چسب}}$ در بدترین نقطه‌ای که چسب خورده (نزدیکترین به تار خنثی) و $\tau \le \tau_{\text{مجاز چوب}}$ در نقطه‌ی لایه‌های چوب

اگر تعداد چسب‌ها بی‌نهایت باشد به تعداد مقطع‌ها نزدیک شوند آنگاه $\tau_{\text{چوب}} = \tau_{\text{چسب}}$

مثال: یک تیر فولادی داریم (جوش داده‌ایم)



عرض مقطع

ضخامت جان mm

ضخامت جوش mm

mm = در جوش بگذاریم

mm = در فولاد می‌گذاریم

$$\tau = \frac{VQ}{It} \le \tau_{\text{مجاز جوش}}$$

t: ضخامت جوش

$$\tau = \frac{VQ}{It} \le \tau_{\text{مجاز فولاد}}$$

باید Q مربوط به تار خنثی را بگذاریم (برای کنترل خود ماده)

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date

V_y: (نیروی برشی در مقطع مورد نظر) تابعی از x است

Q: ممان استاتیک مقطع جدا شده در نقطه‌ی مورد نظر نسبت به تار خنثی

تنش برشی در تیر یا صفحه یا جوش $\tau = \dfrac{V_y Q}{It}$ *

I: ممان اینرسی مقطع مورد نظر نسبت به تار خنثی

t: ضخامت مقطع در نقطه‌ی مورد نظر (در مستطیل ضخامت ثابت است و در همه جا b است)

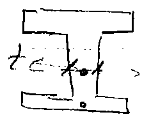
M: (لنگر خمشی در مقطع مورد نظر) تابعی از x است

تنش قائم در تیر $\sigma = \dfrac{My}{I}$ *

y: فاصله‌ی نقطه‌ی مورد نظر از تار خنثی

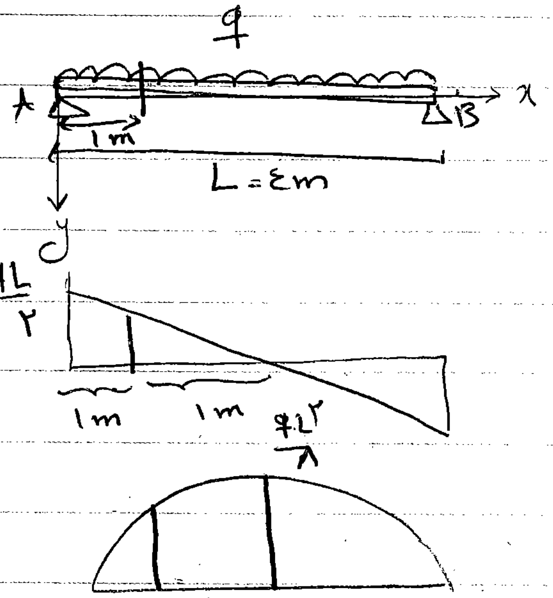
I: ممان اینرسی مقطع مورد نظر نسبت به تار خنثی

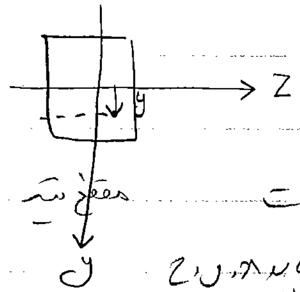
یادآوری:
برای ضخامت بستگی به شکل در آن نقطه دارد.



[illegible]

مثال: (یعنی تیر را باید خمش و برشی مشترک کرد = فصل ۴ و ۵)





منظور از تنش قائم در تیر باید در یک نقطه‌ی مشخص باشد.
نقطه‌ی مشخص دارای مشخصاتی است که ما باید آن نقطه را پیدا کنیم یعنی باید x و y و z آن نقطه را بشناسیم: این که x آن کجاست یعنی مقطع (یعنی وقتی گفتند در ابتدای تیر باید در ابتدای مقطع بزنیم)
تکیه‌گاه A

y = فاصله‌ی نقطه‌ی مورد نظر از تار خنثی (یعنی نقطه را باید در مقطعی که در ابتدای تکیه‌گاه A زدیم، پیدا کنیم که x آن ابتدا است ولی y آن در مقطع باید مشخص شود)

* تنش برشی به V ربط دارد که جای V بیشتر است (که V_{max} از روی دیاگرام برشی بدست می‌آید) به بحرانی ترین

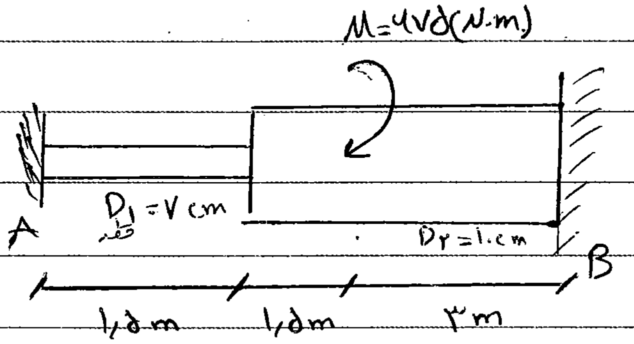
* در مورد σ_{max} باید هم مقطع بحرانی و هم نقطه‌ی بحرانی را پیدا کنیم (M_{max} = از روی دیاگرام خمشی و $y_{max} = c$)

همیشه در تار خنثی τ max است و هر چه از تار خنثی دورتر شویم کمتر است و بیشترین مقطع روی تار خنثی است
کمتر؟!

SUBJECT :
Year ( ) Month ( ) Date ( )

حل تمرین مقاومت

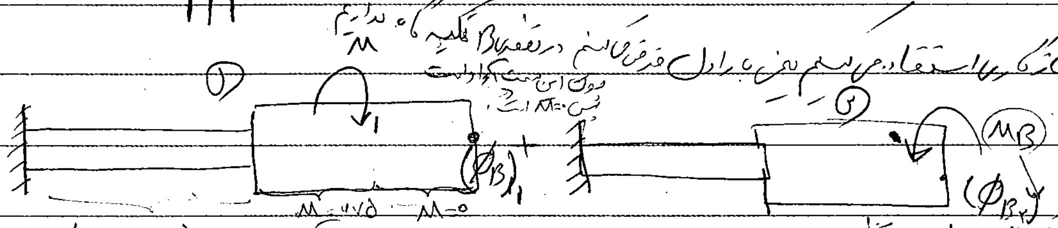
(جزوه ص ۱) مثال: در شکل مقابل در صورتی که جنس میله ی AB یکنواخت باشد گشتاورهای پیچشی تکیه گاهی را در A و B بدست آورید.



دو مقطع متفاوت داریم (بسته به مقطع است)

عکس‌العمل‌ها که ناشی از M است از جنس چرخشی هستند یعنی گشتاور هستند

از اصل سازگاری استفاده می‌کنیم یعنی با دادن فرض اینکه در نقطه B تکیه گاه نداریم



زاویه چرخش در نقطه B

$$\phi_{B_1} = \frac{475 \times 1.5}{G\left(\frac{\pi(0.035)^4}{2}\right)} + \frac{475 \times 1.5}{G\left(\frac{\pi(0.05)^4}{2}\right)} + 0 \qquad \frac{(M_B)(1.5)}{G\left(\frac{\pi(0.035)^4}{2}\right)} + \frac{(M_B)(4.5)}{G\left(\frac{\pi(0.05)^4}{2}\right)}$$

چون می‌دانیم $\phi_B = 0$ است پس در B تکیه گاه داریم پس در دو شکل بالا باید برابر باشند ϕ_B (جزوه ص ۱۲)

$$|\phi_{B_1}| = |\phi_{B_2}|$$

$\phi = \frac{TL}{GJ}$ باید از این فرمول استفاده کنیم چون بار پیچشی است

$J = \frac{\pi R^4}{2}$

در شکل ① ⇐ $T=M$ است (در شکل ① G ثابت است)

در شکل ② ⇐ $T=M_B$ است (در شکل ② G ثابت است)

$|(\phi_B)_1| = |(\phi_B)_2| \longrightarrow M_B = ?$ بدست می‌آید (حساب شود)

و M_A هم وقتی برآیند گشتاورها در نقطه A را بگیریم بدست می‌آید.

$M_A = 475 - M_B =$ بدست آید

اگر در صورت سؤال گفته بود ϕ_O را بدست آورید؟

باید در نقطه O برش بزنیم و تکیه گاه در نقطه B را حذف می‌کنیم و به جای آن M_B قرار می‌دهیم که داشتیم

باید از فرمول $\tau_{max} = \frac{TR}{J}$ و نقطه O را هم بدانیم (البته اول باید تکیه گاه یا عکس‌العمل را در نقطه B بدست آوریم بعد برش بزنیم)

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

مثال مهم

بیان نمونه مثال ۹: ستون بتنی به طول $1{,}2m$ توسط ۴ میله گرد به قطر $19mm$ تقویت شده است

مدول الاستیسیته فولاد

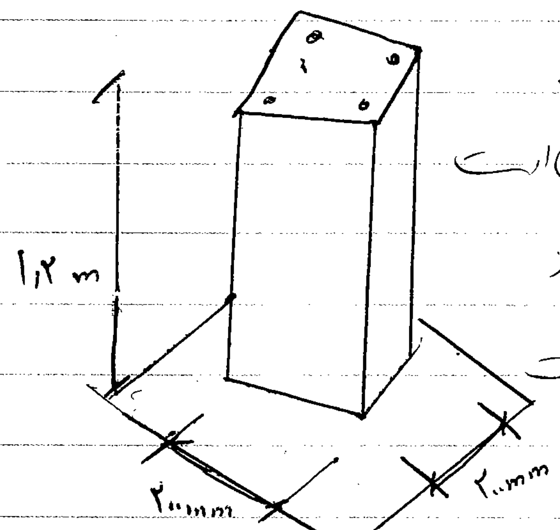
اگر داشته باشیم $\alpha_s = 11{,}7\times10^{-6}\frac{1}{c°}$ و $\alpha_c = 9{,}9\times10^{-6}\frac{1}{c°}$ و $E_s = 200\,Gpa$ ، $E_c = 25\,Gpa$

ضریب انبساط فولاد حرارتی — ضریب انبساط حرارتی بتن

وقتی ستون را به اندازه‌ی $45°C$ حرارت می‌دهیم تنش را در فولاد و بتن بدست آورید.

تنش ناشی از افزایش حرارت که باعث افزایش طول می‌شود.

$\Delta\theta = 45°$ ↑ افزایش حرارت



فولاد و بتن را به صورت مجزا در نظر بگیریم طول اولیه هر دو یکسان است

و ΔT هر دو یکسان است ها $\Delta L = L.\alpha.\Delta T$ افزایش طول ناشی از افزایش حرارت

هم یکسان و فقط α آن ها فرق می‌کند

چون فولاد α بزرگ‌تری دارد افزایش طول آن بیشتر است

وقتی در مصالح به صورت همگن داخل هم قرار گرفته‌اند.

پس شرط سازگاری را باید بنویسیم $\Delta L_{فولاد} = \Delta L_{بتن}$

چون میله‌گرد تمایل به افزایش طول بیشتری دارد و بتن تمایل دارد که فولاد را به سمت خود بکشد (مقاومت می‌کند) و فولاد تمایل دارد که کش بیاید (عمل و عکس العمل). فولاد فشاری و در بتن کششی است. تنش در

عامل ایجاد تغییر طول در فولاد هم افزایش حرارت است و هم اینکه در کنار تغییر طول تنش فشاری ایجاد شده است

که تنش فشاری، نیروی فشاری هم می‌خواهد.

نیروی فشاری $= P_s$ (کاهنده −) — $P_c =$ نیروی کششی (افزاینده +)

$$\Delta L_{فولاد} = \Delta L_{بتن}$$

در راستای قائم نیروی کششی به بتن وارد می‌شود. و نیروی فشاری که به فولاد وارد می‌شود

$$\underbrace{(L.\alpha_s.\Delta T)}_{\text{ناشی از حرارت}} - \underbrace{\frac{P_s L}{E_s}}_{\text{ناشی از تنش}} = (L.\alpha_c.\Delta T) + \frac{P_c.L}{E_c A_c}$$

کاهنده — افزاینده

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow P_s = P_c = P$ حل می‌کنیم — نتیجه

یک معادله‌ی دو مجهولی است که ما P_s و P_c (P_s , P_c) را از روابط استاتیکی $\Sigma F_y = 0$ بدست می‌آوریم که مقدار آن P است

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

حل:

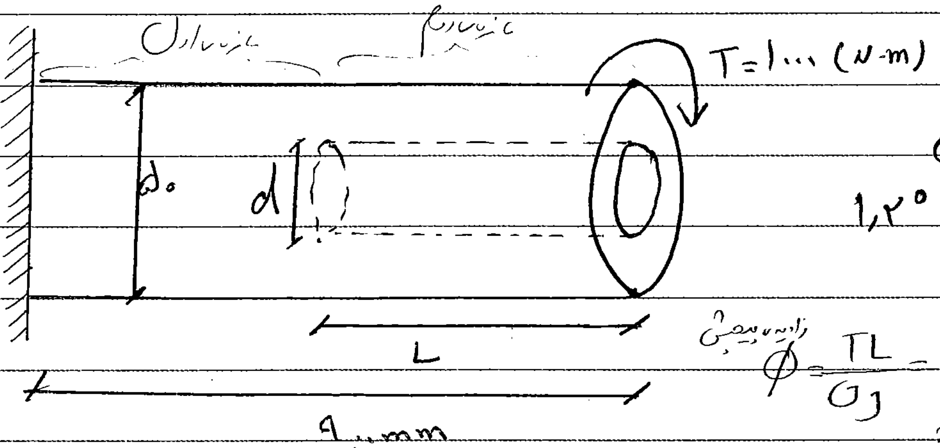
$\sum F_y = 0 \Rightarrow P_s = P_c = P \Rightarrow P = 14895\,N$

$\sigma_s = \dfrac{14895}{\pi(19)^2} = 13/13\ MPa$ فشاری

$\sigma_c = \dfrac{14895}{\pi(20.2^2 - 19^2)} = 283\ MPa$ کششی

مثال: یک محور استوانه‌ای به قطر ۵۰mm و طول ۹۰۰mm مطابق شکل تحت گشتاور پیچشی معادل ۱۰۰۰ N.m قرار دارد. در صورتیکه داشته باشیم $G = 0.84\times10^5 \frac{N}{mm^2}$، مقدار d و طول L سوراخ ایجاد شده را چنان بیابید که اولاً تنش برشی حداکثر در محور داده شده از ۵۴MPa تجاوز نکند. و ثانیاً حداکثر زاویه پیچش کل محور از ۱٫۲° بیشتر نشود.

$T = 1000\ N.m$



زاویه پیچش $\phi = \dfrac{TL}{GJ}$ = رادیان ← باید برحسب رادیان تبدیل شود.

$x° \times \frac{\pi}{180}$

$\tau_{max} = 54\ MPa$

فرمول کلی تنش برشی: $\tau = \dfrac{T\rho}{J}$ در مقطع ما T ثابت است و ρ هم باید تبدیل به R شود (دورترین فاصله) که در این شکل T و R ثابت است پس تنها متغیر J است و به ازای J کمتر τ حداکثر می‌شود:

$\tau = \dfrac{TR}{J}$ ← τ حداکثر می‌شود

$\tau_{max} = \dfrac{1000\times10^3\times25}{\frac{\pi}{2}(25^4 - r^4)} = 54 \longrightarrow r = 18mm$

$\boxed{D = 36mm}$

برای φ در کل بدنه بازه‌ها را جمع می‌کنیم چون باید مجموع زاویه پیچش در مقطع انتهایی را بنویسیم.

مجموع φ در دو بازه

$\phi = \sum \dfrac{TL}{GJ} = \dfrac{10^6 L}{0.84\times10^5 \times \frac{\pi}{2}(25^4 - 18^4)} + \dfrac{10^6(900 - L)}{0.84\times10^5 \times \frac{\pi}{2}(25)^4} = 1.2\times\dfrac{\pi}{180} \Rightarrow \boxed{L = 488.6\ mm}$

تبدیل به رادیان

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

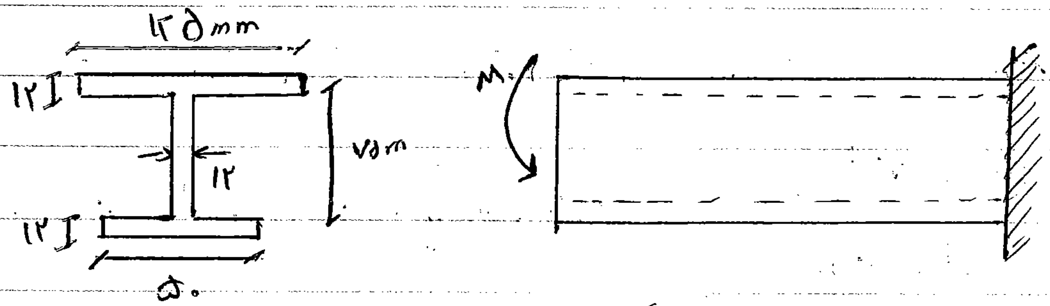
M = خمشی

T = پیچشی

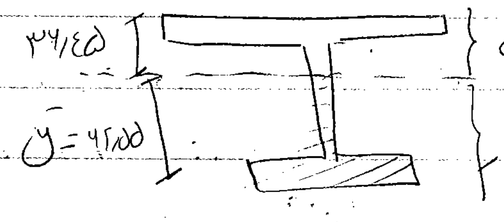
مثال: در تیر شکل مقابل در صورتیکه داشته باشیم ، $\sigma_{\text{مجاز کششی}} = ۴۰ \, MPa$

$\sigma_{\text{مجاز فشاری}} = ۱۰۵ \, MPa$

تعیین کنید حداکثر مقدار مجاز کوپل M چقدر است؟



اول تار خنثی (محور خنثی) را بدست آوردیم (از استاتیک)



$I = ۳٫۹۱ \times ۱۰^{۶} \, (mm)^{۴}$ نسبت به تار خنثی

در این مقطع بیشترین فاصله فشاری بیشتر از بیشترین فاصله کششی دارم که (طبق شکل پایین تار خنثی تحت فشار و بالای تار خنثی تحت کشش است)

حداکثر فاصله از تار خنثی = ۳۶٫۴۵

$$\sigma_{max} = \frac{MC}{I}$$

$\underbrace{\sigma_{max\,\text{کششی}}}_{\text{معلوم}} = \frac{MC}{(I)}$ ، C معلوم ، I معلوم $\Rightarrow M_1 = \dots = ۴٫۲۹ \times ۱۰^{۶} \, (N.mm)$

$\sigma_{max\,\text{فشاری}} = \frac{MC}{I}$ ، $C \to ۱۱۳٫۵۵ \Rightarrow M_2 = \dots = ۶٫۵۴ \times ۱۰^{۶} \, (N.mm)$

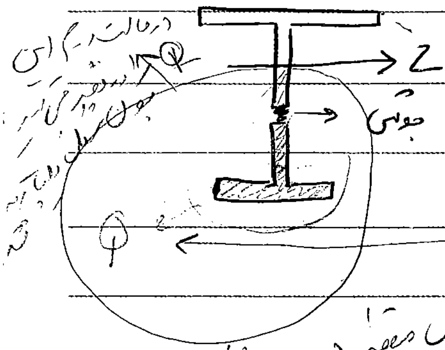
M ای قابل قبول است که هم در ناحیه کششی و هم در ناحیه فشاری جواب دهد یعنی M کمتر پس M کمتر قابل قبول است

$$M_{\text{مجاز}} = \min\{M_1 , M_2\} = M_1 = ۴٫۲۹ \times ۱۰^{۶} \, (N.mm)$$

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

کنترل جوش؟



تا وقتی از محدوده سطح شکل عبور می‌کند

$$\tau_{\text{جوش}} = \frac{VQ}{It} < \tau_{\text{مجاز جوش}}$$

معلوم

همان اینرسی شکل مقطع (در این شکل هم تا سیستم)

ضخامت جوش (محدوده جوش)

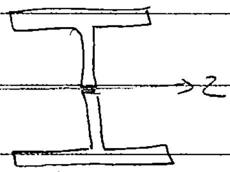
اگر جواب داد

یعنی تبدیل به یک شکل یکپارچه شد

حال باید Q تا وقتی را حساب کنیم

$$\tau_{\text{فولاد}} = \frac{VQ_{\text{فولاد}}}{It} < \tau_{\text{مجاز فولاد}}$$

اما اگر شکل $\Rightarrow Q_{\text{جوش}} > Q_{\text{فولاد}}$

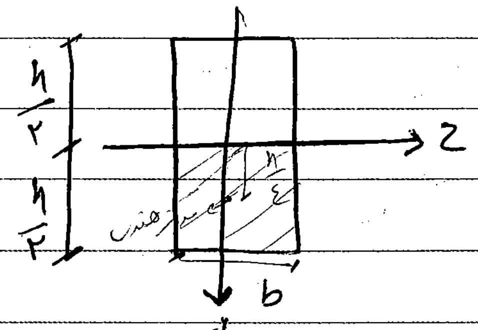


اگر تا وقتی روی جوش‌ها ماند، $\tau_{\text{فولاد}} = \tau_{\text{جوش}}$ باید $\tau_{\text{مجاز}}$ آن را حساب کنیم و

هر کدام که کمتر است را کنترل می‌کنیم

توضیح این که چطور $\frac{Q}{t}$ max شود؟

مثال: $\tau_{max} = ?$



$$\tau_{max} = \frac{V_{max}\left[b\frac{h}{2}\times\frac{h}{4}\right]}{\frac{bh^3}{12}\times b} = \frac{3}{2}\times\frac{V}{A}$$

τ_{Ave}

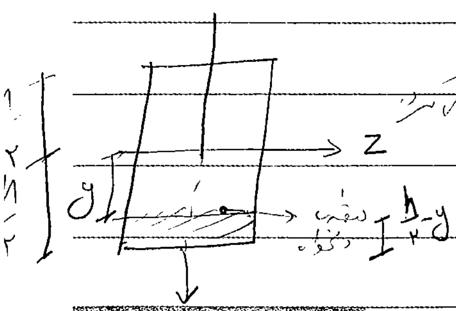
تنش در بارش

$$\tau_{max} = \frac{3}{2}\times\frac{V}{A}$$

پس برای مستطیل توپر

τ_{Ave}، $A = b\times h$ مساحت کل مقطع

حال اگر بخواهیم در یک نقطه دلخواه یک فرمول کلی بدست آوریم:



$$\tau = \frac{V\left[b\left(\frac{h}{2}-y\right)\left(\frac{h}{2}+y\right)\frac{1}{2}\right]}{\underbrace{\frac{bh^3}{12}}_{I}\times \underbrace{b}_{t}} = \frac{6V}{bh^3}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - y^2\right]$$

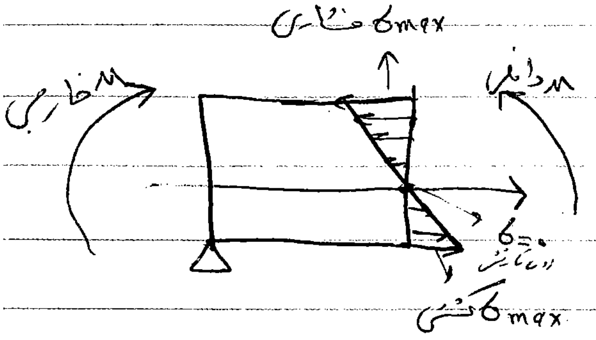
یعنی y^2 است سهمی است یعنی تنش برشی فقط تغییر می‌کند اما مکان فقط تغییر می‌کند

فرمول کلی **

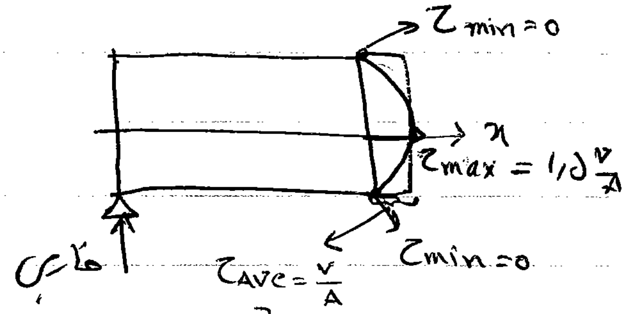
فاصله نقطه مورد نظر از تار خنثی

اگر $y=0$ باشد $\tau_{max} = 1.5\frac{V}{A}$ می‌شود. **

اگر $y = \pm\frac{h}{2}$ باشد $\tau_{min} = 0$ [illegible] می‌شود



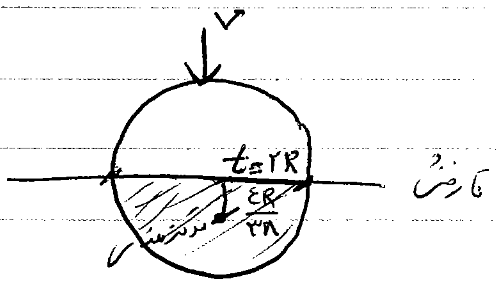
(خمشی)



(برشی)

تنش در الیاف خمشی یا بالا یا پایین جسم max می‌شود ولی اگر برشی در وسط max می‌برد) نکته مهم

حال برای دایره‌ی توپر:

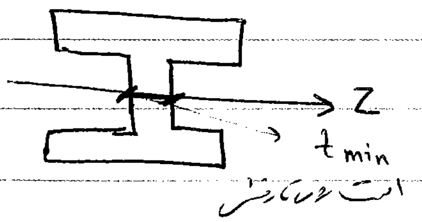


$$\tau_{max} = \frac{V\overbrace{\left[\frac{\pi R^2}{2}\right]}^{\text{مساحت}} \cdot \overbrace{\frac{4R}{3\pi}}^{\text{مرکز هندسی نیم دایره}}}{\underbrace{\left(\frac{\pi R^4}{4}\right)}_{I}\underbrace{(2R)}_{t}} = \frac{4}{3}\underbrace{\frac{V}{A}}_{\tau_{ave}}$$

پس در دایره‌ی توپر: $\tau_{max} = \frac{4}{3}\frac{V}{A}$

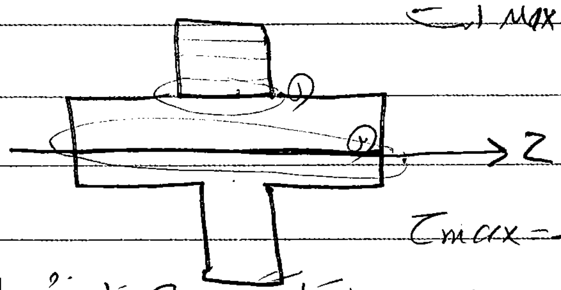
پس برای τ_{max} باید $\frac{Q}{t}$ max شود و V هم max شود

و برای شکل غیر از مستطیل برای τ_{max}، Q_{max} و t_{min} باید باشد:
یعنی در همان جایی که Q_{max} است، t_{min} باشد.



SUBJECT :

Year (　　) Month (　　) Date (　　)

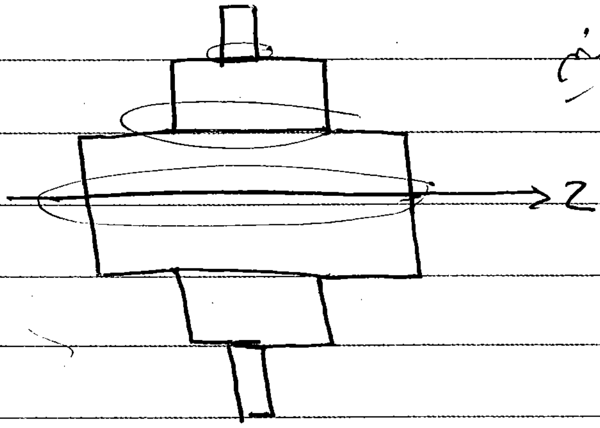


مثال: پس این دو تا رو هم میبینیم $\frac{Q}{t}$ max است

باید محاسبه کنیم

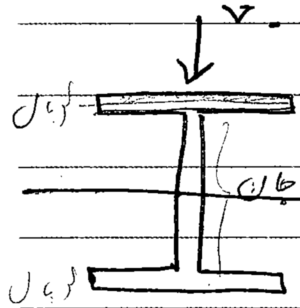
ما τ_{max} را میخواهیم و میدانیم $\tau_{max} = \frac{V_{max} \cdot Q_{max}}{I \cdot t_{min}}$

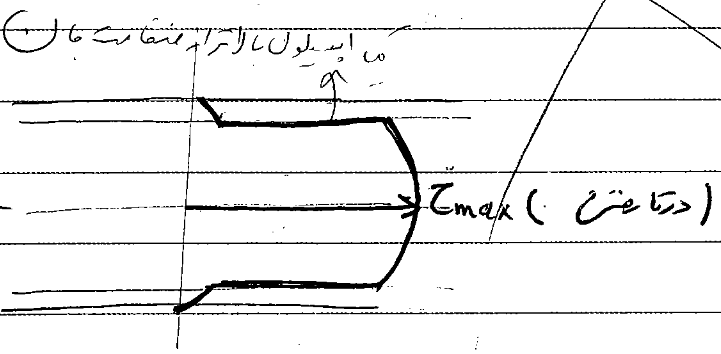
باید مقطعی را در نظر بگیریم که در آن نسبت $\frac{Q}{t}$ max است ابتدا میگوییم ① در تار خنثی Q max است اما t در تار خنثی min است پس باید در ① و ② نسبت $\frac{Q}{t}$ را محاسبه کنیم هر جا که این نسبت max شده مقطع را در نظر بگیریم



مثال: پس این ۴ تا نقطه باید حساب کنیم که کجا $\frac{Q}{t}$ max میشود.

مثال: تنش برشی را رسم کنید.

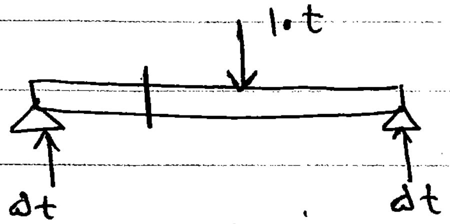




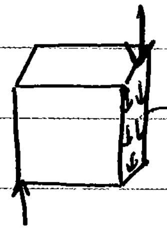
اکثر ممان خمشی عمده ما که در بال است I ما است

یعنی برشی را به جان میدهیم و خمشی را به بال میدهیم.

چه رابطه‌ای



$V = 5t$ داخلی



5t خارجی

$\tau_{xy} =$ تقریبی

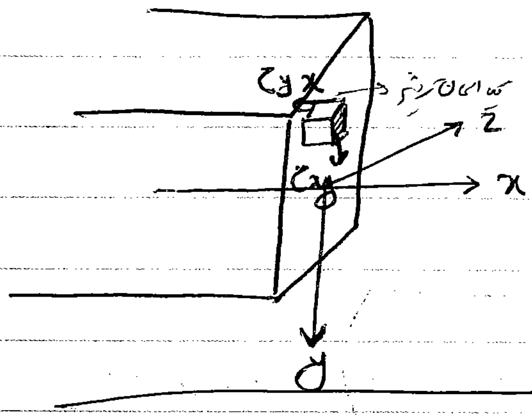
(تقریب) تنش در صفحه قائم ← $\tau_{Ave} = \frac{V}{A}$

(دقیق) تنش در صفحه افق ← $\tau = \frac{V \times Q}{It}$

$\tau_{yx} =$ دقیق

می‌دانیم: $\tau_{xy} = \tau_{yx}$

در صفحه x در جهت y

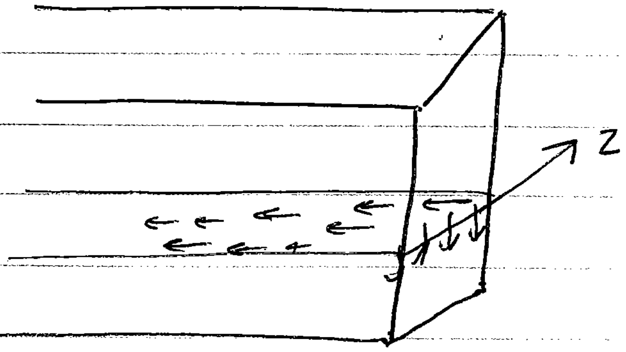


(یادآوری: بیشترین تنش برشی در تار خنثی)

بیشترین تنش خمشی در دورترین نقطه از تار خنثی

$Q = 0$

بنابراین در بالاترین و پایین‌ترین نقطه مقطع تنش برشی صفر است
در روی تار خنثی تنش برشی max است



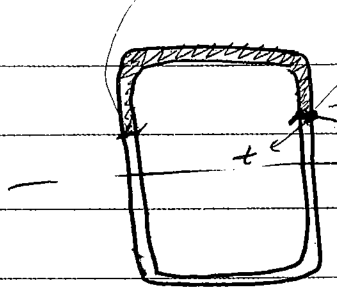
SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

مقاطع توخالی

برای بدست آوردن

بدین تنش در این نقطه برابر است بین Q را نسبت سطح هاشور خورده



$\tau = \frac{VQ}{It}$

سطح خارجی - سطح داخلی

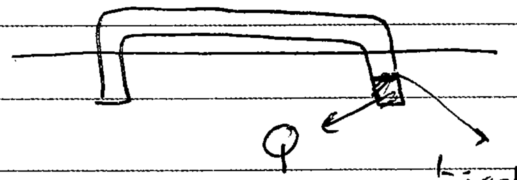
تنش در این نقطه را میخواهیم

پس در این نقطه برش می‌زنیم

ارتفاع

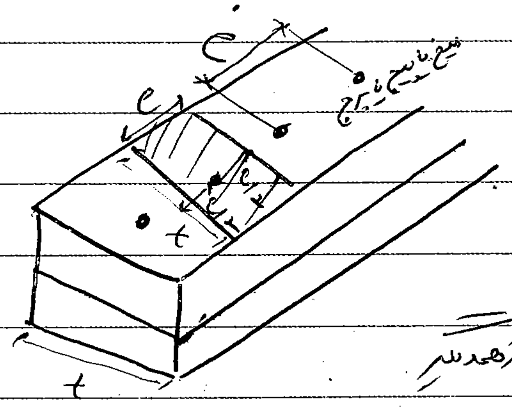
نقاطی که به یک فاصله هستند V هم تنش هستند

اما نقاطی که قرینه هستند تنش صفر می‌شود.



تنش در این نقطه

دو قطعه را روی هم می‌گذاریم و پیچ می‌زنیم.



فرمول

فاصله ۲ پیچ یا پرچ یا میخ متوالی از همدیگر

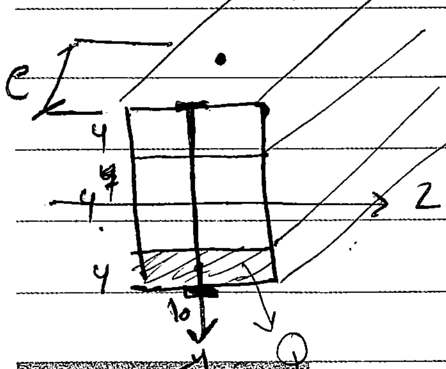
$$F = \tau \times \underset{\text{مساحت}}{A} = \frac{VQ}{It} \cdot t \cdot e = \frac{VQ}{I} \cdot e < F$$

نیروی برشی در هر میخ یا پیچ یا پرچ

تنش برشی در جیب فرض یا جیب معادل

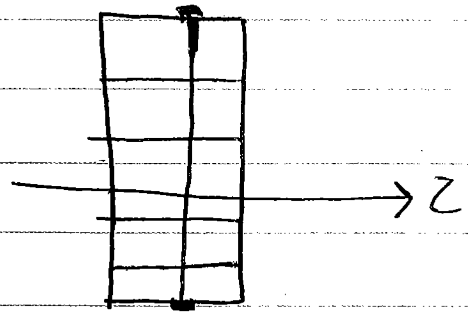
مجاز هر میخ یا پیچ یا پرچ

دیفرانسیل جیب است ولی به جای جیب میخ آمده.



$$F_{6+6+6} = \frac{V\,[60\times 6]}{\frac{10(18)^3}{12}} \cdot e < F$$

مجاز هر میخ

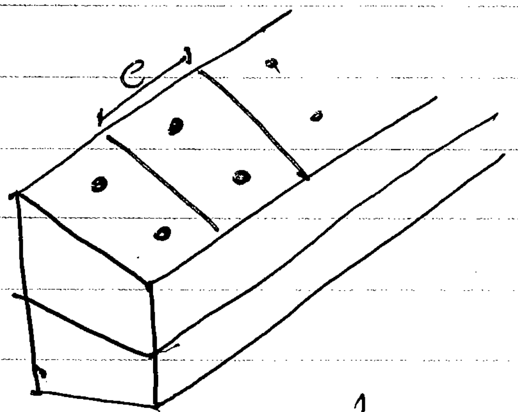


$$F = qe$$

جریان برش $\tilde{q} = \dfrac{VQ}{I}$

پس در این جا هم وقتی جای میخ ها عوض شود برای کنترل هم باید مال میخ و هم مال مقطع ها را کنترل کرد

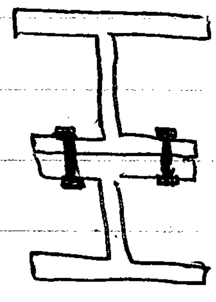
در تمام برش



$$\boxed{2F_1 = \tau_x A}$$

با

امتحانی



$$\boxed{2F_1 = \tau_x A}$$

نکته مهم ***

در کدام درست بالا (فقط پیچ به سمت بالا و فاصله بین پیچ ها به سمت پایین) تعداد پیچ به سمت بالا (پس باید مال باشد که e باید به سمت پایین زده شود)

جریان برش :

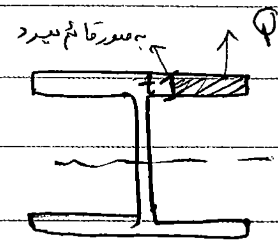
در مورد جریان برش تنش به این شکل محاسبه می شود :

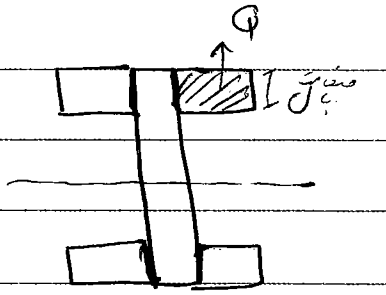
ص (الف)

SUBJECT :

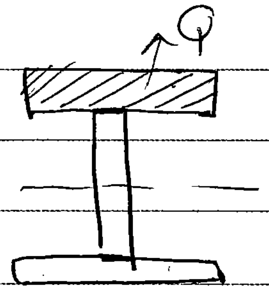
Year (   ) Month (   ) Date (   )

$$\tau = \frac{VQ}{It}$$





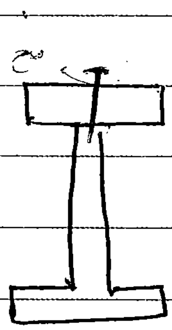
یا

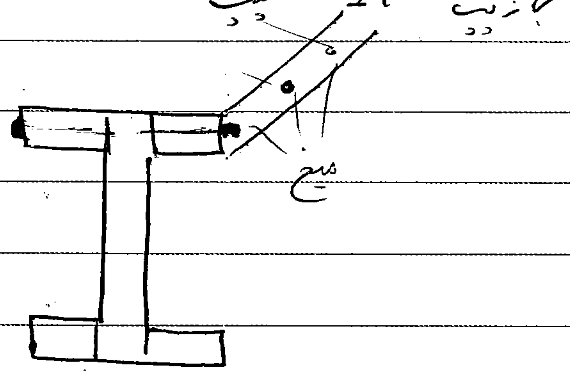


تیرها چسب هستند

$$\tau = \frac{VQ}{It} < \tau_{\text{جاز چسب}}$$

$$\tau_{\text{چسب}} = \frac{VQ}{It} < \tau_{\text{جاز چسب}}$$





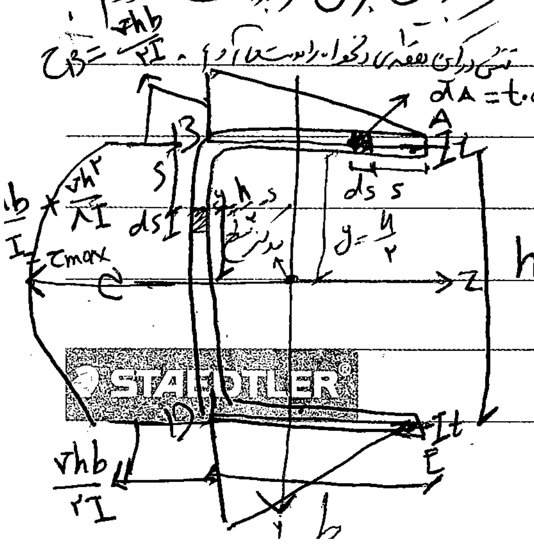
$$F = \frac{VQ}{I} \cdot e < F_{\text{جاز}}$$

$$F = \frac{VQ}{I} \cdot e < F_{\text{جاز هر میخ}}$$

اگر بخواهیم تنش را در تیر I شکل یا مقاطع دیگر و به عبارت دیگر جریان برشی را بدست آوریم

** (توزیع تنش برشی در مقاطع جدار نازک)

مثال: تیر ناودانی



حل در صفحه بعد

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

$$\tau_{AB} = \overbrace{\frac{V}{It}\int y\,dA}^{Q} = \frac{V}{It}\int \underbrace{\frac{h}{2}}_{y}\cdot \underbrace{t\,ds}_{dA} = \frac{Vh}{2I}s$$

(تنش در داخل بال)

$$\text{جان}\quad \tau_{BD} = \frac{V\overset{\text{بال}}{Q'}}{It} + \frac{V}{It}\int y\,dA = \tau_B + \frac{V}{It}\int \left(\frac{h}{2}-s\right)\cdot t\,ds$$

$$\text{جان}\quad \tau_{BD} = \frac{Vhb}{2I} + \frac{Vh}{2I}s - \frac{Vh}{2I}\times\frac{s^2}{2}$$

درجه ۲ است (s^2) سهمی است

$$\text{جان}\quad \tau_{max} = \tau_C = \frac{Vhb}{2I} + \frac{Vh^2}{8I}$$

مثال عددی :

برای شکل صفحه قبل

$$I = \overset{\text{جان}}{\frac{th^3}{12}} + 2\left[\underbrace{\overset{\text{بال}}{\frac{bt^3}{12}}}_{0} + \underbrace{(bt)\cdot\left(\frac{h}{2}\right)^2}_{\text{انتقال}=Ad^2}\right] = \frac{th^2}{12}(h+6b)$$

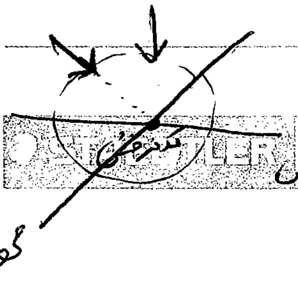
$$\text{if}\ \begin{cases} V = 8000\,N \\ b = 100\,mm \\ h = 150\,mm \\ t = 3\,mm \end{cases} \qquad \begin{aligned} \tau_B &= 14.22\ MPa \\ \tau_{max} &= 19.54\ MPa \end{aligned}$$

نکته : ما جریان برش را برای مرکز برشی بدست آوردیم

ما دو تا مرکز داریم : ۱- مرکز سطح (مرکز خمشی) : اگر نیرو از مرکز سطح عبور نکند تولید خمش می کند

۲- مرکز برش (مرکز پیچشی)

نکته: محل برخورد دو محور خمشی (مرکز خمشی = مرکز سطح) هم هست



مرکز سطح نقطه‌ای است که اگر بخواهیم خمش نداشته باشیم باید نیرو از آن عبور کند

(خمش ناشی از نیروهای محوری و پیچش ناشی از نیروهای برشی است) ##

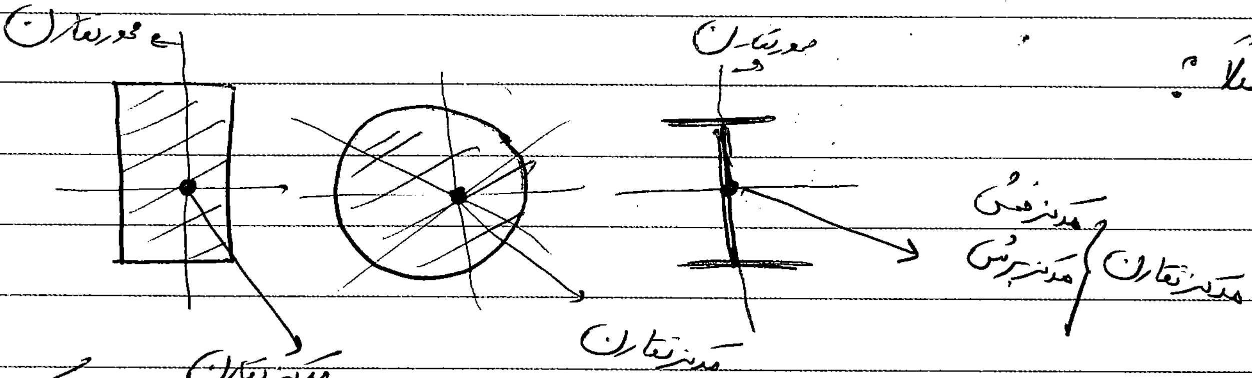
اگر بخواهیم پیچش ایجاد نشود باید نیروی برشی از مرکز برش بگذرد.

مرکز برش: نقطه‌ای است که اگر نیروی برشی از آن بگذرد پیچش به وجود نیاید

مرکز سطح: " " " " " نیروی محوری " " خمش " "

* اگر یک شکل مرکز تقارن داشته باشد آن گاه مرکز سطح و مرکز برش با هم منطبق‌اند

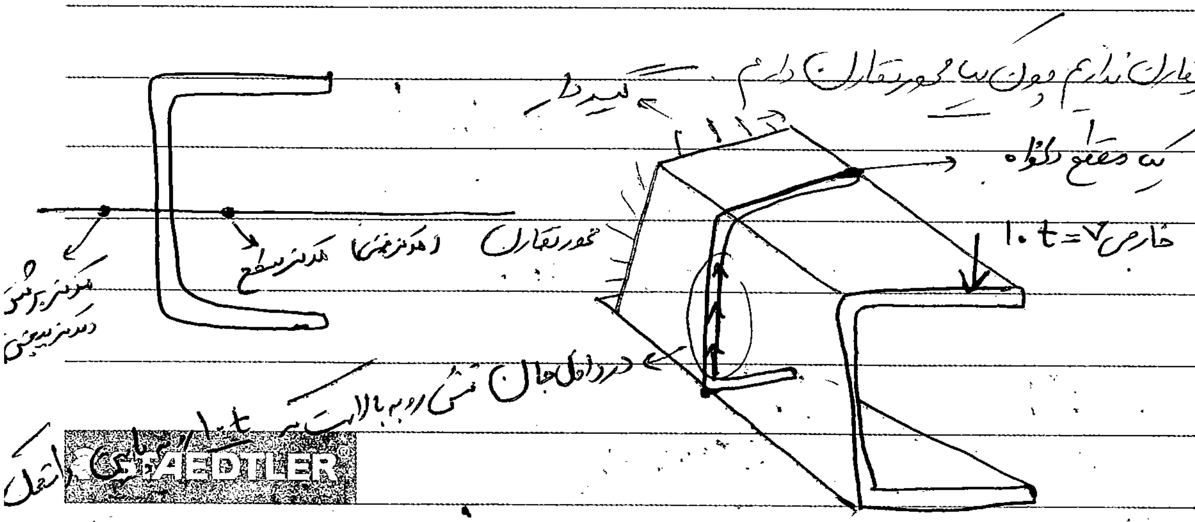
مثلاً:



* نیرو لزوماً قائم نیست هم می‌تواند افقی باشد و هم مورب اگر از مرکز برشی عبور کند #

حال اگر شکلی دارای مرکز تقارن نشود باید مرکز برشی آن را بدست آوریم: (ناودانی)

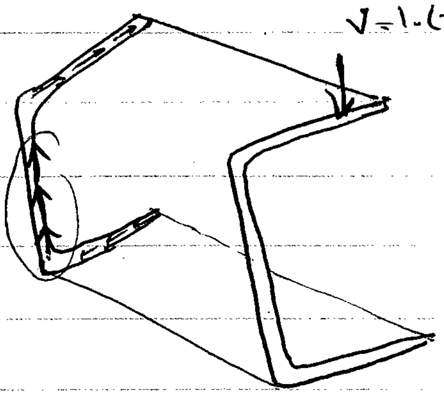
در ناودانی مرکز تقارن نداریم چون یک محور تقارن داریم



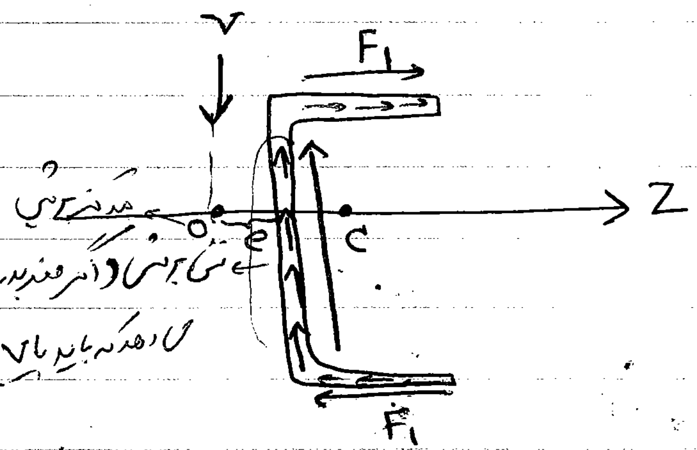
SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

دیاگرام آزاد:



نمایی از روبرو:



دوتا F_1 کوپل ایجاد کند که باید V را خنثی کند یعنی باید منتجه در ساعتگرد شود

e = فاصله‌ی مرکز برشی تا مرکز جان

مرکز برشی همیشه روی محور تقارن است

F_1 = تنش در بال × مساحت بال — در صورتی که تنش یکنواخت باشد

τ_{Ave} بال: تنش متوسط در بال

$$\underbrace{F_1 \cdot h}_{\text{کوپل}} = V \cdot e \Longrightarrow \boxed{e = \frac{F_1 \cdot h}{V}}$$

$$F_1 = \tau_{Ave}^{\text{بال}} \times A_{\text{بال}} = \frac{Vhb}{4I} \times bt = \frac{Vthb^2}{4I}$$

(با توجه به شکل آخر صفحه‌ی صفحه‌ی الف)

$$e = \frac{Vth^2b^2}{V(4I)} = \frac{\cancel{12}t^{\cancel{2}}h^2b^2}{\cancel{4}\frac{th^2(6b+h)}{3}} \Longrightarrow \boxed{e = \frac{3b^2}{h+6b} = \frac{b}{2+\frac{h}{3b}}}$$

$$I = \frac{th^2}{12}(h+6b)$$

SUBJECT :

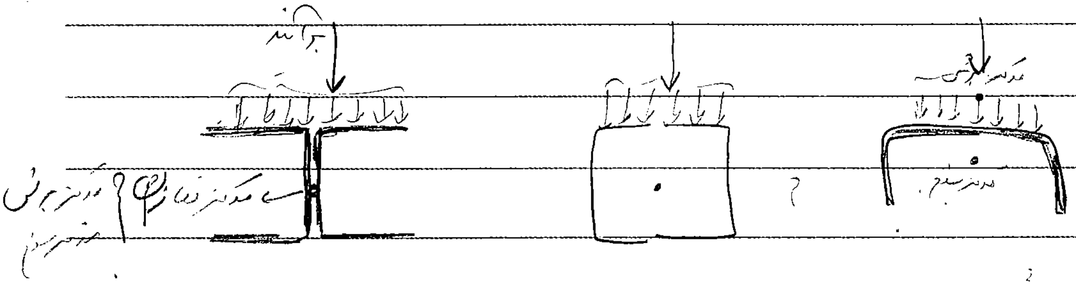
Year ( ) Month ( ) Date ( )

$$\text{if}\begin{cases} V = 8000\,N \\ b = 100\,mm \\ h = 150\,mm \\ t = 3\,mm \end{cases} \Longrightarrow \boxed{e = 40\,mm}$$

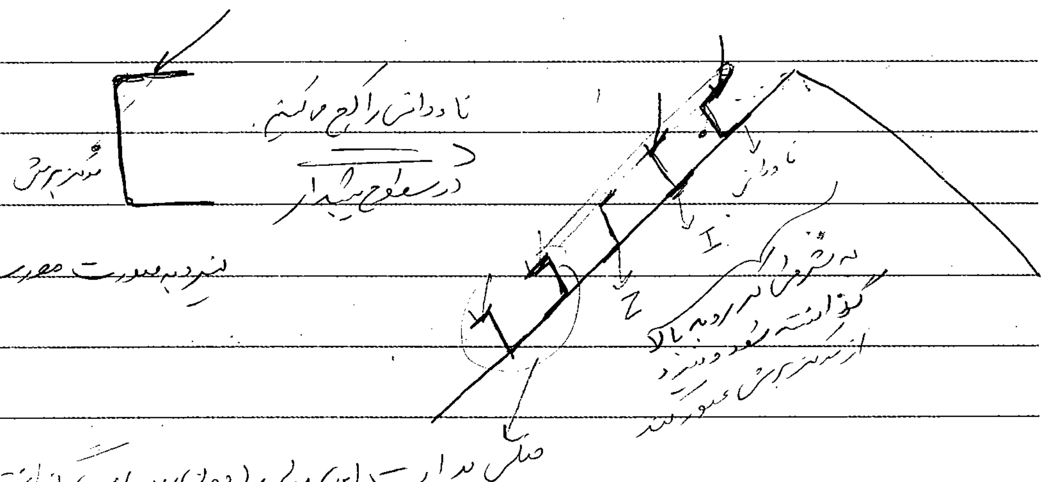
پس نتیجه: اگر یک مقطع ناودانی داشتیم باید نیرویی که به آن وارد می‌کنیم در 40mm به سمت بیرون ناودانی باشد.

سوال: در ناودانی چه جوری نیرو وارد شود؟ چون این جوری که در شکل نشان داده شد نیرو چون بیرون ناودانی است نمی‌ایستد

راه حل: ناودانی را دوبل می‌کنیم (در صورتی که بخواهیم به عنوان تیر استفاده کنیم که نپیچد) باید به شکل زیر در بیاوریم.



همین حالت:



نیرو به صورت عمود وارد شود

مشکل ندارد این مدل (چون رو به پایین گذاشته شده دچار پیچش می‌شود)

مثال ۵.۶ و ۶.۶ ص ۲۴۰ و ۲۴۱

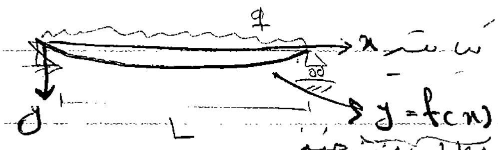
SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

فصل ۶: تغییر شکل تیرها

امکان سنجش تنش و مقاومت ست
در این

می‌خواهیم بررسی کنیم مثلاً یک تیر چه مقدار تغییر شکل می‌دهد (هر قسمت آن چقدر پایین می‌رود)



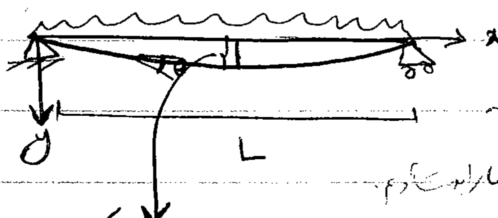
تکیه‌گاه‌ها و بارگذاری چه جوری تیر را تغییر شکل می‌دهد (یعنی معادله‌ی $y = f(x)$ را می‌خواهیم بدست آوریم) = هدف این فصل

که به $y = f(x)$ معادله‌ی منحنی الاستیک تیر گفته می‌شود

حال چه اطلاعاتی را می‌خواهیم؟

وقتی معادله‌ی منحنی را پیدا کردیم y هر نقطه را به راحتی می‌توان بدست آورد.

(شکل الف)



برای بدست آوردن خیز ماکزیمم از منحنی $y = f(x)$ مشتق می‌گیریم و مساوی صفر قرار می‌دهیم و xای که بدست می‌آید را در معادله‌ی y قرار می‌دهیم تا نقطه‌ی ماکزیمم بدست آید

* بیشترین شیب در تکیه‌گاه‌هاست *

$\tan\theta = y' =$ شیب

از نقاط دیگری که برایمان مهم است شیب است اما اینجا شیب را برابر $y' = 0$ قرار دهیم

هدف دیگر از این مبحث تحلیل تیرهای نامعین است (مثلاً تیری که ۳ تا تکیه‌گاه دارد باید معادله‌ی سازگاری تغییر شکل‌ها را بنویسیم)

تغییر شکل تیرها:

(در صفحه بعد)

STAEDTLER

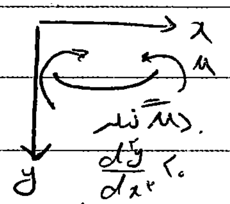
در فصل خمش: فرمول شماره ۱ $\quad \dfrac{1}{\rho} = \dfrac{d\theta}{dx}$

چون θ زاویه اش خیلی کوچک است: $\Rightarrow \theta = \tan\theta = \dfrac{dy}{dx}$ (شیب = y')

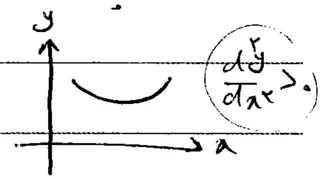
$$\Rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \boxed{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

در فصل خمش فرمول شماره ۵: $\quad \dfrac{1}{\rho} = \boxed{\dfrac{M}{EI}}$

$$\frac{M}{EI} = \underset{\text{منفی}}{-}\frac{d^2y}{dx^2}$$



هرچند تقعر به سمت بالا است اما چون جهت محور y به سمت پایین است منفی y می‌شود.



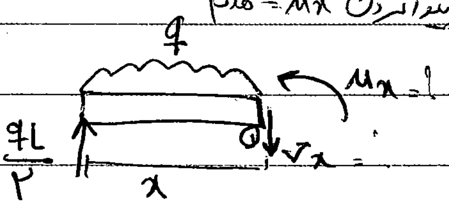
معادله‌ی دیفرانسیل منحنی الاستیک:

$$EIy'' = -M_x \longrightarrow \text{ادامه در پایین}$$

(M_x بر حسب x است) — دوبار انتگرال می‌گیریم تا y بدست آید.

M را هم باید مقطع بزنیم و برحسب x بدست آوریم.

با توجه به شکل الف صفحه‌ی قبل یک مقطع به فاصله‌ی x می‌زنیم (پیدا کردن M_x = هدف)



نکته: هر تیری با هر بارگذاری و هر نوع تکیه‌گاهی باید دوبار انتگرال بگیریم تا y را بدست آوریم.

و ثابت‌ها را C_1 و C_2 و ... را هم باید با بارگذاری نقاط مرزی $x=0 \to y=0$ و $x=L \to y=0$

$\sum M_O = 0$

$$\boxed{M_x + qx\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{qL}{2}x}$$

معادله‌ی M_x بدست آمد.

ادامه حل معادله:

$$EIy'' = \frac{qx^2}{2} - \frac{qL}{2}x \xrightarrow{\text{انتگرال}} EIy' = \frac{qx^3}{6} - \frac{qLx^2}{4} + C_1 \xrightarrow{\text{انتگرال}}$$

$$EIy = \frac{qx^4}{24} - \frac{qLx^3}{12} + C_1x + C_2 \xrightarrow{\text{سپس}} \quad (\text{در صفحه بعد})$$

شرایط مرزی: $x=0,\ y=0 \Rightarrow \boxed{C_2 = 0}$

شرایط مرزی: $\left.\begin{matrix} x=L \\ y=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 0 = \dfrac{qL^4}{24} - \dfrac{qL^4}{12} + C_1L \Rightarrow \boxed{C_1 = \dfrac{qL^3}{24}}$

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

$$\cancel{EIy' = \frac{qx^3}{6} - \frac{qLx^2}{4} +}$$

پس: $y'' = \frac{1}{EI}\left[\frac{qx^2}{2} - \frac{qL}{2}x\right]$

$$y' = \frac{1}{EI}\left[\frac{qx^3}{6} - \frac{qLx^2}{4} + \frac{qL^3}{24}\right]$$

$\cancel{y = f(x)}$

$$\boxed{y = \frac{1}{EI}\left[\frac{qx^4}{24} - \frac{qLx^3}{12} + \frac{qL^3x}{24}\right]}$$

حال اگر خیز ماکزیمم را بخواهند [که در این مسئله تیر شکل الف، به علت تقارن

داریم خیز در وسط است]

برای بدست آوردن خیز $y'=0$ قرار دهیم

$$y' = 0 \Rightarrow x = \frac{L}{2}$$

$x = \frac{L}{2}$ را در $y = f(x)$ قرار دهیم:

$$y_{max} = \frac{5\overset{\text{شدت بار}}{q}\,\underset{\text{طول تیر}}{L^4}}{384EI}$$

اگر شیب تیر در تکیه گاه را بخواهند (شیب حداکثر = شیب تکیه گاه)

شیب حداکثر یعنی $y' = max$ شود پس باید $y'' = 0$ قرار دهیم

$$y'' = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = L \end{cases} \xrightarrow{x=0} y'_{max} = \underbrace{\theta_{max}}_{\theta = \tan\theta} = \frac{qL^3}{24EI}$$

x ها را در y' قرار دهیم

$$x = L \Rightarrow y'_{min} = \theta_{min} = -\frac{qL^3}{24EI}$$

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

اگر جواب ندهد تیر می‌شکند

بارگذاری مقطع Q ... کنترل برش - کنترل تنش برشی ✓ $\tau_{max} = \frac{V_{max} \cdot Q}{It} \leq \tau_{مجاز}$ مقطع U

اگر جواب ندهد در اثر برش می‌شکند

در کنترل تیر برشی و خمشی - کنترل تنش قائم ✓ $\sigma_{max} = \frac{M_{max} \cdot c}{I} \leq \sigma_{مجاز}$ مقطع ع

باید کنترل برشی و خمشی

خیز مجاز ≥ خیز ایجاد شده کنترل خیز $\Rightarrow \frac{5qL^4}{384EI} \leq$ خیز مجاز ✓

خیز مجاز را به صورت $\frac{L}{عدد}$ می‌دهند

اگر جواب ندهد به خاطر این که خیز زیاد شود، مصالح دیگر ساختمان مثل ... خیز از تیر ترک می‌خورند

دلیل ... سازه‌های ... (سازه‌های ...)

اگر در زیر سقف ... خیز داشته باشد از نگاه [illegible] مشکل دارد.

هر وقت خیز وجود داشت دلیل بر این است که تنش وجود دارد.

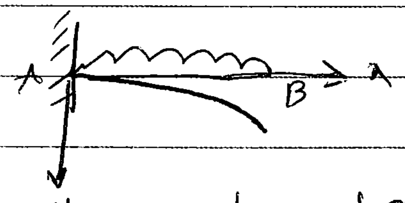
در تیرهای [illegible] کوتاه برش ملاک است (τ_{max} تعیین کننده است)

متوسط σ_{max} تعیین کننده است

طول بزرگ خیز تعیین کننده است (اگر [illegible] باشد)

نکته: اگر شرایط تکیه‌گاهی به صورت زیر باشد

معادله این تیر ... M ...



y شرایط مرزی $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$, $\begin{cases} x=0 \\ y'=0 \end{cases}$ $\Rightarrow C_1 = ?\ C_2 = ?$

صفرات در تکیه‌گاه

هر تکیه‌گاه مفصلی یک شرط مرزی دارد که $y=0$ است.

در هر تکیه‌گاه گیردار دو شرط مرزی دارد که $y=0$ و $y'=0$ است

تکیه‌گاه آزاد شرط مرزی ندارد.

(تا این جا سوال ... مفهومی است) ... [illegible]

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

از این جا به بعد کاربردی است. (برای حل مسئله های این مبحث جدول به ما می دهند)

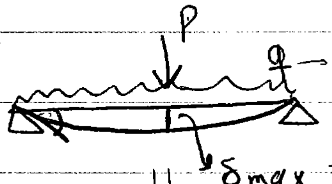
تغییر شکل

مبحث مهم

* تحلیل تیرهای نامعین : (جدول صفحه ۴۶۸ جانسون بوییت د)

مقدمه : مثال برای کاربرد جدول

مثال ۱ :

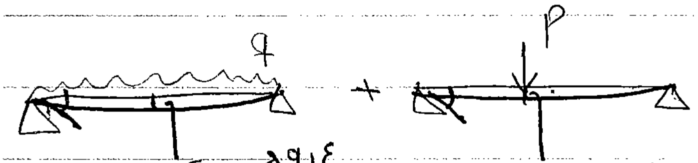


$\delta_{max} = \delta_1 + \delta_2$

خیز ماکزیمم

خیز ماکزیمم و شیب ماکزیمم ؟

کاربرد اصل برهم نهشی (جمع آثار قوا)

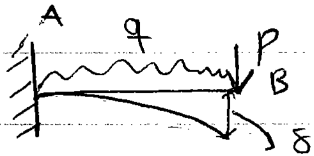


$\delta_1 = \frac{5qL^4}{384EI}$ $\delta_2 = \frac{PL^3}{48EI}$

از جدول بدست می آید   از جدول بدست می آید

تمام مشخصات تیر مجموع این دو تیر می شود. حتی تغییر شکل تیر الاستیک ($y=f(x)$) هم مجموع تغییر شکل این دو تیر است. یعنی دو معادله را با هم جمع می کنیم (خیز ماکزیمم (δ_{max}) هم از جمع δ_1 و δ_2 بدست می آید.

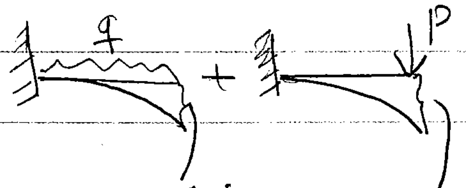
مثال ۲ تیر کنسول



$\delta_{max} = \delta_B = \delta_1 + \delta_2$

اگر بار متمرکز از پایین به تیر وارد شود و یا گسترده رو به بالا باشد.

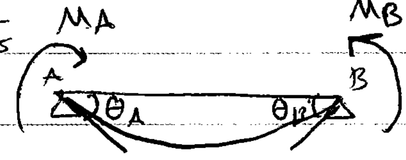
آن گاه $\delta_{max} = \delta_1 - \delta_2$ می شود.



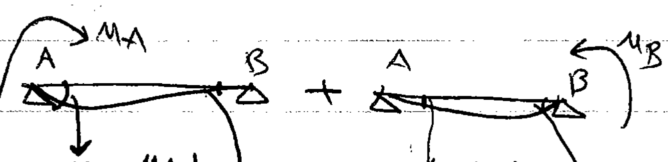
$\delta_1 = \frac{qL^4}{8EI}$ $\delta_2 = \frac{PL^3}{3EI}$

مثال ۳ :

گشتاور در طول MA و MB قرار گرفته



$=$



زاویه A $= \frac{M_A \cdot L}{3EI}$ زاویه A $= \frac{M_B \cdot L}{6EI}$

پس $\theta_A = \frac{M_A \cdot L}{3EI} + \frac{M_B \cdot L}{6EI}$

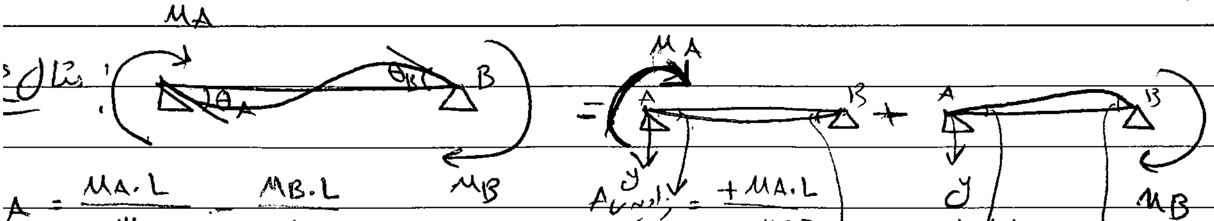
$\theta_B = \frac{M_A \cdot L}{6EI} + \frac{M_B \cdot L}{3EA}$

زاویه B $= \frac{M_A \cdot L}{\underset{2\times 3}{6EI}}$ زاویه B $= \frac{M_B \cdot L}{3EA}$

نصف زاویه A است

No...............

(دوم)



$$\theta_A = \frac{M_A \cdot L}{3EI} - \frac{M_B \cdot L}{6EI}$$

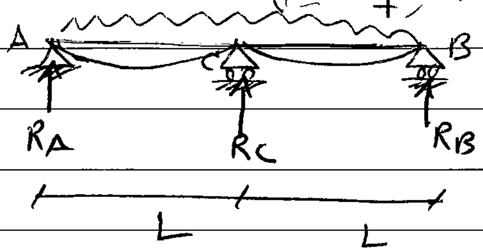
زاویه $A = \frac{+M_A \cdot L}{3EI}$ زاویه $A = \frac{-M_B \cdot L}{6EI}$ در این حالت می‌رسیم

$$\theta_B = \frac{-M_A \cdot L}{6EI} + \frac{ML}{3EI}$$

زاویه $B = \frac{-M_A \cdot L}{6EI}$ زاویه $B : \frac{ML}{3EI}$

تیر نامعین: (عامل هندسی زاویه بعنوان بار حذف می‌کنیم و سوپرپوزیشن می‌کنیم)

حالت اول



دو معادله تعادل داریم $\Sigma F_y = 0$ ، $\Sigma M = 0$ است

در اینجا ΣM هم است به معادلات تعادل دو نیاز داریم

با توجه به شکل آخر صفحه

معادله سازگاری تغییر شکل: $\delta_C = (\delta_C)_1 + (\delta_C)_2 = 0 \Rightarrow \frac{5q(2L)^4}{384EI} + \left(-\frac{R_C(2L)^3}{48EI}\right) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{R_C = \frac{5}{4} qL}$$

در این فصل اول به سراغ معادلات تعادل نمی‌رویم چون ما اینجا سازگاری داریم به معادله یک مجهول است پس اول معادلات سازگاری را حل می‌کنیم و بعد به سراغ معادلات تعادل می‌رویم.

معادلات تعادل:

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow \boxed{R_A + R_B + R_C = 2qL}$

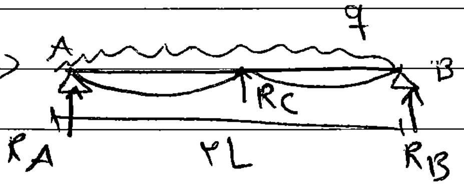
$\Sigma M_C = 0 \Rightarrow \boxed{R_A = R_B} = \frac{3}{8} qL$

۲ معادله و ۳ مجهول پس نامعین است

وقتی R_C برابر $\frac{5}{4} qL$ است پس $\frac{3}{4}$ باقی می‌ماند که بین R_A و R_B تقسیم می‌شود $(2qL - \frac{5}{4} qL = \frac{3}{4} qL)$ و به هر کدام $\frac{3}{8} qL$

در این شکل اگر ۲ تا تکیه‌گاه داشت حالت معین بود (استاتیکی)

اگر تکیه‌گاه C نبود $\Rightarrow$

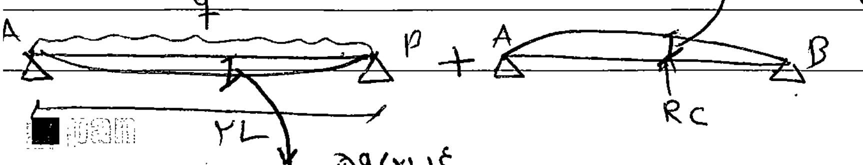


ولی برای اینکه این شکل با شکل اصلی برابر باشد باید R_C را به عنوان یک بار خارجی در نظر بگیریم به عنوان عکس‌العمل

حال این شکل را سوپرپوزیشن می‌کنیم

||

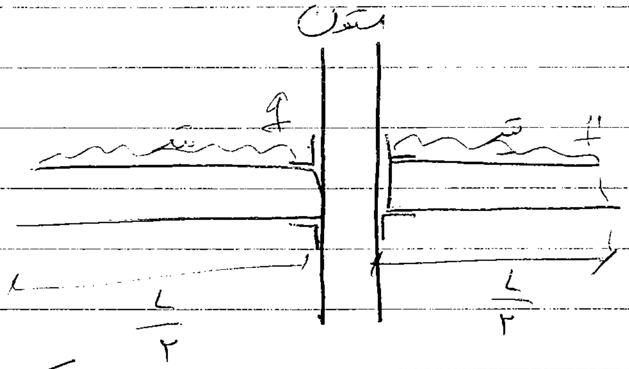
$$(\delta_C)_2 = \frac{-R_C(2L)^3}{48EI}$$



$$(\delta_C)_1 = \frac{5q(2L)^4}{384EI}$$

سوم بزرگی: تیرها ... با بار گسترده

نتیجه: عکس العمل تکیه‌گاه وسط دو برابر تکیه‌گاه‌های کناری نشد بلکه از آن‌ها بیشتر شده است



در این جا تیر قطع شده،

که ستون qL و تیرهای کناری

$\frac{qL}{2}$ بار می‌گیرد (نصف qL)

اما در شکل صفحه‌ی قبل تیر قطع نشده و به صورت سراسری است که R_C که

همان نیروی ستون را نشان می‌دهد $\frac{5}{4}$ بار می‌گیرد (نسبت qL) و دو برابر کناری‌ها نیست

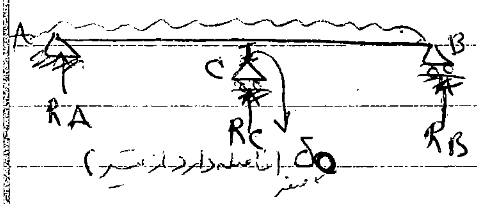
در این جا چه مسئله مطرح می‌شود؛

عکس العمل‌ها = ?

حالت دوم:

معادلات تعادل آن مثل حالت اول است

اما: δ_0 صفر نیست



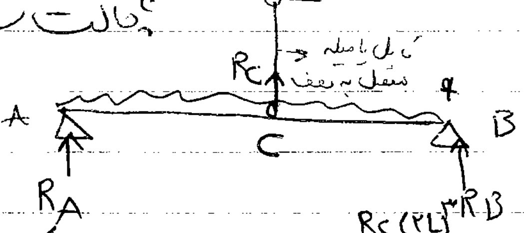
معادله‌ی سازگاری:

$$\delta_C = \delta_1 + \delta_2 = \delta_0$$

$\boxed{R_C = \text{محاسبه می‌شود مثل حالت اول}}$

حالت سوم:

کابل فقط کشیده می‌شود.



$\frac{R_C(2L)^3}{48EI}$

سازگاری:

$$\delta_C = \delta_1 + \delta_2 = \frac{R_C \cdot L}{EA} = \frac{R_C}{\frac{EA}{L}}$$

$\frac{5q(2L)^4}{384EI}$ با تیر

$\frac{PL}{EA}$ → در کابل

کابل A کابل

همان k در فنر است

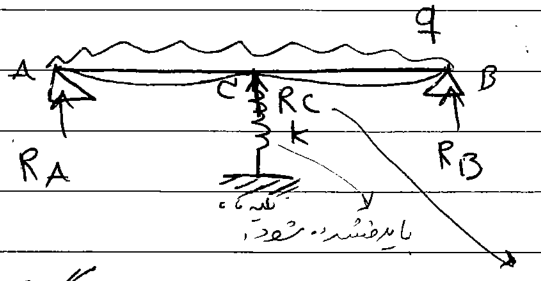
No...............

در این با معادله سازگاری با فنرات باید

R تکیه‌گاه باعث فنر می‌شود که باعث دوران و ... می‌شود.

فنر به سقف ... حالت‌ها ...

متصل شود یا فنر به زمین وصل ...

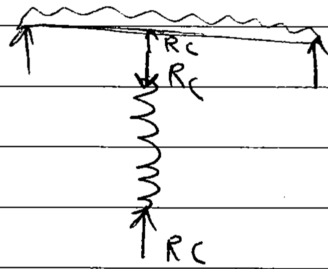


تغییر طول فنر

$$F = k.\Delta x \Rightarrow \Delta x = \frac{F}{k}$$

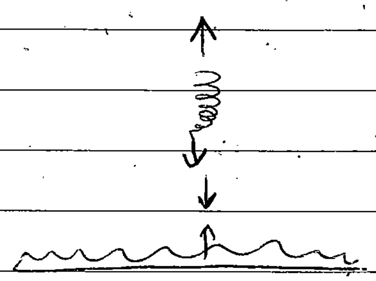
سازگاری:

$$\delta_C = \delta_1 + \delta_2 = \frac{R_C}{k} \rightarrow$$ نیرویی که از فنر به تیر وارد می‌شود.



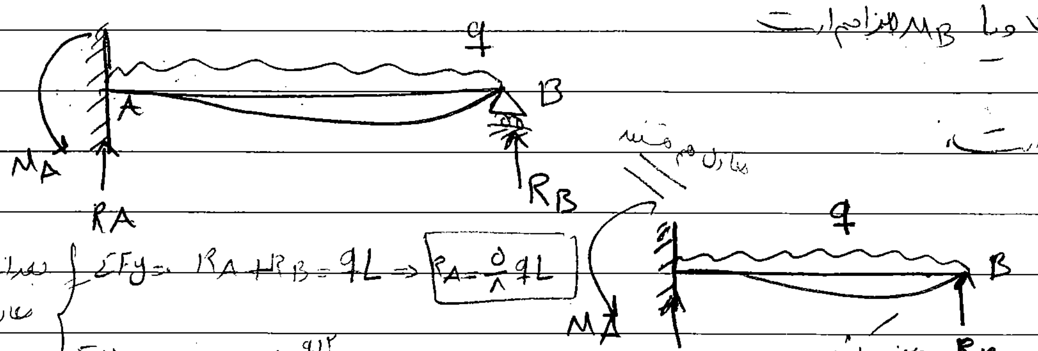
دیاگرام فنر:

اگر فنر بالا باشد.



یا R_B اضافه است و یا M_B الزامی است

حالت اول: R_B الزامی است.



تعداد معادله

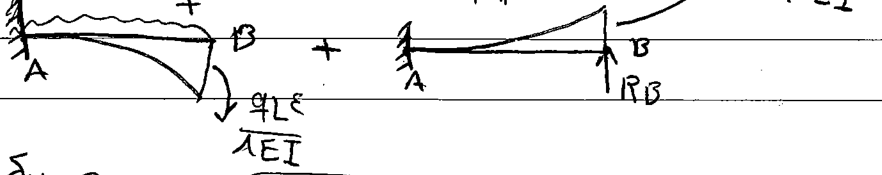
$$\begin{cases} \Sigma F_y = R_A + R_B = qL \Rightarrow \boxed{R_A = \frac{5}{8}qL} \\ \Sigma M_A = 0 \Rightarrow M_A + R_B.L = \frac{qL^2}{2} \end{cases}$$

$$\boxed{M_A = \frac{qL^2}{8}}$$

$$qL - \frac{3}{8}ql = \frac{5}{8}ql = R_A$$

فرض می‌کنیم $= R_B = \frac{3}{8}qL$

R_B تکیه‌گاه نیست و باید حذف شود.

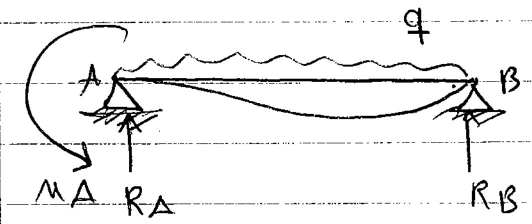


معادله سازگاری

$$;\ \delta_B = \delta_1 + \delta_2 = 0 \Longrightarrow \boxed{R_B = \frac{3}{8}qL}$$

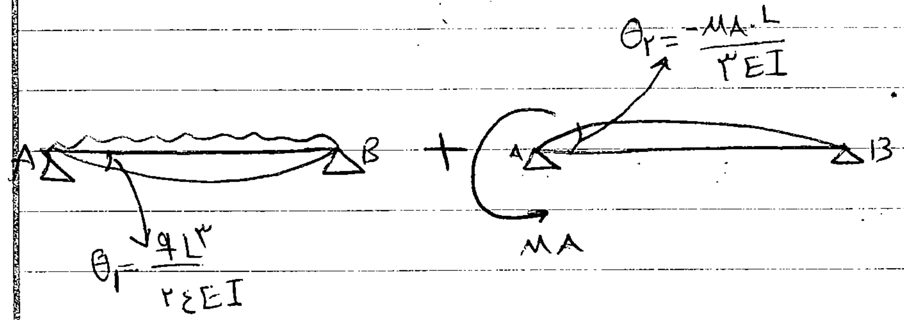
طبق شکل ضمن B صفر است

حالت دوم = M_A مزاحم است:



اگر ما M_A را صفر کنیم یعنی تکیه‌گاه
گیردار A هم مفصلی شود
(یعنی M_A را از حالت تکیه‌گاه (علی‌الحال)
خارج می‌کنیم)

$$=$$



معادله‌ی سازگاری اینست:

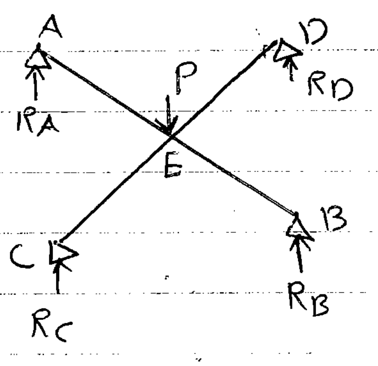
چون عامل مزاحم M_A بود
پس معادله سازگاری
باید بنویسیم

$$\theta_A = \theta_1 + \theta_2 = 0 \implies \boxed{M_A = \frac{qL^2}{8}}$$

معادلات تعادل:

$$\begin{cases} \Sigma M_A = 0 \implies \frac{qL^2}{8} + R_B \cdot L = \frac{qL^2}{2} \implies \boxed{R_B = \frac{3}{8} qL} \\ \Sigma F_y = 0 \implies R_A + R_B = qL \implies \boxed{R_A = \frac{5}{8} qL} \end{cases}$$

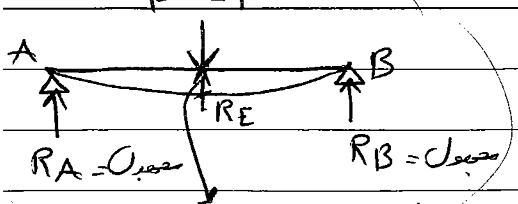
چند مسأله:



مثال ۱: (امتحانی)

(وسط تیر AB روی وسط تیر CD تکیه کرده)
تیر AB از روی تیر CD عبور کرده
و با آن تماس دارد
بار P مستقیم روی AB است
و CD به طور غیرمستقیم بار P را تحمل می‌کند
فرض کنیم مشخصات AB ، 1 باشد
و مشخصات CD ، 2 باشد
برای تعیین تعداد معادلات تعادل تیرها را
از هم جدا می‌کنیم (در صفحه بعد)

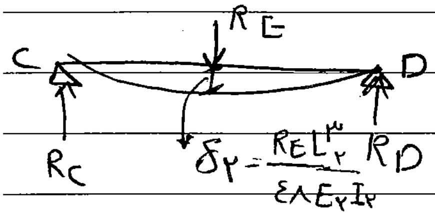
No. ($P - R_E$ ، E) دراصل باید سوپرپوزیشن کنیم (اما در این جا نه شود در)



$$\delta_1 = \frac{(P-R_E)L_1^3}{48E_1I_1}$$

تیر پایینی برای تیر بالایی به منزله تکیه‌گاه است

اما تیر بالایی به منزله قرار گرفتن بار روی تیر پایینی است



$$\delta_2 = \frac{R_E L_2^3}{48E_2I_2}$$

پس در کل ۵ تا مجهول داریم و برای هر تیر دو معادله تعادل داریم: ۲ تا در هر تیر

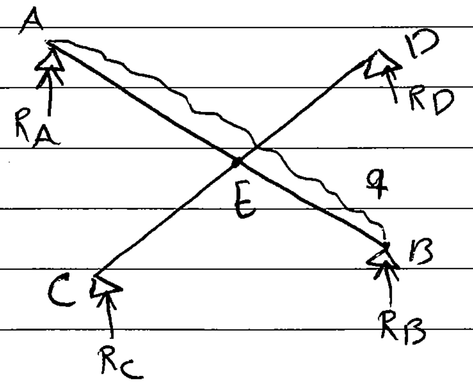
۴ معادله، ۵ مجهول

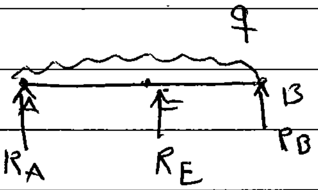
در نقطه E باهم برابرند ⟸ خیز CD = خیز AB

معادله سازگاری: $\delta_1 = \delta_2 \Longrightarrow R_E$ = بدست می‌آید

نکته: اگر یک تیر بدون بار به ما دادند باید وزن تیر را آن را به صورت ... تیر در نقطه برخورد هیچ وقت در مقاومت ... نیرو را با وارد کردن بار در نقطه آن معادل نمی‌کنیم

مثال ۱: با تقسیم:

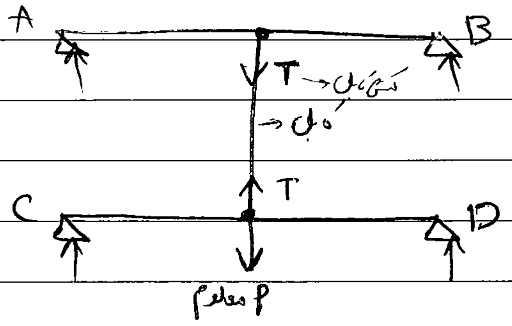




باید سوپرپوزیشن شود

اما باز هم $\delta_1 = \delta_2$ برابر است

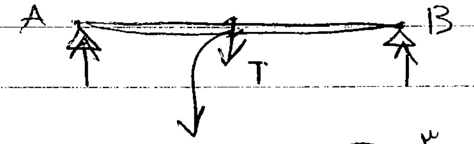
مثال ۲: نکته: نیروهایی که به کابل وارد می‌شود کششی است



و در انتها به تیر پایینی وصل کردیم.

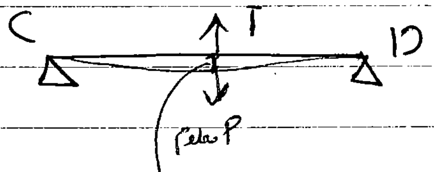
۵ مجهول

دیگر لازم آزاد شد



$$\delta_1 = \frac{TL_1^3}{48E_1I_1}$$

سازگاری : $\delta_2 - \delta_1 = \delta_{\text{کابل}}$

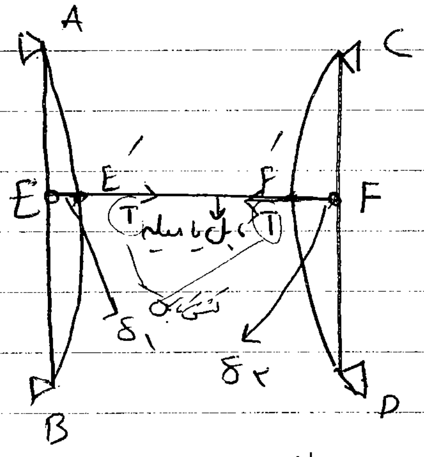


$$\frac{(P-T)L_2^3}{48E_2I_2} - \frac{TL_1^3}{48E_1I_1} = \frac{TL_3}{E_3A_3}$$

$$\delta_2 = \frac{(P-T)L_2^3}{48E_2I_2}$$

مثال ۳ :

کابل را سرد کنیم اندازه دو طرف تیر را حل کنید



با فرض طول دادیم است قدر مطلق

سازگاری : $|\delta_1| + |\delta_2| = |\delta_{\text{کابل}}|$

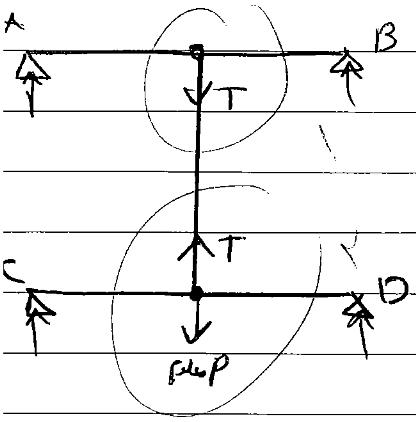
$$\frac{TL_1^3}{48E_1I_1} + \frac{TL_2^3}{48E_2I_2} = |\alpha \cdot L\Delta T| - \frac{TL}{EA} \Rightarrow \boxed{T = \text{بدست می‌آید}}$$

چون کابل را سرد کردیم

اگر کابل دو سرش با اسپرینگ آزاد بود فقط تغییر طول ناشی از دما بود اما چون دو سرش را ثابت بین تکیه گاهها بستیم پس تغییر طول ناشی از نیرو را هم باید بیاوریم

No...............

مثال:



$$\frac{TL_1^3}{48E_1I_1} + \frac{(T-P)L_2^3}{48E_2I_2} = |\alpha L \Delta T| - \frac{TL}{EA}$$

$$\overset{\text{فنر ۲}}{\delta_2} - \overset{\text{فنر ۱}}{\delta_1} = \delta_{\text{میله}}$$

$$\frac{(P-T)L_2^3}{48E_2I_2} - \frac{TL_1^3}{48E_1I_1} = \underbrace{\frac{TL}{EA} + \alpha L \underbrace{\Delta T}_{-40}}_{\text{میله}}$$

فنر ۱ و فنر ۲ ← [illegible]

No.