

فصل اول:

اصول ایستایی

الف) مکانیک: علمی را گویند که اجسام را در وضعیت‌های سکون و یا حرکت تحت تأثیر نیروهای وارده بررسی و تحلیل نماید.

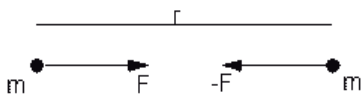
علم مکانیک به سه قسمت زیر تقسیم میشود:

1. مکانیک اجسام صلب (جامد):
الف) ایستایی (استاتیک): اجسام ساکن مورد بررسی قرار می‌گیرد.
ب) پویائی (دینامیک): اجسام متحرک مورد بررسی قرار می‌گیرد.
2. مکانیک اجسام تغییر شکل پذیر
3. مکانیک شاره ها (سیالات)

ب) مفاهیم پایه:

مفاهیم بنیادی که در مکانیک به کار برده می‌شوند عبارتند از:

1. فضا: مکان هندسی نقاطی است که در آن میدان سه بعدی برای نقاط به کار برده می‌شود.
2. زمان: علاوه بر مکان یک جسم وقوع یک جسم نیز مورد نظر است که واحد آن ثانیه است.
3. شبکه مرجع: موقعیت نقاط در فضا نسبت به یک دستگاه هندسی مرجع و با فواصل و زوایا مشخص می‌شود.
4. نیرو: تأثیر یک جسم روی یک جسم دیگر را نیرو گویند. نیرو با نقطه اثر بزرگی و جهت‌ها مشخص می‌شود.



ماده: ماده عبارت است از جرمی است که فضا گیر باشد. یک جسم ماده ای توسط یک سطح بسته ممصور شده است.

6. مانند (لغتی): فاصیتهی از ماده است که تمایل دارد در برابر تغییر در حرکت ایجاد مقاومت نماید.
7. جرم: معیاری کمی از ماده (یا لغتی) است. جرم همچنین فاصیتهی از هر جسم است که همواره با جاذبه متقابل آن جسم نسبت به اجسام دیگر همراه است.
8. جسم صلب: جرمی است که بین ذراتش هیچ جابجایی نسبی موجود نباشد.

ج) کمیت‌های عددی و برداری:

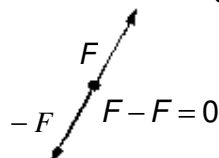
کمیت‌های که در استاتیک بکار می‌آید بر دو نوعند:

1. کمیت‌های عددی
 2. کمیت‌های برداری
- کمیت‌های عددی آنهایی هستند که فقط مقدار دارند. مانند: زمان، جرم و.....
- کمیت‌های برداری علاوه بر مقدار دارای امتداد نیز می‌باشند. مانند: نیرو
- قانون متوازی الاضلاع برای جمع بردارها:

همانطوری که گفته شده در صورتی که به یک ذره دونیرو تاثیر کند تا تویه به اینکه نیروها بردار باشند می بایستی از قانون جمع متوازی الاضلاع برداری یک نیرو به نام برآیند قرار داد که از رسم قطر متوازی الاضلاع بدست می آید که در بخشهای بعد به تفصیل ذکر خواهد شد.

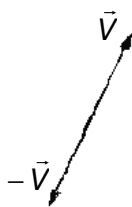
اصل قابلیت انتقال:

اگر نیرویی دارد بر نقطه معمولی از یک جسم صلب را بوسیله نیروی دیگری که اولی از لحاظ مقدار و جهت برابر ولی نقطه اثر آن متفاوت است جایگزین کنیم وضعیت تعادل یا حرکت جسم تغییر نمی کند.



نمونه نمایش یک کمیت برداری:

یک کمیت برداری v توسط یک پاره خط که دارای راستای بردار بوده و بوسیله یک علامت پیکان جهت آن مشخص می شود نشان داده می شود.



$$\vec{V} \text{ بردار } \underline{V} = V$$

$$|\underline{V}| = V \text{ اندازه}$$

د) قوانین نیوتن:

1. **قانون اول:** هرگاه برآیند نیروهای وارد بر یک ذره صفر شود ذره اگر در حال سکون باشد ساکن می ماند و اگر در حال حرکت باشد به حرکت خود ادامه می دهد.

2. **قانون دوم:** شتاب یک ذره متناسب با برآیند نیروهای است که به آن وارد می گردند.

$$F = ma$$

F : برآیند نیروها m : جرم ذره a : شتاب ذره

3. **قانون سوم:**

نیروهای عمل و عکس العمل میان دو جسم از نظر مقدار برابرند و در خلاف جهت یکدیگر عمل می نمایند و در روی یک راستا واقع می باشد.

طبق قانون گرانش نیوتن که می گوید دو ذره به جرم های M و M یکدیگر را با نیروهای مساوی و مختلف جهت (F) و $(-F)$ جذب می کنند بزرگی این نیرو (F) از فرمول زیر بدست می آید که در آن R فاصله بین دو ذره و G ثابت عمومی که ثابت گرانش است.

$$F = G \cdot \frac{MM}{R^2}$$

نتیجتاً مقدار (W) وزن یک ذره به جرم M را می شود به صورت زیر بیان کرد:
 $W = M \cdot G$ $G = 9.81 \text{ M/S}^2$

سیستم های یکاها:

سیستم بین المللی یکاها(یکاهای SI)

در طی سالهای اخیر تقریباً کلیه کشورهای جهان سیستم بین المللی آحادیابه (زبان فرانسه SYSTÈME INTERNATIONAL D'UNITÉS) که مخفف آن SI می باشد را برای تمامی کارهای مهندسی و علوم انتخاب کردند. در این سیستم یکاهای اصلی، یکاهای طول، جرم و زمان هستند که آنها را به ترتیب متر (M) و کیلوگرم (KG) و ثانیه (S) می نامند. یکای نیرو در این سیستم یک یکای فرعی است که به آن نیوتن (N) می گویند و بنا به تعریف یک نیوتن نیرویی است که به جرم یک کیلوگرمی شتابی برابر با 1 M/S^2 بدهد.

$$1\text{N} = (1\text{KG})(1\text{M/S}^2) = 1\text{KG.M/S}^2$$

پیشوندها و امدها:

مضرب (مقدار)	پیشوند	نماد
$10^9 = 1000000000$	کیگا	G
$10^6 = 1000000$	مگا	M
$10^3 = 1000$	کیلو	K
$10^{-3} = 0.001$	میلی	m
$10^{-6} = 0.000001$	میکرو	μ
$10^{-9} = 0.000000001$	نانو	N

$$1\text{KM} = 1000\text{M} \quad 1\text{MM} = 0.001\text{M} \quad 1\text{MG} = 1000\text{KG}$$

$$1\text{G} = 0.001\text{KG} \quad 1\text{KN} = 1000\text{N}$$

$$3.82 \text{ km} = 3820 \text{ m} \quad 47.2 \text{ mm} = 0.0472 \text{ m} \quad 3.82 \text{ kn} =$$

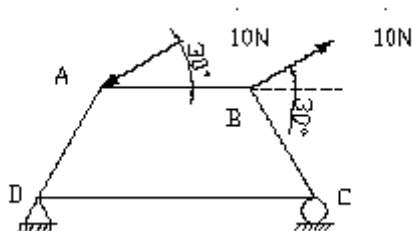
$$3.82 * 10^3 \text{ mm} \quad 47.2 \text{ mm} = 47.2 * 10^{-3} \text{ mm}$$

فصل دوم:

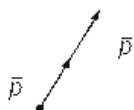
استاتیک ذره ها:

نیروهای واقع در صفحه:

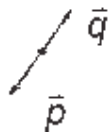
نیرونماینده کنش یک جسم بر روی یک جسم دیگر است و به طور کلی بانقطه اثر، بزرگی اوراستایش مشخص می شود.



جمع بردارها:

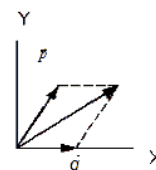
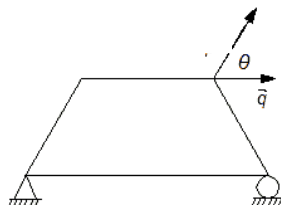


$$\vec{R} = \vec{p} + \vec{q}$$

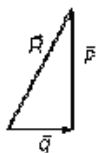


$$\vec{R} = \vec{p} - \vec{p} = 0$$

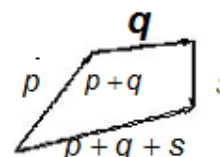
قانون متوازی الاضلاع:



بردار برآیند (برسم بردارها) $\vec{R} = \vec{p} + \vec{q}$ به شیوه سربه دم و بعد اتصال دم بردار P به سر بردار Q بدست می آید.



مالا جمع بیش از سه بردار (در نظریه) گیریم.



$$p + q + s = (p + q) + s = p + (q + s)$$

فاصیت شرکت پذیری بردارها:

باتوجه به جمع بردارهای صفحه قبل نتیجه می گیریم:

1. جمع بردارها دارای فاصیت جابجایی است.

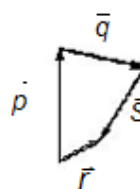
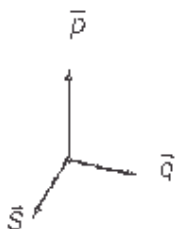
2. جمع بردارها دارای فاصیت شرکت پذیری است.

ضرب اسکالردریک بردار:

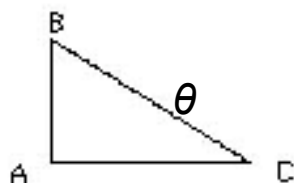
$$p + p = 2p \Rightarrow p_1 + p_2 + \dots + p_n = np$$

$$p_1 = p_2 = \dots = p_n$$

برآیند چندنیروی هم راس:



تجزیه یک نیرو به مولفه های آن:

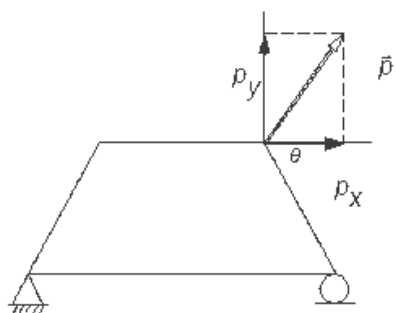


$$\cos \theta = \frac{AC}{BC}$$

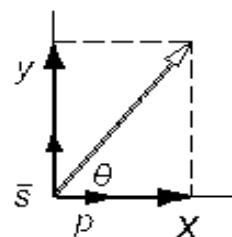
$$\sin \theta = \frac{AB}{BC}$$

$$\tan \theta = \frac{AB}{AC}$$

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2}$$



$$p_y = p \sin \theta$$



در امتداد محور x و y های مثبت دو بردار واحد افتخاری کنیم به این بردارها برداری که می گویند و آنها را به ترتیب بر روی محورهای x و y با نوز نشان می دهند. باتوجه به ضرب یک اسکالردری بردار خواهیم داشت مولفه های قائم P_x , P_y یک

نیروی p رami شود از طریق ضرب بردارهای نوز در اسکالرهایی مناسب بدست آورد.

$$P_x = P_x \cdot i, P_y = P_y \cdot j, P = P_x \cdot i + P_y \cdot j$$

$$P_x = p \cos \theta, P_y = p \sin \theta$$

قانون متوازی الاضلاع:



$$\vec{p} = p_x \cdot i + p_y \cdot j$$

$$\vec{q} = q_x \cdot i + q_y \cdot j \Rightarrow \vec{R} + \vec{q} = (p_x \cdot i + p_y \cdot j) + (q_x \cdot i + q_y \cdot j)$$

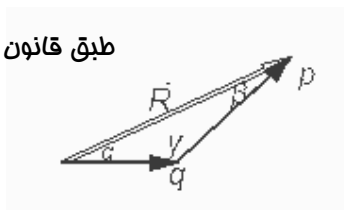
$$r_x = \sum f_x, r_y = \sum f_y \quad \vec{R} = (p_x + q_x)i + (p_y + q_y)j$$

یا با استفاده از مثلثاتی خواهیم داشت:

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \theta$$

طبق قانون سینوسها:

$$\frac{R}{\sin \gamma} = \frac{P}{\sin \alpha} = \frac{Q}{\sin \beta}$$

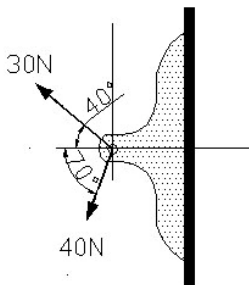


مثال 1:

مطلوبست برآیند دو نیروی 40N, 30N و (در شکل زیر) (با استفاده از: الف) قانون متوازی الاضلاع (ب) قانون مثلث

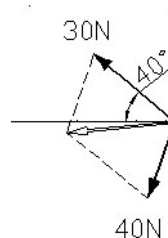
(د) جمع برداری

(الف)



$$R^2 = 30^2 + 40^2 + 2 \times 30 \times 40 \cos 110$$

$$R = 41N$$



(د)

$$\vec{p} = -30 \cos 40i + 30 \sin 40j = -22.98i + 19.28j$$

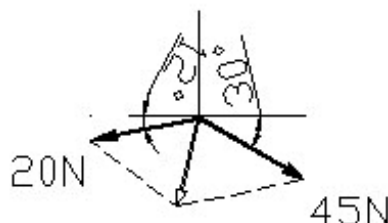
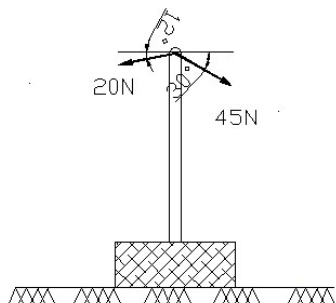
$$\vec{Q} = -40 \cos 70i - 40 \sin 70j = -13.68i - 37.59j$$

$$\vec{R} = \vec{p} + \vec{q} = (-22.98 - 13.68)i + (19.28 - 37.59)j$$

$$\vec{R} = -36.66i + 18.31j, r = \sqrt{36.66^2 + 18.31^2} \approx 41N$$

مثال 2:

دکل AB توسط دونیروی منظور شده در نقطه A تحت فشار می باشد. مطلوب است تعیین برآیند و جهت آن ناشی از این دونیرو در نقطه A را.



$$R_x = \sum F_x = 45 \cos 30^\circ i - 20 \cos 12^\circ i = 38.97i - 19.56i = 19.41i$$

$$R_y = \sum F_y = -45 \sin 30^\circ j - 20 \sin 12^\circ j = -22.5j - 4.16j = -26.66j$$

$$R = \sqrt{9.4^2 + 26.66^2} = 32.97$$

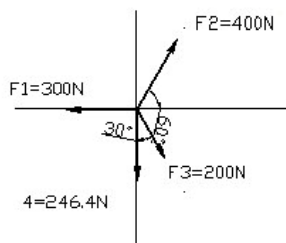
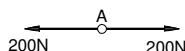
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{19.4}{26.66}\right) = 36.04^\circ$$

روش دوم:

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \theta = 20^2 + 45^2 + 2 \times 20 \times 45 \times \cos 138^\circ = 32.97$$

تعداد یک ذره:

طبق قانون نیوتون در حالتی که تاثیر نیروها صفر است می گویند ذره در حال تعادل است پس می توان گفت وقتی برآیند نیروهای وارد بر یک ذره صفر باشد ذره در حال تعادل است.



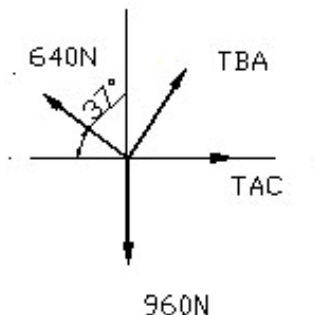
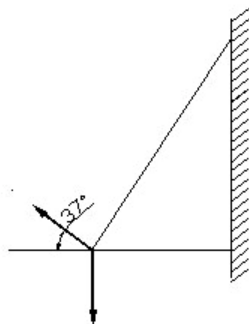
$$R = \sum F = 0 \Rightarrow R = \sum (F_x \cdot i + F_y \cdot j) = 0 \quad (\sum F_x) i + (\sum F_y) j = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -246.4 + 400 \sin 60^\circ - 200 \cos 30^\circ = 0 \Rightarrow -246.4 + 346.41 - 173.2 = 0$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -300 + 400 \cos 60^\circ + 200 \sin 30^\circ = 0 \Rightarrow -300 + 200 + 100 = 0$$

مثال 3:

در شکل زیر کشش در کابلهای AB و AC را بدست آورید.



$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{960}{280}\right) = 73.74$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow (T_{AB} \sin 73.74) - 960 + 640 \sin 37 = 0 \Rightarrow 0.96 T_{AB} - 960 + 385.16 = 0$$

$$T_{AB} = \frac{574.84}{0.96} = 598.79 \text{ N}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow T_{AC} + 598.79 \cos 73.74^\circ - 640 \cos 37^\circ = 0 \Rightarrow T_{AC} = 343.74 \text{ N}$$

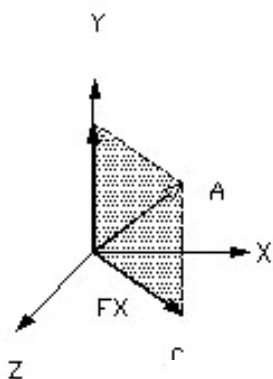
نیروها در فضا:

$$F_x = F \sin \theta_y$$

مولفه عمودی

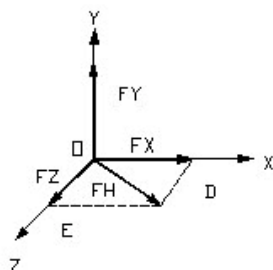
$$F_y = F \cos \theta_y$$

مولفه افقی



θ_y = زاویه نیروی F با محور y

α = زاویه صفحه قائم ABC با صفحه xy



$$F_x = F_h \cos \theta = F \sin \theta_y \cos \theta$$

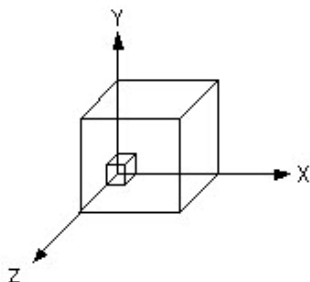
$$F_z = F_h \sin \theta = F \sin \theta_y \sin \theta$$

طبق قانون فیثاغورث:

$$F^2 = (OA)^2 = (OC)^2 + (OB)^2 = F_h^2 + F_y^2$$

$$F_h^2 = (OC)^2 = (OD)^2 + (OE)^2 = F_x^2 + F_z^2$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$



$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z \quad (1)$$

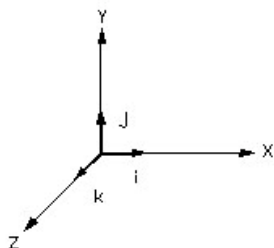
$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

$$F_x = F \cos \theta_x$$

$$F_y = F \cos \theta_y \quad (2)$$

$$F_z = F \cos \theta_z$$

نیروی F را می توان با تعریف بردار یکه های اوزون که به ترتیب در امتداد محورهای x و y و z قرار دارند به صورت زیر بیان کرد.



$$F = F_x \cdot i + F_y \cdot j + F_z \cdot k \quad (3)$$

$$2 \quad (4)$$

$$\Rightarrow F = F(\cos \theta_x \cdot i + \cos \theta_y \cdot j + \cos \theta_z \cdot k)$$

نتیجتاً می توان نیروی F را به صورت ضرب اسکالر F و بردار

$$\lambda = \cos \theta_x \cdot i + \cos \theta_y \cdot j + \cos \theta_z \cdot k \quad (5)$$

بیان کرد که به λ مولفه یکه بردار F گویند.

$$(6)$$

$$\lambda_x = \cos \theta_x$$

$$\lambda_y = \cos \theta_y$$

$$\lambda_z = \cos \theta_z$$

مجموع مربعات مولفه های یک بردار برابر با مربع بزرگی آن است.

$$\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 = 1 \quad (7)$$

$$\Rightarrow \cos^2 \theta_x + \cos^2 \theta_y + \cos^2 \theta_z = 1$$

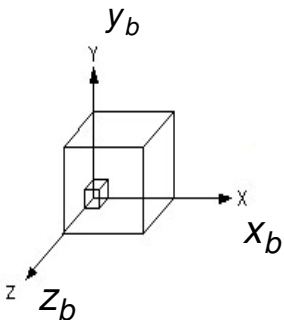
$$\vec{F} = F \cdot \lambda$$

$$\Rightarrow F = \frac{F_x}{\cos \theta_x} = \frac{F_y}{\cos \theta_y} = \frac{F_z}{\cos \theta_z}$$

پیدا کردن بردار واحد امتدادی که از دو نقطه می گذرد.

$$\vec{r}_{B/A} = \overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

$$\lambda_F = \frac{\vec{F}}{|F|}$$



9

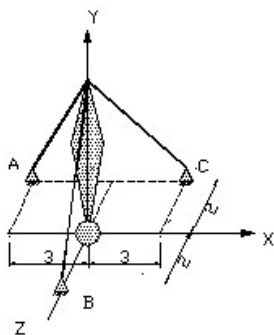
$$\vec{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}$$

مثال 4:

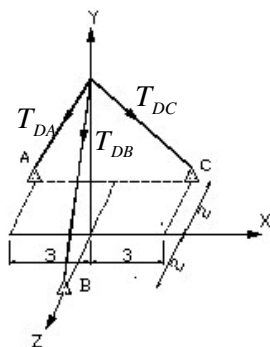
دکل مفابراتی نشان داده شده در شکل زیر به جرم

120kg بوسيله سه كابل مهارى به زمين متصل شده است مطلوب است محاسبه نيروهاى كشيلى در كابلهاى

مذكور را.



-3	0	3	0
A 0	B 0	C 0	D 6
-2	2	-2	0



ديگرام آزاد جسم

$$W = m.g = 120 \times 10 = 1200 N$$

$$\overrightarrow{AD} = (x_D - x_A)\vec{i} + (y_D - y_A)\vec{j} + (z_D - z_A)\vec{k}$$

$$\overrightarrow{AD} = 3\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{3^2 + 6^2 + 2^2} = \sqrt{49} = 7$$

$$\vec{\lambda}_{AD} = \frac{\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AD}|} = \frac{3}{7}\vec{i} + \frac{6}{7}\vec{j} + \frac{2}{7}\vec{k}$$

$$\overrightarrow{BD} = 4\vec{j} - 2\vec{k}$$

$$|\overrightarrow{BD}| = \sqrt{40}$$

$$\vec{\lambda}_{BD} = \frac{\overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{BD}|} = \frac{6}{\sqrt{40}}\vec{j} - \frac{2}{\sqrt{40}}\vec{k}$$

$$\overrightarrow{CD} = -3\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$|\overrightarrow{CD}| = 7$$

$$\vec{\lambda}_{CD} = -\frac{3}{7}\vec{i} + \frac{6}{7}\vec{j} + \frac{2}{7}\vec{k}$$

$$\vec{F}_{AD} = F_{AD} \cdot \vec{\lambda}_{AD} = F_{AD} \left(\frac{3}{7}\vec{i} + \frac{6}{7}\vec{j} + \frac{2}{7}\vec{k} \right)$$

$$\vec{F}_{CD} = F_{CD} \cdot \vec{\lambda}_{CD} = F_{CD} \left(-\frac{3}{7}\vec{i} + \frac{6}{7}\vec{j} + \frac{2}{7}\vec{k} \right)$$

$$\vec{F}_{BD} = F_{BD} \cdot \vec{\lambda}_{BD} = F_{BD} \left(\frac{6}{\sqrt{40}}\vec{j} - \frac{2}{\sqrt{40}}\vec{k} \right)$$

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow \quad \Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma F_z = 0$$

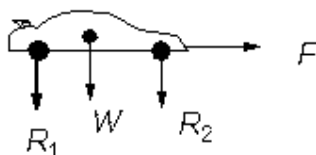
فصل سوم

اجسام صلب:

نیروهایی که به اجسام صلب وارد میشوند دو دسته اند:

الف) نیروهای خارجی: نماینده تاثیر سایر اجسام بر روی جسم صلب هستند و این نیروها (فشار خارجی جسم صلب را) توجیه میکنند.

ب) نیروهای داخلی: نیروهایی هستند که ذرات تشکیل دهنده جسم صلب را در کنار هم نگه می دارند.



ضرب بردارها:

الف) ضرب برداری دو بردار و ضرب خارجی

فواصل حاصلضرب برداری دو بردار P و Q که یک بردار U است به قرار زیر است:

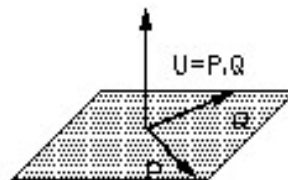
1) بردار حاصلضرب U بر صفحه P و Q عمود می باشد که جهت آن با استفاده از قانون دست راست بدست می آید بدین صورت که چهار انگشت در امتداد بردار اول (بردار P) و جهت بسته شدن انگشتان در جهت بردار دیگر بردار (Q) می باشد جهت انگشت شصت جهت بردار U می باشد

مقدار حاصلضرب برابر است با مقادیر عددی P و Q در سینوس زاویه بین آن دو

$$U = PQ \sin \theta$$

$$U = 0 \leftarrow P = Q$$

P و Q موازی یا در راستای هم



1) قانون جابجایی در مورد ضرب خارجی صادق نیست

$$Q \times P = -(P \times Q)$$

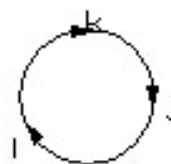
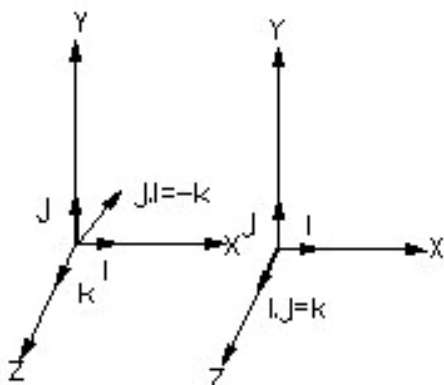
زاویه بین P و Q در جهت مثلثاتی باید باشد

$$Q = Q \times P \quad \text{بر روی } P \text{ بیافتد} \quad , \quad P = P \times Q \quad \text{بر روی } Q \text{ بیافتد}$$

(2) خاصیت توزیع پذیری در مورد ضرب خارجی صادق است

$$P \times (Q_1 + Q_2) = P \times Q_1 + P \times Q_2$$

ماضضرب برداری بر حسب مولفه های قائم



$$\vec{A} \times \vec{A} = 0$$

$$i \times i = 0 \quad i \times j = k \quad i \times k = -j$$

$$j \times i = -k \quad j \times j = 0 \quad j \times k = i$$

$$k \times i = j \quad k \times j = -i \quad k \times k = 0$$

$$\vec{P} = (P_x i + P_y j + P_z k), \vec{Q} = (Q_x i + Q_y j + Q_z k)$$

$$\vec{P} \times \vec{Q} = (P_x i + P_y j + P_z k) \times (Q_x i + Q_y j + Q_z k)$$

$$= P_x (Q_x i \cdot i + Q_y i \cdot j + Q_z i \cdot k) = P_x Q_y k - P_x Q_z j$$

$$= P_y (Q_x j \cdot i + Q_y j \cdot j + Q_z j \cdot k) = -P_y Q_x k + Q_y Q_z i$$

$$= P_z (Q_x k \cdot i + Q_y k \cdot j + Q_z k \cdot k) = P_z Q_x j + P_z Q_y i$$

$$\vec{P} \times \vec{Q} = (P_y Q_z - P_z Q_y) i - (P_x Q_z - P_z Q_x) j + (P_x Q_y - P_y Q_x) k$$

اگر به رابطه قبل نگاه کنیم می بینیم که جمله های طرف راست آن نماینده بسط یک دترمینان هست پس حاصلضرب (u) را می توانیم به صورت زیر بیان کنیم که رامت تر به فاطر سپرده شود.

$$U = \begin{vmatrix} i & j & k \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} = (P_y Q_z - P_z Q_y)i - (P_x Q_z - P_z Q_x)j + (P_x Q_y - P_y Q_x)k$$

ضرب عددی دو بردار و ضرب داخلی:

مقصود از ضرب عددی بردار \vec{P} در بردار \vec{Q} که با هم زاویه θ سافته اند تعیین عددی است که مقدار آن برابر $U = \vec{P} \cdot \vec{Q}$ باشد.

$$U = P \cdot Q \cos \theta$$

وقتی گفته می شود بردار Q را روی P تصویر کنید یعنی ضرب داخلی

$$U = \vec{A} \cdot \vec{A} = A \cdot A \cos \theta = A^2$$

از تعریف ضرب داخلی دو بردار نتیجه می شود که بردارهای P و Q در صورتیکه حاصلضرب داخلی شان برابر با صفر گردد متعامد می باشند $P \cdot Q = 0 \Rightarrow P \perp Q$

به عنوان مثال کار دو بردار هستند که بر هم عمودند (dof)

$i \cdot i = 1$	$i \cdot j = 0$	$i \cdot k = 0$
$j \cdot i = 0$	$j \cdot j = 1$	$j \cdot k = 0$
$k \cdot i = 0$	$k \cdot j = 0$	$k \cdot k = 1$

حاصلضرب بردارهای یک یا صفر است یا یک

$$\vec{P} = P_x i + P_y j + P_z k \quad \vec{Q} = Q_x i + Q_y j + Q_z k$$

$$\begin{aligned} \vec{P} \cdot \vec{Q} &= (P_x i + P_y j + P_z k)(Q_x i + Q_y j + Q_z k) \\ &= (P_x Q_x i \cdot i + P_x Q_y i \cdot j + P_x Q_z i \cdot k) \\ &\quad + (P_y Q_x j \cdot i + P_y Q_y j \cdot j + P_y Q_z j \cdot k) \\ &\quad + (P_z Q_x k \cdot i + P_z Q_y k \cdot j + P_z Q_z k \cdot k) = P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z \end{aligned}$$

تعیین زاویه بین دو بردار:

$$\vec{P} \cdot \vec{Q} = PQ \cos \theta = P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z \Rightarrow \cos \theta = \frac{\vec{P} \cdot \vec{Q}}{PQ}$$

$$\frac{P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z}{PQ} = \frac{P_x}{PQ} \cdot \frac{Q_x}{PQ} + \frac{P_y}{PQ} \cdot \frac{Q_y}{PQ} + \dots = \cos \theta$$

$$\frac{P_x}{PQ} = L_1 \quad \frac{Q_x}{PQ} = L_2$$

$$\Rightarrow \cos \theta = L_1 L_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2$$

که در آن L_1, m_1, n_1 و L_2, m_2, n_2 کسینوس ها و ریبهای (شیب) بردارها هستند. همچنین مشاهده می گردد که هر دو بار در صورتی که کسینوس های آنها در رابطه زیر صدق کنند متعامد می باشند.

$$L_1 L_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$$

خواص ضرب داخلی بردارها:

(1) قانون جابجایی صادق است

(2) قانون توزیع پذیری صادق است

$$\vec{P} \cdot \vec{Q} = \vec{Q} \cdot \vec{P}$$

$$\vec{P} \cdot (\vec{Q} + \vec{R}) = \vec{P} \cdot \vec{Q} + \vec{P} \cdot \vec{R}$$

مثال:

دو بردار $\vec{A} = 10\vec{i} + 20\vec{j} + 3\vec{k}$ و $\vec{B} = -10\vec{j} + 12\vec{k}$ مفروضند.

الف) حاصلضرب داخلی دو بردار \vec{A} و \vec{B} را محاسبه نمائید.

ب) زاویه بین دو بردار

ج) تصویر بردار \vec{A} روی امتداد بردار \vec{B}

د) بردار تصویر \vec{A} روی امتداد بردار \vec{B}

$$U = \vec{A} \cdot \vec{B} = (10 + 20\vec{j} + 3\vec{k}) \cdot (-10\vec{j} + 12\vec{k}) = (10 \times 0) + (20)(-10) + (3)(12) = -164$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{10^2 + 20^2 + 3^2} = 22.56$$

$$|\vec{B}| = \sqrt{(-10)^2 + (12)^2} = 15.62$$

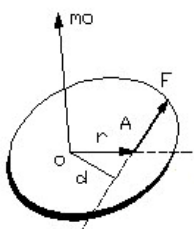
$$U = AB \cos \theta \Rightarrow -164 = 22.56 \times 15.62 \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{-164}{22.56 \times 15.62} \Rightarrow \theta = 117.7^\circ$$

$$\vec{C} = A \cos \alpha = 22.56 \cos 117.7 = -10.46$$

$$\lambda = \frac{\vec{B}}{B} = \frac{-10\vec{j} + 12\vec{k}}{15.62} \Rightarrow \vec{C} = Cn = -10.46 \left(\frac{-10\vec{j} + 12\vec{k}}{15.62} \right) = 6.7\vec{j} - 8\vec{k}$$

گشتاور یک نیرو حول نقطه:

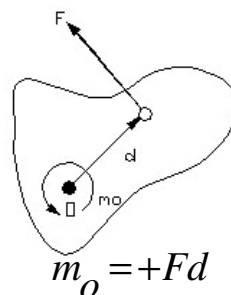
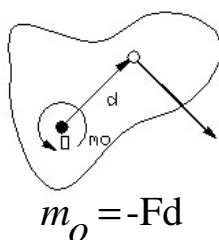
فرض کنیم نیروی F بر یک جسم صلب اثر کند این نیرو با بردار نشان داده میشود. مکان A را می شود با بردار r که نقطه ثابت مرجع (O) را به A متصل می کند مشخص کرد که به آن بردار مکان A گویند.



حال می خواهیم گشتاور نیروی F را حول O به صورت ضرب برداری F و r تعریف کنیم.

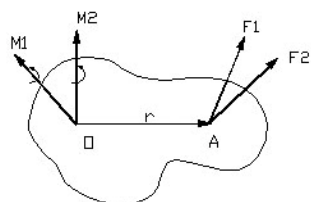
$$M_o = r \times F = rF \sin \theta = Fr \sin \theta = Fd$$

که d فاصله عمودی O تا خط اثر F می باشد. نیروی F علاوه بر آنکه در جسم تمایل به حرکت در امتداد خط اثر نیرو ایجاد می کند. این گرایش را گشتاور M نیرو حول محور داده شده نامند. در سیستم یکاهای (SI) نیرو بر مسب نیوتن و فاصله بر مسب متر (m) بیان می شود. گشتاور نیرو بر مسب نیوتن-متر ($N.M$) بیان می شود.



قضیه وارپنیون و یا اصل گشتاور:

برای نیرو هایی که در یک صفحه واقعند بدین صورت بیان می شود که گشتاور یک نیرو حول هر نقطه برابر حاصل جمع گشتاورهای مولفه های نیرو حول همان نقطه می باشد.

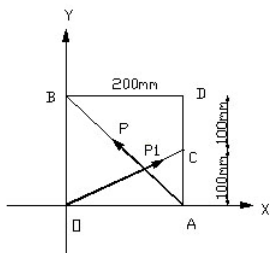


$$m_1 + m_2 = r \times F_1 + r \times F_2$$

$$m = r \times (F_1 + F_2)$$

مثال:

نیروی $P=10N$ در امتداد دو نقطه A و B مربعی به اضلاع $200mm$ اعمال شده است. مطلوبست مماس به مولفه P' از نیروی P در امتداد OC با جهت مثبت از O به طرف C



کسینوسهای بردار \vec{OC} :

$$O = \begin{cases} 0 \rightarrow x \\ 0 \rightarrow y \end{cases} \quad C = \begin{cases} 0.2 \\ 0.1 \end{cases}$$

$$OC = (0.2 - 0)i + (0.1 - 0)j$$

$$L = \frac{0.2}{\sqrt{0.04 + 0.01}} = \frac{0.2}{\sqrt{0.05}} = 0.894$$

$$m = \frac{0.1}{\sqrt{0.05}} = 0.447$$

9

$$n_{\vec{OC}} = 0.894i + 0.447j$$

کسینوسهای بردار \vec{AB} :

$$A = \begin{cases} 0.2 \\ 0 \end{cases} \quad B = \begin{cases} 0 \\ 0.2 \end{cases}$$

$$\vec{AB} = (0 - 0.2)i + (0.2 - 0)j$$

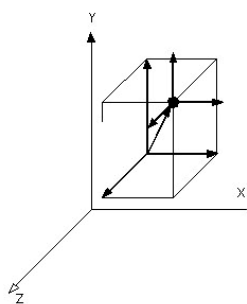
$$\alpha = \frac{-0.2}{\sqrt{0.04 + 0.04}} = \frac{-0.2}{\sqrt{0.08}} = -0.707$$

$$\beta = \frac{0.2}{\sqrt{0.08}} = 0.707$$

$$n_{\vec{AB}} = (-0.707i + 0.707j)$$

$$F_{\vec{AB}} = \vec{F} \cdot n_{\vec{AB}} = 10 \times (-0.707i + 0.707j) = -7.07i + 7.07j$$

$$F_{\vec{OC}} = F_{\vec{AB}} \cdot n_{\vec{OC}} = (-7.07i + 7.07j) \cdot (0.894i + 0.447j) \\ = (-7.07 \times 0.894 + 7.07 \times 0.447) = -3.16N$$



مولفه های قائم گشتاور در یک نیرو:

$$m_o = r \times F$$

اگر نقطه B بر مبدا منطبق باشد:

$$r = xi + yj + zk$$

$$F = F_x \cdot i + F_y \cdot j + F_z \cdot k$$

با جایگذاری در رابطه m داریم:

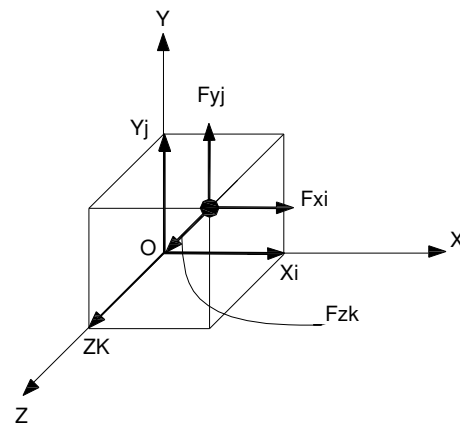
$$m_o = m_x \cdot i + m_y \cdot j + m_z \cdot k$$

$$m_x = yF_z - zF_y$$

$$m_y = zF_x - xF_z$$

$$m_z = xF_y - yF_x$$

$$m_B = r \frac{A}{B} \times F = (r_A - r_B) \times F$$



$$m_B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_{A/B} & y_{A/B} & z_{A/B} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$m_o = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

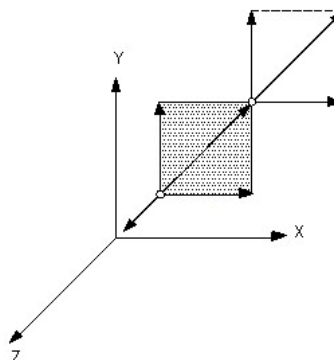
$$x_{A/B} = x_A - x_B$$

$$y_{A/B} = y_A - y_B$$

در مسائل دو بعدی $z, F_z = 0$

$$z_{A/B} = z_A - z_B$$

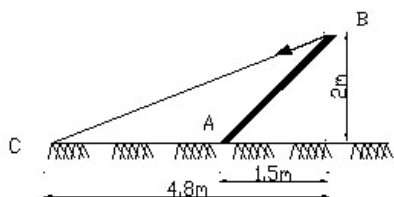
$$m_o = (xF_y - yF_x)k$$



مثبت بودن m_0 ماکه از آن است که بردار m_0 به طرف خارج از صفحه کتاب است (تمایل به پرفاندن جسم حول

در جهت با دساعتگرد دارد)

$$M_B = (x_A - x_B)F_y - (y_A - y_B)F_x$$

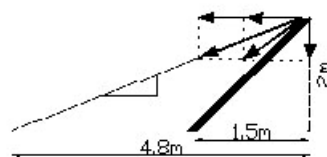


مثال:

مطلوبست گشتاور نیروی 260N حول نقطه A را

الف) بوسیله تجزیه نیروی مموری x و y وارد بر نقطه B

ب) بوسیله تجزیه نیروی ممورهای x و y در نقطه C



$$F_x = \frac{12}{13}(260) = 240N$$

$$F_y = \frac{5}{13}(260) = 100N$$

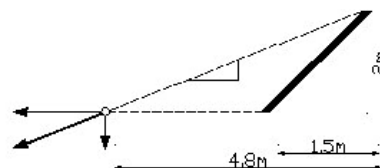
$$M_A = F_x \times 2 - F_y \times 1.5 = 240 \times 2 - 100 \times 1.5 = 330N.M$$

ابتدا نیروی 260N را در امتداد فضا اثرش امتداد داده تا نقطه C وارد شود.

$$F_x = \frac{12}{13}(260) = 240N$$

$$F_y = \frac{5}{13}(260) = 100N$$

$$M_A = F_y \times 3.3 + F_x \times 0 = 100 \times 3.3 = 330N.M$$



$$C \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad B \begin{vmatrix} 4.8 \\ 2 \end{vmatrix} \quad A \begin{vmatrix} 3.3 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$F_{BC} = F_{BC} - \lambda_{BC} = 260 \times \frac{48i + 20j}{\sqrt{48^2 + 20^2} = 52} = 240i + 100j$$

$$r_{A/B} = (4.8 - 3.3)i + 2j = 1.5i + 2j$$

$$m_A = F \times r = (240i + 100j)(1.5i + 2j) = 240 \times 2k - 100 \times 1.5k = 330N$$

ضرب سه گانه مختلط سه بردار:

ماصلضرب داخلی سه بردار:

ضرب سه گانه مختلط عبارت است از ماصلضرب داخلی دو بردار که یکی از آن دو توسط ماصلضرب خارجی دو بردار دیگر بیان شده باشد. این ماصلضرب که کمیتی عددی می باشد توسط هر یک از روابط معادل زیر قابل بیان است:

$$(P \times Q) \cdot R = R \cdot (P \times Q) = -R \cdot (Q \times P)$$

در مقیست رعایت برانتزها در عبارت فوق الذکر لازم نمی باشد چون نوشتن ماصلضرب صورت $P \times (Q \cdot R)$ بدون مفهوم است همچنین میتوان ثابت کرد که:

$$P \times Q \cdot R = P \cdot Q \times R$$

که قانون جایجائی نقطه و ضربدر را در ماصلضرب سه بردار بدون اینکه تغییری در نتیجه عددی ماصلضرب حاصل شود مشخص میکند. بعلاوه میتوان با استفاده از بسط دادن نشان داد که:

$$P \times Q \cdot R = \begin{vmatrix} P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \\ R_x & R_y & R_z \end{vmatrix}$$

ماصلضرب خارجی سه بردار:

عبارت است از ماصلضرب خارجی دو بردار که یکی از آن دو خود توسط ماصلضرب خارجی دو بردار دیگر بیان شده باشد حاصل یک بردار بوده و توسط یکی از عبارت معادل زیر بیان می شود.

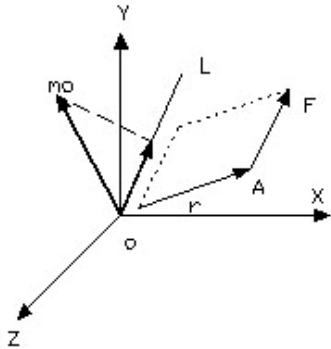
در اینجا وجود برانتز ضرورت دارد زیرا در رابطه ای مانند $P \times Q \times R$ به علت نامشخص بودن اینکه کدام دو بردار در هم ضرب شده اند مبهم است. می توان ثابت کرد که ماصلضرب سه گانه خارجی معادل عبارت زیر است:

$$(P \times Q) \times R = R \cdot PQ - R \cdot QP$$

$$P \times (Q \times R) = P \cdot RQ - P \cdot QR$$

گشتاور یک نیرو حول یک محور:

گشتاور نیروی F حول نقطه o برابر mo می باشد حال اگر محور oL را در نظر بگیریم گشتاور moL نیروی F حول محور oL را به صورت تصویر گشتاور mo روی oL تعریف می کنیم.



اگر بردار mo را با λ نشان دهیم خواهیم داشت.

$$m_{oL} = \lambda \cdot m_o = \lambda \cdot (r \times F)$$

گشتاور یک نیرو تصویر یک بردار بر روی یک محور

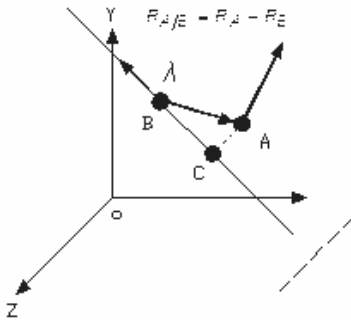
که گشتاور نیروی F حول oL است و از ضرب سه گانه مختلط سه بردار F, r, λ بدست می آید و با:

$$m_{oL} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z = \text{کسینوسهای بردار } oL$$

$$x, y, z = \text{مختصات نقطه اثر نیروی } F$$

$$F_x, F_y, F_z = \text{مولفه های نیروی } F$$



$$m_{BL} = \lambda \cdot m_B = \lambda \cdot (r_{A/B} \times F)$$

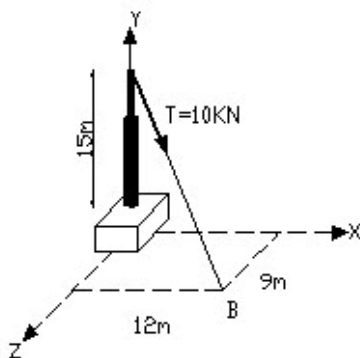
$$r_{A/B} = r_A - r_B$$

نماینده برداری است که از B به A رسم می شود.

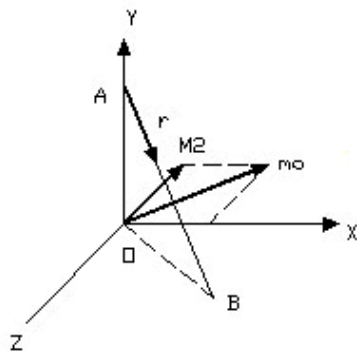
$$m_{BL} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x_{A/B} & y_{A/B} & z_{A/B} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

مثال:

کابلی که انتهای فوقانی یک دیرک صلب نقطه A را به نقطه B متصل می کند تحت کشش $T=10\text{KN}$ می باشد. مطلوبست گشتاور M_z نیروی T حول محور Zها ماربر پایه دیرک می باشد.



$$\begin{matrix} 0 & 12 \\ A & 15 \\ 0 & 9 \end{matrix}$$



بردار M_o عمود بر صفحه ای است که T و نقطه را در بر می گیرد.

$$m_z = m_o \cdot k = (-15 \times 5.66k + 4.24i) \cdot kz = -84.9 \text{KN.m}$$

$$\vec{r} = 15j(m)$$

$$n = \frac{\vec{AB}}{AB} = \frac{(12-0)i + (0-15)j + (9-0)k}{\sqrt{12^2 + 15^2 + 9^2}} = 0.566i - 0.707j + 4.24k$$

$$\vec{T} = 10n = 5.66i - 7.07j + 4.24k$$

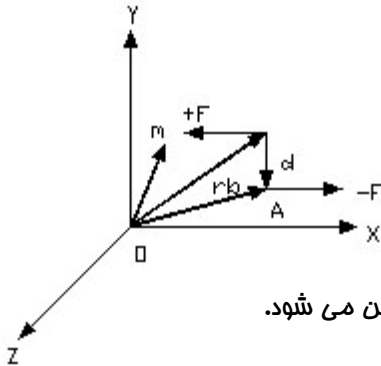
$$m_o = \vec{r} \times \vec{T} = (15j) \times (5.66i - 7.07j + 4.24k)$$

$$= (-15 \times 5.66k + 15 \times 4.24i)$$

علامت منفی معرف ان است که M_z در خلاف جهت محور Zها عمل می کند.

کوپل یا زوج نیرو:

گشتاور حاصل از دو نیروی مساوی، موازی و مختلف الجهت که در امتداد یک خط واقع نیستند کوپل خوانده می شود.



$$m = r_A \times (-F) + r_B \times (F) = (-r_A + r_B) \times F$$

$$r = (-r_A + r_B)$$

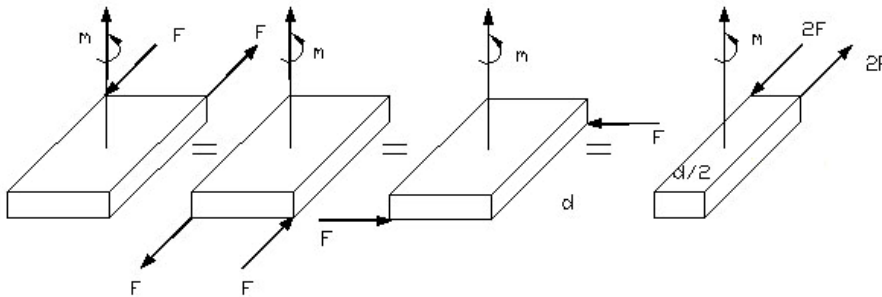
$$m = r \times F$$

$$m = rF \sin \theta = Fd$$

که d فاصله عمودی میان خط اثرهای F و $-F$ است. جهت m از روی قاعده دست راست تعیین می شود.

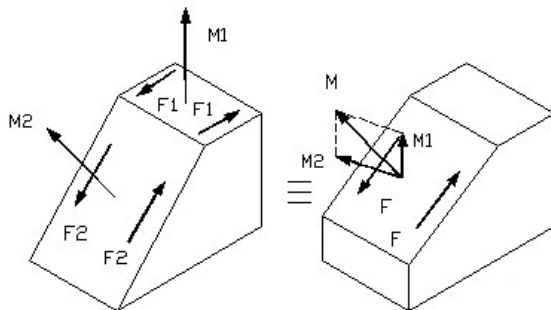
کوپلهای معادل:

با تغییر یافتن مقادیر d و F یک کوپل مفروض مشروط بر آن که حاصلضرب آنها ثابت بماند، تغییری در آن کوپل به وجود نخواهد آمد. به همین ترتیب مقدار یک کوپل ثابت می ماند بدون توجه به اینکه زوج نیرو در کدامیک از صفات موازی یکدیگر عمل می نمایند. شکلهای زیر چهار حالت مختلف یک کوپل ثابت M را نشان میدهد.



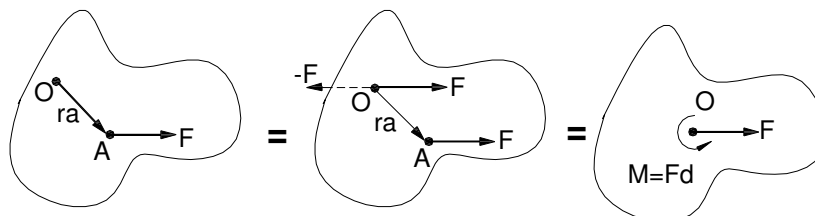
جمع بستن کوپلها:

کوپلهائی را که در صفات غیر موازی با یکدیگر عمل می کنند می توان با قانون عادی ترکیب بردارها جمع کرد. مثلاً در شکل (A) کوپل M_1 در اثر نیروهای F_1 و کوپل M_2 در اثر نیروهای F_2 در دو صفحه به صورت نشان داده شده عمل می کنند این دو کوپل را می توان با حاصل جمع بردارشان (M) به صورتی که در شکل (B) نشان داده شده است تعویض کرد. این تعویض را می توان از طریق ایجاد کوپل M از نیروی F که ترکیب برداری F_1 و F_2 می باشد تأیید کرد.



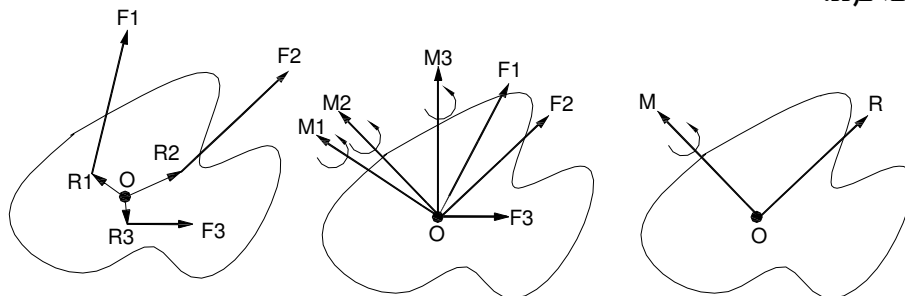
انتقال بردار نیرو:

یک کوپل مشخص و یک نیرو را که در صفحه کوپل واقع است را می توان به یک نیروی واهم تبدیل کرد.



برایند مجموعه های نیرو:

در شکل نشان داده شده در زیر هر نیروی F را می توان به موازات خود به نقطه دلخواه O انتقال داد. مشروط به اینکه اندازه نیرو ثابت مانده و یک کوپل Fd که در آن d بازوی گشتاور از O تا موقعیت ابتدائی F می باشد به آن اضافه گردد.



$$R = \sum F = F_1 + F_2 + \dots$$

$$M = \sum m_1 + m_2 + \dots = \sum (r \times F)$$

مجموعه نیروهای متوازی:

واضح است که برایند نیروهای متوازی دارای مقداری برابر با حاصل جمع عددی مجموعه نیروها می باشد. موقعیت خط اثر برایند با استفاده از قضیه وارینون به دست می آید. چون گشتاور برایند حول هر محوری می باید برابر حاصل جمع گشتاوری مولفه های آن حول همان محور باشد.

$$R = F_1 + F_2 + F_3$$

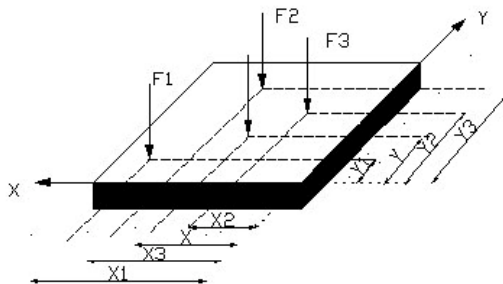
$$\bar{x}_R = F_1x_1 + F_2x_2 + F_3x_3$$

$$\bar{y}_R = F_1y_1 + F_2y_2 + F_3y_3$$

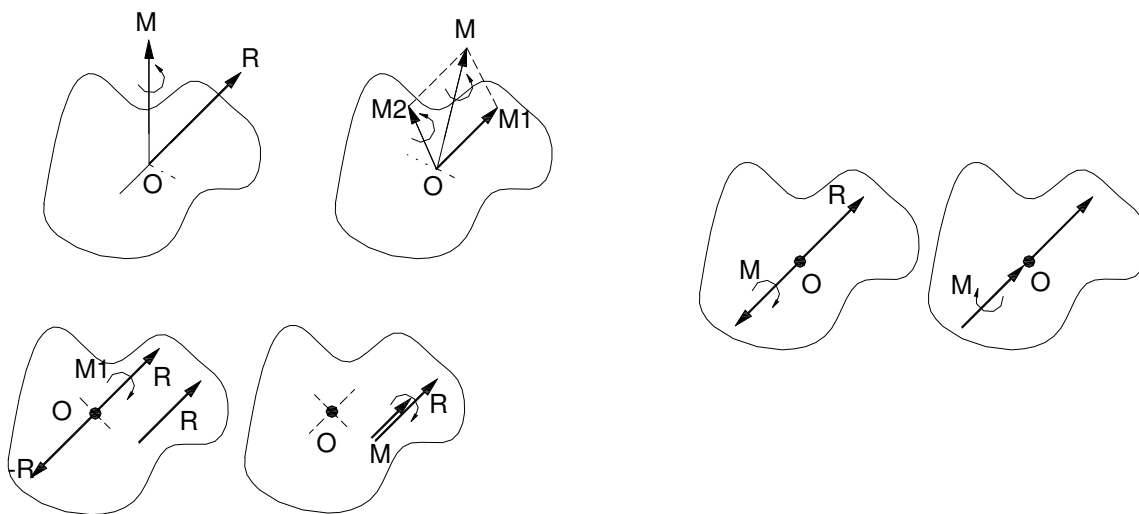
$$R = \Sigma F$$

$$\bar{x} = \frac{\Sigma(F_x)}{R}$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma(F_y)}{R}$$



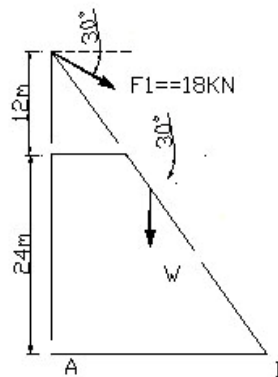
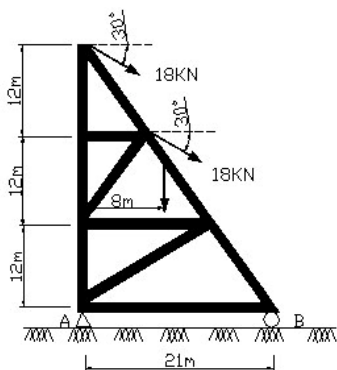
برایند پیچ گشتکی وار:



در صورتی که بردار برایند کوپل ها M به موازات برایند نیروها باشد. برایند حاصل برایند پیچ گشتکی وار خوانده میشود. هر مجموعه نیرو را می توان به یک برایند پیچ گشتکی وار که در امتداد خط اثر منحصراً بفردی عمل می کند، تبدیل کرد.

مثال:

بر تیر مشبکی به وزن 40kN دو کابل که نیروی کششی هر کدام برابر با 18kN می باشد مطابق شکل اثر می کند. مطلوب است برآیند نیروی وارد بر تیر مشبک و نقطه تقاطع امتداد اثر برآیند با خط AB



$$F_1 = F_2 = 15.59i - 9j$$

$$R = \sum F = -40j + 15.59i - 9j + 15.59i - 9j = 31.2i - 58j$$

$$R = \sqrt{(31.2)^2 + (58)^2} = 65.86 \text{ kN}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{58}{31.2}\right) = 61.7^\circ$$

$$\sum MA = 0 \quad + (7i + 24j) \times (15.59i - 9j)$$

$$M_A^R = (31.2) \times (36) + (31.2) \times (24) + (58) \times (7) = 1318 \text{ kN.M}$$

$$M_A^R = \sum r \times F = (8)i \times (-40)j + (36)j \times (15.59i - 9j)$$

$$-58xk = -1.318k \Rightarrow x = 22.7$$

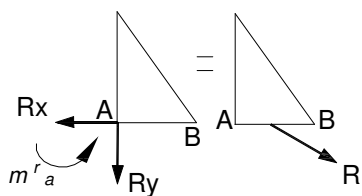
$$M_A^R = (-320 - 561 - 63 - 374)k = (-1.318 \text{ kN.M})k$$

روش دوم:

$$r \times R = M_A^R \Rightarrow (x)i \times (31.2i - 58j) = -1.318k$$

$$F \times d = M_A^R$$

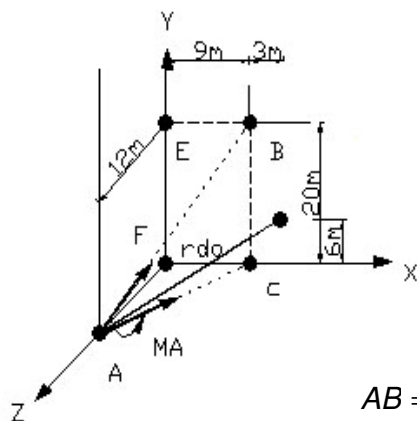
$$15.59 \times 36 + 15.59 \times 24 + 9 \times 7 + 40 \times 8 = 58\bar{x}$$



$$1318 = 58\bar{x} \Rightarrow \bar{x} = 22.7$$

مثال:

سیستم کوپل نیرو در نقطه A شامل نیروی F به مقدار 25N و کوپل MA به گشت آور 250N.M می باشد. این سیستم کوپل نیرو را به سیستم کوپل نیروی معادل در نقطه D جایگزین کنید.



$$\begin{array}{l|l|l|l} 0 & 9 & 9 & 12 \\ A & 0 & B & D \\ 12 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$AB = 9i + 20j - 12k$$

$$F = 9i + 20j - 12k$$

$$AC = 9i - 12k$$

$$M_A = 150i - 200k$$

$$M_D = M_A + S \times F$$

$$S = \vec{D}A = -12i - 6j + 12k$$

$$\begin{array}{l} \vec{AB} = 25m \\ F = 25N \\ \vec{AC} = 15m \\ M_A = 250N.m \end{array}$$

$$M_D = M_A + \begin{vmatrix} i & j & k \\ -12 & -6 & 12 \\ 9 & 0 & -12 \end{vmatrix} = M_A + (72 - 240)i + (108 - 144)j + (-240 + 54)k$$

کوپل نیروی سیستم در نقطه D

$$M_D = (1500i - 200k) - 168i - 36j - 180k$$

$$\left\{ \begin{array}{l} M_D = -18i - 36j - 386k \\ F = 9i + 20j - 12k \end{array} \right.$$

فصل چهارم

تعداد اجسام صلب:

مفهوم مهندسی تعادل و یا سکون آن است که ذره و یا جسم مادی مرکبی نداشته باشد لذا وقتی که نیروهای خارجی یک سیستم معادل با صفر تشکیل می دهند می گویند که جسم صلب در حال تعادل است. بنابراین شرط لازم کافی برای تعادل یک جسم صلب به صورت زیر نوشته می شود.

$$\sum F = 0 \quad \text{و} \quad \sum M_O = \sum (r \times F) = 0$$

$$\begin{array}{ccc} \sum F_x = 0 & \sum F_y = 0 & \sum F_z = 0 \\ \sum m_x = 0 & \sum m_y = 0 & \sum m_z = 0 \end{array}$$

نمودار جسم آزاد:

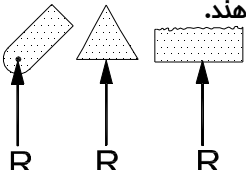
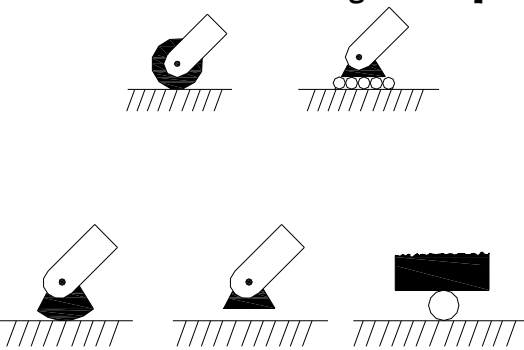
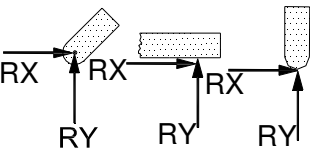
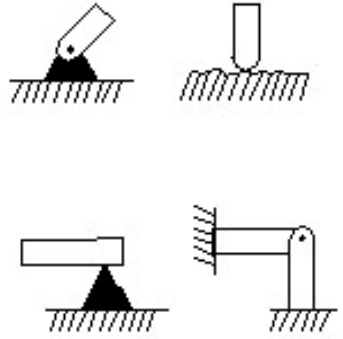
نمودارهای جسم آزاد را در فصول قبل به کرات به کار بردیم، به خاطر اهمیت این نمودارها به طور خلاصه روش ترسیم را در زیر می آوریم.

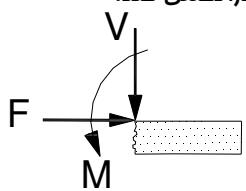
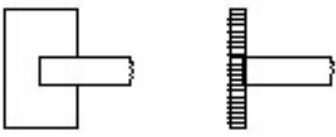
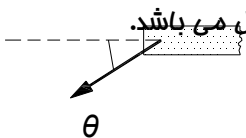
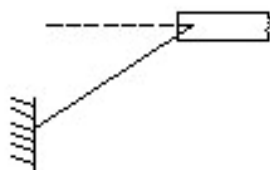
1) جسم آزاد منتخب را به طور مشخص تعیین می کنیم و سپس این جسم را از بین و تمام اجسام دیگر جدا می کنیم و بعد طرح کلی جدا شده را ترسیم می کنیم.

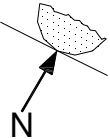
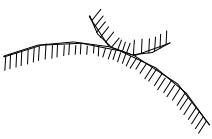
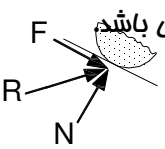
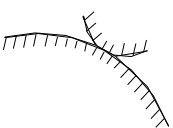
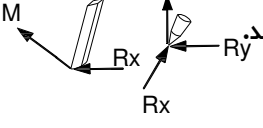
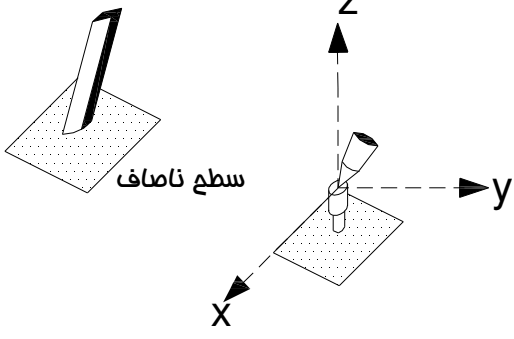
2) همه نیروهای خارجی را روی نمودار جسم آزاد نشان می دهیم به صورتی که بزرگی و راستای نیروهای خارجی مشخص باشد.

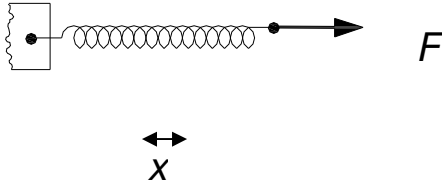
3) نیروهای خارجی مجهول که معمولاً عکس العملهایی هستند که اجسام دیگر با مخالفت با حرکت جسم آزاد از خود نشان می دهند.

نیروهای اتصالی و تکیه گاه:

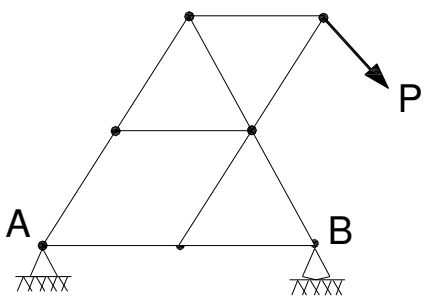
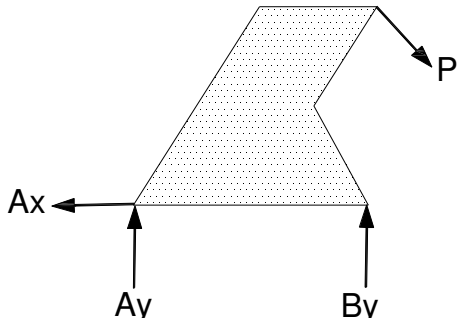
تعداد مجهولات	اثربرروی جزء منفصل شده	نوع تکیه گاه
1	<p>تکیه گاههای غلتکی، چرخی، ساپمه ای وسایرانواع که در شکل نشان داده شده است نیروی فشاری وعمود بر سطح تماس را انتقال می دهند.</p> 	<p>1. تکیه گاه غلتکی</p> 
2	<p>یک اتصال مفصلی که آزادی گردش داشته باشدمی تواندنیروی درهر امتدادوجهت در صافه عمود بر محور فار را انتقال دهد. لولائی که آزادی گردش نداشته باشدمی تواند تحت تاثیر یک کوپل نیز باشد</p> 	<p>2. اتصال مفصلی بافار مغزی</p> 

<p>3</p>	<p>یک اتصال گیرداری تواند نیروئی مموری F و نیروئی (برشی) V و کوپل M که در مقابل پرفش مقاومت می کند را تحمل کند.</p> 	<p>3. اتصال گیردار</p> 
<p>1</p>	<p>نیروئی که توسط یک کابل انعطاف پذیر اعمال می شود. همیشه به صورت یک نیروی کششی در جهت گریز از جسم و در امتداد مماس بر کابل می باشد.</p> 	<p>4. کابل، تسمه، زنجیر</p> 

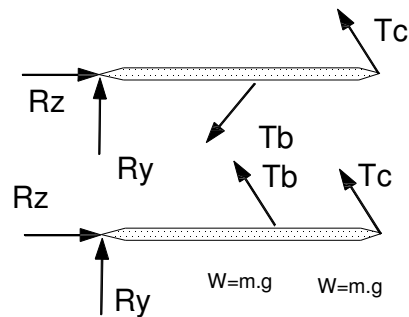
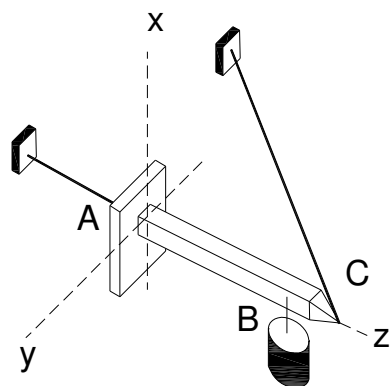
تعداد مجهولات	اثربرروی جزء منفصل شده	نوع تکیه گاه
1	<p>نیروی تماس همواره فشاری است وعمود بر سطح تماس</p> 	<p>سطوح صیقلی</p> 
2	<p>سطوح (برق) بلیت تحمل یک مولفه مماسی نیرو یعنی F (نیروی اصطکاک) از برابند نیروی تماس R رانیز علاوه بر مولفه عمودی N دارا می باشد.</p> 	<p>سطوح زبر</p> 
3	<p>یک اتصال ساچمه ای نیروئی را در هر جهت تحمل مینماید. یک اتصال جوش شده ساچمه ای بعلاوه یک گویل رانیز تحمل می کند.</p>  <p>اتصال آزاد اتصال جوش شده</p>	<p>اتصال ساچمه ای</p> 

	<p>نیروی وارده بر فنر در صورتیکه کشیده شود کششی و در صورتی که فشرده شود فشاری است. برای یک فنر ارتجاعی با الاستیسیته فنی، سفتی K عبارتند از نیروی لازم برای تغییر طول آن به اندازه x و امد</p> 	<p>عمل فنر</p>
--	---	----------------

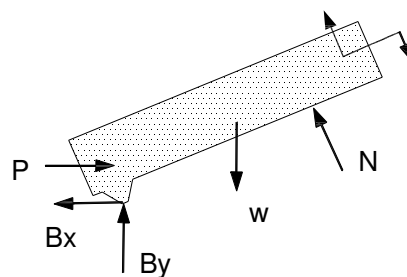
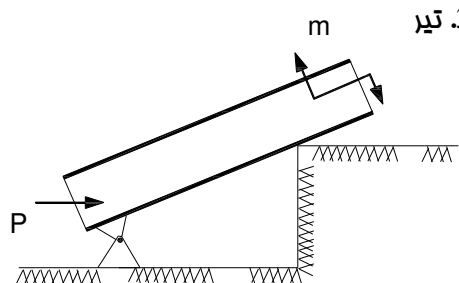
نمونه هایی از ترسیم آزاد:

مجموعه سازه	نمودار جسم آزاد
<p>1. فریای مسطح</p> 	

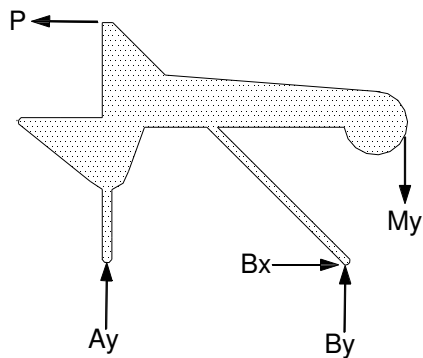
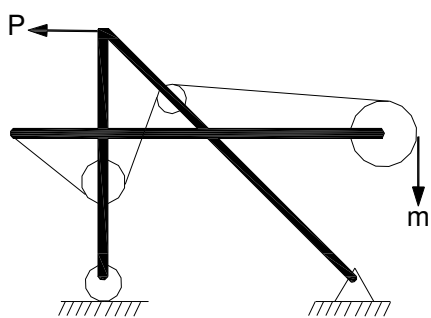
2. دکل فضائی



3. تیر



4. یک مجموعه سازه صلب متشکل از چند عضو



عکس العمل های نا معین از لحاظ استاتیکی - تیرهای ناقص:

$R = 3 = r$ معادلات = مجهولات



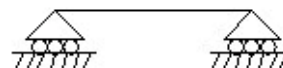
نا معین

$R > 3 \Rightarrow$

$R = 4 > 3 \Rightarrow n = 4 - 3 = 1$

$R < 3 \Rightarrow$

نا پایدار (مقید ناقص)



$R = 2 < 3$

$R = 3 \Rightarrow$

معین



$R = 3 = 3 \Rightarrow n = 3 - 3 = 0$

در حالت سه بعدی تعداد معادلات شش عدد است که اگر کمتر از شش عدد مجهول داشته باشیم مستحکم ناقص است و اگر مجهولات بیشتر از شش عدد باشد مستحکم نا معین است و اگر تعداد مجهولات شش عدد یعنی مساوی معادلات باشد معین است.

$R = 6 \Rightarrow$

معین

$R > 6 \Rightarrow$

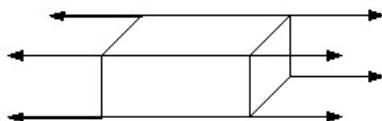
نا معین

$R < 6 \Rightarrow$

نا پایدار

در صورتی که مجهولات شش عدد باشند ولی همه موازی باشند و یعنی در صفحه قرار دارند این قابل قبول نیست برای یک جسم صلب دو بعدی :

عکس العمل های تکیه گاهی می توانند بسته به نوع تکیه گاه یک یا دو ویاسه مجهولی باشند



لذا برای حل معادلات زیر را می نویسیم.

(1) سه معادله ی تعادل

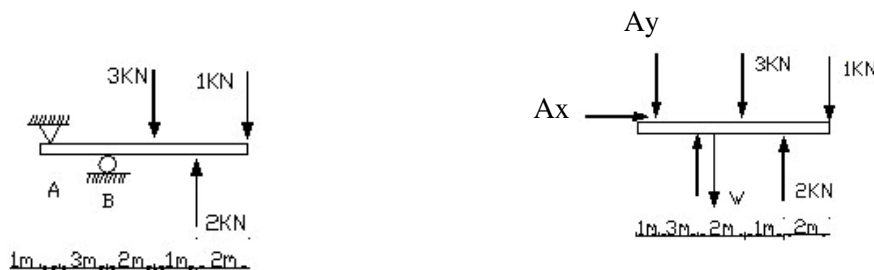
$$\sum F_x = 0, \sum M_A = 0, \sum M_B = 0$$

$$\sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \sum M_O = 0$$

که نقطه ی B در آن طوری انتخاب شود که خط موازی با محور y نباشد و $\sum M_B = 0$ و $\sum M_O = 0$ که نقطه های A, B, C روی یک خط راست نباشند.

مثال:

تیر یکنواخت 9M متری دارای جرمی برابر 200kg کیلو گرم می باشد در صفا قائم توسط نیروهای موازی به صورت نشان داده شده در شکل بار گذاری شده است. عکس العمل های تکیه گاههای مفصلی متمرک در A, B را مناسبه کنید.



$$W = m.g = 200 \times 10 = 2000N = 2KN$$

$$\curvearrowleft + \sum M_A = 0 \Rightarrow$$

$$-B_y \times 3 + 2 \times 3.5 - 2 \times 6 + 1 \times 8 - 3 \times 5 = 0$$

$$B_y = 6KN$$

$$+ \uparrow \sum F_y = 0$$

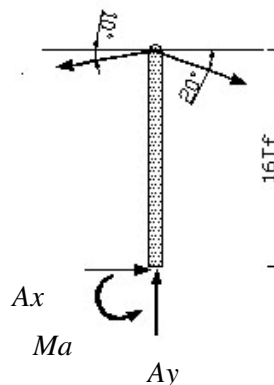
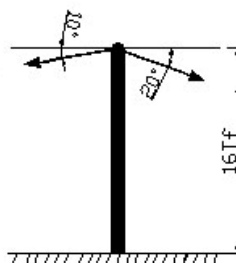
$$-A_y + 6 - 2 - 3 + 2 - 1 = 0 \rightarrow$$

$$+ \rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$cont = + \uparrow \sum M_B = 0 \Rightarrow -2 \times 3 + 2 \times 0.5 + 3 \times 2 - 2 \times 3 + 1 \times 5 = 0$$

مثال:

تیر تلفنی به وزن 300Lb برای نگهداری دو انتهای سیم بکار برده شده کشش در سیم سمت چپ 80 پوند و امتداد آن با افق زاویه 10° می سازد (a) هر گاه کشش سیم T_2 صفر باشد معین کنید عکس العمل در نقطه A را (b) بیشترین و کمترین مقدار T_2 را هرگاه مقدار کوپل وارد بر نقطه A بیش از 600Lb - ft نباشند.



$$T_2 = 0$$

$$+ \rightarrow \sum F_x = 0$$

$$A_x - 80 \cos 10^\circ = 0 \Rightarrow A_x = 78.8 \text{ Lb}$$

$$+ \uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_y - 300 - 80(\sin 10^\circ) = 0 \Rightarrow A_y = 314 \text{ Lb} \uparrow$$

$$\curvearrow + \sum M_A = 0$$

$$M_A + 80(\cos 10^\circ) \times (16 \text{ ft}) = 0 \Rightarrow$$

$$M_A = -1260 \text{ Lb} \cdot \text{ft}$$

$$M_A = 1260 \text{ Lb} \cdot \text{ft}$$

$$T_2 \neq 0$$

$$M_A = 1260 \text{ Lb} \cdot \text{ft}$$

$$(80 \cos 10^\circ)(16 \text{ ft}) - (T_2 \cos 20^\circ)(16 \text{ ft}) + M_A = 0$$

$$1260 - T_2 \cos 20^\circ \times 16 \pm 600 \text{ Lb} \cdot \text{ft} = 0$$

$$\curvearrow + \sum M_A = 0$$

$$T_2 = 43.9 \text{ Lb}, T_2 = 1273.7 \text{ Lb}$$

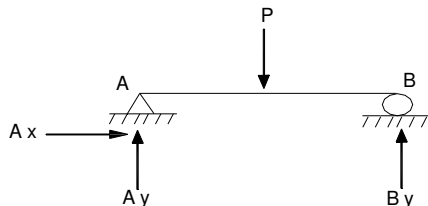
گشت آور مول نقطه A کوپکترا از 600Lb - ft است وقتی که

$$43.9 \text{ Lb} \leq T_2$$

معادلات تعادل برای یک جسم صلب دو بعدی :

عکس العمل های تکیه گاهی می توانند بسته به نوع تکیه گاه - یک یا دو یا سه مجهولی باشند لذا برای حل معادلات را به صورت زیر می نویسیم.

(1) سه معادله ی تعادل



$$\sum F_x = 0$$

$$A_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$A_y + P/2 - P = 0$$

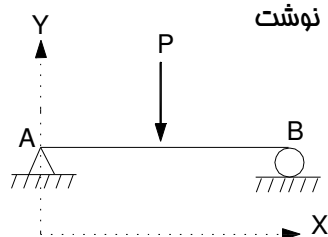
$$A_y = P/2 \uparrow$$

$$\sum m_A = 0$$

$$B_y \times L - P \times L/2 = 0$$

$$B_y = P/2 \uparrow$$

اما به غیر از این حالت چند مورد معادله تعادل دیگر نیز می توان نوشت



$$\sum F_x = 0$$

$$A_x = 0$$

$$\sum m_A = 0$$

$$B_y \times L - P \times L/2 = 0$$

$$B_y = P/2 \uparrow$$

$$\sum m_B = 0$$

$$-A_y \times L + P \times L/2 = 0$$

$$A_y = P/2 \uparrow$$

اما باید دقت کرد که نقطه B باید طوری انتخاب گردد که خط AB موازی با محور y ها نباشد.

$$\sum F_x = 0$$

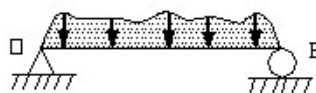
$$\sum m_A = 0$$

$$\sum m_{B'} = 0$$

اشتباه

لذا مفهوم تعادل به صورت زیر بیان می گردد.

1)

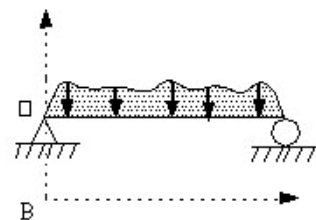


صمیم

$$\sum m_O = 0$$

$$\sum m_B = 0$$

$$\sum F_x = 0$$



اشتباه

2)

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum m_O = 0$$

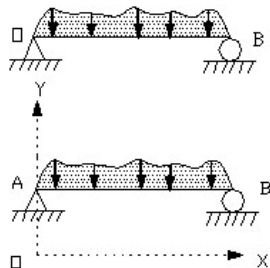
$$\sum m_B = 0$$

3)

$$\sum m_A = 0$$

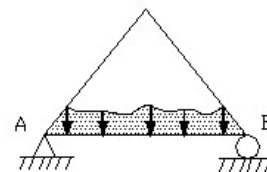
$$\sum m_B = 0$$

$$\sum m_C = 0$$



اشتباه

صمیم



معادلات تعادل برای اجسام سه بعدی :

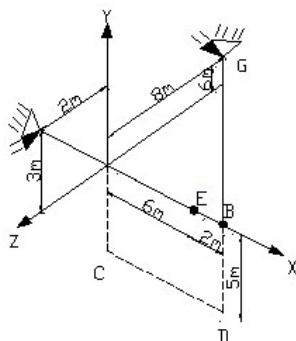
در حالت سه بعدی تعداد معادلات شش عدد است.

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum F_z = 0 \quad \sum m_x = 0 \quad \sum m_y = 0 \quad \sum m_z = 0$$

مثال:

صفحه ای همگن به ابعاد 8×5 به وزن 270N در نقطه A بر روی کاسه ساچمه متکی بوده و بوسیله دو کابل

نگهداری می شود. معین کنید کشش در هر کابل و عکس العمل در نقطه A را.



0	8	0	8	6	0	0
A 0	B 0	C -5	D -5	E 0	F 3	G 4
0	0	0	0	0	2	-8

$$T_{EF} = T_{EF} \left(-\frac{6}{7}i + \frac{3}{7}j + \frac{2}{7}k \right)$$

$$T_{BG} = T_{BG} \left(-\frac{8}{12}i + \frac{4}{12}j - \frac{2}{12}k \right) = T_{BG} \left(-\frac{2}{3}i + \frac{1}{3}j - \frac{2}{3}k \right)$$

$$+ \uparrow \sum M_A = 0$$

$$(4i) \times (-270j) + (6i) \times \left(-\frac{6}{7}i + \frac{3}{7}j + \frac{2}{7}k \right) T_{EF}$$

$$+ (8i) \times \left(-\frac{2}{3}i + \frac{1}{3}j - \frac{2}{3}k \right) T_{BG} = 0$$

$$\Rightarrow -1080k + \frac{18}{7}T_{EF}k - \frac{12}{7}T_{EF}j + \frac{8}{3}T_{BG}k + \frac{16}{3}T_{BG}j = 0$$

$$-\frac{12}{7}T_{EF} + \frac{16}{3}T_{BG} = 0 \quad T_{EF} = 315N$$

$$\frac{18}{7}T_{EF} + \frac{2}{3}T_{BG} - 1080 = 0 \quad T_{BG} = 101.3N$$

$$\sum F = 0 \Rightarrow A + T_{EF} + T_{BG} - 270j = 0$$

$$A_x i + A_y j + A_z k + 315\left(-\frac{6}{7}i + \frac{3}{7}j + \frac{2}{7}k\right)$$

$$+ (101.3)\left(-\frac{2}{3}i + \frac{1}{3}j - \frac{2}{3}k\right) - 270j = 0$$

$$[A_x - \frac{6}{7} \times 315 - \frac{2}{3}(101.3)]i + [A_y + \frac{3}{7} \times 315 + \frac{1}{3} \times 101.3 - 270]j$$

$$+ [A_z + \frac{2}{7}(315) - \frac{2}{3}(101.3)]k = 0$$

$$A_x - 270 - 67.5 = 0$$

$$A_x = 338.5N$$

$$A_y + 135 + 33.8 - 270 = 0$$

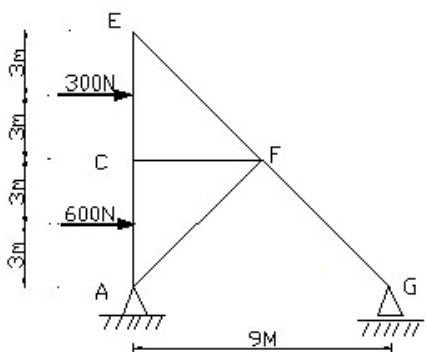
$$A_y = 101.2N$$

$$A_z + 90 - 67.5 = 0$$

$$A_z = -22.5N$$

مثال:

معین کنید مولفه نیروی تکیه گاهی و اردبرقاب مشبک زیر



$$\curvearrowright + \sum M_A = 0$$

$$-600 \times 3 - 300 \times 9 + G_y \times 9 = 0 \Rightarrow G_y = 500N \uparrow$$

$$+ \uparrow \sum F_y = 0$$

$$G_y + A_y = 0 \Rightarrow A_y = -500 \Rightarrow A_y = 500N \downarrow$$

cont :

$$\curvearrowright + \sum M_G = 0$$

$$300 \times 9 + 600 \times 3 - 500 \times 9 = 0$$

نیروهای گسترده: مرکزهای هندسی و مرکزهای گرانی

گرانیکه جسم دو بعدی

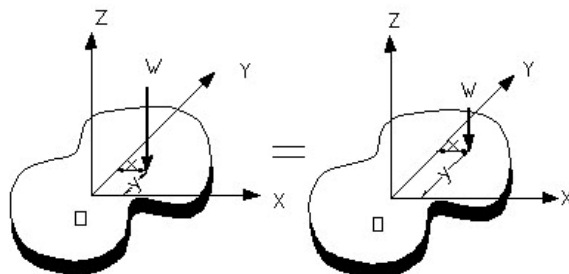
گرانیکه یک صفحه:

یک ورق تخت افقی را در نظر می‌گیریم این ورق را می‌توانیم به 8 جزء کوچک تقسیم کنیم

مختصات جزء اول را با x, y و مختصات جزء دوم را با x_2, y_2

نشان می‌دهیم و به همین ترتیب نیروهای ناشی از اثر زمین بر اجزای ورق را به ترتیب با $\Delta W_1, \Delta W_2, \dots, \Delta W_n$ نشان می‌دهیم.

$$\sum F_z \Rightarrow W = \Delta W_1 + \Delta W_2 + \dots + \Delta W_n$$



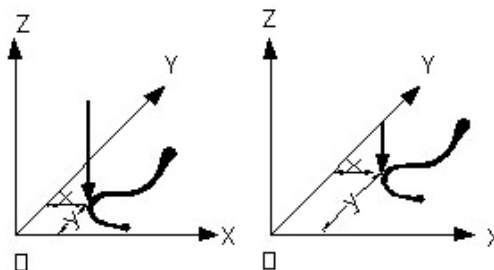
$$\sum M_y : \bar{x}w = \sum x\Delta w, \quad \sum M_x : \bar{y}w = \sum yw$$

$$\sum M_y : \bar{x}w = x_1\Delta w_1 + x_2\Delta w_2 + \dots + x_n\Delta w_n$$

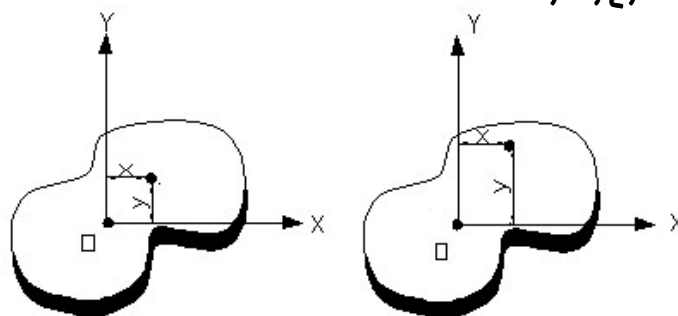
$$\sum M_x : \bar{y}w = y_1\Delta w_1 + y_2\Delta w_2 + \dots + y_n\Delta w_n$$

اگر تعداد اجزاء افزایش یابد و اندازه هر جزء را کاهش بدهیم عبارتهای زیر به دست می‌آید.

$$\bar{y}w = \int ydw, \quad \bar{x}w = \int xdw, \quad W = \int dw$$



مرکزهای هندسی سطوح و خطوط:

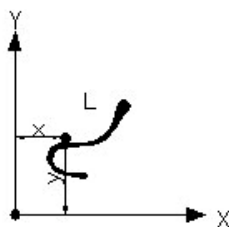
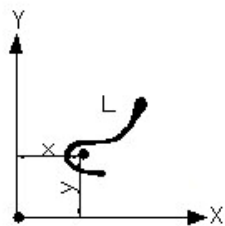


$$\sum M_y = \bar{x}A = x_1\Delta A_1 + x_2\Delta A_2 + \dots + x_n\Delta A_n$$

$$\sum M_x = \bar{y}A = y_1\Delta A_1 + y_2\Delta A_2 + \dots + y_n\Delta A_n$$

$$\bar{x}A = \int x dA$$

$$\bar{y}A = \int y dA$$



$$\bar{y}L = \int y dL$$

$$\bar{x}L = \int x dL$$

$$Q_y = \int x dA$$

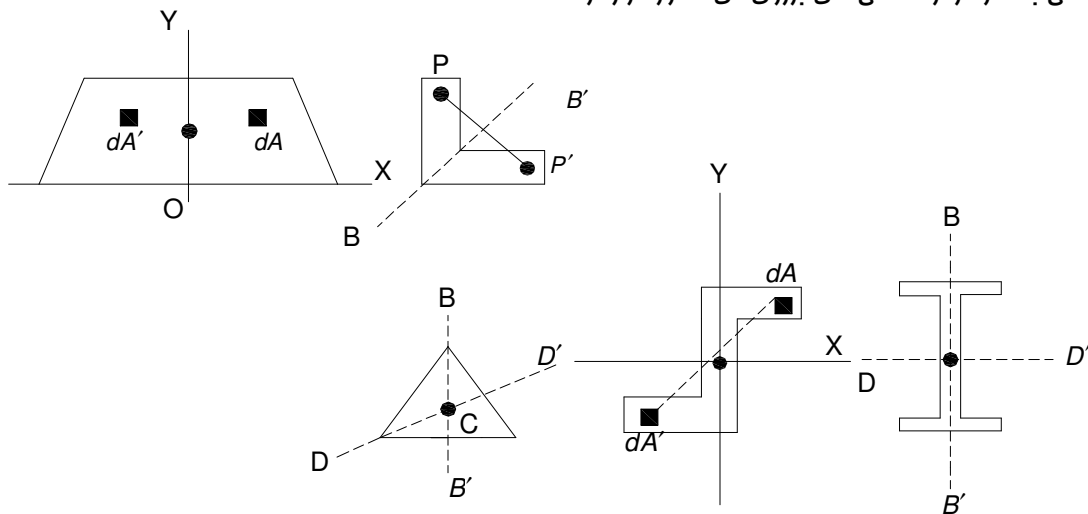
$$Q_y = \bar{x}A$$

$$Q_x = \int y dA$$

$$Q_x = \bar{y}A$$

گشتاورهای اول سطوح و خطوط:

وقتی سطحی مانند A یا فنی مانند L دارای یک محور تقارن باشد، گشتاور اول آن نسبت به آن محور برابر صفر می باشد و مرکز هندسی اش بر روی آن محور قرار دارد.



اگر سطحی یا فطی دارای دو محور تقارن باشد مرکز هندسی اش C باید در محل تلاقی در محور تقارن قرار داشته باشد. سطح A را نسبت به مرکز O متقارن می گویند اگر متناظر با هر جزء سطح dA به مختصات y,x یک جزء سطح dA' به مختصات -y,-x وجود داشته باشد در این صورت

$$Q_x = Q_y = 0$$

نام شکل	شکل	\bar{X}	\bar{Y}	مساحت
مثلث		$\frac{a+b}{3}$	$\frac{h}{3}$	$\frac{bh}{2}$
ربع دایره		$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{4}$
نیم دایره		0	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{2}$
مستطیل		$\frac{b}{2}$	$\frac{h}{2}$	$b \cdot h$
نیم سهمی		$\frac{3a}{8}$	$\frac{3h}{5}$	$\frac{2ah}{3}$
سهمی		0	$\frac{3h}{5}$	$\frac{4ah}{3}$
اسپاندرال سهمی		$\frac{3a}{4}$	$\frac{3h}{10}$	$\frac{ah}{3}$

مثال:

مفتمات مرکز سطحی صفاه زیر را تعیین کنید.

سطح	A	\bar{x}	\bar{y}	$\bar{x}A$	$\bar{y}A$
I	8	0.5	4	4	32
	4	3	0.5	12	2
Σ	12	-	-	16	34

$$\bar{x} \Sigma A = \Sigma \bar{x}A \Rightarrow \bar{x}(12) = 16 \Rightarrow \bar{x} = 1.33m$$

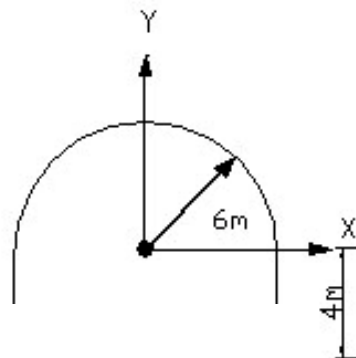
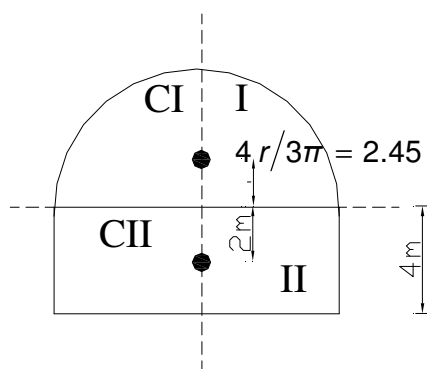
$$\bar{y} \Sigma A = \Sigma \bar{y}A \Rightarrow \bar{y}(12) = 34 \Rightarrow \bar{y} = 2.83m$$

مثال:

مفتمات مرکز سطحی صفاه زیر را تعیین کنید.

بعلت تقارن $\bar{x} = 0$

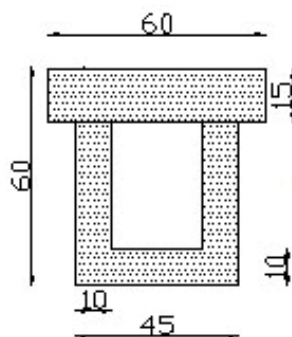
سطح	\bar{A}	\bar{y}	$\bar{y}A$
I	56.6	2.54	144
II	48	-2	-96
Σ	104.6	-	48



$$\bar{y} \Sigma A = \Sigma \bar{y}A \Rightarrow \bar{y}(104.6) = 48 \Rightarrow \bar{y} = 0.459m$$

I

III



$\bar{x} = 0$

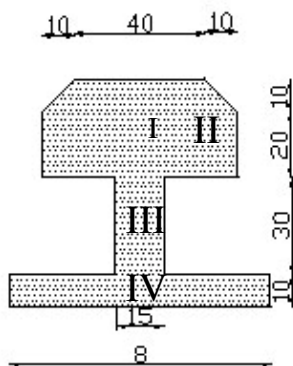
مثال:

بعلت تقارن

II

سطح	A	\bar{y}	$\bar{y}A$
I	$60 \times 15 = 900$	7.5	6750
II	$45 \times 45 = 2025$	$(\frac{45}{2} + 15) = 37.5$	75937.5
III	$-25 \times 35 = -875$	$(\frac{35}{2} + 15) = 32.5$	-28437.5
Σ	2050		24250

$$\bar{y} \Sigma A = \Sigma yA \Rightarrow \bar{y} \times 2050 = 54250 \Rightarrow \bar{y} = 26.46 \text{ cm}$$



$$\bar{x} = 0$$

مثال:

بعلت تقارن

$$\bar{y} \Sigma A = \Sigma yA \Rightarrow \bar{y} \times 2950 = 98916.7 \Rightarrow \bar{y} = \frac{\Sigma \bar{y}A}{\Sigma A} = \frac{98916.7}{2950} = 33.53 \text{ cm}$$

سطح	A	\bar{y}	$\bar{y}A$
I	$60 \times 30 = 1800$	15	27000
II	$-2 \times 10 \times \frac{10}{2} = -100$	$\frac{10}{3} = 3.33$	-333.3
III	$15 \times 30 = 450$	$15 + 30 = 45$	20250
IV	$80 \times 10 = 800$	$5 + 60 = 65$	52000
Σ	2950		98916.7

بارهای گسترده روی تیرها

بار گسترده وارد بر تیر بر ماسب بیان میگردد و لذا بزرگی نیروی وارد بر یک جزء تیر به طول dx برابر است با

$$(1) \quad (2) \quad Wdx = dA$$

$$W = \int_0^L W dx \Rightarrow W = \int dA = A \quad (1), (2)$$

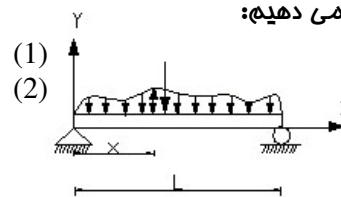
مال باید ببینیم که این بار متمرکز W به کجای تیر و برای ایندهای گسترده C وارد می گردد برای بدست آوردن نقطه

اثر P بار معادل متمرکز W گشتاور W حول نقطه O را برابر با مجموع گشتاورهای بارهای جزئی dw حول نقطه O

قرار می دهیم:

$$(OP)W = \int x dW \Rightarrow (OP)A = \int_0^L x dA \Rightarrow \bar{x}A = \int_0^L x dA$$

$$dW = W dx = dA, W = A \quad (1), (2)$$

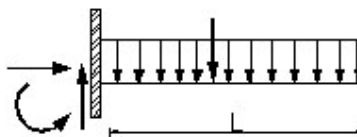
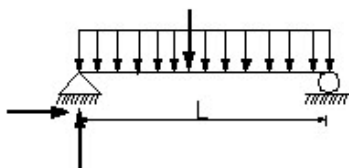


بنا بر این به جای بار گسترده وارد بر تیر می شود یک بار متمرکز قرار داده، بزرگی این بار متمرکز برابر با سطح

زیر منحنی بار است و فضا اثرش از مرکزی آن سطح عبور می کند

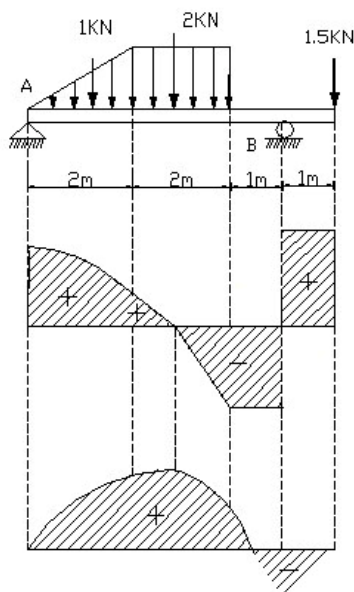
مثال:

مطلوب است مناسبه عکس العمل های تکیه گاهی تیر های زیر را



$$(1) \left\{ \begin{array}{l} + \sum MA = 0 \Rightarrow B_y \times L - WL \times \frac{L}{2} = 0 \Rightarrow B_y = W \frac{L}{2} \uparrow \\ + \rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0 \\ + \uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + W \frac{L}{2} - WL = 0 \Rightarrow A_y = W \frac{L}{2} \uparrow \\ + \downarrow \text{cont } \left(+ \sum M_B = 0 \Rightarrow W \frac{L}{2} \times L - WL \times \frac{L}{2} = 0 \quad OK \right) \end{array} \right.$$

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} + \sum M_A = 0 \Rightarrow +16 \times 2 - M_A = 0 \Rightarrow M_A = 32 N.M \\ + \uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - 16 = 0 \Rightarrow A_y = 16 N.M \\ + \rightarrow \sum F_x = 0 \rightarrow A_x = 0 \Rightarrow + \rightarrow \text{cont } \left(+ \sum M_B = 0 \right) \\ \Rightarrow 32 - 16 \times 4 + 16 \times 2 = 0 \quad OK \end{array} \right.$$



$$+\sum M_A = 0 \Rightarrow -2 \times 3 - 1 \times \frac{2}{3} \times 2 - 1.5 \times 6 + B_y \times 5 = 0$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + 3.27 - 1 - 2 - 1.5 = 0 \Rightarrow A_y = 1.23 \text{ KN}$$

$$\curvearrow + \sum M_B = 0 \Rightarrow -1.23 \times 5 + 1 \times 4.33 + 2 \times 2 - 1.5 \times 1 = 0 \quad \text{OK}$$

$$B_y = 3.27 \text{ KN } \uparrow$$

$$A_1 = 2 \times 1.233 - 1 \times \frac{2}{3} = 1.799$$

Or

$$A_1 = 2 \times 0.233 + \frac{2}{3} \times 1 \times 2 = 1.799$$

$$A_2 = 0.233 \times \frac{0.233}{2} = 0.027$$

$$A_3 = -1.767 \times \frac{1.767}{2} = -1.56$$

$$A_4 = -1.767 \times 1 = -1.767$$

$$A_5 = 1.5 \times 1 = 1.5$$

تخلیل سازه ها

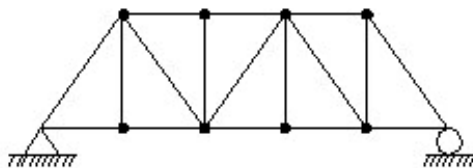
در فصول گذشته با تعادل یک جسم صلب تنها سروکار داشتیم و نقطه نیروهای خارجی وارد بر جسم صلب را در بر می گرفتند. حال ما می خواهیم مسئله های را در نظر بگیریم که با تعادل سازه های متشکل از چند قسمت متصل سروکار دارند. در این مسئله ها نه تنها باید نیروهای خارجی وارد بر سازه را تعیین کرد بلکه باید نیروهای خارجی وارد بر سازه را تعیین کرد بلکه باید نیروهایی را هم که قسمت های مختلف سازه را به هم متصل نگه میدارند به دست آورد. اگر کل سازه را در نظر بگیریم، این نیروها را نیروهای داخلی می نامند.

انواع سازه های مهندسی مورد بررسی:

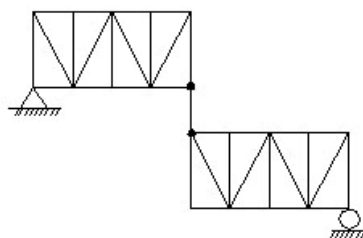
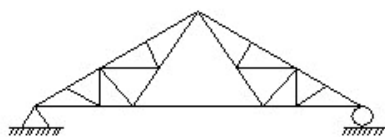
1) فریها 2) قابها 3) ماشینها

انواع فریها:

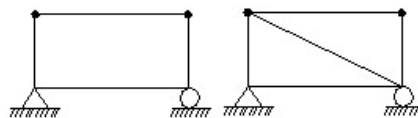
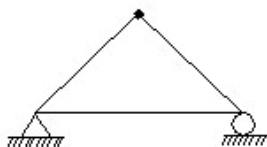
1) فریهای سازه: سازه هایی که از زیر مجموعه بنیادی مثلثی تشکیل شده اند مجموعه های مفصلی و یا فریهای ساده خوانده می شوند.



2) فریهای مرکب: از تشکیل یکسری فریهای ساده که به وسیله یکسری اعضاء به یکدیگر متصل گردیده اند.



3) فریهای مبهم (پیچیده): فریهایی که نه ساده می باشند و نه مرکب.



$$M = 3$$

$$j = 3$$

$$R = 3$$

$$M + 3 < 2j$$

$$M = 4$$

$$j = 4$$

$$R = 3$$

$$M + 3 < 2j$$

$$4 + 3 < 8$$

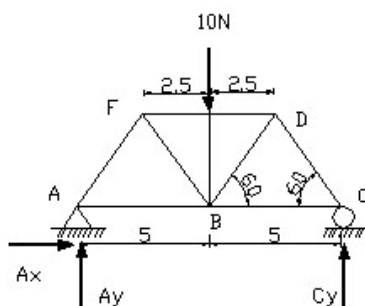
$$8 = 8$$

$$M + R > 2j \Rightarrow n = (M + R) - 2j$$

$$M + R = 2j \Rightarrow n = 0$$

$$M + R < 2j \Rightarrow n < 0$$

روش های آنالیز فریپاها:



1) روش مفصل (تعادل مفاصل):

در میله های فریپا، در یک عضو یا نیروی کششی وجود دارد و یا نیروی فشاری به عبارت دیگر فقط یک نیروی مموری در امتداد میله وجود دارد و میله لنگر را تحمل نمی کند.

$$M = 9, j = 6, R = 3 \Rightarrow M + 3 = 2j \Rightarrow 9 + 3 = 12 = 2 \times 6 = 12$$

معین داخلی و از لفاظ خارجی نیز معین است.

$$+\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$+\sum M_A = 0 \Rightarrow$$

$$-10 \times 5 + C_y \times 10 = 0 \Rightarrow C_y = 5N \uparrow$$

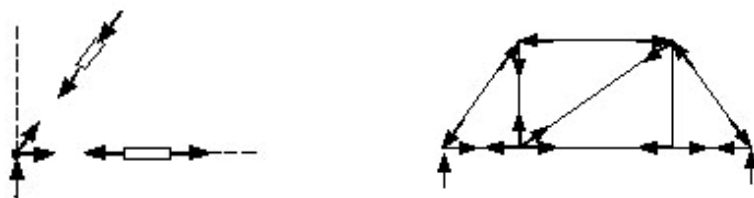
$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow$$

$$A_y + 5 - 10 = 0 \Rightarrow A_y = 5N \uparrow$$

$$cont: +\sum M_B = 0 \Rightarrow$$

$$5 \times 10 - 10 \times 5 = 0$$

تعداد برقرار است

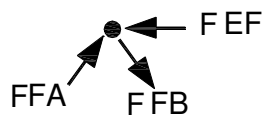


گره A:

$$\begin{aligned}
 + \uparrow \sum F_y = 0 &\Rightarrow \\
 - F_{AF} \sin 60^\circ + 5 = 0 &\Rightarrow F_{AF} = 5.77 N \\
 + \uparrow \sum F_x = 0 &\Rightarrow \\
 - F_{AF} \cos 60^\circ + F_{AB} = 0 &\Rightarrow F_{AB} = 2.88 N
 \end{aligned}$$

فشاری

کششی

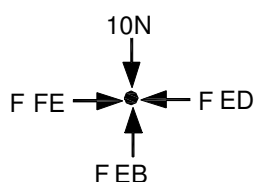


$$\begin{aligned}
 + \uparrow \sum F_y = 0 &\Rightarrow \text{گره 5:} \\
 5.77 \sin 60^\circ - F_{FB} \sin 60^\circ = 0 &\Rightarrow F_{FB} = 5.77 N \\
 + \uparrow \sum F_x = 0 &\Rightarrow \\
 F_{FA} \cos 60^\circ + F_{FB} \sin 60^\circ - F_{EF} = 0 &\Rightarrow \\
 2 \times 5.77 \times \sin 60^\circ - F_{EF} = 0 &\Rightarrow F_{EF} = 10 N
 \end{aligned}$$

کششی

فشاری

گره E:

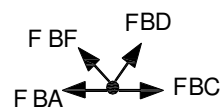


$$\begin{aligned}
 + \uparrow \sum F_y = 0 &\Rightarrow \\
 F_{EB} - 10 = 0 &\Rightarrow F_{EB} = 10 N \\
 + \rightarrow \sum F_x = 0 &\Rightarrow \\
 - F_{ED} + F_{FE} = 0 &\Rightarrow -F_{ED} + 10 = 0 \Rightarrow F_{ED} = 10 N
 \end{aligned}$$

فشاری

فشاری

گره B:

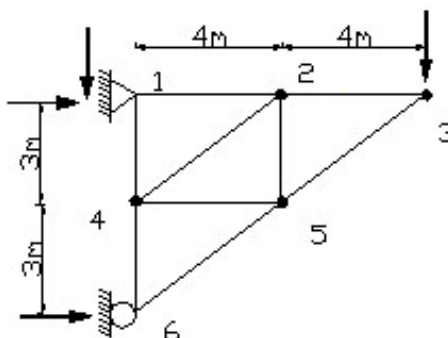


$$\begin{aligned}
 + \uparrow \sum F_y = 0 &\Rightarrow \\
 F_{BF} \sin 60^\circ + F_{BD} \sin 60^\circ - F_{BE} = 0 &\Rightarrow \\
 5.77 \times 0.87 + F_{BD} \times 0.87 - 10 = 0 &\Rightarrow F_{BD} = 5.77 N \\
 + \rightarrow \sum F_x = 0 &\Rightarrow \\
 - F_{BF} \cos 60^\circ + F_{BD} \cos 60^\circ + F_{BC} - F_{BA} = 0 &\Rightarrow \\
 - 5.77 \cos 60^\circ + 5.77 \cos 60^\circ + F_{BC} - 2.88 = 0 &\Rightarrow \\
 F_{BC} = 2.88 N
 \end{aligned}$$

کششی

کششی

مثال:



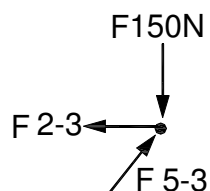
گره 3:

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow$$

$$F_{(5-3)} \times \frac{3}{5} - 150 = 0 \Rightarrow F_{(5-3)} = 250N$$

$$+\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow$$

$$F_{(5-3)} \times \frac{4}{3} - F_{(2-3)} = 0 \Rightarrow F_{(2-3)} = 200N$$



عکس العمل ها:

فشاری

کششی

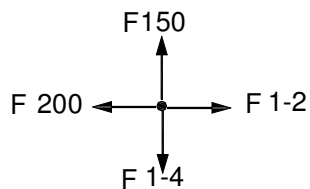
گره 1:

$$+\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow$$

$$F_{(1-2)} - 200 = 0 \Rightarrow F_{(1-2)} = 200N$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow$$

$$-F_{(1-4)} + 150 = 0 \Rightarrow F_{(1-4)} = 150N$$



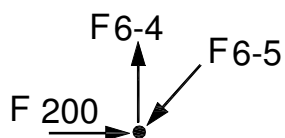
کششی

کششی

گره 6:

فشاری

کششی



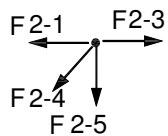
$$+\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow$$

$$-F_{(6-5)} \times \frac{4}{5} + 200 = 0 \Rightarrow F_{(6-5)} = 250N$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow$$

$$-F_{(6-5)} \times \frac{3}{5} + F_{(6-5)} = 0 \Rightarrow F_{(6-5)} = 150N$$

گره 2:



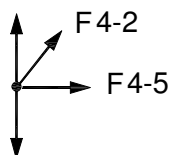
$$+ \rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow$$

$$- F_{(2-4)} \times \frac{4}{3} - F_{(2-1)} + F_{(2+3)} = 0 \Rightarrow F_{(2-4)} = 0$$

$$+ \uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow$$

$$- F_{(2-5)} = 0 \Rightarrow F_{(2-5)} = 0$$

گره 4:



$$+ \rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow F_{(4-5)} = 0$$