سیتم ۱۰۰۰

Year. Month. Day. Subject.

امیرمهدی حیدری

۹۰۰۷۴۳۳۷۹

library.nu

هزینه‌ی استفاده

از جزوه = ذکر یک صلوات

[redacted]

mahmood.hosseini@gmail.com

[redacted] : [redacted]

NOTEBOOK

۸ سپتمبر ۲۰۰۱

جلسه‌ی اول ص —

〃 دوم ص —

〃 سوم ص ۱۵

〃 چهارم ص ۱۸

〃 پنجم ص ۲۶

〃 ششم ص ۳۶

〃 هفتم ص ۴۶

〃 هشتم ص ۶۱

〃 نهم ص ۷۱

〃 دهم ص —

جلسه ۱ ... ۹۰

Year. Month. Day. Subject.

مراجع: 1. Dyn(amics) of structure, clough and Penzien تئوری

ترجمه‌ی کل افشانی یا سعادت‌پور

pzarfam.com →

2. " " " , chopra ترجمه طاهونی — تئوری و کاربردی

3. structural Dynamic → paz ساده

4. structrul dynamic for structural Engineer → Hart جدید

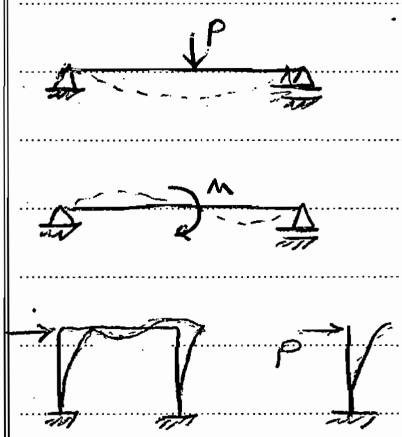
۰۹۱۲۸۰۹۳۱۰۲

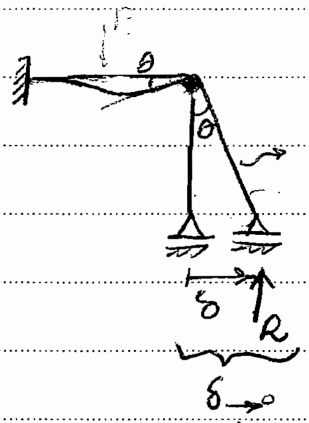
جلسه ۱ ...

۱) تغییر شکل کشسان سازه‌ها

Elastic Deformation of structures

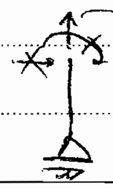
high اهم



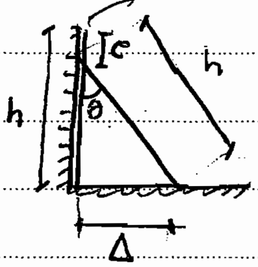


(با تقریب خوب) خط راست

$RS = 0$ → لنگر $= 0$ ⇒ لنگر ندارد ⇓ خط راست



نیروی محوری فقط دارد ⇒ نمی‌تواند خم شود



$$e = h - h\cos\theta \qquad ; \cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!}$$

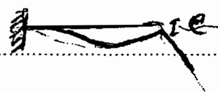
$$= h(1-\cos\theta)$$

$$\simeq h\left(1 - 1 + \frac{\theta^2}{2}\right) = \frac{h\theta^2}{2}$$

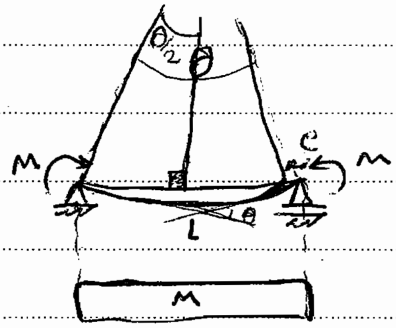
θ کوچک فرض شده

$$\sin\theta = \frac{\Delta}{h} \simeq \theta$$

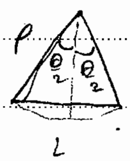
$$\longrightarrow \boxed{e = \frac{h\theta^2}{2} = \frac{\Delta^2}{2h}}$$



$\Leftarrow$ خیلی کوچک $\leftarrow \Delta^2$



$$\text{طول وتر} = L - e = 2\rho\sin\frac{\theta}{2}$$



$$\rho\sin\frac{\theta}{2} + \rho\sin\frac{\theta}{2} = L$$

$$\frac{\rho\theta}{2} + \frac{\rho\theta}{2} = L$$

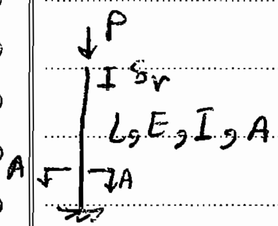
$$2\frac{\rho\theta}{2} = \boxed{\rho\theta = L}$$

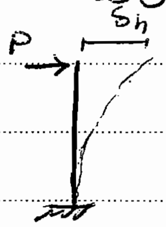
$$\theta \to 0 \Rightarrow \sin\frac{\theta}{2} \simeq \frac{\theta}{2} \Rightarrow \text{طول وتر} = L - e = \rho\cdot\theta$$

$\leftarrow$ یعنی آنقدر e کوچک است که "L−e" برابر همان L شده.

$\leftarrow$ e آنقدر کوچک است که اصلاً نمی‌توان آن را نشان داد

حال آیا تغییر طول ایجاد نمی‌شود؟





$$\delta_v = \frac{PL}{EA}$$

$$\delta_h = \frac{PL^3}{3EI}$$

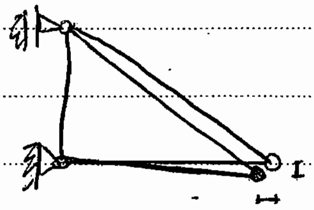
$$\frac{\delta_v}{\delta_h} = \frac{3I}{AL^2}$$

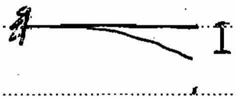
$$\longrightarrow \frac{3a^4/12}{a^2(100a^2)} = \frac{1}{400} \longrightarrow$$ δ_h خودش خ کوچکه

A−A :  $a = \frac{L}{10}$ $\qquad I = \frac{a^4}{12} \qquad A = a^2$

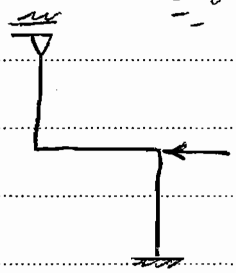
حال $\delta_v \leftarrow$ ۴۰۰ برابر کوچکتر است که اصلاً نمی‌توان آن را نشان داد

$\leftarrow$ اما اگر تمام اعضا محوری بودند مشکلی نبود و همه‌ی اعضا را با یک مقیاس می‌توانستیم نشان دهیم.

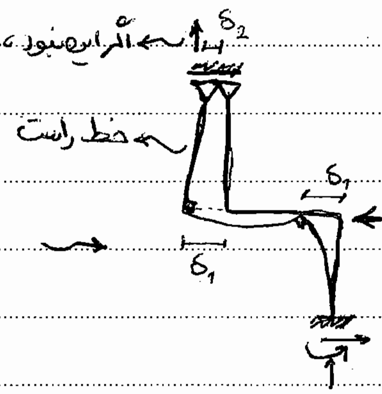


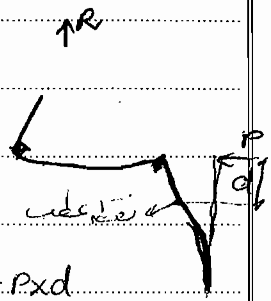


مقیاس ها یکی نیست و...

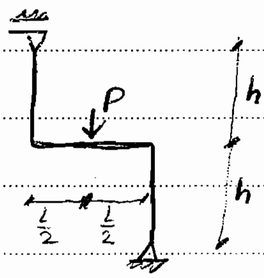


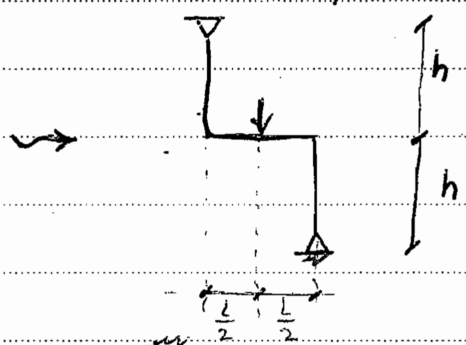
اگر این نبود، خوب می آمد پاسخ

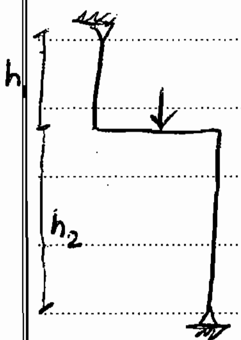


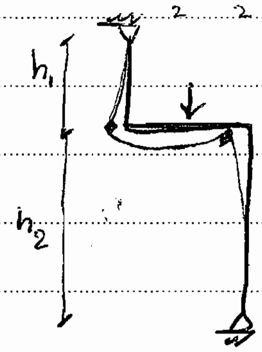


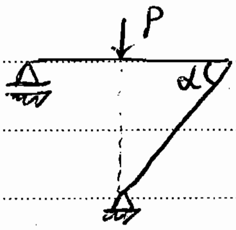
$R \times L = P \times d$

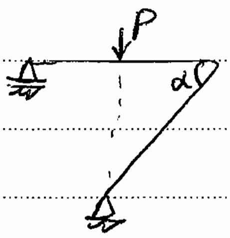






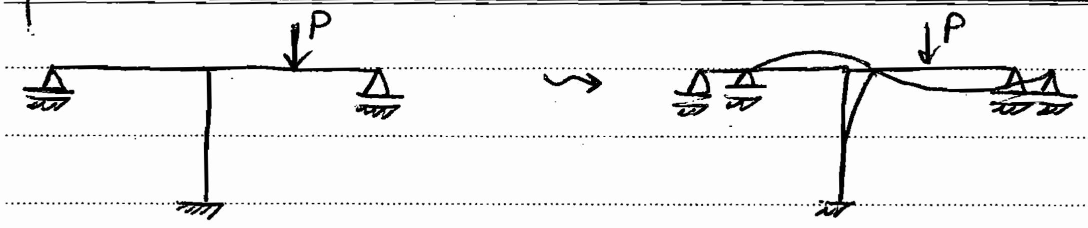


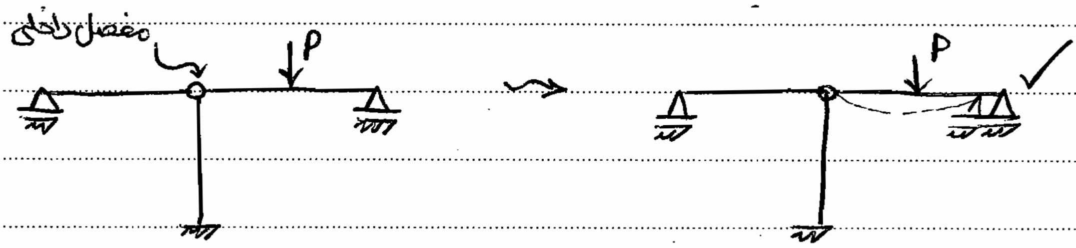




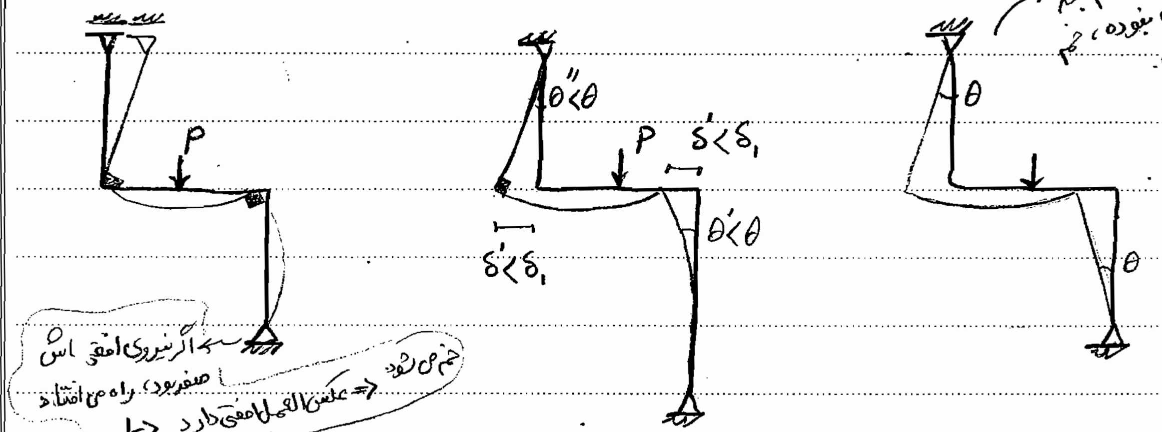
عضو معمولاً نمی‌خواهد دوانحنا شود

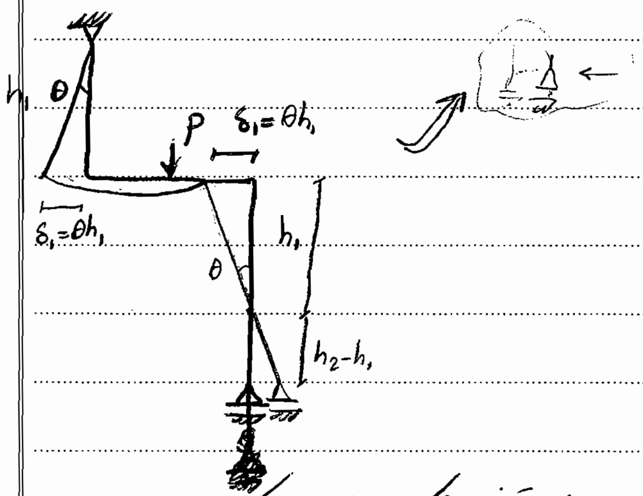
Year. Month. Day. Subject.





حالت خاص:
با اینکه می‌توانسته خم بشه
اما چون مجازی بوده، خم
نشده است.





← در کتاب‌های تحلیل سازه و یا در کتاب‌های دینامیک سازه، تغییر شکل‌ها را بررسی کنیم.

لم باید بتوانیم شکل مناسب سازه را درست پیش‌بینی کنیم.

NOTEBOOK

آنالیز دینامیک سازه‌ها

voice 011

Year. Month. Day. Subject.

تحلیل دینامیکی = سخت ⇐ تا مجبور نباشیم نباید برویم سراغ آن ← از هر ۱۰۰ پروژه ← ۱ پروژه تحلیل دینامیکی دارد

فقط ۱ پروژه تحلیل (دینامیکی) غیرخطی می‌خواهد ← از هر ۱۰۰ پروژه ۲ تا (تحلیل) دینامیک خطی می‌خواهد

سه ویژگی

۱ یا ۲ یا ۳ ویژگی

⇐ شرط لازم = با زمان تغییر کند هر یک از سه ویژگی زیر* (اما شرط کافی نیست)

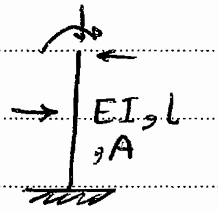
⇐ آن ویژگی که تغییر می‌کند ← تغییرش قابل ...

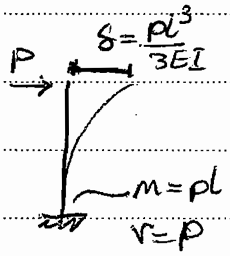
* سه ویژگی نیرو: اندازه و جهت و نقطه‌ی اثر (امتداد اثر)

* مدلسازی

modelling ← انگلیسی

modeLing ← امریکایی





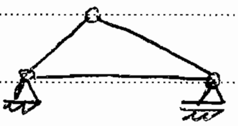
← نیاز نیست تمام قسمت های سازه را بررسی کنیم ← یکسری نقطه (node) را بررسی می کنیم.

← یک عضو را مابین دو گره در نظر می گیریم ← اعضای سه گره ای و ۴ گره ای نداریم

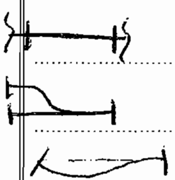
سازه ها ← خرپایی / تیر و قاب — و یا هم از ترکیب دو حالت فوق است.

← در صفحه که سازه ها را مطالعه می کنیم ← گره ی خرپایی ۲ حرکت مستقل دارد
یک افقی و یک قائم

← هر نقطه ی خرپا در صفحه دارای دو مؤلفه ی حرکتی مستقل است ← ۲ درجه ی آزادی دارد



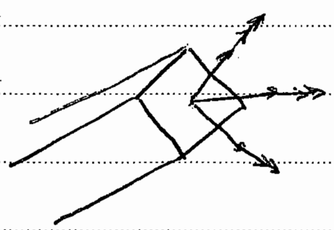
گره ی خرپایی ← در فضا ← دارای سه درجه ی آزادی است



← یک تیر ←  ← افقی و قائم و دوران
می تواند بکند

محورها زیاد مهم نیست ← با ۴ مؤلفه سروکار داریم
← قائم و دوران دو سر عضو

← گره هایی که در انتهای سازه هستند ← حرکتشان اگر در سازه تغییری ندارد ←
قابل در نظر گرفته شده هستند.

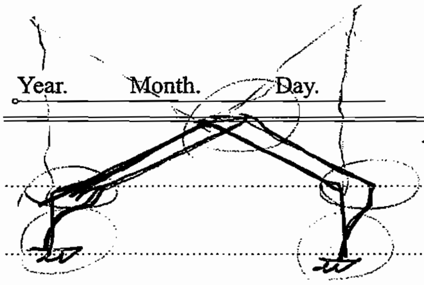


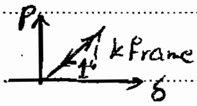
← ۶ درجه ی آزادی

محصولات سینماتیکی

15WCEE

Year. Month. Day. Subject.



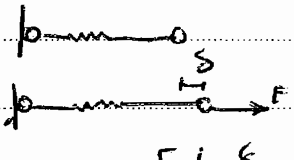


بسمرا

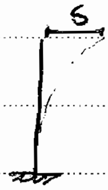
رفتار مصالح و سازه ← الاستیک (کشسان) ← خطی / غیرخطی

← الاستیک - پلاستیک (کشسان - مومسان) (غیرخطی)

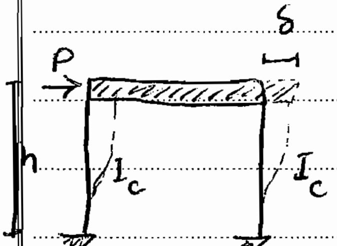
← ما فقط به رفتار الاستیک خطی آن کار داریم.



$F = k \cdot \delta$

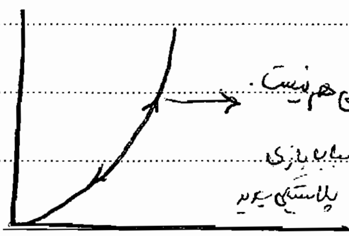


$P = \frac{3EI}{L^3}\delta$ ← $k_{cantilever}$



$P = \frac{2 \times 12EI}{h^3}\delta$

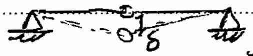
k_{frame}



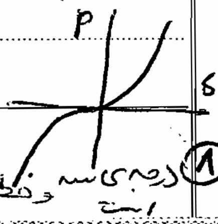
← خطی هم نیست.

اسباب بازی پلاستیکی بود

تیر سه مفصلی یا

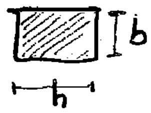


مثل لباس آویزان کردن روی طناب



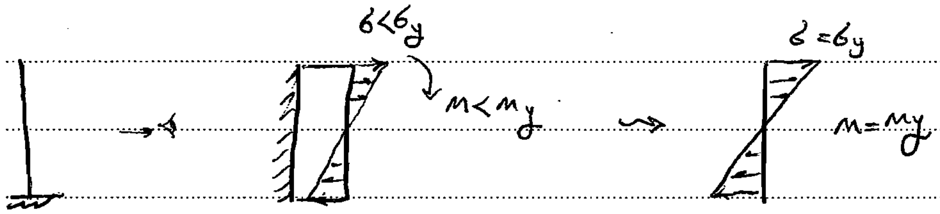
درجه‌ی سه است و خطی نیست

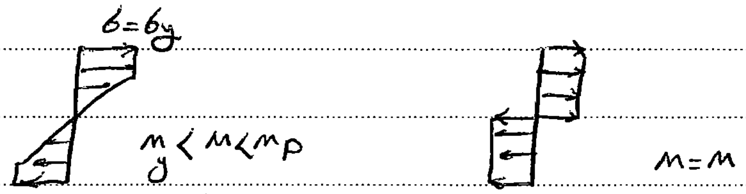
Year. Month. Day. Subject.

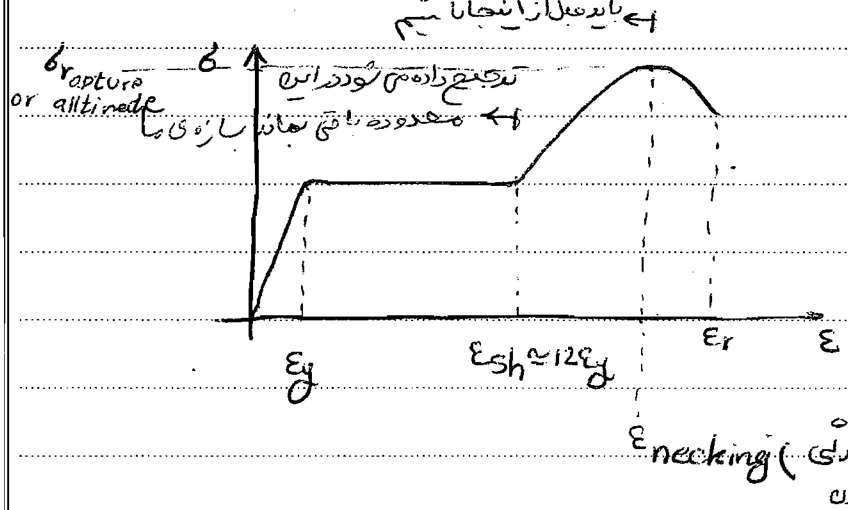


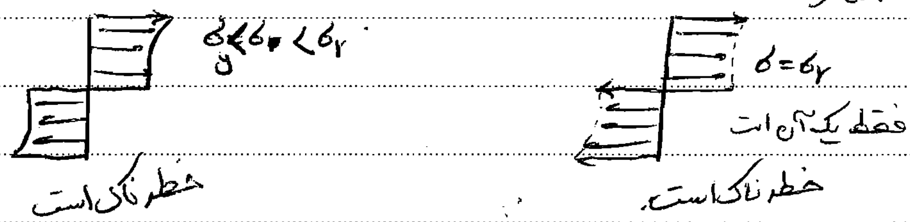
$S = bh^2/6$

$I = \frac{bh^3}{12}$









← در این درس ما فقط رفتار الاستیک خطی را داریم.

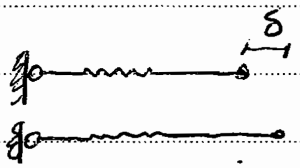
← نوع بارگذاری
- ← استاتیکی
- ← دینامیکی

تحلیل الاستوپلاستیک دینامیکی = سخت‌ترین حالت $\frac{1}{10,000}$

Year. Month. Day. Subject. دوشنبه ۱۰۰۲

مفهوم سختی ← مقاومت در برابر تغییر شکل

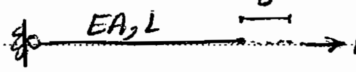
← ضریب سختی تعریف کرده اند



$F = k \cdot \delta$

← نیروی لازم برای ایجاد تغییر مکان واحد

حالت یک میله :

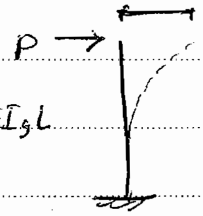


$$\delta = \frac{PL}{AE} \Rightarrow \left(\frac{EA}{L}\right)\delta = P$$

$$\rightarrow P = \left(\frac{EA}{L}\right)\delta \qquad k_{bar}$$

(میله)

مثال های خمشی :



$$\delta = \frac{PL^3}{3EI}$$

سختی انتقالی

$$P = \left(\frac{3EI}{L^3}\right)\delta \qquad k_{cant}$$

طره (Cantiliver) abbreviation مخفف کردن

Degree of freedom = DOF

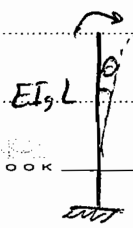
bldg = building

UNESCO → (acronym) → مخفف خوش آهنگ

AAshto

USA یونجه صادراتی اردبیل

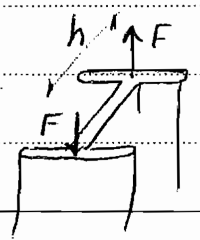
نوع ۱... ۱۳ آبان

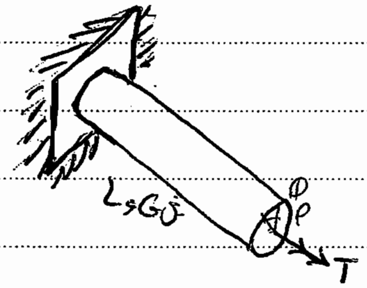


$$\theta = \frac{ML}{EI}$$

$$M = \left(\frac{EI}{L}\right)\theta$$

k_θ سختی دورانی





$$\phi = \frac{Tl}{GJ} \rightarrow \boxed{k_{\text{پیچشی}} = \frac{GJ}{L}}$$

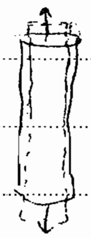
$$J = I_x + I_y$$

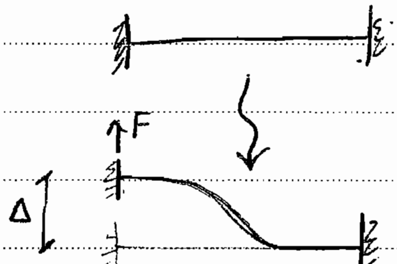
$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\nu = \frac{\text{کرنش جانبی}}{\text{کرنش طولی}} = \frac{\frac{\delta D}{D}}{\frac{\delta L}{L}}$$

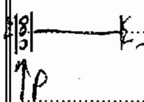
چون ν بعد ندارد می توان آن را با عدد جمع نمود

بعد فیزیکی ندارد





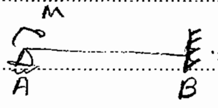
$$F = \left(\frac{12EI}{L^3}\right)\Delta$$



$$\frac{2P(2L)^3}{192EI} = \frac{PL^3}{12EI} = \Delta$$

$$V = \frac{3M}{2L}$$

$$M = \left(\frac{4EI}{L}\right)\theta$$

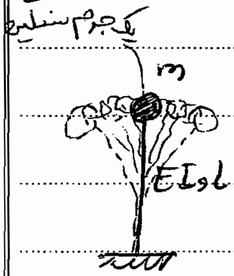


$$\Rightarrow \begin{cases} \theta_A = \frac{ML}{4EI} \\ M_B = \frac{M}{2} \end{cases}$$

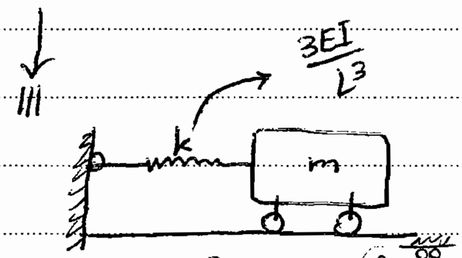
← مفهوم سختی دیگر الان شاید ... مشخص باشد.

← بحث ما نیروی دینامیکی است.

خصوصیات نیروی دینامیکی ← نیروی اینرسی ماده را فعال می کند.



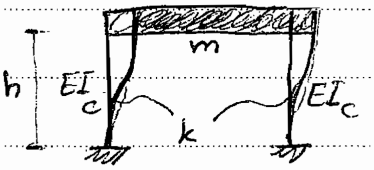
m : یک جرم بر فرض 1ton روی ستون 100kg



معمولاً وزن خود اسکلت را در نظر نمی گیرند (صرف نظر می کنند)

چون دو ستون را مانند دو فنر موازی در نظر گرفتیم ← $\frac{P}{2}$

$$\Delta = \frac{2\times(\frac{P}{2})\times(2L)^3}{192EI} = \frac{PL^3}{24EI} \Rightarrow \boxed{k = \frac{24EI}{L^3}}$$



$$k_{frame} = \frac{24EI_c}{h^3}$$ column

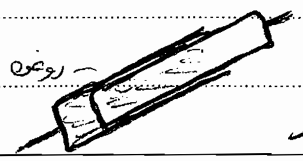
$$F = \frac{24EI_c}{h^3}\Delta$$

→ اگر خیلی آرام بار وارد کنیم ⇐ استاتیکی

→ اما اگر نیروها را سریعا اعمال کنیم ← سرعت دادن ← شتاب در سیستم ایجاد می شود

└ اینرسی ⇐ به جز سختی باید یک مفهوم دیگری در نظر گرفته شود.

← همچنین نیروی میرایی هم باید در نظر گرفته شود ← کمک فنر ماشین



زمان قدیمی کمک فنر نداشته ← مثل فنر

اگر کمک فنر نباشد ← ارتعاش طول می کشد تا بایستد.

بعد از دست انداز تا یک مسیری همچنان ماشین بالا و پایین می شه.

میرایی = میرا شدن ارتعاش ، انرژی جنبشی را مستهلک می کند.

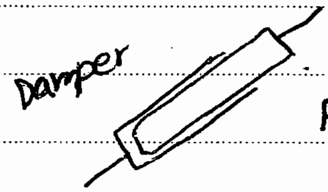
Year. Month. Day. Subject.

~~← تحمل فنر به سرعت حساسیت دارد~~

← اگر بخواهیم به سرعت آن را باز و بسته کنیم مقاومت می کنیم.

← به خاطر اینکه طول می کشد عبور روغن.

و هرچه بیشتر فشار رو سریعتر بار وارد کنید ⇐ مقاومتش بیشتر می شود

⇒ 

$F = C.V$

ضریب میرایی

Dumper خرمال بزرگ

درگ خط کش
(مثال سازه اسکلت)

- میرایی ذرات ماده
- مقاومت هوا
- سختی سازه هم مؤثر است

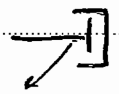
← میرایی در سازه ←

اگر سریع بخواهیم بچرخانیم
خود مولکولها زمان می خواهند تا تغییر شکل بدهند

← دقیقاً مثل اینکه یک عده در یک راه رو جمع شده اند

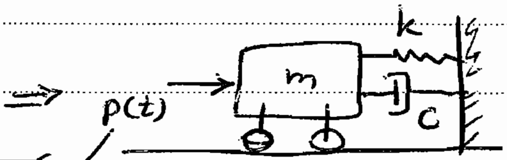
← هرچه سریعتر بخواهی بری عقب ⇐ دیرتر و مقاومت بیشتر

pot = قابلمه



dash
(خط تیره)

dashpot یا Damper

⇒ 

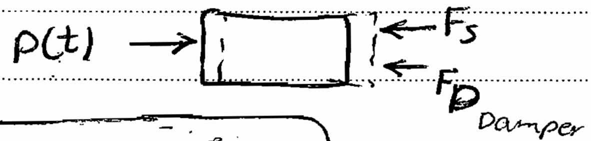
یک بار دینامیکی

هم فنر و هم
میراگر مقاومت می کنند

NOTEBOOK

Year. Month. Day. نگاه نیرویی Subject.

بس



قانون دوم نیوتن

$$\boxed{p(t) - f_S - f_D = m.a}$$

$m.a \to m\ddot{u}$

f_S: $k.u$ به خاطر سفتی

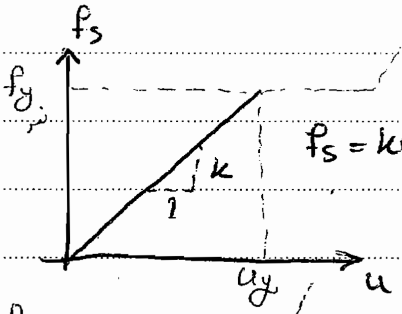
f_D: $c.v = c\dot{u}$ به خاطر سرعت

f_I = نیروی اینرسی (ناشی از جرم) به خاطر شتاب (جرم)

u = جابجایی
$\dot{u}$ = سرعت
$\ddot{u}$ = شتاب

$$\Rightarrow \boxed{p(t) = f_I + f_S + f_D}$$ نیروهای مقاوم در برابر $p(t)$

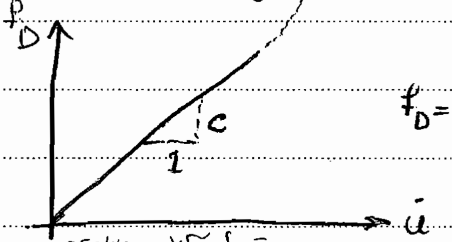
اگر شکل خطی آنها را نشان دهیم، داریم:



$f_S = ku$

yielding

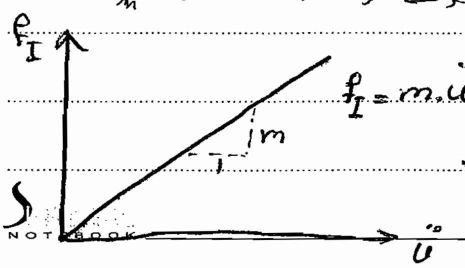
بس در تفسیر شکل های کم خطی در نظر گرفته می شوند



$f_D = c.\dot{u}$

در سرعت زیاد ← شیبش ↑ ← غیرخطی می شود
← به خاطر حالت لزجت مواد
← از یه حدی سرعت بیشتر نمی شود ← سرعت در ← سرعت در سقوط آزاد = 250 km/h

در سرعت های کم، خطی در نظر می گیریم.



$f_I = m.\ddot{u}$

بس تا حد زیادی خطی بودنش درست است.

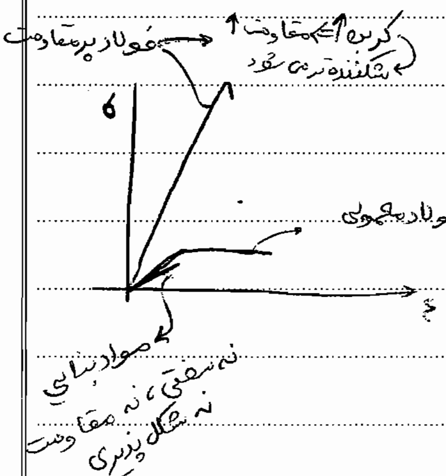
Year. Month. Day. Subject.

خطی نمیشه ← کش می‌آید ← ductile (تایل)

بتن غیرمسلح ← brittle

اما در قوطی کنسرو نه ← سریع می‌شکند ← خمش کنیم ← تیغ ژیلت ← فولاد پرمقاومت

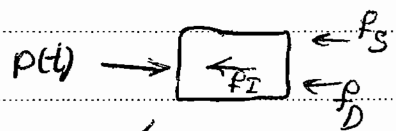
سریع می‌شکند ← brittle



در این درس ما کاملاً در حالت خطی هستیم

* معادله‌ی حرکت سیستم یک درجه‌ی آزادی :

نگاه دالامبری :

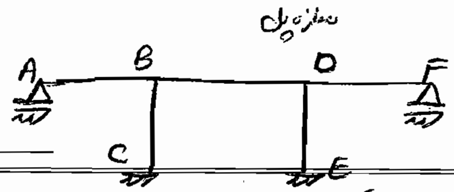


$$\boxed{m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = P(t)}$$

معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه دوم خطی غیرهمگن

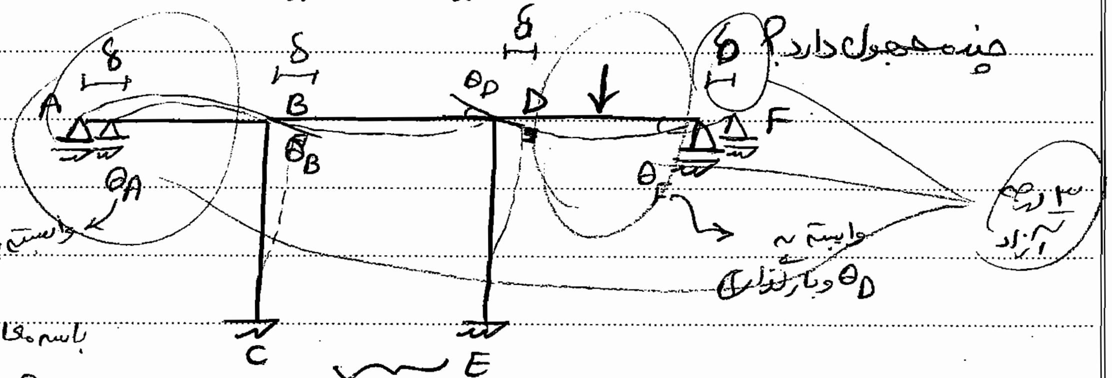
← معادله‌ی حاکم بر سیستم یک درجه آزادی خطی با میرایی لزج

مفهوم درجه آزادی دینامیکی



Year. Month. Day. Subject.

چند مجهول دارد؟ 6



با سه معادله می توان حل کرد:

$$\begin{cases} \Sigma M_B = 0 \\ \Sigma M_D = 0 \\ \Sigma F_x = 0 \end{cases}$$

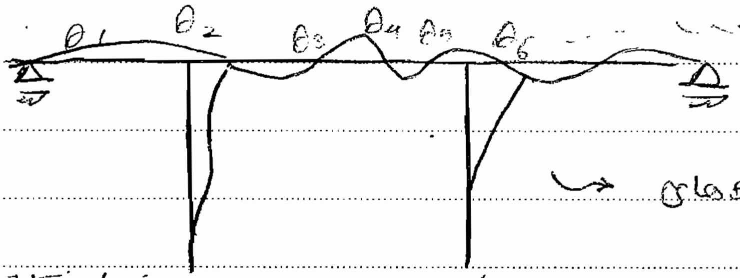
سیستم 3 درجه آزاد

اگر بخواهد سازه بر اساس استاتیک تحلیل شود چند مجهول دارد؟

* θ_F به θ_D وابسته است و θ_A به θ_B وابسته است

حال اگر یک بار دینامیکی بر این سازه اثر کند:

برفرض:



که به هم ربطی ندارند در حالیکه در حالت استاتیکی θ ها به هم وابسته شد

← دیگر متناسب با θ های اطراف نیست

← چون متناسب با نیروهای دینامیکی هم است ⇐ به نقاط مختلف سیستم درجات آزادی دینامیکی اعمال می کنیم

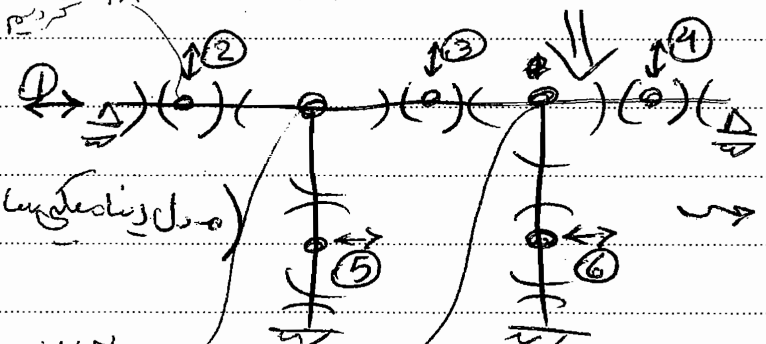
⇓

جرم ⇐ نیروی اینرسی ← موجب اعوجاج فوق شد.

تحلیل یک جرم گسترده خیلی سخت

جرم ها را متمرکز کردیم

6 درجه آزاد



(مدل دینامیکی سازه)

سازه را به چند قطعه تقسیم می کنیم

← هر قطعه [illegible]

دوران آنها را وارد کار نمی کنیم.

افقی آنها هم = 1

← هر جرم می تواند ارتعاش کند به تنهایی

← هر اندازه اهمیت سازه ↑ ⇐ تعداد قطعه ها ↑

دراینجا دوران را باید فرض را در نظر نگیریم

Year. Month. Day. Subject.

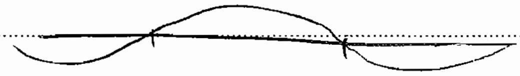
θ را در نظر نمی‌گیریم ←

چون خود به خود با دانستن ...

جابجایی افقی و قائم اعضا + اصل پیوسته بودن شیب

← شکل سازه را پیش‌بینی می‌کنیم ← تا نیاز نباشد نمی‌رویم

سراغ θ ← تا وقتی که می‌توانیم براساس Δ ها شکل θ را بدست آوریم ← θ ها را وارد مسئله نمی‌کنیم

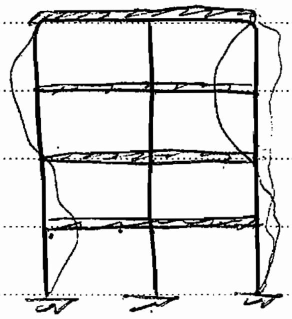


← به کل سقف ← 1 درجه آزادی x

1 درجه آزادی y

و 1 درجه آزادی دوران می‌دهیم.

و می‌توانیم کل سقف (صرف نظر از دهانه‌ها) با هم حرکت می‌کند.



در زلزله

← فقط سفتی مدل می‌شود

ΔC4 , ΔCR ←

در حالت استاتیکی 16 درجه آزادی

در حالت دینامیکی 4 درجه آزادی

← در دینامیکی سفتی و جرم مدل می‌شود

وقتی برای زلزله بخواهیم تحلیل کنیم

← همان مسئله‌ای diafragm کرده است.

Etabs

در حالت استاتیکی تعداد درجات ... پیش‌بینی می‌شود

تعداد درجات کم می‌شود

dia ⇓ ← دینامیکی

← نتیجه‌گیری خیلی مهم:

* درجه‌ی آزادی در حالت استاتیکی براساس تعداد گره‌ها است.

* درجه‌ی آزادی در حالت دینامیکی براساس جرم‌ها است

ضریب سختی دارم ← {EA , EI

* هر وقت سفتی و جرم با هم ترکیب شوند یعنی حتماً رفتار دینامیکی داریم.

اگر جرم اهمیتش کم باشد می‌شود استاتیکی . جرم مهم ← ارتعاش می‌تواند به وجود آید.

← در شکل قبل ۲ درجه استاتیکی داشتیم (مجهولات سینماتیکی هستند)

در حالت دینامیکی هر درجه‌ی آزادی دارد

مهم * در استاتیکی فقط سفتی مدل می‌شود و در دینامیکی سفتی و جرم مدل می‌شود.

Year. Month. Day. Subject.

جلسه‌ی چهارم ۸

معادله‌ی حرکت سازه‌ی یک درجه‌ی آزاد

پاسخ ارتعاش آزاد ← یعنی $p(t)=0$

نامیرا ← $(C=0)$

میرا ← $(C\neq 0)$

ارتعاش آزاد ← $m\ddot{u}+c\dot{u}+ku=p(t)=0$

نامیرا : $\boxed{m\ddot{u}+ku=0}$ $\xrightarrow{\text{ارتعاش آزاد نامیرا}}$ ساده ترین معادله‌ی دینامیک سازه

حل معادله دیفرانسیل مرتبه دو با ضرایب ثابت :

$ay''+by'+cy=0 \rightarrow$ معادله مشخصه : $a\lambda^2+b\lambda+c=0$

$\rightarrow \lambda=ok \Rightarrow$ اگر : $\lambda=p\pm iq$

$\Rightarrow y=Ae^{px}\sin qx+Be^{px}\cos qx$

$$u(t)=Ge^{rt}$$
$$\dot{u}(t)=rGe^{rt}$$
$$\ddot{u}(t)=r^2Ge^{rt}$$

$$(\underbrace{mr^2+k}_{=0})\underbrace{Ge^{rt}}_{\neq 0}=0$$

اگر $=0$ ← جواب صفر می‌شود ×

$$\Rightarrow mr^2+k=0 \Rightarrow r_{1,2}=\pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$i \rightarrow \sqrt{-1}$

$$u(t)=G_1e^{r_1t}+G_2e^{r_2t}=G_1e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t}+G_2e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t}$$

رابطه اولر : $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$

$$\Rightarrow u(t)=G_1\left(\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)+i\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)\right)+G_2\left[\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)-i\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)\right]$$

$G_1 \rightarrow a_1+ib_1$

$G_2 \rightarrow a_2+b_2i$

← خود G ها هم اعداد مختلط اند.

← باید جواب حقیقی باشد $\Leftarrow$

$$\omega_N = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

Year. Month. Day. Subject.

$$\Rightarrow \boxed{u(t) = A\sin\omega_N t + B\cos\omega_N t}$$ معادله‌ی حرکت سازه در حالت ارتعاش آزاد نامیرا

ضرایب وابسته به شرایط اولیه

Initial Conditions

$$I.C: \begin{cases} u(t=0) = u_0 & \text{جابجایی اولیه} \\ \dot{u}(t=0) = \dot{u}_0 & \text{سرعت اولیه} \end{cases}$$

بررسی حالت خاص ساده $\rightarrow$ $I.C \begin{cases} u_0 \neq 0 \\ \dot{u}_0 \neq 0 \end{cases}$

$I.C = $ Initial Condition

$$u_0 = 0 + B\times 1 \Rightarrow \boxed{B = u_0}$$

$$\dot{u}(t) = \omega_N (A\cos\omega_N t - u_0 \sin\omega_N t)$$

$$\dot{u}_0 = \omega_N A \Rightarrow \boxed{A = \frac{\dot{u}_0}{\omega_N}}$$

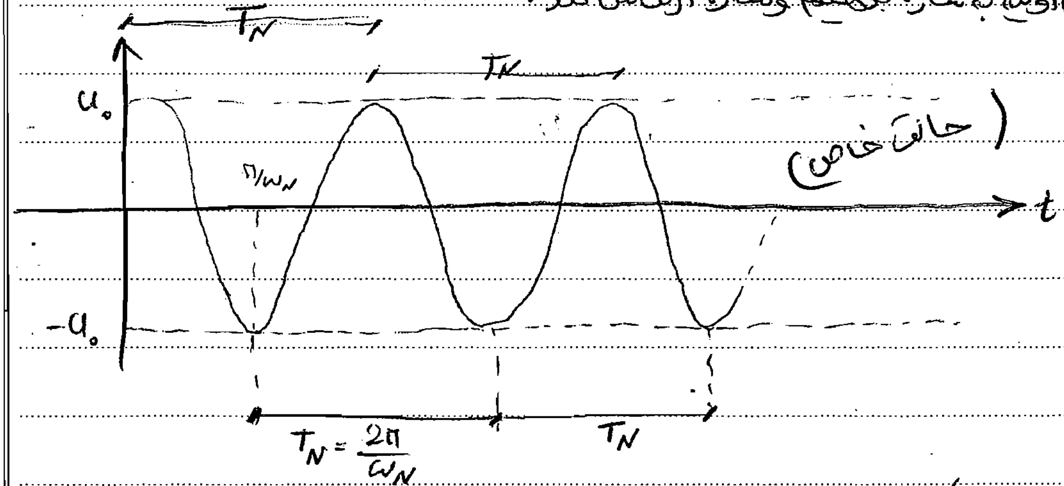
ارتعاش آزاد با تغییر مکان اولیه

حال: $\begin{cases} u_0 \neq 0 \\ \dot{u} = 0 \end{cases}$

$$\boxed{u(t) = u_0 \cos\omega_N t} \rightarrow$$

ساده‌ترین فرم دینامیک سازه

یک جابجایی اولیه به سازه بدهیم و سازه ارتعاش کند.



(دایره‌ای) فرکانس طبیعی زاویه‌ای $\omega_N = \sqrt{\frac{K}{m}}$

natural angular frequence
circular

NOTEBOOK

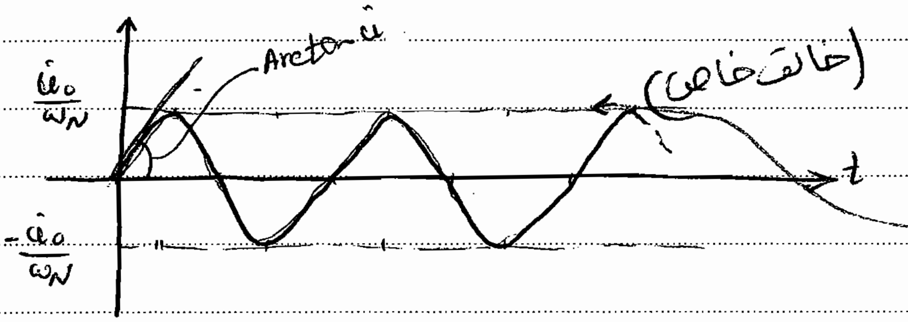
Year. Month. Day. Subject.

$$I.C=\begin{cases} u_0=0 \\ \dot{u}_0\neq 0 \end{cases} \Rightarrow u(t)=\frac{\dot{u}_0}{\omega_N}\sin\omega_N t \qquad * \; u(t)=\frac{\dot{u}_0}{\omega_N}\sin\omega_N t$$

max حالت

$\sin = 1$

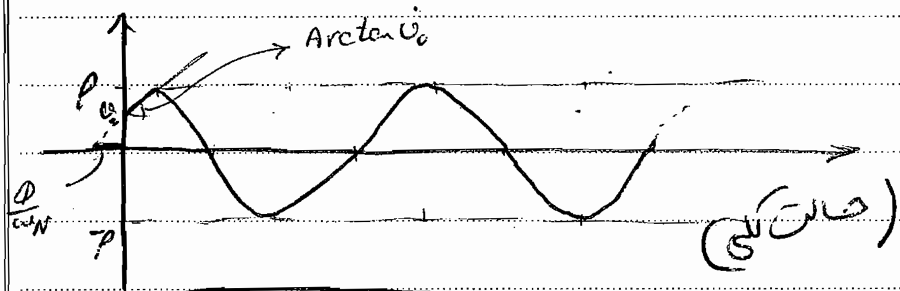
$$\boxed{u_{max}(t)=\frac{\dot{u}_0}{\omega_N}}$$



$$\begin{cases} u_0\neq 0 \\ \text{و} \\ \dot{u}_0\neq 0 \end{cases} \Rightarrow u(t)=\frac{\dot{u}_0}{\omega_N}\sin\omega_N t+u_0\cos\omega_N t$$

فاز حرکت $=\Phi$

دامنه حرکت $=\rho$



$$\boxed{\rho=\sqrt{u_0^2+\frac{\dot{u}_0^2}{\omega_N^2}}} \; *** \; \boxed{\rho=\sqrt{A^2+B^2}}$$

$$* \; \boxed{\Phi=\text{Arc}\tan\frac{B}{A}}$$

$$\rightarrow A.\sin\omega_N t+B\cos\omega_N t=A\left(\sin\omega_N t+\frac{B}{A}\cos\omega_N t\right)$$

$$\frac{\sin\Phi}{\cos\Phi}=\tan\Phi$$

$$=\frac{A}{\cos\Phi}\sin(\omega_N t+\Phi)=0 \Rightarrow t=\frac{-\Phi}{\omega_N}$$ در شکل

$$=\frac{A}{\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}}\sin(\omega_N t+\Phi)$$

$$\cos\Phi=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\Phi}}$$

رابطه برحسب ρ و Φ $\Rightarrow \boxed{u(t) = \underbrace{\sqrt{A^2+B^2}}_{\rho}\ \sin(\omega_N t + \Phi)}$

تمرین) $m=1kg$ ، $k=100\,\frac{N}{m}$ ، الف) $(\dot{u}_0=0$ و $u_0=1cm)$

ب) $(\dot{u}_0=10\,\frac{cm}{s},\ u_0=0)$

ج) $(\dot{u}_0=10\,\frac{cm}{s},\ u_0=1cm)$

$\Delta t=0.01\ sec$

$\omega_N=\sqrt{\frac{100}{1}}=10\ r/s$

$T_N=0.628\ sec$

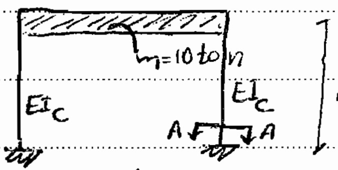
← شکل هایش را می کشیم

← در محیط Excel ← $\Delta t=0.01\,sec$

A	B
0.0	
A1+0.01	

بکشیم آن را پاسخ

یک مثال سازه ای)



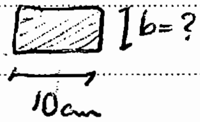
نامیرا

$E=2{,}100{,}000\ kgf/cm^2$ فولاد

$I_c=800\ cm^4$

$\sigma_y=2400\ kgf/(cm)^2$

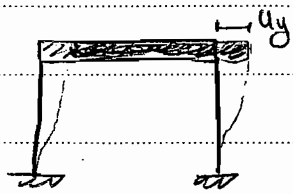
sec A-A :



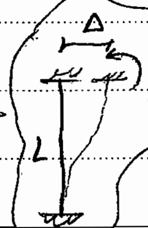
$\Rightarrow \frac{b\times10^3}{12}=800 \Rightarrow b$ ok

سؤال) سازه را تا مرز تغییر مکان تسلیم، آن را هل دادیم و ناگهان رها می کنیم، ارتعاش آزاد کرده است. را حساب کنیم، تاریخچه ی ارتعاشات را رسم کنید. $(\dot{u}_0=0)$

$$\sigma=\frac{P}{A}+\frac{M}{S}=\frac{500}{b\times10}+\frac{M_y}{\frac{800}{5}}=2400 \Rightarrow M_y=ok$$



$M_y=\frac{6EIu_y}{H^2} \leftrightarrow M=\frac{6EI\Delta}{L^2}$



$u_y=ok$ ✓

(u_0) ← ب) یکبار هم برای سرعت $u=1\,m/s$ حل کنیم.

نسبت میرایی $\boxed{\zeta = \dfrac{c}{2m\omega_N}}$ و $\boxed{\omega_D = \omega_N\sqrt{1-\zeta^2}}$ $\boxed{c_c = 2m\omega_N}$

فرکانس زاویه‌ای میرا — فرکانس زاویه‌ای طبیعی — ضریب میرایی بحرانی

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$$

Damped free vibration ارتعاش آزاد میرا

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0$$

$$u(t) = Ge^{rt} \quad , \quad \dot{u}(t) = rGe^{rt} \quad , \quad \ddot{u}(t) = r^2Ge^{rt}$$

$$(mr^2 + cr + k)\,Ge^{rt} = 0$$

$\Downarrow$

$$mr^2 + cr + k = 0 \longrightarrow r_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4km}}{2m}$$

$$my'' + cy' + ky = 0$$

$m\lambda^2 + c\lambda + k = 0$ معادله مشخصه $\qquad = \dfrac{-c \pm 2m\sqrt{\dfrac{c^2}{4m^2} - \dfrac{k}{m}}}{2m}$

$\rightarrow \Delta = c^2 - 4mk$

$\rightarrow \lambda = \dfrac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$ $\qquad = \dfrac{-c}{2m} \pm \sqrt{\dfrac{c^2}{4m^2} - \dfrac{k}{m}}$

$$= \frac{-c}{2m} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4m^2} - \omega_N^2}$$

$$\boxed{-\zeta\omega_N} =$$

$$= \frac{-c}{2m} \pm \omega_N\sqrt{\frac{c^2}{(2m\omega_N)^2} - 1}$$

نسبت (ضریب) میرایی

زتا

$$\frac{c}{2m\omega_N} = \zeta = \frac{c}{c_{cr}}$$

critical

$$\Rightarrow r_{1,2} = \frac{-c}{2m} \pm \omega_N\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$\zeta > 1 \rightarrow$ ایجاد پاسخ نوسانی نمی‌کند

$\zeta < 1$ ...

NOTEBOOK

با فرض : $\xi<1$ فرکانس زاویه‌ای میرا ω_D $\boxed{\xi=\frac{C}{C_c}}$

Year. Month. Day. Subject.

$$\Rightarrow r_{1,2}=-\xi\omega_N\pm i\,\underbrace{\omega_N\sqrt{1-\xi^2}}$$

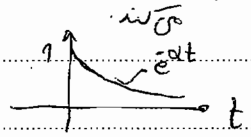
$$\begin{cases} r_1=-\xi\omega_N+i\omega_D \\ r_2=-\xi\omega_N-i\omega_D \end{cases}$$

$$u(t)=G_1e^{(-\xi\omega_N+i\omega_D)t}+G_2e^{(-\xi\omega_N-i\omega_D)t}$$

$$=\boxed{e^{-\xi\omega_N t}(A\sin\omega_D t+B\cos\omega_D t)}$$

معادله‌ی حرکت سازه در حالت ارتعاش آزاد میرا :

$t\uparrow \Rightarrow$ به سمت صفر میل می‌کند



$$\rightarrow \boxed{u_0=B}$$

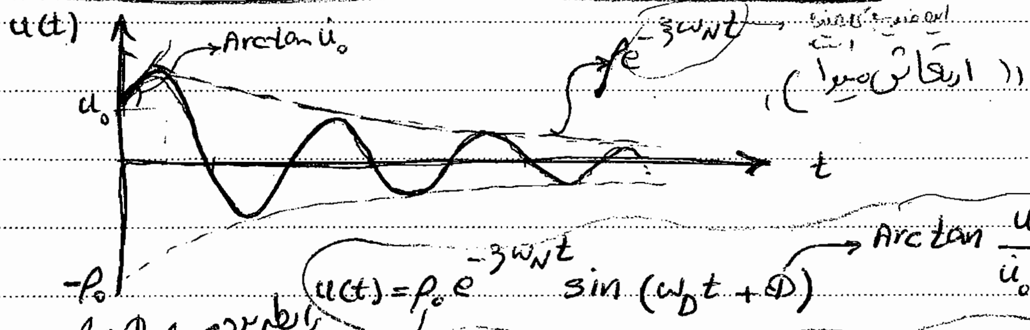
$$\dot u(t)=-\xi\omega_N t\,(e^{-\xi\omega_N t})\,(A\sin\omega_D t+B\cos\omega_D t)+$$

$$\omega_D e^{-\xi\omega_N t}(A\cos\omega_D t-B\sin\omega_D t)$$

$$\rightarrow \dot u(0)=-\xi\omega_N u_0+\omega_D A \Rightarrow \boxed{A=\left(\frac{\dot u_0+\xi\omega_N u_0}{\omega_D}\right)}$$

$$\boxed{u(t)=e^{-\xi\omega_N t}\left(\frac{\dot u_0+\xi\omega_N u_0}{\omega_D}\sin\omega_D t+u_0\cos\omega_D t\right)}$$

** رابطه‌ی نهایی ارتعاش آزاد میرا : *



$$u(t)=\rho_0 e^{-\xi\omega_N t}\sin(\omega_D t+\Phi)$$

$$\Phi=\operatorname{Arctan}\frac{u_0\omega_D}{\dot u_0+\xi\omega_N u_0}$$

رابطه برحسب ρ و Φ

$$\rho_0=\sqrt{\left(\frac{\dot u_0+\xi\omega_N u_0}{\omega_D}\right)^2+u_0^2}$$

$$\boxed{\omega_D=\omega_N\sqrt{1-\xi^2}}$$ فرکانس ارتعاش میرا

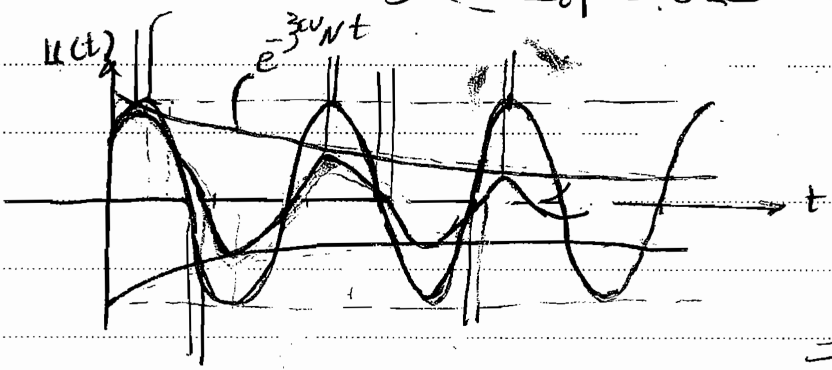
NOTEBOOK

مثال قبل : $m=1$
$k=100$

$$\boxed{c_c = 2m\omega_N = 2\times 1\times 10 = 20 \qquad c = 2\ N.s/m \Rightarrow \zeta = 0.1 \text{ یا } 10\%}$$

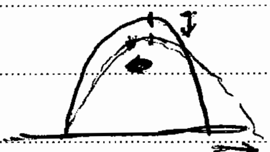
ویکبار هم با میرایی 5% ← شکلش را بکشید.

← سه منحنی را باهم نشان دهید
← تا باهم مقایسه شوند.



سوال
↓
چرا به سمت راست شیفت پیدا می‌کند؟ کلا اشتباه
↓

t	$\rho\sin(\omega_N t+\Phi)$	$\rho_0 e^{-\zeta\omega_N t}\sin(\omega_D t+\Phi)$
0		
0.01		
0.02		



چرا؟

$\zeta<1$ ← حالت تحت بحرانی و $\zeta=1$ حالت بحرانی و $\zeta>1$ حالت فوق بحرانی

$\zeta>1$ ← جواب حقیقی می‌شود ←

$$C_1e^{r_1t}+C_2e^{r_2t}$$

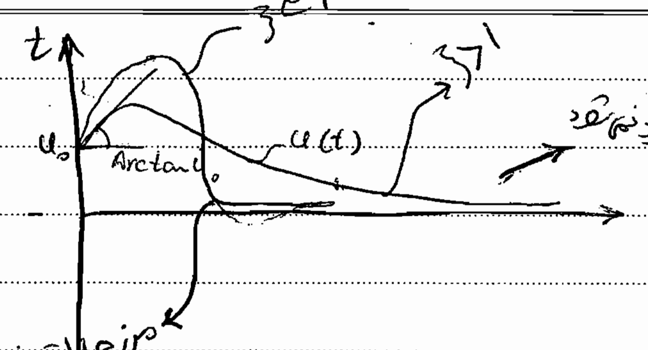
$e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}$
$e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \ldots$

(mp3)

$$\& \quad \xi = 1 \Rightarrow u(t) = e^{-\omega_n t}\left[u_0(1+\omega_n t) + \dot{u}_0 t\right]$$

حالت بحرانی

Year. Month. Day. Subject.



هیچ وقت از صفر رد نمی‌شود

↓

به صفر می‌رسد آرام آرام

↓

مثل Damper کشب‌ها

اگر رابطه‌ی $-\xi\omega_n \pm i\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$ ←

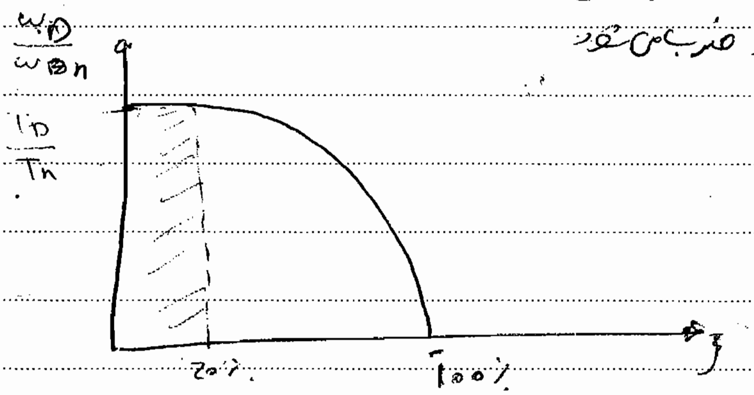
$\xi > 1 \rightarrow 1,\ 1.01,\ \ldots \rightarrow$ شکل را بکشیم با Excel

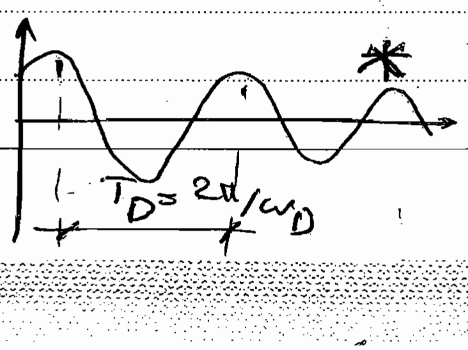
$\omega_D = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} \rightarrow$ ω_D کوچکتر است ← اختلاف

چون عدد ω_n در یک ضریب کوچکتر از ۱ ضرب می‌شود

$$T_D = T_n \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

T_D بزرگتر است چون T_n در یک ضریب بزرگتر از ۱ ضرب می‌شود

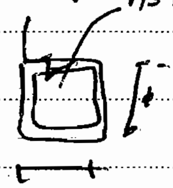




Year. Month. Day. جلسه‌ی پنجم

Subject

$t=1cm$ $A=100\ cm^2$



مثال ← ← یک قوطی باشد ابعاد چقدر باشد تا ...

$a^2-(a-2t)^2=100\ cm^2$

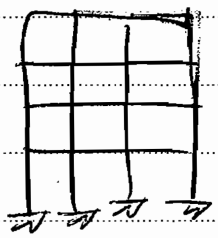
$t=1\ cm \Rightarrow a=...$

* جوشکاری: در جوشکاری در ساختمان

← جوش پیش‌گرم‌سازی و پس‌سرد‌سازی انجام نمی‌شود ← برنده‌ی فولاد شکننده می‌شود ← باعث شکننده شدن مقطع می‌شود

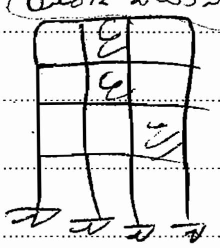
آن شکل‌پذیری مورد انتظار از فولاد را نشان نمی‌دهد.

← مثل آن پل که دهانه 12 متری $1.40\times 90\times 170$



بالای اتابس ← می‌دهد. Etabs

← همیشه پرشدگی در قاب‌ها وجود دارد



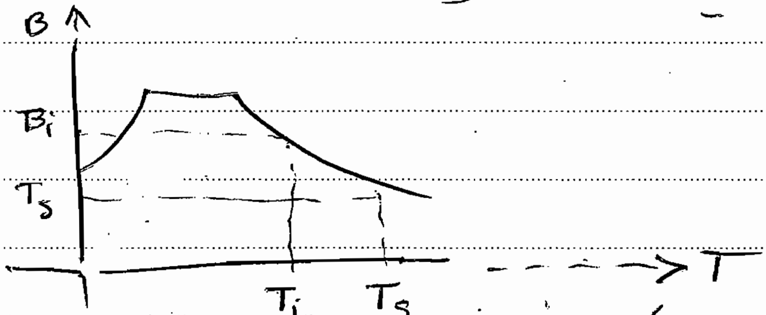
قاب پرشده ← infilled frame

← دیوارها خیلی سختی دارند ← می‌تواند سختی را چندین برابر کند. (infill) پرکننده

در نیروهای کم ← دیوارها به ستون‌ها متصل نیستند ← توصیه‌ی فنی اینکه ← فاصله داشته باشند

سختی قاب را چندین برابر می‌کند

← مصالح بنایی ← سختی اولیه ↑ ← اما مقاومت؟



وقتی مصالح

* قاب خمشی ویژه ← اگر با جوشکاری در ساختمان انجام شود و با فاصله‌ی ۲ تا ۳ سانتی با دیوارها رعایت نشود ← عملاً قاب خمشی ویژه نیست

مصالح بنایی مثل رفیق نامرد می‌ماند ←

← باید در جزئیات پلان جوشکاری موقعیت جوشکاری با توجه به اینکه صفحات ... انجام می‌شود ... پیش‌گرمایش و پس‌گرمایش ...

← انتقال جوش مثل لبه‌ی شیشه شکسته شود.

← در قاب خمشی قابل توجه نیز است.
← در یک ساختمانی که دیوار نداشته باشد، بهتر است از سیستم Etabs استفاده کنیم.

Year. Month. Day. Subject.

دیوارها ← حالت راحت ← نیروی زیادی به قاب وارد که شد ← ترک می‌خورند
و به یکباره نیروی زیادی وارد به قاب می‌شود ← در شرایطی که آثار از اول نبوده‌اند ← $T \uparrow \Rightarrow$ نیروی کمتری به قاب وارد می‌شود.

← در ساختمان‌های ۱۰۰۱ کاملاً محسوس است.

راه حل ← مثلاً گذاشتن پلاستوفوم در دورتادور ستون‌ها بپیچیم.
2.5 cm ضخامت مناسبی است. ← برای ساختمان‌های ۲ به ۳ طبقه فرق خاصی ندارد.

* پاسخ سازه‌ی یک درجه‌ی آزادی به بارگذاری دارای تغییرات چندجمله‌ای

* در آئین‌نامه‌های معتبر جهان، جوش‌کاری در سر ساختمان برای اعضای اصلی نداریم.

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$$

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku$$

حل معادله دیفرانسیل — جواب عمومی — جواب خاص

$$\rightarrow u(t) = u_h(t) + u_p(t)$$

$$\underset{\text{همگن}}{u_h} = e^{-\xi \omega_n t}(A \sin \omega_D t + B \cos \omega_D t)$$

$$u_p(t) = A_0 + A_1 t + A_2 t^2$$

$$\dot{u}_p(t) = A_1 + 2A_2 t$$

$$\ddot{u}_p(t) = 2A_2$$

$$2A_2 m + (A_1 + 2A_2 t)c + k(A_0 + A_1 t + A_2 t^2) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$$

$$\rightarrow 2A_2 m + A_1 c + A_0 k = a_0$$

$$2A_2 c + kA_1 = a_1$$

$$kA_2 = a_2 \Rightarrow \boxed{A_2 = \frac{a_2}{k}}$$

$$\boxed{A_1 = \frac{a_1}{k} - \frac{2a_2 c}{k^2}}$$

صفحه بعد

$$\to \frac{2a_2c}{k} + kA_1 = a_1 \Rightarrow A_1 = \frac{a_1 - \frac{2a_2c}{k}}{k} = \frac{a_1}{k} - \frac{2a_2c}{k^2}$$

$$\to \frac{2a_2m}{k} + \frac{a_1c}{k} - \frac{2a_2c^2}{k^2} + A_0k = a_0$$

$$\boxed{A_0 = \frac{a_0}{k} - \left(\frac{2a_2m + a_1c}{k^2}\right) + \frac{2a_2c^2}{k^3}}$$

$$u(t) = A_0 + A_1t + A_2t^2 + e^{-\xi\omega_N t}\{A\sin\omega_D t + B\cos\omega_D t\}$$

شرایط اولیه را باید در حل کلی بررسی کنیم نه در حل همگن:

$$u_0 = 0 \Rightarrow A_0 + B = 0 \Rightarrow \boxed{B = -A_0}$$

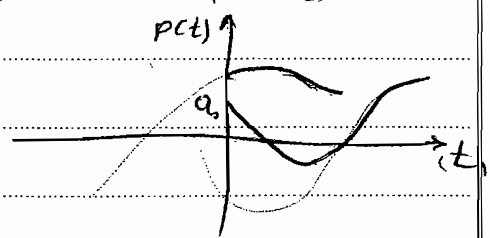
$$\dot{u}(t) = A_1 + 2A_2t - \xi\omega_N e^{-\xi\omega_N t}(A\sin\omega_D t + B\cos\omega_D t)$$

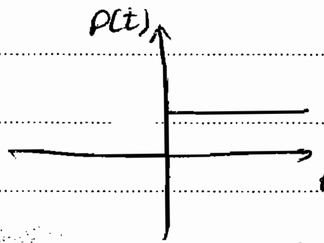
$$+\omega_D e^{-\xi\omega_N t}(A\cos\omega_D t - B\sin\omega_D t)$$

$$\dot{u}(0) = 0 \Rightarrow A_1 \overset{+\xi\omega_N A_0}{\overbrace{- \xi\omega_N \overset{-A_0}{B}}} + \omega_D A = 0$$

$$\boxed{A = \frac{-A_1 - \xi\omega_N A_0}{\omega_D}}$$

$$p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2$$





$\leftarrow p(t) = a_0$ حالت خاص

حالت خاص (بار ناگهانی)

حالت خاص: $\boxed{A_1 = A_2 = 0}$

حالت خاص: $p(t) = P_0$

$$u_p(t) = \frac{P_0}{k} \quad ; \quad B = \frac{-P_0}{k} \; (-A_0) \quad ; \quad A = \frac{-\xi \omega_N P_0}{k \omega_D} \; (A_0)$$

بار ثابت ناگهانی در حالت میرا:

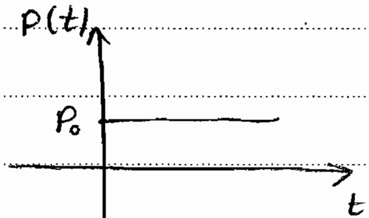
$$\boxed{u(t) = \frac{P_0}{k} + e^{-\xi \omega_N t}\left(\frac{-\xi \omega_N P_0}{k \omega_D} \sin \omega_D t - \frac{P_0}{k} \cos \omega_D t\right)} \; *$$

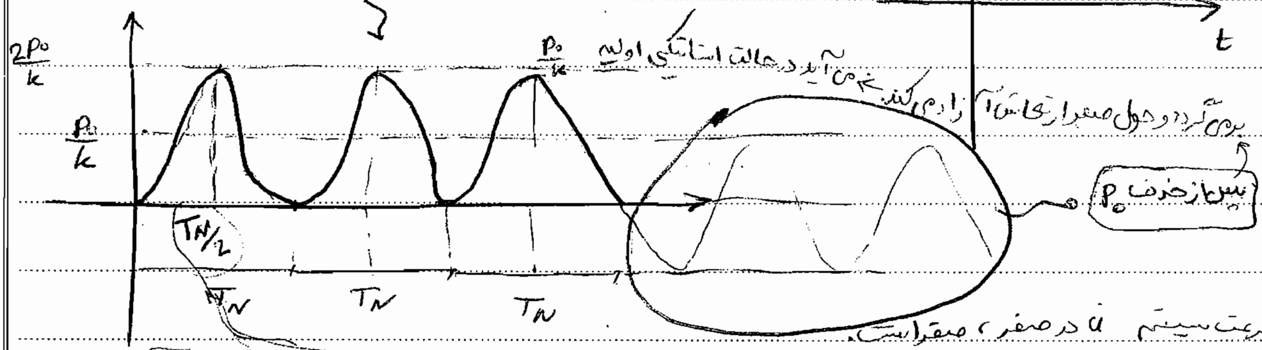
$$\xi = 0 \Rightarrow u(t) = \frac{P_0}{k} - \frac{P_0}{k} \cos \omega_N t$$

حالت خاص تابع ناگهانی P_0 معادله‌ی تابعش می‌شود این ← (در حالت نامیرا)

معادله‌ی حرکت سازه در حالت بار ناگهانی ثابت در حالت نامیرا:

$$\Rightarrow \boxed{u(t) = \frac{P_0}{k}(1 - \cos \omega_N t)}$$





سرعت سیستم $\dot{u}$ در صفر، صفر است.

$\omega_N = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow k = \omega_N^2 m$

سرعت $\dot{u}(t) = \frac{P_0}{k}\omega_N \sin \omega_N t = \frac{P_0}{m\omega_N} \sin(\omega_N t)$; $k = m\omega_N^2$

اولین سرعت صفر بعد از صفر ← $\omega_N t = \pi$

$$\boxed{T_N = \frac{2\pi}{\omega_N}}$$

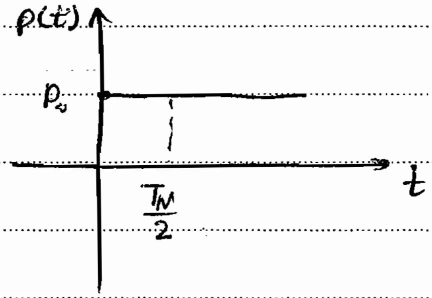
$\omega_N t = \pi \qquad t = \frac{\pi}{\omega_N} = \frac{T_N}{2}$ ← در $\frac{T_N}{2}$، دومین جایی است که سرعت صفر می‌شود

⇐ اگر باری که می‌خواست به مرور وارد شود، یکجا وارد شود و P_0 باشد

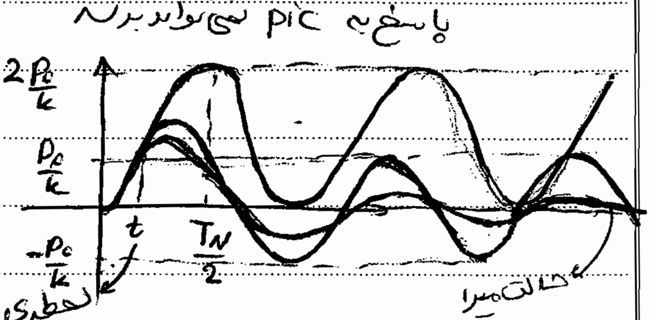
⇐ تأثیرش دو برابر است ← $\left(\frac{2P_0}{k}\right)$ → $t = \frac{T_N}{2}$ → max می‌شود

$\frac{P_0}{k}$ = پاسخ استاتیکی سازه

حال اگر بار را زودتر از $\frac{T_N}{2}$ قطع کنیم:



پاسخ به pic نمی‌تواند برسد



← pic کمی می‌رود جلوتر و بالاتر از t چون سرعت داشته

حذف بار ⇐ حول صفر ارتعاش می‌شود...

← این مفهوم برای بحث بار ضربه‌ای خیلی به درد می‌خورد

← تغییر مکان بیشینه بعد از اتمام بارگذاری اتفاق افتاده

⇐ بار ضربه‌ای است

* پاسخ بیشینه‌ی سیستم بعد از اتمام بارگذاری رخ داده ← زمان اعمال بار ← کم
⇓
بار ضربه‌ای

تمرین) برای * یکسری مقادیر عددی بدهیم

$m = 1\,kg$
$k = 100\ N/m$
$c = 2\ N.S/m$
$P_0 = 10\ N$

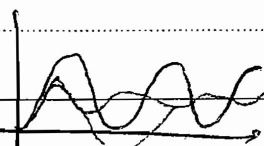
← سه میرایی را حساب کنیم ← $\zeta \simeq 0.1$

← یکبار در حالت نامیرا و یک بار در حالت میرا بررسی کنیم. p 104

$\omega_D = 9.95$

$\omega_N = 10\ rad/s$

$$\zeta = \frac{c}{2m\omega_N} = \frac{2}{2\times1\times10} = 0.1$$



← منحنی میرا، بعد از یک مدت مماس بر $\frac{P_0}{k}$ می‌شود

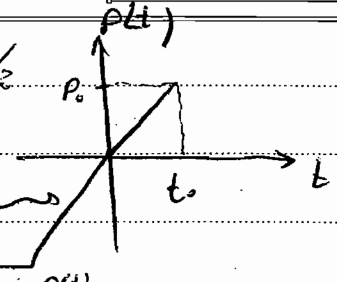
تمرین دوم :

Year. Month. Day. Subject.

$p(t) = a_0 + a_1 t \longrightarrow$ جابجایی ← حرکت

$a_1 t_0 = p_0$

← بارگذاری افزایندی خطی ← یکبار

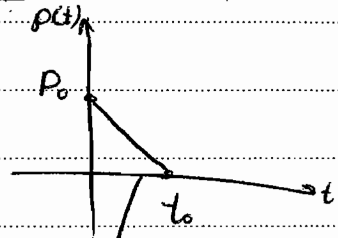


$$\boxed{u(t) = e^{-\xi \omega_N t}\{A\sin\omega_D t + B\cos\omega_D t\} - \frac{P_0 C}{t_0 k^2} + \frac{P_0}{t_0 k} t}$$

← بارگذاری کاهشی خطی ← یکبار هم

$t = 0 \quad a_0 = P_0$

$t = t_0 \quad P_0 + a_1 t_0 = 0 \rightarrow a_1 t_0 = -P_0$



← عبارت هاش را بدست آوردیم و با ها

مقادیر عددی تمرین قبل شکل هاش را

$u(t)\ ,\ \dot{u}(t) \rightarrow$ جوابهاشان را بدست آوریم

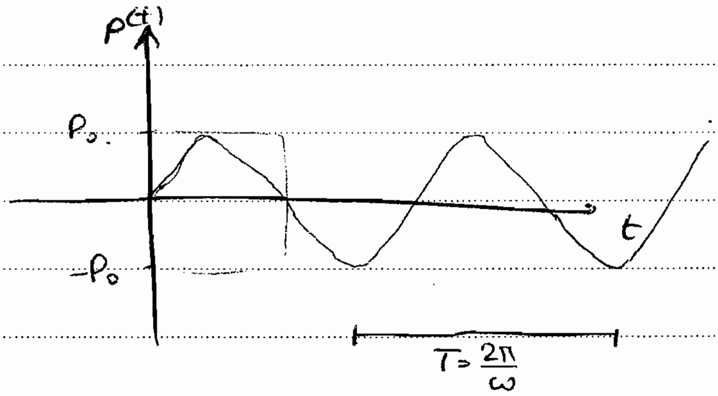
رسم کنید

$$\boxed{u(t) = e^{-\xi \omega_N t}\{A\sin\omega_D t + B\cos\omega_D t\} + \left(\frac{P_0}{k} + \frac{P_0 C}{k^2 t_0}\right) + \left(\frac{-P_0}{k t_0}\right)t}$$

دامنه فرکانس

$p(t) = P_0 \sin \omega t$

$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = P_0 \sin \omega t$



$u_p(t) = G_1 \sin\omega t + G_2 \cos\omega t$?!! $\longrightarrow$ از کجا آمد؟

$\dot{u}_p(t) = \omega G_1 \cos\omega t - \omega G_2 \sin\omega t$

$\ddot{u}_p(t) = -\omega^2 G_1 \sin\omega t - \omega^2 G_2 \cos\omega t$

$(k - m\omega^2)(G_1 \sin\omega t + G_2 \cos\omega t) + c\omega(G_1\cos\omega t - G_2 \sin\omega t) = P_0 \sin\omega t$

$$\begin{cases} (k - m\omega^2) G_1 - c\omega G_2 = P_0 \\ (k - m\omega^2) G_2 + c\omega G_1 = 0 \end{cases} \longrightarrow \text{دو معادله دو مجهول}$$

NOTEBOOK

$$c = 2\zeta m \cdot \omega_N \quad ; \quad \frac{c}{m} = 2\zeta\omega_N \quad ; \quad \frac{c^2\omega^2}{m\omega_N^2}$$

Year. Month. Day. Subject.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} A & b_1 \\ B & b_2 \end{vmatrix}}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$$\begin{bmatrix} k - m\omega^2 & -c\omega \\ c\omega & k - m\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_0 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{\begin{vmatrix} P_0 & -c\omega \\ 0 & k - m\omega^2 \end{vmatrix}}{(k-m\omega^2)^2 + c^2\omega^2} = \frac{P_0(k - m\omega^2)}{k^2\left[(1 - \frac{m\omega^2}{k})^2 + \frac{c^2\omega^2}{k^2}\right]} = \frac{P_0 k(1 - \frac{m\omega^2}{k})}{k^2\left[(1-(\frac{\omega}{\omega_N})^2)^2 + (\frac{2\zeta\omega}{\omega_N})^2\right]} = \frac{P_0}{k}\frac{(1-(\frac{\omega}{\omega_N})^2)}{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}$$

$$\hookrightarrow c = 2m\omega_N \times \zeta \rightarrow c^2 = 4m^2\omega_N^2\zeta^2 \; ; \; k^2 = \omega_N^4 m^2 \rightarrow \frac{c^2\omega^2}{k^2} = \frac{4m^2\omega_N^2\zeta^2 \times \omega^2}{\omega_N^4 m^2} = \Big(\underbrace{\frac{2\zeta\omega}{\omega_N}}_{\beta}\Big)^2$$

$$\rightarrow \frac{c^2\omega^2}{(m\omega_N^2)^2} = \frac{4\zeta^2 m^2\omega_N^2\omega^2}{(m\cdot\omega_N^2)^2} = \frac{4\zeta^2\omega^2}{\omega_N^2}$$

$$2\zeta m\omega_N \times \omega \times \frac{m}{m}$$

$$\frac{c^2\omega^2}{k^2} = \left(\frac{c\omega}{k}\right)^2 = (2\zeta\beta)^2$$

$$\rightsquigarrow \boxed{c = 2\zeta\omega_N m}$$

$$\Rightarrow \boxed{G_1 = \frac{P_0}{k}\frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}} \qquad \boxed{\beta = \frac{\omega}{\omega_N}}$$

$k^2 = k$

$$G_2 = \frac{\begin{vmatrix} k - m\omega^2 & P_0 \\ c\cdot\omega & 0 \end{vmatrix}}{k^2\left[(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2\right]} = \frac{-P_0 \cdot \overset{2\zeta m\omega_N}{c}\,\omega}{\dots} = \frac{-P_0}{k} \times \frac{2\zeta m\omega_N\omega}{\underset{\omega_N^2 m}{k}[----]} = \frac{-P_0}{k}\frac{2\zeta \cancel{m}\cancel{\omega_N}\omega}{\cancel{m}\omega_N^{\cancel{2}}[--]}$$

$2\zeta m\omega_N\omega$

k

β

$$\boxed{G_2 = \frac{-P_0}{k}\frac{2\zeta\beta}{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}}$$

$$u(t) = e^{-\zeta\omega_N t}(A\sin\omega_D t + B\cos\omega_D t) + \frac{P_0}{k}\frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}\left[(1-\beta^2)\sin\omega t - 2\zeta\beta\cos\omega t\right]$$

NOTEBOOK

نسبت فرکانس

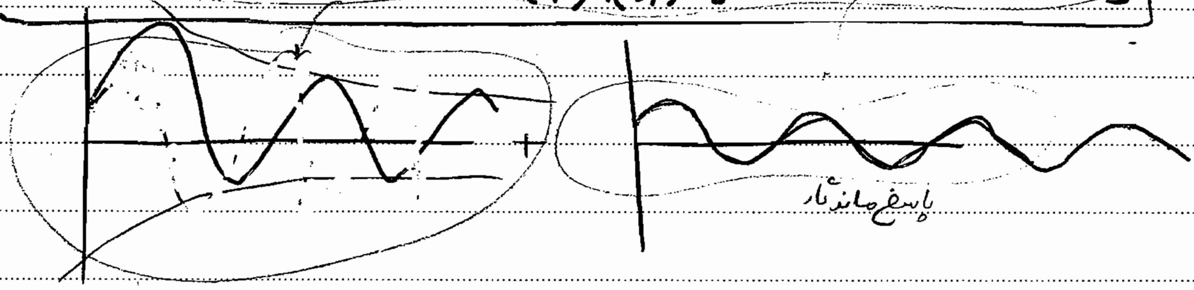
$\boxed{\beta = \frac{\omega}{\omega_N}}$

پاسخ بار: Sin ی

Year. Month. Day. Subject.

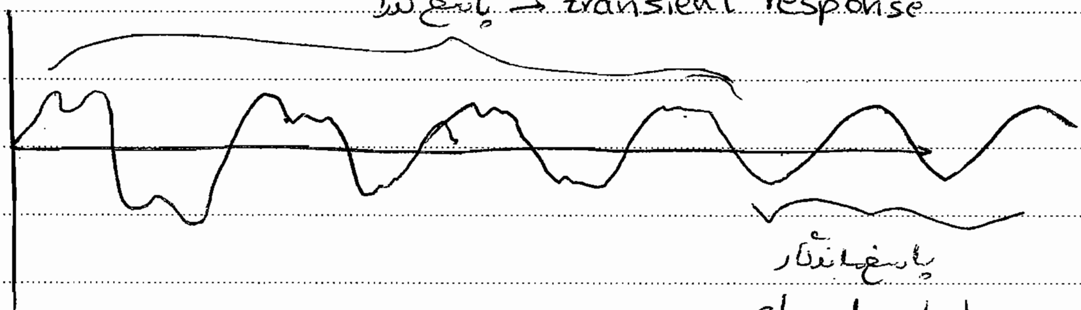
$$\Rightarrow u(t) = e^{-\zeta\omega_N t}(A\sin\omega_D t + B\cos\omega_D t) + \frac{P_0}{k}\frac{1}{(1-\beta^2)^2+(2\zeta\beta)^2}\left[(1-\beta^2)\sin\omega t - 2\zeta\beta\cos\omega t\right]$$

$$\boxed{u(t) = e^{-\zeta\omega_N t}(A\sin\omega_D t + B\cos\omega_D t) + \frac{P_0}{k}\frac{1}{(1-\beta^2)^2+(2\zeta\beta)^2}\left[(1-\beta^2)\sin\omega t - 2\zeta\beta\cos\omega t\right]}$$



پاسخ ماندگار

پاسخ گذرا → transient response



پاسخ ماندگار

steady state response

تمرین ۵) الف)

$m = 1\ kg$

$k = 100\ N/m$

میرایی ۱۰٪ ← $C = 2\ N.S/m$

$P_0 = 10N$

$\omega = 1, 2, 5, 8$

تشکل های خیلی جالب ← $9.9, 10, 10.1$, $15, 20, 30$

فرکانس سازه در حالت میرایی preiod

$\beta = 1$

β ← $0.1 \sim 3$

رسته حل دیگر: ب)

$C = 0$

نامیرا

$\omega = 1, 2$

دقیقاً مثل حالت (الف)

$\Delta t = 0.02\ S$

function help

D1

حداقل ← ۲۰ تا ۳۰ ثانیه ← تمام نمودارها ثابت می‌مانند

کدهای فرکانس بالا

بیشترین دامنه و مقادیر β رسم کنیم (۰.۵) قدر مطلق

D_{ss} — β

از $c=0$ یا $\xi=0$ $\Rightarrow u(t)=\left(A\sin\omega_N t+B\cos\omega_N t\right)+\frac{P_0}{k}\frac{1}{1-\beta^2}\sin\omega t$

$u_0(t)=0 \Rightarrow \boxed{B=0}$ ~~خیلی ساده شد~~ $u(t)=A\sin\omega_N t+\frac{P_0}{k}\frac{1}{1-\beta^2}\sin\omega t$

$\dot{u}(t)=A\omega_N\cos\omega_N t+\frac{P_0}{k}\frac{1}{1-\beta^2}\,\omega\cos\omega t$

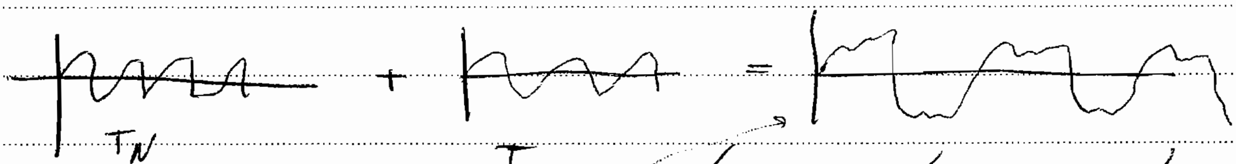
$\dot{u}_0=0 \Rightarrow \omega_N A+\frac{P_0}{k}\frac{\omega}{1-\beta^2}=0 \Rightarrow \boxed{A=\frac{-P_0}{k}\frac{\omega/\omega_N}{1-\beta^2}=\frac{-P_0}{k}\frac{\beta}{1-\beta^2}}$

$$\boxed{u(t)=\frac{P_0}{k}\frac{1}{1-\beta^2}\left(\sin\omega t-\beta\sin\omega_N t\right)}$$

معادله‌ی حرکت پاسخ به بار تناوبی با میرایی صفر: *

دو عبارت با فرکانس‌های متفاوت دارند که با هم ترکیب می‌شوند.

حالت نامیرا:



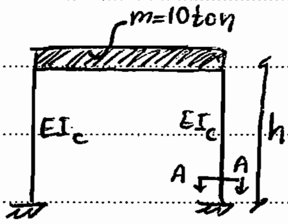
هیچ وقت هم شکل منظمی پیدا نمی‌کند.

کدام ← دوره‌ی بازگشت این ارتعاش نامنظم

$$\Rightarrow \boxed{M_y=\left(\frac{6EI}{l^2}\right)\times\Delta}$$

حل مثال صفحه ی ۲۱ جزوه :

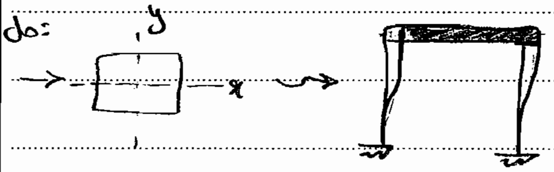
سازه ی مقابل را تا مرز تغییر مکان تسلیم، جابجا کرده ایم (هل داده یا کشیده ایم) و ناگهان رهاش می کنیم. ارتعاش آزاد نموده است. تاریخچه ی ارتعاشات را رسم کنید.



sec A-A :

فولاد
$E=2{,}100{,}000\ kgf/cm^2$
$I_c=800\ cm^4$
$\sigma_y=2400\ kgf/cm^2$

حل:



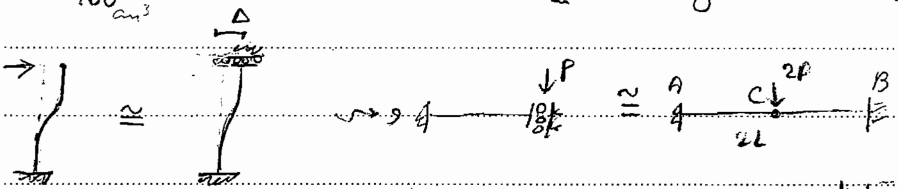
$\Rightarrow$ y حول دوران $\rightarrow I_y=I_c=\frac{bh^3}{12}=\frac{b\times1000}{12}$ 9.6 cm

$\Rightarrow b=9.6\ cm$ ok✓

$S=\frac{I}{y}=\frac{800}{5}=160\ cm^3$

$$\sigma_y=\frac{P}{A}+\frac{M}{S}=\frac{\left(\frac{10^4\times9.8}{2}\right)}{10\times9.6}+\frac{M}{\left(\frac{800}{5}\right)}=500+\frac{M}{160}=2400\ kgf/cm^2$$

$$\Rightarrow\frac{M}{160\,cm^3}=2400-500=1900\ kgf/cm^2\Rightarrow M_y=(19\times16\times10^3)\ kgf.cm$$



$$\rightarrow\Delta_C=\frac{(2P)(2L)^3}{192EI}$$

$$\rightarrow\Delta_{کل}=\frac{2P\times8L^3}{192EI}=\frac{PL^3}{12EI}$$

اما دو ستون داریم $\Rightarrow\Delta_{کل}=\frac{(P/2)L^3}{12EI}=\frac{PL^3}{24EI}$

$$\Rightarrow\boxed{P=\left(\frac{24EI}{L^3}\right)\times\Delta}$$

$$\Rightarrow M_c=\frac{PL}{8}\Rightarrow M_c\overset{mirror}{=}\frac{(2P)\times(2L)}{8}=\frac{PL}{2}\xrightarrow[P=\frac{P}{2}]{دو ستون}\boxed{M_c=\frac{PL}{4}}\Rightarrow M_y=\frac{L}{4}\times\left(\frac{24EI}{L^3}\times\Delta\right)$$

$$\Rightarrow u_y=\frac{M_yh^2}{6EI}=\frac{19\times16\times10^3\times(300)^2}{6\times2.1\times10^6\times800}=2.71\ cm\Rightarrow$$

$u(t)=A\sin\omega_Nt+B\cos\omega_Nt$; $\omega_N=\sqrt{\frac{k}{m}}$ ؛ $k=\frac{24EI}{L^3}$

الف) $u_0=2.71$, $\dot u_0=0$

$k=\frac{24\times2.1\times10^6\times800}{(300)^3}=1493\ kgf/cm$

$\rightarrow\omega_N=\sqrt{\frac{1493}{10^4}}=0.38$

$\dot u(t)=A\omega_N\cos\omega_Nt-B\omega_N\sin\omega_Nt$

$\rightarrow u(0)=\boxed{2.71=B}$

$\dot u_0=A\times(0.38)=0\Rightarrow A=0$

$$\Rightarrow\boxed{u(t)=2.71\cos(0.38\times t)}$$

عملی

Year. Month. Day. Subject.

روش بدست آوردن نسبت میرایی را در سیستم های یک درجه آزادی چگونه بدست آوریم

تحلیل سیستم

سیستم ۱

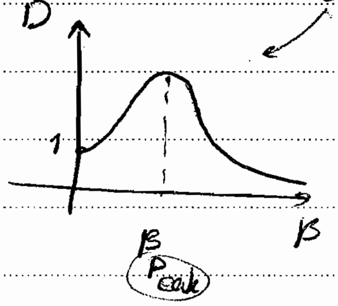
$$m\ddot{u}+c\dot{u}+ku=p_0\sin\omega t$$

$u_{ss}(t)$ steady state پاسخ ماندگار

$$u(t)=e^{-\xi\omega_N t}(A\sin\omega_D t+B\cos\omega_D t)+\frac{p_0}{k}\frac{1}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}\left[(1-\beta^2)\sin\omega t-2\xi\beta\cos\omega t\right]$$

u_{st} استاتیکی

D^2



$$\boxed{\beta_{peak}=\sqrt{1-2\xi^2}}$$

$$u_{ss}(t)=\rho_{ss}\sin(\omega t-\Phi) \quad \Phi \to \arctan\frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}$$

steady state

(فاز)

$$\rho_{ss}=\frac{p_0}{k}\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}}$$

(دامنه) D

$$D=\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}}$$

دامنه

NOTEBOOK

Year. Month. Day. Subject.

پاسخ بار سینوسی نامیرا

اگر $\xi = 0$

$$\xi = 0 \Rightarrow u(t) = A \sin \omega_N t + B \cos \omega_N t + \frac{P_0}{k} \frac{1}{(1-\beta^2)} \sin \omega t$$

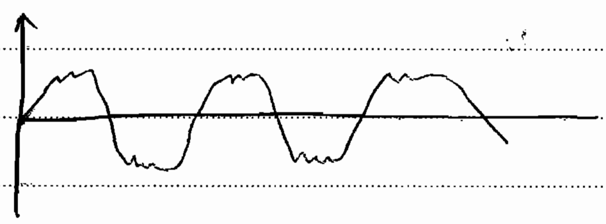
$$\cancel{+ \frac{P_0}{k} \frac{1}{(1-\beta^2)} \sin \omega t}$$

$$u_0 = 0 \Rightarrow \boxed{B = 0}$$

$$\dot{u}_0 = 0 \Rightarrow \quad \dot{u}(t) = \omega_N A \cos \omega_N t + \frac{P_0}{k} \frac{\omega}{1-\beta^2} \cos \omega t$$

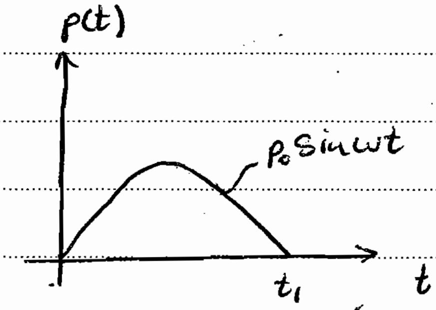
$$\dot{u} = 0 \Rightarrow \omega_N A + \frac{P_0}{k} \frac{\omega}{1-\beta^2} = 0 \Rightarrow \boxed{A = \frac{-P_0}{k} \frac{\beta}{1-\beta^2}}$$

$$\rightarrow u(t) = \frac{P_0}{k} \frac{1}{1-\beta^2} \left[\sin \omega t - \beta \cos \omega_N t \right]$$



NOTEBOOK

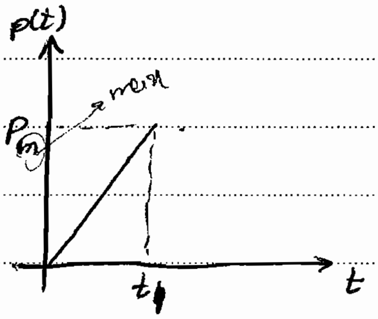
Impulsive load بارگذاری ضربه‌ای



پاسخ به بار نوسانی سینوسی با میرایی صفر:

$$u(t)=\frac{p_0}{k}\frac{1}{1-\beta^2}(\sin\omega t-\beta\sin\omega_N t)$$

ما می‌خواهیم یک حالت خاص sin ی را بررسی کنیم: که بارگذاری فقط یک نیم سیکل به صورت مقابل باشد.
و ببینیم که این نیم سیکل چه صورتی باشد تا این بار برای سازه بار کوتاه مدت محسوب شده و اصطلاحاً حالت ضربه‌ای پیدا کند.



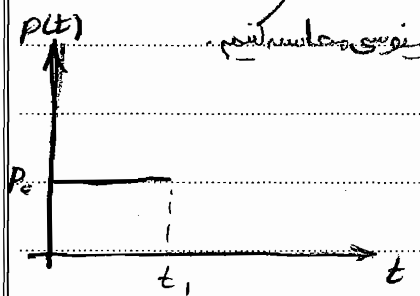
پاسخ بار خطی فزاینده

$$u(t)=e^{-\xi\omega_N t}\left\{\left(\frac{\xi\omega_N\frac{CP_m}{t_1k^2}-\frac{P_m}{kt_1}}{\omega_D}\right)\sin\omega_D t+\frac{CP_m}{k^2t_1}\cos\omega_D t\right\}+\frac{P_m}{kt_1}t-\frac{CP_m}{k^2t_1}$$

اگر حالت نامیرا باشد ←

نامیرا:

$$\xi=0\Rightarrow u(t)=\frac{-P_m}{kt_1\omega_N}\sin\omega_N t+\frac{P_mC}{k^2t_1}\cos\omega_N t+\frac{P_m}{kt_1}t-\frac{CP_m}{k^2t_1}$$ **



ما می‌خواهیم سرعت هر دو سیستم را در حالت بارگذاری خطی و بارگذاری سینوسی محاسبه کنیم.
بارگذاری ثابت خطی را هم که جوابش را داریم:

در حالت نامیرا

$$u(t)=\frac{P_0}{k}(1-\cos\omega_N t)\qquad (t<t_1)$$

$$\dot{u}(t)=\frac{P_0}{k}(\omega_N\sin\omega_N t)$$

← در هر سه حالت $\dot{u}$ را محاسبه می‌کنیم (۱- سینوسی ۲- بار خطی فزاینده ۳- ثابت خطی) و در حالتی که $t_1 \to 0$ میل کند را بررسی می‌کنیم.

می‌خواهیم $\lim \dot{u}(t)$ را در حالتی که $t_1 \to 0$ در شرایطی که $P_0 t = cte$ محاسبه کنیم:

Year. Month. Day. Subject.

$$\lim \dot{u}(t_1) = ?$$
$$\begin{cases} t_1 \to 0 \\ P_0 t_1 = cte \end{cases}$$

(1) بار ثابت خطی

$$\lim_{t_1 \to 0} \frac{\sin \omega_N t_1}{t_1} = \frac{0}{0} \to \frac{\omega_N \cos \omega_N t_1}{1} \to = \omega_N$$

$$\Downarrow$$

$$\dot{u}(t_1) = \frac{P_0}{k} \omega_N \sin \omega_N t_1 = \frac{P_0 t_1}{k} \omega_N \frac{\sin \omega_N t_1}{t_1}$$

$$\lim_{\substack{t_1 \to 0 \\ P_0 t_1 = cte}} \dot{u}(t_1) = \frac{P_0 t_1}{\cancel{k}_{m\omega_N^2}} \cancel{\omega_N^2} = \frac{P_0 t_1}{m}$$

حال مثلثی را بررسی می‌کنیم:

$$\boxed{*}\quad \dot{u}(t) = \frac{-P_m \omega_N}{k t_1 \omega_N} \cos \omega_N t - \frac{P_m C \omega_N}{k^2 t_1} \sin \omega_N t + \frac{P_m}{k t_1}$$

$\sin \omega_N t$

$$\dot{u}(t_1) = \frac{-P_m}{k t_1} \cos \omega_N t_1 - \frac{P_m C \omega_N}{k^2 t_1} \sin \omega_N t_1 + \frac{P_m}{k t_1} \quad *$$

* میل کردن $\cos$ به یک از میل کردن $\sin$ به صفر وقتی که مقدار آرگومانشان به صفر میل می‌کند سریع‌تر است

$$\begin{cases} \sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} \\ \cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} \end{cases}$$

$$\dot{u}(t)_{t \to 0} = \frac{-P_m}{k t_1} + \frac{P_m}{k t_1} + \cdots$$

$$\lim_{\substack{t_1 \to 0 \\ P_0 t_1 = cte}} \dot{u}(t_1) = \frac{-P_m C \omega_N \sin \omega_N t_1}{k^2 t_1} = \lim \frac{-P_m t_1 C}{k^2} \frac{\sum \omega_N t_1}{t_1^2}$$

$$= \lim \frac{-P_m t_1 C}{k^2} \frac{\omega_N \cancel{t_1}}{2 \cancel{t_1}}$$

$$= \frac{-P_m C \omega_N^2 \cos \omega_N t}{k^2} = \frac{-P_m C \omega_N^2}{k^2}$$

SHAHRS NOTEBOOK

$$\underset{t_1 \to 0}{\dot{u}(t_1)} = \frac{-P_m c \omega_N^2}{k^2} = -\frac{2\zeta P_m}{m\omega_N}$$

Year. Month. Day. Subject.

$$\lim_{t_1 \to 0} \dot{u}(t_1) = \frac{P_m}{kt_1}(1-\cos\omega_N t_1) - \frac{P_m c\omega_N}{k^2 t_1}\sin\omega_N t_1$$ * بازنویسی

$P_m t_1 = cte$

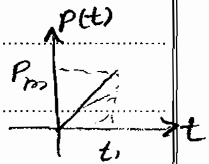
$$= \lim\left[\frac{P_m t_1}{k t_1^2}(1-\cos\omega_N t) - \frac{P_m t_1 c\omega_N}{k^2 t_1^2}\sin\omega_N t_1\right]$$

$$\xrightarrow{H} = \frac{P_m t_1}{k} \lim \frac{\omega_N \sin\omega_N t}{2t_1} - \frac{\omega_N^2 c}{2kt_1}\cos\omega_N t_1$$

۲ بار خطی فزاینده

$$\text{جواب} = \frac{P_0 t_1}{2m}$$

سطح زیر منحنی تقسیم بر m

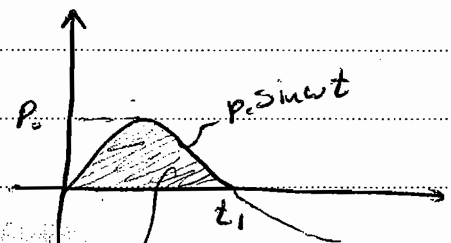


Chopra 156

۳ در حالت بار سینوسی

$$\dot{u}(t) = \frac{P_0}{k}\frac{1}{1-\beta^2}(\omega\cos\omega t - \beta\omega_N\cos\omega_N t)$$

$$\dot{u}(t_1) = \frac{P_0}{k}\frac{1}{1-\beta^2}(\omega\cos\omega t_1 - \omega\cos\omega_N t_1)$$



$$t_1 = \frac{T}{2} = \frac{\frac{2\pi}{\omega}}{2} = \frac{\pi}{\omega}$$

NOTEBOOK

سطح زیر منحنی فعلا $= \frac{2}{\pi}P_0 t_1$

$$t_1 = \frac{\pi}{\omega} \rightarrow \omega = \frac{\pi}{t_1}$$

Year. Month. Day. Subject.

$$\rightarrow = \frac{P_0}{k} \frac{1}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_N}\right)^2}\left(\frac{\pi}{t_1} \frac{\cos\pi}{-1} - \frac{\pi}{t_1}\cos\omega_N t_1\right)$$

$$= \frac{P_0}{k} \frac{1}{1-\left(\frac{\pi}{t\omega_N}\right)^2}\left(\frac{-\pi}{t_1} - \frac{\pi}{t_1}\cos\omega_N t_1\right)$$

$$= \frac{P_0}{k} \frac{t_1^2\omega_N^2}{t_1^2\omega_N^2 - \pi^2}\left(\frac{-\pi}{t_1}\right)\left(1+\cos\omega_N t_1\right)$$

$$\dot{u}(t_1) = \frac{-P_0}{k} \times \frac{t_1\omega_N^2\pi}{t_1^2\omega_N^2-\pi^2}\left(1+\cos\omega_N t_1\right)$$

$$= \frac{-P_0 t_1\pi}{k} \frac{\omega_N^2}{t_1^2\omega_N^2-\pi^2}\left(1+\cos\omega_N t_1\right)$$

سطح زیر منحنی

$$\lim_{t_1\to 0} \dot{u}(t_1) = \frac{-P_0 t_1 \pi}{k} \times \frac{2\omega_N^2}{-\pi^2} = \frac{2P_0 t_1 \omega_N^2}{k\pi} = \frac{\frac{2P_0 t_1}{\pi}}{m} \quad ③$$

$P_0 t_1 = cte$

Impulse

به جای انتگرال می‌تونیم ضربه ← $\int_0^{t_1} p(t)\,dt = Imp$ (مقدار ضربه) ← تقسیم بر m

$F \times t = m \cdot \Delta v$ در دبیرستان داشتیم

نیرو و مدت اثر نیرو

ضربه ← $\boxed{\frac{F \cdot t}{m} = \Delta v}$

یعنی سیستم ثابت بوده و به یکباره دچار سرعت اولیه شده است

⟸ می‌بینیم که:

با بررسی سه حالت فوق دیدیم که:

سرعت در لحظه‌ی t_1، در صورتیکه t_1 به صفر میل کند،

برابر است با مساحت تقسیم بر m

⟸ اعمال ضربه (= سطح زیر منحنی = $\int_0^{t_1} p(t)dt$) به سیستم سرعت اولیه می‌دهد.

که مقدار سرعت اولیه برابر است با ایمپالس تقسیم بر جرم سیستم.

NOTEBOOK

رسیدن به این معادله به شکل دیگر : $m\ddot{u}+c\dot{u}+ku = p(t)$

$$\Rightarrow m\underbrace{\int_0^{t_1}\ddot{u}\,dt}_{\dot{u}(t)} + c\underbrace{\int_0^{t_1}\dot{u}\,dt}_{u=0} + k\underbrace{\int_0^{t_1} u\,dt}_{0} = \underbrace{\int_0^{t_1} p(t)\,dt}_{Imp} \quad \boxed{**}$$

$$u(t)=\frac{P_0}{k}(1-\cos\omega_N t)$$

(ضرب و تقسیم کرده t_1)

$$\lim u(t_1) = \lim_{t_1\to 0}\frac{P_0}{k}(1-\cos\omega_N t_1) = \lim \frac{P_0 t_1}{k}\left(\frac{1-\cos\omega_N t_1}{t_1}\right)$$

$\begin{cases} t_1 \to 0 \\ p t_1 = cte \end{cases}$

$H \to \quad = 0$

* وقتی بارگذاری خیلی کوتاه مدت می شود حتی اگر Pt_1 را ثابت نگه داریم، تغییر مکان نخواهیم داشت، چون ضربه آنقدر سریع بوده که فقط سرعت پیدا کرده و هنوز جابجایی رخ نداده

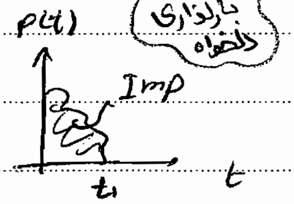
در بعد از t_1 ← جابجایی رخ می دهد

شتاب = میل به سرعت گرفتن | سرعت = میل به جابجا شدن

$\boxed{**}$

در لحظه ی اول که هنوز جابجایی رخ نداده

$$\hookrightarrow m\dot{u}(t_1) = Imp_0 \Rightarrow \boxed{\dot{u}(t_1) = \frac{Imp_0}{m}}$$



بارگذاری دلخواه

* پاسخ به بار ضربه ای به طور کلی اینگونه می شود:

$\bar{t} = t - t_1$ ← یک مبدأ جدید به نام $\bar{t}$ تعریف می کنیم.

$$\boxed{u(t)=\bar{u}(\bar{t}) = \frac{Imp}{m\omega_D}\, e^{-\xi\omega_N \bar{t}}\, \sin\omega_D \bar{t}} \quad *$$

NOTEBOOK

پاسخ بار ضربه ای ← برای لحظات بعد از t_1

* فرمول * از فرمول زیر آمده در شرایطی که در این حالت خاص فرض کردیم که $\boxed{u_0=0}$

بار ارتعاش آزاد

$$e^{-\xi\omega_n t}\left\{\frac{(Imp/m)+0}{\omega_D}\sin\omega_D t+0\right\}=\frac{Imp}{m\omega_D}\times e^{-\xi\omega_n t}\sin\omega_D t$$

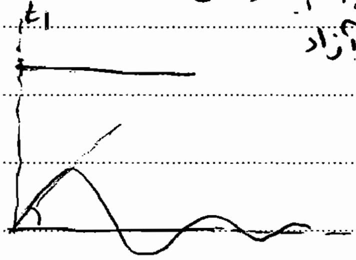
Year. Month. Day. Subject.

$$\boxed{u(t)=e^{-\xi\omega_n t}\left\{\frac{\dot{u}_0+\xi\omega_n u_0}{\omega_D}\sin\omega_D t+u_0\cos\omega_D t\right\}}\ *$$

* پس می توان پاسخ به بار ضربه ای را مانند پایین صفحه ی ۴۲   اما از لحظه ی t_1 داره شروع می شود

در نظر گرفت، یعنی انگار بارگذاری از لحظه ی t_1 دارد شروع می شود و ارتعاش آزاد

انجام می دهد که سرعت اولیه اش برابر ضربه بدست آمده است.



یعنی از لحظه ی t_1 که بارگذاری تمام شد، فرض می کنیم که تازه

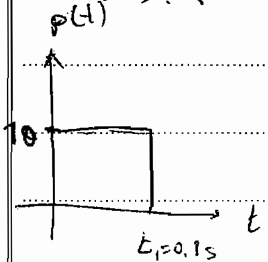
بارگذاری شروع شده است.

← ضربه کی واقعاً کوتاه مدت محسوب می شود؟ اگر جابجایی بیشینه در حین بارگذاری اتفاق بیفتد مطمئناً

ضربه ای نیست و بارگذاری طولانی مدت محسوب می شود ولی اگر زودتر از اینکه جابجایی بیشینه رخ دهد،

بار تمام شود ← بارگذاری کوتاه مدت است و نمی توان گفت ضربه ای ولی اگر ↓

* ← اگر بارگذاری آنقدر سریع باشد که تغییر مکان سیستم در اتمام بارگذاری بسیار ناچیز باشد ← بار ضربه ای است



مثال)

$$\begin{cases} m=1\,kg \\ k=100\ N/m \\ c=1\ N.S/m \end{cases}$$

$t_1=0.1S$ و $P_0=10N$

$\omega_N=10$

$$\xi=\frac{1}{2\times1\times10}=0.05$$

حل تقریبی ضربه ای:

$$\omega_D=10\sqrt{1-0.05^2}=9.975$$

حل ضربه ای (تقریبی)

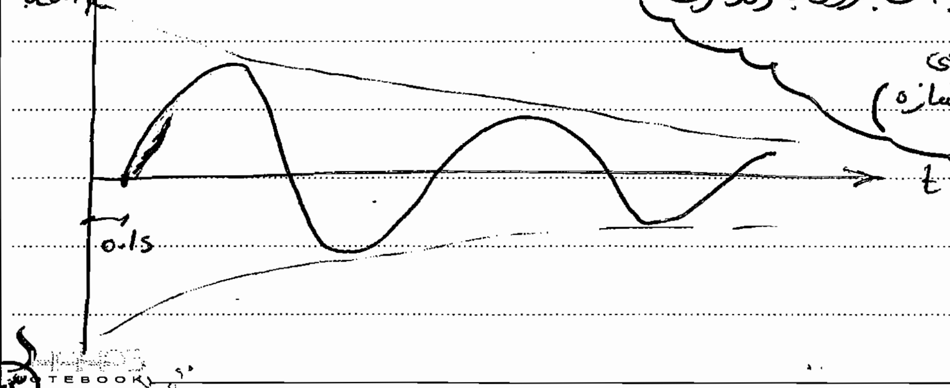
$$u(t)=\bar{u}(\bar{t})=\frac{10\times0.1}{1\times9.98}$$

$$\bar{u}(\bar{t})=\frac{10\times0.1}{1\times \cancel{9.975}\ 9.987}\,e^{-0.05\times10(t-0.1)}\sin 9.975(t-0.1)$$

* رنج حدودی ضربه ای بودن بارگذاری

$\|$ طبیعی

$0.1T_N$ (یک دهم پریود سازه)



حل دقیق ← خودمان ← $m\ddot{u}+c\dot{u}+ku=p_0$ ← $u(t)=e^{-\xi\omega_n t}(A\sin\omega_D t+B\cos\omega_D t)+P_0/k$ ← $0t=B,A$

$\dot{u}_0=0 \quad u_0=0 \quad \leftarrow$ ‌ $\Leftarrow$ A و B $\leftarrow$ حل را کامل کنیم $\leftarrow$ تا مرحله‌ی t_1

$u(t_1)$

Year. Month. Day. محاسبه شود Subject.

$\dot{u}(t_1)$

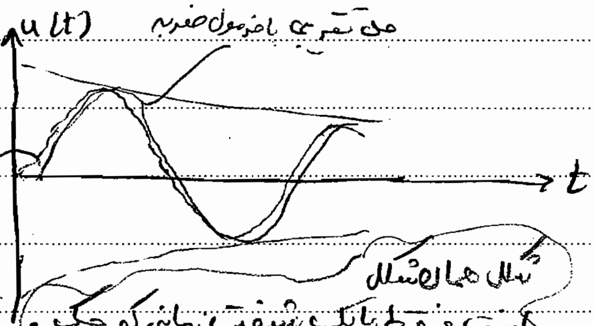
حال با این شرایط اولیه $\rightarrow$ $\dfrac{u_0}{\dot{u}_0}$ $\rightarrow$ حال این شرایط می‌شود شرایط اولیه شروع فاز ۲ ـــــ تا اینجا فاز اول

دیگر اینجا صفر نیست.

موج هم رامی نویسیم

$$u(t)=e^{-\xi \ldots}\left(\frac{\dot{u}+\xi\omega}{\omega_D}\, S+\dot{u}\, C s\right)$$

انجام شود و شکل رسم شود $\Rightarrow$



شکل همان شکل است فقط با یک شیفت زمانی کوچک.

یک بار ضربه‌ای، مستطیلی یا ذوزنقه‌ای، دقیق و تقریبی را با هم مقایسه کنید و در نتیجه بحث کنید.

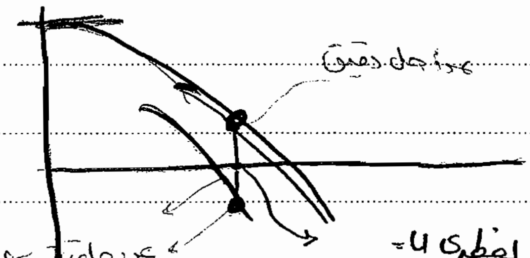
امتحان استاد بوده :

$u_{\text{دقیق}} = 0.325$

$u_{\text{تقریبی}} = -0.274$

u را در لحظه‌ی 5 ثانیه محاسبه کنید.

لحظه‌ی خاص ما $\leftarrow$ $t=5s$ به صورت زیر شده بود:



لحظه‌ی u $\rightarrow$ $t=5s$

نکته‌ی مهم در یک همچنین مسئله‌ای این است که اگر چنین اتفاقی بیفتد، قطعاً u در این لحظه خیلی کمتر از u_{max} است.

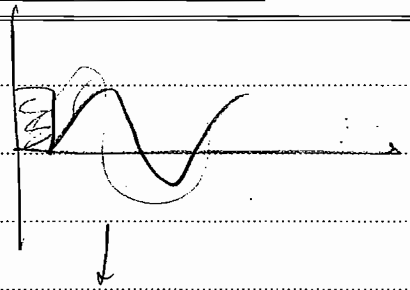
ـــ نکته‌ی اصلی این عدد با عدد ماکزیمم اختلاف زیادی دارد

ـــ max

← دلیل بی‌دقتی بودن پاسخ تقریبی نیست بلکه فقط در نزدیکی صفر دقت بهم می‌خورد.

پیدا کردن علت ؟ ← لغزش

Year. Month. Day. Subject.

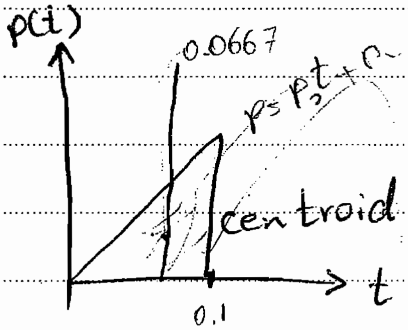


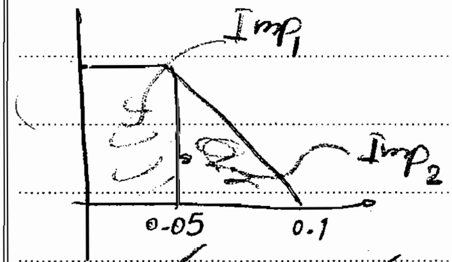
← حل این مشکل ←

← علت این اختلاف این است که نمودار دقیق و تقریبی یک شیفت با هم فاصله دارند. حال اگر نمودار تقریبی را کمی شیفت دهیم که دو نمودار بر هم منطبق شوند دیگر این اتفاق نمی‌افتد.

← اگر از مرکز ثقل شکل عبور دهیم

← تقریبا منطبق می‌شوند.





به جای t_1، t_c بگذاریم

به جای اینکه همه‌ی بار را یک ضربه حساب کنیم ضربه را دوتا ضربه حساب کنیم

$$u(t) = \bar{u}_1(\bar{t}_1)^{Imp_1} + \bar{u}_2(\bar{t}_2)^{Imp_1}$$

$$= \frac{Imp\,1}{m\omega_D} e^{-\xi\omega_n(t-0.05)} \sin\omega_D(t-0.05)$$

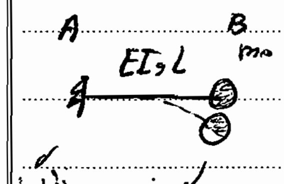
$$+ \frac{Imp\,2}{m\omega_D} e^{-\xi\omega_n(t-0.1)} \sin\omega_D(t-0.1)$$

← حل از روش centroid از حل به روش دو تکه‌ای فوق دقیق‌تر است.

* نتیجه: همیشه نسبت به حالت استاتیکی می‌سنجیم، هرچه نسبت به حالت استاتیکی تفاوت داشت آن‌رو می‌شود تغییرمکان دینامیکی

Year. Month. Day. Subject.

جلسه‌ی هفتم ۶ شنبه ۱۰/...



نصف جرم ناگهان جدا می‌شود و سقوط می‌کند

$m_0 g$ $\quad \frac{PL^3}{3EI}$

(1) $u_{st} = \frac{m_0 g L^3}{3EI}$ جابجایی استاتیکی m_0

مثال) یک جرم m داریم، تغییر شکل استاتیکی اش را داده و اینجا ایستاده

← ناگهان نصف جرم جدا می‌شود.

$\boxed{\zeta = 0}$

مفهوم مسئله: تاریخچه‌ی پاسخ ارتعاش نقطه‌ی B را بدست آورید.

← آیا اصلاً ارتعاش رخ می‌دهد؟

ضربه، ارتعاش آزاد، سینوسی و ... ← کدام حالت است؟

همین ضربه $\quad$ زمان × نیرو

ضربه $\int_0^t p(t)dt$

← ناگهانی جدا می‌شود

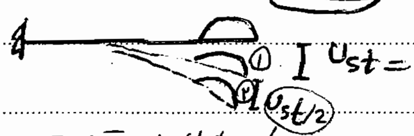
← ارتعاش آزاد است ← مگر بار روی سیستم اعمال شده؟! بار دینامیکی؟!

← اگر به صورت استاتیکی، از اول به صورت $\frac{m}{2}$ بود، چگونه می‌ایستاد؟ $u_{st}/2$

→ جواب ← ارتعاش آزاد است ← $p(t) = 0$

← اگر استاتیکی، از اول اینگونه بود:

حالت اول



(1) $u_{st} = \frac{u_{st}}{2} = \frac{m_0 g L^3}{6EI}$

در حال حاضر، سیستم ما نسبت به حالت استاتیکی که می‌توانسته باشد به اندازه‌ی $\frac{u_{st}}{2}$ پایین‌تر است

← جسم در حالت استاتیکی در حالت (1) باید باشد، اما الآن در لحظه‌ی ۰ در حالت (2) می‌باشد، انگار که آن را آورده‌ایم پایین

$u_B(t) = u_0 \cos \omega_N t$ ← ارتعاش آزاد با تغییر مکان اولیه

$\omega_N = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{3EI/L^3}{m_0/2}} = \sqrt{\frac{6EI}{m_0 L^3}}$

$u_0 = -\frac{m_0 g L^3}{6EI}$ بالاتر از تراز

→ $u_B(t) = u_0 \cos \omega_N t$

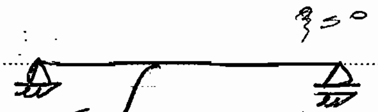
* همیشه نسبت به استاتیکی، تغییرمکان را می‌سنجیم.

Year. Month. Day. Subject.

از فاصله‌ی h

یک جرم m ای سقوط می‌کند و

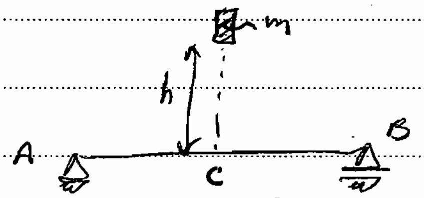
می‌چسبد به وسط تیر



تیر ساده با جرم ناچیز

تاریخچه‌ی پاسخ در نقطه‌ی C را پس

از برخورد بدست آورید.



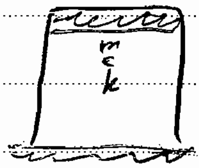
(EI ثابت)

ضربه است؟ نه

در مورد ضربه، ما یک سیستمی داریم مثل قاب صلب زیر که یک درجه آزادی باشد.

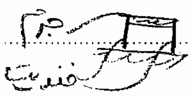
این سازه موجود است m و c و k و ... دارد، حال با یک بار و یک تیری شلیک می‌شویم

سازه‌ی ما، آن ضربه ایجاد می‌کند.



اما در اینجا الان سیستم ما کو؟ جرم و فنر و ... الان در سوال ... کجاست؟

اما در سوال فوق قبل از چسبیدن جرم به تیر، جرم فنر سازه‌ی



سیستم تشکیل نشده است. پس از برخورد جرم به تیر تازه سیستم تشکیل می‌شود

$\boxed{\text{سرعت در لحظه‌ی برخورد} : v=\sqrt{2gh}}$ * → ارتعاش آزاد با تغییر مکان اولیه

دبیرستان

* در این لحظه (برخورد) → تازه سیستم تشکیل شده، و با همین سرعت هم دارد می‌رود پایین،

→ می‌شود ارتعاش آزاد با سرعت و تغییر مکان اولیه

تراز استاتیکی :

$$u_{st}=\frac{mgl^3}{48EI}$$

لحظه‌ای که صفر کردیم و متر را می‌زنیم، سیستم در اینجاست

→ در حالت استاتیکی، سیستم اینجاست

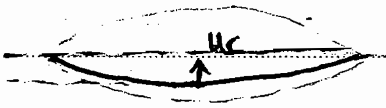
u(t) با نسبت به این تراز می‌خواهد اندازه‌گیری شود.

$$\text{I.C}\begin{cases} u_0=\frac{mgl^3}{48EI} \\ \dot{u}_0=-\sqrt{2gh} \end{cases}$$

→ رو به پایین سرعت دارد.

$\zeta = 0$ است.

Year. Month. Day. Subject.



پس از مدتی

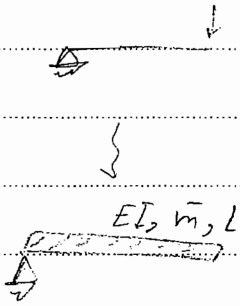
مبدأ مکانی

$t=0$ (مبدأ زمانی)

لحظه‌ای است که دینامیک شروع می‌شود.

$$\Rightarrow u_c(t) = \frac{\dot{u}_0}{\omega_N} \sin \omega_N t + u_0 \cos \omega_N t \xrightarrow{\text{و}} \begin{cases} u_0 = \dfrac{mgL^3}{48EI} \\ \dot{u}_0 = -\sqrt{2gh} \end{cases}$$

$$\omega_N = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{48EI}{mL^3}}$$



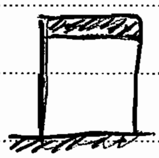
این مسئله دینامیک ...

دینامیک کلید است ... می‌توان با بار سینوسی آن را حل کرد

$kgf \simeq 10\,N = 9.81\,N$

Year. Month. Day. Subject.

مسائل بی نکته :



$$\begin{cases} m = 10\ ton \\ c = 2000\ N.S/m \\ k = 1000\ kN/m \end{cases}$$

به سیستم یک بار ضربه 1000N.S وارد می شود، پاسخ سیستم را محاسبه نمایید.

$Imp = 1000\ N.S$

به سیستم یک Imp افقی وارد شده است

** ضربه فقط سرعت اولیه ایجاد می کند

← بار ضربه ای ← یک سرعت اولیه به سیستم می داد ← سرعت اولیه اش

$$\dot{u}_0 = \frac{Imp}{m} = \frac{1000}{10,000} = 0.1\ m/s$$

معادله ی ارتعاش آزاد با سرعت اولیه (حالت میرا)

$$\rightarrow u(t) = \frac{\dot{u}_0}{\omega_D} e^{-\xi \omega_N t} \sin \omega_D t$$

→ وقتی می گوییم ضربه و چیزی درباره ی زمان نمی گوییم

← یعنی از همان لحظه ی ۰ همه چیز شروع می شود ← t در واقع همان $\bar{t}$ می شود ← در اینجا t_1 صفر است

$$\bar{t} = t - \cancel{t_1}_{\to 0} \Rightarrow \boxed{\bar{t} = t}$$

واحدهای اصلی : kg ، N ، m ، (kgf=10N) ،

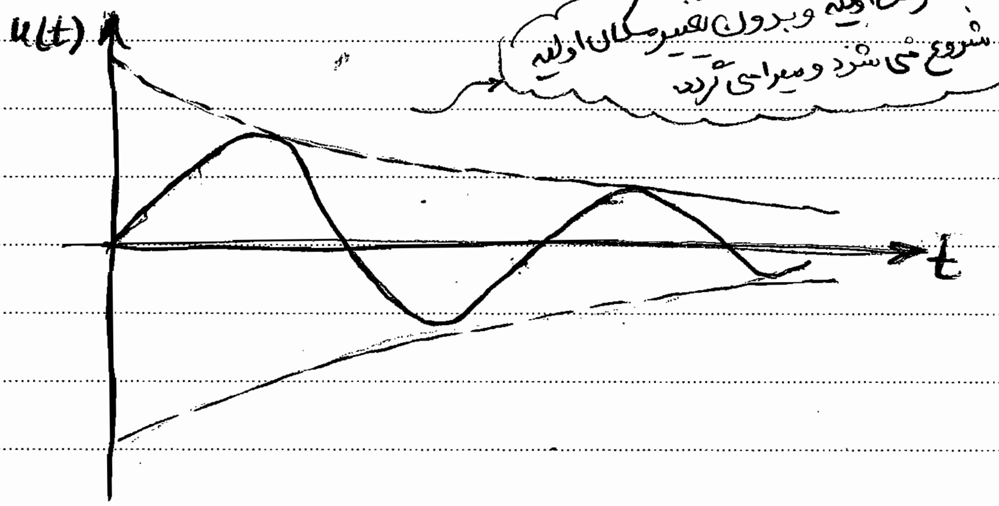
$$\rightarrow \omega_N = \sqrt{\frac{1000 \times 10^3}{10 \times 10^3}} = 10\ rad/s$$

$$\xi = \frac{c}{2m\omega_N} = \frac{2000}{2 \times 10,000 \times 10} = 0.01$$

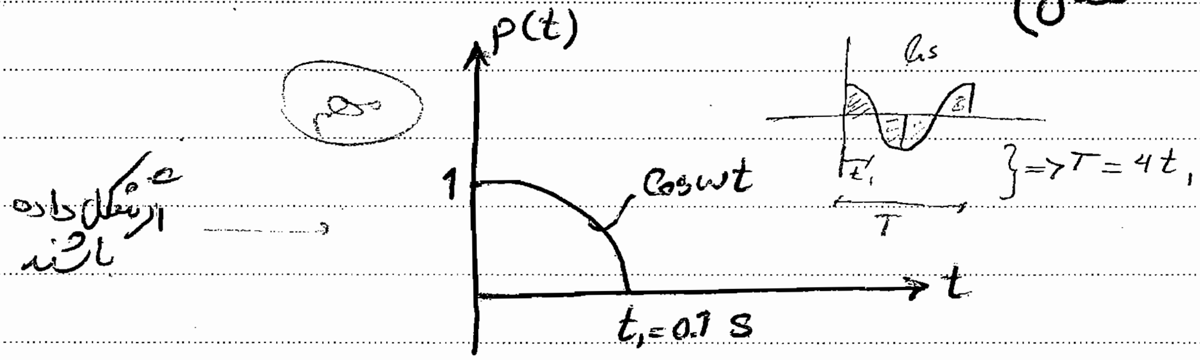
1% میرایی

$\omega_D \simeq 9.99$

$$\rightarrow u(t) = \frac{0.1}{9.99} e^{-0.1t} \sin(9.99t)$$



مثال)



یکبار به روش دقیق و یکبار به روش ضربه‌ای محاسبه نمایید.

$m = 1$ kg

$c = 1$ N.S/m

$k = 100$ N

$t_1 = \frac{T}{4} \leftarrow$ T بارگذاری تمام می‌شود $4t_1$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$t_1 = 0.1$ s $\qquad T = 0.4$ sec $\rightarrow \omega = \frac{2\pi}{0.4}$

$\leftarrow P_0$ ما در اینجا 1 است، حل کسینوسی هم عین حل سینوسی است و جواب خصوصی اش به همان صورت سینوسی انجام می‌شود:

$$p(t) = P_0 \cos\omega t \rightarrow u_p(t) = C_1 \sin\omega t + C_2 \cos\omega t$$

یکبار حل دقیق و یکبار حل تقریبی را انجام می‌دهیم، لحظه‌ی 0.1 را می‌گذاریم و u و $\dot{u}$ را محاسبه می‌کنیم و می‌شود شرایط اولیه برای فاز ارتعاش آزاد. و با آن u و $\dot{u}$ در لحظه‌ی $t=0.1$، ارتعاش آزاد را می‌نویسیم و معادله‌اش را می‌نویسیم.

بعد می‌آییم انتگرال $\cos\omega t$ را محاسبه می‌کنیم و می‌شود مقدار Imp از 0 تا t_1، یک عدد می‌شود. و می‌گذاریم در فرمول زیر:

$$\Rightarrow u(t)=\frac{Imp}{m\omega_D}\, e^{-\xi\omega_N \bar{t}}\sin\omega_D \bar{t} \quad \sim \quad \bar{t}=t-0.1$$

$$\boxed{t_{modify}=t-t_c}$$

اصلاح شده

این معادله تا $t<0.1$ صادق است ← ارتعاش آزاد است ⇐ بعد از آن چون بار تمام شده

← ابتدا معادله‌ی $u(t)$ را بدست می‌آوریم که شامل $u_h(t)$ و $u_p(t)$ است.

← چون شرایط اولیه را مسئله گفته $\dot{u}_0=0,\ u_0=0$ است. ⇐ $ok = B, A$

← در رابطه‌ی $u(t)$ می‌گذاریم و $u(t=0.1)$ و $\dot{u}(t=0.1)$ را بدست آورده و به عنوان شرایط اولیه برای معادله‌ی ارتعاش آزاد فوق قرار می‌دهیم:

$$u(\bar{t}) = e^{-\xi\omega_N \bar{t}}\; \frac{\dot{\bar{u}}_0+\xi\omega_N \bar{u}_0}{\omega_D}\sin\omega_D\bar{t} + \bar{u}_0\cos\omega_D \bar{t}$$

$$\bar{t}=t-0.1$$

$$\dot{\bar{u}}_0=\dot{u}(t=0.1) \quad \text{و} \quad \bar{u}_0=u(t=0.1)$$

سؤال امتحانی معمولاً: پاسخ لحظه‌ی $t=5s$ را بدست آورید.

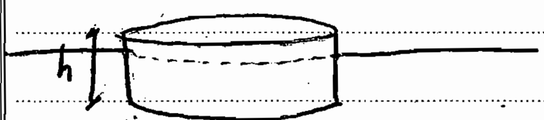
↳ $\bar{t}=4.9 \Rightarrow u(4.9)=\checkmark$ ← حل دقیق

حل تقریبی → $u(4.9)=\frac{Imp}{m\omega_D}\, e^{-\xi\omega_N(4.9)}\sin(\omega_D\times 4.9)$

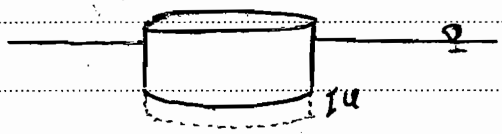
← اگر بخواهیم منطقی‌تر شود می‌توانیم در $\bar{t}$ به جای t_1، t_c را بگذاریم. ← t را تقریبی بگیریم.

Year. Month. Day. Subject.

مثال) جسم توپر به مقطع دایروی به مساحت A و جرم مخصوص ρ روی آب شناور است. (یک مقداریش رفته داخل آب)



اگر این جسم را با یک نیروی داخل آب فشار دهیم و سپس رها کنیم، با چه فرکانسی ارتعاش می‌کند؟ ($\omega_n = ?$)



$$\Rightarrow u \times \underbrace{A \times \rho_w}_{k} = F_A$$

نیروی ارشمیدس

$$\rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{A \times \rho_w}{\rho \times A \times h}} = \sqrt{\frac{\rho_w}{\rho h}}$$

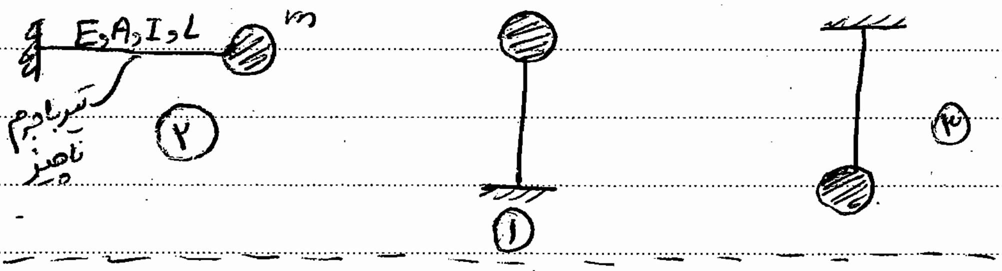
$$m = \underbrace{\rho}_{\text{جرم مخصوص}} \times \underbrace{A \times h}_{\text{حجم}}$$

مثال) یک تیر کنسول در سه حالت نشان داده شده در صفحه‌ی بعد می‌تواند قرار گیرد، اگر فرکانس طبیعی سیستم در هر یک از حالت به ترتیب ω_1 و ω_2 و ω_3 باشد، آیا رابطه‌ی $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3$ درست است؟

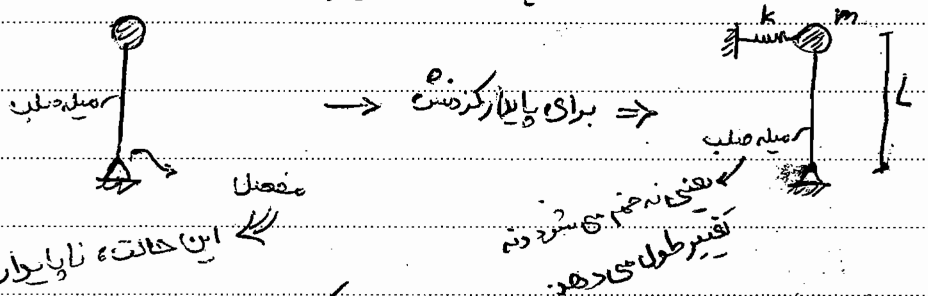
← از دید هندسی مساوی اند، اما از دید ... اگر دقیق نگاه کنیم چون A را هم داده است یعنی تغییر شکل محوری مهم است. اگر فقط E و I را نوشته بود با هم مساوی بودند.)

NOTEBOOK

← وقتی A را مطرح کرده یعنی ورش روی طولش اثر می‌گذارد



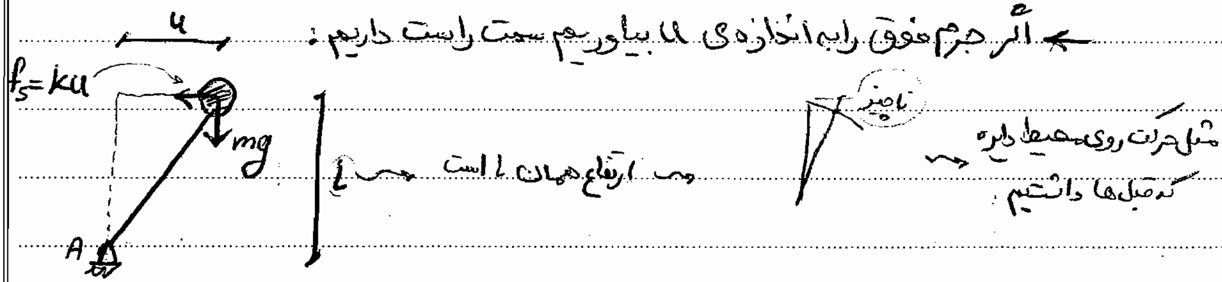
برای اینکه ذهن ما آشناتر شود ابتدا یک مسئله‌ی دیگر را بررسی می‌کنیم:



فرکانس سیستم فوق را می‌خواهیم محاسبه کنیم. ($\omega = ?$)

← اگر بنویسیم $\sqrt{\frac{k}{m}}$ اشتباه کرده‌ایم، جواب مسئله $\sqrt{\frac{k}{m}}$ نیست:

← اگر جرم فوق را به اندازه‌ی u بیاوریم سمت راست داریم:



حالت استاتیکی مقید

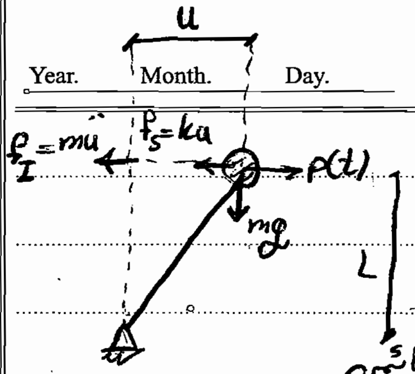
$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \Rightarrow ku \times L - mg \times u = 0$$

اگر بخواهیم از حالت تعادل خارج نشود و نیفتد، باید k حداقل:

$$k_{min} = \frac{mg}{L} \rightarrow$$

اگر k از $\frac{mg}{L}$ کمتر باشد، سیستم ناپایدار می‌شود.

ولی حالا اگر حالت دینامیکی مسئله را درنظر بگیریم داریم:
(یک نیروی $p(t)$ هم به عضو اثر کند)



معادل دینامیکی: $(p(t) - ku - m\ddot{u})L + mgu = 0$

k^* درحالت قائم

$$m\ddot{u} + \underbrace{\left(k - \frac{mg}{L}\right)}_{} u = p(t)$$

معادله‌ی حرکت بدست آمد

سختی اصلاح شده، اسمش را k^* می‌گذاریم. که از k یک مقداری کوچک‌تر است.

اگر ضریب خیلی کم باشد ($k\downarrow$) یا جرم خیلی سنگین باشد، k^* حتی ممکن است به صفر برسد یعنی اگر زورش نرسد، درحالت استاتیکی تکیه دارد، خود به خود درحالت دینامیکی هم ناپایدار است.

پس ← سختی اصلاح شده ممکنه حتی صفر هم بشود.

ولی ← اگر برعکس بود (آویزان بود)،

درحالت آویزان ⟸ ؛ $k^* = k + \frac{mg}{L}$

← می‌بینیم که سختی درحالت آویزان، اضافه هم می‌شود ← به پایداری کمک کرده.

← جرم در هر دو حالت یکسان است ولی سختی است که در دو حالت متفاوت است.

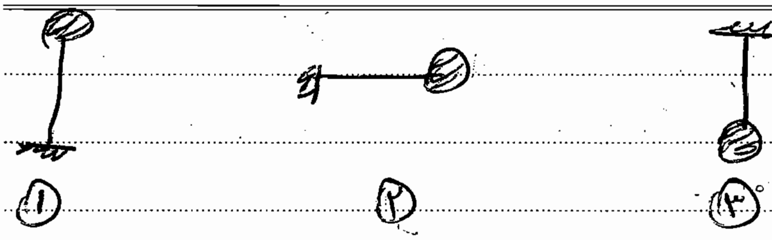
← چون سختی درحالت قائم کمتر است ⟸ فرکانسش هم کمتر می‌شود.

$$\Rightarrow k_1 < k_2 < k_3 \Rightarrow \omega_1 < \omega_2 < \omega_3$$

قسمت دوم سؤال) چنانچه پاسخ شما به بخش اول سؤال آری بوده است، می‌توان حالت عکس آن را هم به وجود آورد؟ $(\omega_1 > \omega_2 > \omega_3)$

امام حسن علیه السلام: سپاسگذاری از نعمت گذشته، نعمت آینده را در پی خواهد داشت

Year. Month. Day. Subject.



درحالت فوق:

$k_1<k_2<k_3$ است و $k_2=\frac{3EI}{l^3}$ آیا می‌توان شرایط خاصی

را به وجود آورد که $k_1>k_2>k_3$ بشود؟

← باید کاری بکنیم که با I قابل توجهی، A کوچکی داشته باشیم.

← چه مقطعی این خاصیت را دارد؟ ← مقطع دایروی جدار نازک

مقطع دایروی جدار نازک ← می‌تواند تغییر شکل محوری قابل توجهی داشته باشد.

← تغییر شکل محوری قابل توجه ⇐ $l'_1<l'_2<l'_3$

می‌دانیم

$\boxed{k_1>k_2>k_3}$ ⇐ $\begin{cases} k_1\uparrow \Leftarrow l_1\downarrow \Leftarrow k=\frac{3EI}{l^3} \Leftarrow \\ \text{با توان ۳} \\ k_3\downarrow \Leftarrow l_3\uparrow \leftarrow \text{و} \end{cases}$

$l_2 \leftarrow$ و

← اما معمولاً چون مقاطع ما مقاطع توپر هستند (ناودانی و I شکل و ...) چنین حالتی به وجود نمی‌آید و همواره حالت اول که بررسی شد، حاکم می‌باشد.

NOTEBOOK

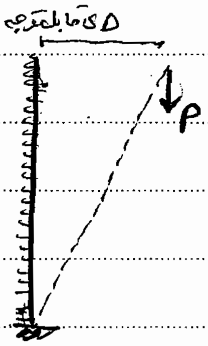
← اثر P-Δ که در محاسبات کامپیوتری سازه هم به آن دقت می‌شود،

Year. Month. Day. ۵ Subject.

~~سؤال می‌کنند که P-Δ را ۵۲ بگیریم یا نگیریم (چه درصد بگیریم و ...)~~

← می‌خواهد این را بررسی کنند ← P-Δ باعث کاهش سختی جانبی می‌شود.

در ساختمان‌های بلند چون وزن زیادی روی ستون‌ها هست، مثلاً ساختمان‌های



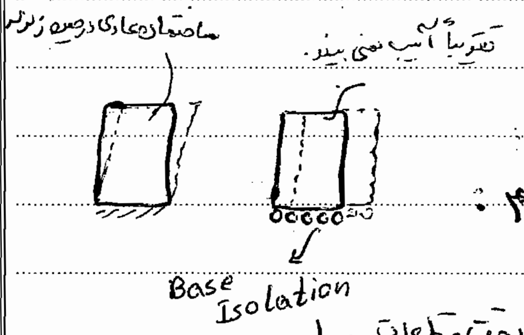
چند ده طبقه، درسته که Δها تک تک، کوچک هستند ولی وقتی که این Δهای کوچک در یک ساختمان بلند با هم جمع شوند، یک Δ ی قابل توجهی را می‌دهند.

← که لنگر قابل توجهی را می‌تواند نسبت به پای ستون‌ها ایجاد کند. ← سختی جانبی را نیز کم می‌کند و حتی می‌تواند باعث ناپایداری سازه شود.

← اگر ساختمان بلندتر از ۲۰ طبقه باشد و اثر P-Δ را در نظر نگیریم، اصلاً طراحی غلط می‌شود.

← بالاتر از ۸ طبقه را توصیه می‌کنند که در نظر بگیریم (اثر P-Δ را)

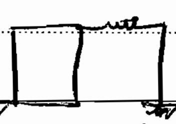
← در ساختمان‌های بالای ۲۰ طبقه اثر P-Δ کاملاً غالب می‌شود بر طراحی و اگر در نظر گرفته نشود، به کل طراحی غلط می‌شود.



اگر ساختمانی را بتوانیم کاملاً روی غلطک قرار دهیم:

این غلطک‌ها در حقیقت قطعات ← لاستیکی هستند که تا ۴۵° می‌توانند تغییر شکل دهند.

← حال اگر طبقات پایین ساختمان (که سفت‌ترین قسمت ساختمان است) را کمی نرم کنیم و برای مهار طبقات بالا به صورت روبرو عمل کنیم:



← مثلاً می‌توان در مراکز خرید که هسته‌ی خالی دارند، یک سازه‌ی مقاومی را به عنوان هسته‌ی مرکزی قرار دهیم و دیگر نیاز نیست فضای بیرونی را مهار دهیم. طبقات بالا الاستیک می‌مانند و فقط طبقه‌ی پایین پلاستیک می‌شود.

حضرت علی علیه السلام: ایمان درختی است که ریشه اش یقین، شاخه اش پرهیزکاری، شکوفه اش حیا و میوه اش بخشندگی است.

Year. Month. Day. Subject.

*

$$p(t) = p_0 \cos \omega t$$

$$\Rightarrow u_p(t) = G_1 \sin \omega t + G_2 \cos \omega t$$

$$\dot{u}_p(t) = \omega G_1 \cos \omega t - \omega G_2 \sin \omega t$$

$$\ddot{u}_p(t) = -\omega^2 G_1 \sin \omega t - \omega^2 G_2 \cos \omega t$$

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p_0 \cos \omega t$$

$$\Rightarrow (k - m\omega^2)(G_1 \sin \omega t + G_2 \cos \omega t) + c\omega (G_1 \cos \omega t - G_2 \sin \omega t) = p_0 \cos \omega t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (k - m\omega^2) G_2 + c\omega G_1 = P_0 \\ (k - m\omega^2) G_1 - c\omega G_2 = 0 \end{cases} \longrightarrow \text{دو معادله دو مجهول}$$

$$\begin{bmatrix} c\omega & (k - m\omega^2) \\ k - m\omega^2 & -c\omega \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{\begin{vmatrix} P_0 & (k - m\omega^2) \\ 0 & -c\omega \end{vmatrix}}{-c^2\omega^2 \underbrace{-(k - m\omega^2)^2}_{-(k^2 - 2km\omega^2 + m^2\omega^4)}} = \frac{P_0 \times (-c\omega)}{-k^2\left[\underbrace{\frac{c^2\omega^2}{k^2}}_{(2\xi\beta)^2} + \underbrace{\left(1 - \frac{m\omega^2}{k}\right)^2}_{(1-\beta^2)^2}\right]} = \frac{P_0}{k^2} \frac{(c\omega)}{\left[(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2\right]}$$

$$\boxed{G_1 = \frac{P_0}{k} \frac{(2\xi\beta)}{\left[(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2\right]}} \qquad \boxed{\beta = \frac{\omega}{\omega_N}}$$

$$G_2 = \frac{\begin{vmatrix} c\omega & P_0 \\ k - m\omega^2 & 0 \end{vmatrix}}{-k^2\left[(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2\right]} = \frac{+P_0(k - m\omega^2)}{+k^2\left[(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2\right]} = \frac{P_0}{k} \frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}$$

$$\Rightarrow u(t) = e^{-\xi\omega_N t}(A \sin \omega_D t + B \cos \omega_D t) + \underbrace{\frac{P_0}{k} \frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}_{a} \left[(2\xi\beta) \sin \omega t + (1-\beta^2) \cos \omega t \right]$$

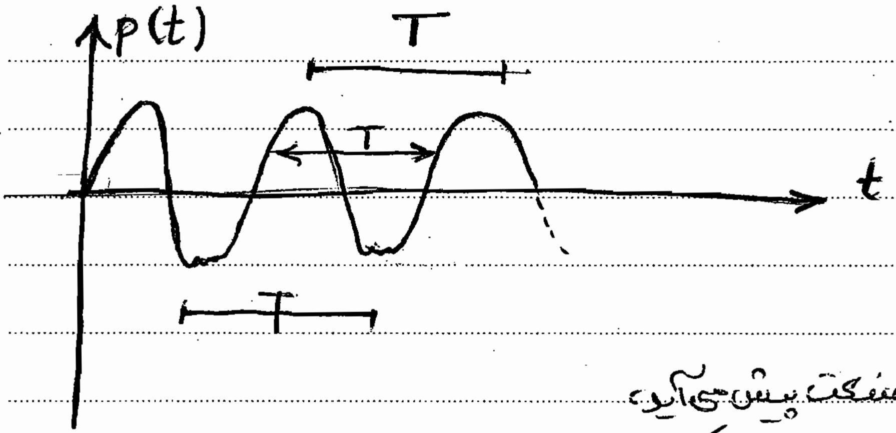
$$u_0 = 0 \Rightarrow B + \frac{P_0}{k} \frac{(1-\beta^2)}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} = 0$$

$$\dot{u}(t) = -\xi\omega_N e^{-\xi\omega_N t}(A \sin \omega_D t + B \cos \omega_D t) + e^{-\xi\omega_N t}(A\omega_D \cos \omega_D t - B\omega_D \sin \omega_D t) + a\left[(2\xi\beta)\omega \cos \omega t - (1-\beta^2)\omega \sin \omega t\right]$$

ما در بارهای بار ضربه‌ای، مثلثی، مستطیلی، سینوسی و ... صحبت کردیم و فقط بارگذاری متناوب باقی مانده.

* پاسخ به بار متناوب ← یعنی شکل $p(t)$ بر فرض به صورت زیر باشد. (شکل عیناً تکرار شود)

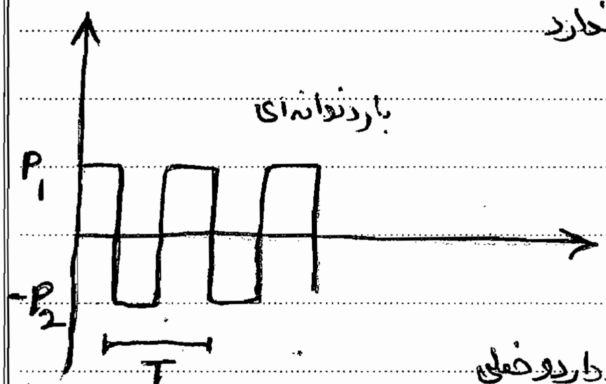
Year. Month. Day. Subject.



خیلی از بارگذاری‌هایی که در صنعت پیش می‌آید،
مثل پروانه‌ی کشتی که کار می‌کند روی بدنه‌ی کشتی
به خاطر نیرویی که از طرف آب بر آن اثر می‌کند،

$$p(t+T)=p(t)$$

یک نیروی متناوب ایجاد می‌کند که شکلش فرم سینوسی ندارد و شکلش همیشه عین هم است (متناوب)
← پس فرکانس دارد ولی شکل سینوسی منظم ندارد



← گاهی ممکن است بارگذاری‌های متناوب
مانند مقابل به وجود آید

راهی که از نظر ریاضی برای حل چنین مسائلی وجود دارد خیلی
کمک می‌کند به ما برای ساده شدن حل، اینکه ما بیاییم و بار را به صورت بسط سری فوریه بنویسیم

بسط فوریه : $p(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{2n\pi t}{T}+\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{2n\pi t}{T}$

$a_0=$ مقدار متوسط تابع

$$a_0=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} p(t)\,dt$$

تعریف ضرایب ←

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-T}^{T} p(t)\cos\frac{2n\pi t}{T}\,dt$$

NOTEBOOK

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-T}^{T} p(t)\sin\frac{2n\pi t}{T}\,dt$$

اثبات اینکه روابط فوق از کجا آمده اند به صورت زیر است :

$$\int_0^{2\pi} \sin \alpha x \cdot \sin \beta x \, dx = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin \alpha x \cos \beta x \, dx = 0$$

← اگر عبارت بالا را در $\cos \frac{2n\pi t}{T}$ ها ضرب کنیم، جز جمله ی a_n، بقیه ی جملات صفر می شوند ← ضریب آن جمله بدست می آید.

با توجه به اینکه توابع سینوسی فرد و توابع کسینوسی زوج هستند اگر شکل تابع ما زوج یا فرد باشد ← معلوم است که یکی از این ضرایب صفر می شوند :

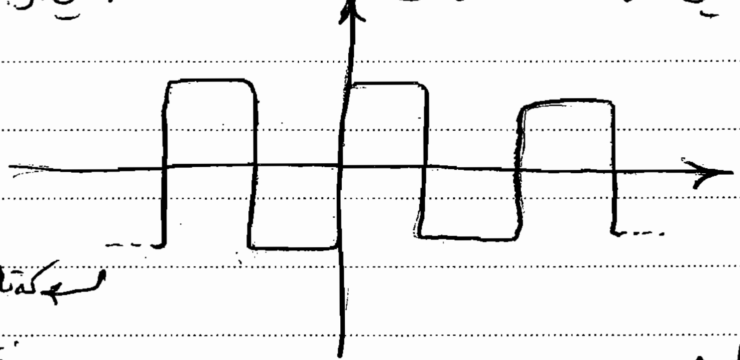
برای تابع زوج : b_n ها $= 0$

برای تابع فرد : a_n ها $= 0$

→ در خود اینها هم در عین حال گاهی مثلاً n های فرد صفر می شوند و n های زوج جواب دارند و گاهی برعکس و ... ← که خیلی سری ما مفصل نمی شود

← این از بحث ریاضی موارد فوق

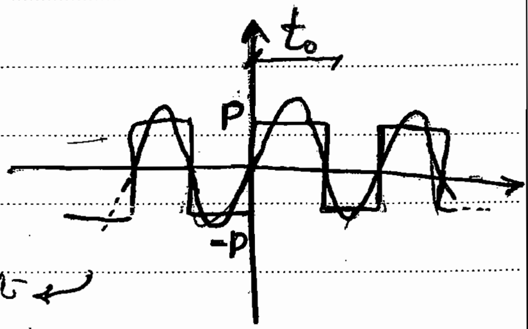
اگر شکل تابع موج ما به صورت مقابل باشد →



← که تابعی فرد است ← a_n ها $= 0$

و فقط b_n ها می مانند که سینوسی ($\sin$ ها) هستند.

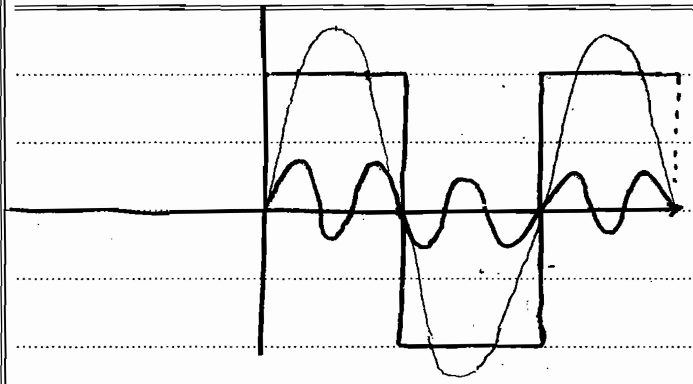
$b_1 \frac{2\pi t}{T}$ ← فردها جواب دارند و زوج ها صفر می شوند



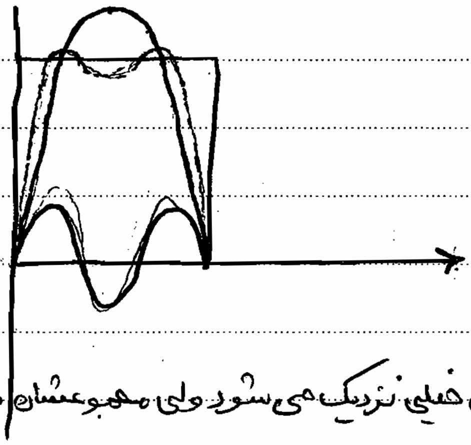
← تابع فوق مشتق پذیر نبود اما سری ما چون همه اش سینوسی و کسینوسی بود، مشتق پذیر است و مشکلی از این جهت نیست

جمله‌ی ششم

Year. Month. Day. Subject.



جمع شان



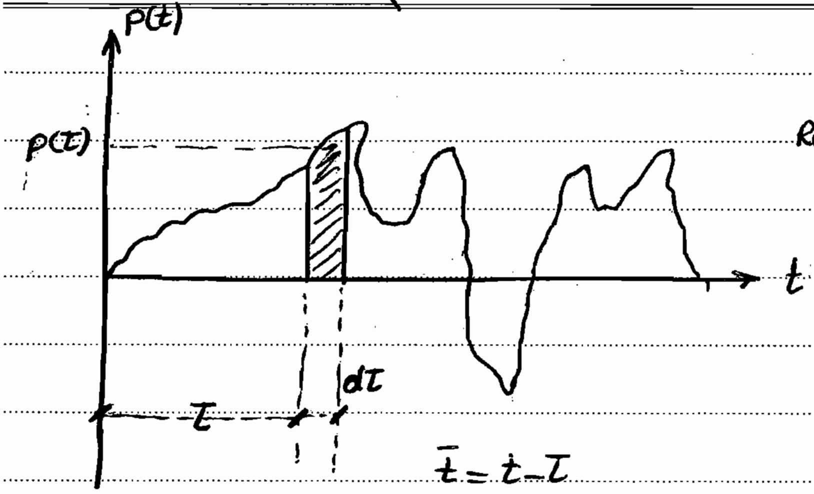
← جملات بعدی را نیز که بکشیم به مستطیلی خیلی نزدیک می شود ولی مجموعشان همچنان شیب دارد ومشتق پذیراست

← سری فوریه : مولفه های سینوسی و کسینوسی که از ترکیبشان شکل بدست می آید را به ما می دهد

← هر بارگذاری متناوبی را می توان به وسیله ی سری فوریه به این سیستم تبدیلش کرد.

پاسخ به بار دینامیکی کلی

Response to general Dynamic loading



پاسخ سازه به ضربه‌ای که در لحظه τ وارد شده

$$u_\tau(\bar{t}) = \overbrace{\frac{p(\tau)\,d\tau}{m\omega_D}}^{Imp_\tau} e^{-\xi\omega_N(t-\tau)} \sin(t-\tau)\omega_D$$

$$u(t) = \int_0^t u_\tau(\bar{t}) = \int_0^t \frac{p(\tau)\,d\tau}{m\omega_D} e^{-\xi\omega_N(t-\tau)} \sin\omega_D(t-\tau)$$

$$u(t) = \frac{1}{m\omega_D}\int_0^t p(\tau)\, e^{-\xi\omega_N(t-\tau)} \sin\omega_D(t-\tau)\, d\tau$$

چون دو تابع با هم ترکیب شده‌اند p(τ) و sin

انتگرال هم‌آمیخت دیوهامل

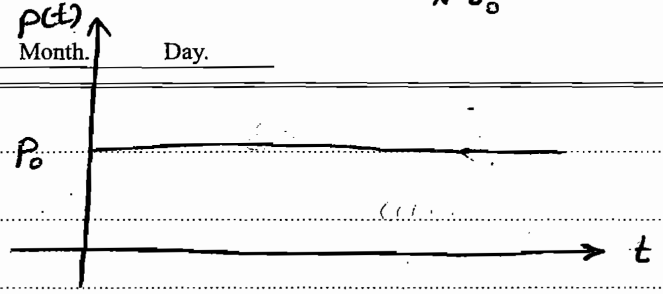
" duhamel Convolution Integral "

← این تابع علی‌رغم اینکه به نظر می‌رسد که هر تابعی را برای ما تحلیل می‌کند ولی در واقع به درد ما نمی‌خورد فقط به درد زلزله می‌خورد (که شکل خاصی ندارد) و بارهای رندوم می‌خورد.

← در بارهایی که شکل خاصی دارند، مثل سینوسی، کسینوسی و... حل مستقیم راحت‌تر است

← اگر می‌خواستیم همه‌ی بارها را با انتگرال فوق تحلیل کنیم، ریاضیات قضیه خیلی سخت می‌شد، به عنوان مثال بار ثابت که آسان‌ترین حالت است را بررسی می‌کنیم:

بار ثابت حالت نامیرا $\Rightarrow \overset{\text{نامیرا}}{u(t)} = \frac{1}{m\omega_N}\int_0^t p(\tau)\sin\omega_N(t-\tau)\,d\tau$



$$u(t) = \frac{1}{m\omega_N}\int_0^t P_0 \sin\omega_N(t-\tau)\,d\tau$$

مشتق نسبت به τ : $[\cos\omega_N(t-\tau)]' = -\omega_N \times -1 \times \sin\omega_N(t-\tau) = \omega_N \sin\omega_N(t-\tau)$

$$= \underbrace{\frac{P_0}{m\omega_N^2}}_{k}\left[\cos\omega_N(t-\tau)\right]_0^t$$

$\omega_N = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow \boxed{k = \omega_N^2 m}$

$$= \frac{P_0}{k}\left[1 - \cos\omega_N t\right]$$ → میشود همان جوابی که قبلاً بدست می‌آوردیم.

به دست آوردن در حالت نامیرا به وسیله‌ی انتگرال دوهامل ساده است ولی اگر حالت میرا باشد کار خیلی سخت می‌شود

بار ثابت در حالت میرا ؛ داشتیم $u(t) = e^{-\xi\omega_N t}(A\sin\omega_D t + B\cos\omega_D t) + \frac{P_0}{k}$

اما می‌بینیم که اگر بخواهیم حالت فوق را با انتگرال بدست آوریم کار پیچیده می‌شود

$$u(t) = \frac{P_0}{m\omega_D}\int_0^t e^{-\xi\omega_N(t-\tau)}\sin\omega_D(t-\tau)\,d\tau$$ → انتگرال گیری جزء به جزء

$-\int r\,du$

$$\begin{cases} I_s = \int \overset{u}{e^{\alpha x}}\cdot \overset{dr}{\sin\beta x\,dx} = \overset{u}{e^{\alpha x}}\overset{r}{(-\tfrac{1}{\beta})\cos\beta x} - \frac{e^{\alpha x}}{\beta}\underbrace{\int e^{\alpha x}\cdot\cos\beta x\,dx}_{I_c} \\ I_c = \int e^{\alpha x}\cdot\cos\beta x\,dx \end{cases}$$

← تازه براساس انتگرال‌های فوق و روش‌های ریاضی و ... با پیچیدگی فراوان به جواب می‌رسیم

تنها برای حل هایی که شکل منظمی ندارند مثل نیروهای ناشی از زلزله و شکل‌های بعدی از انتگرال فوق استفاده می‌کنیم ← بار باد و امواج دریا ...

NOTEBOOK

پاسخ سازه به تحریک تکیه گاهی (پی)

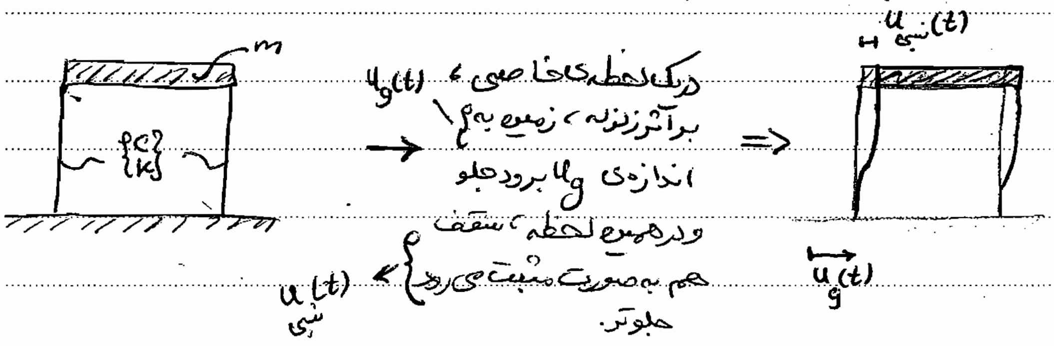
Response to support excitation

← می گوییم تکیه گاهی ← چون گاهی اوقات سازه‌ی ما سازه‌ی ثانویه است.

له مثلاً در سازه های صنعتی زیاد پیش می آید که سازه‌ای به سازه‌ی اصلی وصل است.

← آن سازه‌ی ثانویه که دیگر به پی وصل نیست ، در حقیقت آن قسمتی از سازه‌ی اصلی ما که سازه‌ی ثانویه بر آن سوار است ، به عنوان تکیه گاه سازه‌ی ثانویه‌ی ما مطرح می شود.

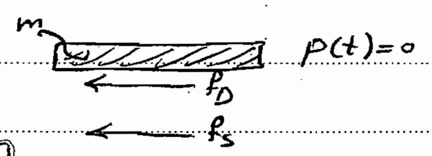
← پاسخ آن قسمت سازه‌ی اصلی به باری مثل زلزله می شود ورودی آن سازه‌ی ثانویه .



$$\Rightarrow \quad u^{t}(t) = u_g(t) + u_{نسبی}(t)$$

total

بررسی تعادل سقف در این حالت :



$$\overset{p(t)}{0} - f_D - f_S = m\ddot{u}^t$$

$$\ddot{u}^t = \ddot{u}_g + \ddot{u}_{نسبی}$$

می دانیم $\begin{cases} f_D = c.\dot{u} \\ f_S = k.u \end{cases}$ — u هر دوتای آنها نسبی است.

حضرت زهرا سلام‌ا... علیها: خداوند نماز را برای پاک شدن شما از کبر واجب کرد.

Year. Month. Day. Subject.

=> معادله‌ی کلی می‌شود : $-c\dot{u} - ku = m(\ddot{u}_g(t) + \ddot{u}(t))$

نسبی

$\rightarrow +m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -m\ddot{u}_g(t) \rightarrow$ پاسخ تحریک پی

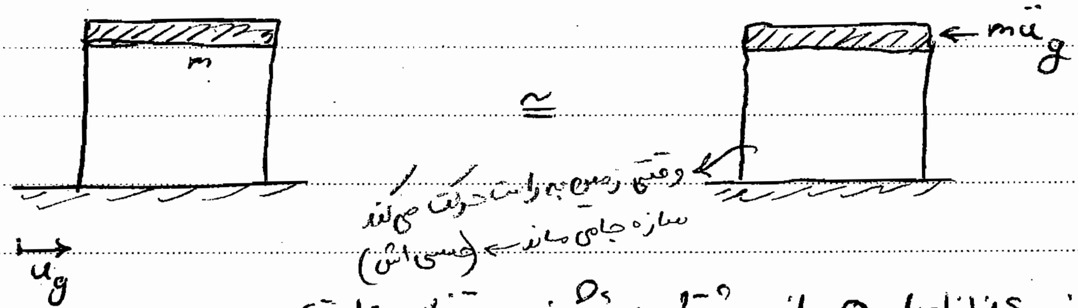
شتاب مطلق زمین

* $-m\ddot{u}_g(t) =$ نیروی مؤثر زلزله $\longrightarrow P_{eff}(t)$

← معنی عبارت فوق این است که:

اگر زمین به اندازه‌ی u_g جابجا شود معادل است با اینکه بگوییم زمین ثابت است ولی نیرویی به اندازه‌ی $m\ddot{u}_g$ در خلاف جهت حرکت زمین وارد می‌شود به سازه.

شتاب زمین



* نیروی زلزله با جرم سازه و شتاب مؤثر زمین متناسب است.

← کم کردن شتاب زمین دست ما نیست ولی کم کردن جرم سازه دست ما است که اگر هرچه بتوانیم کم‌تر کنیم آن را به نفع سازه می‌شود

← هرکه بامش بیش، برفش بیشتر ← در اینجا هم هرکه جرمش بیش، نیروی زلزله‌اش بیشتر.

← مصالح سبک = بحث روز دنیا

۵

24+ ← ۹-۱ استاد

Year. Month. Day. Subject.

~~مشتق~~ انتگرال گیری جزء به جزء:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$I=\int_a^b (x^2+3x)\cos 4x\,dx$$

مشتق	انتگرال
x^2+3x	$\cos 4x$
$2x+3$	$\frac{1}{4}\sin 4x$
2	$-\frac{1}{16}\cos 4x$
0	$-\frac{1}{64}\sin 4x$

$$\Rightarrow I=\frac{x^2+3x}{4}\sin 4x+\frac{2x+3}{16}\cos 4x-\frac{2}{64}\sin 4x\Big|_a^b$$

$$I=\int e^{3x}\cos 2x\,dx$$

مشتق	انتگرال
e^{3x}	$\cos 2x$
$3e^{3x}$	$-\frac{1}{2}\sin 2x$
$9e^{3x}$	$-\frac{1}{4}\cos 2x$

$$I=\frac{e^{3x}}{2}\sin 2x+\frac{3}{4}e^{3x}\cos 2x-\frac{9}{4}\underbrace{\boxed{\int e^{3x}\cos 2x\,dx}}_{I}$$

$$\Rightarrow I=\frac{4}{13}\frac{e^{3x}}{2}\left(\sin 2x+\frac{3}{2}\cos 2x\right)$$

NOTEBOOK

۶۸

حال اگر $-m\ddot{u}_g$ را به جای $p(\tau)$ بگذاریم در انتگرال دوهامل:

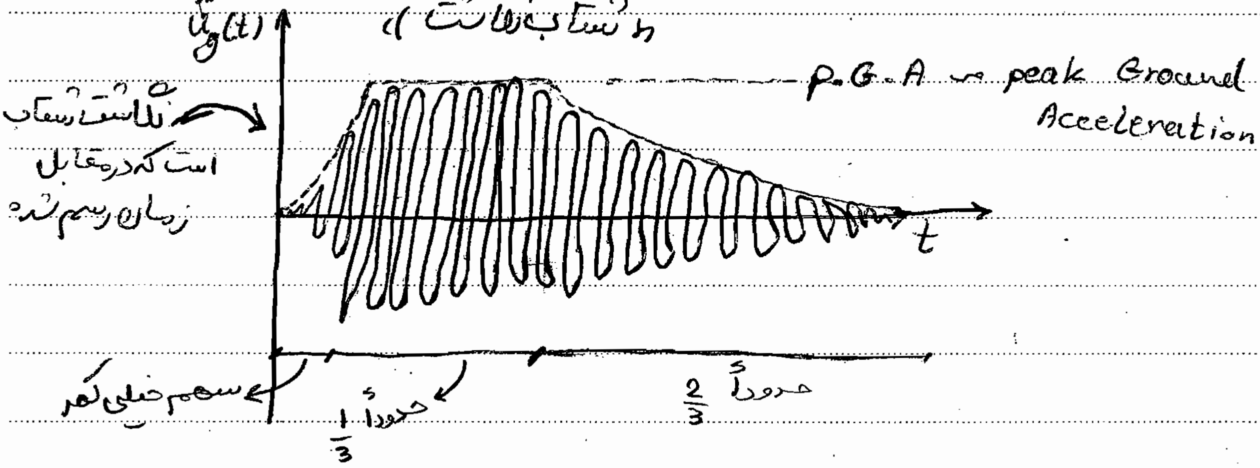
$p(t)=-m\ddot{u}_g$

$$u(t)=\frac{1}{m\omega_D}\int_0^t -m\ddot{u}_g(\tau)\,e^{-\xi\omega_N(t-\tau)}\sin\omega_D(t-\tau)\,d\tau$$

$$\rightarrow u(t)=\frac{-1}{\omega_D}\int_0^t \ddot{u}_g(\tau)\,e^{-\xi\omega_N(t-\tau)}\sin\omega_D(t-\tau)\,d\tau$$

← که $\ddot{u}_g(t)$ تاریخچه‌ی شتاب زمین است ← شتاب نگاشت‌ها

← ویژگی تابع هر شتاب نگاشت: ابتدا با دامنه‌ی کم و سپس peak و سپس دوباره کم



✱ هر شتاب نگاشت سه ویژگی دارد:

۱- حداکثر شتاب زمین (P.G.A)

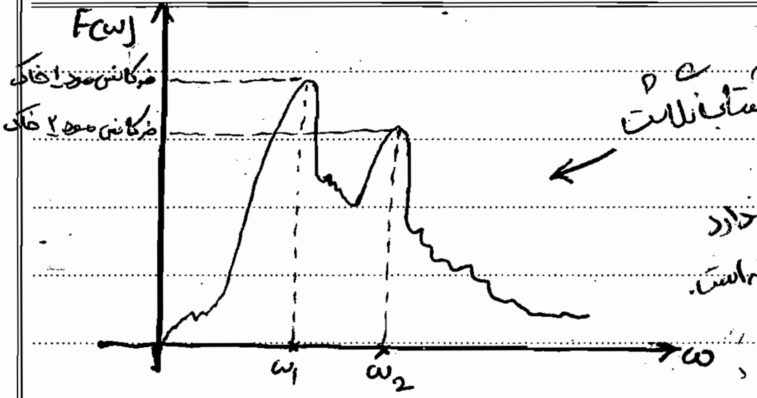
۲- طول مدت رکورد (Record) یا همان duration ← مدت زمان زلزله

۳- محتوای فرکانسی آن

← اگر از شکل فوق یک تبدیل فوریه بگیریم یک تابع برحسب ω به دست می‌آید به صورت روبرو (صفحه‌ی بعد)

گرفتن سری فوریه از خروجی شتاب نگاشت صفحه قبل

Year. Month. Day. Subject.



طیف فوریه‌ی شتاب نگاشت

ربطی به سازه ندارد و برای زمینه‌ی زلزله است.

ω_1 و ω_2 سهم عمده داشته‌اند (دامنه‌های حداکثر نوسان در این فرکانس‌ها بوده‌اند) ⇐ با هم ترکیب شده‌اند و این شکل را برای ما ساخته‌اند.

← اگر مثل‌ها اینجا خودشان را نشان می‌دهد ← نتایج خروجی شتاب نگاشت را وقتی می‌دهیم به سری فوریه آنهایی که دامنه‌ی بالاتری دارند مودهای اصلی آن خاک هستند.

← عمده‌ی ارتعاش خاک در مود ۱ خاک رخ می‌دهد و مقداری ارتعاش اضافی هم در مود دوم رخ می‌دهد

* اگر این فرکانس‌ها که $F(\omega)$ ماکزیمم داشتند به فرکانس سازه نزدیک باشد رزونانس ایجاد می‌کند

$$\boxed{u(t) = \frac{-1}{\omega_D}\int_0^t \ddot{u}_g(t)\, e^{-\xi\omega_N(t-\tau)} \sin \omega_D(t-\tau)\, d\tau}$$

Year. Month. Day. Subject.

$$u(t) = \frac{-1}{\omega_D} \int_0^t \ddot{u}_g(t)\, e^{-\xi\omega_N (t-\tau)} \sin\omega_D (t-\tau)\, d\tau$$

انتگرال پاسخ $= v(t)$ ای (چون همبُعد سرعت دارد)

ولی در حقیقت سرعت سیستم نیست.

و چون فقط از همبُعد سرعت است با v نشان می‌دهند

$$\int \ddot{u} = \dot{u}$$

$$|v(t)|_{max} = S_{pv}$$

شبه سرعت طیفی

pseud — velocity

$$|u(t)|_{max} = S_D$$

تغییر مکان ماکزیمم، تغییر مکان طیفی

spectral — displacement

$$\boxed{S_D = \frac{S_{pv}}{\omega_D}}$$

تابعی از

S_{pv} (ω_N, ξ)

(که تابع ω_N و ξ است)

هارنوسه یک همچنین کمیتی را برای یک زلزله‌ی مشخص

که سازه‌های یک درجه‌ی آزاد ← را در نظر گرفت با که های گوناگون تحلیل کرد

که به وسیله‌ی انتگرال $u(t)$ را محاسبه کرد و شکل‌هایی مانند

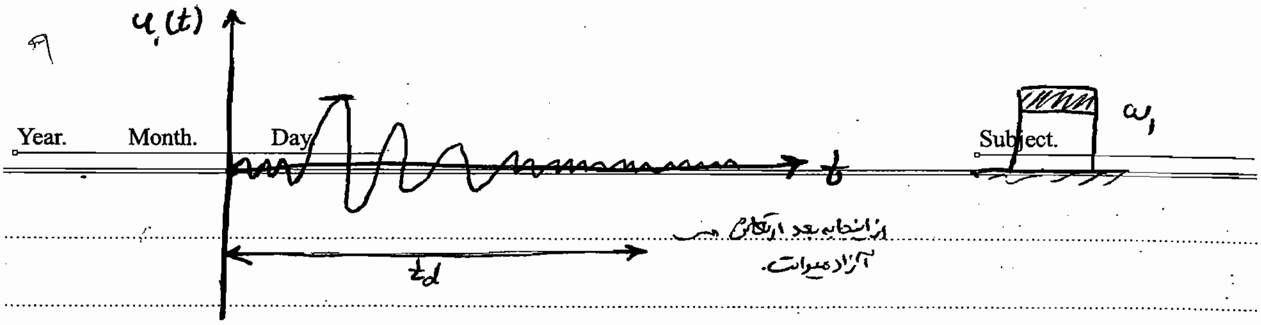
صفحه‌ی بعد بدست آورد.

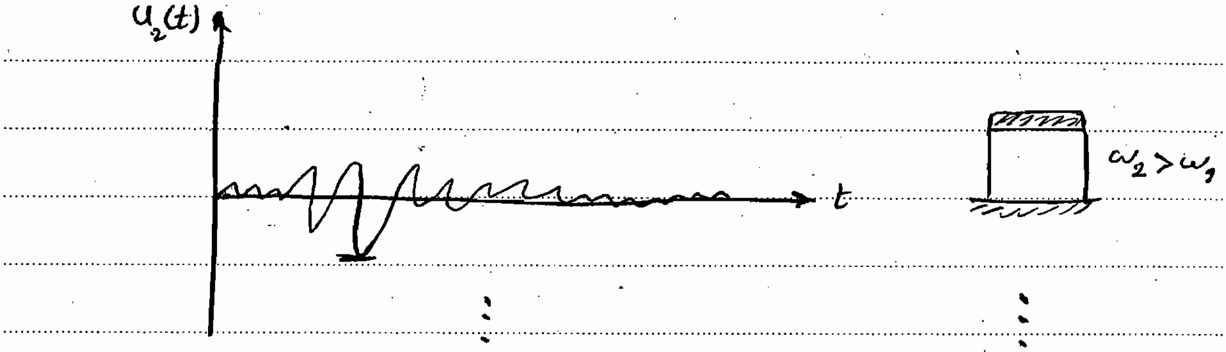
← آخرین شکل‌های صفحه‌ی بعد ارتعاش آزاد میرا است.

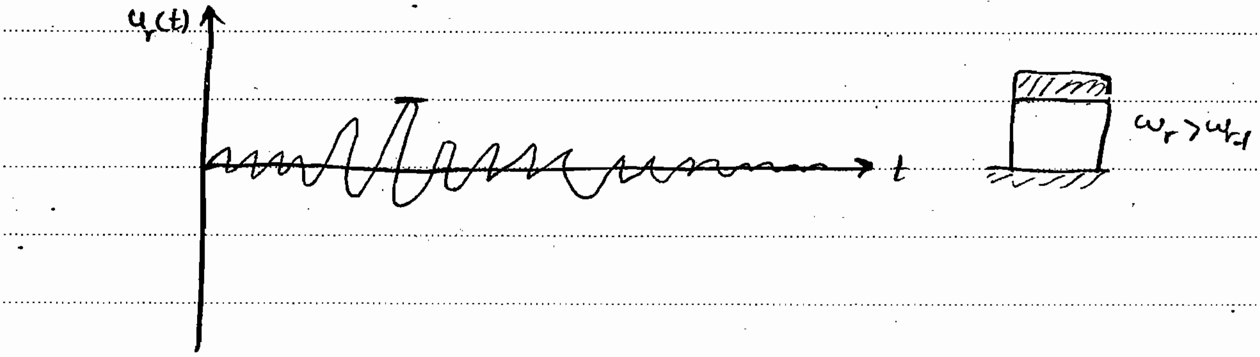
NOTEBOOK

هرکدام از نمودارهای صفحه‌ی بعد یک بیشینه‌ای دارند (چه مثبت و چه منفی)

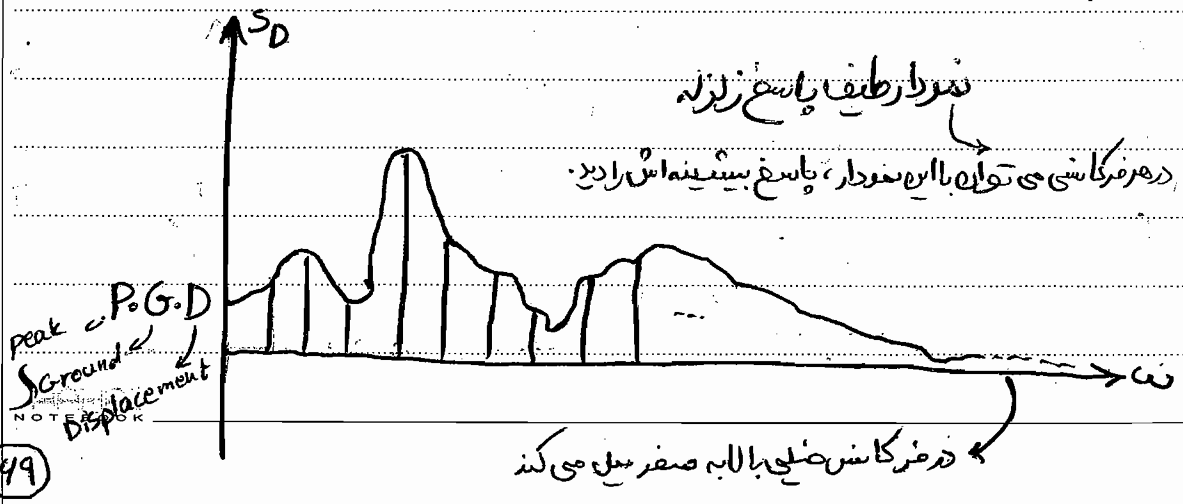
که $S_D = |u(t)|_{max}$ ← از روی نمودار ماکزیمم‌هایش را درآورد و در یک نمودار $(S_D - \omega)$ رسم نمود.

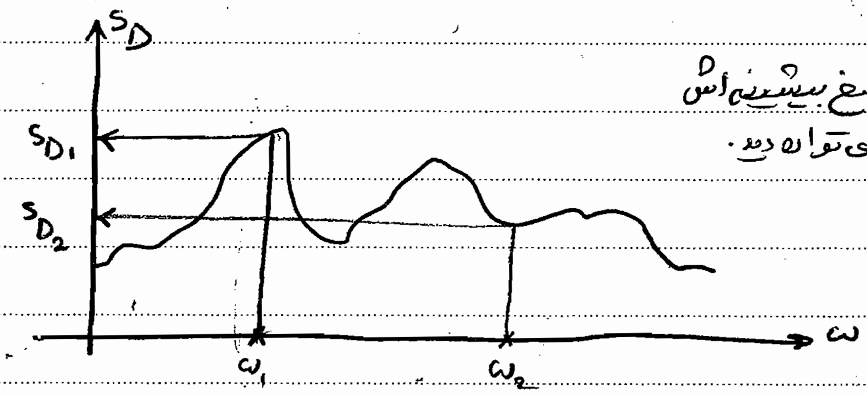




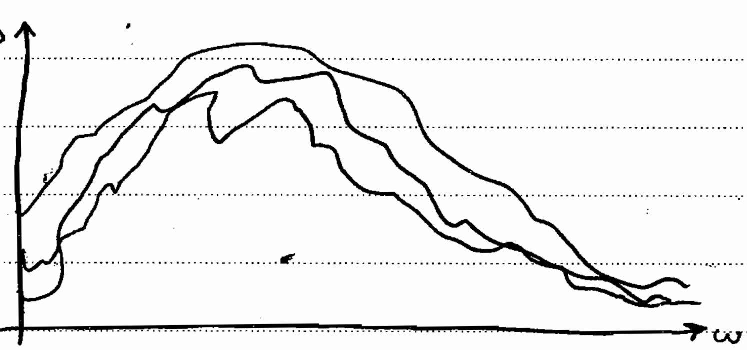


$S_D = |u(t)|_{max} \leftarrow$ max ها را می آورد و در نموداری در مقابل ω رسم می کند





برای هر ω ← پاسخ بیشینه اش را می تواند دهد.



برای زلزله های دیگر را هم رسم کرد:

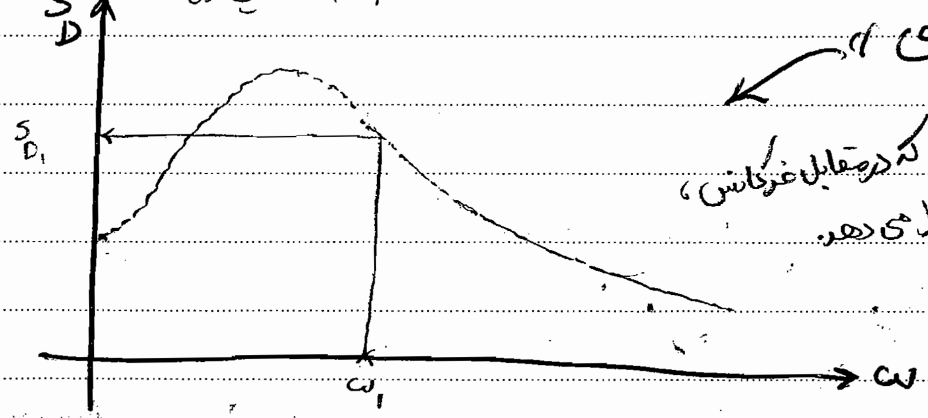
طیف پاسخ زلزله های مختلف

↓

پوشش طیف پاسخ زلزله های مختلف را رسم کرد:
و یک مقدار ضریب اطمینانی را هم برای محکم کاری در نظر گرفت (بالاترین رسم کرد)

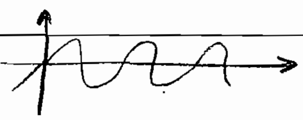
نمودارهای قبل طیف پاسخ بودند:

period = 3s ← حالت خیلی نرمی است



طیف طراحی:
نموداری است که در مقابل فرکانس، پاسخ بیشینه را می دهد.

زلزله ی مکزیکو سیتی



امام موسی کاظم علیه السلام : شتاب در رفتار، وقار و سنگینی را از مؤمن دور می کند.

Year. Month. Day. Subject.

$p(t) = p_0 \sin \omega t$

$$\begin{cases} A = \dfrac{p_0}{\omega_D k\left[(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2\right]} \left\{ 2\omega_N \xi^2 \beta - \omega(1-\beta^2) \right\} \\ B = \dfrac{2p_0 \xi \beta}{k(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \end{cases}$$

$p(t) = P_0 \cos \omega t$

$$y = \frac{p_0}{k} \frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}$$

$$\begin{cases} A = \dfrac{-y}{\omega_D}\left[(1-\beta^2)\xi\omega_N + 2\omega\xi\beta\right] \\ B = -(1-\beta^2)\, y \end{cases}$$

ضربه مستطیلی

1

$\boxed{t > \frac{1}{2} T_n}$ —— ~~ضربه~~ حداکثر دامنه = زمان اعمال ضربه

2

$t < \frac{1}{2} T_n$ —— حداکثر دامنه = وقتی که بعد از حذف بار شروع به ارتعاش آزاد می کند

$T_n = \frac{2\pi}{\omega_N}$

← اگر ضربه باشد ← $t \lesssim \frac{1}{10} T_N$ ⟸ قطعاً در حالت ② قرار می گیرد ← فرمول ها را می نویسیم.

بیشینه‌ی جابجایی

Year. Month. Day. Subject.

محل ضربه

ضربه مستطیلی با مقدار $Imp = P_0 t$

$$\frac{u_0}{(u_{st})} = 2\pi \frac{t}{T_n}$$

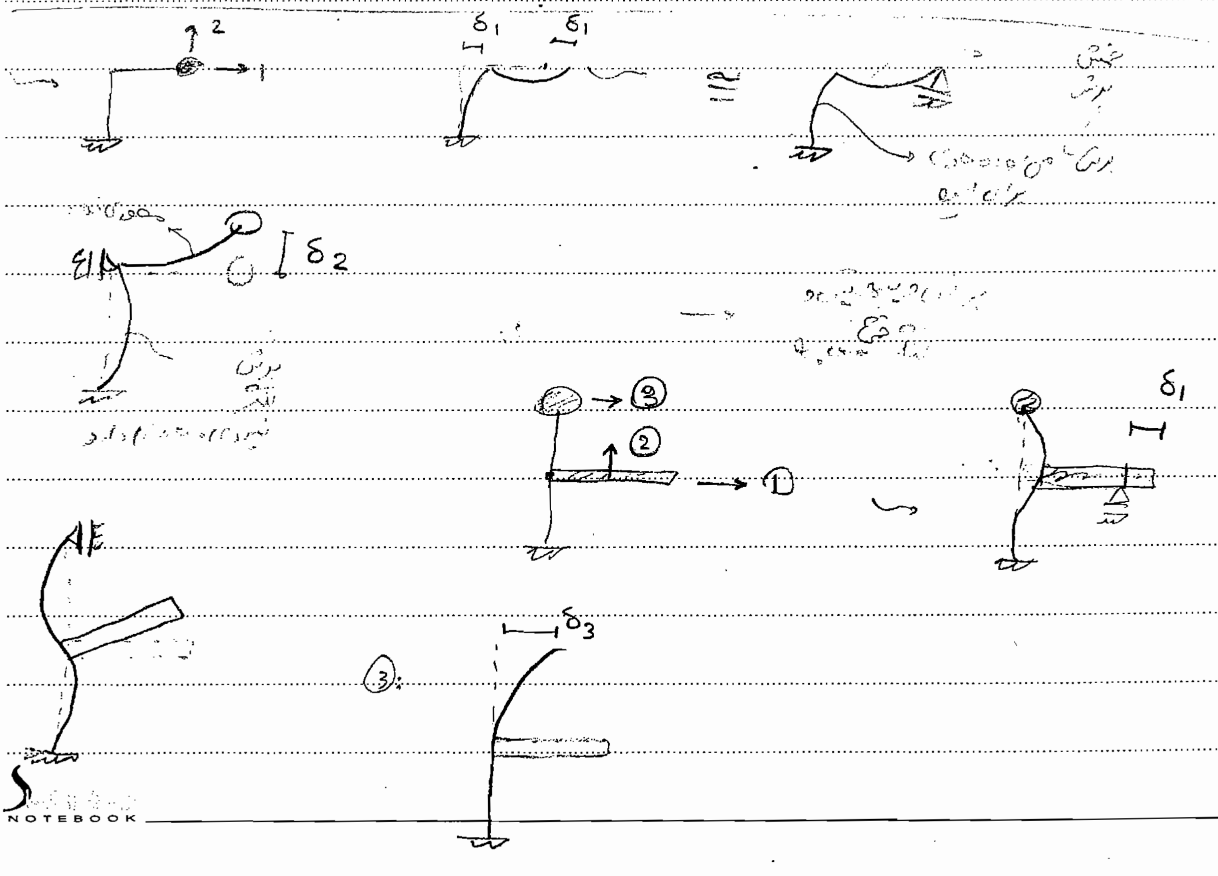
$$u_{st} = \frac{P_0}{k}$$

نیم سینوسی با مقدار $Imp = \frac{2}{\pi} P_0 t$

$$\frac{u_0}{(u_{st})} = 4 \frac{t}{T_n}$$

مثلثی با مقدار $Imp = P_0 \frac{t}{2}$

$$\frac{u_0}{u_{st}} = \pi \frac{t}{T_n}$$



۶ اسفند ۱۴۰۰

Year. Month. Day. Subject.

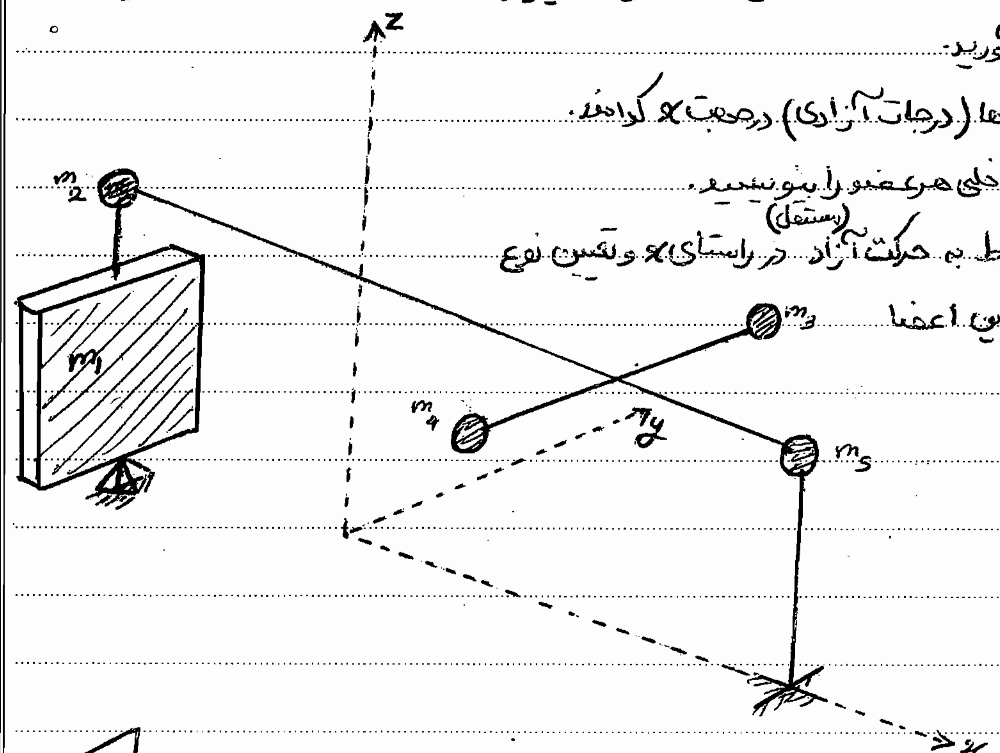
سؤالات امتحان میان‌ترم

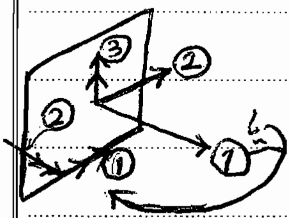
۱- تعداد درجات آزادی سازه‌ی زیر را در صورتیکه از تغییر شکل محوری اعضا صرف نظر کنیم را بدست آورید.

تغییر جهت‌ها (درجات آزادی) در جهت x کدامند.

نوع نیروی داخلی هر عضو را بنویسید.

رسم اشکال مربوط به حرکت آزاد (مستقل) در راستای x و تعیین نوع نیروهای داخلی که در این اعضا به وجود می‌آید.

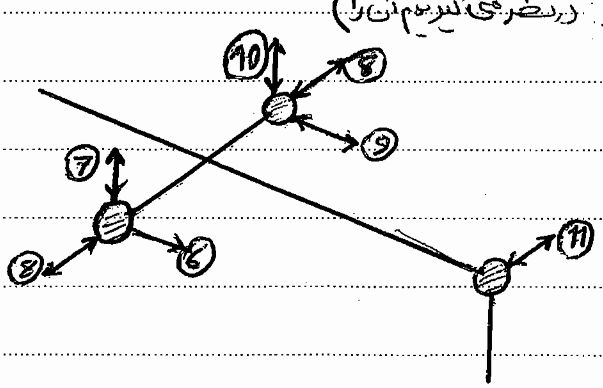


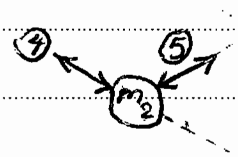


* جسم صلب گسترده، در حالت کلی دارای شش ۶ درجه آزادی است. (رفعا!)

در جسم صلب فوق، سه درجه‌ی آزادی به دلیل حضور مفصل حذف می‌شود و فقط می‌تواند حول مفصل فوق دوران کند. (انتقالی)

* حال که درجات آزادی اولین عضو را بررسی کردیم، فرض می‌کنیم که آن عضو بسته شده و ثابت است و می‌رویم سراغ عضو دیگر. (عین روش یا تکیه‌گاه گیردار در نظر می‌گیریم آن را)

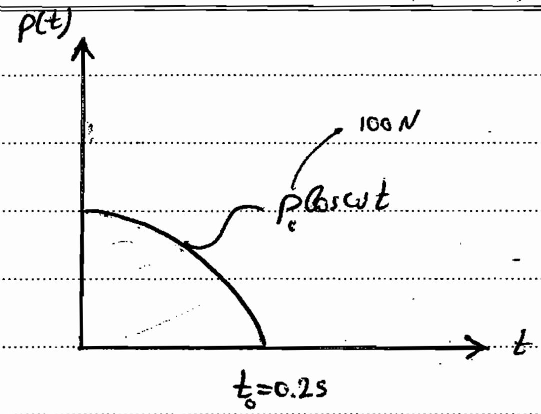




⇒ ۱۱ درجه‌ی آزادی داریم

NOTEBOOK

۲-



$c=0$

$k=144 \ kN/m$

$m=1 \ ton$

مطلوب است محاسبه ی تغییر مکان

در لحظه ی $t=10t_1$.

الف) به روش دقیق   ب) به روش تقریبی ضربه ای   ج) به روش $\bar{t}=t-t_c$

حل:

$$u(t)=e^{-\zeta\omega_N t}(A\sin\omega_D t+B\cos\omega_D t)+\frac{P_0}{k}\frac{1}{(1-\beta^2)^2+(2\zeta\beta)^2}\left[(2\zeta\beta)\sin\omega t+(1-\beta^2)\cos\omega t\right]$$

$$C=0 \Rightarrow \zeta=0 \Rightarrow \omega_D=\omega_N=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{144\times10^3}{10^3}}=12 \quad rad/s$$

$P_0=100 \ N$

$T=4t_1=4\times0.2=0.8 \ s$ $\qquad \omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{0.8}=2.5\pi=7.85 \ rad/s$

$$\beta=\frac{\omega}{\omega_N}=\frac{7.85}{12}=0.65$$

$$u_0=0 \ , \ \dot{u}_0=0 \Rightarrow u(0)=B+\left(\frac{100}{144\times10^3}\right)\times\frac{1}{(1-(0.65)^2)^2}\left[(1-(0.65)^2)\right]=0$$

$$\Rightarrow B=-\frac{1}{1440\times0.577}=\boxed{-1.2\times10^{-3}}$$

$$\dot{u}(t)=(A\omega_N\cos\omega_N t-B\omega_N\sin\omega_N t)+\frac{P_0}{k}\frac{1}{(1-\beta^2)^2}\left[(1-\beta^2)\times(-\omega)\sin\omega t\right]$$

$$\dot{u}(0)=A\omega_N=0 \Rightarrow \boxed{A=0}$$

$2\pi = 360$
$\pi = 180$
$1\,rad = \frac{180}{3.14} = 57.3$

Year. Month. Day. 1.2×10^{-3} Subject.

$$\Rightarrow u(t) = (-1.2\times10^{-3})\cos(12t) + \frac{1}{1440}\times\frac{1}{(1-0.65^2)}\cos(7.85t)$$

$$\Rightarrow u(t=0.2) = (-1.2\times10^{-3})\cos(\overset{rad}{2.4}) + (1.2\times10^{-3})\cos(\overset{rad}{1.57})$$

$$= (1.2\times10^{-3})\left[-\overset{0.737}{\cos(2.4)} + \overset{7.96\times10^{-4}}{\cos(1.57)}\right] = 0.89\times10^{-3}\ m$$

$$\dot{u}(t) = (+1.2\times12\times10^{-3})\sin(12t) - (1.2\times10^{-3})\times(7.85)\sin(7.85t)$$

$$\Rightarrow \dot{u}(t=0.2) = (1.44\times10^{-3}\sin(2.4)) - (9.42\times10^{-3}\times\sin(1.57))$$

$$= (0.97\times10^{-3}) - (9.42\times10^{-3}) = -8.45\times10^{-3}\ m/s$$

← ارتعاش آزاد با سرعت اولیه ی $-8.45\times10^{-3}\ m/s$ و تغییر مکان اولیه ی $0.89\times10^{-3}\ m$:

$$u(t) = \left(\frac{\dot{u}}{\omega_N}\sin\omega_N t + u_0\cos\omega_N t\right)$$

$$\Rightarrow u(t=1.8) = \frac{-8.45\times10^{-3}}{12}\sin(12\times1.8) + (0.89\times10^{-3})\times\cos(12\times1.8)$$

$$= -0.268\times10^{-3} - 0.822\times10^{-3} = -1.09\times10^{-3}\ m \qquad \text{(الف)}$$

$$Imp = \int_0^{0.2} 100\cos(7.85t) = 100\times\left(\frac{1}{7.85}\sin(7.85t)\Big|_0^{0.2}\right)$$

$$= 100\times\frac{1}{7.85}\sin(7.85\times0.2) = 12.73$$

NOTEBOOK

$$\bar{u}(\bar{t}) = \frac{I_{mp}}{m\omega_D} e^{-\xi\omega_N \bar{t}} \sin\omega_D \bar{t}$$

$\bar{t} = 2 - 0.2 = 1.8$

$$\rightarrow \bar{u}(\bar{t}) = \frac{I_{mp}}{m\omega_N} \sin\omega_N \bar{t}$$

$$\rightarrow \bar{u}(\bar{t}=1.8) = \frac{12.73}{10^3 \times 12} \sin(12 \times 1.8) = 0.404 \times 10^{-3} \ m$$ (ب)

$$t_c = \frac{\int_0^{0.2} t\cos\omega t \, dt}{\int_0^{0.2} \cos\omega t \, dt} =$$

مشتق	انتگرال
t	$\cos\omega t$
1	$\frac{\sin\omega t}{\omega}$
0	$\frac{-1}{\omega^2}\cos\omega t$

$$= \frac{\int_0^{0.2} t\cos(7.85t)\,dt}{\int_0^{0.2} \cos(7.85t)\,dt}$$

$$= \frac{\left[\frac{t\sin\omega t}{\omega} + \frac{1}{\omega^2}\cos\omega t\right]}{\frac{\sin\omega t}{\omega}} = \frac{t\sin\omega t + \frac{1}{\omega}\cos\omega t \Big|_0^{0.2}}{\sin\omega t \Big|_0^{0.2}}$$

$$= \frac{\overset{0.2}{0.2\sin(7.85\times0.2)} + \overset{1.014\times10^{-4}}{\frac{1}{7.85}\times\cos(7.85\times0.2)} - \overset{0.127}{\frac{1}{7.85}}}{\sin(7.85\times0.2)} = \frac{0.072}{0.999} = 0.072$$

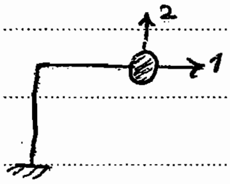
$$\rightarrow t - t_c = 2 - 0.072 = 1.928$$

$$u(1.928) = \frac{12.73}{10^3 \times 12}\sin(12\times1.928) = 1.06\times10^{-3}\times(-0.91) = -0.965\times10^{-3} \ m$$

۶ بهمن ۱۴۰۱

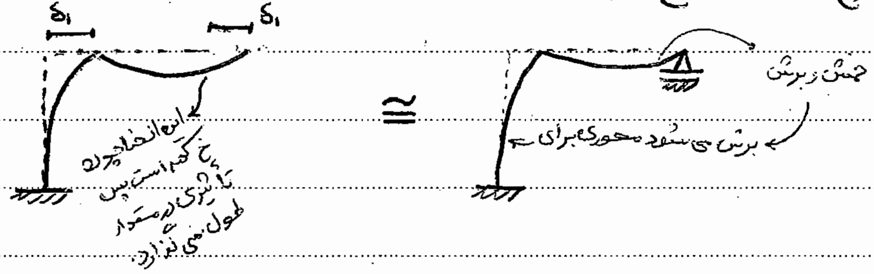
حل مسئه دوم سؤال اول میان ترم:

~~برای واضح شدن موضوع یک سازه با دو درجه‌ی آزادی (1 و 2) را در نظر می‌گیریم.~~

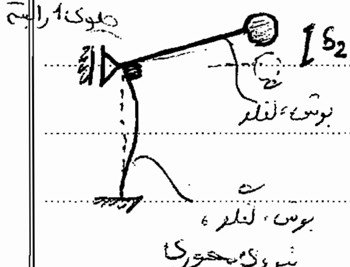


شکل نشان دهنده‌ی حرکت مستقل یعنی و فقط آن را آزاد بگذاریم و بقیه را ببندیم. برفرض در اینجا ما 1 را می‌بندیم و 2 را آزاد می‌گذاریم:

هیچ حرکتی از 2 رخ نمی‌دهد و فقط یک 1 حرکت می‌کند، انگار که غلطک قرار داده‌ایم:



← در هر دو عضو فوق (عمودی و قائم)، برش، خمش و نیروی محوری وجود دارد.

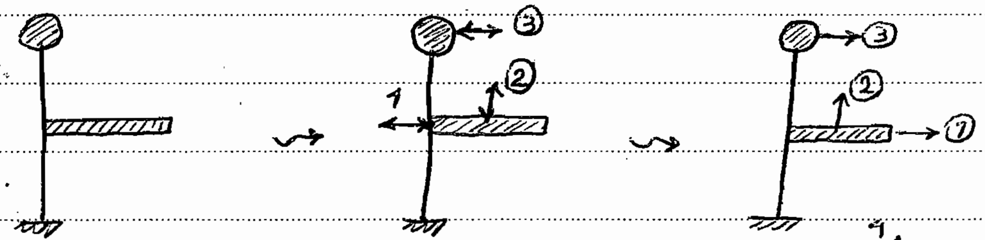


حال اگر درجه‌ی آزادی 2 را فعال کنیم داریم:

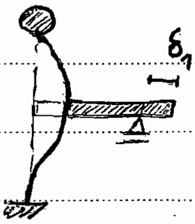
شکل نشان دهنده‌ی حرکت مستقل درجه‌ی آزادی 2 ←

← چیزی که برای ما مهم است برش و خمش را پیش می‌باشد، نیروی محوری به علت ناچیز بودن زیاد مهم نمی‌باشد.

← حال اگر بخواهیم یک جسم صلب هم مثال بزنیم، برفرض سیستمی مانند زیر داشته باشیم:

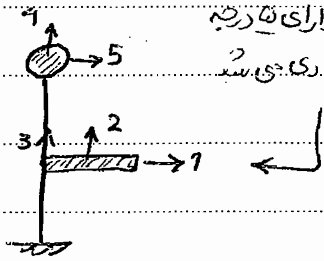


اگر نیروی محوری را صرف نظر نکنیم سازه‌ی ما دارای ۵ درجه آزادی می‌شد ←

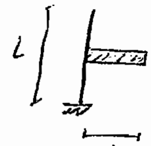


← حال اگر بخواهیم حرکت مستقل 1 را نشان دهیم:

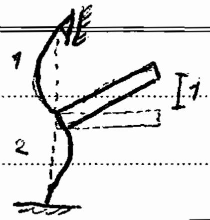
(درجه های 2 و 3 را صفر کرده‌ایم)



Year. Month. Day. Subject.



حرکت مستقل درجه‌ی آزادی 2 :



در حال حاضر سختی ما می‌شود ← سختی دورانی ← طبق تعریف اینجا سختی ما k_{22} اسمش می‌شود ← نیروی لازم جهت تغییر مکان واحد در درجه‌ی آزادی 2

هم عضو 1 و هم عضو 2 در برابر تغییر θ مقاومت می‌کنند و می‌خواهند آن را به شکل اولیه باز گرداند

$\theta = k_{22}$

سختی دورانی عضو 2

سختی دورانی 2 : $2: \frac{4EI}{L}$

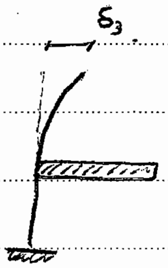
سختی دورانی 1 : $1: \frac{3EI}{L}$

اگر جسم صلب به اندازه‌ی را در برود بالا پس به اندازه‌ی $(\frac{2}{L})$ دوران ایجاد می‌کند

چون هم جهت اند و موازی

$$\frac{2}{L}\times k_{22} = \frac{7EI}{L}\theta$$

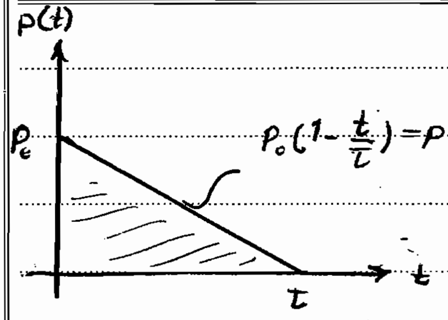
$$k_{22}\times\frac{2}{L} = \frac{7EI}{L}\times\frac{2}{L} \rightarrow k_{22} = \frac{7EI}{L} \quad ?!$$



شکل حرکت مستقل درجه‌ی آزادی 3 :

Year. Month. Day. Subject. اردیبهشت ۱۴۰۰

*مثال)



u_{max} را در دو حالت زیر بدست آورید:

$c=0$

الف) جواب حداکثر در زمان اعمال بار اتفاق بیفتد

ب) جواب حداکثر بعد از اعمال بار اتفاق بیفتد

$$p(t) = P_0 + \left(\frac{-P_0}{\tau}\right)t$$

$$\rightarrow m\ddot{u} + \cancel{c\dot{u}} + ku = p(t) \longrightarrow u(t) = u_h(t) + u_p(t)$$

$$u_h = A\sin\omega_N t + B\cos\omega_N t$$

$$u_p(t) = A_0 + A_1 t$$

$$\dot{u}_p(t) = A_1 \quad , \quad \ddot{u}_p(t) = 0$$

$$\Rightarrow m(0) + 0 + k(A_0 + A_1 t) = P_0 + \left(\frac{-P_0}{\tau}\right)t$$

$$\Rightarrow kA_0 = P_0 \quad , \quad kA_1 = \frac{-P_0}{\tau}$$

$$\Rightarrow A_0 = \frac{P_0}{k} \qquad \Rightarrow A_1 = \frac{-P_0}{\tau k}$$

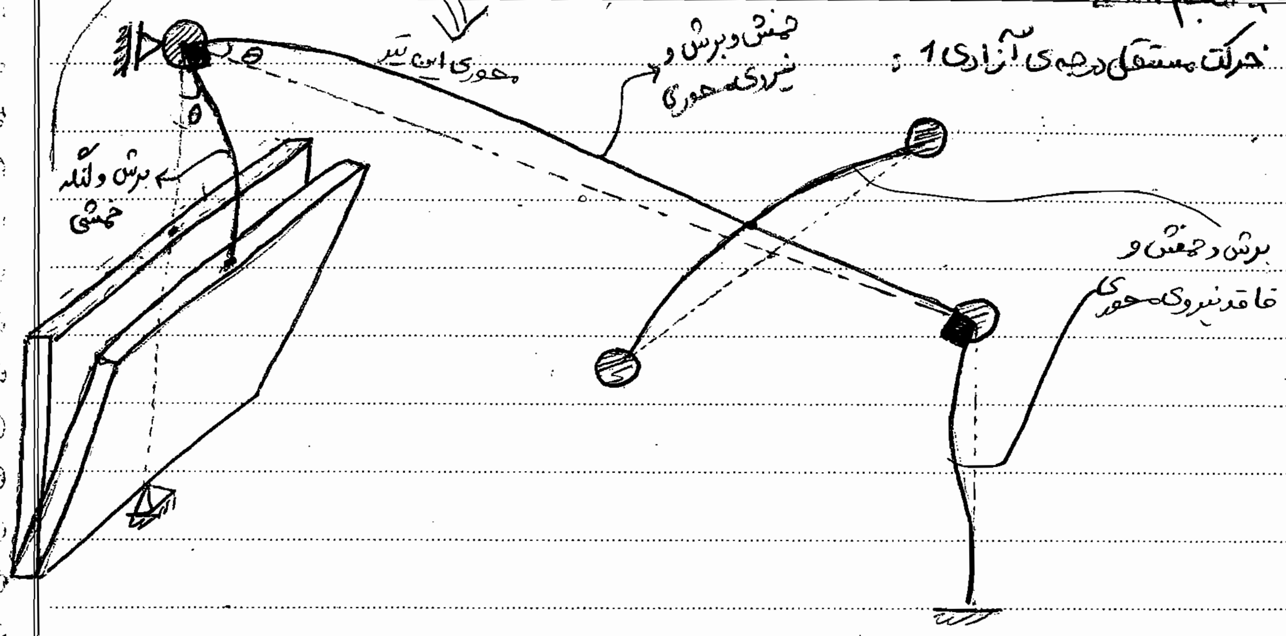
$$u(t) = A_0 + A_1 t + A\sin\omega_N t + B\cos\omega_N t \rightarrow u_0 = 0 \rightarrow B = -A_0$$

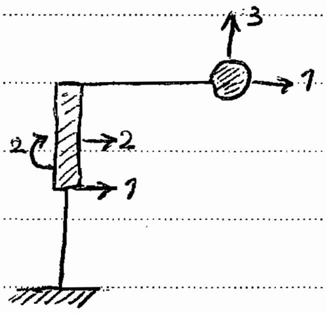
$$\dot{u}(t) = A_1 + A\omega_N\cos\omega_N t - B\omega_N\sin\omega_N t \rightarrow \dot{u}_0 = 0 \rightarrow A = \frac{-A_1}{\omega_N}$$

$$\Rightarrow \boxed{u(t) = \frac{P_0}{k} + \left(\frac{-P_0}{\tau k}\right)t + \left(\frac{-A_1}{\omega_N}\right)\sin\omega_N t + (-A_0)\cos\omega_N t}$$

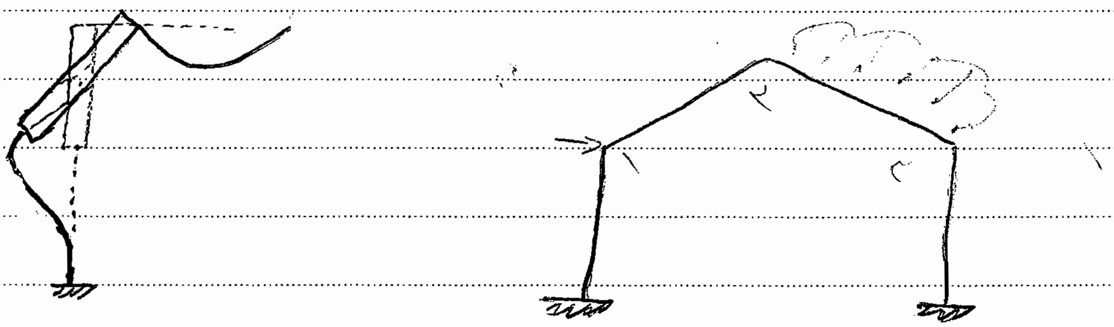
$$u(t) = \frac{P_0}{k}\left[1 - \left(\frac{1}{\tau}\right)t + \frac{1}{\tau\omega_N}\sin\omega_N t - \cos\omega_N t\right]$$

حرکت مستقل درجه‌ی آزادی 1 :





حرکت مستقل 2 :



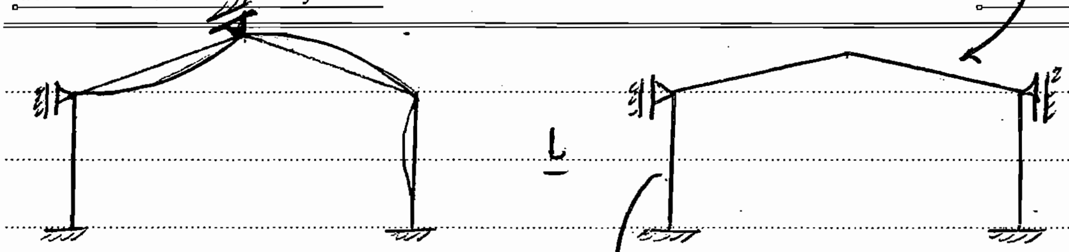
قاب فوق ۳ تا θ و دو تا Δ ی مستقل دارد.

تعداد کلیه گاه های لازم برای قفل شدن کامل = تعداد درجات آزادی انتقالی

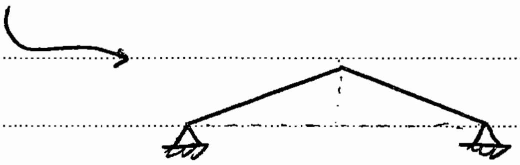
حال قفل، قفل است و فقط می تواند دوران کند

همچنین می توانیم برای قفل کردن سیستم، اینگونه تکیه گاه ها را در نظر بگیریم.

Year. ~~Month.~~ Day. Subject.



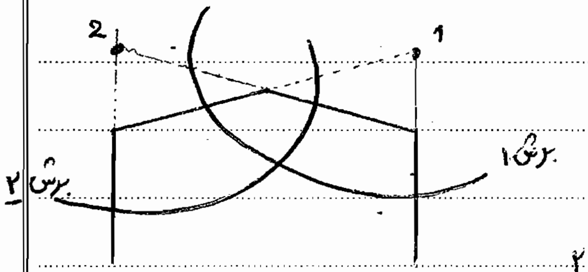
← قائم ستون ها که بسته است، افقی آنها را هم که ما بستیم، بنابراین با شکل زیر معادل است.



← چون دو تا غلطک به آن دادیم ← می شود ۲ درجه ی آزادی انتقالی، ۳ تا دوران هم داریم

۳ درجه ی آزادی دورانی دارد

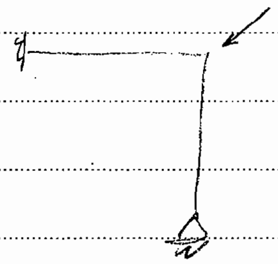
← مجموعاً ۵ مجهول سینماتیکی دارد

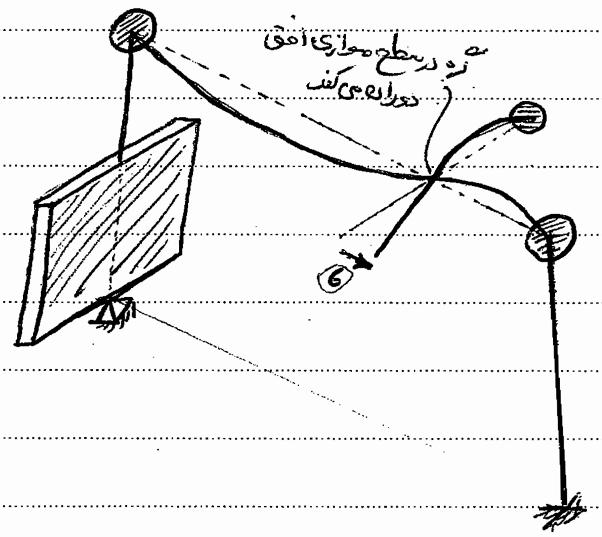


برای نوشتن معادلات برشی در سوله ها:

برش ۱ و لنگر حول ۱ و برش ۲ و لنگر حول ۲

← در حقیقت لنگرها از همین برش ظاهر می شوند.





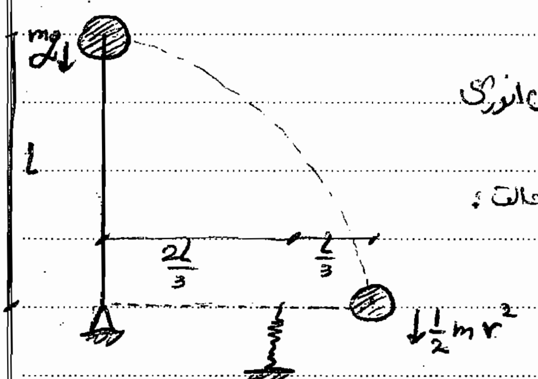
حرکت مستقل درجه ی آزادی 6 :

در تیرها خمش و برش به وجود می آید
در ستون ها پیچش به وجود می آید

← اصل سؤال یک دمپر هم داشته که در امتحان حذف شده بود (میرایی ۱۰ درصد)

حل سؤال سوم امتحان

← سؤال آمده و گفته که کلاً میرایی را ۱۰ درصد در نظر بگیرید.



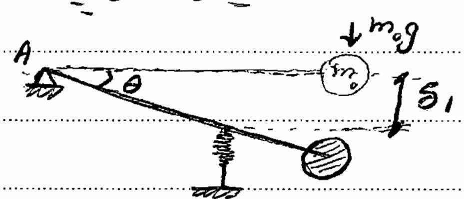
براساس تعادل انرژی $\Rightarrow mgL = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{2gL}$

اگر تراز تغییرشکل سیستم را ← وقتی وزن در سیستم باشد ← ۲ حالت :

① ← اگر وزن را تغییرشکل استاتیکی ببینیم، می توانیم تراز تغییرشکل استاتیکی را مبدأ تغییرشکل دینامیکی در نظر بگیریم

← حال ما می آییم تراز استاتیکی را می کشیم تا بعد ببینیم که در حالت دینامیکی ترک ها قرار خواهد گرفت؛ اگر میله صلب بود (← فقط به صورت زیر می آمد پایین) و مقدار آن را نیز می توان حساب کرد

تراز تغییرشکل استاتیکی اگر میله ها صلب بود :



$\uparrow R = \frac{3}{2} m_0 g \Leftarrow +\circlearrowleft \sum M_A = 0$

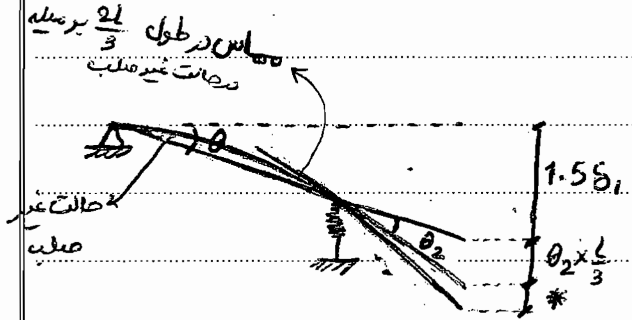
← این عکس العمل در حقیقت مقدار نیروی فنر نیز می باشد.

$$\delta_1 = \frac{R}{k_{فنر}} = \frac{\frac{3}{2}m_0 g}{\frac{EI}{L^3}}$$

$$\theta = \frac{\delta_1}{\frac{2l}{3}}$$ و ← تغییر مکان کلی = $1.5\times\delta_1$ ← تناسب

اما چون میله‌ی ما صلب نیست و خودش هم تغییر شکل می دهد ، پس یک θ_2 ای به وجود می آید.

بین مماس بر تیر و حالت صلب = θ_2



$\Delta_{کل\ سیستم} = \Delta_{st}$

← بدست آوردن θ_2 ← $\dfrac{\text{لنگری که در نقطه‌ی فنر داریم}}{\frac{3EI}{l}}$

← اگر گیردار بود (تکیه‌گاه) پس $\frac{4EI}{l}$ می شد سختی

خمشی ما . اما چون مفصل است ←

سختی خمشی ما = $\frac{3EI}{l}$

صرف نظر نکرده

$\Rightarrow * \Rightarrow m_0 g\times\frac{l}{3} =$ لنگر $\Rightarrow \dfrac{m_0 g\times\frac{l}{3}}{\frac{3EI}{l}} = \theta_2 \to \theta_2\times\frac{l}{3} =$ مقدار آن قسمت از Δ کلی

$\Rightarrow \boxed{\Delta_{کل} = 1.5\delta_1 + \theta_2\times\frac{l}{3}}$

(سختی کل سیستم)

$\dfrac{m_0 g}{\Delta_{کل}} = k_{کل}$ → جرم هم که داریم → به سادگی می توان فرکانس را محاسبه کرد و سؤال را حل نمود.

← اگر ترازمان را در حالت Δ_{st} در نظر بگیریم ← در لحظه‌ی t ، به اندازه‌ی Δ_{st} از ترازمان بالاتر هستیم ⇐

$$\begin{cases} u_{0\,سیستم} = \Delta_{st} \\ \dot{u}_0 = -\sqrt{2gh} \end{cases}$$

← شرایط اولیه‌ی ما

NOTEBOOK

← معادله‌ی ارتعاش آزاد میرا را با شرایط اولیه‌ی فوق می نویسیم .

$$u(t) = e^{-\xi\omega_N t}\left\{\frac{\dot u_0+\xi\omega_N u_0}{\omega_D}\sin\omega_D t + u_0\cos\omega_D t\right\}$$

Year. Month. Day. Subject.

سؤال : در هنگام جدا شدن از فنر مقدار سرعت چقدر است؟ ← یعنی اینکه فنر دوباره
همان صاف باشد، یعنی سیستم برود به شرایط اولیه اش

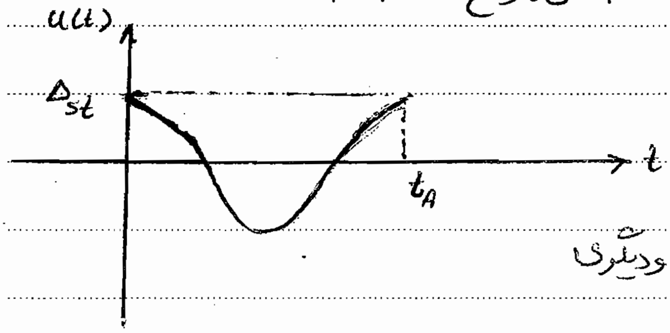
← چون فضا جرم نداشت ← دیگر نوسان نمی کند دیگر ادامه نمی یابد.

وقتی می گوییم افقی است ← می شود حالت جدا شدن ⇐ وقتی سیستم افقی شد

یعنی مقدار $u = \Delta_{st}$ ← u اول افقی بوده، می رود و در تراز صفر قرار می گیرد و از تراز صفر
هم پایین تر می رود (اگر نامیرا بود، دو برابر رفت پایین) و دوباره
بر می گردد و به حالت اولیه می رسد.

← تازه ما در اینجا چون سرعت اولیه هم داریم ⇐ اگر نامیرا بود ← از دو برابر هم بیشتر می رفت پایین

← آن موقعی که دوباره u ما به Δ_{st} رسید، ⇐ آن موقع لحظه ی جدا شدن است.



← $u(t) = \Delta_{st}$ قرار می دهیم

⇓

t را بدست می آوریم.

(در دو لحظه $u = \Delta_{st}$ است، یکی در لحظه ی صفر و دیگری در لحظه ای که مد نظر ماست)

اگر تاریخچه ی ارتعاش فوق را رسم کنیم داریم ←

← اگر پس از برخورد با میله دیگر نتواند که جدا شود ⇐ از لحظه ی t_A به بعد نوسان می کند

← اما چون از فنر جدا می شود ⇐ دیگر از t_A به بعد تاریخچه ی نوسان ندارد و به
درد ما نمی خورد

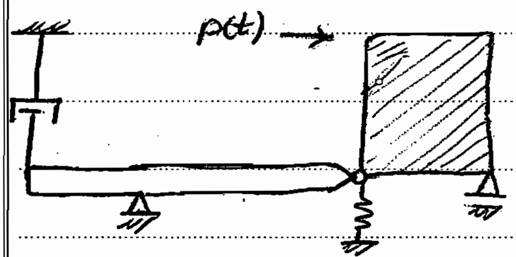
← اگر درست حل کنیم ← تقریباً $t_A = \frac{T_D}{2}$ می شود

→ $\dot u(t_A) = U$ سرعت پرتاب رو به بالا

"Generalized SDOF system" سازه های یک درجه آزاد تعمیم یافته

Year. Month. Day. Subject.

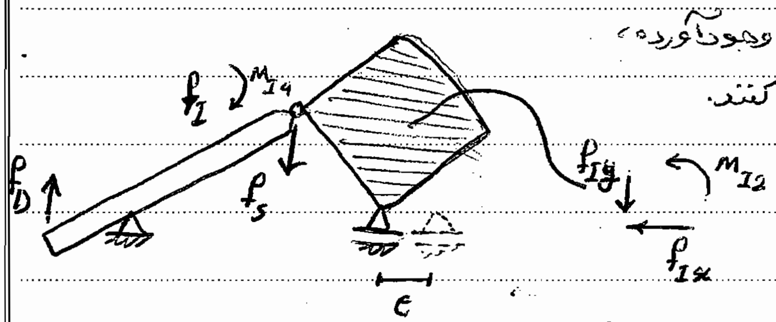
در بسیاری از موارد، در سیستم ما، بیشتر از یک عضو تأثیرگذار است در رفتار سیستم.



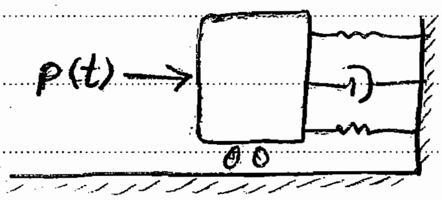
اما همه‌ی حرکت های اعضاء در یک نقطه وابسته است. در این حالت می‌گوییم که "سیستم در حالت تعمیم یافته" است.

اگر در حالت استاتیکی سازه‌ی ما در حالت فوق باشد، (در اثر وزن، افقی ایستاده باشد) حال اگر بار p وارد شود، می‌خواهد هر صفحه را به سمت راست ببرد اما چون مقید است پس صفحه عملاً می‌چرخد.

چون مفصل بین اعضا وابستگی به وجود آورده، پس نمی‌توانند مستقل از هم حرکت کنند.

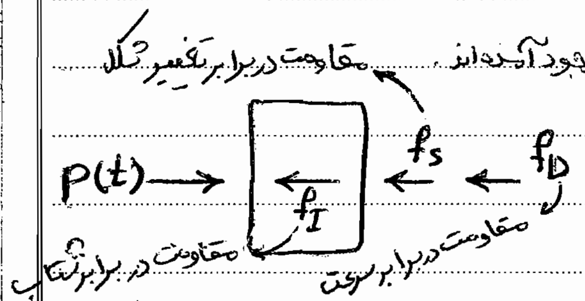


← چون بار دینامیکی بوده ← نیروهای اینرسی اعضا فعال شده



الآن در این لحظه با این تغییر شکل، همه‌ی نیروها به وجود آمده‌اند. (نیروهای اینرسی انتقالی و دورانی جسم صلب و نیروهای مقاوم فنر و کمک فنر)

← f_I ها به خاطر مقاومت در برابر شتاب سیستم به وجود آمده‌اند.

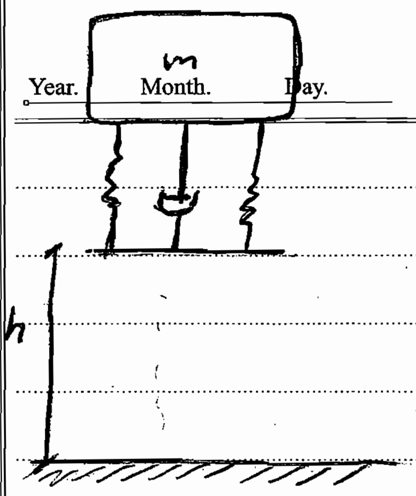


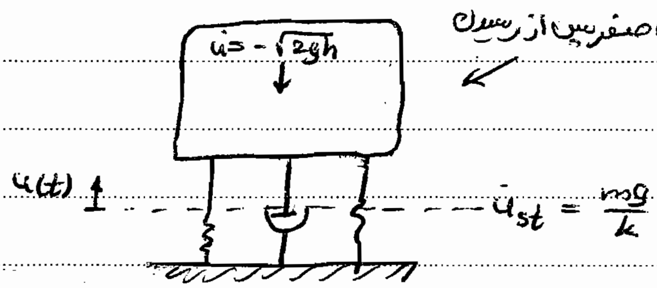
← هر وقت بار دینامیکی داشته باشیم ⇐ اینرسی هم هست.

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t)$$

← یک سیستمی را درنظر بگیریم درحال سقوط :

~~← دو حالت می‌توان به آن نگاه کرد : ۱- ۲-~~





در لحظه‌ی صفر پس از رسیدن به زمین

(مهم)

← اگر مبدأ تغییر مکان را حالت استاتیکی درنظر بگیریم : $\dot{u}_0 = -\sqrt{2gh}$, $u_0 = \frac{mg}{k}$

← به محض تماس با زمین کرنومتر را می‌زنیم (درحقیقت زمان آغاز می‌شود)،

← پس از برخورد به زمین شروع به ارتعاش آزادی کند، جمع می‌شود و بعد باز می‌شود و در یک لحظه‌ای دوباره از زمین کنده می‌شود. لحظه‌ی کنده شدن از زمین لحظه‌ی خیلی مهمی است، از لحاظ محاسباتی، در این حالت خاص چون دمپر هم داریم پس قبل از حالت استاتیکی از زمین جدا می‌شود

عکس‌العمل زمین

$$R(t) = \underbrace{mg}_{R_{st}} + k\,u(t) + c\,\dot{u}(t)$$

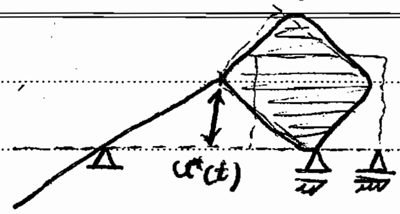
← هروقت صفر شد یعنی از زمین جدا شده

$$R(t) = 0 \Rightarrow t_{sep}$$ بدست می‌آید

t_{sep} ← زمان جدا شدن از زمین ...

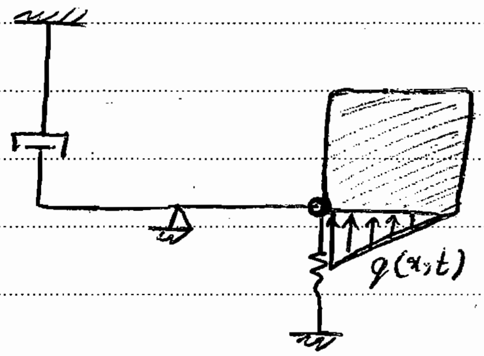
۶ بهمن ۱۴۰۰

Year. Month. Day. Subject.



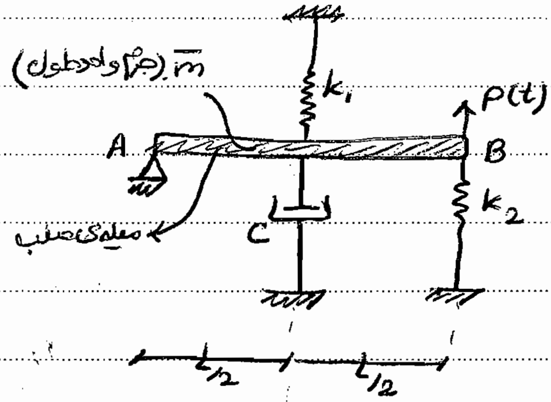
$$m^* \ddot{u}^* + c^* \dot{u}^* + k^* \cdot u^* = p^*(t)$$

* تعمیم یافته ⇐ پارامتر*



f_I = نیروی اینرسی انتقالی

که در مقابل شتاب مرکز ثقل خودش را نشان می‌دهد.

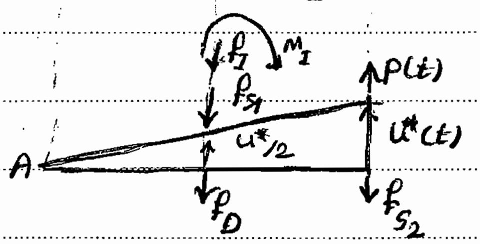


$$f_{S_2} = k_2 \times u^*(t)$$

$$f_{S_1} = k_1 \times \frac{u^*}{2}$$

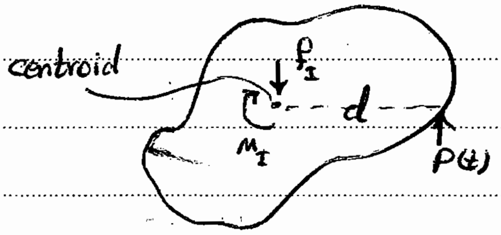
$$f_D = c \times \frac{\dot{u}^*}{2}$$

$$f_I = (\bar{m} L) \times \left(\frac{\ddot{u}^*}{2}\right)$$



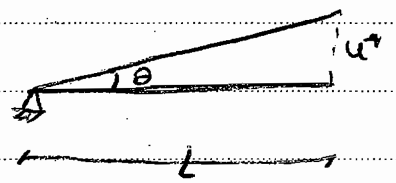
$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \Rightarrow (P(t) \times L) = f_{S_2} \times L + f_D \times \frac{L}{2} + f_{S_1} \times \frac{L}{2} + f_I \times \frac{L}{2} + M_I$$

جسم صلب



$$F = F_I = ma \longrightarrow a = \frac{F_I}{m}$$

$$M_I = m_\theta \times \ddot{\theta} \longrightarrow \ddot{\theta} = \frac{M_I}{m_\theta}$$



$$\theta = \frac{u^*}{L} \quad , \quad \dot{\theta} = \frac{\dot{u}^*}{L} \quad , \quad \ddot{\theta} = \frac{\ddot{u}^*}{L}$$

$$\Rightarrow p(t) = f_{s_2} + \frac{1}{2} f_D + \frac{1}{2} f_{s_1} + \frac{1}{2} f_I + \frac{M_I}{L}$$

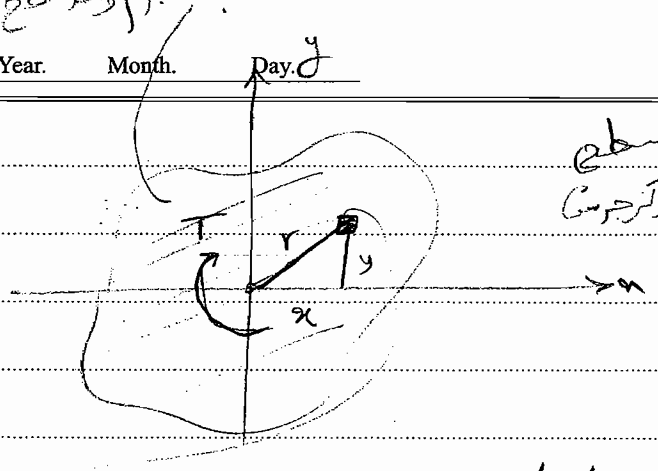
$$\rightarrow p(t) = k_2 u^* + \frac{1}{2} c \frac{\dot{u}^*}{2} + \frac{1}{2} k_1 \frac{u^*}{2} + \frac{1}{2} (\bar{m}L)\left(\frac{\ddot{u}^*}{2}\right) + \frac{\left(\frac{\bar{m}L^3}{12}\right) \times \frac{\ddot{u}^*}{L}}{L}$$

$$\Rightarrow p(t) = \ddot{u}^* \underbrace{\overbrace{\left(\frac{\bar{m}L}{12} + \frac{\bar{m}L}{4}\right)}^{\frac{\bar{m}L}{3}}}_{m^*} + \dot{u}^* \underbrace{\left(\frac{c}{4}\right)}_{c^*} + u^* \underbrace{\left(\frac{k_1}{4} + k_2\right)}_{k^*}$$

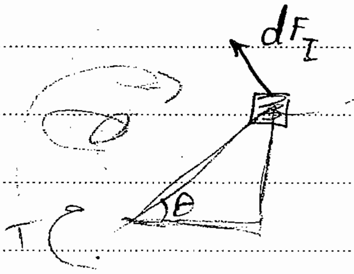
صلب با جرم واحد سطح γ

Year. Month. Day. Subject.

یک جسم مسطح
حول مرکز جرمش



$$dA = dm = \gamma(x,y) \cdot dA \quad (dA = dx \cdot dy)$$



$$r \cdot \theta \longrightarrow r \cdot \ddot{\theta}$$

$$dF_I = \gamma(x,y) \cdot dA \cdot r \cdot \ddot{\theta}$$

بازوی

$$dm_I = dF_I \cdot r$$

$$T = M_I = \int_A dm_I = \ddot{\theta} \underbrace{\int_A \gamma(x,y) \cdot r^2 \cdot dA}_{m_\theta}$$

جرم دورانی جسم

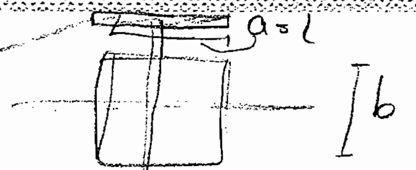
$$m_\theta = \int_A \gamma(x,y)\, r^2 \cdot dA$$

$$\gamma(x,y) = cte \Rightarrow m_\theta = \gamma \int_A \underbrace{r^2}_{x^2+y^2} dA = \gamma\left(\int x^2 dA + \int_A y^2 dA\right)$$

$$= \gamma\,(\underbrace{I_x + I_y}_{I_o}) =$$

ممان اینرسی سطح (دورانی) $= M_I$

$b \ll a$



Year. Month. Day. Subject.

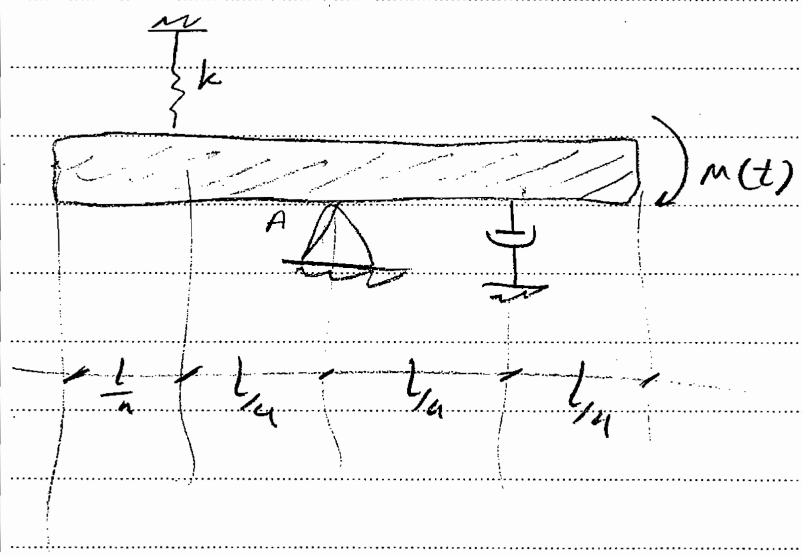
$$m_\theta = \gamma \frac{ab^3}{12} + \frac{ba^3}{12} = \gamma_{ab}\left(\frac{a^2+b^2}{12}\right)$$

$$m_\theta = \frac{ml^2}{12} = \frac{\bar{m}l^3}{12}$$ طول

$$\Rightarrow M_I = \frac{\bar{m}l^3}{12} \times \frac{\ddot{u}^*}{l} \qquad f_I = \bar{m}l \times \frac{\ddot{u}^*}{2}$$

$$\boxed{\Rightarrow \underbrace{\frac{\bar{m}l^3}{3}}_{m^*}\ddot{u}^* + \underbrace{\frac{c}{4}}_{c^*}\dot{u}^* + \underbrace{\left(\frac{k_1}{4}+k_2\right)}_{k^*} u^* = p(t)}$$

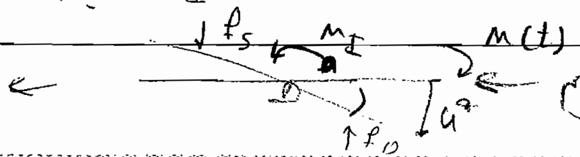
→ در این حالت — استثناء — $\boxed{p(t) = p^*(t)}$



(تمرین)

فقط — چون مرکز ثقل — f_I نداریم ← ΣM_A

M_I داریم



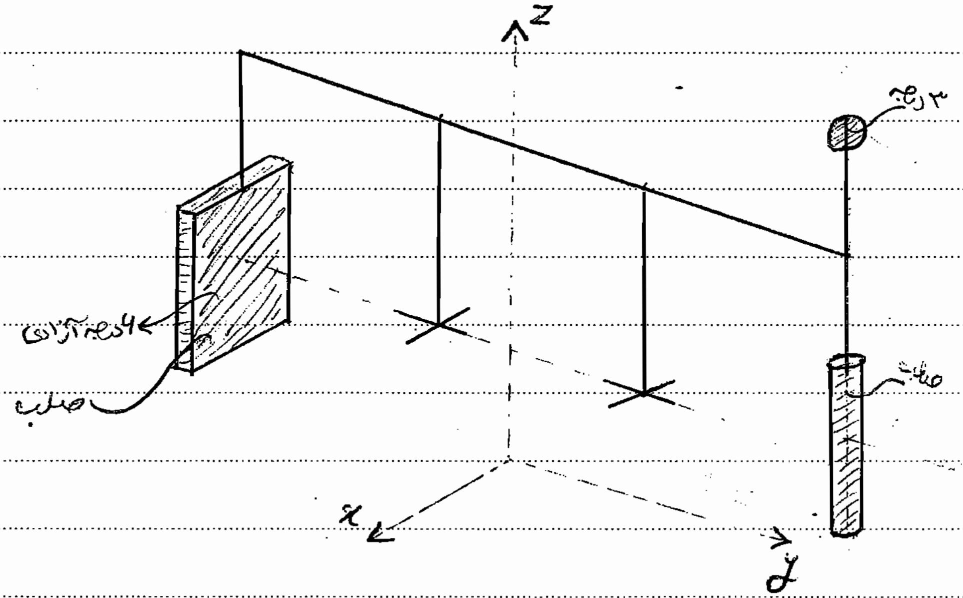
۸۸۷۶ ۴۴۲۶

تمرین ۱۰

Year. Month. Day. Subject.

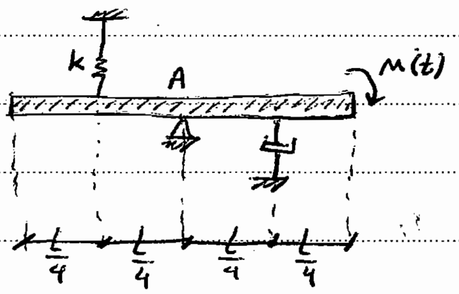
الف) تعیین تعداد درجات آزادی (با صرف نظر از تغییر شکل‌های محوری)

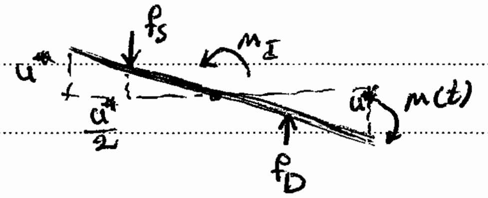
ب) رسم اشکال نشان دهنده‌ی حرکت مستقل درجات آزادی در راستای محور x و با طول آن محور



۳ درجه‌ی آزادی ؟

تمرین)





$$f_S = k\frac{u^*}{2}$$

$$f_D = c\frac{\dot{u}^*}{2}$$

$$M_I = m_\theta \cdot \ddot{\theta} = \frac{\bar{m}L^3}{12} \times \frac{2\ddot{u}^*}{L}$$

$$\theta = \frac{u^*}{\frac{L}{2}} = \frac{2u^*}{L} \ ; \ \dot{\theta} = \frac{2\dot{u}^*}{L} \ , \ \ddot{\theta} = \frac{2\ddot{u}^*}{L}$$

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \Rightarrow m(t) = k\frac{u^*}{2}\times\frac{L}{4} + c\frac{\dot{u}^*}{2}\times\frac{L}{4} + \frac{\bar{m}L^2}{6}\ddot{u}^*$$

$$\Rightarrow m(t) = \underbrace{\ddot{u}^*\left(\frac{\bar{m}L^2}{6}\right)}_{m^*} + \underbrace{\dot{u}^*\left(\frac{cL}{8}\right)}_{c^*} + \underbrace{u^*\left(\frac{kL}{8}\right)}_{k^*}$$

Year. Month. Day. Subject.

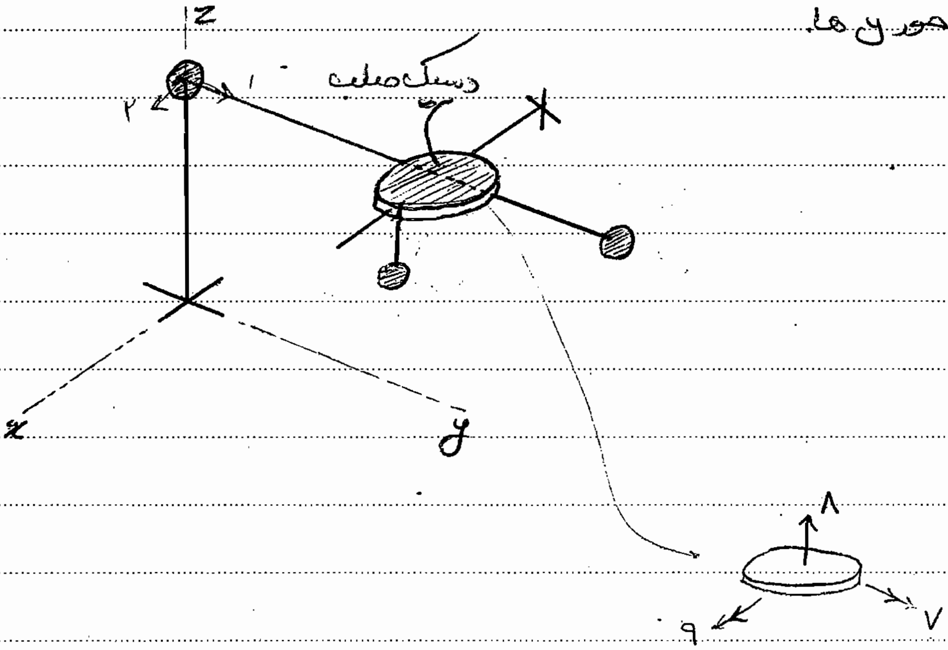
امام موسی کاظم علیه السلام:
نیرومندترین مردم کسی است که خشم خویش را نگه دارد.

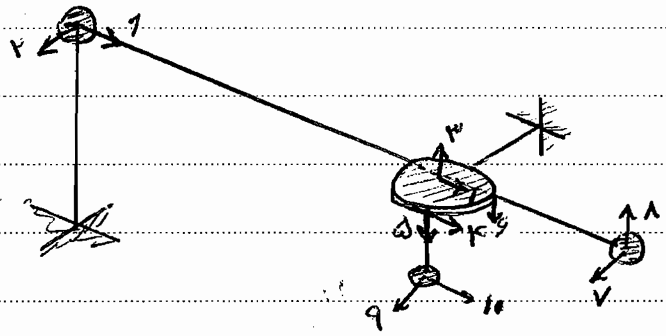
NOTEBOOK

(با صرف‌نظر از تغییر شکل محوری)

الف) تعیین مقدار درجات آزادی کل سازه

ب) رسم اشکال نشان دهنده‌ی حرکت مستقل درجات آزادی در راستای محورها و حول محورها.





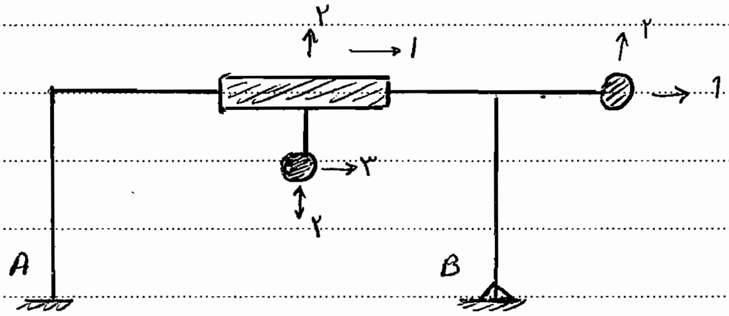
امام جواد علیه السلام:

عالمان به سبب زیادی جاهلان غریبند.

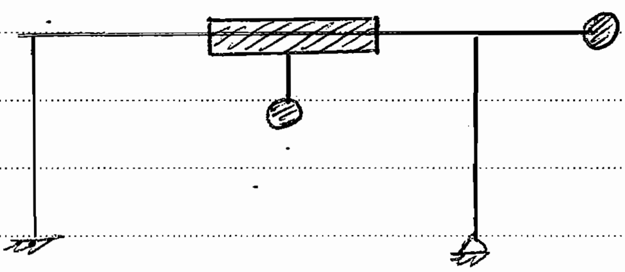
Year. Month. Day. Subject.

NOTEBOOK

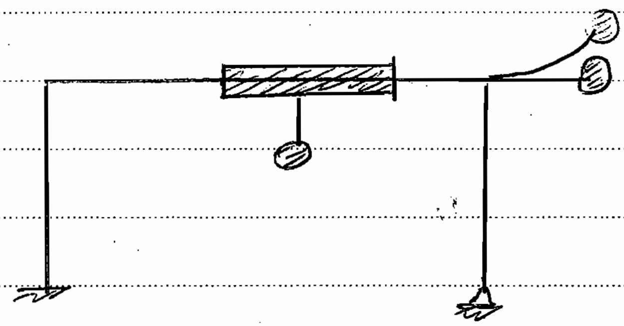
سازه‌ی صفحه‌ای مقابل متشکل از یک جرم صلب گسترده و دو جرم متمرکز می‌باشد که توسط عناصر خمشی به هم متصل شده‌اند. با صرف نظر از تغییر شکل‌های محوری اعضا، شکل‌های نشان دهنده‌ی حرکت مستقل درجات آزادی را رسم نمایید. (A گیردار و B مفصل)



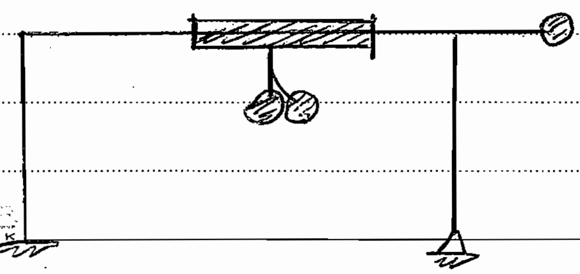
حرکت مستقل ۱:



حرکت مستقل ۲:



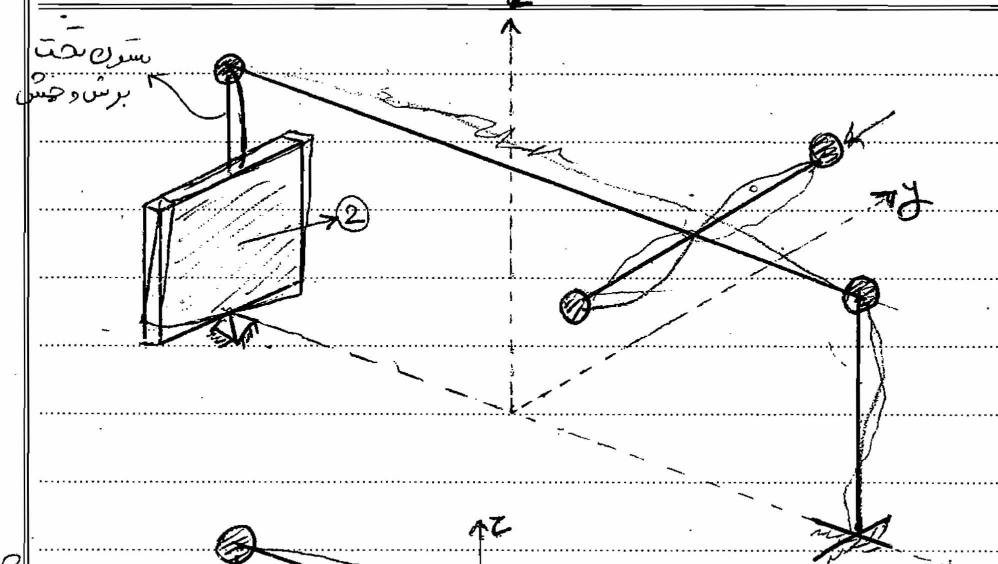
حرکت مستقل ۳:



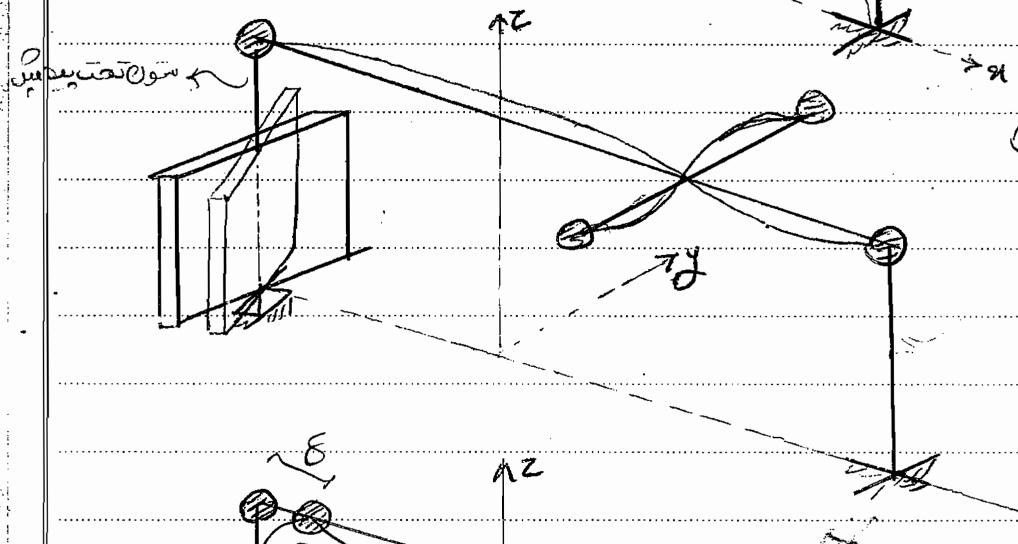
امام هادی علیه السلام :
خشم بر زیردستان از پستی است .

Year. Month. Day. Subject.

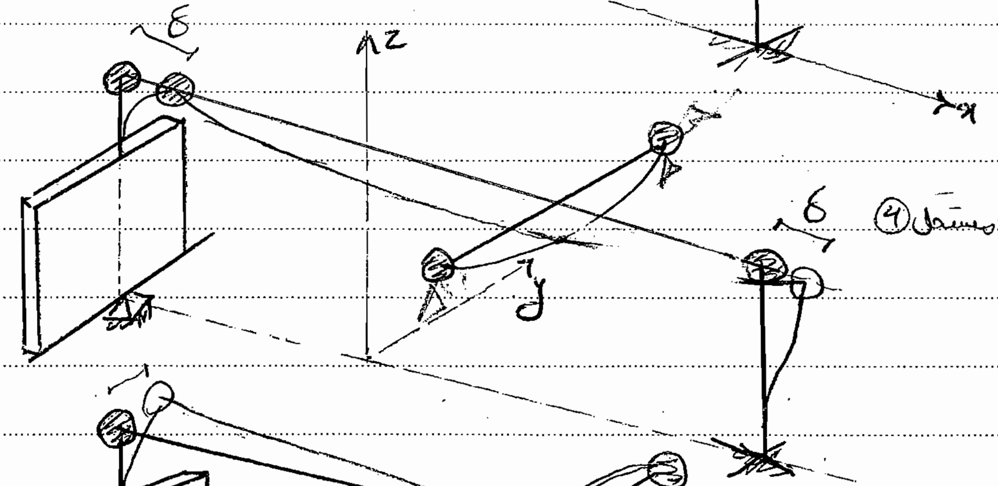
NOTEBOOK



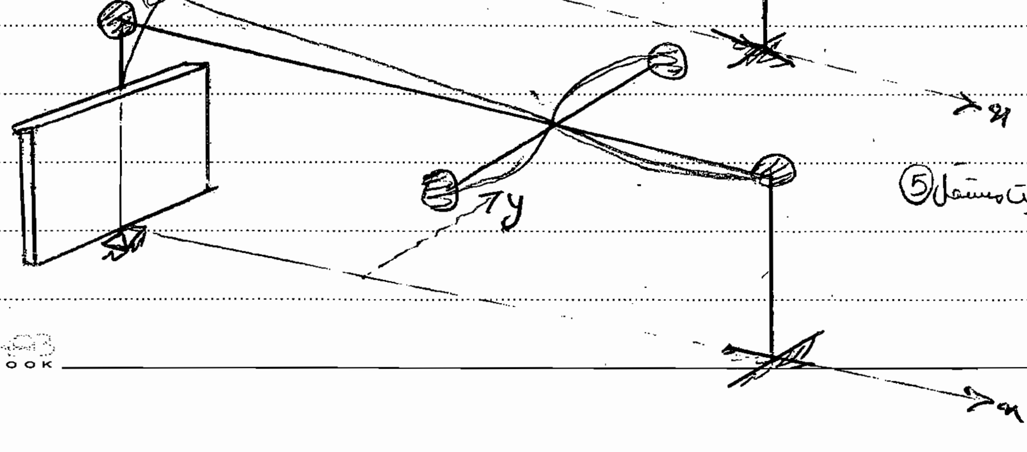
حرکت مستقل ②



حرکت مستقل ③



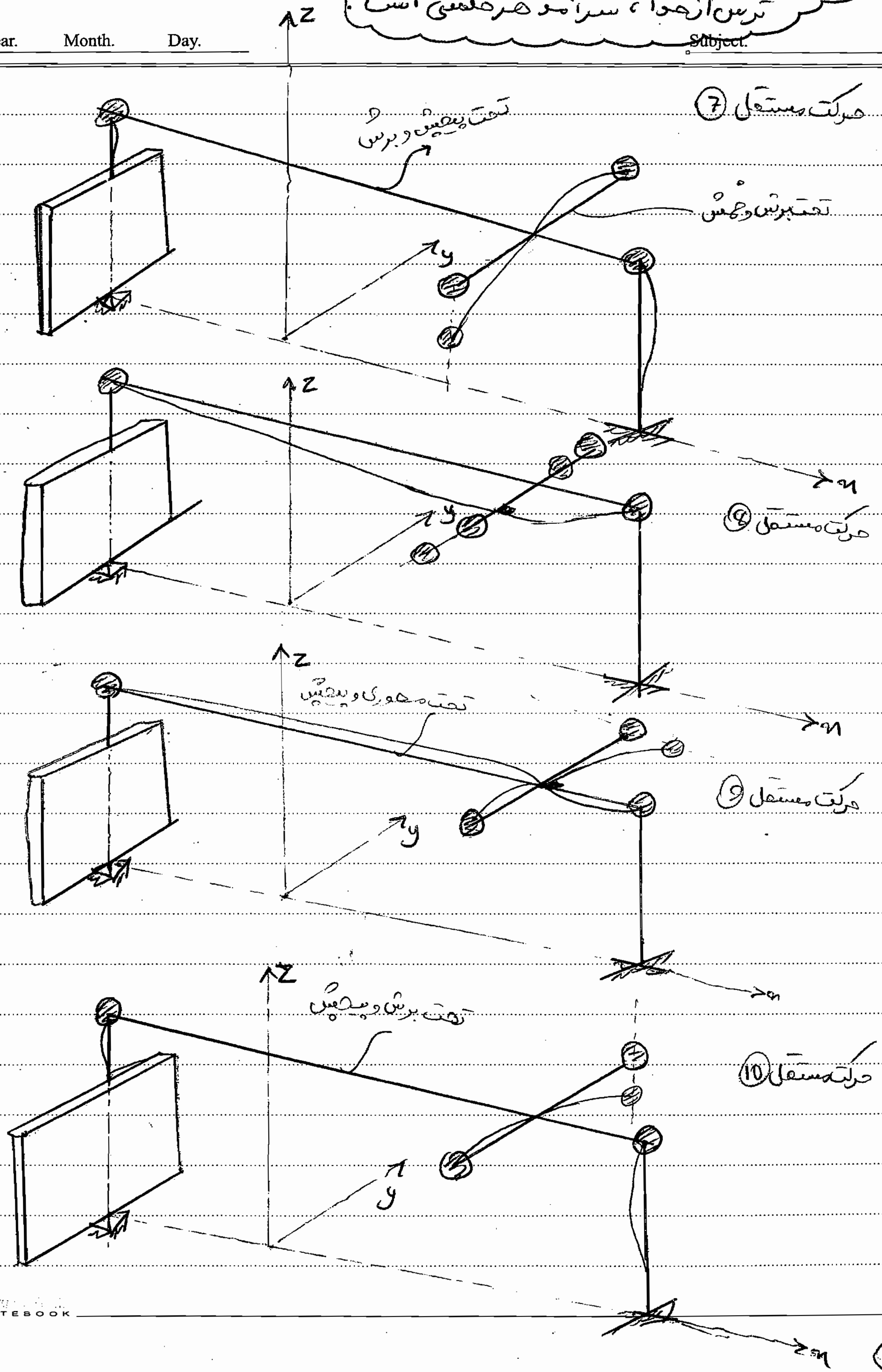
حرکت مستقل ④



حرکت مستقل ⑤

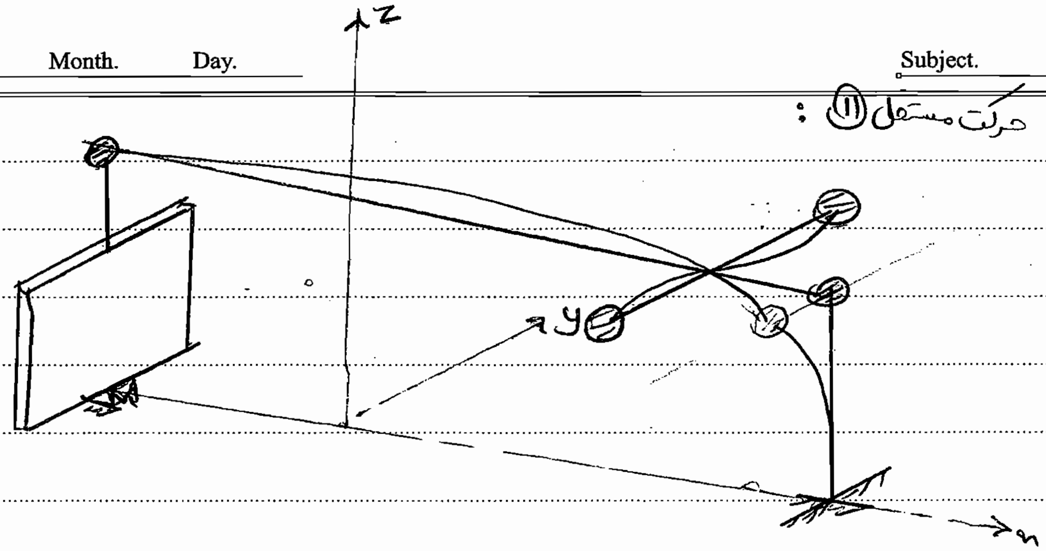
حضرت محمد صلی ا... علیه و آله وسلم:
ترس از خدا، سرآمد هر حکمتی است.

Year. Month. Day. Subject.



Year. Month. Day. Subject.

حرکت مستقل (۱۱) :



۱۰ شهریور ...

Year. Month. Day. Subject.

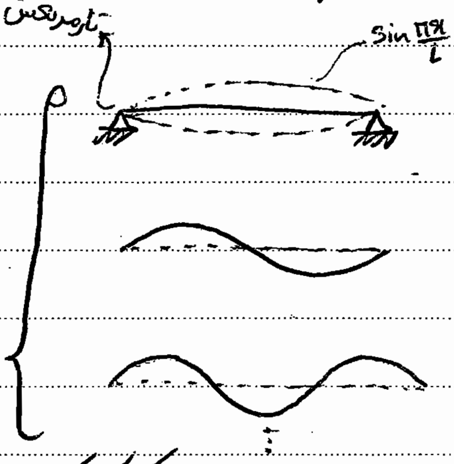
~~در مسائلی که تا به حال بررسی کردیم ، اجسام صلب بودند ولی جرم گسترده هم~~

می‌تواند مطرح شود . در سیستم‌های گسترده :

EI (سختی خمشی)

$\bar{m}$ (جرم بر واحد طول)

تار مرتعش



$\sin \frac{\pi x}{L}$ هارمونی اول

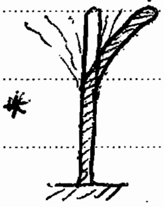
هارمونی دوم

هارمونی سوم

حال که EI دارد و می‌تواند خم شود ، می‌تواند مانند تار مرتعش که در دبیرستان هم داشتیم ارتعاش کند :

تا اینکه کم‌کم می‌تواند صوت تولید کند.

اگر کشش اولیه در آن باشد ، فرکانسش آنقدر بالا است که همان ارتعاش اولش هم صوت تولید می‌کند :



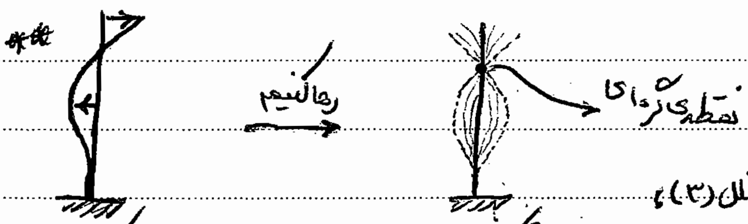
سازه‌ی فوق هم ( ) مانند همان تار است ، اگر انتهایش را به یک طرف بکشیم و سپس رهایش کنیم ، وقتی رهایش می‌کنیم به صورت روبرو ارتعاش می‌کند :

(مثل یک خط‌کش که انتهایش را بکشیم) که اگر انرژی در سیستم تلف نشود

که در مورد مثال خط‌کش ، میرایی بیشتر از میرایی ذاتی خودش ، مقاومت هواست که هم آن مؤثر است .

دقیقاً به همان میزان که به سمت راست کشیده شده در سمت دیگر هم برمی‌گردد و از لحاظ تئوری این ارتعاش تا ابد ادامه پیدا می‌کند .

اما اگر سازه‌ی فوق را به گونه‌ای تحت نیرو قرار دهیم که به صورت شکل (۱) درآید ، (گفتیم که EI دارد ، یعنی صلب نیست ، اگر صلب بود نمی‌توانستیم این کار را بکنیم) پس از برگشت و رسیدن به حالت نهایی در سمت چپ ، به صورت شکل (۲) در می‌آید ، و به همین صورت ارتعاش می‌کند و یک نقطه‌اش تقریباً جابجا نشده و تنها بدنه‌اش جابجا می‌شود که به آن نقطه‌ی گره‌ای می‌گوییم .

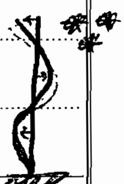


رها کنیم

نقطه‌ی گره‌ای

شکل (۱) شکل (۲)

و اگر تعداد نیروها را بیشتر کنیم به صورت شکل (۳) :



مودهای بالاتر تولید می‌شود (مود سوم) و از لحاظ تئوری به همین منوال می‌توان بی‌نهایت مود تولید نمود.

(* * ، ** ، *)

مود سوم مود دوم مود اول

شکل (۳)

NOTEBOOK

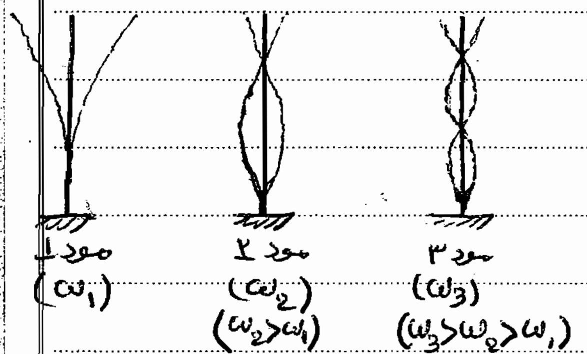
* از لحاظ تئوری، سیستم های پیوسته (مانند مثال فوق)، سیستم های ∞ درجه ی آزادی هستند

← (با جرم و سختی گسترده = سیستم پیوسته)

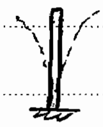
~~اما از لحاظ فیزیکی یا در واقعیت بیشتر از سه یا چهار حالت سازه را عملاً نمی توان تحریک نمود،~~

زیرا آنقدر فرکانس سیستم می رود بالا (سریعتر ارتعاش می کند) که عملاً برای فرکانس های خیلی بالاتر، نمی توان سیستم را تحریک نمود و چون در زلزله هم عملاً فرکانس ها بیشتر از 33 هرتز نیست،

و اگر سازه ی ما خیلی سخت باشد و فرکانسش بالای 30 هرتز باشد، عملاً زلزله دیگر با آن کاری ندارد و صلب رفتار می کند (مانند زمین می شود) ولی اگر نرم تر باشد، دیگر به صورت مودی ارتعاش می کند (ساختمان های بلند)

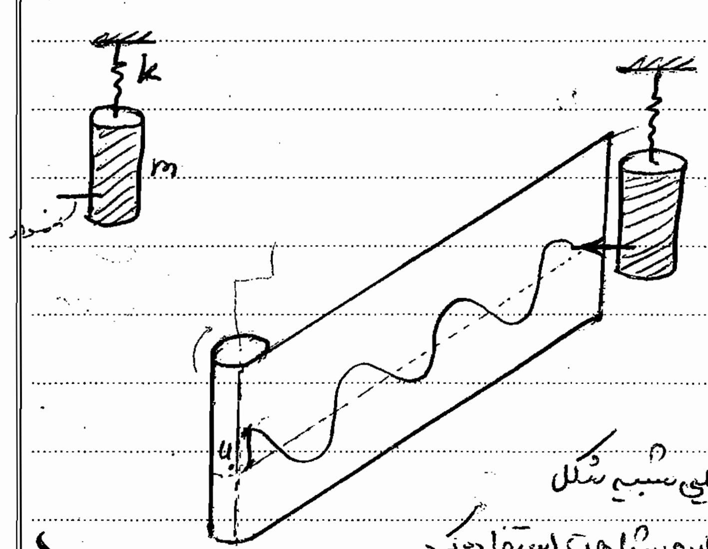


مودهای دیگر

← در حقیقت، این حالت () فرکانس اصلی سیستم می باشد، که از همه هم انرژی اش کمتر است

(← به این حالت کم انرژی (فرکانس پایین) اصطلاحاً می گوییم فرکانس اول یا فرکانس اصلی سازه)

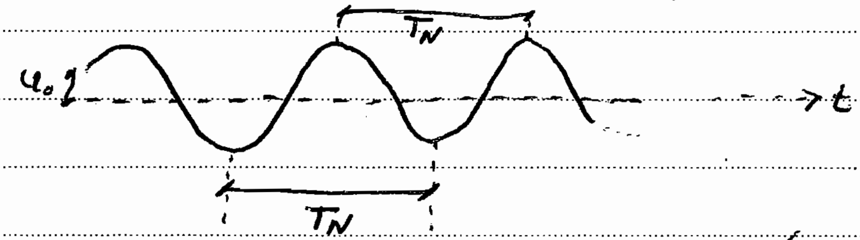
این حالت را می توان شبیه دانست با حالت ارتعاش یک وزنه ای که یک مداد به آن متصل است و به وسیله ی یک فنر آویزان است به گونه ای که ارتعاش این وزنه توسط مداد روی یک رول کاغذ ترسیم می شود (ارتعاش چون مقداری آن را کشیده ایم پایین و رهاش کرده ایم)



حضرت محمد صلی الله علیه و آله و سلم:
من برای امت خود از دو چیز بیش از هر چیز
خائف و ترسانم: اول هوای نفس و
دوم آرزوی دراز.

← می بینیم که شکل ترسیم شده ی فوق، خیلی شبیه شکل sin و cos ی است، و آقای رایلی هم از این شباهت استفاده کرد و رابطه ی صفحه ی بعد را بدست آورد.

رابطه : $u(t) = u_0 \cos\omega_N t$ ، $\omega_N = \frac{2\pi}{T_N}$



و در نظر گرفت (با توجه به شکل) که سیستم در زمان هایی که به بالاترین و پایین ترین نقطه ی ارتعاش می رسد، سرعتش در آن لحظات صفر است و در لحظه هایی که تغییر مکان صفر می شود، چون شیب بیشینه است پس سرعت بیشینه است

$$\dot{u}(t) = -\omega_N u_0 \sin\omega_N t$$

تغییر مکان بیشینه ⟸ سرعت صفر

تغییر مکان صفر ⟸ سرعت بیشینه

اگر انرژی سیستم را در هر لحظه محاسبه کنیم :

$$E_{total} = E_k + E_S = \frac{1}{2}m\dot{u}^2 + \frac{1}{2}ku^2$$

انرژی جنبشی جرم ، انرژی پتانسیل فنر

k : kinetic (جنبشی)

S : Spring (فنر)

منظور همان انرژی پتانسیل است

$$E_{total} = \frac{1}{2}m(\omega_N u_0 \sin\omega_N t)^2 + \frac{1}{2}k(u_0 \cos\omega_N t)^2$$

وقتی سرعت صفر است، u ماکزیمم است و بالعکس پس :

$$E_{total} = \boxed{E_{k_{max}} = E_{S_{max}}}$$

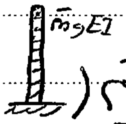
$$\begin{cases} E_{S_{max}} = \frac{1}{2}ku_0^2 \\ E_{k_{max}} = \frac{1}{2}m\omega_N^2 u_0^2 \end{cases} \Longrightarrow k = m\omega_N^2 \Longrightarrow \boxed{\omega_N = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

یعنی همان بخشی که در ابتدای این درس به آن رسیده بودیم.

امام حسن علیه السلام: به خوبی معاشرت کردن با مردم، کمال عقل است.

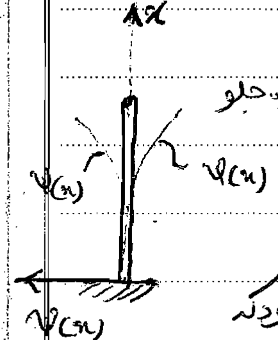
Year. Month. Day. Subject.

رایلی به این نتیجه رسید که قانون بقای انرژی، برای محاسبه‌ی فرکانس سیستم‌ها مناسب است.

در ادامه شروع به بررسی سیستم () نمود و به این نتیجه رسید که اگر برای چنین سیستمی هم بتوان سختی و جرم تعمیم یافته‌ای بدست آورد می‌تواند فرکانس سیستم را پیدا کند. (چه اساتیدی مثل رایلی بشیم و چه بیشتر و چه کمتر فرکانس سیستم ثابت است!)

← برای بدست آوردن m^* و k^* مشکلاتی بود:

مثلاً آیا می‌توانیم $\bar{m}l$ را به عنوان m^* در نظر بگیریم؟ خیر، همه‌ی جرم که نوسان یکسان (ارتعاش) نمی‌کند، بلکه هرچه به سمت انتهای سازه‌ی فوق نزدیک می‌شویم، ارتعاش سیستم بیشتر است.



و k هم در هر نقطه‌ای متفاوت است، هرچه به سمت انتهای سازه جلو می‌رویم، سازه نرم‌تر می‌شود.

رایلی برای معادل‌سازی، مجدداً از انرژی استفاده نمود:

کشت سازه را که می‌کشیم (مانند شکل روبرو) یک انرژی در آن ذخیره می‌شود که می‌توان آن را بدست آورد: (روابط تحلیل سازه‌ای)

ضریب اصلاح مقطع

$$E_S = \underbrace{\int_S \frac{[M(x)]^2}{2EI(x)}dx}_{*} + \int_S \frac{[N(x)]^2}{2EA(x)}dx + \int_S \frac{\alpha[V(x)]^2}{2GA(x)}dx + \int_S \frac{[T(x)]^2}{2GJ(x)}dx$$

در سازه‌هایی مانند تیر و قاب‌های معمولی اثر * نسبت به بقیه خیلی بیشتر است

و می‌دانیم که رابطه‌ی M و EI به صورت زیر است:

$$\boxed{M(x) = EI(x)\cdot\psi''(x)} \quad **$$

انحنا

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

$$\rho = \frac{1}{\psi'' + (\psi')^{3/2}} \Rightarrow \rho = \frac{1}{\psi''}$$

ناچیز

شعاع انحنا

امام حسین علیه السلام: کسی که دوست دارد روزیش افزون گردد، صله‌ی رحم کند

تعریف رحم: افرادی که حتی تا نسل‌های دور با ما در رحم یک مادر بوده‌اند.

امام حسن علیه السلام : باگذشت ترین مردم، کسی است که در زمان قدرت داشتن، گذشت کند.

$[m(x)]^2$

Year. Month. Day. Subject.

$$(*) \text{ و } (**) \Rightarrow E_{S_{max}} = \int_S \frac{EI(x) \times EI(x) \times [\psi''(x)]^2}{2\,EI(x)}\,dx = \frac{1}{2}\int_S EI(x)[\psi''(x)]^2\,dx$$

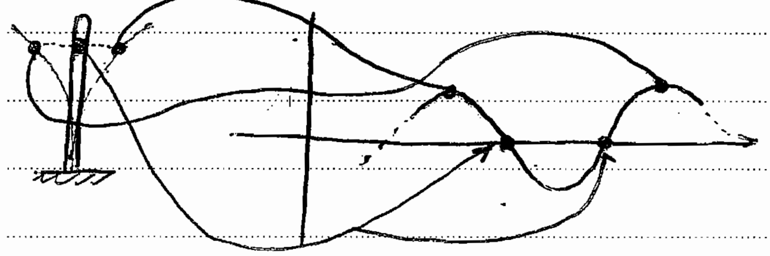
انرژی تغییر شکل ناشی از خمش بر اساس شکل تغییر شکل یافته‌ی سازه

در عین حال می‌دانیم که انرژی جنبشی هم در این سیستم بخواهد محاسبه شود

جابجایی (u)

$$E_{K_{max}} = \frac{1}{2}\int \bar{m}(x)\,.\,\omega_N^2\,[\psi(x)]^2\,dx$$

اگر یک ذره از سازه‌ی با جرم پیوسته‌ی مذکور را به عنوان یک جرم، مانند گذشته بررسی کنیم داریم:



تغییر مکان صفر $\Leftarrow$ سرعت max

سرعت صفر $\Leftarrow$ تغییر مکان max

سازه‌ی فوق شامل جزءهایی با نوسان مانند مورد فوق می‌باشد.

امام سجاد علیه السلام : فرمانبردن از فرمانروایان الهی کمال عزت است.

$$\underbrace{E_{S_{max}} = E_{K_{max}}}$$

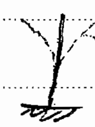
$$\Rightarrow \omega_N^2 = \frac{\int_S EI(x)\,[\psi''(x)]^2\,dx \;\rightarrow k^*}{\int_S \bar{m}(x)\,[\psi(x)]^2\,dx \;\rightarrow m^*}$$

Year. Month. Day. Subject.

حضرت محمد صلی الله علیه و آله وسلم :

کسی که نماز را سبک بشمارد به شفاعت من دست نیابد و به خدا سوگند که در کنار حوض کوثر بر من وارد نشود

اگر در آزمایشگاه به سازه‌ی فوق یک بار رندوم وارد کنیم، (بار زلزله هم رندوم است)، سیستم شبیه به مودهای 2 یا 3 و ... ارتعاش می‌کند (نامنظم ارتعاش می‌کند) ولی به محض اینکه بار را قطع کنیم، وارد مود 1 می‌شود چون انرژی حالت های 2 و 3 و ... خیلی بالاست و سیستم دوست ندارد که در آن حالات باشد و برمی‌گردد و در مود 1 ارتعاش خود را ادامه می‌دهد.

سؤال اینجاست که این شکل ما  واقعاً شکل ارتعاش سیستم است؟

نه، در واقعیت کمی فرق می‌کند، چون در حالت ارتعاشی، نیروهایی که در هر نقطه دارند تأثیر می‌گذارند، دقیقاً متناظر با جرم سیستم و دامنه‌ی ارتعاش هر نقطه اند.

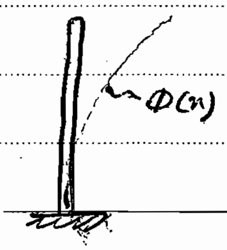
می‌بینیم که معادله‌ی یک درجه‌ی آزاد در حالت نامیرا به صورت زیر است:

$$\underbrace{m\ddot{u}}_{f_I} + \underbrace{ku}_{f_s} = 0$$

پس در هر لحظه‌ی ارتعاش آزاد نامیرا می‌توان نوشت:

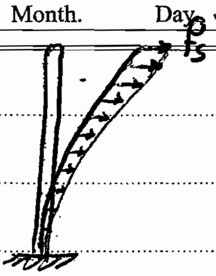
$$f_I = -f_s$$

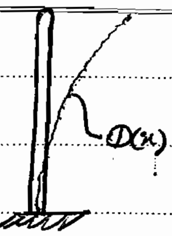
در حقیقت:



شکل واقعی ارتعاش ما $\Phi(x)$ است و آن $\psi(x)$ که در نظر می‌گرفتیم در حقیقت حدسی از $\Phi(x)$ بوده است:

Year. Month. Day. Subject.

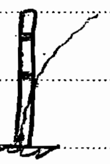




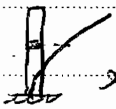
در هر نقطه از این سازه، ما نیرویی مانند
f_s وارد کرده ایم به صورت روبرو:
(f_s مانند یک بار گسترده به سازه وارد می‌شود)
که در هر نقطه این نیروی f_s باید متناسب باشد با جرم در آن نقطه
(چون اینرسی متناسب است با m)

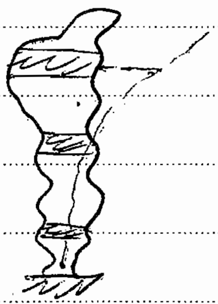
$$\rightarrow f_I = m\ddot{u} = -m\omega_n^2 u_0 \cos\omega_n t$$
$$f_s = ku = k u_0 \cos\omega_n t$$

$\longrightarrow -f_I = f_s \Rightarrow$ باز هم $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ بدست می‌آید.



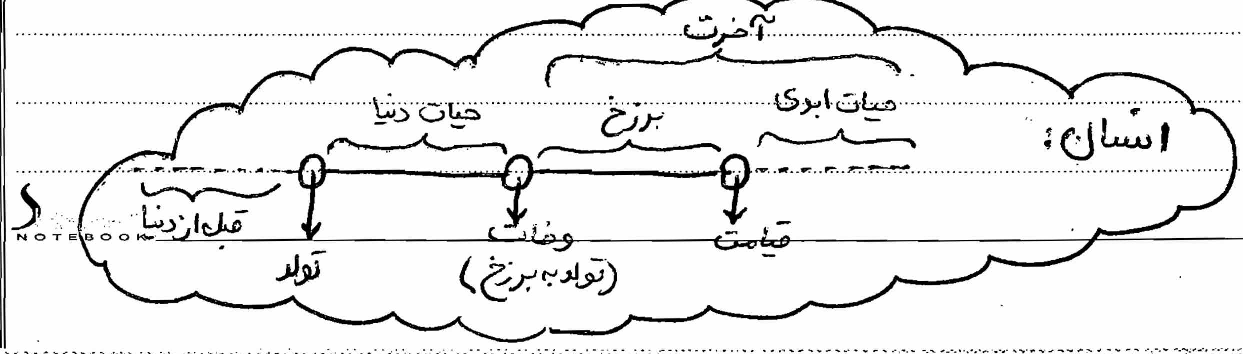
اگر شکل اولیه‌ی ارتعاش به صورت [شکل] باشد، هر نقطه‌ای یک u_0 برای خودش دارد به گونه‌ای که اگر آن نقطه را با آن u_0 رها سازی کنیم به صورت فوق ارتعاش می‌کند.

حالا f_s آن نقطه را برده‌ایم جلو  حال f_I می‌خواهد آن را برگرداند، پس به محض اینکه آن را رها می‌کنیم ...
نیروی ...



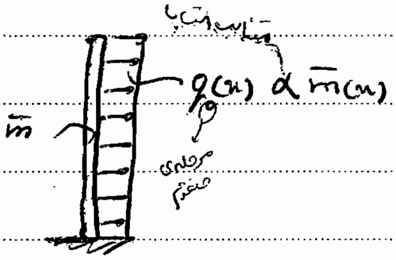
ممکنه مقطع تیر یکنواخت نباشد و به صورت باریک و پهن باشد؛
برای هر نقطه‌ای m آن متفاوت است،
برای هر نقطه u_0 و m خاص خودش را داریم، که متغیر است
و ω ثابت است.

پس باید f_I که از نظر مقدار برابر f_s است، با جرم و دامنه در هر نقطه متناسب باشد.

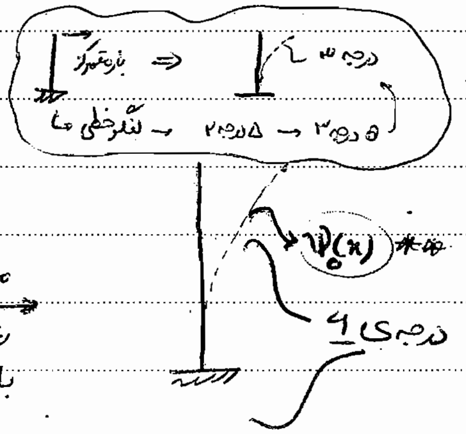


پس اگر ما بیاییم و با یک شکلی که به بارگذاری سیستم شباهت داشته باشد (متناسب باشد) شروع کنیم ، نیروی گسترده‌ای در نظر بگیریم متناسب با جرم (حداقل کاری که می‌توانیم بکنیم این است که متناسب با جرم را در ابتدا در نظر بگیریم)

یک نیروی متناسب با جرم را می‌گذاریم روی سیستم :



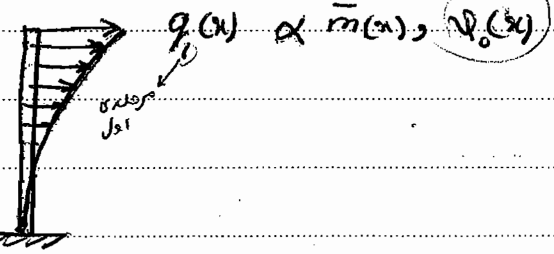
ما تناسب با جرم را رعایت کرده‌ایم ولی تناسب با دامنه را رعایت نکرده‌ایم .

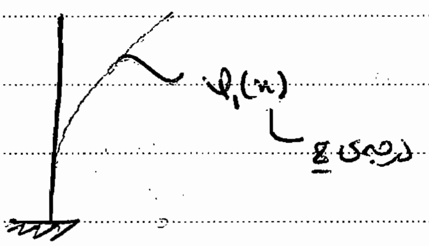


q ثابت ⟸ برش خطی ⟸ لنگر درجه 2 ⟸ درجه 3 ⟸ درجه ۴ ⟸ درجه ۵

دسته * و ** در حالت کلی شبیه به هم هستند ولی دقیقاً یکی نیستند .

پس دیدیم که وقتی بار گسترده‌ی q را بگذاریم یک شکل درجه‌ی ۴ تولید می‌شود ، حال اگر بیاییم و یک بار درجه‌ی ۴ بگذاریم : (بار درجه‌ی ۴ یعنی آنکه در آن تناسب دامنه را نیز رعایت کرده‌ایم)





شکل درجه 8 ، به شکل واقعی خیلی نزدیک‌تر است . تکرار عملیات فوق ⟸ کم کم به شکل واقعی نزدیک می‌شویم

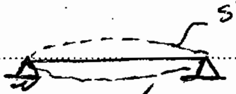
با حل ریاضی مسئله ⟵ شکل واقعی به صورت sinh و cosh ها می‌باشد .

Year. Month. Day. Subject.

* عزادار حقیقی :

… عزاداری موفق تر و به مقام منتظر نزدیکتر است که در درجه اول به خودسازی موفق تر شده باشد ، زیرا کسی که پیام عاشورا را فهمیده باشد خوب می داند که کسی که به سید الشهداء علیه السلام نزدیک تر است که از شباهت و سنخیت بیشتری نسبت به آن حضرت برخوردار باشد. بعلاوه خودسازی نوعی انتقام عملی از دشمنان امام حسین علیه السلام است . هرقدر تعداد انسان هایی که بیشترین شباهت را به امام حسین علیه السلام داشته باشند و بیشتر پیرو مکتب آن حضرت باشند ، در یک جامعه بیشتر باشد ، دشمنان امام حسین علیه السلام و امام زمان علیه السلام فشلیرتر ، ضعیف تر و منزوی تر می شوند و زمینه برای ظهور منتقم اصلی مهیاتر می شود. در درجه ی بعدی عزاداری موفق تر و به مقام منتظر نزدیک تر است که برای اهداف امام زمان عج الله تعالی فرجه الشریف قوی تر و مفید تر باشد . عزادار حقیقی کینه ی مقدس خود را نسبت به دشمنان امام حسین علیه السلام در عمل نشان می دهد. هرقدر کینه ی مقدس عزادار نسبت به دشمنان بیشتر باشد او را در خودسازی و اجرای عملیات انتقام قوی تر و در مبارزه با موانع ظهور منتقم اصلی جدی تر و پرتلاش تر می کند. به عبارت دیگر میزان صداقت یک عزادار در عمل ثابت می شود نه در شعار .

برای مثال ، در مورد شکل تیر ساده اگر ارتعاش کند ، شکلی که بدست می آید (شکل ۱) و $\sin\frac{\pi x}{L}$ است.

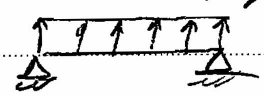


$\sin\frac{\pi x}{L}$

شکل (۱)

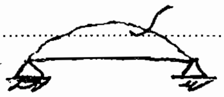
(شکل واقعی ارتعاش یک تیر ساده $\sin\frac{\pi x}{L}$ است)

اگر یک بار متناسب با جرم روی یک تیر ساده بگذاریم



q ثابت

شکل آن یک شکل درجه ی ۴ می شود :



درجه ی ۴

که به شکل واقعی (شکل ۱) خیلی شبیه است و تنها اختلاف های جزئی دارند :

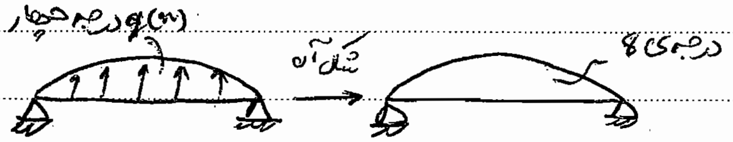
NOTEBOOK

شما را توصیه می‌کنم به بصیرت، بصیرت، بصیرت.

Year. Month. Day. Subject.

... بصیرت یعنی آنکه بدانیم شمری که در کربلا آنگونه سر امام حسین علیه السلام را برید، جانباز جنگ صفین بود.

حال اگر یک بارگذاری با درجه‌ی ۹ بگذاریم روی تیر، یک منحنی درجه‌ی ۸ بدست می‌آید که خیلی به شکل واقعی نزدیک‌تر است (اما از لحاظ کلی شبیه همان است)

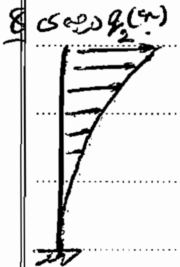


اگر همین روند را ادامه دهیم،

دیگر تقریباً قابل انطباق می‌شوند با شکل واقعی.

در تقریب مهندسی ← همان بار اول برای ما قابل قبول است و از دقت خوبی برخوردار است

و دیگر نیاز نیست وارد فاز دوم و ... بشویم.



فاز دوم: $q_2(x) \propto \bar{m}(x) \cdot \psi_1(x)$

* بالا بردن درجه‌ی حیوحیله‌ای ⟸ بالا بردن احتمال تطبیق با حالت دقیق.

← اگر Excel ← یکسری نقطه با فاصله‌های رندوم تعریف کنیم، رشد رندوم داشته باشد

← بعد شکل آن‌ها را به صورت نقطه‌ای بکشیم ← trend Line ←

(پیدا کردن روند این نقطه‌ها)

← { خطی / درجه ... / سه‌ای } ← اگر درجه‌ی آن را به تعداد نقاط انتخاب کنیم،

دقیقاً از همه عبور می‌کند و اگر کمتر انتخاب کنیم ⟸ تقریبی (برازش می‌کند)

Year. Month. Day. Subject.

فرازهایی از مرثیه های امام زمان عجل الله تعالی فرجه الشریف برای جد بزرگوارشان امام حسین علیه السلام (منبع: بحار / جلد ۹۸ / صفحه‌ی ۳۲۱):

سلام بر آن کسی که حرمت خیمه‌گاهش شکسته شد! ... سلام بر غریب غریبان! سلام بر شهید شهیدان! سلام بر کسی که به دست زنا زادگان کشته شد! ... سلام بر کسی که فرشتگان آسمان براو گریستند! ... سلام بر آن گریبان های چاک شده! سلام بر آن لب های خشکیده! سلام بر آن جان های بالا رسیده! ... سلام بر آن جسدهای برهنه مانده! سلام بر آن پیکرهای تغییر رنگ داده! سلام بر آن خون های جاری شده! سلام بر آن اعضای قطعه قطعه شده! سلام بر آن سرهای به نیزه بالا رفته شده! ... و سلام بر شیرخوار کوچک! ...

یا امام زمان \ پایان اصل

تسلیت بنده‌ی حقیر را بپذیرید.

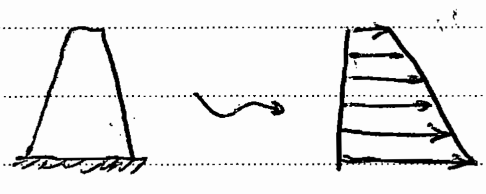
تقریبی

$$\omega_N^2 = \frac{\int \cdots [\phi'(x)]^2}{\quad}$$

$\Rightarrow$ ω_N تقریبی $\longrightarrow$ ω_N ما خطا دارد

وقتی اختلاف بین دو مرحله کمتر از ۵ درصد شد $\Rightarrow$ از لحاظ مهندسی کافیست.

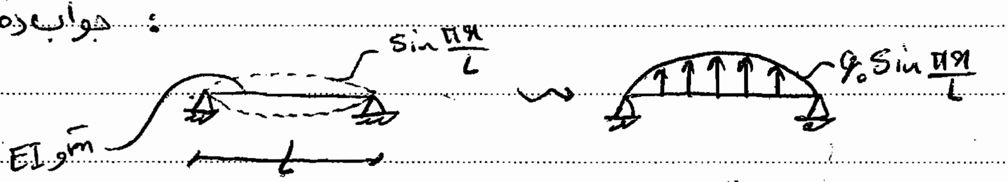
* اگر شکل سازه‌ی ما به صورت باریک شونده (taper) بود، از همان ابتدا ϕ را باید به صورت زیر در نظر بگیریم:



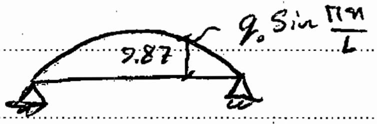
Year. Month. Day. Subject.

← به عنوان مثال یک تیر ساده را در نظر می گیریم:

جواب دقیق :



(بارگذاری دقیق اینه سازه)

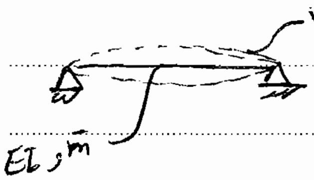


جواب دقیق فرکانس اول یک تیر ساده ی ارتجاعی ←

$$\omega_1 = \pi^2 \sqrt{\frac{EI}{\bar{m} L^4}}$$

← فرکانس ارتعاشی است که از حل معادلات دیفرانسیل بدست آمده.
← در ارتعاشات چهارم آمده

فرض کنید که ما فقط و فقط یک معادله ی ساده ی درجه ۲ را به عنوان حدسمان در نظر بگیریم :



$$\psi(x) = (x-0)(x-L) = x^2 - xL$$

← چون مطمئنیم که کمتر از درجه ی دو نیست

← در اینجا دیگر حتی تناسب جرم را هم در نظر نگرفتیم

← یک حدس خیلی دور از واقع .

$$\Rightarrow \psi'(x) = 2x - L$$

(دامنه مهم نیست و فقط برای ما الگویش مهم است)

$$\psi''(x) = 2$$

$2^2 = 4$

طبق تعریف :

$$\omega_1^2 \simeq \frac{\int_0^L EI\,[\psi'']^2\,dx}{\int_0^L \bar{m}\,[\psi]^2\,dx} = \frac{4EIL}{\bar{m}\int_0^L (x^2 - xL)^2\,dx}$$

$$= \frac{4EIL}{\bar{m}} \times \frac{1}{\int_0^L (x^4 - 2Lx^3 + L^2x^2)\,dx} = \frac{4EIL}{\bar{m}} \times \frac{1}{\frac{L^5}{5} - \frac{L^5}{2} + \frac{L^5}{3}}$$

$$= \frac{120\,EI}{\bar{m} L^4}$$

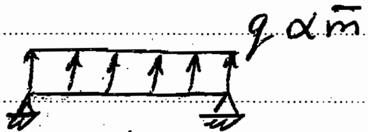
Year. Month. Day. Subject.

$$\omega_1^2 = 120\,\frac{EI}{\bar m L^4} \Longrightarrow \omega_1 = \sqrt{120}\,\sqrt{\frac{EI}{\bar m L^4}} \simeq 10.95\sqrt{\frac{EI}{\bar m L^4}}$$

در شرایطی که حل دقیق ما بود : $\omega_1 = \pi^2\sqrt{\frac{EI}{\bar m L^4}} = 9.87\sqrt{\frac{EI}{\bar m L^4}}$

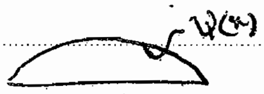
← با یک شکل کاملاً پرت، ما به یک همچین تقریبی رسیدیم

← با این حال، جواب ما خیلی متفاوت بدست نیامد و بد نیست.
(خطای حدود ۱۱ درصد داده)



← حال حداقل، تناسب جرم را رعایت می کنیم:

یک شکل درجه ۴ به ما می دهد



$$v(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

$$\text{B.C}: \Rightarrow \begin{cases} v(0)=0 \Rightarrow e=0 \\ v(L)=0 \Rightarrow aL^4+bL^3+cL^2+dL=0 \end{cases}$$

$$v'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$

$$v''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c \longrightarrow \boxed{M=0 \text{ در دو انتها}} \Rightarrow \qquad M = EI(x)\cdot v''(x)$$

$$\begin{cases} v''(0)=0 \Rightarrow c=0 \\ v''(L)=0 \Rightarrow 12aL^2+6bL=0 \Rightarrow \boxed{b=-2aL} \end{cases}$$

$$v'\left(\frac{L}{2}\right)=0 \longrightarrow \frac{4aL^3}{8} + \frac{3bL^2}{4} + d = 0 \longrightarrow$$ d هم برحسب a بدست می آید

به خاطر تقارن

← a هم دامنه ی شکل است، همیشه یکی از این ضرایب باقی می ماند.

$$\rightarrow \frac{al^3}{2} - \frac{6}{4} al^3 + d = 0 \rightarrow \boxed{d = al^3}$$

همه طول به توان ۴ هستند ← جمع می‌شوند

$$\Rightarrow \boxed{\varphi(x) = ax^4 - 2alx^3 + al^3x} = a(x^4 - 2lx^3 + l^3x)$$

(a در حقیقت دامنه است.)

$$\varphi'(x) = a(4x^3 - 6lx^2 + l^3)$$

$$\varphi''(x) = a(12x^2 - 12lx) = 12a(x^2 - lx)$$

$$\omega_1^2 \simeq \frac{\cancel{a^2} EI \int_0^l}{\cancel{a^2} \bar{m} \int_0^l}$$

a^2 با a^2 مفرح حذف می‌شود

← یعنی دامنه هرچیزی هم نبود (دامنه‌ی جابجایی، تاثیری در مقدار فرکانس ندارد)

← مادامی که خطی باشد

$$\Rightarrow \omega_1^2 \simeq \frac{\overset{12^2}{144} EI \int_0^l (x^4 - 2lx^3 + l^2x^2)\, dx}{\bar{m} \int_0^l (x^8 + 4l^2x^6 + l^6x^2 - 4lx^7 + 2l^3x^5 - 4l^4x^4)\, dx}$$

$$\rightarrow \omega_1^2 \simeq \frac{144 EI}{\bar{m}} \times \frac{1}{l^4} \frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{\left(\frac{1}{9} + \frac{4}{7} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{4}{5}\right)} \simeq \frac{EI}{\bar{m} l^4} \times 97.55$$

$$\rightarrow \omega_1 \simeq 9.88 \sqrt{\frac{EI}{\bar{m} l^4}}$$

← خطای خیلی کم

← خیلی نزدیک به 9.87 است

Year. Month. Day. Subject.

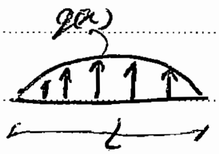
خطای ما خیلی کم شد و ما می‌توانیم وارد مراحل بعد اصلاً نشویم،
حال اگر شکل ما خیلی خاص بود و توزیع جرم و سختی و... خیلی خاص بود
یک گام جلوتر هم می‌رویم.

* ← در امتحان گام اول ۲ نمره و گام دوم که بیشتر محاسباتی است 1 نمره تقریباً دارد.

← تمرین. 9.88 را تا چند رقم اعشار بنویسیم تا بتوانیم با گام بعد مقایسه کنیم،

گام بعد:

← بار را درجه‌ی ۴ وارد کنیم:



$q(x) = q_0\left[\left(\frac{x}{L}\right)^4 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 + \frac{x}{L}\right]$

← (برای تقسیمش کردیم تا بدون بعد شود) ← فقط شکل بار داریم.

← اگر حل کنیم ← از روش انتگرال‌گیری ← به یک تابع درجه‌ی 8 می‌رسیم (۹)

که مشتقش درجه‌ی 6 ← که تقریباً تا چهار رقم اعشار اعدادشان
با حالت اول یکی می‌شود.

← فقط یک کار جبری است و ارزش علم دینامیک سازه‌ای ندارد.

NOTEBOOK

Year. Month. Day. Subject.

فرازهایی از مرثیه های امام زمان عجل الله تعالی فرجه الشریف برای جد بزرگوارشان امام حسین علیه السلام (منبع : بحار / جلد ۹۸ / انتهای صفحه ی ۳۲۱ و ابتدای ۳۲۲):

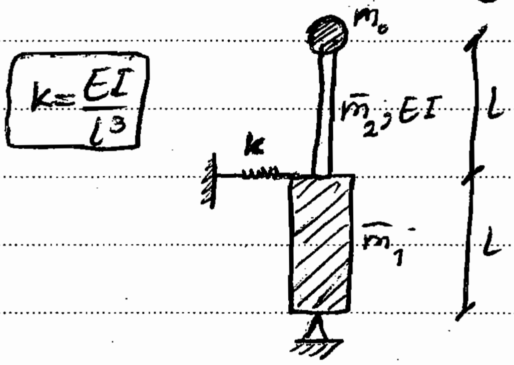
«... سلام بر بدن های غارت شده! ... سلام بر به خاک افتادگان در بیابان ها! سلام بر دور افتادگان از وطن ها! سلام بر دفن شدگان بی کفن! سلام بر سرهای جدا افتاده از بدن! ... سلام بر آن ستم دیده ی بی یاور! ... سلام بر کسی که جبرئیل به او افتخار می کرد! سلام بر کسی که میکائیل با او در گهواره سخن می گفت! **سلام بر کسی که پیمانش شکسته شد!** سلام بر کسی که هتک حرمت شد! سلام بر کسی که خونش به ستم ریخته شد! سلام بر کسی که با خون جراحت هایش غسل داده شد! سلام بر کسی که جرعه نوش جام نیزه ها شد! سلام بر کسی که خونش مباح شد! سلام بر کسی که سرش از قفا بریده شد! سلام بر کسی که روستانشینان بدنش را دفن کردند! سلام بر کسی که شاهرگش بریده شد! سلام بر کسی که در حمایت از دین بی یاور ماند! سلام بر کسی که محاسنش به خون خضاب شد! سلام بر گونه ی به خاک آلوده! سلام بر بدن به غارت رفته (جامه به غنیمت رفته)! **سلام** به دندانی که با چوب - خیزران - کوبیده شد! سلام بر پیکرهایی که در بیابان ها برهنه ماند که گرگ های تجاوزگر تکه و پاره شان کردند و درندگان خون خوار اطرافشان رفت و آمد کردند! ... سلام بر کسی که قلبش از مصیبت تو جریحه دار است و موقع یاد کردن تو، اشکش جاری است! سلام بر مصیبت زده ی محزون سرگشته ی بیچاره»

NOTEBOOK

Year. Month. Day. Subject.

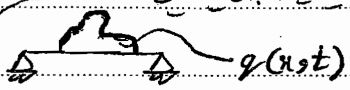
مثال) به روش رایلی فرکانس سازه ی زیر را محاسبه نمایید:

$\boxed{k=\frac{EI}{l^3}}$

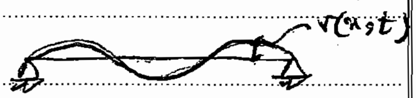


$$\begin{cases} m_0 = \beta \bar{m}_1 L \\ m_2 = \alpha \bar{m}_1 \end{cases}$$

یک تیر با بار دینامیکی:



در یک لحظه از زمان شکلش اینگونه شده:



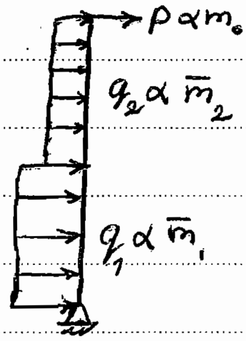
$\sum \Phi_i(x) z_i(t)$ (آقای ریلی)

سری فوریه حالت خاص این هستند

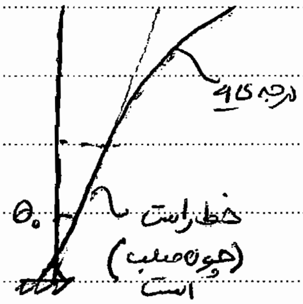
Φ ها مود شیپ ها و z = پاسخ های مودی

از این حل ⇐ $\sin\frac{\pi x}{L}$ بدست می آید

طبق روش رایلی، یک بارگذاری متناسب با جرم اعمال می نماییم:



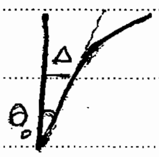
با بارگذاری فوق، سیستم یک شکل جابجایی پیدا می کند:



ما می خواهیم تابع ψ را تعریف می کنیم.

← چون مقدار q ها مهم نیست و تنها تناسبشان مهم است

← می توانیم هر مقداری را که دلمان می خواهد به عنوان جابجایی در نظر بگیریم، مثلاً 1 یا Δ و...

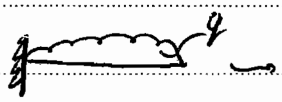


← مقدار Δ مهم نیست و فقط تناسبش مهم است.

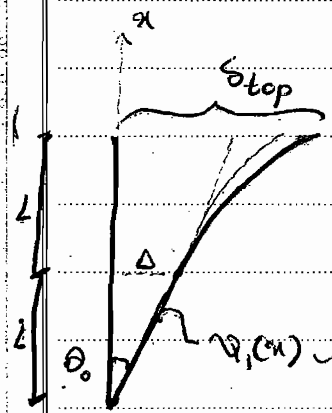
Year. Month. Day. Subject.

امام حسن علیه السلام :

هیچ ستمگری را شبیه ستم دیده ندیدم جز حسود را.



$$\begin{cases}\Delta = \dfrac{qL^4}{8EI}\\[2mm] \theta = \dfrac{qL^3}{6EI}\end{cases}$$



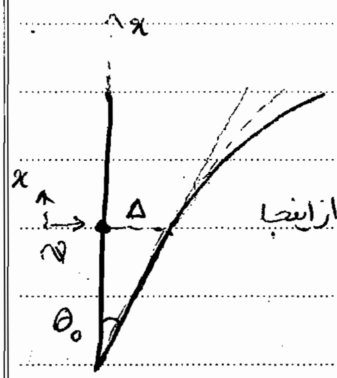
$$\delta_{top} = \overset{\frac{\Delta}{L}}{\theta_0} \times 2L + \frac{q_2 L^4}{8EI} + \frac{PL^3}{3EI}$$

$\varphi_1(x)$ برای ← $0 < x < L$

اگر بخواهیم همه‌ی تغییر شکل‌ها را براساس Δ بیان کنیم

$2\Delta = \theta_0 \times 2L \Leftarrow \frac{\Delta}{L} = \theta_0 \Leftarrow$

$\boxed{\varphi_1(x) = \frac{x}{L}\Delta}$ و $\varphi_1''(x) = 0$



حال اگر مختصات را از اینجا تعریف کنیم

$$\varphi_2 \rightarrow \begin{cases}(1)\ \varphi_2(0) = \Delta\\ (2)\ \varphi'(0) = \theta_0\\ (3)\ \varphi_2(L) = 2\Delta + \dfrac{\overset{\bar{m}_2}{q_2 L^4}}{8EI} + \dfrac{\overset{m_0}{PL^3}}{3EI}\\ (4)\ \varphi_2''(L) = 0\end{cases}$$

← یک تابع درجه‌ی ۴ برایش می‌نویسیم و شرایط ۴گانه‌ی فوق را روی آن اعمال می‌کنیم و شکل جبری آن بدست می‌آید. هنگام انتگرال گیری باید آن را دو تکه کنیم.

$\varphi_1''(x) = 0 \rightarrow$ چون صلب است

$$\Rightarrow \omega_1^2 \simeq \frac{\int_0^l 0 + \int_0^l EI\,(\varphi_2''(x))^2\,dx + k\Delta^2}{\bar{m}_1 \int_0^l [\varphi_1(x)]^2 dx + \bar{m}_2 \int_0^l [\varphi_2(x)]^2 dx + m_0\,(\delta_{top})^2} = \frac{\text{(strain) انرژی تغییر شکل}}{\text{دو برابر انرژی جنبشی}}$$

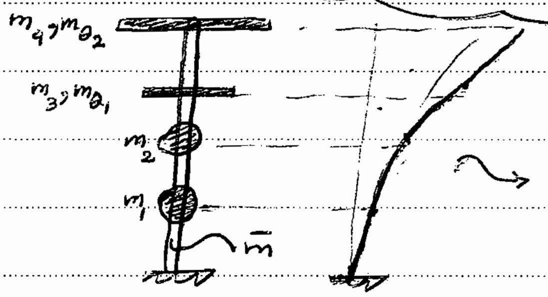
← در مخرج اثر همه‌ی جرم‌ها باید دیده شود وگرنه مسئله ناقص می‌شود

m_0 ← تغییر مکان متناظرش $= \delta_{top}$

رابطه‌ی m^* به طور کلی:

جرم‌های گسترده — جرم‌های متمرکز

$$m^* = \int \bar{m}(x)\,[\varphi(x)]^2 + \sum m_i\,\varphi_i^2 + \sum m_{\theta_i} \times \varphi_i'^2$$

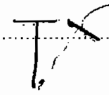


مثلاً اگر

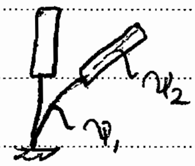
یک انتگرال

$m_i\varphi_i^2$ چهارتا

$m_{\theta_i}\varphi_i'^2$ دوتا ← چون

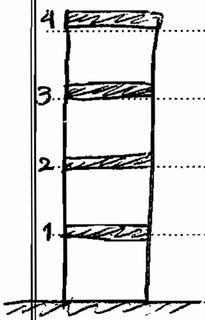


اگر:



و تفاوت خاصی نمی‌کرد

Year. Month. Day. Subject.



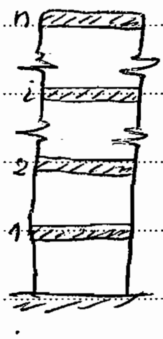
دستگاه چند درجه‌ی آزاد و معادلات حاکم بر حرکت آنها

برای سیستم‌های یک درجه آزاد داشتیم:

- نیروی لازم برای ایجاد تغییر مکان واحد، می‌شد سفتی آن سازه‌ی تک درجه آزاد.

سفتی در یک سیستم یک درجه آزاد را می‌توانستیم به سادگی بیان کنیم، اما در سیستم‌های چند درجه‌ی آزاد، سفتی سیستم کمی متفاوت است و به سادگی نمی‌توانیم بیان کنیم.

برفرض ساختمان چند طبقه‌ی فوق را در نظر بگیرید، اگر سؤال بشود که سفتی ساختمان فوق چقدر است که نمی‌توان به سادگی پاسخ داد، اما به صورت مقایسه‌ای می‌توان جواب داد (برفرض این از آن سفت‌تر، نرم‌تر یا ... است) صوری می‌توان گفت، اما نمی‌توان گفت سفتی ساختمان فلان قدر است.



← اگر برفرض، مانند شکل مقابل، سازه‌ی ما n طبقه باشد، در هر جایی می‌توانیم بار بگذاریم و در هر جایی می‌توانیم تغییر مکان را اندازه‌گیری کنیم (در طبقه 1 بار، در طبقه 2 اندازه‌گیری و ...) در واقع n^2 حالت مختلف وجود دارد. (n نقطه احتمال گذاشتن بار، n نقطه احتمال بررسی).

→ k_{ij} = force @ DoF i due to unit Displ @ DoF j, while all DoFs other than j are un-moved.

$i: 1 \to n$ $\quad j: 1 \to n$

مقید شده (restrained)

← نیروی لازم برای i برای ایجاد جابجایی واحد در j مادامی که سایر اعضای به جز j مقید شده باشند

* هر وقت مردم به گناه تازه‌ای روی آورند، خداوند آنها را به بلای تازه‌ای دچار می‌نماید.
امام رضا علیه السلام

Year. Month. Day. Subject.

$$\sum_{j=1}^{n} k_{ij} \times \delta_j = F_i \qquad (i = 1 \xrightarrow{i} n)$$

← نیروی لازم در i برای ایجاد تغییر مکان δ_j در j.

سطر فوق را بنویسیم ← $k_{i1}\delta_1 + k_{i2}\delta_2 + \dots + k_{ij}\delta_j + \dots + k_{in}\delta_n = f_i$

← حال اگر i را هم از 1 تا n بنویسیم ⇐ یک ماتریس مفصل می‌شود:

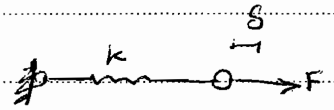
$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1j} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2j} & \dots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & & \\ k_{i1} & k_{i2} & \dots & k_{ij} & \dots & k_{in} \\ \vdots & \vdots & & & & \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nj} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_j \\ \vdots \\ \delta_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_j \\ \vdots \\ f_n \end{Bmatrix}$$

در حالت دینامیکی: $\Delta(t)$ $\quad F_s(t)$

$$[k]\{\Delta\} = \{F_s\}$$

: ماتریس سختی در بردار δ می‌شود بردار نیرو (F)

رابطه‌ی فوق متناظر به رابطه‌ی زیر در سازه‌ی تک درجه آزاد است:



$F = k\delta$

حالت استاتیکی = δ حالت دینامیکی = $\begin{cases} u(t) \\ \dot{u}(t) \\ \ddot{u}(t) \end{cases}$

Year. Month. Day. Subject.

تحلیل ماتریسی سازه ها که در اکثر برنامه های رایانه ای و ... بکار می رود، مبنایش همان روابط صفحه ی قبل است. (تغییر مکان در سازه ها)

← مادامی که بارها استاتیکی باشند، همان روابط صفحه ی قبل کافیست، اما وقتی که بارها دینامیکی باشند ⟸ نیروهای دیگری به وجود می آید (نیروهای ناشی از اینرسی و ...)

c_{ij} = force @ DoF (i) due to unit velocity @ DoF (j), while all DoFs other than (j) are un-moved. (restrained)

← نیروی لازم برای (i) برای ایجاد سرعت واحد در (j)، درحالیکه سایر اعضا مقید شده باشند

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2j} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & & \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & & & \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nj} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1(t) \\ \dot{u}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{u}_i(t) \\ \vdots \\ \dot{u}_n(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{D_1} \\ f_{D_2} \\ \vdots \\ f_{D_i} \\ \vdots \\ f_{D_n} \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow [c]\{\dot{u}(t)\} = \{F_D(t)\}$$

نیروی ناشی از میرایی سازه

Year. Month. Day. Subject.

حسن خلق باعث افزایش روزی است ۲ امام جعفر صادق علیه السلام

حضرت محمد صلی الله علیه و آله و سلم:

کسی که به مردم نیکی می آموزد و خود را فراموش می کند، مانند فتیله است که به مردم روشنی می بخشد و خویشتن را می سوزاند.

m_{ij} = force @ DoF (i) due to unit (Accelaration) @ DoF (j), while all DoFs other than (j) are un-moved.
restrained

نیروی به وجود آمده در درجه ی آزادی i ام در اثر شتاب واحد در درجه j ام در حالی که باید درجات مقید باشند.

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1j} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2j} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ m_{i1} & m_{i2} & \cdots & m_{ij} & \cdots & m_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nj} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1(t) \\ \ddot{u}_2(t) \\ \vdots \\ \ddot{u}_i(t) \\ \vdots \\ \ddot{u}_n(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{I_1} \\ f_{I_2} \\ \vdots \\ f_{I_i} \\ \vdots \\ f_{I_n} \end{Bmatrix}$$

ماتریس جرم

$$\Rightarrow [M]\{\ddot{u}(t)\} = \{F_I(t)\}$$

معادله اساسی سیستم های چند درجه ی آزاد:

$$\Rightarrow [M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{P(t)\} \; *$$

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t)$$

Year. Month. Day. Subject.

حاجت خواستن از غیر خدا، موجب سلب عزت و رفتن حیا می شود.
امام جعفر صادق علیه السلام

از لحاظ فیزیکی:
معادله ی حرکت یک درجه ی آزاد خطی، با میرایی ویسکوز تحت اثر بار دینامیکی $p(t)$.

$$\boxed{m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t)}$$

از لحاظ ریاضیات: معادله ی دیفرانسیل مرتبه ی دوم با ضرایب ثابت غیر همگن.

* از لحاظ فیزیکی: دستگاه معادلات دیفرانسیل حاکم بر ارتعاش (حرکت)، سازه ی چند درجه آزاد خطی با میرایی تحت اثر بار دینامیکی.
از لحاظ ریاضی: مانند فوق

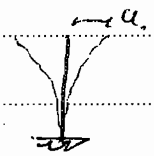
حل چنین دستگاه هایی کمی پیچیده می باشد.

حالت ارتعاش آزاد نامیرا:

ساده ترین حالت.

$$[M]\{\ddot{u}\} + [k]\{u\} = 0$$

$$m\ddot{u} + ku = 0 \rightarrow u(t) = u_0 \cos\omega_n t$$



$$\{u(t)\} = \{u_0\} \cos\omega_n t$$

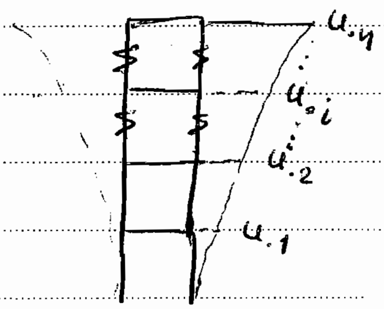
آیا می توان برای سیستم های چند درجه ی آزاد نیز، مانند یک درجه آزاد یک معادله ای به عنوان جواب بدست آورد؟

Year. Month. Day. Subject.

پیامبر اکرم صلی الله علیه و آله وسلم:
اخلاق خوش گناه را از بین می برد آن گونه که آفتاب یخ را آب می کند.

← در حالت یک درجه ی آزاد، u فقط یک کمیت بود ولی در سیستم های چند درجه آزاد اینگونه نیست:

← در چند درجه آزاد که یک u نداریم، بلکه یک {u} بزرگ (بردار) داریم که دارای n تا u کوچک است:



← اگر u های ما یک تناسب خاصی (مشکل-محدوده) نداشته باشند سازه ی ما یک ارتعاش آزاد خوبی انجام نمی دهد.

اگر وسط سازه ی فوق را بکشیم و رها کنیم نوسان روتینی رخ نمی دهد اما اگر با یک نوسان خاص مثلاً اگر سازه ی شکل فوق سازه را در بالاترین طبقه بکشیم و رها کنیم به صورت شکل نشان داده شده نوسان می کند، به گونه ای که u_n ها متناسب هستند.

← چرا متناسب هستند؟

←

← برای اینکه نیروهای اینرسی برای این ارتعاش آزاد، نیروی اینرسی هر طبقه را به هر طبقه اثر می کند که وقتی سازه تا آخرین نقطه ی دامنه ی حرکتی اش رفت و ایستاد، در آن لحظه هر آنگاه نیروی فنری را ایجاد نموده که می خواهد سیستم را برگرداند. یعنی دقیقاً در آن لحظه f_s و f_I با هم برابر می شوند:

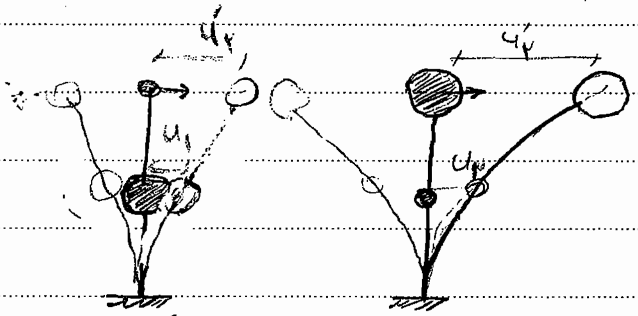
$$\underbrace{[m]\{\ddot{u}\}}_{\{f_I\}} + \underbrace{[k]\{u\}}_{\{f_s\}} = 0$$

در هر نقطه ای f_I و f_s قرینه ی هم هستند
همو میگیرند

← چون نیروی اینرسی در حقیقت برابر است با جرم ضرب در شتاب ←

⇐ در هر جایی که جرم بیشتری باشد ، قاعدتاً نیروی اینرسی بیشتری هم وجود دارد پس جابجایی هم در آن نقطه بیشتر می باشد .

به عنوان مثال :



شکل ① شکل ②

در شکل فوق یکجور نوسان نمی کنند . یعنی ارتعاش آن را نشان یکجور نوسان نمی کند .

در شکل ② به نسبت شکل ① یک نوسان قابل ملاحظه ای رخ می دهد

⇐ حضور جرم باعث می شود که u های متفاوتی ایجاد شود ، به عنوان مثال u_1 و u'_1 با u_2 و u'_2 برابر نیست بلکه :

$u_1 < u_2$ و $u'_1 < u'_2$

⇐ توزیع جرم در شکل تأثیر دارد ، حال ببینیم که در رابطه ی $\{f_I\} + \{f_s\} = 0$ چگونه این موضوع خودش را نشان می دهد :

$\longrightarrow \{\ddot{u}\} = -\omega_n^2 \{u_0\} \cos\omega_n t$

$[M]\{\ddot{u}\} + [k]\{u\} = 0 \longrightarrow ([k] - \omega_n^2[M])\{u_0\}\cos\omega_n t = \{0\}$

cos صفر نمی شود پس باید :

$([k] - \omega_n^2[M])\{u_0\} = 0$

برای جواب غیر صفر داشتن عبارت فوق ⟵ باید دترمینان صفر باشد ⇐ $|[k] - \omega_n^2[M]| = 0$

λ

det

← که در این حالت در حقیقت بی‌نهایت جواب غیر صفر خواهیم داشت.

← ما دنبال یک جواب غیر صفر بودیم، که بی‌نهایت جواب غیر صفر پیدا کردیم.

← چرا بی‌نهایت جواب؟

$det = 0$ ← یکی از شرط‌هایش وابسته به شرط‌های دیگر است

⇓

n معادله‌ی مستقل نیست، در حقیقت $n-1$ معادله‌ی مستقل است.

← $(n-1)$ معادله داریم و n مجهول ⇐ پس یکی از مجهولات را به دلخواه انتخاب می‌کنیم ← مثلاً ۱ می‌گیریم.

یک‌سری عملیات ریاضی روی ما

⇐ آن مجهول مورد نظر را هرچه بگیریم، بقیه‌ی مجهولات به صورت ضرایبی از آن بدست می‌آید.

← مثلاً اگر ۱ بگیریم ← می‌شوند 0.5 و 0.75 و ...

← و اگر ۲ بگیریم ← می‌شوند ۱ و 1.5 و ...

← کاملاً ضریبی از عدد اولیه می‌شوند ← پس در واقع می‌شود ∞ جواب.

↓

منتها بی‌نهایت جوابی که همشان یک الگو دارند و ضریبی از یک عبارت هستند

← ما هنوز ω را نداریم ← $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ← منتها در اینجا می‌دانیم که این ω چیست؟

با چه فرکانسی این سیستم چند درجه آزاد ما ارتعاش می‌کند؟

با توجه به اینکه هم M, K عناصر قطرشان مثبت هستند، ما در اینجا اگر بگیریم : $P_n(\lambda) = 0$ →

چونکه در دترمینان همه عضوها درهم ضرب می‌شوند

Year. Month. Day. Subject.

$P =$ یک چندجمله‌ای برحسب λ از درجه‌ی n

$$\begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_j \\ \vdots \\ \lambda_n \end{Bmatrix} \leftarrow P_n(\lambda) = 0$$

که چنین چندجمله‌ای، n تا جواب دارد.

که می‌تواند حقیقی و یا مختلط باشد.

$M \leftarrow$ که نمی‌تواند منفی باشد

$K \leftarrow$ هم گفتیم که روی قطر اصلی‌اش نمی‌تواند صفر یا منفی باشد ← وگرنه ناپایدار است.

← اگر صفر باشد $\Rightarrow$ ناپایدار آنی می‌شود

← اگر منفی باشد $\Rightarrow$ ناپایداری کلی می‌شود

$\Leftarrow$ پس سازه‌ای که پایدار باشد $\Leftarrow$ همه‌ی عناصر روی قطر اصلی ماتریس سفتی‌اش مثبت است.

ماتریس‌های $[k]$ و $[m]$ خاصیتی دارند که:

$$\boxed{**} \begin{cases} \{u\}^T [k] \{u\} \overset{\text{حتماً}}{>} 0 \\ \{u\}^T [m] \{u\} \overset{\text{حتماً}}{>} 0 \end{cases}$$

اسم این خاصیت ← positive difinit

← چرا خاصیت فوق را دارند؟

$[k]\{u\}$

$\{u\}^T \times \{f_s\} \leftarrow \{f_s\} =$ نیروی الاستیک

$= \{u\}^T \times \{f_s\} =$ کار است.

$\{u_1 f_1 + u_2 f_2 + \dots$

$\text{کار} = \frac{1}{2} k \Delta$

2 برابر کار است $\Rightarrow$ حتماً مثبت است.

کار = انرژی داخلی سیستم

و $\{u\}^T [m] \{u\}$ ← در حقیقت دو برابر انرژی جنبشی سیستم است $\Leftarrow$ مثبت است.

$2 \times (\frac{1}{2} m v^2)$

NOTEBOOK

$\boxed{**}$ $\Rightarrow$ جواب‌های $P_n(\lambda)=0$ حتماً حقیقی و حتماً بزرگتر از صفر هستند $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \lambda_1 \xrightarrow{\sqrt{\ }} \omega_1 \\ \lambda_2 \xrightarrow{\sqrt{\ }} \omega_2 \\ \vdots \\ \lambda_j \xrightarrow{\sqrt{\ }} \omega_j \\ \vdots \\ \lambda_n \xrightarrow{\sqrt{\ }} \omega_n \end{cases} \in \mathbb{R} > 0$$

← ما فکر می کردیم که ۱ ω_N می خواهیم بدست آوریم ← امّا به ما n تا ω_N داد:

⇐ اولین نتیجه: هر سیستم n درجه آزادی دارای n تا ω_N مستقل است.

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \left| [K]_{n\times n} - \overset{\lambda}{\omega_N^2} [M]_{n\times n} \right| = 0$$

به جای ω_N^2، λ_1 و λ_2 و ... قرار دهیم ←

⇐ چنین معادلاتی را تشکیل داده‌ایم:

$$([K]-\lambda_j[M])\,\{\Phi_j\}=\{0\}$$

← به ازای هر λ_j ای یک u داریم که اسم آن u را ما Φ_j می‌گذاریم.

← یعنی هر فرکانسی (λ ای) ← یک شکل ارتعاشی مخصوص خودش را دارد

← که به آن می‌گویند: مودهای سازه

Year. Month. Day. Subject.

مود ۱
مود ۲

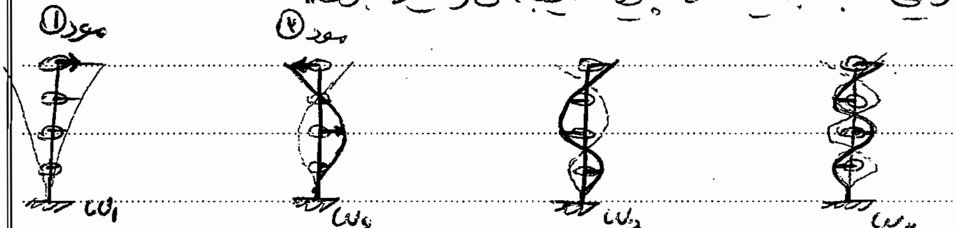
$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \{\Phi_1\} \\ \{\Phi_2\} \\ \vdots \\ \{\Phi_i\} \\ \vdots \\ \{\Phi_n\} \end{array} \right\} \longrightarrow \boxed{\text{حالت های ارتعاشی یا مودها}}$$

$\{\Phi_i\}$ ← مود i

$\{\Phi_n\}$ ← مود n

که همیشه یکی از آنها را انتخاب می کنیم و بقیه را به صورت ضریبی از آن که انتخاب کرده ایم بدست می آوریم.

که در حقیقت رایلی قبلاً به یک همچنین نتیجه ای رسیده بود.



$\{\Phi_1\}$ $\{\Phi_2\}$ $\{\Phi_3\}$ $\{\Phi_4\}$

همه با هم هم‌جهت‌اند

همه با هم مثبت و بجز از برگشت همه با هم منفی هستند.

* ← مودهای بالاتر با سرعت سریعتری ارتعاش می کنند ← سریعتر می خواهند برگردند به حالت اولیه.

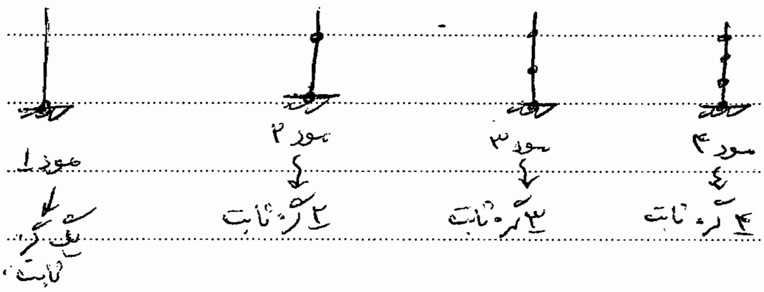
* ← در حالت کلی ← بیش از n تا مود امکان پذیر نمی باشد ← در حالت فوق $n=4$ ⟸ ۴ حالت.

* ← مود i ⟸ تعداد درجات آزادی‌شان به i دسته تقسیم می شوند که هر دسته، نسبت به دسته‌ی قبل و بعدش، در مود مخالف در حال حرکت است.

← مود ۴ ⟸ ۴ دسته می شوند.

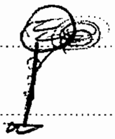
← اگر مانند محل عصایی باشد.

← در شکل ارتعاشی سازه، به تعداد شماره ی مود، تعداد گره ی ثابت می باشد



چرا شکل روبرو مود ۳ نشد؟ با اینکه ۳ گره و ۳ ریشه دارد

← از کجا باید بفهمیم؟



← توزیع جرم تکلیف را مشخص می کند.

← شکل مود ← باید کمترین انرژی را نسبت به شکل های دیگر ممکن در آن مود داشته باشد

← در بین شکل های ممکن برای یک مود، آن شکلی جواب است که انرژی تغییر شکلش مینیمم باشد.

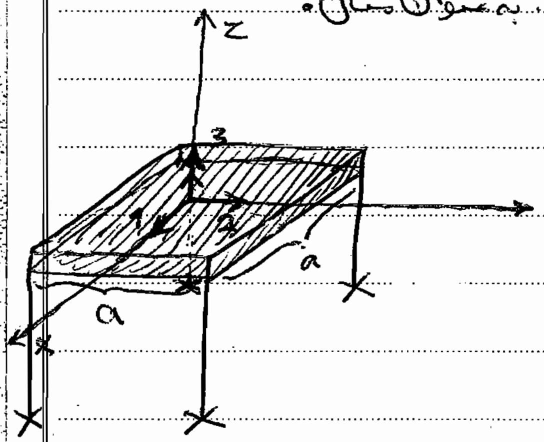
← شکل ما را مشخص می کند.

مشخص
← که مینیمم بودن انرژی تغییر شکل نیز براساس توزیع جرم (نیروی اینرسی) می شود.

← به عنوان مثال: جزوه ی ۲۰ صفحه ای ← صفحه ی ۱۵ و ۱۶

← صفحه ی ۵ یک ساختمان سه طبقه است.

← ممکن است سیستمی دارای فرکانس های برابر باشد، یعنی آن ω ها که گفتیم مستقل هستند، ممکن است گاهی مساوی با هم باشند. به عنوان مثال:



1 و 2 و 3 = درجات آزادی سازه ی روبرو

← چنین سازه ای برایش فرقی نمی کند در راستای y ارتعاش کند و یا در راستای x ارتعاش کند.

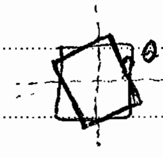
← دقیقاً در این دو راستا فرکانسش یکسان است ← ولی شکلش یکسان نیست.

$$\{\Phi_1\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \{\Phi_2\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \{\Phi_3\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

← می توان کاری کرد که ω_3 نیز مساوی ω_1 و ω_2 شود:

← اگر همان مقدار جرم را نازک تر اما پهن تر کنیم (با پهن کردن می توان m_θ را بزرگ کرد)

داریم: $k_x = k_y = \frac{\overset{4\times 12}{48EI}}{h^3}$



$$k_\theta = \sum_{i=1}^{n} \left(\underbrace{k_{xi}}_{\frac{12EI}{h^3}} \cdot \underbrace{y_i^2}_{\frac{a}{2}} + \underbrace{k_{yi}}_{\frac{12EI}{h^3}} \cdot \underbrace{x_i^2}_{\frac{a}{2}} + k_{\theta i} \right)$$

سختی ستون در راستای x

سختی ستون ها در راستای y

سختی هر ساختمان تحت پیچش با این صورت محاسبه می شود.

این همان $\frac{GJ}{L}$ است حول محور خودش.

$\frac{2GI}{h} \leftarrow J=2I \leftarrow \frac{GJ}{L}$ $\quad J=2I \quad \frac{4GJ}{L}$

Year. Month. Day. Subject.

در مسئله‌ی فوق $\Rightarrow k_\theta = 4\left[\left(\frac{12EI}{h^3}\times\frac{a^2}{4}\right) + \frac{2GI}{h}\right]$ ← سختی پیچشی سازه

در اینجا ، $\omega_1=\omega_2$ است و :

$$\omega_1=\omega_2=\sqrt{\frac{48EI/h^3}{m}} = \sqrt{\frac{48EI}{mh^3}}$$

جرم کل سقف

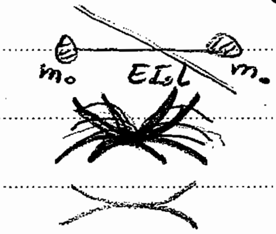
و

فرکانس پیچشی خالص ← $\omega_3 = \sqrt{\frac{k_\theta}{m_\theta}} = \sqrt{\frac{k_\theta}{\left(\frac{ma^2}{6}\right)}}$ ← ؟

← می‌توان بعد a را بگونه‌ای بدست آورد که $\omega_1=\omega_2=\omega_3$ شود .

⟸ امکان پذیر است که سیستمی ، حتی سه فرکانسش باهم برابر شود

* اگر عضو مقابل را در فضای بدون جاذبه رها کنیم ، شروع به بال زدن به صورت زیر می‌کند :

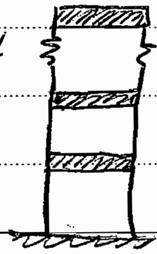


دوران هم می‌خواهد بکند ←

← مثال صفحه‌ی ۱۵ —

← سختی ها را داده ، ماتریس سختی و ماتریس جرمش را تشکیل داده ، ماتریس سختی ساختمان های n طبقه :

shear beam model ← به اینها می‌گویند
چون مثل تیر برشی تغییر شکل می‌دهد



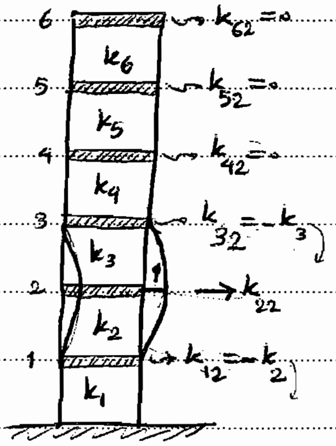
$$\rightarrow \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & & & \text{صفر} \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 & & \\ & & \ddots & & \\ & -k_i & k_i+k_{i+1} & -k_i & \\ \text{صفر} & & & & -k_n \\ & & & -k_n & k_n \end{bmatrix}$$

امام علی علیه السلام: بهترین دانش آن است که تو را به رستگاری برساند.

Year. Month. Day. Subject.

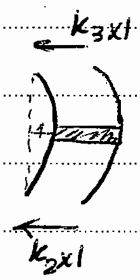
سختی طبقات = k_i

shear beam model با سقف صلب:



← آیا حارقتی که با k_{12} و k_{32}، جابجایی واحد را ببندیم، نیاز به kهای بالاتر هم هست؟

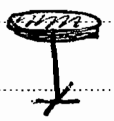
چون k_{12} و k_{32} نگه داشته که جابجایی انتقال پیدا کند پس نیرویی در بالاتر نیست ←



$k_{42}=k_{52}=k_{62}=0$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} & & \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 \\ & & \end{bmatrix}$$

سؤال جالب) طراح: امیر محمدی



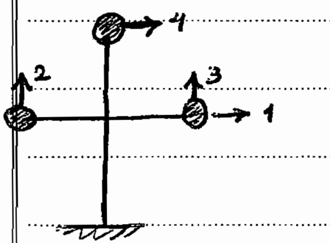
→ ۳ درجه →

h را به گونه‌ای محاسبه کنید که
$\omega_1=\omega_2=\omega_3$

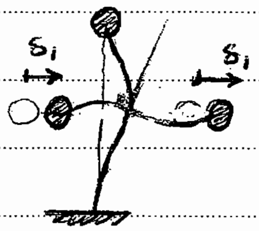
Year. Month. Day. Subject.

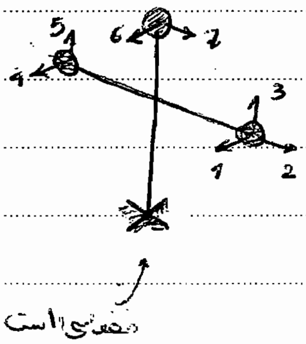
یک سازه داریم با سه جرم متمرکز، از تغییرشکل های محوری صرف نظر کرده ایم،
دارای ۴ درجه آزادی می باشد.

شکل ①

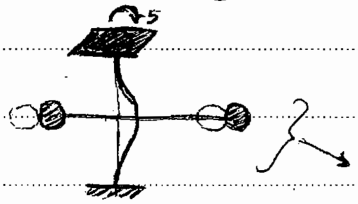


حرکت مستقل درجه آزادی 1



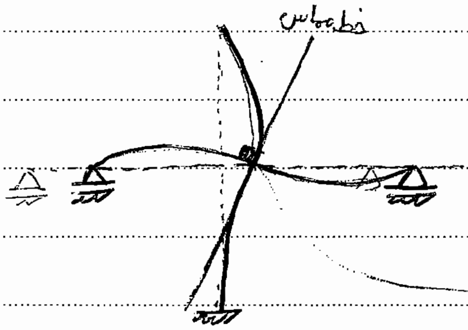


← اگر درجه‌ی آزادی دورانی نیز تعریف شده بود،
مثلاً اگر شکلی به صورت زیر مطرح بود:

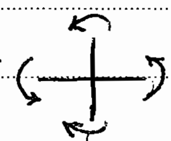


← چون درجه‌ی آزادی دورانی هم دارد، پس باید آن را نیز ببندیم ← تغییرشکل محوری حاصل می شود

← نکته‌ی ظریف: تیر افقی نمی ماند ← چرا؟ برای اینکه
در شکل ①

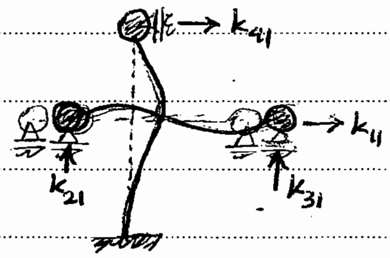


قسمت نرم تر بیشتر می چرخد و
قسمت سخت تر کمتر می چرخد.



باید به تنهایی جواب
سه تکه دیگر را بدهد.

← انتهاهای عضوها محدودند به گونه‌ای که طول ثابت باقی مانده است.

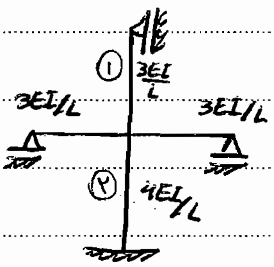


k_{21} و k_{31} و k_{41} عکس‌العمل‌های
تکیه‌گاهی هستند که مانع تغییرشکل
و جابجایی در جهت‌های مذکور می‌شوند

* سؤال

نسبت طول ستون پایینی به ستون بالایی چقدر باشد تا تیر نچرخد؟

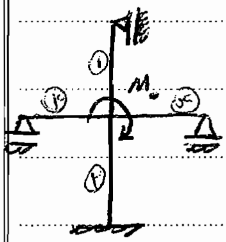
← باید به گونه شود که سختی دو ستون با هم مساوی شود



جواب ← $L_2 = \frac{3}{4}L_1$ ؟!؟

← سختی دورانی شان یکسان می‌شود ← نمی‌چرخد.

← اگر M_0 را وارد کنیم، سهم چهار عضو از M_0 چگونه محاسبه می‌شود؟



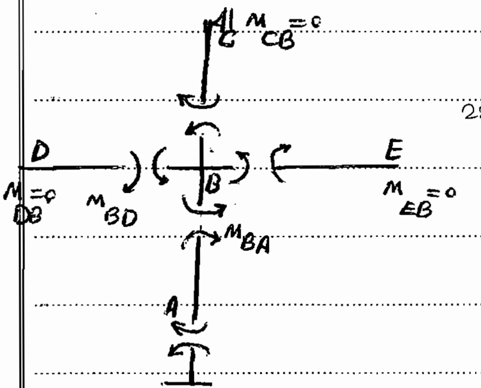
← اگر طول عضوها L باشد ←

→ $k_1 = k_3 = k_4 = \frac{3EI}{L}$ → $9+4=13$

$k_2 = \frac{4EI}{L}$

← سهم عضو 2 : $\frac{4}{13}$

سهم سایر اعضا هرکدام $\frac{3}{13}$ می‌باشد.



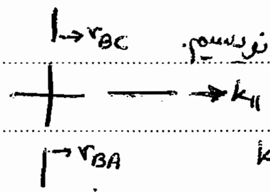
22:35

$$\theta = \frac{M_0}{\frac{13EI}{L}}$$

⇒ سهم عضو 2 $= \frac{4}{13} \times \theta$

← Δ هم دارد و فقط θ نیست و باید شیب افت بنویسیم ←

تعادل برش را می‌نویسیم.



$$\Rightarrow M_{BA} = \frac{2EI}{L}\left(2\theta_B + \theta_A - \frac{3\delta_1}{L}\right)$$

$$M_{BE} = \frac{3EI}{L}(\theta_B) = M_{BD}$$

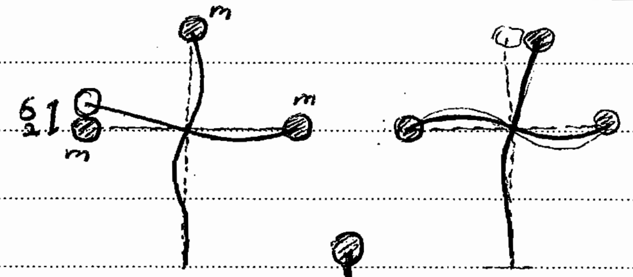
$$k_{11} = -V_{BC} - V_{BA}$$

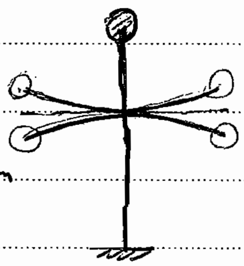
$$M_{BC} = \frac{3EI}{L}\left(\theta_B + \frac{\delta_1}{L}\right)$$

⇐ θ و δ_1 بدست می‌آید.

← سپس δ را 1 می‌گیریم ⇐ k_{11} بدست می‌آید.

← این سه حالت خیلی آسان است، فقط حالت
سخت این سؤال مسئله صفحه‌ی قبل بود
که حتماً باید از شیب استفاده می‌رفتیم.





اولی را دو برابر و بقیه را m می‌گذاریم → m_{11} ← آزادی درجه‌ی ۱ ⇐ $2m$

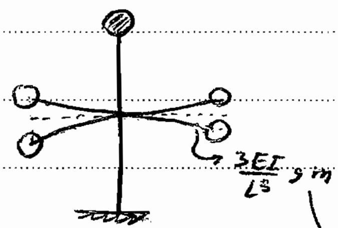
ماتریس M سازه‌ی فوق:

$$M = \begin{bmatrix} 2m & & & \\ & m & \text{صفر} & \\ & \text{صفر} & m & \\ & & & m \end{bmatrix}$$

m_{22} ← آزادی درجه‌ی ۲ ⇐ m

ارتعاشی منظم سازه‌ی فوق

← ویژگی تقارن سازه‌ی فوق به ما کمک می‌کند که یکی از حالات را بدون حل ماتریس، بدست آوریم:

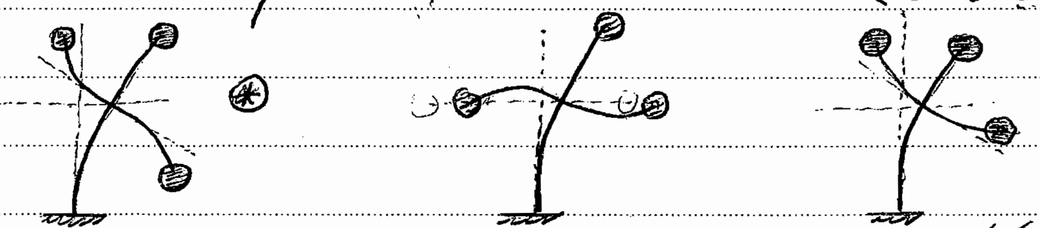


$\frac{3EI}{L^3}$ و m

مود ۲

← هر سازه‌ای که متقارن باشد معمولاً یک مودی
شبیه به بال زدن دارد.

بین این دو، کدام مود
اول است؟ ⇐ هر قدر m* بزرگتر و k* کوچکتری داشته باشیم،
به مود ۱ نزدیکتریم.
(*) ← جرم بیشتری دارد ⇐ مود ۱



مود ۱ | مود دیگر | ممکنه که این مود ۳ باشد.

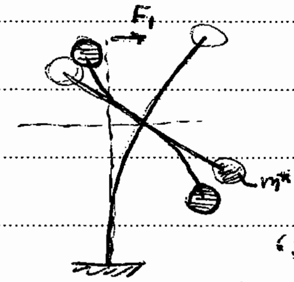
اصول کلی: معمولاً وقتی از پایین به بالا می‌رویم، مودها سخت می‌شود. انرژی بیشتری در سازه
می‌خواهد، تغییر شکلش پیچیده‌تر می‌شود.

ساده‌ترین شکل ← اگر به یک نیروی متناسب با جرم روی دورترین درجه ← شکل مود ۱ را می‌دهد.

امام علی علیه السلام : مالی که از کف بیرون رفت و تو را پندی آموخت، رفته مگیر.

Year. Month. Day. Subject.

چرا در شکل ۴ بال سمت راست آمد پایین و بال سمت چپ رفت بالا ؟

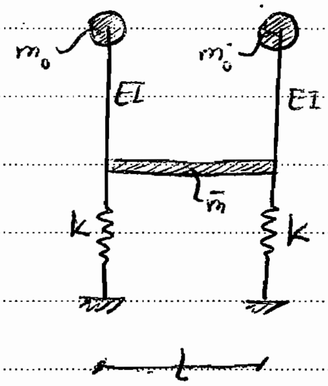


پاسخ : فرض کنید که ما فقط نیروی F_1 را روی سازه اعمال کرده باشیم، شکل سازه به صورت روبرو می شود:

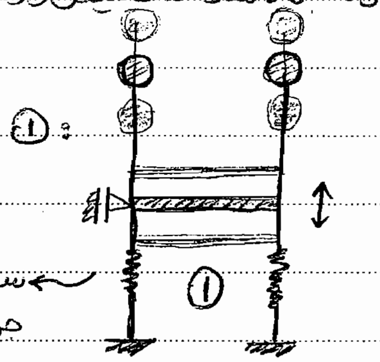
می بینیم که m^* آمده پایین، جرم دارد و دامنه ی حرکت هم دارد،
پس یک نیروی ثانویه روی m^* اثر می کند و پایین تر می آید. (قدر بزرگ)

* معمولاً وقتی روی درجات آزادی دور نیرو بگذاریم، شکلی خیلی شبیه به شکل مود اول بدست می آوریم.

به عنوان مثال)



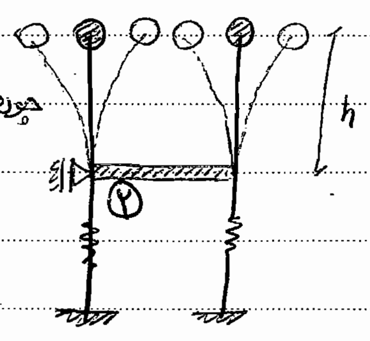
دو مود شکل مقابل، ساده تشخیص داده می شوند



سختی اش $2k$ است و جرمش مساوی جرم کل می باشد

$$\overset{1}{\Rightarrow} \omega_1 = \sqrt{\frac{2k}{\bar{m}L + 2m_0}}$$

چون تقارن دارد



2

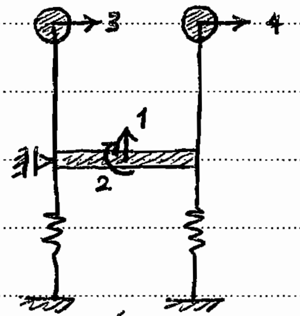
$$\omega_2 = \sqrt{\frac{2 \times 3EI/h^3}{\cancel{2} \times m_0}} = \sqrt{\frac{3EI}{m_0 h^3}}$$

NOTEBOOK

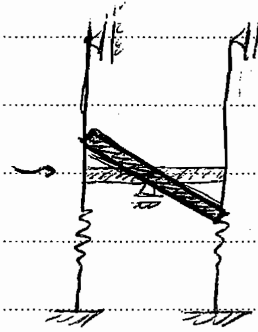
← حال سؤال اینجاست که کدام یک از شکل های ① و یا ② نشان دهنده‌ی مود 1 سازه است؟
نسبت به EI و k ، هرکدام می توانند مود اول باشند.

* کمترین k^* و بیشترین m^* = مود 1 .

نشان دادن درجات آزادی سیستم فوق:

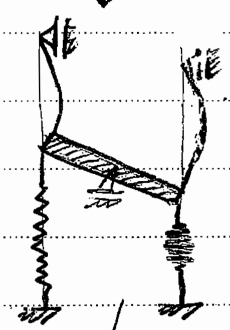


شکل مربوط به حرکت مستقل درجه‌ی آزادی 2 را رسم کنید.



درجه ی آزادی 2 است.

با مود 2 متفاوت است ← اشتباه نکن

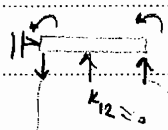


شرط های 1 و 3 و 4 را قفل کرده ایم.

اگر شکل ① صفحه‌ی قبل مود اول ما باشند ⇐ اشتباهاً مود او درجه‌ی آزادی 1 یکسان شد.

$$\Phi_1=\begin{Bmatrix}1\\0\\0\\0\end{Bmatrix}$$

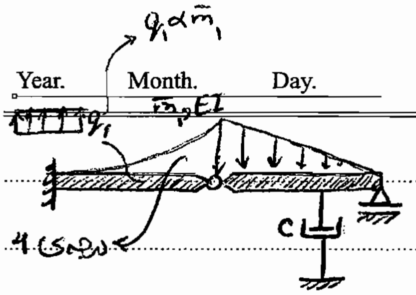
به جز $k_{12}=0$ بقیه اعضایش صفر می شود.



$\Sigma F_y=0 \Rightarrow k_{12}=0$ ⇐ همدیگر را خنثی می کنند ←

امام علی علیه السلام:
هرکه درونش را اصلاح کند، خداوند بیرونش را اصلاح می کند.

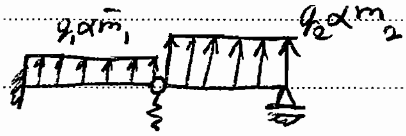
Year. Month. Day. Subject.



$\psi(L) = u^*$

$q_1 \alpha \bar{m}_1$

روش رایلی:



$$\omega_1 = \frac{k^*}{m^*} \quad , \quad k^* \simeq \frac{1}{2}\int_S EI\,[\psi'']^2\,dx + \frac{1}{2}\sum k_i \psi_i^2$$

روی کل سیستم

$$m^* \simeq \frac{1}{2}\int_S \bar{m}(x)\,[\psi]^2\,dx + \sum m_i \psi_i^2 + \sum m_{\theta i}\, \psi_i'^2$$

شیب $= \psi'$

جابجایی × جرم

جابجایی دورانی × جرم دورانی

$\psi_2'' = 0 \rightarrow$ چون صلب است

رایلی حسنی الاصلاح ← در ساختمان های چند طبقه است.

ارتعاش آزاد سیستم‌های چند درجه آزاد :

$$\left([k]-\omega_j^2[m]\right)\{\phi_j\}=\{0\}$$

ω_j = فرکانس مودی
ϕ_j = شکل مودی *

حال اگر معادله‌ی فوق را برای دو مود مختلف به صورت زیر بنویسیم داریم :

برای مود j ← معادله‌ی ① ← $[k]\{\phi_j\}=\omega_j^2[m]\{\phi_j\}$

برای مود k ← معادله‌ی ② ← $[k]\{\phi_k\}=\omega_k^2[m]\{\phi_k\}$

← اگر طرفین معادلات ① و ② را در $\{\phi\}^T$ ضرب کنیم داریم :

رابطه‌ی ③ ← $\{\phi_k\}^T[k]\{\phi_j\}=\omega_j^2\{\phi_k\}^T[m]\{\phi_j\}$

رابطه‌ی ④ ← $\{\phi_j\}^T[k]\{\phi_k\}=\omega_k^2\{\phi_j\}^T[m]\{\phi_k\}$

$④^T-③$:

$$0=\underbrace{(\omega_j^2-\omega_k^2)}\{\phi_k\}^T[m]\{\phi_j\}$$

ω ها در حالت کلی مخالف یکدیگرند
مگر در حالت‌های خاص
پس در حالت کلی نمی‌تواند صفر باشد

NOTEBOOK

امام سجاد علیه السلام: کسی که صبر ندارد، ایمان ندارد.

Year. Month. Day. Subject.

شرط تعامد بردارهای ارتعاشی مبنا نسبت به ماتریس جرم. ← $\{\Phi_k\}^T[M]\{\Phi_j\}=0$ ⇐ ویژگی مهم

باهم یکسان نیستند

طبق رابطه‌ی ③ داریم:

شرط تعامد بردارهای ارتعاشی مبنا نسبت به ماتریس سختی ← $\{\Phi_k\}^T[K]\{\Phi_j\}=0$ ⇐ ویژگی مهم

باهم یکسان نیستند

← ویژگی فوق در واقع رمز تفکیک معادله‌ی حرکت برای حل آن معادله‌ی اصلی است.

برای حل این معادله ← $[M]\{\ddot{u}\}+[C]\{\dot{u}\}+[K]\{u\}=\{P(t)\}$

به روش مودال داریم:

روش مودی محاسبه‌ی پاسخ ساختمان‌های چند درجه آزاد

این اساس روش مودال است. ← $u=\Phi \times y$: فرض می‌کنیم

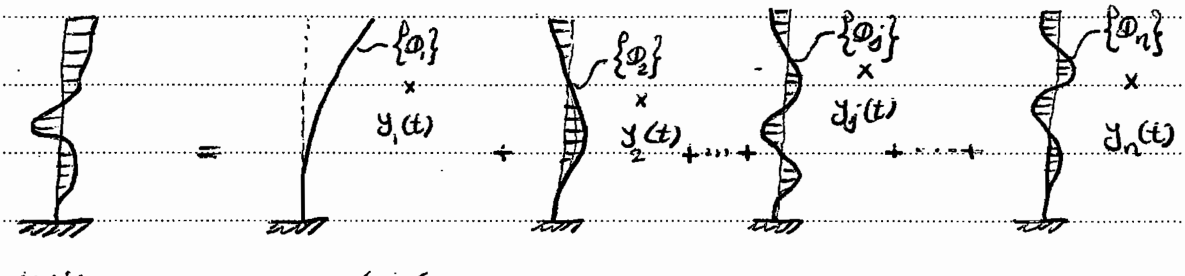
$$\{u(t)\}=[\Phi]\{y(t)\}=\left[\{\Phi_1\}\{\Phi_2\}\cdots\{\Phi_j\}\cdots\{\Phi_n\}\right]\{y(t)\}=\sum_{j=1}^{n}\{\Phi_j\}y_j(t)$$

$$\begin{Bmatrix} u_1(t)\\ u_2(t)\\ \vdots\\ u_i(t)\\ \vdots\\ u_n(t)\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\Phi_{11} & \Phi_{12} & \cdots & \Phi_{1j} & \cdots & \Phi_{1n}\\ \Phi_{21} & \Phi_{22} & \cdots & \Phi_{2j} & \cdots & \Phi_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ \Phi_{j1} & \Phi_{j2} & \cdots & \Phi_{jj} & \cdots & \Phi_{jn}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ \Phi_{n1} & \Phi_{n2} & \cdots & \Phi_{nj} & \cdots & \Phi_{nn}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix} y_1(t)\\ y_2(t)\\ \vdots\\ y_i(t)\\ \vdots\\ y_n(t)\end{Bmatrix}$$

برای n درجه آزاد

NOTEBOOK

تعبیر هندسی معادله‌ی صفحه‌ی قبل:



$u(t)$

⇓

بردار $u(t)$ ها در یک لحظه‌ی خاص

← تعبیر هندسی اش: یعنی هر بردار دلخواهی را که در هر لحظه از زمان یک شکلی می‌تواند داشته باشد، به صورت ترکیبی از یک سری بردارهای متعامد می‌توان آن را نوشت.

اگر سطر i ام ماتریس Φ صفحه‌ی قبل را تنها در نظر بگیریم. ⇒

$$\boxed{u_i(t) = \sum_{j=1}^{n} \Phi_{ij}\, y_i(t)}$$

* مفهوم تعامد در یک فضای n بعدی = استقلال خطی بردارها

تعبیر جبری:

⇐ از لحاظ ریاضی می‌توان هر برداری را به صورت ترکیبی از بردارهای مستقل خطی نوشت.

decompose کردن :

$$[M][\Phi]\{\ddot{y}(t)\} + [C][\Phi]\{\dot{y}(t)\} + [K][\Phi]\{y(t)\} = \{P(t)\}$$

طرفین را در $\{\Phi_j\}^T$ ضرب می‌کنیم :

$$\{\Phi_j\}^T[M]\left(\{\Phi_1\}\{\Phi_2\}\cdots\{\Phi_j\}\cdots\{\Phi_n\}\right)\begin{Bmatrix}\ddot{y}_1\\ \ddot{y}_2\\ \vdots\\ \ddot{y}_j\\ \vdots\\ \ddot{y}_n\end{Bmatrix} + \{\Phi_j\}^T[C][\Phi]\{\dot{y}\}$$

$$\underbrace{\{\Phi_j\}^T}_{1\times n}\underbrace{[M]}_{n\times n}\underbrace{\{\Phi_j\}}_{n\times 1}$$

طبق خاصیت تعامد، کل‌شان صفر اند به جز M_j

$\underset{1\times1}{M_j}$ = جرم مودی

$$+\underbrace{\{\Phi_j\}^T[K][\Phi]\{y\}} = \underbrace{\{\Phi_j\}^T\{P(t)\}}$$

$\{\Phi_j\}^T[K]\{\Phi_j\} = K_j$ سختی مودی

بار مودی $P_j(t)$

$$\Rightarrow \boxed{M_j\ddot{y}_j + ? + K_j y_j = P_j(t)}$$

? ← ما درباره‌ی C، تعامد را بحث نکردیم و فقط برای M و K_j بررسی نمودیم، چون $\Phi_k^T C \Phi_j \neq 0$ می‌شود

فرض رایلی :

$$\rightarrow [C] = \alpha[M] + \beta[K]$$

raily assumption

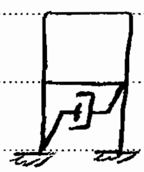
فرض کرد که میرایی ترکیبی خطی از M و K باشد.

طرفین × $\Phi^T\Phi$

با فرض آقای رایلی ← $C_j = \alpha M_j + \beta K_j$

میرایی که با فرض رایلی بدست می‌آید ‖ میرایی کلاسیک، میرایی خطی

$$\Rightarrow ? = C_j\dot{y}_j$$



فرض فوق درست نیست، اما چون در حالت کلی مقدار میرایی کم است، (زیر ۵٪ معمولاً)، پس این خطا چندان تأثیرگذار نمی‌باشد.

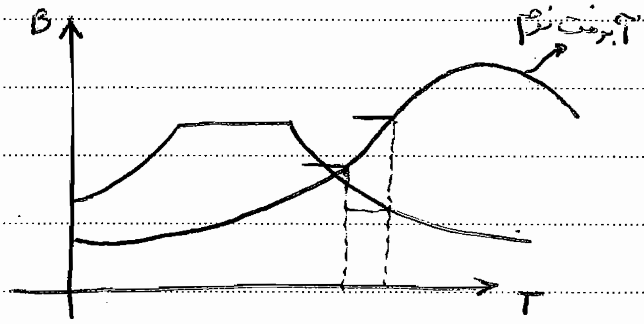
← مواردی مثل اندرکنش خاک و سازه ← میرایی بالا است ← و دیگر باید بررسی شود و فرض فوق

باضرض رایلی کلاسیک داریم: ⇐

$$\boxed{m_j \ddot{y}_j + (c_j \dot{y}_j) + k_j y_j = p_j(t)} \quad (j = 1 \xrightarrow{\text{تا}} n)$$

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t)$$

معادله‌ی مودی



درمسائل ساده، با فرض رایلی، در جهت ضریب اطمینان کار کرده‌ایم. ولی در مسائل پیچیده در جهت عکس ضریب اطمینان می‌تواند باشد.

y = پاسخ مودی ← مهم محاسبه‌ی پاسخ‌های مودی است.

نکته‌ی جالب:

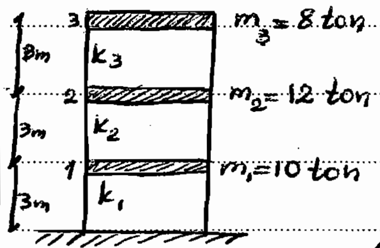
در اغلب موارد نیازی به حل n مود نیست و معمولاً در مورد الگوسازه‌ها $\frac{1}{3}$ م تعداد مودها را حل کنیم و با هم ترکیب کنیم، بالای ۹۵ درصد uها را تشکیل داده‌ایم.

← چون معمولاً از مودهای ۴ و 5 به بالا آنقدر فرکانس‌هایشان می رود بالا و دامنه‌ی آنها می‌آید پایین که تقریباً بود و نبودشان تأثیر خاصی ندارند.

← Sap و Etabs هم جرم مودال را می‌نویسد ←

%80 ← mode1
⋮
ادامه ← %95 ← modeA

حل یک مثال ساده از مسئله‌ی سه طبقه‌ی صفحه‌ی ۱۵ جزوه :



$k_3 = 10,000$ kN/m

$k_2 = 15,000$ kN/m

$k_1 = 20,000$ kN/m

چرا سهم مودهای پایین بیشتر است و بالای ۹۵ درصد شکل‌های اصلی را تشکیل می‌دهند.

← چون مودهای پایین، کم انرژی هستند ، یک نیرو بگذاری روی بالای ساختمان ← مود ۱

دو تیر و بگذاری روی ساختمان ← مود ۲

۳ " " " " ← مود ۳

ولی برای مودهای بالا، باید تعداد زیادی نیرو بگذاریم روی ساختمان تا شکل آن مود پدیدار شود،

← انرژی‌شان بالاست ← آنهایی که انرژی کمتری دارند می‌شوند شکل‌های اصلی

← ما می‌توانیم با حل تعدادی معادله (نه n تا بلکه کمتر) پاسخ را برای هر درجه‌ی آزادی محاسبه نماییم.

حل :

← حل ساختمان سه طبقه‌ی فوق :

kg N

واحدهای روی سازه در حقیقت هر کدام ۱۰۰۰ برابر واحدهای اصلی است (ton , kN)

← نیازی به تبدیل واحد نیست.

← حل مستقیم مثال فوق کاملاً در جزوه موجود است.

فقط می‌خواهیم بگوییم که روش رایلی به چه صورت سؤال را حل می‌کند :

حضرت محمد صلی‌الله علیه و آله و سلم: کسی که حاجت برادر مؤمن خود را برآورده سازد، مانند کسی است که عمر خود را به عبادت گذرانده باشد.

Year. Month. Day. Subject.

برای روش رایلی برای ساختمان‌های چندطبقه که در اکثر آیین‌نامه‌ها از این روش برای محاسبه‌ی فرکانس‌های سازه استفاده می‌شود، ابتدا یک جدول به صورت زیر ترسیم می‌کنیم:

شماره‌ی طبقه — جرم طبقه — نیروی وارد بر طبقه — از Δu_i بدست می‌آید

i	m_i	f_i	Δu_i	u_i
1				
2				
3				

$$\omega_{1,1}^2 = \frac{\sum f_i u_i}{\sum m_i u_i^2}$$

یا $\sum k_i \Delta u_i^2$

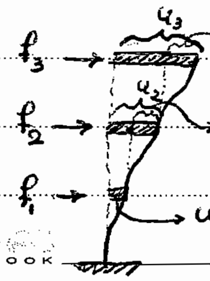
روش فوق فقط ω_1 را می‌دهد. حال جدول را پر می‌کنیم:

i	m_i	f_i	Δu_i	u_i
1	10	10,000		
2	12	12,000		
3	8	8,000		

رایلی اصلاح شده: می‌گوید که نیروها را متناسب با جرم اعمال کنیم.

در مثال فوق نیروهای با ضریب 10,000 متناسب با جرم اعمال می‌کنیم.

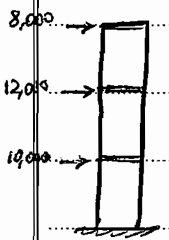
محاسبه‌ی Δu ← برای محاسبه‌ی Δu ی ساختمان‌های چندطبقه داریم:



$$\Delta u_3 = f_3 / k_3$$

$$\Delta u_2 = \frac{f_3 + f_2}{k_2}$$

$$u_1 = \Delta u_1 = \frac{f_1 + f_2 + f_3}{k_1}$$



i	m_i	f_i	Δu_i	u_i
1	10	10,000	$\frac{30,000}{20,000}=1.5$	1.5
2	12	12,000	$\frac{2}{1.5}=1.33$	2.833
3	8	8,000	$\frac{8}{10}=0.8$	3.633

← براساس شکل پایین صفحه‌ی ۱۴۶ ←

$$\begin{cases} u_1=\Delta u_1=1.5 \\ u_2=u_1+\Delta u_2=1.5+1.33=2.833 \\ u_3=u_2+\Delta u_3=2.833+0.8=3.633 \end{cases}$$

← شکلی که بر اثر نیروی اعمال شده‌ی متناسب با جرم بدست می‌آید، u های طبقاتش را بدست آوردیم.

← حال می‌رویم سراغ محاسبه‌ی $\omega_{1,1}$:

$$\omega_{1,1}^2=\frac{\overbrace{\sum f_i u_i}^{\sum k_i(\Delta u_i)^2}}{\sum m_i u_i^2}=\frac{1000(10\times1.5+12\times2.833+8\times3.633)}{10\times1.5^2+12\times2.833^2+8\times3.633^2}=\frac{78060}{224.4}$$

$$\Rightarrow \omega_{1,1}^2=347.86 \Rightarrow \boxed{\omega_{1,1}=18.65}$$

← براساس جزوه (صفحه ۲۰) ← صفحه‌ی ۱۷ ← بالای صفحه ← جواب دقیق : $\omega_1=18.498$

← اگر یک گام دیگر ادامه دهیم، ω_1 ما به ω_1 دقیق بیشتر نزدیک می‌شود.

← برای اینکه یک گام دیگر جلو برویم ← ابتدا نرمال می‌کنیم.

نرمال معمولی: $\leftarrow$

u_i	$\bar{u}_i$
1.5	$\frac{1.5}{1.5}=1$
2.833	$\frac{2.833}{1.5}=1.889$
3.633	$\frac{3.633}{1.5}=2.422$

این‌ها می‌شوند عددهای u_i نرمال شده $\leftarrow$

مقادیر دقیق

$$D=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2.105 & 0.559 & 0.619 \\ 2.898 & -1.476 & .244 \end{bmatrix}$$

$\Leftarrow$ پایین صفحه‌ی ۱۶ جزوه‌ی ۲۰ صفحه‌ای

$\begin{matrix}1\\2.105\\2.898\end{matrix}$ = مقادیر دقیق $\leftarrow$ $\begin{matrix}1\\1.889\\2.422\end{matrix}$ = مقادیر ما

$\leftarrow$ که خطا دارد

$\leftarrow$ خطا در مرکاش خیلی کم است $\leftarrow$ برفرض داشتیم: $\omega_{11}=18.65$ و $\omega_{\text{دقیق}}=18.498$

ولی خطای سود ما تا به $\leftarrow$ $18.65-18.498=0.152$ $\leftarrow$ زیرا درصد است.

اینجا خیلی زیاد است.

$\leftarrow$ که حدوداً 10 تا 15 درصد است.

$\Leftarrow$ D خیلی دیر همگرا می‌شود ولی ω معمولاً زود همگرا می‌شود.

$\leftarrow$ چون در ω $\leftarrow$ جذر می‌گیریم $\sqrt{347....}=18.65$ $\Leftarrow$ خطا به مقدار زیادی کم می‌شود

$\leftarrow$ وقتی اختلاف D در دو مرحله کم شود (مثلاً حدود 2 درصد) یعنی کافیست و خوب است.

Year. Month. Day. Subject.

← در مرحله‌ی بعد ، f_i متناسب با جرم و $\bar{u}_i$ مرحله‌ی قبل محاسبه می‌شود :

$\bar{u}_i$	f_i	Δu_i	u_i
1	$1 \times 10{,}000 = 10{,}000$	$\frac{f_1+f_2+f_3}{20{,}000} = 2.602$	2.602
1.889	$\bar{u}_2 \times 12000 = 22668$	$\frac{f_3+f_2}{15000} = 2.803$	5.405
2.422	$\frac{2.422 \times}{8000} = 19376$	$\frac{19376}{10{,}000} = 1.938$ (k_3)	7.343

$$\longrightarrow \omega_{1,2}^2 = \frac{\sum f_i u_i}{\sum m_i u_i^2}$$

$$\Rightarrow \omega_{1,2}^2 = \frac{10{,}000 \times 2.602 + 22668 \times 5.405 + 19376 \times 7.343}{10 \times (2.602)^2 + 12 \times (5.405)^2 + 8 \times (7.343)^2} = \frac{290818.508}{849.629}$$

مرحله‌ی دوم

$$= 342.3 \Rightarrow \omega_{1,2} = \sqrt{342.3} = 18.501 \longrightarrow$$ که خیلی به مقدار واقعی ω (18.498) نزدیک شده

u_i	$\bar{u}_i$
2.602	$\frac{2.602}{2.602} = 1$
5.405	$\frac{5.405}{2.602} = 2.077$
7.343	$\frac{7.343}{2.602} = 2.821$

u_i دقیق:

1 ، 2.105 ، 2.828

← که خیلی نزدیک شده و شکل خیلی دقیق شده

← اگر باز هم ادامه دهیم ، مد ارتعاشی خیلی دقیق‌تر می‌شود و سود شیب هم فاصله‌اش کمتر می‌شود

✱ حسینی الاصلاح ، از همان ابتدا به جای اینکه f_i را فقط متناسب با جرم انتخاب کنیم ، f_i را متناسب با ارتفاع و جرم اعمال کنیم.

$$f_i \propto m_i h_i \longleftrightarrow$$ حسینی الاصلاح

ارتفاع طبقات از پی

این مفهوم ارتفاع از پی در آیین‌نامه‌ی ۲۸۰۰ هم به کار رفته.

حضرت محمد صلی‌الله علیه و آله و سلم:
بهترین مردم کسی است که خود را در راه خدا وقف کرده است.

Year. Month. Day. Subject.

$f_i \rightarrow$ $m_1 \times 1$ ⇐ برای ساختمان‌های معمولی، ارتفاع‌ها معمولاً برابر هستند ۱و۲و۳

$m_2 \times 2$

$m_3 \times 3$

u_i	f_i	Δu_i	u_i
1.5	$10{,}000 \times 1$	$\frac{58000}{20{,}000} = 2.9$	2.9
2.833	$12{,}000 \times 2$	$\frac{48000}{15000} = 3.2$	6.1
3.633	$8{,}000 \times 3$	$\frac{24000}{10{,}000} = 2.4$	8.5

$\rightarrow \omega_{1,1}^2 = \frac{\sum f_i u_i}{\sum m_i u_i^2}$

$$\Rightarrow \omega_{1,1}^2 = \frac{1000(10 \times 2.9 + 24 \times 6.1 + 24 \times 8.5)}{10 \times (2.9)^2 + 12 \times (6.1)^2 + 8 \times (8.5)^2} = \frac{379400}{1108.62} = 342.227$$

$$\Rightarrow \omega_{1,1} = \sqrt{342.227} = 18.499$$

← که خیلی به ω دقیق نزدیک است.

$\omega_{\text{دقیق}} = 18.498$

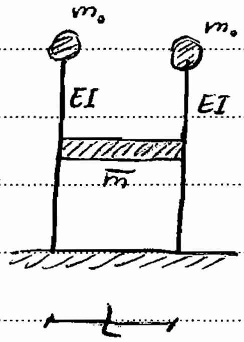
u_i	$\bar{u}_i$		
2.9	$\frac{2.9}{2.9} = 1$	~	1
6.1	$\frac{6.1}{2.9} = 2.103$	~	2.105
8.5	$\frac{8.5}{2.9} = 2.931$	~	2.898

← که به مقادیر دقیق Φ نیز نزدیک است.

← Φ در امتحان ← آلرده ۳ دهیم.

NOTEBOOK

← در امتحان اگر درجه سه بود را استاد، جوری می دهد که یکی از آنها را بتوان ساده بدست آورد، مثلاً



← یکی از فرکانس ها قابل حدس است بدون محاسبه.

↳ ارتعاش کنسول ها بدون جابجایی سقف است.

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3EI/h^3}{m_0}} = \sqrt{\frac{3EI}{m_0 h^3}}$$

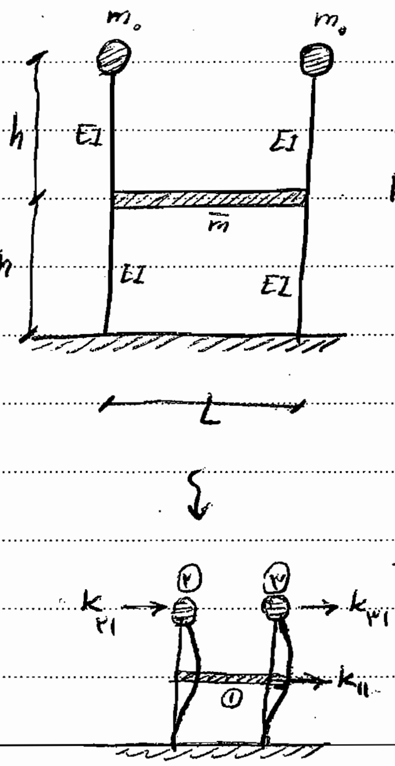
← نمی دانیم ω چند است.

← بعد که ماتریس سختی ω فوق را تشکیل دادیم، λ منهای فوق می کنیم و عبارت را بر آن تقسیم می کنیم.

ه نسیم ا.....

$$[k] = \begin{bmatrix} \frac{30EI}{h^3} & -\frac{3EI}{h^3} & \frac{-3EI}{h^3} \\ -\frac{3EI}{h^3} & \frac{3EI}{h^3} & 0 \\ -\frac{3EI}{h^3} & 0 & \frac{3EI}{h^3} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{3EI}{h^3} \begin{bmatrix} 10 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$m_0 = \frac{\bar{m}L}{5}$

$h = \alpha L$

حال ماتریس M را تشکیل می‌دهیم:

$$[M]=\begin{bmatrix} \bar{m}L & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\bar{m}L}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\bar{m}L}{5} \end{bmatrix} = \frac{\bar{m}L}{5}\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

حال $k-\omega^2 m$ را مساوی صفر قرار می‌دهیم (معادله‌ی مشخصه یا معادله‌ی فرکانس):
که چون فرکانس‌ها بدست می‌آیند

$$\left| [k]-\omega_j^2 [M] \right| = 0$$

$$\Rightarrow \left| \frac{3EI}{\alpha^3 L^3}\begin{bmatrix} 10 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \omega_j^2 \frac{\bar{m}L}{5}\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\Rightarrow \left| \begin{bmatrix} 10 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{\omega_j^2 \bar{m} \alpha^3 L^4}{15EI}\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0$$

فرض : $\dfrac{\omega_j^2 \bar{m}\alpha^3 L^4}{15EI} = \lambda$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 10-5\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \begin{vmatrix} 10-5\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 10-5\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \det = \Big[\underbrace{(10-5\lambda)(1-\lambda)}_{10-5\lambda+5\lambda^2-10\lambda}(1-\lambda)\Big] - \Big[(1-\lambda)+(1-\lambda)\Big] = (1-\lambda)\Big[5\lambda^2-15\lambda+10-2\Big]$$

$$\Rightarrow \det = (1-\lambda)(5\lambda^2 - 15\lambda + 8) = 0$$

$\boxed{\lambda = 1}$ یکی از جواب هاست، اما نمی دانیم که λ_1 یا λ_2 یا λ_3 است.

$$\rightarrow \Delta = (-15)^2 - 4\times 5\times 8 = 65$$

$$\rightarrow \lambda = \frac{15 \pm \sqrt{65}}{10} = \begin{cases} \boxed{\lambda = 2.306} \\ \boxed{\lambda = 0.693} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0.693 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = 2.306 \end{cases}$$

داشتیم: $\lambda_j = \dfrac{\omega_j^2 \bar{m} a^3 L^4}{15EI}$

$$\Rightarrow \omega_j = \sqrt{\frac{\lambda_j \times 15EI}{\bar{m} a^3 L^4}} = 3.872 \sqrt{\frac{\lambda_j \times EI}{\bar{m} a^3 L^4}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_1 = \sqrt{\dfrac{0.693 \times 15EI}{\bar{m} a^3 L^4}} = 3.223 \sqrt{\dfrac{EI}{\bar{m} a^3 L^4}} \\ \omega_2 = 3.872 \sqrt{\dfrac{EI}{\bar{m} a^3 L^4}} \\ \omega_3 = 5.879 \sqrt{\dfrac{EI}{\bar{m} a^3 L^4}} \end{cases}$$

$\rightarrow$ ω_{min} است

$\Downarrow$

ω ی اصلی است.

NOTEBOOK

Year. Month. Day. Subject.

برای حل Φ ها (شکل های بردارهای ارتعاشی) از همان رابطه‌ی صفحه‌ی قبل استفاده می کنیم :

$$\begin{bmatrix} 10-5\lambda_j & -1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda_j & 0 \\ -1 & 0 & 1-\lambda_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_{1j} \\ \Phi_{2j} \\ \Phi_{3j} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

← معادله‌ی فوق بایستی سه بار حل شود (به ازای سه λ ی مختلف)

← آن که ω اش ... است ← باید $\Phi_1=0$ شود ← چون نقطه وسط حرکت می کند

$$\lambda_1 = 0.693 \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 6.535 & -1 & -1 \\ -1 & 0.307 & 0 \\ -1 & 0 & 0.307 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \Phi_{21} \\ \Phi_{31} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

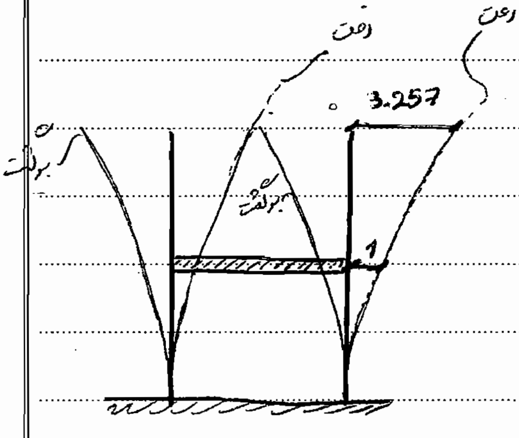
← باید همیشه یکی از Φ ها را فرض کنیم و براساس آن مقدار، بقیه‌ی Φ ها را به صورت ضریبی از آن Φ حدس زده شده، بدست آوریم. (چون n معادله‌ی مستقل نیستند بلکه n-1 معادله مستقل‌اند)

$$\Rightarrow -1 + 0.307 \times \Phi_{21} = 0 \Rightarrow \Phi_{21} = 3.257$$

$$\Rightarrow -1 + 0.307 \times \Phi_{31} = 0 \Rightarrow \Phi_{31} = 3.257$$

NOTEBOOK

پس بنابراین، شکل مودی به صورت زیر می‌باشد:



توضیح:
اگر طبقه‌ی پایین یک واحد حرکت کند،
طبقات 2 و 3 به اندازه‌ی 3.257
می‌آیند جلو (انعکاس می‌کند)

* شکل مود (1)

حال می‌رویم سراغ مود دوم:

$\lambda_2 = 1 \longrightarrow 1 - \lambda_2 = 0$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 10.5 - 5 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_{12} \\ \Phi_{22} \\ \Phi_{32} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

آیا می‌توان مانند روال قبل، اولی را بگیریم 1 ($\Phi_{12} = 1$) ؟

خیر،

$\Phi_{12} = 1 \leftarrow$ یک معادله $5 - \Phi_{22} - \Phi_{32} = 0$

$-1 = 0$
$-1 = 0$ تناقض

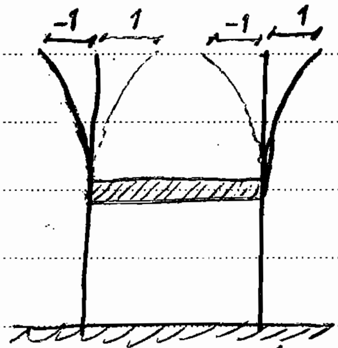
هر وقت که اینگونه شد و به تناقض خوردیم، معلوم است که آن Φ ای که 1 در نظر گرفتیم، نمی‌توانسته 1 باشد، در واقع صفر بوده است، که در واقع الآن که ما به آن 1 داده‌ایم، کار را خراب کرده. $\Rightarrow$ دومی را مساوی 1 می‌گیریم $\leftarrow \Phi_{22} = 1$

$\longrightarrow \Phi_{22}=1 \quad , \quad \Phi_{12}=0$

$$\Rightarrow \qquad \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ \Phi_{32} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad 0-1-\Phi_{32}=0 \quad \Rightarrow \boxed{\Phi_{32}=-1}$$

$\Rightarrow$ شکلش :



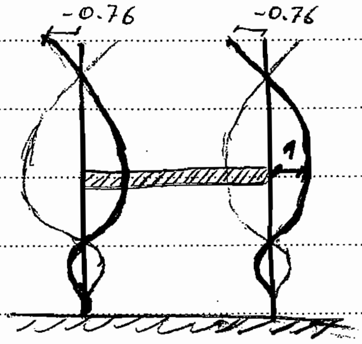
* شکل مود (۲)

توضیح: اگر ② و ③ هر دو تو به یک طرف حرکت کنند، حتماً سقف را نیز با خود می‌کشند.
اگر مخالف هم حرکت کنند، سقف ثابت می‌ماند
که شکل مود ۲.

$$\begin{bmatrix} -1.53 & -1 & -1 \\ -1 & -1.306 & 0 \\ -1 & 0 & -1.306 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \Phi_{23} \\ \Phi_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$\longrightarrow \Phi_{13}=1 \quad , \quad \Phi_{23}=\Phi_{33}=-0.76$

شکل مود (۳):



امام موسی کاظم علیه السلام :
آن که نداری حیرانش کند ، توانگری سرمستش سازد .

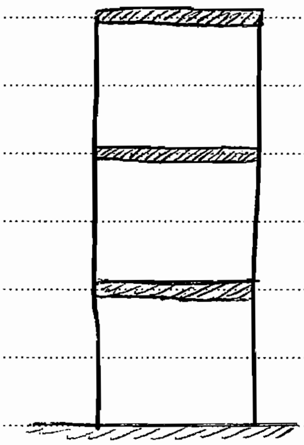
* نکته ی مهم درباره ی مودها :

در هر مود مانند n ، درجات آزادی به n دسته تقسیم می شوند ، که هر دسته در جهت خلاف حرکت دسته ی مجاورش حرکت می کند ، ولی اختلاف به اندازه ی هم با هم دارند.

← در مود 1 ← 1 دسته هستند ← با هم می روند و با هم بر می گردند.
← در مود 2 ← 2 دسته هستند ← که دیدیم در خلاف هم حرکت کردند.
← در مود 3 ← 3 دسته هستند ← مانند شکل صفحه ی 152

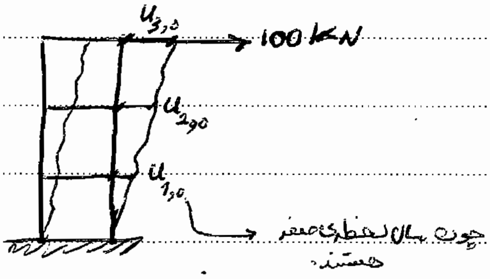
← سؤال امتحان ← حتماً یک رایلی سه الی ۴ طبقه دارد.

← روش دقیق و روش رایلی



← اگر ضربه ای به سازه ی مقابل بخورد، حل چگونه است؟ ارتعاش آزاد سازه ی مقابل را

← سؤال) بر بام سازه ی مقابل، یک نیروی $100\,kN$ وارد کرده ایم و ناگهان رهایش کرده ایم



$\Rightarrow \{u_0\} = \begin{Bmatrix} \vdots \end{Bmatrix}$

بردار u_0

می شود بردار تغییر مکان اولیه ی ما

← تا سازه را رها می کنیم، سازه شروع به ارتعاش می کند، ارتعاش آزاد انجام می دهد.

← سؤال می شود: پاسخ طبقه ی دوم ساختمان را در لحظه ی $t=5\,s$ بدست آورید.

۵ ثانیه پس از آن رهایش کرده ایم

و میرایی هر سه مود را ۵ درصد بگیرید.

$(\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 5\%)$

← ابتدا باید پاسخ ارتعاش آزاد سازه را بنویسیم:

ارتعاش آزاد چند درجه آزاد، فرقی با ارتعاش آزاد یک درجه ندارد:

$$j = \text{شماره‌ی مود}$$

Year. Month. Day. Subject.

$$\rightarrow \quad m_j \ddot{y}_j + c_j \dot{y}_j + k_j y_j = 0$$

← پاسخ چنین سیستمی مانند یک درجه آزاد می‌شود و داریم:

$$\boxed{y_j(t) = e^{-\xi_j \omega_j t}\left(\frac{\dot{y}_{j_0} + \xi_j \omega_j y_{j_0}}{\omega_{D_j}} \sin \omega_{D_j} t + y_{j,0} \cos \omega_{D_j} t\right)}$$

← ما در آن حالت خاص عبارت های فوق را نداریم ← بدست آوردن عبارات:

$$\{u_0\} = [\Phi]\{y_0\}$$

$$\times [M]$$

$$\Rightarrow [M]\{u_0\} = [M][\Phi]\{y_0\}$$

راه حل مشابه $\rightarrow \times \{\Phi_j\}^T$

جز مولفه jام بقیه عبارات‌ش صفر است.

$$\Rightarrow \{\Phi_j\}^T[M]\{u_0\} = \underbrace{\{\Phi_j\}^T[M][\Phi]\{y_0\}}_{m_j \cdot y_{0j}}$$

$$\Rightarrow \boxed{y_{0j} = \frac{\{\Phi_j\}^T[M]\{u_0\}}{m_j}}$$

$$\boxed{\dot{y}_{0j} = \frac{\{\Phi_j\}^T[M]\{\dot{u}_0\}}{m_j}}$$

شرایط صفر هر مود را با فرمول های مقابل بسادگی می‌توان بدست آورد.

← در سؤال m_j و ... را داریم و فقط کافیست u و $\dot{u}$ و ... را جایگذاری کنیم.

واحد ضربه $\frac{N}{s}$ یا $\frac{kN}{s}$ → $\frac{\text{نیرو}}{\text{زمان}}$

اگر بر فرض به سقف سوم ضربه زده باشیم، پاسخ سازه را در لحظه‌ی t بدست آورید.

$\Rightarrow \frac{Imp}{m_3} = \dot{u}_{3,0}$ لحظه‌ی صفر

↓

ضربه به همان سقف سرعت اولیه می‌دهد.

⇓

بردار سرعت اولیه

↓

$$\{\dot{u}_0\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \text{یک عددی} \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \dot{y}_{j,0} = \frac{\{\Phi_j\}^T [M] \{\dot{u}_0\}}{M_j} \Rightarrow \dot{y}_{j,0} \text{ ها بدست می‌آیند}$$

$$\Rightarrow y_j(t) = e^{-\xi_j \omega_j t} \left(\dot{u}_0 + \sin \overset{?!?}{\omega_{Dj}} t \right)$$

Year. Month. Day. Subject.

امام صادق علیه السلام :
سودمندترین چیزها برای آدمی این است که پیش از مردم از عیب خویش آگاه شود

$$[M]\{\ddot{u}\} + [c]\{\dot{u}\} + [k]\{u\} = \{p(t)\}$$

$\boxed{\text{فرض اساسی :} \quad \{u\} = [\Phi]\{y(t)\}}$ ← modal decomposition با روش ←

تابع مکان و زمان — فقط تابع مکان — فقط تابع زمان

همان حل به روش ضربی در ریاضیات مهندسی

⇒ decompose با فرض اساسی فوق، معادله‌ی دیفرانسیل بالا می‌شود و حل می‌گردد.

$$\Rightarrow \boxed{M_j \ddot{y}_j + C_j \dot{y}_j + k_j y_j = P_j(t) \qquad j = 1 \text{ تا } n}$$

modal equation

اگر $\Rightarrow \boxed{C_j = \alpha M_j + \beta k_j}$

فرم رابطه‌ی modal equation به صورت معادله‌ی درجه‌ی دوم است مثل :

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t)$$

* $u_i =$ درجه‌ی آزادی i ام یک ساختمان چند طبقه

حل معادله‌ی مودی بالا (modal equation) با انتگرال دوهامل :

$$y_j(t) = \frac{1}{M_j \omega_{D_j}} \int_0^t P_j(\tau) e^{-\xi_j \omega_j (t-\tau)} \sin \omega_{D_j} (t-\tau)\, d\tau$$

سمت راست معادله‌ی مودی ($P_j(t)$) که در حقیقت برابر است با:

$$\underbrace{\underset{1\times n}{\{\phi_j\}^T}\ \underset{n\times 1}{\{p(t)\}}}_{1\times 1} \Rightarrow P_j(t)$$

فقط یک عبارت است.

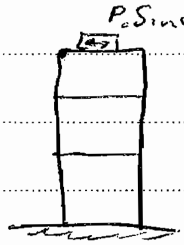
محاسبه‌ی انتگرال پایین صفحه‌ی قبل طولانی و سخت است.

← به جای حل انتگرال ← از حل مستقیم معادله‌ی مودی استفاده می کنیم.

← برفرض اگر $P_j(t)$ ، سینوسی باشد، برفرض در یک ساختمان سه طبقه، در طبقه‌ی بالائش، یک بار $p_0 \sin \omega t$ بگذاریم.

← به وسیله‌ی shaker

← force vibration test

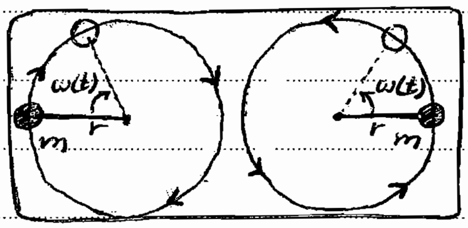


shaker

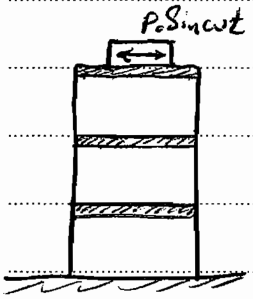
← قطعه‌ای با ابعاد $1\times 0.6\times 0.7$ m و وزنی حدود 1 تن

← برای تست ارتعاش اجباری ساختمان استفاده می شود.

← درونش دو دستگاه گردنده است، دو جرمی که به صورت نشان داده شده در شکل زیر، حول محورشان می توانند بگردند:



← براثر دوران جرم m ، نیروی گریز از مرکز $F=mr\omega^2$ به سیستم وارد می شود ،
مولفه های افقی دو محور ، یکدیگر را خنثی می کنند و تنها مولفه های عمودی آنها
باقی می ماند و با هم جمع می شوند، پس جمعاً نیروی $2F\sin\omega t$ را تولید می کند.



$\rightarrow 2F \rightarrow$ مورد نظر ما P_0

← ارتعاش وارده به سیستم، به ω هم وابسته است،
ابتدا شیکر را به سازه محکم می کنند (حال جوش و یا ...).

← پس از ثابت کردن shaker ، شروع می کنند با فرکانس پایین ارتعاش وارد کردن.
(هم r قابل تنظیم است و هم ω)

← ابتدا با r کوچک و ω کوچک شروع می کنند (چون ω به صورت توان ۲ وارد می شود ω^2،
پس به ω خیلی حساس است)

⇓

ω را باید خیلی کم کم زیاد نمود.

← برفرض اگر به یک باره ω را دو برابر کنیم
← ω^2 ← ۴ برابر می شود ← نیروی ناگهانی ⇐ ممکنه ساختمان خراب شود.

← مقدار m زیاد مهم نیست و عامل مهم بیشتر ω است.

ω فوق ← عامل تخریب ← مال خود دستگاه است.

ω_N ← مال سیستم سازه ای ماست. ← $\omega_N=\sqrt{\frac{K}{m}}$

← کم کم که ω زیاد می شود ⇐ دامنه ی پاسخ هم زیاد می شود ← کم کم به یک حد بار زیادی می رسد

↵ معلوم می شود که دامنه دارد به حالت تشدید نزدیک می شود. ← یعنی در واقع به فرکانس اصلی سیستم رسیده ایم.

← در این حالت r را کم می کنند و دوباره ω را زیاد می کنند تا به peak برسد و
این کار را تکرار می کنند

Year. Month. Day. Subject.

* وقتی با افزایش فرکانس، دامنه کاهش یافت ← از peak رد شده‌ایم

← دوباره ادامه می‌دهیم تا فرکانس دوم سازه پیدا شود ← ω↑ ← تشدید ← x↓ تا رد شود

← فرکانس دوم را پیدا می‌کنیم.

← معمولاً بیش از دو مود را نمی‌توان بدست آورد ← چون آنقدر فرکانس بالا می‌رود که نحوه‌ی اعمال x و ... خیلی مشکل می‌شود

← حداقل آن دو مود سازه را هم ما بتوانیم شناسایی کنیم و با مودهای کامپیوتری که ساختمان را براساس آنها طراحی کرده‌ایم مقایسه کنیم به ما نتایج خوبی می‌دهد.

← این عمل برای ساختمان‌های مهم، که می‌خواهند از عملکرد سازه مطمئن باشند انجام می‌شود

← طراحی اولیه ← به کمک مدل‌های کامپیوتری ← پس از ساخت ← تست می‌کنند.

اگر نه، مدل را اصلاح می‌کنند. ← دقت خوبه ← اگر با دقت تقریباً 2 الی 3٪ جواب می‌خورد

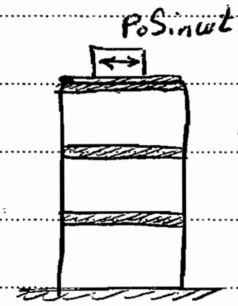
* خیلی باید مواظب بود که به ساختمان آسیب نرسد

* معمولاً پس از اجرای اسکلت و دیوار سفت کاری که جرم اصلی روی سازه اعمال شده است این تست را انجام می‌دهند.

← خستگی برای چندهزار سیکل است.

shaker ← چندصد سیکل بیشتر نیست.

NOTEBOOK



P کوچک

بردار بار سیستم فوق

$$\longrightarrow \{p(t)\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ p_0 \sin \omega t \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} \to p_1(t) = 0 \\ \to p_2(t) = 0 \\ \to p_3(t) = p_0 \sin \omega t \end{matrix}$$

$$\{\Phi\} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} & \Phi_{23} \\ \Phi_{31} & \Phi_{32} & \Phi_{33} \end{bmatrix}$$

Φ_2

$$P_j(t) = \{\Phi_j\}^T \{p(t)\}$$

= طرف راست معادله‌ی مودی ←

سؤال: معادله‌ی مود ۲ چه می‌شود؟ ←

$$\longrightarrow P_2(t) = \langle 1 \quad \Phi_{22} \quad \Phi_{32} \rangle \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ p_0 \sin \omega t \end{Bmatrix} = p_0 \Phi_{32} \sin \omega t$$

P بزرگ ↓ بار مودی

$p_0 \Phi_{32} \to P_2$

$$\Rightarrow \text{معادله مود ۲} : \; M_2 \ddot{y}_2 + C_2 \dot{y}_2 + K_2 y_2 = P_{0_2} \sin \omega t$$

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = P_0 \sin \omega t$$

برای یک درجه آزاد

$$\Longrightarrow u(t) = e^{-\xi \omega_n t}\{A \sin \omega_D t + B \cos \omega_D t\} + \frac{P_0}{k} \frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}\left[(1-\beta^2)\sin \omega t - 2\xi\beta \cos \omega t\right]$$

$\boxed{\beta = \frac{\omega}{\omega_N}}$

فرم ریاضی ۱ درجه آزاد و چند درجه آزاد فرقی نمی‌کند ⇐

$$\Rightarrow y_j(t) = e^{-\xi_j \omega_j t}\left(A_j \sin \omega_{D_j} t + B_j \cos \omega_{D_j} t\right) + \frac{P_{0_j}}{k_j} \frac{1}{(1-\beta_j^2)^2 + (2\xi_j \beta_j)^2} \times \left[(1-\beta_j^2)\sin \omega t - 2\xi_j \beta_j \cos \omega t\right]$$

$\boxed{y_j(0) = 0 \, , \, \dot{y}_j(0) = 0}$ ⇐ $A_j =$

⇐ عین عمل فوق را برای مودهای ۱ و ۲ هم انجام می‌دهیم ،

$$u(t) = [\Phi]\{y(t)\}$$

⇐ وقتی جواب هر سه مود را بدست آوردیم ، ⇐ جواب نهایی = فرمول ترکیبی مودها :

$$\Rightarrow \quad \{u(t)\} = \sum_{j=1}^{n} \{\Phi_j\}\, y_j(t)$$

⇐ روند ساده است و فقط حجم محاسبه بالاست .

در امتحان : ⇐ می‌دانیم که : $\boxed{u_i(t) = \sum_{j=1}^{n} \Phi_{ij}\, y_j(t)}$.

⇐ برفرض برای طبقه‌ی سوم سازه‌ای را خواسته باشیم ⇐ Φ_3 ⇐ Φ_{31}

Φ_{32}

Φ_{33}

$\vdots$

سؤال : پاسخ تغییرمکانی طبقه‌ی سوم ساختمان را نسبت به یک بار سینوسی مانند صفحه‌ی قبل بدست آورید و مثلاً : فقط اثر مود ۱ و ۲ را درنظر بگیرید .

لم یا فقط اثر مود ۱ را درنظر بگیرید .

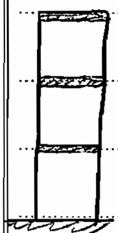
Year. Month. Day. Subject.

← مثلاً وقتی بگویند فقط اثر مود ۱ ⇐ y_2 و y_3 را نیاز نیست حساب کنیم.

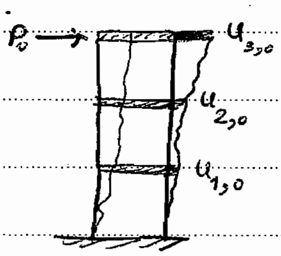
$\rightarrow \{u(t)\} = \{\Phi_1\} y_1(t)$

← حالت‌های دیگری که ممکن است سؤال شود:

یک ضربه‌ای به یکی از سقف‌ها زده شده باشد.



← در طبقه‌ی سوم ساختمانی مشابه روبرو، نیروی استاتیکی P_0 وارد می‌کنیم و سازه به شکل خاصی در می‌آید:



$\rightsquigarrow \{u_0\} = \begin{Bmatrix} u_{1,0} \\ u_{2,0} \\ u_{3,0} \end{Bmatrix}$

مقادیر لحظه‌ی صفر بردار تغییر مکان

← برای روش رایلی ← نیرو تقسیم بر سختی ← u ← ... ⇐ بردار u تشکیل می‌شود.

← ارتعاش آزاد است ⇐ سمت راستش صفر است:

$$m_j \ddot{y}_j + c_j \dot{y}_j + k_j y_j = 0$$ رابطه‌ی ارتعاش آزاد مودی

$$\rightarrow y_j(t) = e^{-\xi_j \omega_j t}\left(\frac{\dot{y}_{j,0} + \xi_j \omega_j y_{j,0}}{\omega_{D_j}} \sin \omega_{D_j} t + y_{j,0} \cos \omega_{D_j} t\right)$$ برای هر سه مود باید بنویسیم.

مقادیر مودی در صفر

$$u_0 = \begin{Bmatrix} u_{1,0} \\ u_{2,0} \\ u_{3,0} \end{Bmatrix}$$

$\{u_0\} = [\Phi]\{y_0\} \longrightarrow$ معکوس کرده شده

NOTEBOOK

راه‌ها : ضرب به جای معکوس کردن $\Rightarrow \times [M] \Rightarrow [M]\{u_0\} = [M][\Phi]\{y_0\}$

چون طبق خاصیت تعامد، همه به جز j ام حذف می‌شوند.

$$\rightarrow \times \{\Phi_j\}^T \Rightarrow \{\Phi_j\}^T[M]\{u_0\} = M_j \times y_{j,0}$$

$$\Rightarrow \boxed{y_{j,0} = \frac{\{\Phi_j\}^T[M]\{u_0\}}{M_j}}$$

سؤال: نیرو را به یکباره حذف می‌کنیم ← پاسخ طبقه‌ی اول را در لحظه‌ی $t=10s$ بدست آورید.
(سرعت اولیه نداریم)

$$\{\dot u_0\} = [\Phi]\{\dot y_0\}$$

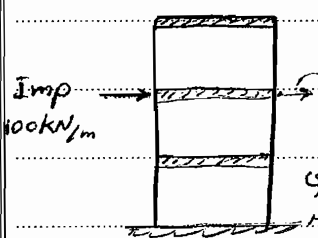
$$\Rightarrow \boxed{\dot y_{j,0} = \frac{\{\Phi_j\}^T[M]\{\dot u_0\}}{M_j}}$$

← $y_{1,0}$ و $y_{2,0}$ و $y_{3,0}$ را باید بنویسیم، $\dot y_{j,0} = 0$

← حالتی که با dot حل شود:

به ساختمان مورد نظر، در طبقه‌ی دومش، یک ضربه‌ی ناگهانی $100\frac{kNs}{m}$ وارد شده،

← یک همچین ضربه‌ای، به سازه سرعت اولیه می‌دهد،
← یک $\dot u$ ی به وجود می‌آید:



$$\dot u_{2,0} = \frac{Imp}{m_2}$$

$$\{\dot u_0\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{Imp}{m_2} \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad u_0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

بردار تغییر مکان اولیه

$$u_0 = 0 \Rightarrow y_{j,0} = 0$$

$$\Rightarrow y_j(t) = e^{-\xi_j \omega_j t}\left(\frac{\dot y_{j,0}}{\omega_{D_j}}\right)\sin \omega_{D_j} t$$

Year. Month. Day. Subject.

← در جزوه‌ی 20 صفحه‌ی Φ و k و ... سازه‌ی سه طبقه محاسبه شد و فقط نیاز است که ما پاسخ مربوطه‌ی سؤال را بدست آوریم.

(پامیز ترزان)

سؤال) آیا به کمک دستگاه لرزاننده می‌توان به گونه‌ای تحریک کرد که فقط یک مود سازه به تنهایی تحریک شود؟ (هیچ مود دیگری در ارتعاش دخالت نداشته باشد)

پاسخ:

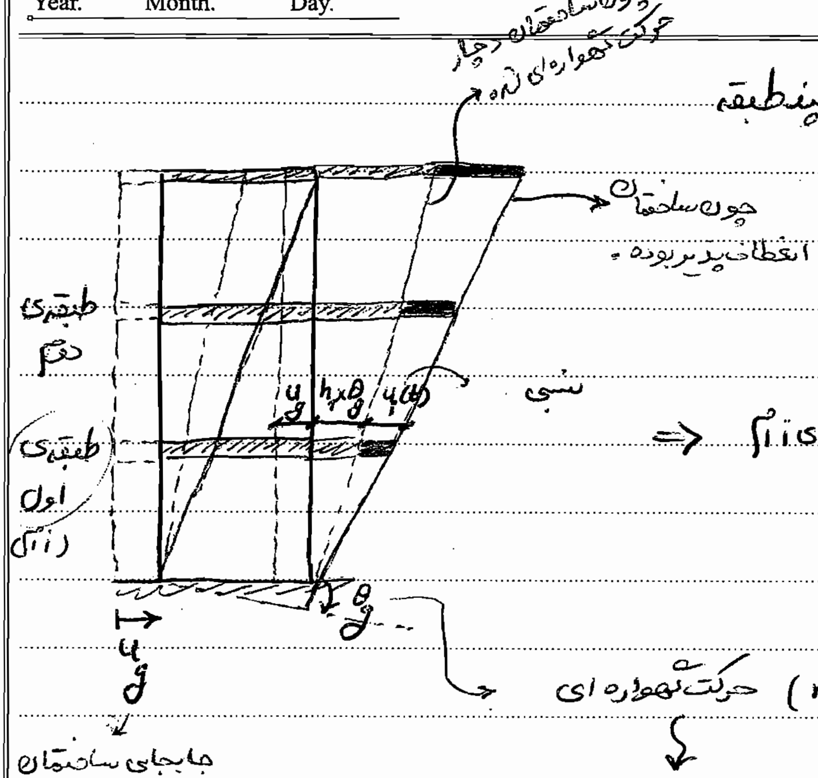
نه، اما در عمل این کار را می‌کنند و مود 1 را از آن استخراج می‌کنند، چون مود 1 که تحریک شود، تقریباً ۹۸ درصد تحریک شده و تنها ۲ درصد برای مود های ۲ و ۳ می‌ماند.

سؤال این است که آیا می‌توان سهم سایر مودها را صفر کرد؟ ← خیر

چون ← Φها عددند ← $P_0 \sin \omega t$ x ← عدد می‌دهند و صفر نمی‌شوند.

NOTEBOOK

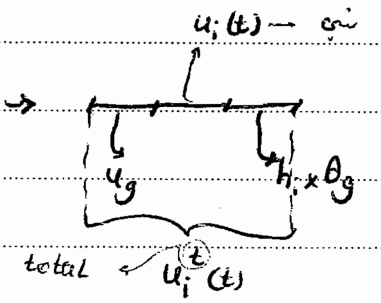
پاسخ لرزه‌ای ساختمان چندطبقه



حرکت گهواره‌ای (raking)

که برای ساختمان‌های بلند خیلی خطرناک است.

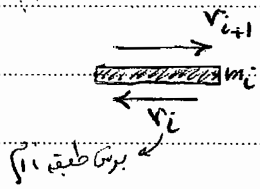
$\Rightarrow$ طبقه‌ی i ام



تغییر مکان کلی در هر لحظه از زمان

$$\longrightarrow u_i^{t}(t) = u_g(t) + h_i\,\theta_g(t) + u_i(t)$$

در یک ساختمان دو بعدی بررسی تعادل طبقه‌ی i ام $\longrightarrow$



$\Rightarrow$ طبق قانون دوم نیوتن

$$v_{i+1} - v_i = m_i\,\ddot{u}_i^{t}$$

$\longleftarrow$ در واقع vهای مفروض، ترکیب f_I و f_s های طبقات هستند،

f_s و f_D ها برحسب

$\Downarrow$

$$-\{f_D(t)\}-\{f_s(t)\}=\begin{cases} m_1(\ddot{u}_g(t)+h_1\ddot{\theta}_g+\ddot{u}_1) \\ m_2(\ddot{u}_g(t)+h_2\ddot{\theta}_g+\ddot{u}_2) \\ \vdots \\ m_n(\ddot{u}_g(t)+h_n\ddot{\theta}_g+\ddot{u}_n) \end{cases}$$

با نا تریه طبقه

$$\boxed{m\ddot{u}=f_I}$$

بردار ضرایب تأثیر زلزله

$$\Rightarrow +\{f_I\}+\{f_D\}+\{f_s\}=-[M]\begin{bmatrix}1 & h_1\\ 1 & h_2\\ \vdots & \vdots\\ 1 & h_i\\ \vdots & \vdots\\ 1 & h_n\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{u}_g(t)\\ \ddot{\theta}_g(t)\end{Bmatrix}$$

$\{P_{eff}(t)\}$ بردار نیروی مؤثر زلزله

← اگر سازه‌ای را بخواهیم برفرض با میز لرزان مرتعش کنیم ⇐ چون حرکت دورانی ندارد

⇐ hهای آیند بیرون (حذف اند) ⇐ سمت راست رابطه‌ی بالا:

$=-[M]\{I\}\ddot{u}_g(t)$ ـــــ یعنی برای های طبقات نیرو داریم

$m_1\ddot{u}$ و $m_2\ddot{u}$ و ...

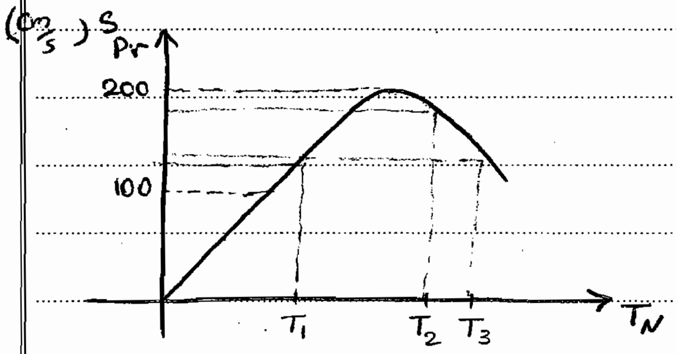
⇐ وقتی در $\{\phi_j\}^T$ ضرب می‌شود تا بارهای مودی

بدست آیند ⇐ همشان مقدار پیدا می‌کنند

⇐ نمی‌شود از شر هیچ مودی خلاص شد ⇐ نمی‌توان هیچ پاسخ مودی را به کل صفر کرد: هرچند که سهم سایر مودها پایین باشد.

Year. Month. Day. Subject.

← در امتحان ← ساختمان سه طبقه‌ی گفته‌شده، برای یک طیف رسم شده است:



ویژگی نمودار طیف:

با داشتن مقدار T هر مود، پاسخ بیشینه را به ما می‌دهد

پاسخ یا کنیم در حالت یک درجه آزاد

$$u_{max} = \frac{1}{\omega_D} S_{Pv}(\omega_N, \xi) \quad : \text{در حالت یک درجه آزاد داشتیم}$$

← سازه‌ی یک درجه آزاد فقط یک فرکانس داشت، می‌خواندیم آن فرکانس را و u_{max} را محاسبه می‌کردیم.

← حال که سه درجه آزاد را چه می‌کنیم؟ ← سه تا مقدار داریم، ۳ تا T خوانده‌ایم ← ۳ نقطه

فقط ارتعاش افقی داریم.

$$\Rightarrow P_{j,eff} = \{\phi_j\}^T \{P_{eff}(t)\} = \frac{\text{حالتی را که فقط 1}}{\text{است در نظر بگیریم}} = -\underbrace{\{\phi_j\}^T_{1\times n} [M]_{n\times n} \{I\}_{n\times 1}}_{1\times 1} \ddot{u}_g(t)$$

L_j = ضریب تأثیر مودی زلزله

معادله‌ی مودی برای حالت زلزله

$$\Rightarrow M_j \ddot{y}_j + C_j \dot{y}_j + K_j y_j = -L_j \ddot{u}_g(t)$$

Year. Month. Day. Subject.

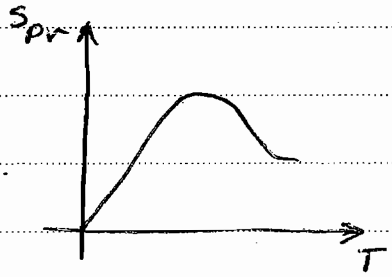
امام حسین علیه السلام: هرکه با خشم خدا، خواهان خشنودی مردم باشد، خداوند او را به مردم وا می‌گذارد.

انتگرال دوهامل ⇐

$$y_j(t) = \frac{-L_j}{m_j \cdot \omega_{D_j}} \times \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) \cdot e^{-\xi_j \omega_j (t-\tau)} \cdot \sin \omega_{D_j} (t-\tau)\, d\tau$$

پاسخ مودی زلزله با کمک انتگرال دوهامل

براساس مقدار طیف ← از ما فقط T را می‌خواهد و کاری با ξ و ω ندارد:



این طیف هیچ ربطی به سازه ندارد و مال زلزله است.
یا برای مجموع زلزله‌هاست.
← ربطی به سازه‌ی خاصی ندارد.

$$\Rightarrow \boxed{y_{j,max} = \frac{L_j}{m_j \cdot \omega_{D_j}} S_{pr}(\omega_j , \xi_j)}$$

پس پاسخ‌های مودی بیشینه را به صورت فوق می‌توان محاسبه نمود.

← پاسخ‌های مودی که محاسبه شوند ← پاسخ مودی هر درجه را می‌توانیم محاسبه کنیم.

$$\Rightarrow u_i(t) = \sum_{j=1}^{n} \phi_{ij}\, y_j(t)$$

← ما به دنبال u_i های ماکزیمم هستیم.

Year. Month. Day. Subject.

$$\rightarrow u_{i,max} \overset{?}{=} \sum_{j=1}^{n} \Phi_{ij} \times y_{j,max}(t)$$

خوب نیست.

y تابعی از زمان است

Φ تابعی از مکان است

این دو همزمان ماکزیمم نمی‌شوند.

اگر شکلشان را بکشیم، هرکدام در یک لحظه‌ی خاص ماکزیمم می‌شوند.

دقیقاً در یک لحظه ماکزیمم نمی‌شوند.

← به این نتیجه رسیدند که به توان دو برسانند و سپس جذرشان را بگیرند:

ساختمان‌های نامنظم

C.Q.C

Complete

Quality

Combination

$$u_{i,max} = C_d \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \Phi_{ij}^2 y_{j,max}^2 + 2\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \Phi_{ij}\Phi_{ik} y_{j,max} y_{k,max}}$$

یک ضریب اصلاحی است.

سهمیش برای سازه‌های نامنظم زیاد می‌شود

که غیر قابل صرف نظر کردن می‌شود.

$$(a_1+a_2+a_3)^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2(a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3)$$

sum

$$SRSS: \quad u_{i,max} = C_d \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \Phi_{ij}^2 y_{j,max}^2}$$

→ برای ساختمان‌های منظم خوب است

square root squares

جذر دوم

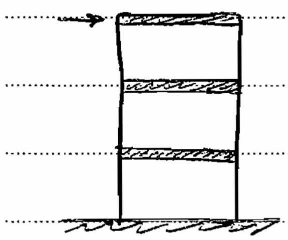
جذر دوم جمع مربع‌ها

حضرت علی علیه السلام: هرکه زیاد شوخی کند، هیبتش کم می‌شود.

* C_d ⟵ معمولاً : $1.4 \sim 1.5$ است.

مثال)

$Imp = 100\ kN.S$



$$[M] = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 90 & 0 \\ 0 & 0 & 90 \end{bmatrix} ton$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 0 \\ -3 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \times 10^4 \quad kN/m$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_1 = 100 \\ m_2 = 90 \\ m_3 = 90 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} k_1 = 4 \times 10^4\ kN/m \\ k_2 = 3 \times 10^4 \\ k_3 = 2 \times 10^4 \end{cases}$$

~~طبقه‌ای که~~ خ معلومات

← سؤال: اگر در طبقه‌ی سوم ساختمان فوق، یک ضربه‌ی کوتاه‌مدت $100\ kN.S$ وارد شود، تغییر مکان طبقه‌ی دوم در لحظه‌ی $t=2s$ چقدر است؟
(پاسخ طبقه‌ی ۲)

$$\boxed{u_2(t = 2\,sec) = ?}$$

$\omega_1 = 8.409$ rad/s

$\omega_2 = 20.687$ rad/s

$\omega_3 = 31.291$ rad/s

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2.098 & 0.907 & -0.930 \\ 3.077 & -0.907 & 0.275 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \xi_1 = 5\% \\ \xi_2 = 10\% \\ \xi_3 = 15\% \end{cases}$$

Year. Month. Day. Subject.

معادله‌ی ارتعاش آزاد :

$$\boxed{y_j(t) = e^{-\xi_j \omega_j t}\,\frac{\dot{y}_{j,0}}{\omega_{D_j}}\,\sin \omega_{D_j} t}$$

برای یک درجه آزادی

$$u(t) = e^{-\xi \omega_n t}\left(\frac{\dot{u}_0 + \xi \omega_n u_0}{\omega_D}\sin \omega_D t + u_0 \cos \omega_D t\right)$$

هر دو مقدار برابر و از اصل هستند. ← Imp ← $\frac{100}{90} = 1.11$ ← m_3

بردار سرعت (m/s)

$$\dot{y}_{j,0} = \frac{\{\Phi_j\}^T [M] \{\dot{u}_0\}}{m_j}$$

$$\Rightarrow \dot{y}_{1,0} = \frac{\{\Phi_1\}^T [M] \{\dot{u}_0\}}{m_1} = \frac{\langle 1,\ 2.098\ \ 3.077\rangle \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 90 & 0 \\ 0 & 0 & 90 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.11 \end{Bmatrix}}{m_1} =$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} = [\Phi]^T [M] [\Phi] \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2.098 & 3.077 \\ 1 & 0.907 & -0.979 \\ 1 & -0.930 & 0.273 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 90 & 0 \\ 0 & 0 & 90 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2.098 & 0.907 & -0.930 \\ 3.077 & -0.979 & 0.273 \end{bmatrix}$$

عددهای غیرقطری که از لحاظ تئوری برابر صفر هستند.

باید در حل ماتریس $\frac{1}{1000}$ از اعداد قطری باشند.

$$= \frac{\langle 100\ \ 182\ \ 273\rangle \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.11 \end{Bmatrix}}{m_1 \simeq 1327.2} = \frac{307.7}{1327} = 0.231$$

$$\begin{bmatrix} 100 & 188.8 & 276.9 \\ 100 & 81.6 & -88.1 \\ 100 & -83.7 & 24.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2.1 & 0.9 & -0.9 \\ 3 & -0.97 & 0.27 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1327.2 & 1.3 & 4.8 \\ 7 & 258.9 & \\ & & 181.9 \end{bmatrix}$$

NOTEBOOK

Year. Month. Day. Subject.

$$\dot{y}_{2,0} = \frac{\langle 1 \quad 0.907 \quad -0.979 \rangle [M] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.11 \end{Bmatrix}}{M_2} = \frac{-97.8}{258.9} = -0.377$$

$\langle 100 \quad 81.63 \quad -88.11 \rangle$

$$\dot{y}_{3,0} = \frac{\langle 1 \quad -0.930 \quad 0.273 \rangle [M] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.11 \end{Bmatrix}}{M_3} = \frac{27.27}{181.9} = 0.15$$

$\langle 100 \quad -83.7 \quad 24.57 \rangle$

ω_D ها هم باید محاسبه شوند :

$$\omega_{D_1} = 8.409\sqrt{1-(0.05)^2} = 8.398 \quad r/s$$

$$\omega_{D_2} = 20.687\sqrt{1-(0.1)^2} = 20.583 \quad r/s$$

$$\omega_{D_3} = 31.291\sqrt{1-(0.15)^2} = 30.937 \quad r/s$$

$$y_1(t) = e^{-0.05\times 8.409\, t} \; \frac{0.23}{8.409} \sin 8.403\, t$$

$$y_2(t) = e^{-0.1\times 20.687\, t} \times \frac{\cdots}{20.687} \sin 20.6\, t$$

$$y_3(t) = e^{-0.15\times 31.291\, t} \times \frac{\cdots}{31.2\cdots} \sin 31.2\, t$$

$$u_i(t) = \sum \Phi_{ij}\, y_j(t)$$

$$\Rightarrow u_2(2) = \sum \Phi_{2j}\, y_j(2) = 2.098 \times y_1 + 0.907 \times y_2 - 0.93 \times y_3$$

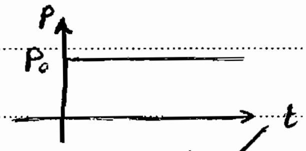
y_1 لحظه‌ی ۲ $\quad$ y_2 لحظه‌ی ۲ $\quad$ y_3 لحظه‌ی ۲

⇐ مسائل مربوط به آن ساختمان سه طبقه:

۱- بار هارمونیک ۲- ضربه ۳- بار ثابت

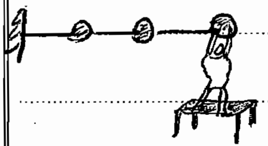
*** مهم

⇐ سؤال: اگر در طبقه‌ی سوم سازه‌ی سه طبقه‌ی مذکور، یک بار ثابت P_0 وارد شود،



⇐ سؤال: اگر یک بار ثابتی به یک طبقه از سازه وارد شود، چه می‌کند؟

⇐ مانند این است که به انتهای طره‌ی مقابل ناگهان شخصی آویزان شود.



که برفرض اگر چهارپایه‌ی مقابل را به یک باره برداریم، ⇐ بار ثابتی بطور ناگهانی به سازه وارد می‌شود.

⇐ اگر طره‌ی مقابل، میرایی داشته باشد ⇐ چند نوسان می‌کند و کم کم در حالت استاتیکی اش می‌ماند.

⇐ حل مسئله‌ی فوق ⇐ وقتی که زمان $\underbrace{\text{طولانی}}_{20\sim30s}$ می‌شود، به حل استاتیکی منجر می‌شود
چون عملاً اثر دینامیکی اش حذف می‌شود

حل:

حل سؤال چنین مسئله‌ای:

$$\{P(t)\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ P_0 \end{Bmatrix} \Rightarrow P_j(t)\cdots$$

چون به طبقه‌ی سوم وارد شده

$$\begin{bmatrix}\Phi_{11} & \Phi_{12} & \Phi_{13}\\ \Phi_{21} & \Phi_{22} & \Phi_{23}\\ \Phi_{31} & \Phi_{32} & \Phi_{33}\end{bmatrix}$$

مود اول $\rightarrow \langle \Phi_{11}\ \ \Phi_{21}\ \ \Phi_{31}\rangle \begin{Bmatrix}0\\0\\P_0\end{Bmatrix} = \Phi_{31}\cdot P_0$

مود دوم $\rightarrow \langle \Phi_{12}\ \ \Phi_{22}\ \ \Phi_{32}\rangle \ \vdots \ = \Phi_{32}\cdot P_0$

مود ۳ $= \Phi_{33}\cdot P_0$

Year. Month. Day. Subject.

$$\Rightarrow P_j(t) = \{\Phi_j\}^T\{P(t)\} = \begin{cases} P_1(t) = \Phi_{31}\,P_0 \\ P_2(t) = \Phi_{32}\,P_0 \\ P_3(t) = \Phi_{33}\,P_0 \end{cases}$$

طبقه‌ی ۳

مود ۳

این مقدار بار مودی ما است $(P_j(t))$

مانند یک درجه آزاد $\Leftarrow$ جواب ثابت $\rightarrow P_0$

$$\Rightarrow M_j\ddot{y}_j + k_j y_j = P_j(t)$$

$$P_{0,j} \Rightarrow y_j(t)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P_{0,1} \\ P_{0,2} \\ P_{0,3} \end{cases} \Rightarrow y_j(t) = \frac{P_{0j}}{k_j} + e^{-\xi_j \omega_j t}\left(A_j \sin + B_j \cos\right)$$

A و B را از شرایط اولیه بدست می‌آوریم.

← شرایط اولیه در اینجا می‌شود همان شرایط اولیه‌ی مودی y_0

← وقتی شرایط اولیه را نمی‌دانیم ← یعنی $\dot{y} = y = 0$

← هر A_j و B_j را با شرایط اولیه‌ی خودش بدست می‌آوریم که در این حالت خاص شرایط اولیه برای همه‌ی j ها یکسان است $(\dot{y}_0 = y_0 = 0)$

← A و B ها در مودها هستند

$$\vec{V} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$$

$y_1 \quad y_2 \quad y_3$

$\Phi_1 \quad \Phi_2 \quad \Phi_3$

Φها برای یک فضای n بعدی هستند

NOTEBOOK

حضرت علی علیه السلام: با تهیدستان بنشین، تا شکرگزاریت (از خدا) زیاد شود.

Year. Month. Day. Subject.

سؤالات امتحان:

① توضیحی: مفهوم نیروی دینامیکی، به چه باری می گوییم بار دینامیکی؟

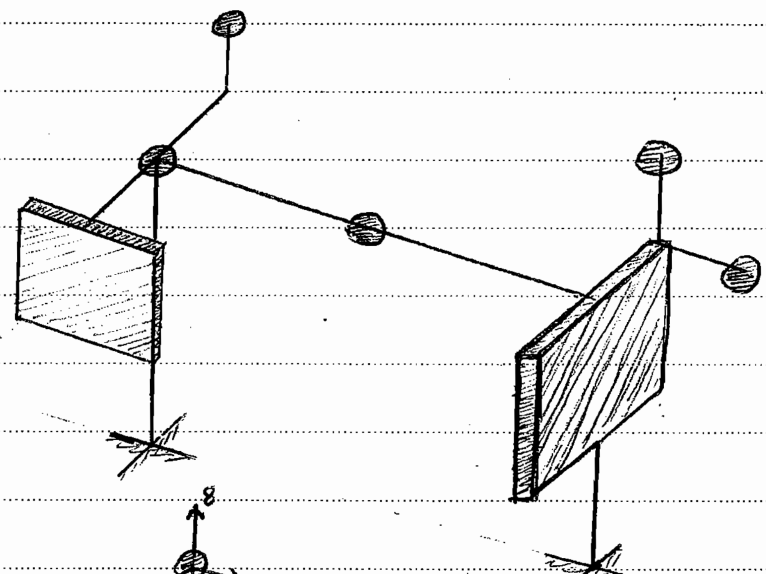
← به هر باری که تغییر کند، بار دینامیکی نمی گوییم.

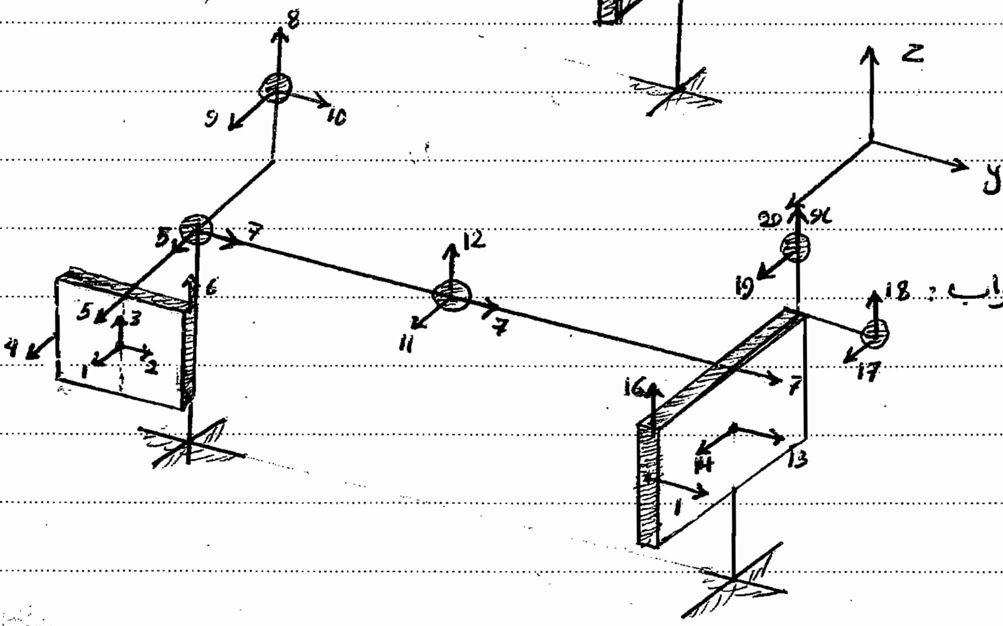
← بلکه یک سری ویژگی هایی داشت.

② سه شکل دارای جرم های متمرکز گسترده است ← سؤال: تعداد درجات آزادی را فقط با فلش روی شکل نشان دهید. ← استقلال درجات آزادی را دقت کنیم.

برای جرم های نقطه ای دوران تعریف نکنیم.

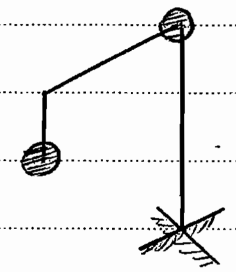
* مثال)



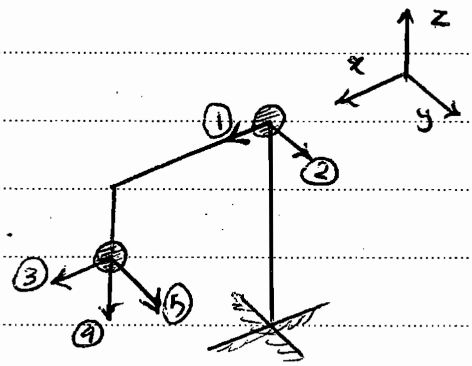


جواب: 18

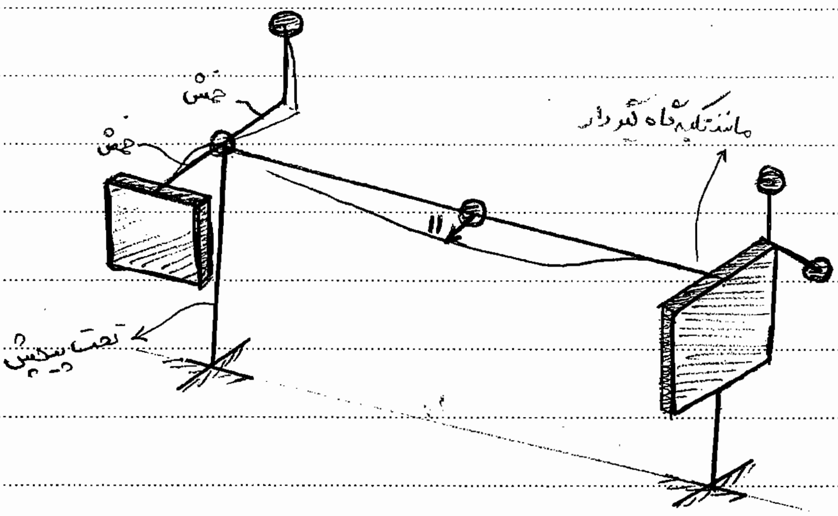
سؤال ساده:

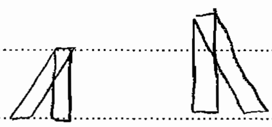


جواب:



۳

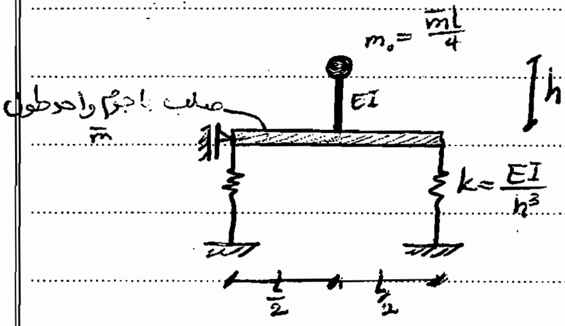




امام صادق علیه السلام: سزاوار نیست مؤمن در مجلسی بنشیند که در آن معصیت خدا می شود و او نمی تواند آن وضع را تغییر دهد.

Year. Month. Day. Subject.

۴) رایلی و...

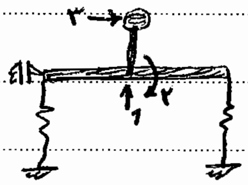


سوال کنکور دکتری:

نسبت h به L را بگونه ای تعیین کنید که

دوتا از فرکانس های سازه باهم برابر شوند.

۱) چند درجه آزادی دارد؟



۲) قسمت دوم سوال:

یکی از فرکانس هایش معلوم است:

← حرکت قائمش.

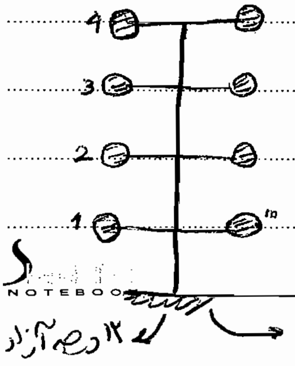
نکته

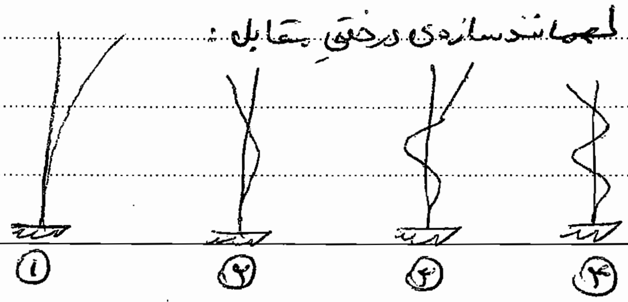
* هر حرکت منظمی که در یک سیستم چند درجه آزاد رخ می دهد، حتما یک مود است.

⇐ حرکت قائم سازه‌ی فوق یک مود است ← اما نمی دانیم مود چندم است.

سازه‌های با مودهای هم فرکانس

← مانند سازه‌ی درختی مقابل:





← 1و2 — 1و3 — 1و4 — 1و1 — 2و1 و ...

← تعداد زیادی مودهای ارتعاشی هم فرکانس داریم.

← حل ← $det=0$ ← یعنی $rank=n-1$ ← یکی وابسته و $n-1$ تا مستقل است

مودهای اختیاری می‌شوند ⇐ به جای اینکه یکی را 1 بگیریم ← پس از تشکیل ماتریس، ⇐

باید بر حسب ۵ تا را 1 بگیریم — می‌بینیم که Rank ماتریس $n-1$ نیست

← مادامی که تعامد بینشان برقرار باشد (مودهایی که ما انتخاب کرده‌ایم)، نسبت به همدیگر مودهای مستقل ⇐ می‌توان معادله‌ی تعادل را develop نمود.

← شکل هایی به درد می‌خورند که مستقل خطی ← عمود باشند.

3) تشکیل ماتریس های جرم و سختی ← در جلسه‌ی قبل محاسبه شد. *

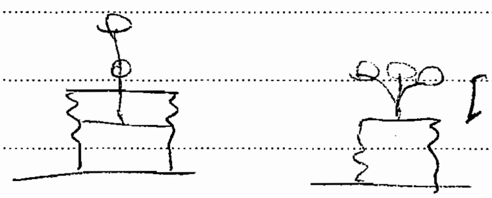
4) یک حرکت قائم دارد که فرکانس آن واضح است:

$$\omega_{?} = \sqrt{\frac{2k}{m_1+m_2}}$$

نمی‌دانیم کدام شماره است.

$\rightarrow k_{\text{کنسول}} = \frac{h^3}{3EI} \; \dots \rightarrow$ اگر سرها هم پا راستا باشند

مودها:



یکی — دوم

h ← $h\uparrow$ ← آرام ارتعاش می‌کند ؛ $h\downarrow$ ← سریعتر ارتعاش می‌کند

← یک جایی هست که فرکانس هردو برابر می‌شود ← $h=?$

← دستگاه سه معادله سه مجهولش را تشکیل می دهیم:

det آن را می کشیم بیرون ← برحسب λ است

↓

یکی از λ ها را داریم

↓

حل می شود ⇐ آن عبارت درجه سه را بر $(\bigcirc-\lambda)$ تقسیم می کنیم و یک عبارت درجه ۲ بدست می آید.

سؤال مهم) * غالباً درجات آزادی استاتیکی از دینامیکی بیشتر است،
← یعنی گاهی ممکن است برعکس باشد.

← سؤال: درجات آزادی استاتیکی و دینامیکی، الزاماً بیشتر است یا کمتر، توضیح دهید.

جواب: اساس درجات آزادی دینامیکی جرم است، یعنی بدون جرم، دینامیک معنا ندارد.

← می دانیم ← یک فنرهم اگر جرم نداشته باشد ارتعاش نمی کند.

← ولی چون هیچ سازه ی بدون جرمی نداریم ⇐ فنرهم جرم دارد ⇐ حتماً در عمل ارتعاش می کند.

← جرم = ملاک ← چون $\sqrt{\frac{k}{m}}$ ← m موجود در مخرج $=0$ ⇐ ∞ ⇐ که...

← در حالیکه در حالت استاتیکی کاری به جرم نداریم که هرجای از سازه ی سازه بخواهیم درجه ی آزادی تعریف کنیم می توانیم.

← دینامیکی ← جرم ← حال بسته به این است که ما تا چه حد، جرم سازه را در مدل سازی وارد کرده باشیم ⇐ تعداد درجات دینامیکی.

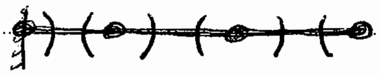
NOTEBOOK

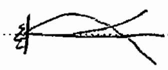
* نیروی دینامیکی ← نیروی اینرسی جسم را فعال می کند.

۲۶ بهمن ۱۴۰۰

Year. Month. Day. Subject.

برفرض یک تیر کنسول را بخواهیم مطالعه کنیم:





← حال اگر کنسول فوق تحت زلزله قرار گیرد:

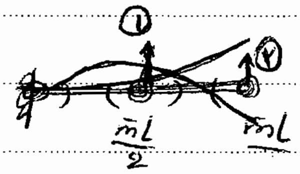
← اگر حرکت زمین آرام باشد ← مود یک حرکت برای تحلیل سازه کافیست،

حال اگر یک کمی هم فرکانس برود بالاتر

← مود دو هم بررسی می‌کنیم.

← این دو مود برای ما کافیست. ← چون می‌خواهیم دو مود بگیریم

← سازه را دو تکه می‌کنیم ←



← با آن دو جرم و با دو درجه‌ی آزادی ۱ و ۲ مسئله را حل می‌کنیم.

← در حالت استاتیکی ← سازه‌ی فوق معین است

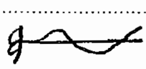
← ارتعاش ⇐ ندارد

⇐ فقط Δ می‌ماند

← فقط با یک درجه‌ی آزادی

استاتیکی مسئله حل می‌شود

← حال اگر فرکانس ارتعاش بالاتر باشد و حس کنیم که ممکن است سازه را در چهار حالت

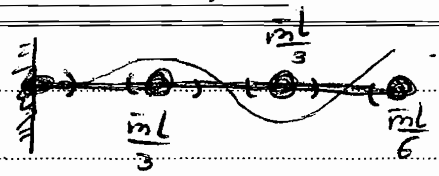
مودی کند ←  ← با مدل کردن قبلی، بیشتر از دو حالت را

نمی‌توان نشان داد ⇐ به صورت بالای صفحه مدل می‌کنیم.

۱۳۹/۱/۱۰

حضرت علی علیه السلام:
بهترین مردم کسی است که از لغزش دیگران درنگذرد و عیوب و خطاهایشان را نپوشاند

Year. Month. Day. Subject:



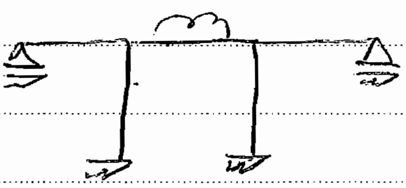
برای آنکه برای فرکانس های بالاتر هم قابل تحلیل باشد (سیستم)
باید یک جرم دیگر هم اضافه شود

⇐ تعداد درجات آزادی دینامیکی ← به دقت مدل سازی ما نیز بستگی دارد.

⇐ معمولاً درجات آزادی دینامیکی بیشتر می شود.

← چون امکان ارتعاش بیشتر از امکان حرکت استاتیکی است.

← مثلاً یک پل:

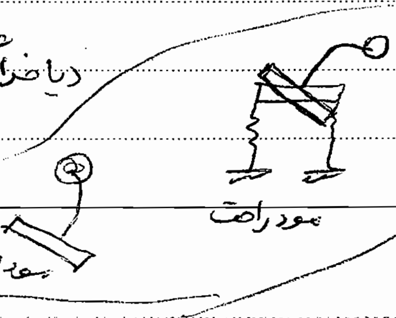


هرچقدر هم که بارگذاری پیچیده داشته باشد
↓
ما با دو دوران و یک انتقال حل می کنیم.
(با سه مجهول استاتیکی مسئله حل می شود)

حتماً در چنین مدل هایی، درجات آزادی دینامیکی بیشتر از استاتیکی می شود. ⇐ اما ارتعاش عرشه را نمی توان به آن سادگی بدست آورد

برعکسش ← در سقف های ساختمان های معمولی ← می دانیم سقف صلب است.
(طاق ضربی صلب نیست)

دیافراگم کردن ⇐ دینامیکی را خیلی از استاتیکی کمتری کند.



مود راست

برای مثال قبل است. ⟵ مود نقصی است

والسلام علیکم

بهمن ۱۰۰۰ [illegible]

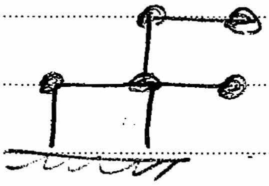
Year. Month. Day. Subject.

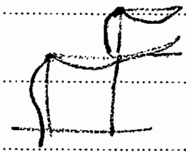
به اتاقی جدا تو را بردند
گرچه بیماری تو مسری نیست
چهره‌ات کاملاً عوض شده است
این خودت نیستی... خدایا کیست؟
نه دو روزت شبیه یکدیگر
نه نگاهت شبیه دیروز است.
تو که هر روز بدتر از دیروز
حال و روزت عجیب جانسوز است
ای که تا ارتفاع می‌بینی
یاد «در بازی دراز» می‌افتی
خاطره، دلهره، تشنج و بعد
از سر تخت باز می‌افتی...
تو از امشب شهید خواهی بود
ای که جانباز پیشوند تو بود
بیست و شش، هفت سال پی‌درپی
انسولین چای تلخ قند تو بود
شیمیایی است مرد بیچاره!
او که تهمت زدند سل دارد
این گل رنگ رفته، در این باغ
به خدا حق آب و گل دارد

«امیر تیموری»

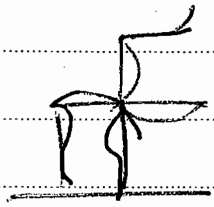
Year. Month. Day. Subject.

$p(t) = a_0 t$





$\rightarrow m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = a_0 t \rightarrow u(t) = u_h(t) + u_p(t)$



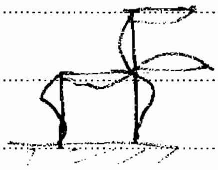
$u_h(t) = e^{-\xi w_N t}\{A \sin w_D t + B \cos w_D t\}$

$u_p(t) = A_0 t$

$\dot{u}_p(t) = A_0$

$\Rightarrow m \times 0 + c \times A_0 + k \times A_0 t = cA_0 + kA_0 t = a_0 t$

$\rightarrow kA_0 = a_0 \rightarrow A_0 = \frac{a_0}{k}$



$\rightarrow$

۲۲۸۳۳۶۳۴

← فرمانیه - دیباجی شمالی - ارغوان غربی - پلاک ۲۱ - طبقه چهارم

22833634

۸۱۸۷۸۴۰۷

۳ بهمن ← ساعت ۲:۳۰ تا ۳:۳۰

۵ بهمن ← ساعت ۱:۳۰ تا ۵

[illegible]

دوشنبه ← ۱۷ ۳:۳۰ تا ۴

دوشنبه ← ۲۴ ۲:۳۰ تا ۳

NOTEBOOK