جزوه دینامیک

استاد: جناب آقای دکتر صادق اعتدالی

به نوشته ی محمد حسین سلیمانی

تنظیم : افشین طاهری

ترم دوم ۸۹ - ۱۳۸۸

جلسه اول

Subject : بنام خدا
Year. Month. Date.

تعریف علم مکانیک :

علمی است که اجسام را در وضعیت سکون و یا حرکت تحت تاثیر نیروها وارده بررسی و تحلیل می‌کند.

علم مکانیک به سه قسمت زیر تقسیم می‌شود.

۱- مکانیک اجسام صلب { الف) ایستایی (استاتیک) ← جسم ساکن است.

ب) پویایی (دینامیک) ← جسم متحرک است.

۲- مکانیک اجسام شکل پذیر

۳- مکانیک شاره‌ها (سیالات)

مفاهیم و اصول پایه :

مفاهیم بنیادی که در مکانیک به کار برده می‌شوند عبارتند از فضا، زمان، جرم و نیرو.

فضا: عبارت است از ناحیه‌ای هندسی که واقعه فیزیکی درون آن اتفاق می‌افتد.

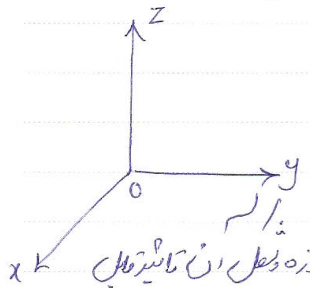
زمان: وسیله سنجش توالی وقایع فیزیکی است و واحد آن ثانیه می‌باشد

جرم: سنجش کمی نیروی اینرسی که با نیروی جاذبه ثقل رابطه مستقیم دارد.

نیرو: عمل یک جسم بر جسم دیگر را نیرو می‌نامند؛ که دو جسم یا در تماس باید باشند یا هیچ تماس ندارند.

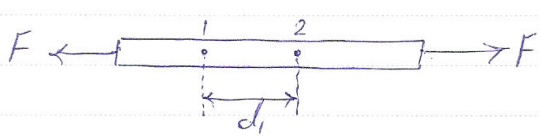
انرژی: توانایی یک جسم برای مقاومت در برابر تغییر حرکت است.

دستگاه مرجع: یک سیستم مختصات ثابت است که حرکت نسبت به آن سنجیده می‌شود. خود حرکت نمی‌کند و در نقطه مرجع استوار است.



ذره مادی: نقطه بسیار کوچکی از ماده که در اثر تغییر جهت نیرو، تنها اینجا دخیل می‌شود و اندازه و شکل آن تاثیر قابل ملاحظه‌ای در حل مسئله ندارد.

جسم صلب: جسمی که فاصله نقاط آن در طول حرکت ثابت است یعنی جسم کشیده یا فشرده نمی‌شود.



منظور از بررسی سینماتیک، بررسی پارامترهای حرکت (موقعیت، سرعت، شتاب) بدون در نظر گرفتن عامل آن است.

منظور از بررسی سینتیک، بررسی عوامل بوجود آورنده حرکت یعنی نیروها می‌باشد.

Subject :
Year. Month. Date.

سیستم واحدها اندازه‌گیری:

	زمان	طول	جرم
بین المللی (SI)	sec	m	kg
انگلیسی (FPS)	sec	ft	Lb

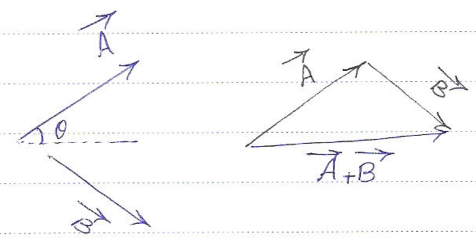
کمیت ها بر دو نوع اند:

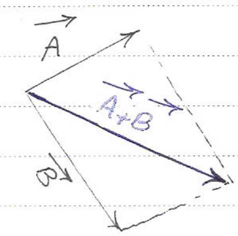
۱- کمیت های عددی که فقط مقدار دارند. مانند: جرم، زمان و ...

۲- کمیت های برداری که علاوه بر مقدار جهت نیز دارند.

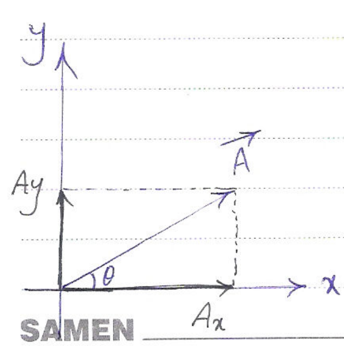
جمع برداری دو بردار:

روش ترسیمی:
۱- روش مثلث
۲- روش متوازی الاضلاع





تجزیه بردارها در حالت دو بعدی



$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j}$$

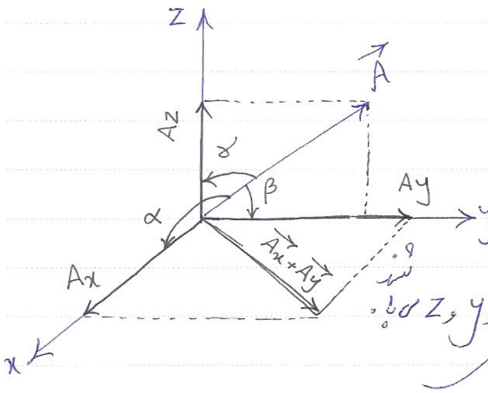
$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

$A_x = |A| \cos\theta$

$\tan\theta = \dfrac{A_y}{A_x} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\dfrac{A_y}{A_x}$

$A_y = |A| \sin\theta$

تجزیه بردار در فضا سه بعدی :



$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$

α و β و γ زوایای بردار A با جهت مثبت محورهای x و y و z می باشند.

$A_x = |A| \cos\alpha$

$|A| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$

$A_y = |A| \cos\beta$

$A_z = |A| \cos\gamma$

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

$\vec{e_A} = \cos\alpha\,\hat{i} + \cos\beta\,\hat{j} + \cos\gamma\,\hat{k}$

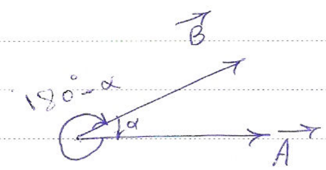
بردار واحد بردار $\vec{A}$ = $\vec{e_A}$

$\vec{e_A} = \dfrac{A}{|\vec{A}|}$

Subject :
Year. Month. Date.

ضرب:
- اسکالر × اسکالر $3 \times 5 = 15$
- اسکالر × بردار $C\vec{A} = \vec{B}$ ← اسکالر
- حاصلضرب برداری ←
  - حاصلضرب داخلی $\vec{A} \cdot \vec{B}$ ← عدد
  - حاصلضرب خارجی $\vec{A} \times \vec{B}$ ← بردار

حاصلضرب داخلی دو بردار



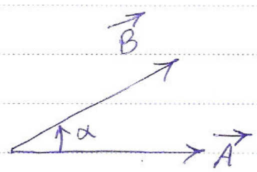
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |A||B| \cos\alpha$$

$$i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1$$
$$i \cdot j = j \cdot k = i \cdot k = 0$$

$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$$
$$\vec{B} = B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

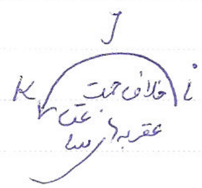
حاصلضرب خارجی دو بردار



$$\vec{A} \times \vec{B} = |A||B| \sin\alpha = -(\vec{B} \times \vec{A})$$

Subject :
Year. Month. Date.

حاصلضرب خارجی بردارهای یکه : i و j و k



$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$ $\qquad$ $\vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}$

$\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}$ $\qquad$ $\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$

$\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}$ $\qquad$ $\vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}$

$$\vec{A}=A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k}$$
$$\vec{B}=B_x\vec{i}+B_y\vec{j}+B_z\vec{k}$$

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{A}\times\vec{B}=+(A_yB_z-A_zB_y)\vec{i}-(A_xB_z-A_zB_x)\vec{j}+(A_xB_y-A_yB_x)\vec{k}$$

بنام خدا $\qquad$ جلسه دوم

مشتق توابع برداری :

مشتق توابع برداری همواره یک بردار است. $\qquad$ $3\vec{i}+4\vec{j}+5\vec{k}$

تابع برداری : $f(t)\vec{i}+g(t)\vec{j}+h(t)\vec{k}$

فرض کنید هدف بدست آوردن مشتق تابع برداری P نسبت به متغیر زمان (t) باشد، در اینصورت اگر $\vec{P}=P_x\vec{i}+P_y\vec{j}+P_z\vec{k}$ آنگاه :

$$\frac{d\vec{P}}{dt}=\frac{dP_x}{dt}\vec{i}+\frac{dP_y}{dt}\vec{j}+\frac{dP_z}{dt}\vec{k}=\dot{\vec{P}}$$

آهنگ تغییر بردار $\vec{P}$

4

$$\Rightarrow \vec{\dot P} = \dot P_x \vec i + \dot P_y \vec j + \dot P_z \vec k$$

$$\frac{d(P.Q)}{dt} = \frac{dP}{dt}.Q + P.\frac{dQ}{dt} \longrightarrow$$ جواب: تابع برحسب t

$$\frac{d(P \times Q)}{dt} = \frac{dP}{dt} \times Q + P \times \frac{dQ}{dt} \longrightarrow$$ جواب: تابع برداری برحسب $\vec i, \vec j, \vec k$

به عنوان مثال، مشتق تابع برداری A نسبت به زمان بصورت زیر نوشته می شود.

$$\vec A = t^2(\sin 3t\,\vec i - \cos 3t\,\vec j) = (t^2 \sin 3t)\vec i + (-t^2 \cos 3t)\vec j$$

$$\frac{dA}{dt} = (2t \sin 3t + 3t^2 \cos 3t)\vec i + (3t^2 \sin 3t - 2t \cos 3t)\vec j$$

مثال:

$$\vec A = 5t\vec i + 8\vec j$$

$$\vec B = 3t^2 \vec i + 4t^2 \vec j$$

$$\vec A . \vec B = 15t^3 + 32t^2 \longrightarrow \frac{d(\vec A.\vec B)}{dt} = 45t^2 + 64t$$

$$\frac{d(\vec A.\vec B)}{dt} = \frac{d\vec A}{dt}.\vec B + \vec A.\frac{d\vec B}{dt} = (5\vec i)(3t^2\vec i + 4t^2\vec j) + (5t\vec i + 8\vec j)(6t\vec i + 8t\vec j)$$

$$= 15t^3 + 32t^2$$

$$\vec A \times \vec B = (20t^3 - 24t^2)\vec k$$

$$\frac{d(\vec A \times \vec B)}{dt} = (60t^2 - 48t)\vec k$$

$$\frac{d(\vec{A}\times\vec{B})}{dt} = \frac{d\vec{A}}{dt}\times\vec{B} + \vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{dt}$$

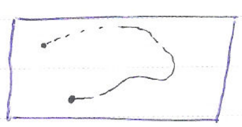
فصل اول سینماتیک ذره مادی

یک ذره مادی، دو شکل حرکتی دارد، حرکت مستقیم الخط، حرکت منحنی (صفحه‌ای و فضایی)

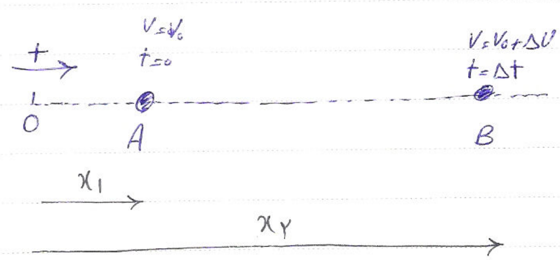
حرکت یک جسم بر روی یک مسیر راست را حرکت مستقیم الخط گویند. مانند حرکت روی یک سطح شیبدار.

هرگاه حرکت یک جسم روی یک مسیر منحنی باشد، حرکت منحنی الخط خواهد بود. در اینصورت اگر در تمامی زمان حرکت بتوان صفحه‌ای را در نظر گرفت که در آن موقعیت جسم در طول کل حرکت در آن صفحه انجام شود حرکت صفحه‌ای و در غیر اینصورت، حرکت فضایی است.

در حل مسائل ابتدا باید نقطه مرجع را تعیین نمود. انتخاب نقطه مرجع اختیاری است. ولی در طول حل مسئله نباید آن را تغییر دهیم. سپس باید جهت مثبت حرکت را تعیین کنیم.



حرکت مستقیم الخط ذره مادی:



سرعت متوسط $\quad \vec{v}_{ave} = \dfrac{\vec{\Delta x}}{\Delta t} = \dfrac{x_2 - x_1}{\Delta t}$

سرعت لحظه ای $\quad \vec{V} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{dx}{dt} = \vec{\dot{x}}$

$$\Rightarrow \vec{V} = \frac{\vec{dx}}{dt} = \vec{\dot{x}}$$

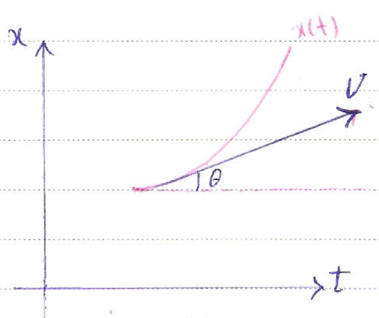
شتاب متوسط : $\quad \vec{a}_{ave} = \dfrac{\vec{\Delta V}}{\Delta t}$

شتاب لحظه ای ، $\quad \vec{a} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\vec{\Delta V}}{\Delta t} = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2x}{dt^2} = \vec{\ddot{x}}$

$$\Rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{dV}}{dt} = \frac{dV}{dx} \times \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{V} = V\frac{dV}{dx}$$

بررسی مفاهیم فوق درباره منحنی های حرکت :

1)



نمودار جابجایی-زمان

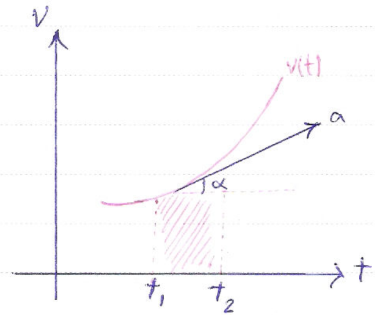
$V = \dfrac{dx}{dt} = \tan\theta$

$V(t) = \dfrac{dx}{dt} \longrightarrow dx = V dt$

$$\Rightarrow \int_{x_1}^{x_2} dx = \int_{t_1}^{t_2} V(t)\,dt \Rightarrow x_2 - x_1 = \int_{t_1}^{t_2} V(t)\,dt$$

Subject :
Year. Month. Date.

۲)



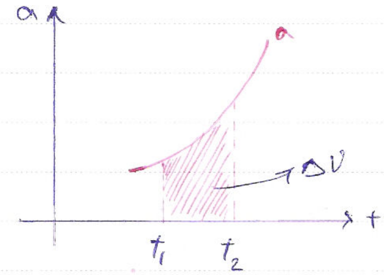
نمودار سرعت - زمان

$$a(t)=\frac{dv}{dt} \quad , \quad a=\frac{dv}{dt}=\tan\alpha$$

$$\Rightarrow \int_{v_1}^{v_2} dv=\int_{t_1}^{t_2} a(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \Delta v=v_2-v_1=\int_{t_1}^{t_2} a(t)\,dt$$

۳)



نمودار شتاب - زمان

۲) به عبارت دیگر Δx (تغییرات جابجایی) برابر است با مساحت محصور بین منحنی v و محور زمان در فواصل زمانی t_1 و t_2.

۳) به عبارت دیگر Δv (تغییرات سرعت) برابر است با مساحت محصور بین منحنی شتاب و محور زمان در فواصل زمانی t_1 و t_2.

مثال: ذره‌ای با معادله مکان $x=6t^2-t^3$، روی خط راست حرکت می‌کند. مطلوبست معادله‌های سرعت و شتاب و رسم منحنی‌های حرکت.

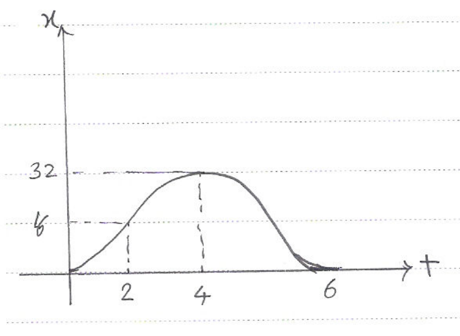
$$x=6t^2-t^3$$

$$v=12t-3t^2$$

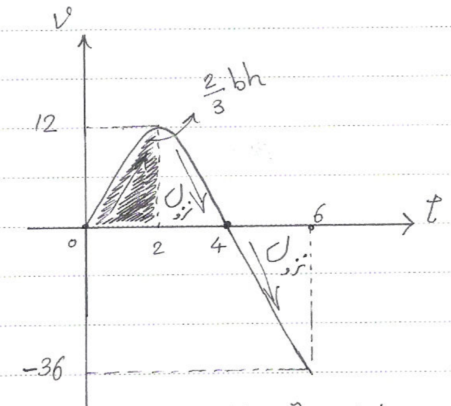
$$a=12-6t$$

SAMEN

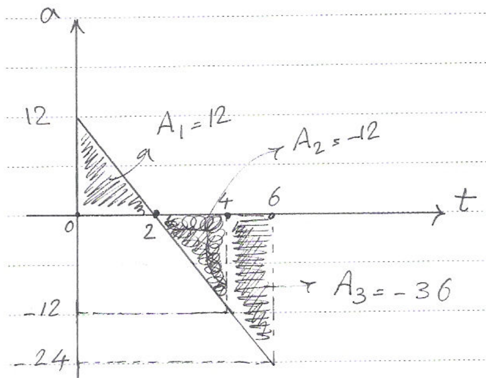
Subject :
Year. Month. Date.



نمودار جابجایی - زمان



نمودار سرعت - زمان



نمودار شتاب - زمان

تعیین حرکت یک ذره مادی:

بسته به اینکه شتاب تابعی از زمان، تغییر مکان، تابعی از سرعت و یا ثابت باشد، مسئله را دنبال می‌کنیم.

۱- شتاب تابعی از زمان باشد، یعنی $a=f(t)$

حال بررسی می‌کنیم در این حالت دیگر حرکت یعنی سرعت و جابجا چگونه تغییر می‌کند؟

$$a=f(t)=\frac{dv}{dt} \rightarrow dv=f(t)\,dt$$

$$\rightarrow \int_{v_0}^{v} dv=\int_{t_0=0}^{t} f(t)\,dt \Rightarrow v=v_0+\int_{0}^{t} f(t)\,dt$$

$$v = g(t) \quad dt = \frac{dx}{dt} \longrightarrow dx = g(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t g(t)\,dt \longrightarrow x = x + \int_0^t g(t)\,dt = h(t)$$

۲ـ شتاب تابعی از تغییر مکان باشد یعنی $a = f(x)$

$$a = v\frac{dv}{dx} = f(x) \Rightarrow a\,dx = v\,dv \longrightarrow f(x)\,dx = v\,dv$$

$$\Rightarrow \int f(x)\,dx = \int v\,dv \longrightarrow \frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$$

$$\Rightarrow v^2 = v_0^2 + 2\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = g(x)$$

۳ـ شتاب تابعی از سرعت باشد یعنی $a = f(v)$

$$a = f(v) = \frac{dv}{dt} \longrightarrow dt = \frac{dv}{f(v)} \longrightarrow \int_0^t dt = \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{f(v)} = g(v)$$

$$\Rightarrow t = \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{f(v)} = g(v)$$

Subject :
Year. Month. Date.

$$a = v\frac{dv}{dx} = f(v) \longrightarrow \frac{v\,dv}{f(v)} = dx \longrightarrow \int_{v_0}^{v}\frac{v\,dv}{f(v)} = \int_{x_0}^{x} dx$$

$$\Rightarrow x = x_0 + \int_{v_0}^{v}\frac{v\,dv}{f(v)}$$

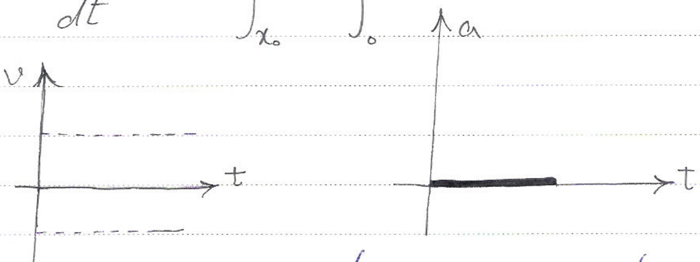
۴ـ شتاب ثابت، دو حالت دارد ← الف) شتاب صفر باشد، $a = 0$

ب) شتاب ثابت باشد $a_t = a$

الف) شتاب صفر باشد که به این حرکت، حرکت مستقیم الخط با سرعت یکنواخت گویند.

$$a = 0 \longrightarrow \frac{dv}{dt} = 0 \longrightarrow v = v_0 = cte$$

$$v = \frac{dx}{dt} \longrightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_{0}^{t} v\,dt \longrightarrow x = x + vt$$



ب) شتاب ثابت باشد، به این حرکت، حرکت مستقیم الخط با شتاب یکنواخت گویند.

$\begin{cases} \text{if } a > 0 & \text{شتاب تند شونده} \\ \text{if } a < 0 & \text{شتاب کند شونده} \end{cases}$

$\begin{cases} \text{if } av > 0 & \text{حرکت تند شونده} \\ \text{if } av < 0 & \text{حرکت کند شونده} \end{cases}$

شرایط اولیه : $t=0$ ، $V=V_0$ ، $x=x_0$

$$a=\frac{dv}{dt} \longrightarrow \int_{v_0}^{v} dv=\int_{0}^{t} a\,dt \longrightarrow v=at+v_0$$

ثابت

$$v=\frac{dx}{dt} \longrightarrow \int_{x_0}^{x} dx=\int_{t_0=0}^{t} v\,dt \longrightarrow \int_{x_0}^{x} dx=\int_{t_0=0}^{t} (at+v_0)\,dt$$

$$\Rightarrow x-x_0=\frac{1}{2}at^2+v_0t \Rightarrow x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0$$

$$a=v\frac{dv}{dx} \longrightarrow \int_{x_0}^{x} a\,dx=\int_{v_0}^{v} v\,dv \longrightarrow a(x-x_0)=\frac{v^2}{2}-\frac{v_0^2}{2}$$

$$\Rightarrow v^2-v_0^2=2a(x-x_0)$$

بنام خدا :

جلسه سوم

حل چند مثال :

- در یک نیم بیضی از تفنگ رابطه $a=-kv$ که رابطه بین سرعت و شتاب پیستون و لوله تفنگ می باشد برقرار است :

الف) v برحسب t ب) x برحسب t ج) v برحسب x

$$v=\frac{dx}{dt} \quad , \quad a=\frac{dv}{dt} \quad , \quad a=\frac{v\,dv}{dx}$$

$$a=-kv=\frac{dv}{dt}$$

$$\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v}=\int_0^t -k\,dt \longrightarrow \ln v-\ln v_0=-kt \Rightarrow \ln\frac{v}{v_0}=-kt$$

$$\Rightarrow v=v_0 e^{-kt}$$ الف

$$v=\frac{dx}{dt}=v_0e^{-kt} \longrightarrow \int_0^x dx=\int_0^t v_0e^{-kt}\,dt \Rightarrow x=v_0\left(-\frac{1}{k}e^{-kt}\right)_0^t$$

$$\Rightarrow x=\frac{v_0}{k}\left(1-e^{-kt}\right)$$ ب

$$a=-kv$$

$$a=\frac{v\,dv}{dx} \Rightarrow -kv=\frac{v\,dv}{dx} \Rightarrow v=v_0-kx$$

بررسی صحت محاسبات :

$$\begin{cases} V = V_0 e^{-kt} \longrightarrow e^{-kt} = \dfrac{V}{V_0} \\ x = \dfrac{V}{k}\left(1 - e^{-kt}\right) \xrightarrow{②} x = \dfrac{V}{k}\left(1 - \dfrac{V}{V_0}\right) = \dfrac{V_0}{k} - \dfrac{V}{k} \end{cases}$$

$$\Rightarrow V = V_0 - kx$$

* مکان ذره‌ای برروی خط راست با رابطه $x = x^3 - 6t^2 - 15t + 40$ توصیف می‌شود.

ft sec

الف) سرعت ذره در چه زمانی صفر است ؟

ب) در این لحظه ذره در کجاست و چه مسافتی را پیموده است ؟

ج) شتاب ذره در این لحظه چقدر است ؟

د) ذره در فاصله زمانی 4 تا 6 ثانیه چه مسافتی را پیموده است ؟

$$V = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 12t - 15$$

$$a = \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = 6t - 12$$

الف : $V = 0 \longrightarrow 3t^2 - 12t - 15 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = -1\,sec \; \times \\ t = 5\,sec \end{cases}$$

ب) $x_{(t,5)} = -60\,ft$

برای تعیین مسافت ابتدا باید مشخص بشود که ذره در چه جهتی حرکت می‌کند . برای این کار لازم است ابتدا V را تعیین علامت کنیم .

$V = 3t^2 - 12t - 15$

	-1	sec	5	
موافق علامت a		مخالف علامت a		موافق علامت a
		−		+

$\Rightarrow$ if $\quad 0<t<5 \Rightarrow v<0$

$\Rightarrow$ if $\quad t>5 \Rightarrow v>0$

$\Rightarrow$ مسافت طی شده $= -60 - 40 = -100^{ft}$

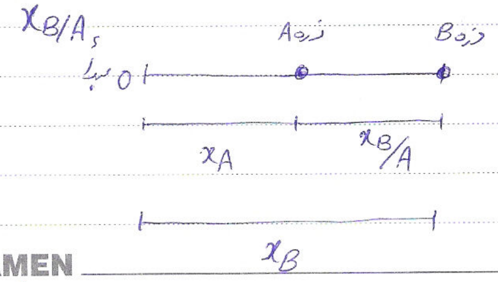
$$4 \le t < 5 \;\; v<0 \begin{cases} x_5 = -60 \\ x_4 = -52 \end{cases} \longrightarrow$$ مسافت طی شده $= x_5 - x_4 = -8^{ft}$

مسافت کل $= -50 + 60 = 10^{ft}$

$$5 \le t \le 6 \;\; v>0 \begin{cases} x_6 = -50 \\ x_5 = -60 \end{cases} \longrightarrow$$ مسافت طی شده $= |-8| + |10| = 18^{ft}$

حرکت چندین ذره:

دو ذره A و B را در نظر بگیرید که روی یک خط راست حرکت می‌کنند. اگر با انتخاب مبدأ O، مختصات A و B را با x_A و x_B نمایش دهیم، رابطه مختصه مکانی نسبی B نسبت به A را با $x_{B/A}$ نمایش می‌دهند.



$$x_{B/A} = x_B - x_A \quad \text{یا} \quad x_B = x_A + x_{B/A}$$

مشتق ↓

$$V_{B/A} = V_B - V_A \quad \text{یا} \quad V_B = V_A + V_{B/A}$$

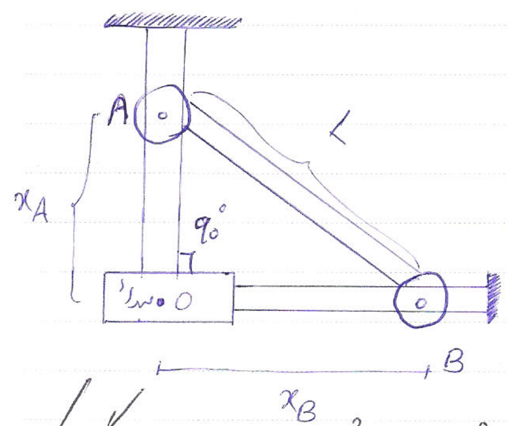
مشتق ↓

$$a_{B/A} = a_B - a_A \quad \text{یا} \quad a_B = a_A + a_{B/A}$$

حرکت‌های وابسته:

اگر مکان یک ذره به مکان یک ذره یا ذره‌های دیگر بستگی داشته باشد، به چنین حرکتی، حرکت وابسته گویند.

مثال:



رابطه وابستگی حرکت

$$x_A^2(t) + x_B^2(t) = L^2$$

مشتق ↓

$$2x_A(t)\frac{dx_A}{dt} + 2x_B(t)\frac{dx_B}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow x_A V_A + x_B V_B = 0 \rightarrow$$ رابطه وابستگی سرعت

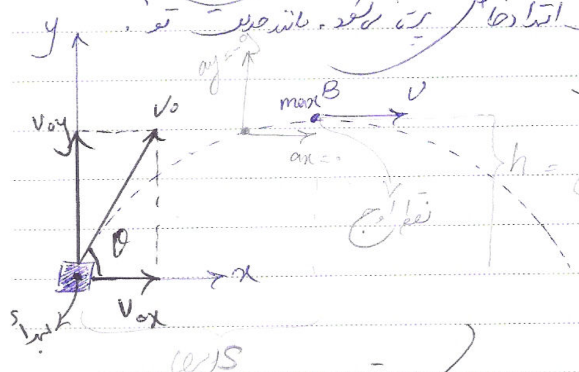
Subject :
Year. Month. Date.

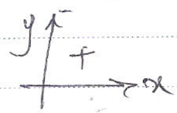
$$\frac{dx_A}{dt} v_A + x_A \frac{dv_A}{dt} + \frac{dx_B}{dt} v_B + x_B \frac{dv_B}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow v_A^2 + v_B^2 + x_A a_A + x_B a_B = 0$$

حرکت منحنی الخط ذره‌های در صفحه :

هرگاه ذره‌ای روی منحنی غیر از خط راست حرکت کند، حرکت منحنی الخط است. نمونه‌ای از این حرکت‌ها، حرکت پرتابه است که طی آن، جسم با یک سرعت اولیه در یک امتداد خاص پرتاب می‌شود. مانند حرکت توپ.





$V_{0x} = V_0 \cos\theta$ $\qquad a_x = 0$

$V_{0y} = V_0 \sin\theta$ $\qquad a_y = -g$

$a_x = 0 \Rightarrow$ حرکت در راستای x، حرکت با سرعت ثابت است.

$a_y = -g \Rightarrow$ در راستای y، حرکت با شتاب ثابت است.

شرط اولیه : $t=0 \longrightarrow x=0$

$\qquad\qquad \longrightarrow y=0$

$V=V_0$

حرکت در راستای افق :

$$a_x = 0 \longrightarrow \frac{dv}{dt} = 0 \longrightarrow v_x = cte \Rightarrow V_x = V_0 \cos\theta$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} \longrightarrow (V_0 \cos\theta)\, dt = dx \Rightarrow x = (V_0 \cos\theta)\, t$$

$$a_y = -g \longrightarrow a_y = \frac{dv_y}{dt} \longrightarrow \int_{V_0 \sin\theta}^{v_y} dv_y = \int_0^t -g\, dt$$

$$\Rightarrow v_y = V_0 \sin\theta - gt$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} \longrightarrow \int_0^y dy = \int_0^t v_y\, dt = \int_0^t (V_0 \sin\theta - gt)\, dt$$

$$\Rightarrow y = (V_0 \sin\theta)\, t - \frac{1}{2} g t^2$$

در نقطه B :

$$v_y = 0 \longrightarrow V_0 \sin\theta - gt = 0 \Rightarrow t = \frac{V_0 \sin\theta}{g} \longrightarrow$$ زمان اوج

x در راستای S :

$$x = (V_0 \cos\theta)\, t \Rightarrow S = (V_0 \cos\theta)\left(\frac{V_0 \sin\theta}{g}\right)$$

$$\Rightarrow S = \frac{V_0^2 \sin 2\theta}{2g}$$

y در راستای h: $y = -\frac{1}{2}gt^2 + (V_0 \sin\theta)t$

$$\Rightarrow h = \frac{V_0^2}{2g}\sin^2\theta$$

معادله مسیر حرکت:

* ثابت کنید معادله حرکت پرتابه سهمی است!

$y = f(x)$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + (V_0 \sin\theta)t$$

$$x = (V_0 \cos\theta)t \longrightarrow t = \frac{x}{V_0 \cos\theta}$$

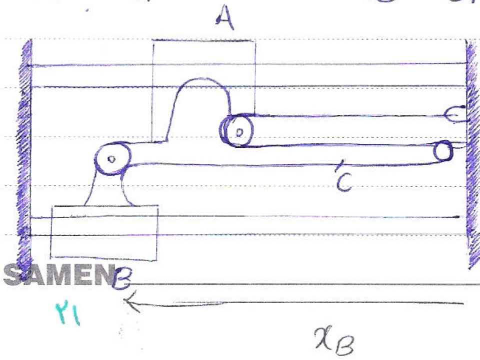
$$y = x\tan\theta - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{V_0^2\cos^2\theta} \longrightarrow y = x\tan\theta - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{V_0^2}\sec^2\theta$$

بنام خدا

جلسه چهارم

مثال: در وضعیت نشان داده شده طوقه B به سمت چپ با سرعت ثابت $300\ mm/s$ حرکت می‌کند. مطلوبست

الف) سرعت طوقه A، ب) سرعت قسمت C از کابل، ج) سرعت قسمت C از کابل نسبت به طوقه B.



$L = cte$

$$\Rightarrow 2x_A + x_B + x_B - x_A = L = cte$$

$$\Rightarrow x_A + 2x_B = l$$

$\xrightarrow{\text{مشتق‌گیری}} \quad x_A + 2x_B = 0 \Rightarrow V_A + 2V_B = 0$

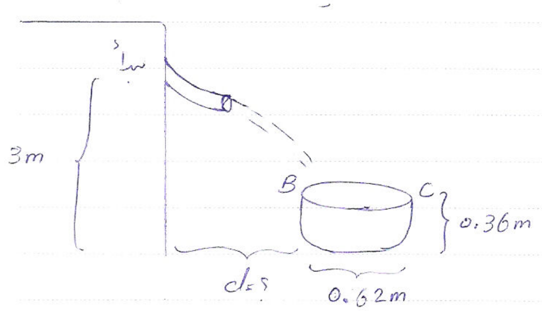
الف) $V_A = -2V_B = -600 \ mm/s$

ب) $2x_A + x_C = cte$

$2V_A + V_C = 0 \longrightarrow V_C = -2V_A = 1200 \ mm/s$

ج) $V_{C/B} = V_C - V_B = 1200 - 300 = 900 \ mm/s$

* مثال : از یک ناودان آب با سرعت اولیه $0.76 \ m/s$ و با زاویه 15° نسبت به افق پایین می‌ریزد. گستره مقادیر d را طوری تعیین کنید که آب داخل ظرف BC بریزد. (باید آب بین نقطه B و C فرود آید)



در راستای افق $d = d + 0.62$

در فاصله قائم $3 - 0.36 = 2.64$

حرکت قائم :

$$\begin{cases} y = y_0 + (V_{0y})t - \frac{1}{2} g t^2 \\ V_{0y} = -V_0 \sin 15^\circ = -0.76 \sin 15^\circ \\ \qquad = -0.19670 \ m/s \end{cases}$$

Subject :
Year. Month. Date.

$y - y_0 = 3 - 0.36 = 2.64$

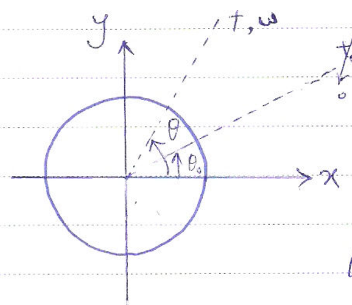
$\downarrow$

$$4.905t^2 + 0.1961t - 2.64 = 0 \rightarrow \begin{cases} t = 0.7139 \ \checkmark \\ t = -\infty \ \times \end{cases}$$

حرکت افقی :

$$x = (V_{0x})t = (V_0 \cos 15^\circ)t = 0.524\,m \Rightarrow d < 0.524\,m$$

حرکت ذره مادی بر روی مسیر دایره‌ای شکل :



ذره در لحظه $t = 0$ با سرعت زاویه‌ای ω_0 در موقعیت θ_0 قرار دارد، و در لحظه t با سرعت زاویه‌ای ω در موقعیت θ قرار دارد.

سرعت زاویه‌ای $\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \theta}{\Delta t} = \dfrac{d\vec{\theta}}{dt} = \vec{\dot{\theta}} \Rightarrow \vec{\omega} = \vec{\dot{\theta}}$

شتاب زاویه‌ای $\vec{\alpha} = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \omega}{\Delta t} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\dot{\omega}} = \vec{\ddot{\theta}} \Rightarrow \vec{\alpha} = \vec{\dot{\omega}} = \vec{\ddot{\theta}}$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dt} = \omega \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \alpha = \omega \frac{d\omega}{d\theta}$$

که شبیه همان پارامترهای حرکت خطی یعنی x، v، a می‌باشد. لذا برای حالتهای مختلف زیر: روابط بین

Subject :
Year. Month. Date.

۱) $\alpha(t)$: α تابعی از زمان

۲) $\alpha(\omega)$: α تابعی از سرعت زاویه‌ای

۳) $\alpha(\theta)$: α تابعی از جابجایی زاویه‌ای

۴) $\alpha = 0$: سرعت زاویه‌ای ثابت

۵) $\alpha = cte$: شتاب زاویه‌ای یکنواخت

با کمک ۳ نیز را می‌توان انتگرال گرفت.

به عنوان مثال (حالت 5)

$a \rightarrow \alpha$

$V \rightarrow \omega$

$x \rightarrow \theta$

$$\alpha = cte \begin{cases} \theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t + \theta_0 \\ \omega = \omega_0 + \alpha t \\ 2\alpha(\theta - \theta_0) = \omega^2 - \omega_0^2 \end{cases}$$

	جابجایی	سرعت	شتاب
حرکت مستقیم الخط در دستگاه قائم	$\vec{x}$	$\vec{V} = \dot{\vec{x}}$	$\vec{a} = \dot{\vec{V}} = \ddot{\vec{x}}$
حرکت زاویه‌ای	$\vec{\theta}$	$\vec{\omega} = \dot{\vec{\theta}}$	$\vec{\alpha} = \dot{\vec{\omega}} = \ddot{\vec{\theta}}$

Subject :
Year. Month. Date.

مثال: حرکت زاویه‌ای عضوی از یک مکانیزم، چنان برنامه‌ریزی شده که نسبت تغییرات سرعت زاویه‌ای به جابجایی زاویه‌ای برابر ثابت k است. در شرایط اولیه $t=0$، مقادیر θ صفر است و $\omega = \omega_0$، مطلوبست تعیین θ، ω و α برحسب زمان؟

$$\frac{\dot{\omega}}{\theta} = k \longrightarrow \frac{\ddot{\theta}}{\theta} = k \longrightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} - k\theta = 0$$

$$\begin{cases} t = 0 \\ \theta = 0 \\ \omega = 0 \end{cases} \qquad \theta = C_1 e^{\sqrt{k}t} + C_2 e^{-\sqrt{k}t}$$

$$\omega = \dot{\theta} = C_1\sqrt{k}\, e^{\sqrt{k}t} - C_2\sqrt{k}\, e^{-\sqrt{k}t}$$

شرایط اولیه $t=0$:

$$\begin{cases} \theta = 0 \longrightarrow C_1 + C_2 = 0 \\ \omega = \omega_0 \longrightarrow \omega_0 = C_1\sqrt{k} - C_2\sqrt{k} \Rightarrow C_1 - C_2 = \dfrac{\omega_0}{\sqrt{k}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = \dfrac{\omega_0}{2\sqrt{k}} \\ C_2 = \dfrac{-\omega_0}{+2\sqrt{k}} \end{cases}$$

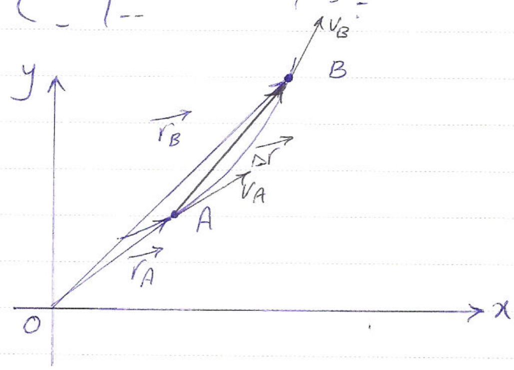
$$\theta = \frac{\omega_0}{2\sqrt{k}}\left(e^{\sqrt{k}t} - e^{-\sqrt{k}t}\right) = \frac{\omega_0}{\sqrt{k}} \sinh(\sqrt{k}\,t)$$

$$\omega = \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \omega_0 Ch(\sqrt{k}t)$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = +\omega_0 \sqrt{k}\, Sinh(\sqrt{k}t)$$

حرکت منحنی الخط یک ذره مادی :

اگر یک ذره مادی روی یک مسیر منحنی الخط حرکت کند به چنین حرکتی منحنی الخط گویند. در این حرکت بردار سرعت مماس بر مسیر حرکت است.



$$\begin{cases} \vec{\Delta r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A \\ \vec{v}_{ave} = \dfrac{\vec{\Delta r}}{\Delta t} \\ v_t = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\vec{\Delta r}}{\Delta t} = \dfrac{dr}{dt} = \vec{\dot{r}} \end{cases}$$

مشتق تابع برداری

$$\begin{cases} \vec{a}_{ave} = \dfrac{\vec{\Delta v}}{\Delta t} \\ a(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\vec{\Delta v}}{\Delta t} = \dfrac{\vec{dv}}{dt} = \vec{\dot{v}} = \vec{\ddot{r}} \end{cases}$$

برای بررسی حرکت منحنی الخط در صفحه می توان از سه دستگاه مختصات استفاده کرد:

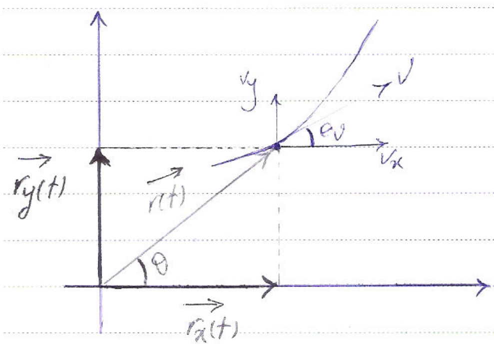
Subject :
Year. Month. Date.

۱- دستگاه مختصات کارتزین (x-y)

۲- دستگاه مختصات عمود و مماسی (t, N)

۳- دستگاه مختصات قطبی (شعاع r و عمود بر شعاع θ)

دستگاه مختصات کارتزین :



$$r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2}$$

$$\tan\theta = \frac{r_y}{r_x}$$

$$\vec{r} = r_x(t)\vec{i} + r_y(t)\vec{j} \xrightarrow{\text{مشتق}} \vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} \\ v_x = \dot{r}_x \\ v_y = \dot{r}_y \end{cases} \Rightarrow |v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad , \quad \tan\theta_v = \frac{v_y}{v_x}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(v_x(t)\vec{i} + v_y(t)\vec{j}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} \\ a_x = \dot{v}_x = \ddot{r}_x \qquad |a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \\ a_y = \dot{v}_y = \ddot{r}_y \qquad \tan\theta_a = \dfrac{a_y}{a_x} \end{cases}$$

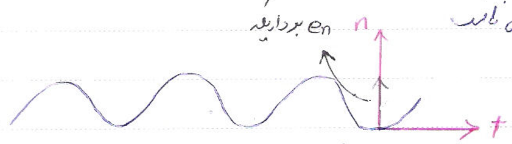
نمودارش مانند حرکت پرتابه‌ای است.

بنام خدا

جلسه پنجم

۲- دستگاه محور عمود و مماس (t,n)

فرض کنید که جسم متحرک روی مسیر منحنی حرکت کند که در هر نقطه می‌توان مماسی بر آن رسم کرد که آن را t و در همان نقطه می‌توان عمودی رسم کرد که آن را n می‌نامند



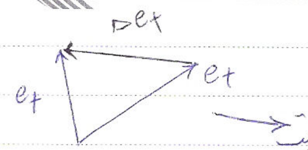
* در این دستگاه سرعت تنها در راستای t مولفه دارد چون سرعت مماس بر مسیر حرکت است

بردار سرعت $\qquad \vec{V}(t) = V(t) \cdot \vec{e_t}$

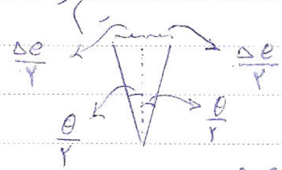
بردار شتاب $\qquad \vec{a} = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{dV(t)}{dt} \cdot \vec{e_t} + \dfrac{V \cdot \vec{e_t}}{dt}$

Subject :
Year. Month. Date.

اثبات :



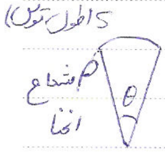
e_t نسبت به زمان تغییر می‌کند و می‌تواند در ۲ جهت حرکت کند و در اثر وصل کردن به Δe_t تشکیل یک مثلث متساوی‌الساقین را می‌دهد که نیمساز عمود منصف نیز است.



$$\sin\frac{\Delta\theta}{2} = \frac{\frac{\Delta e_t}{2}}{e_t} \longrightarrow \Delta e_t = 2e_t \sin\frac{\Delta\theta}{2}$$

$$\lim \frac{\Delta e_t}{\Delta\theta} = \frac{de_t}{d\theta} = \lim \frac{2e_t \sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\Delta\theta} = 1 \quad (1)$$

s (طول قوس)



$$s = \rho\theta \Rightarrow ds = \rho\, d\theta \Rightarrow \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\rho} \quad (2)$$

قاعده زنجیره‌ای :
$$\frac{de_t}{dt} = \frac{de_t}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \quad (3)$$

$$1,2,3 \Rightarrow \vec{e}_n \times \frac{1}{\rho} \times v = \frac{v}{\rho} \cdot e_n$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{e}_t + \frac{v^2}{\rho} e_n$$

$$\bar{a} = a_n \vec{e}_n + a_t \vec{e}_t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_n = \dfrac{v^2}{R} \quad \text{(}R\text{ شعاع انحنا)} \\ a_t = \dfrac{dv}{dt} \end{cases}$$

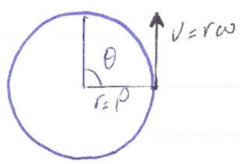
مولفه‌های بردار شتاب در دستگاه مماسی عمودی

$$\Rightarrow a=\sqrt{a_n^2+a_t^2}$$

* شتاب جانب مرکز a_n همواره مثبت ($a_n = \frac{v^2}{\rho} > 0$) و به سمت مرکز انحنای مسیر منحنی می‌گردد.

* اگر حرکت ذره بر روی مسیر منحنی الخط با سرعت ثابت انجام شود، آنگاه $a_t=0$ ولی $a_n \neq 0$.

نمونه‌ای از این حرکت، حرکت بر روی مسیر دایره‌ای است.



اثبات:

$$\rho = r = cte$$

$$s=\rho\theta \Rightarrow s=r\theta \Rightarrow \frac{ds}{dt}=r\frac{d\theta}{dt}$$

$$\rightarrow v=r\dot{\theta}=r\omega \Rightarrow \boxed{v=r\omega}$$

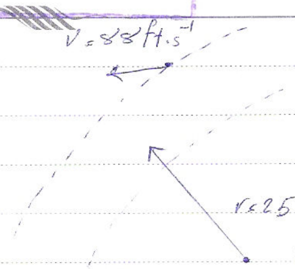
a_n در حرکت دایره‌ای:

$$a_n=\frac{v^2}{\rho}=\frac{(r\dot{\theta})^2}{r} \Rightarrow a_n=r\dot{\theta}^2$$

a_t در حرکت دایره‌ای:

$$a_t=\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}(r\dot{\theta})=r\alpha \Rightarrow a_t=r\ddot{\theta}$$

مثال: راننده اتومبیل در پیچ بزرگراه به شعاع 2500 ft با سرعت $88\ ft.s^{-1}$ حرکت می‌کند. راننده اتومبیل ناگهان ترمز می‌گیرد و سرعت اتومبیل را با آهنگ ثابتی کاهش می‌دهد. با فرض اینکه پس از 8 s سرعت اتومبیل به $66\ ft.s^{-1}$ برسد، شتاب اتومبیل را بلافاصله پس از ترمز تعیین کنید.



$$a_t = a_{VR} = \frac{66-88}{8} = -2.75\ ft.s$$

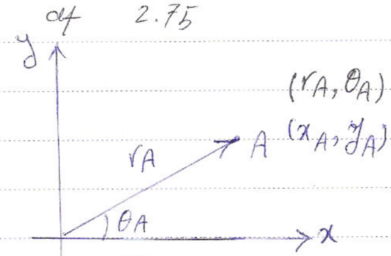
$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{88^2}{2500} = 3.1\ ft$$

بردار شتاب $\vec{a} = a_n\vec{e_n} + a_t\vec{e_t} = 3.1e_n - 2.75e_t$

$$|a| = \sqrt{3.1^2 + 2.75^2} = 4.13\ ft.s^{-1}$$

$$\tan\alpha = \frac{a_n}{a_t} = \frac{3.1}{2.75} = 48.4^\circ$$

۳- دستگاه قطبی (r,θ):



$$r_A = \sqrt{x_A^2 + y_A^2}$$

$$\theta_A = \tan^{-1}\frac{y_A}{x_A}$$

$x_A = r_A \cos\theta_A$

$y_A = r_A \sin\theta_A$

e_r: بردار یکه در راستای شعاع

e_θ: بردار یکه در راستای عمود بر شعاع (چرخش 90° پادساعتگرد)

$\vec{V} = \dot{r}e_r + r\dot{\theta}e_\theta$

$\vec{V} = \vec{V_r}\vec{e_r} + V_\theta\vec{e_\theta}$ $\Rightarrow$ $\vec{V_r} = \dot{r}$, $\vec{V_\theta} = r\dot{\theta}$

طول $V = \sqrt{V_r^2 + V_\theta^2}$

$$\tan\alpha = \frac{V_\theta}{V_r}$$

مولفه های بردار شتاب در دستگاه قطبی :

$$a = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e_r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e_\theta}$$

$$\Rightarrow a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$

$$a = a_r\vec{e_r} + a_\theta\vec{e_\theta}$$

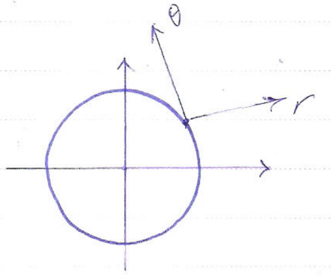
$$a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$$

$$a_{\text{کل}} = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2}$$

$$\tan\beta = \frac{a_\theta}{a_r}$$

بررسی حالات خاص قطبی :

حرکت بر روی مسیر دایره ای

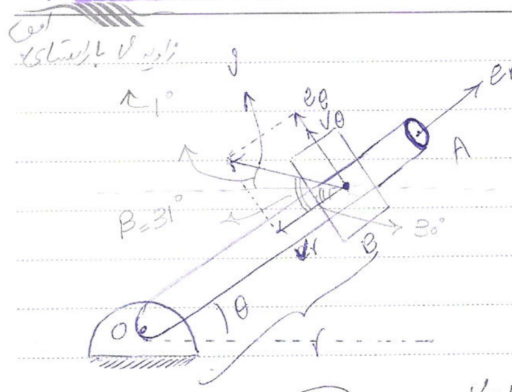


$r = cte \qquad \dot{r} = \ddot{r} = 0$

$$\begin{cases} v_r = \dot{r} = 0 \\ v_\theta = r\dot{\theta} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a_r = -r\dot{\theta}^2 \\ a_t = r\ddot{\theta} \end{cases}$$

مثال : حرکت دوران بازوی $OA = 0.9m$ حول نقطه O با رابطه $\theta = 0.15t^2$ می باشد که در آن θ برحسب رادیان و t برحسب ثانیه است. حرکت B طوری روی بازو می لغزد که فاصله آن از O با رابطه $r = 0.9 - 0.12t^2$ بیان می شود پس از آنکه بازو به اندازه $30°$ چرخید مطلوبست :

Subject :
Year. Month. Date.



الف) سرعت کامل لوله

$\theta = 0.15t^2$

$r = 0.9 - 0.12t^2$

ب) شتاب کامل لوله

ج) شتاب نسبی لوله نسبت به بازوی O

$\vec{V} = V_r \vec{e_r} + V_\theta \vec{e_\theta}$

$\theta = 30^\circ \longrightarrow \theta = 0.524 \text{ rad}$

$\vec{a} = a_r \vec{e_r} + a_\theta \vec{e_\theta}$

$\theta = 0.15t^2 \rightarrow 0.524 = 0.15t^2$

$\rightarrow t = 1.869$

$\begin{cases} V_r = \dot{r} \\ V_\theta = r\dot{\theta} \end{cases}$

$\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \end{cases}$

$\theta = 0.15t^2 \longrightarrow \dot{\theta} = 0.3t \longrightarrow \ddot{\theta} = 0.3$

$r = 0.9 - 0.12t^2 \longrightarrow \dot{r} = -0.24t \longrightarrow \ddot{r} = -0.24$

الف)

$\begin{cases} V_r = -0.449 \\ V_\theta = 0.481(0.561) = 0.270 \end{cases}$

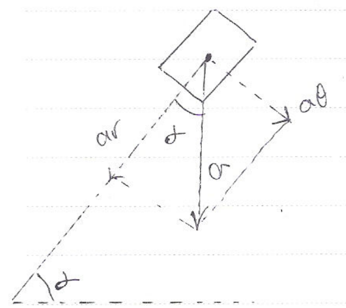
$\vec{V} = -0.449\vec{e_r} + 0.27$

$|\vec{V}| = \sqrt{V_r^2 + V_\theta^2} = 0.524 \quad , \quad \beta = \tan^{-1}\dfrac{V_\theta}{V_r} = 31^\circ$

ب)

$$\begin{cases} a_\theta = 0.481(0.3) + 2(-0.449)(0.561) = -0.359 \\ a_r = -0.24 - 0.481(0.561)^2 = -0.391 \end{cases}$$

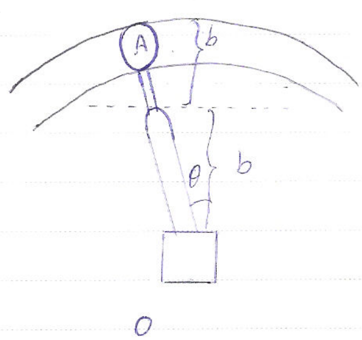
$$\alpha = 42.6^\circ$$

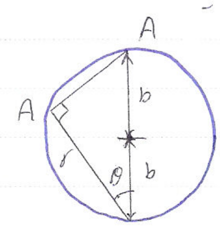


حرکت قطعه نسبت به بازو مستقیم الخط است در راستای بازو و بردار موقعیت نسبت به زمان همان r به t است پس لازم است نسبت به آن دوبار مشتق بگیریم.

$$a_{B/OA} = \ddot{r} = -0.24\ m.s^{-1}$$

مثال: حرکت غلتک A در شکاف مدور ثابت توسط بازوی OA کنترل می‌شود. انتهای فوقانی بازوی مذکور می‌تواند در لوله تحتانی آن بچرخد تا به موازات تغییر θ، طول OA نیز قابلیت تغییر داشته باشد. اگر در دوره‌ای از حرکت بازو، سرعت زاویه‌ای آن در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت برابر K باشد، شتاب نقطه‌ای A را به ازای هر موقعیت از بازو تعیین کنید.





r = بردار جابجایی غلتک A نسبت به نقطه O

Subject :
Year. Month. Date.

رابطه مثلثاتی $\cos\theta = \dfrac{r}{2b} \longrightarrow r = 2b\cos\theta$

$\omega = \dot{\theta} = k$ سرعت زاویه‌ای

در دستگاه قطبی : (r,θ)

$$\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \end{cases}$$

$r = 2b\cos\theta$

$\dot{r} = \dfrac{dr}{dt} = -2b\dot{\theta}\sin\theta = -2bk\sin\theta$

$\ddot{r} = -2bk\dot{\theta}\cos\theta = -2bk^2\cos\theta$

$$\begin{cases} a_r = -2bk^2\cos\theta - 2bk^2\cos\theta = -4bk^2\cos\theta \\ a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = -4bk^2\sin\theta \end{cases}$$

$a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2} = -4bk^2$

بنام خدا

فصل دوم: سینتیک ذرات مادی

انواع حرکت:

۱- حرکت مستقیم الخط: ذره در راستای یک خط مستقیم حرکت می‌کند.

$\vec{a} = a_x i + a_y j$ $\qquad \sum \vec{F_x} = m\vec{a_x}$

$a_y = 0 \ , \ a_x \neq 0$

$$\sum \vec{F_y} = m\underbrace{\vec{a_y}}_{0} \Rightarrow \sum \vec{F_y} = 0$$

۲- حرکت منحنی الخط: این حرکت می‌تواند در صفحه یا در فضا انجام شود.

صفحه ۲ بعدی 2D:
- ۱- دستگاه متعامد (کارتزین) (x,y)
- ۲- " عمود و مماسی (t, n)
- ۳- " قطبی (r, θ)

در فضا 3D:
- ۱- دستگاه متعامد (x, y, z)
- ۲- " استوانه‌ای (r, θ, z)
- ۳- " کروی (r, θ, φ)

با توجه به مطالب حل شده در فصل قبل، معادلات سینتاتیک را در دستگاه‌های مختلف بدست می‌آوریم

دستگاه قائم در مختصات :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \qquad \vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} \longrightarrow \begin{cases} \sum F_x = M\vec{a_x} = m\ddot{x} \\ \sum F_y = M\vec{a_y} = m\ddot{y} \end{cases}$$

دستگاه عمود و مماس (در مختصات) :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \xrightarrow{\text{شتاب کل}} \begin{cases} a = a_n e_n + a_t e_t \\ a_t = \dfrac{dv}{dt} \quad (1) \\ a_n = \dfrac{v^2}{R} \quad (2) \end{cases}$$

$$\sum \vec{F} = \sum f_t e_t + \sum f_n e_n$$

$$\sum f_t = m\frac{dv}{dt}$$

$$\sum f_n = m\frac{v^2}{R}$$

اگر شتاب را داشته باشیم نیز نیرو را بدست می‌آوریم.

دستگاه قطبی (در مختصات) :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \longrightarrow \sum f_r e_r + \sum f_\theta e_\theta$$

$$\vec{a} = a_r\vec{e_r} + a_\theta\vec{e_\theta}$$

$$\vec{a_r} = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$

$$\vec{a_\theta} = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \Rightarrow \begin{cases} \sum F_r = m.a_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \\ \sum F_\theta = ma_\theta = m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \end{cases}$$

دستگاه متعامد در فضا :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = \sum \vec{F_x} + \sum \vec{F_y} + \sum \vec{F_z}$$

$$a = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

$$\sum F_x = m\vec{a_x} = m\ddot{x}$$

$$\sum F_y = m\vec{a_y} = m\ddot{y}$$

$$\sum F_z = m\vec{a_z} = m\ddot{z}$$

دستگاه استوانه‌ای (در فضا) :

حالت خاصی از قطبی است که مولفه Z به آن اضافه می‌شود.

$$\sum \vec{F} = M\vec{a} = \sum F_r \vec{e_r} + \sum F_\theta \vec{e_\theta} + \sum F_z \vec{k}$$

$$\vec{a} = a_r \vec{e_r} + a_\theta \vec{e_\theta} + a_z \vec{k}$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \longrightarrow \sum F_r = m a_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$$

$$a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \longrightarrow \sum F_\theta = m a_\theta = m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})$$

$a_z = \ddot{z} \longrightarrow \sum F_z = m a_z = m \ddot{z}$

قبل از بررسی معادلات تعادل دینامیکی می بایستی با بعضی از نیروها آشنا شویم :

۱- نیروی اصطکاک :

ضریب اصطکاک

$F_f = \mu . N$

نیروی عکس العمل

در دو حالت
الف) سکون :
ب) حرکت :

الف) سکون

$F_s = \mu_s . N \rightarrow$ نیروی اصطکاک استاتیکی

ضریب اصطکاک استاتیکی

ب) حرکت :

$F_k = \mu_k . N \rightarrow$ نیروی اصطکاک دینامیکی

ضریب اصطکاک دینامیکی

۲- نیروی فنر : هرگاه نیرویی وارد بر جسم تغییر شکل حاصله از آن نیرو باهم متناسب باشند، در آن صورت به آن جسم فنر می توان گفت.

نیروی فنر

$F_s = k_s . x \rightarrow$ تغییرات طول

سختی فنر

طول ثانویه

$x = L - L_0 \rightarrow$ طول اولیه

Subject :
Year. / Month. / Date.

برای حل معادلات سینتیک از ۳ روش می‌توان استفاده نمود که موضوع مورد بحث این فصل می‌باشند

۱. استفاده مستقیم: هنگامی که نیرو و شتاب مستقیماً با هم در ارتباط هستند.

۲- روش کار و انرژی: این روش نتیجه‌ای از روش مستقیم است و در حالتی که تغییرات نیرو برحسب فاصله مطرح باشد، از این روش استفاده می‌کنیم.

۳- ضربه و مومنتم: اگر تغییرات نیرو برحسب زمان باشد، می‌توان از این روش استفاده نمود.

۱- روش مستقیم:

قانون دوم نیوتن: اگر برآیند نیروهای وارد بر ذره‌ای صفر نباشد، ذره شتاب متناسب با برآیند برابر نیرو خواهد داشت.

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

و چون جرم ثابت است: $m = \frac{F_1}{a_1} = \frac{F_2}{a_2}$ ، که با توجه به مبانی:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \xrightarrow{\text{نتیجه}} \sum \vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \xrightarrow[\text{ثابت باشد}]{\text{اگر } m} \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

* بردار $m\vec{v}$ را اندازه حرکت خطی یا به اختصار اندازه حرکت ذره گویند و راستای آن با راستای سرعت است، و بزرگی آن $|m|$ برابر اندازه سرعت است و آن را با G نشان می‌دهیم.

$\vec{G} = m\vec{v}$ اندازه حرکت

Subject :
Year. Month. Date.

بنابراین برآیند نیروهای وارده بر ذره را می‌توان بصورت زیر نشان داد.

$\sum \vec{F} = \dot{\vec{G}} = m\vec{a}$ و برآیند نیروهای وارد بر ذره برابر با آهنگ تغییر اندازه حرکت ذره.

رابطه فوق اصل پایستگی اندازه حرکت خطی یک ذره را بصورت زیر بیان می‌دارد:

$$\sum \vec{F} = \dot{\vec{G}} = \frac{d\vec{G}}{dt}$$

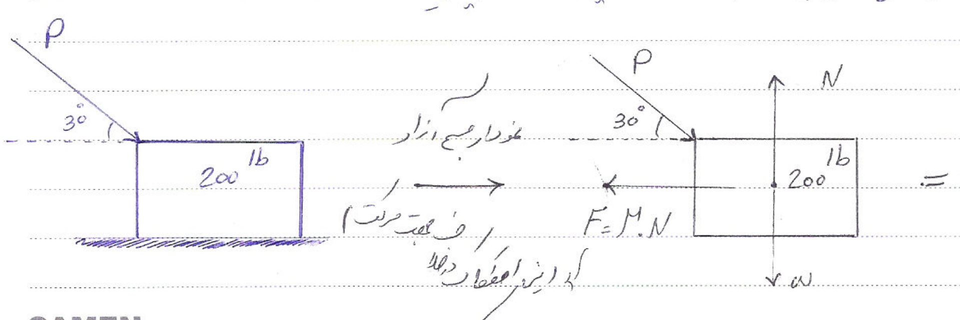
اگر برآیند نیروهای وارد بر ذره صفر باشد، اندازه حرکت خطی ذره هم از نظر مقدار و هم از نظر جهت ثابت باقی می‌ماند.

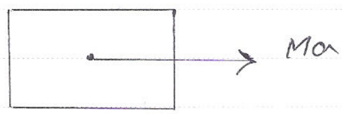
معادله تعادل دینامیکی در روش مستقیم: (با توجه به قانون دوم نیوتن)

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \longrightarrow \sum \vec{F} - m\vec{a} = 0$$

به عبارت اگر $m\vec{a}$ - را به نیروهای وارد بر ذره اضافه کنیم، مجموع نیروهای معادل صفر بدست می‌آید.

مثال: قطعه‌ای به جرم $200\,lb$ روی سطح افقی و در حال سکون قرار دارد. مقدار نیروی P لازم برای شتاب دادن به آن $10\,ft/s^2$ به طرف راست این قطعه را بیابید. $\mu_k = 0.25$ (جسم حرکت می‌کند)





چون حرکت در راستای محور x می‌باشد پس $a_y = 0$.

$$\sum F_y = m a_y = 0$$

$$+\uparrow \; ① \quad N - P\sin 30^\circ - W_0 = 0 \longrightarrow N = P\sin 30^\circ + W_0$$

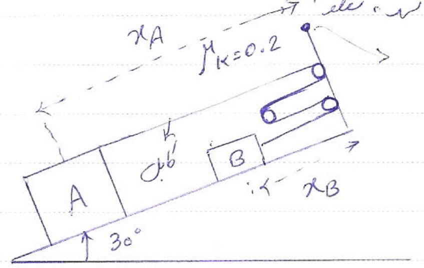
$$\xrightarrow{+} \sum F_x = M a_x \Rightarrow P\cos 30^\circ - 0.25N = \frac{200}{32.2} a$$

$$\Rightarrow \boxed{P = 151 \text{ lb}} \quad ②$$

مثال: دو قطعه نشان داده شده در ابتدا ساکن هستند. از جرم قرقره‌ها صرف‌نظر می‌شود. با فرض اینکه ضریب اصطکاک بین قطعه‌ها و سطح شیبدار $\mu_s = 0.25$ باشد، مطلوب است:

الف) شتاب هر قطعه،

ب) تنش در کابل،



حرکت قطعه B وابسته به A است.

$$x_A + 3x_B = L \xrightarrow[\text{می‌گیریم}]{\text{2 بار مشتق}} a_A + 3a_B = 0$$

* مبدأ فرضی در نقطه ثابت می‌گیریم.

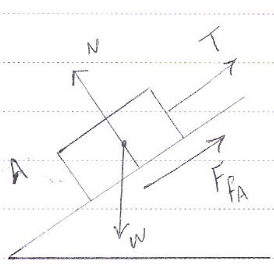
(طول طناب ثابت است.)

روابط وابستگی $\longrightarrow a_A = -3a_B \Rightarrow a_B = -\frac{1}{3} a_A$

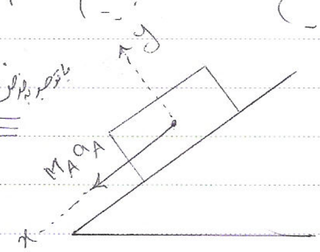
Subject :
Year. Month. Date.

نمودار جسم آزاد را رسم می‌کنیم. (برای A و B)
(با این فرض که A رو به پایین می‌رود.)

نمودار جسم آزاد A
(چون حرکت را به سمت پایین گرفتیم پس F_{f_A} به سمت بالا می‌شود)



باتوجه به دالامبر



$$+\swarrow \sum F_x = ma$$

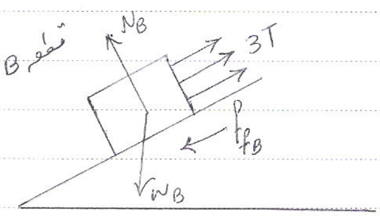
$$w_A \sin\alpha - \mu N_a - T = m_A a_A$$

با حذف N_A داریم $\Rightarrow$

$$+\nwarrow \sum F_y = 0 \longrightarrow N_A - w_A \cos 30^\circ = 0 \longrightarrow N_A = w_A \cos 30^\circ$$

$$\Rightarrow w_A\left(\sin 30^\circ - \mu \cos 30^\circ\right) - T = m_A a_A$$

قطعه B



$$+\swarrow \sum F_x = m a_B$$

$$\Rightarrow w_B \sin 30^\circ + \mu N_B - 3T = m_B a_B$$

$$= m_B\left(-\frac{1}{3} a_A\right)$$

$$+\nwarrow \sum F_y = 0 \Rightarrow N_B - w_B \cos 30^\circ = 0 \Rightarrow N_B = w_B \cos 30^\circ$$

Subject :
Year. Month. Date.

با حذف N_B داریم: $w_B(\sin 30^\circ + \mu \cos 30^\circ) - 3T = m_B \frac{a_A}{3}$ **

با حذف T از * و ** داریم:

$$(3w_A - w_B)\sin 30 - \mu(3w_A + w_B)\sin 30^\circ = \left(3w_A + \frac{w_B}{3}\right)\frac{a_A}{g}$$

حال مقدار μ_s را برای تعادل استاتیکی بررسی می‌کنیم.

تعادل استاتیکی زمانی برقرار است که شتاب‌ها برابر صفر باشد. بنابراین با فرض $a_A = a_B = 0$ و قرار دادن مقادیر $a_A = 0$ در رابطه بالا μ را بدست می‌آوریم.

تعادل استاتیکی: $a_A = 0 \Rightarrow \mu = \dfrac{(3w_A - w_B)\sin 30^\circ}{(3w_A + w_B)\cos 30^\circ} = 0/334 > \mu_s = 0.25$

چون μ بدست آمده از مقدار μ_s بزرگتر است، لذا قطعه‌ها حرکت دارند. بنابراین باید از μ_k در معادلات بدست آمده استفاده کرد. بنابراین در تمام معادلات نوشته شده بجای μ از مقدار $\mu_k = 0.2$ استفاده نموده و پارامترهای مجهول شتاب و کشش را بدست آورد.

$a_A = 4.36\ ft.cm^{-2}$

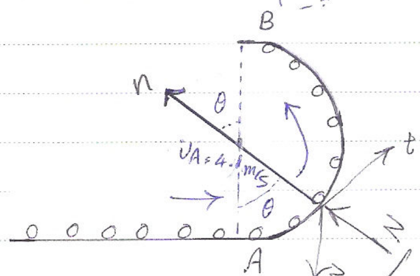
$a_B = 1.452\ ft/cm^2$

$T = 4.79\ lb$

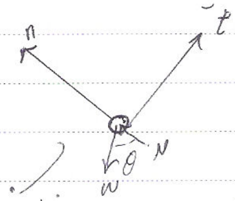
SAMEN

مثال: ساچمه های کوچک فولادی که هر کدام 65 گرم جرم دارند با سرعت افقی 4.1 m/s در نقطه A وارد حفره (از زیر لوله ساچمه ها) نیم‌دایره‌ای شکل که در صفحه قائم واقع است می‌شوند. نیروی N که از طرف حفره به هر یک از ساچمه‌ها وارد می‌شود را برحسب θ بدست آورید. سرعت گلوله را در نقطه B محاسبه کنید. (اصطکاک ناچیز)

$R=0.32$



از دستگاه (t و n) استفاده می‌کنیم.



چون صفحه افقی است نیروی وزن عمود بر صفحه است و در محاسبات اثر نمی‌کند. درحالی‌که قائم باشد در محاسبات وارد می‌شود.

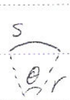
$$a_t=\frac{dv}{dt}\qquad a_n=\frac{v^2}{R}$$

$$\sum F_t=ma_t \Rightarrow -w\sin\theta=ma_t \Rightarrow a_t=-g\sin\theta$$

$$\sum F_n=ma_n \Rightarrow N-w\cos\theta=ma_n \Rightarrow \boxed{N=m\left(g\cos\theta+\frac{v^2}{R}\right)}$$

با توجه به معادله مستقل از زمان داریم

$$\left.\begin{array}{l} a_t=\dfrac{dv}{dt}=v\dfrac{d\theta}{ds} \\ S=r\theta \Rightarrow ds=r\,d\theta \end{array}\right\} \Rightarrow a_t r\,d\theta=v\,dv \overset{*}{\Longrightarrow}$$



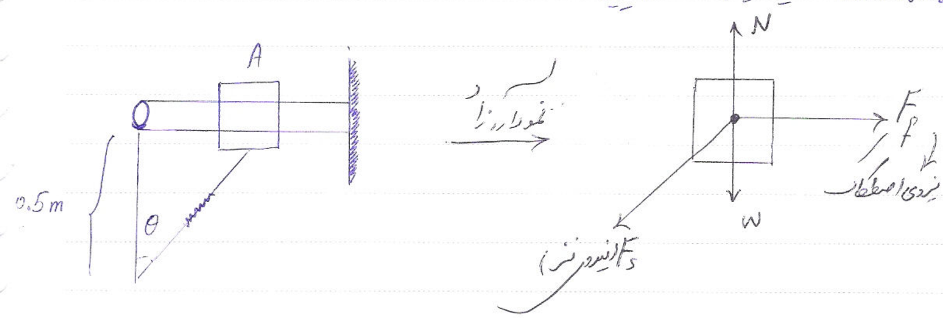
$$\overset{*}{\Rightarrow} (-g\sin\theta)\,r\,d\theta = v\,dv \xrightarrow{\int} \int_0^{\theta} (-g\sin\theta)\,r\,d\theta = \int_{v_A}^{v} v\,dv$$

$$-2rg(\cos\theta-1) = v^2 - v_A^2 \Rightarrow v^2 = v_A^2 + 2rg(\cos\theta - 1)$$

$$N = m\left(g\cos\theta + \frac{v^2}{R}\right) = 1.913\cos\theta + 2.14$$

$$\begin{cases} v^2 = v_A^2 + 2rg(\cos\theta-1) \\ \theta = \pi \Rightarrow v_B = ? \quad v_B(\theta-180) = \sqrt{4gr + v_A^2} = 2.06\ m/sec \end{cases} \Rightarrow v = 2.06\ m/s$$

مثال: طوقه A به جرم 10kg از حالت سکون در حالت $\theta=30^\circ$ رها و در طول میله ثابت افقی می‌لغزد. ضریب ثابت فنر 1750 N/m و به ازای $\theta=0$ طول آزاد خود را دارد. اگر ضریب اصطکاک بین طوقه و میله 0.2 باشد شتاب اولیه طوقه را محاسبه نمایید.



$F_s = kx$

$x = L - L_0$

$L_0 = 0.5m \quad ; \quad L = \frac{0.5}{\cos\theta}$ طول ثانویه $\Rightarrow x = \frac{0.5}{\cos 30} - 0.5 = 0.077$

$\Rightarrow F_S = 135.37$

$\sum F_x = ma \Rightarrow F_S \sin\theta - F_f = ma$ ①

$\sum F_y = 0 \Rightarrow N - w - F_S\cos\theta = 0 \Rightarrow N = w + F_S \cos\theta \Rightarrow N = 10 \times 9.81 + 135.37 \times \cos 30^\circ = 215.32$

$F_f = \mu N = 0.2 \times 215.32 = 43.06\,N$

رابطه ① $\Rightarrow a = 2.46\ m/s$

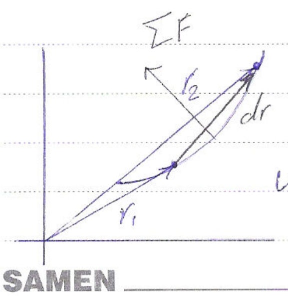
۲- روش کار و انرژی :

همانطور که قبلاً اشاره شد این روش نتیجه ای از روش مستقیم است به این صورت که

$\sum \vec{F} = m\vec{a}$

$a = v \cdot \dfrac{dv}{ds}$

$$\Rightarrow \sum F \cdot ds = mv\,dv \Rightarrow \underbrace{\int_{s_0}^{s} \sum F ds}_{\text{کار}} = \underbrace{\int_{v_0}^{v} mv\,dv}_{\text{انرژی}}$$



کار: حاصلضرب اسکالر یا داخلی بردار نیرو در بردار تغییر مکان است.

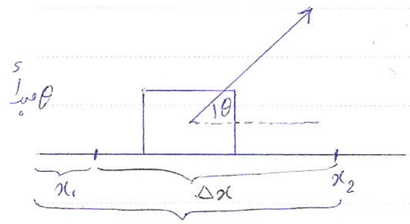
$$U_{1-2} = \int_1^2 \sum F \cdot \vec{dr}$$

Subject : Year. Month. Date.

اگر بردار نیرو و بردار جابجایی عمود باشند، آنگاه کار انجام شده صفر است.

حال این رابطه را برای حرکت مستقیم الخط و منحنی الخط بررسی می‌کنیم:

حرکت مستقیم الخط:



$$\sum \vec{F} = \sum \vec{F_x i} + \sum \vec{F_y j}$$

$$\vec{dr} = \vec{dx_i}$$

کار

$$\Rightarrow du = \sum \vec{F} \cdot \vec{dr} = \sum \vec{F_x} \cdot dx = \sum F \cos\theta \cdot \Delta x \Rightarrow u_{1-2} = \sum F \cos\theta \cdot \Delta x$$

$\theta = 90 \longrightarrow$ برابر صفر می‌شود ، $\theta = 0, 180 \longrightarrow$ حالتی دیگر است

حرکت منحنی الخط:

بررسی این حرکت را می‌توان در دستگاههای کارتزین، عمودی مماسی و قطبی انجام داد.

$$\sum \vec{F} = \sum \vec{F_x i} + \sum \vec{F_y j}$$

$$\vec{dr} = \vec{dr_x i} + \vec{dr_y j}$$

$$\vec{du} = \sum \vec{F} \cdot \vec{dr} \Rightarrow u_{1-2} = \int_{x_1}^{x_2} \sum F_x \cdot dx + \int_{y_1}^{y_2} \sum F_y \cdot dy$$

۲- دستگاه عمود و مماس:

چون جابجایی ذره در این دستگاه مماس بر مسیر حرکت یعنی در راستای $\sum F_t$ می باشد، لذا داریم

دستگاه: $du = \sum F_t \cdot \Delta s \rightarrow$ طول قوس

۳- دستگاه قطبی:

در دستگاه قطبی:

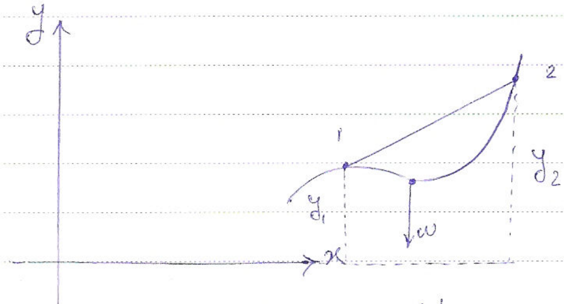
$$\vec{V} = \overset{\dot r}{\vec{V}_r}\vec{e}_r + \overset{\dot\theta}{\vec{V}_\theta}\vec{e}_\theta$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + \frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta \rightarrow \overset{*}{d\vec{r} = dr\vec{e}_r + r\,d\theta\,\vec{e}_\theta}$$

$$\sum \vec{F} = \sum F_r \vec{e}_r + \sum F_\theta \vec{e}_\theta \quad , * \Rightarrow du = \sum \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$u_{1-2} = \int_{r_1}^{r_2} \sum F_r\, dr + \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sum F_\theta\, d\theta$$

کار انجام شده توسط نیروی وزن:



$\sum F_y = -w\vec{j}$ / بردار جابجایی: $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$

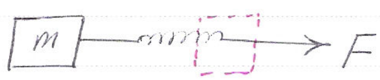
$du = -\omega dy$

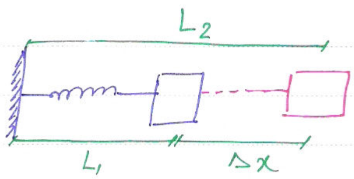
$$u_{1-2} = -\omega(\Delta y) \longrightarrow \text{if} \begin{cases} \Delta y = y_2 - y_1 > 0 \\ \qquad \Rightarrow u_{1-2} < 0 \\ y_2 > y_1 \\ \Delta y = y_2 - y_1 < 0 \quad \Rightarrow u_{1-2} > 0 \end{cases}$$

اگر بردار جابجا و بردار نیرو در یک جهت باشند، $(\theta = 0°) \Leftarrow u > 0$

اگر بردار جابجایی و نیرو مخالف الجهت باشند، $(\theta = 180°) \Leftarrow u < 0$

کار انجام شده توسط فنر :





طول آزاد - طول اولیه = $x_1 = L_1 - L_0$: تغییر طول اولیه فنر

طول آزاد - طول ثانویه = $x_2 = L_2 - L_0$: تغییر طول ثانویه

بردار نیرو و جابجایی در خلاف جهت هم

$$u_{1-2} = -\int_{x_1}^{x_2} f_s\, dx \qquad f_s = kx \longrightarrow f_s = k_s \Delta x$$

SAMEN

$$\Rightarrow U_{1-2} = -\int_{x_1}^{x_2} kx\,dx = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2$$

وقتی فنر در حالت بازگشت به حالت اولیه یا وضعیت آزاد خود می‌باشد، چون نیروی فنر با بردار جابجایی جسم در یک جهت اند، کار نیروی فنر مثبت است.

انرژی جنبشی ذره:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$a = v\frac{dv}{ds}$$

$$\Rightarrow \sum \vec{F}\cdot dr = mv\,dv \longrightarrow \underbrace{\int \sum F\cdot dr}_{\text{کار }(U)} = \underbrace{\int mv\,dv}_{\text{انرژی جنبشی }(T)}$$

اصل کار و انرژی

$$T = \int_{v_1}^{v_2} mv\,dv \longrightarrow T_{1-2} = T_2 - T_1 = \Delta T = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_2^2$$

v_1 و v_2، سرعت جسم در موقعیت (1) و (2).

اصل کار و انرژی:

(هنگامی که در بحث فاصله پیش آید از این اصل استفاده می‌کنیم)

کل کار انجام شده = تغییرات انرژی جنبشی

$$U_g + U_{e_{1-2}} + U_{1-2} = \Delta T$$

کار انجام شده توسط نیروی وزن

کار انجام شده توسط نیروی فنر

کار انجام شده توسط سایر نیروهای وارد بر جسم

تغییرات انرژی جنبشی

توان: آهنگ زمانی انجام کار گویند.

$$\text{توان متوسط} = \frac{\Delta u}{\Delta t} \quad \left(\frac{J}{s}\right)$$

$$\text{if } \Delta T \to 0 \Rightarrow P = \text{توان} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{du}{dt} = \frac{d(\vec{F}.\vec{r})}{dt} = \frac{F.dr}{dt} = \vec{F}.\vec{V}$$

$$\Rightarrow P = \vec{F}.\vec{V} = \frac{du}{dt}$$

واحد توان در SI : $\frac{J}{sec} = \frac{1N.m}{sec} = 1wat$

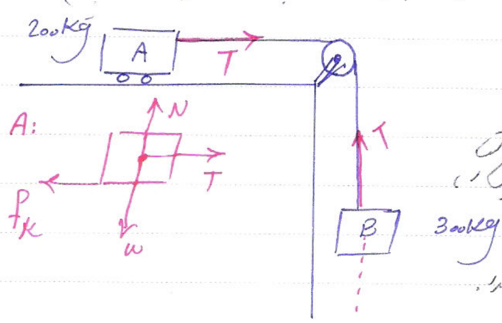
واحد توان در سیستم انگلیسی : $1(hp) = 550 \frac{ft.lb}{sec} = 746\,wat$

(horse power, اسب بخار)

بازده مکانیکی: معیاری جهت بررسی اتلاف انرژی‌های مختلف مانند گرما، اصطکاک ...

$$\text{بازده مکانیکی} = \frac{\text{توان خروجی}}{\text{توان ورودی}}$$

مثال: دستگاه زیر از حالت سکون رها می‌شود. سرعت جسم A پس از 2m چقدر است؟ ($\mu_k=0.25$ بین جسم A و سطح، از وزن و اصطکاک قرقره صرف‌نظر شود)



چون جسم A در راستای افق حرکت می‌کند و نیروی وزن رو به پایین است، لذا زاویه بین بردار جابجایی و نیرو 90° پس کار صفر.

نیروی اصطکاک

Subject :
Year. Month. Date.

$U_{g_{1-2}} + U_{e_{1-2}} + U_{1-2} = \Delta T \Rightarrow -F_k \times 2 + 2T = \frac{1}{2} m v_{1A}^2 - \frac{1}{2} m v_{0A}^2$

$U_{g_{1-2}} = 0$, $U_{e_{1-2}} = 0$

نیروی کشش کابل و نیروی اصطکاک

نیرو و جابجایی خلاف جهت

$\Rightarrow -2F_f + 2T = \frac{1}{2} m_A v_A^2 \Rightarrow \boxed{2T - 2F_f = 100 v^2}$

$F_f = \mu_k N = \mu_k \cdot W = 0$

$\boxed{N = W = 0}$

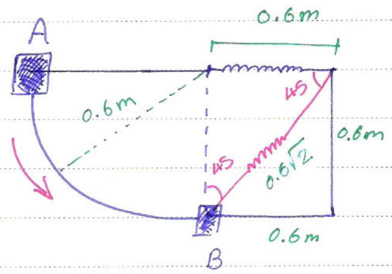
جسم B:

$U_g + U_{e_{1-2}} + U_{1-2} = \Delta T$

$\Rightarrow 2W - 2T = \underbrace{\frac{1}{2} m v_{1B}^2}_{150 v^2} - \frac{1}{2} m \cancel{v_{0B}^2}$

$\Rightarrow 2 \times (300 \times 9.81) - 2T = 150 v^2$

مثال: لغزنده‌ای به جرم 3kg از حالت سکون در موقعیت A رها شده و با اصطکاک ناچیز در امتداد میله راهنمای خمیده‌ای که در صفحه قائم قرار دارد می‌لغزد. فنری که به لغزنده متصل است دارای $K = 350 \frac{N}{m}$ و طول آزاد 60^{cm} است. سرعت لغزنده هنگام عبور از B؟



$U_{g_{AB}} = 0.6mg - mgh$

$U_{A-B} = \Delta T_{A-B}$

$U_{g_{A-B}} + U_{e_{A-B}} + U_{A-B} = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m \cancel{v_A^2}$

SAMEN

$$u_{e_{A B}} = \frac{1}{2}k(x_A^2 - x_B^2)$$

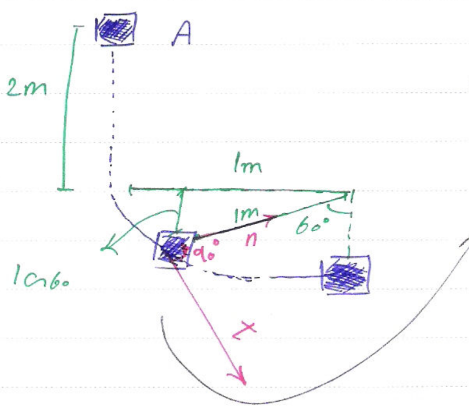
$$x_A = \ell_A - \ell_0 = 1.2 - 0.6 = 0.6$$

$$x_B = \ell_B - \ell_0 = 0.6\sqrt{2} - 0.6 = 0.25$$

$$0.6mg + \frac{1}{2} \times 350 \times (0.6^2 - 0.25^2) = \frac{1}{2} m v_B^2 \Rightarrow v_B = 6.8 \ m/sec$$

$$m = 3kg$$

مثال: بسته‌ای به جرم 5kg از حالت سکون و از نقطه A در امتداد سطحی بدون اصطکاک مطابق شکل زیر می‌لغزد. نیروی وارد از طرف سطح بر بسته وقتی که: الف) به نقطه B ب) به نقطه C می‌رسد را بدست آورید.



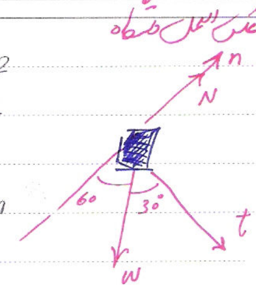
$$u_{A-B} = \Delta T_{A-B}$$

$$u_{n_{A-B}} = \cos 90^\circ = 1$$

$$u_{g_{A-B}} = (2 + 1\cos 60^\circ)mg$$

$$(2 + \cos 60)mg = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2$$

$$\Rightarrow (2 + \cos 60)mg = \frac{1}{2} m v_B^2 \longrightarrow \boxed{v_B = 7 m/s}$$



$$\sum F_n = m a_n \longrightarrow N - W\cos 60 = m a_n = \frac{m v_B^2}{r}$$

$$\longrightarrow N = W\cos 60 + \frac{m v_B^2}{r} \Rightarrow N = 269.78 \ N/m$$

ب) $U_{g_{A-C}} = 3mg$

$U_{A-C} = T_{A-C}$ ، $U_{g_{A-C}} = T_{A-C}$

$$3mg = \frac{1}{2} m v_C^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 \longrightarrow v_C = 7.67 \ m/sec$$

$$\sum F_n = m a_n \longrightarrow N = mg + \frac{m v_C^2}{r} = 343.35 \ N$$

بنام خدا

فصل سوم :

اندازه حرکت خطی : اگر جسمی دارای سرعت v باشد آنگاه اندازه حرکت خطی آن که با G نشان می‌دهیم برابر است با :

$$\vec{G} = m\vec{V}$$

اندازه حرکت زاویه‌ای : گشتاور بردار اندازه حرکت خطی حول نقطه مورد نظر است.

$$\vec{H} = \vec{r} \times m\vec{V}$$

Subject :
Year. Month. Date.

$$\vec{r} = r_x \vec{i} + r_y \vec{j} + r_z \vec{k}$$

$$\vec{V} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k}$$

$$G = G_x \vec{i} + G_y \vec{j} + G_z \vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{G} = m\vec{V} = m(V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k})$$

$$H_o = \begin{vmatrix} i & j & k \\ r_x & r_y & r_z \\ mV_x & mV_y & mV_z \end{vmatrix} \qquad H = \begin{vmatrix} i & j & k \\ r_x & r_y & r_z \\ mV_x & mV_y & mV_z \end{vmatrix}$$

$$H_{oz} = m(r_x V_y - r_y V_x) \quad / \quad H_{ox} = m(r_y V_z - r_z V_y)$$

$$H_{oy} = m(r_x V_y - r_y V_x)$$

اصل ضربه :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\Rightarrow \sum \vec{F} = m\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d\vec{G}}{dt}$$

$$\rightarrow \sum \vec{F} dt = d\vec{G}$$

$$\rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{F} dt = \int_{G_o}^{G} dG = G_2 - G_1$$

$$Imp = \int_{t_1}^{t_2} \sum F\,dt = \Delta G$$

به عبارت دیگر نرخ نیروی وارد بر جسم برابر با نرخ تغییر اندازه حرکت خطی است.

$$\sum = \dot{\vec{G}}$$

$$\vec{H}_o = \vec{r} \times \vec{G} \rightarrow \frac{dH_o}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{G}) = \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{0} \times \vec{G} + \vec{r} \times \frac{d\vec{G}}{dt}$$

$$= \vec{r} \times \dot{\vec{G}} = \vec{r} \times \sum \vec{F} = \sum M_o$$

برآیند گشتاورهای نیروهای خارجی وارد بر جسم برابر است با نرخ تغییر مومنتم زاویه‌ای.

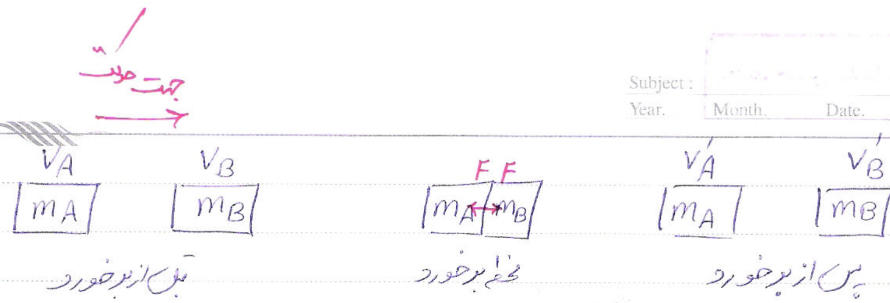
$$\frac{dH_o}{dt} = \dot{H}_o = \sum M_o$$

تغییر اندازه حرکت زاویه‌ای : $\Delta \vec{H}_o = \int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{M}_o\,dt$

با توجه به فرمول‌های بدست آمده می‌توان نتایج زیر را بدست آورد.

۱- در غیاب اثر برآیند نیروهای خارجی وارد بر سیستم، تغییر مومنتم نداریم به عبارت دیگر $G_1 = G_2$

مثال برخورد: در غیاب نیروهای خارجی اگر دو ذره به اسم‌های A و B به هم برخورد کنند.



سیستم قبل از برخورد ← $G = G'$ → $m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B$

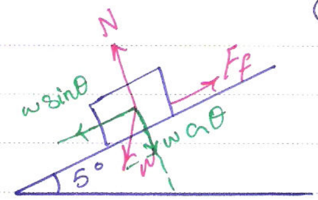
G': سیستم پس از برخورد

۲- در غیاب اثر برآیند گشتاور نیروهای خارجی بر سیستم تغییر در تکانه زاویه‌ای نداریم، به عبارت دیگر:

$H_{o1} = H_{o2}$

مثال: اتومبیلی به جرم m با سرعت $90\,km.h^{-1}$ به طرف پایین مسیری با شیب $5°$ رانده می‌شود. در این لحظه راننده ترمز می‌گیرد، زمان لازم برای توقف اتومبیل در هر یک از شرایط زیر:

الف) جاده خشک $\mu = 0.75$ ب) جاده یخ زده $\mu = 0.1$



$$Imp_{1-2} = \Delta G$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow N - w\cos\theta = 0 \Rightarrow N = w\cos\theta$$

$$\sum F_x = ma_x \rightarrow w\sin\theta - \mu \underbrace{w\cos\theta}_{N} = \sum F_x$$

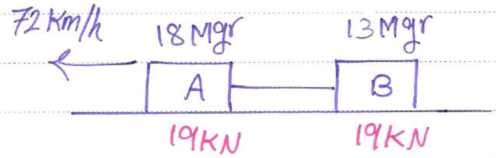
$$\longrightarrow \int_0^t \sum F_x\,dt = \Delta G = G_2 - G_1 \longrightarrow \int_0^t (w\sin\theta - \mu w\cos\theta)\,dt = m\cancel{v_2} - mv_1$$

$$\Rightarrow t = \frac{mv}{mg(\mu\cos\theta - \sin\theta)} \longrightarrow \begin{cases} \mu = 0.75 \Rightarrow t = 3.85\ sec \\ \mu = 0.1 \Rightarrow t = 193.8\ sec \end{cases}$$

سؤال: قطار مسافری از دو واگن ساخته شده است و با سرعت 72km/h حرکت می کند. ترمزها ترمز می کنند و نیروی ثابت 19kN بر هر یک از واگن ها وارد می شود. مطلوبست:

الف) زمان لازم برای اینکه قطار پس از ترمز گرفتن متوقف شود.

ب) نیروی منتقل شده بین دو واگن در طی کم شدن سرعت.



$72 km/h = 20 m/s$

الف) معادله $Imp_{1-2} = \Delta G$ را می توان برای کل سیستم نوشت. سرعت ثانویه بعد از ترمز گرفتن برای کل سیستم صفر است.

$$(F_t)_A + (F_t)_B = (m_A\cancel{v'_A} + m_B\cancel{v'_B}) - (m_A v - m_B v) = -(m_A + m_B)v$$

$$\Rightarrow -2\times 19\times 10^3\, t = (13+18)\times 10^3 \times 20\, m/s \Rightarrow t = 16.315\, sec$$

ب) می‌توان رابطه $Imp_{1-2} = \Delta G$ را برای یک جسم، مثلاً جسم A نوشت تا نیروی متصل کننده بین دو جسم را بدست آورد.

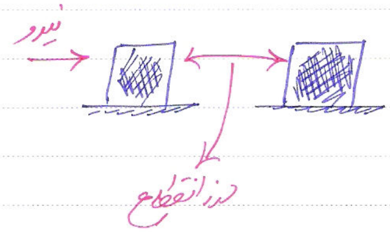
$$Imp_{1-2} = \Delta G \longrightarrow (\sum F)t = \Delta G$$

$$\Rightarrow (F+19\times 10^3)\times 16.315 = 20\times 18\times 10^3$$

$$\Rightarrow F = 3058.8\, N$$

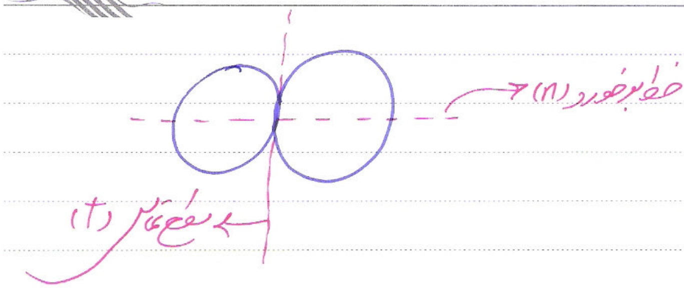
برخورد:

اصابت دو جسم در یک بازه زمانی بسیار کوچک که طی آن دو جسم بر یکدیگر نیروهای خیلی بزرگی وارد می‌کنند را برخورد گویند.



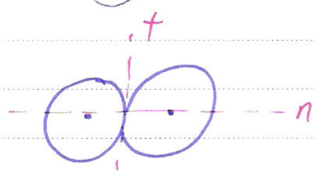
خط برخورد:

در حین برخورد، عمود مشترک بر سطوح تماس را خط برخورد گویند.

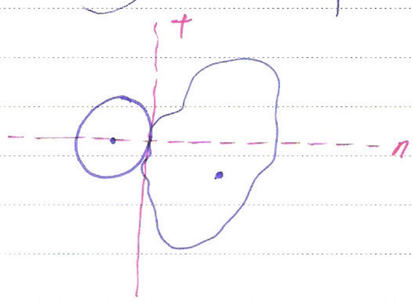


انواع برخورد:

۱- برخورد مرکزی: اگر مرکز جرم های دو جسمی که به هم برخورد می کنند بر روی خط برخورد باشند، به آن برخورد، برخورد مرکزی گویند، مانند برخورد ذرات مادی.

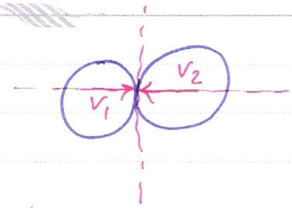


۲- برخورد خارج از مرکز: اگر مرکز جرم های دو جسمی که به هم برخورد می کنند روی خط برخورد نباشند برخورد خارج از مرکز می باشد.

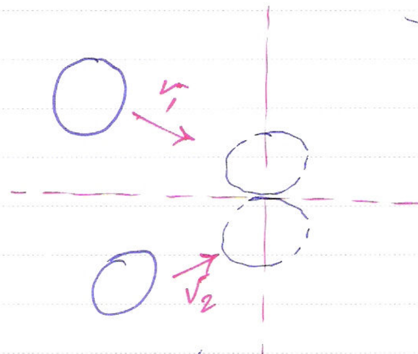


انواع برخورد مرکزی:

- برخورد مرکزی مستقیم: هرگاه امتداد سرعت های دو جسم در امتداد خط برخورد باشند، برخورد را مرکزی مستقیم گویند.



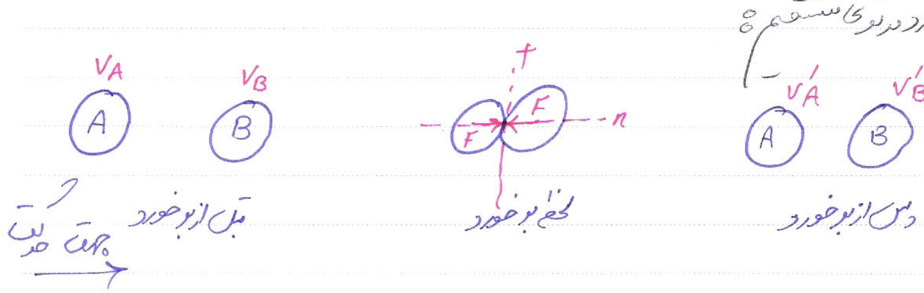
- برخورد مایل : هرگاه امتداد سرعت های دو جسم در امتداد خط برخورد نباشند، برخورد را مایل گوییم.



ضریب بازگشت (استرداد) : خاصیتی است از اثر ترکیبی جنس دو جسم و شکل دو جسم.

$$e = \frac{\text{ضربه ناشی از بازیافت تغییر شکل}}{\text{ضربه ناشی از تغییر شکل}} = \frac{\int P\,dt}{\int F\,dt} \qquad 0 \leq e \leq 1$$

برخورد مرکزی مستقیم :



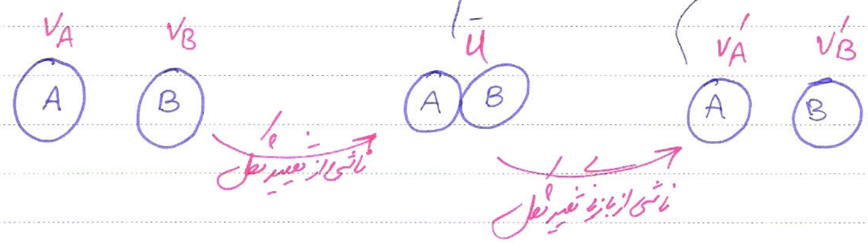
اگر سرعت ذره A از ذره B بیشتر باشد، ذره A سرانجام به ذره B برخورد می‌کند. در اثر برخورد دو ذره تغییر شکل خواهند داد و در پایان دوره تغییر شکل، سرعت یکسان u را خواهند داشت.

سپس دوره بازگشت رخ خواهد داد. که در پایان آن بسته به مقدار نیروهای برخورد و مواد سازنده ذره های A و B، هر ذره یا شکل اولیه خود را باز می‌یابد یا به حالت تغییر شکل یافته باقی می‌ماند. در پایان دوره بازگشت دو ذره دارای سرعت‌ها V'_A و V'_B خواهند بود.

از آنجایی که در سیستم (شامل دو ذره) برآیند نیروهای وارده صفر می‌باشد.

برای کل سیستم:
$$\underbrace{\int f\,dt}_{0} = \Delta G \rightarrow \underbrace{\vec{G}_1}_{\text{قبل از برخورد}} = \underbrace{\vec{G}_2}_{\text{پس از برخورد}} \rightarrow m_A V_A + m_B V_B = m_A V'_A + m_B V'_B$$

برای بدست آوردن ضریب بازگشت (e) داریم:



ذره A:
$$\int f\,dt = m_A u - m_A V_A$$
$$\int P\,dt = m_A V'_A - m_A u \rightarrow e = \frac{\int P\,dt}{\int f\,dt} = \frac{V'_A - u}{u - V_A} = \frac{u - V'_A}{V_A - u} \quad (1)$$

Subject: Year. Month. Date.

B ذره: $\int f\,dt = m_B u - m_B v_B$ ②

$\int P\,dt = m_B v'_B - m_B u$ $\longrightarrow e = \dfrac{\int P\,dt}{\int f\,dt} = \dfrac{v'_B - u}{u - v_B}$

ترکیب روابط ① و ② و حذف u از بین آنها

$$e = \frac{v'_B - v'_A}{v_A - v_B}$$

ضریب برگشت یا ضریب بازگشت نسبت اختلاف سرعت‌ها بعد از برخورد به اختلاف سرعت‌ها قبل از برخورد

۱- برخورد کاملاً پلاستیک (مومسان) ($e=0$):

در این حالت دو ذره در کنار هم می مانند و دو ذره بازگشت ندارد، سرعت ذره پس از برخورد یکی است.

$e=0 \longrightarrow v'_B = v'_A$

درصد اتلاف انرژی جنبشی: $n = \dfrac{E_1 - E_2}{E_1} \times 100$

انرژی جنبشی سیستم: $E_1 = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2$ ،

انرژی جنبشی سیستم پس از برخورد: $E_2 = \frac{1}{2}(m_A + m_B) v'^2$

$v' = v'_A = v'_B$

۲- برخورد کاملاً الاستیک ($e=1$):

$e = \dfrac{v'_B - v'_A}{v_A - v_B} = 1$ ، $e = 1 \Rightarrow v_A + v'_A = v_B + v'_B$

SAMEN

Subject :
Year. Month. Date.

کل سیستم : $G_{T_1} = G_{T_2}$

$$m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B \longrightarrow m_A (v_A - v'_A) = m_B (v'_B - v_B)$$

$$\xrightarrow{v_A + v'_A = v_B + v'_B} m_A (v_A - v'_A)(v_A + v'_A) = m_B (v'_B - v_B)(v_B + v'_B)$$

$$\xrightarrow{\times \frac{1}{2}} \frac{1}{2} m_A (v_A - v'_A)(v_A + v'_A) = \frac{1}{2} m_B (v'_B - v_B)(v_B + v'_B)$$

$$\longrightarrow \frac{1}{2} m_A (v_A^2 - v_A'^2) = \frac{1}{2} m_B (v_B'^2 - v_B^2)$$

$$\longrightarrow \underbrace{\frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2}_{E_1} = \underbrace{\frac{1}{2} m_B v_B'^2 + \frac{1}{2} m_A v_A'^2}_{E_2}$$

$$\Rightarrow E_1 = E_2 \longrightarrow n = \frac{E_1 - E_2}{E_2} \times 100 = 0$$

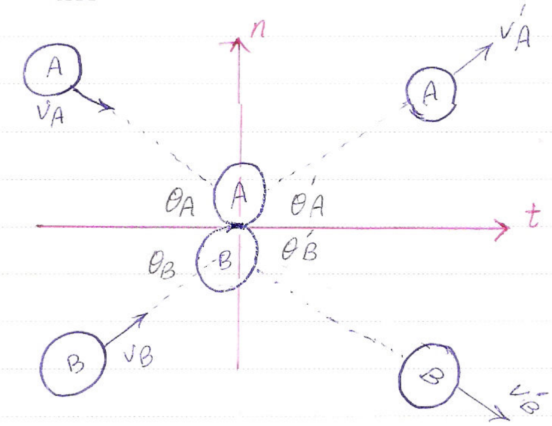
← در این حالت ثابت می‌شود انرژی جنبشی کل از برخورد و بعد از برخورد باهم برابر است.

۳- حالت کلی $0 \leq e \leq 1$

$$0 < e = \frac{v'_B - v'_A}{v_A - v_B} < 1 \longrightarrow v'_B - v'_A < v_A - v_B$$

$$\Rightarrow E_1 > E_2$$

برخورد مرکزی مایل :



در راستای (t_t) یعنی سطح تماس :

ذره A : $(G_A)_t = (G'_A)_t \Rightarrow m_A v_A \cos\theta_A = m_A v'_A \cos\theta'_A$

$$\Rightarrow v_A \cos\theta_A = v'_A \cos\theta'_A \qquad (1)$$

ذره B : $(G_B)_t = (G'_B)_t \Rightarrow m_B v_B \cos\theta_B = m_B v'_B \cos\theta'_B$

$$\Rightarrow v_B \cos\theta_B = v'_B \cos\theta'_B \qquad (2)$$

در راستای سیستم $(n-n)$: (برای کل سیستم)

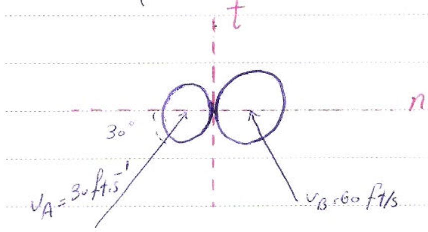
کل سیستم قبل از برخورد : $(G)_n = (G')_n$

$$-m_A v_A \sin\theta_A + m_B v_B \sin\theta_B = m_A v'_A \sin\theta'_A + m_B v'_B \sin\theta'_B \qquad (3)$$

ترکیب روابط 2 و 3 $\longrightarrow$ $e = \dfrac{(v'_B)_n - (v'_A)_n}{(v_A)_n - (v_B)_n}$

Subject :
Year. Month. Date.

مثال : بزرگی و جهت سرعت دو گلوله یکسان بدون اصطکاک قبل از برخورد به یکدیگر در شکل زیر نشان داده شده است. با فرض $e = 0.9$ ، بزرگی و جهت سرعت دو گلوله را پس از برخورد تعیین کنید.

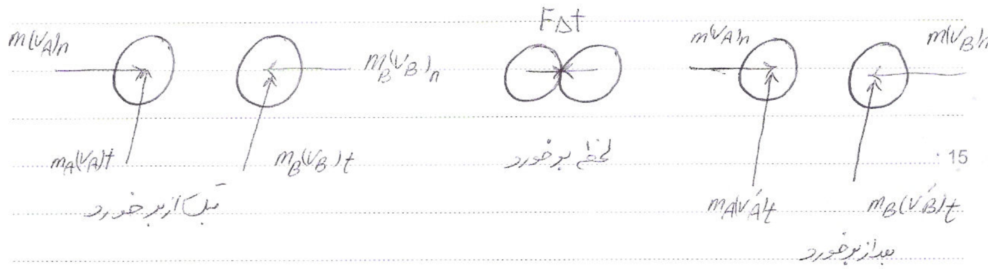


$$(V_A)_n = V_A \cos 30° = 26\ \frac{ft}{sec}$$

$$(V_A)_t = V_A \sin 30° = 15\ \frac{ft}{sec}$$

$$(V_B)_n = -V_B \cos 60° = -20\ ft.sec^{-1}$$

$$(V_B)_t = +V_B \sin 60 = 34.6\ ft.sec^{-1}$$



حرکت در راستای مماس مشترک (t) :

ذره A : $m_A(V_A)_t = m_A(V'_A)_t \rightarrow (V_A)_t = (V'_A)_t = 15\ ft.sec^{-1}$

ذره B : $m_B(V_B)_t = m_B(V'_B)_t \longrightarrow (V_B)_t = (V'_B)_t = 34.6\ ft.sec^{-1}$

در این راستا هیچ نیرویی وارد نمی‌شود

لذا اصل ضربه و اندازه حرکت را بصورت جداگانه می‌نویسیم.

حرکت در راستای خط برخورد برای کل سیستم ($\sum F=0$):

(برای سیستم شامل دو گوی به تنهایی صفر)

قبل از برخورد $G = G'$ بعد از برخورد

$$m_A(V_A)_n + m_B(V_B)_n = m_A(V'_A)_n + m_B(V'_B)_n \Rightarrow (V'_A)_n + (V'_B)_n = 6 \quad ①$$

$(V_A)_n = 26$, $(V_B)_n = -20$

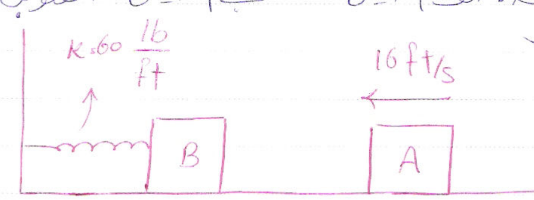
$m_A = m_B$

$$e = \frac{(V'_B)_n - (V'_A)_n}{(V_A)_n - (V_B)_n} \longrightarrow 0.9\left[26-(-20)\right] = (V'_B)_n - (V'_A)_n$$

$$\Rightarrow (V'_B)_n - (V'_A)_n = 41.4 \quad ②$$

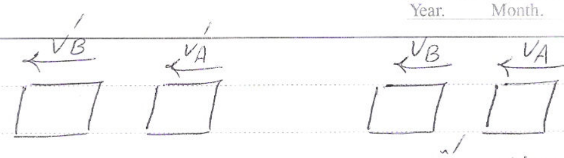
$①,② \Rightarrow (V'_A)_n = -17.7 \quad , \quad (V'_B)_n = 23.7$

مثال: قطعه B به وزن 3 lb به فنر آزادی با ثابت $K = 60 \frac{lb}{ft}$ متصل است، و روی سطح افقی بدون اصطکاک ساکن است. قطعه A با حرکت سرعت $16 \frac{ft}{sec}$ به قطعه B برخورد می کند. با فرض اینکه: الف) $e=1$ ب) $e=0$ ، مطلوبست ماکزیمم انحراف فنر.



Subject :
Year. Month. Date.

برای حل سیستم



استفاده از پایستاری اندازه حرکت

$$m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B \xrightarrow{m_A=m_B} v_A + v_B = v'_A + v'_B$$

$$\longrightarrow 16 + 0 = v'_A + v'_B \quad ①$$

الف) $e = 1$: $e = \dfrac{v'_B - v'_A}{v_A - v_B} = 1 \longrightarrow v'_B - v'_A = v_A - v_B$

2و1 $\Rightarrow v'_B = 16\,\dfrac{ft}{sec}$ ، $v'_A = 0$

$$\cancel{U_g}_{1-2} + U_{e_{1-2}} + \cancel{U_f}_{1-2} = \Delta T$$

$$\frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 = \underbrace{T_2}_{\frac{1}{2}mv_2^2} - \underbrace{T_1}_{\frac{1}{2}mv_1^2} \longrightarrow \begin{cases} v_B = 0 \\ v_A = 16\,\dfrac{ft}{sec} = v'_B \end{cases}$$

$x_1 = L_1 - L_0 = 0$ طول آزاد

$$-\frac{1}{2} \times 60 \times x_{MAx}^2 = -\frac{1}{2} \times \left(\frac{3\,lb}{32.2\,\frac{ft}{s}}\right) \times 16^2$$

$$\Rightarrow x_{mAx} = 0.6305\ ft$$

ب) $e=0 \longrightarrow V'_B - V'_A = 0 \longrightarrow V'_A = V'_B$

$V'_A + V'_B = 16 \Rightarrow V'_A = V'_B = 8\ ft/s$

$U_{g_{1-2}} + U_{e_{1-2}} + U_{1-2} = \Delta T_{1-2} = \cancel{T_2}^{\,0} - T_1$

$$0 - \frac{1}{2} k x_{max}^2 = -\frac{1}{2} \underbrace{(m_A+m_B)}_{\frac{3+2}{32}} V_B'^2 \longrightarrow x_{max} = 0.4458\ ft$$

چون شتاب‌ها با هم برابرند، جرم‌ها با هم جمع می‌شوند

ضریب تبدیل پوند به کیلوگرم

* در برخورد مومسان دو ذره با هم یک سرعت دارند یعنی ذره‌ای با جرم (m_A+m_B) و سرعت $V_A = V_B$.

والسلام

V_0