

www.icivil.ir

پرتال جامع دانشجویان و مهندسين عمران

ارائه كتابها و جزوات رايجان مهندسي عمران

بهترين و برترين مقالات روز عمران

انجمن هاي تفصلي مهندسي عمران

خوشگاه تفصلي مهندسي عمران

فهرست فصول

- فصل ۱- مقدمه‌ای بر تحلیل ماتریسی سازه‌ها ۲
- فصل ۲- روش شیب‌افت ۱۹
- فصل ۳- روش توزیع لنگر (کراس) ۹۸
- فصل ۴- روش کانی ۱۱۵
- فصل ۵- روش‌های تقریبی تحلیل سازه‌ها ۱۳۹

www.ttna.ir

فصل اول

مقدمه‌ای بر تحلیل ماتریسی سازه‌ها

Matrix Analysis of Structures

www.ttnar.ir

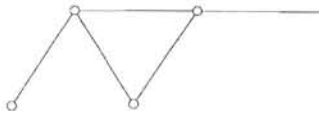
✓ فهرست مطالب

- ۱- روش سختی یا تغییر مکان ۴
- ۱-۱- تعاریف اولیه ۴
- ۲-۱- اصول کلی روش تغییر مکان ۵
- ۳-۱- روابط سختی ۶
- ۴-۱- بدست آوردن ماتریس سختی یک عنصر خرپای مسطح (میله) ۶
- ۵-۱- ماتریس سختی عنصر تیری ۷
- ۶-۱- مختصات عمومی و تعمیم نتایج حاصل از عنصر میله‌ای برای سوار کردن یا سرهم کردن ماتریس سختی ۸
- ۷-۱- سوار کردن یا سرهم کردن ماتریس سختی کل ۱۰
- ۸-۱- تبدیل مختصات ۱۳
- ۱-۸-۱- خرپای مسطح ۱۳
- ۲-۸-۱- قاب مسطح ۱۳
- ۲- روش نرمی یا نیروها ۱۷

۱- روش سختی یا تغییر مکان

The Stiffness Method, The Displacement Method

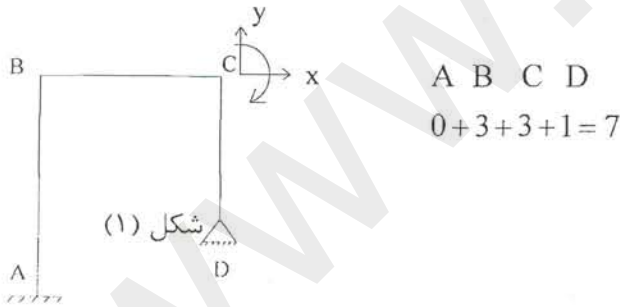
در این روش مجهولات اصلی تغییر مکان‌ها می‌باشند. قبل از شروع به توضیح و جریئات مناسب است تعاریف کلی و عمومی که در روشهای ماتریس کاربرد دارند مورد بررسی قرار گیرند.



۱-۱- تعاریف اولیه

۱- گره (Node یا Joint): محل برخورد دو یا چند عضو می‌باشد.
۲- درجه آزادی (Degree of freedom) درجه آزادی در هر گره تعریف شده و بطور کلی امکان حرکت و تغییر مکان می‌باشد. بعنوان مثال در خرپای مسطح هر گره که تکیه‌گاه نباشد دارای امکان حرکت در دو جهت X و Y بوده و درجه آزادی آن مساوی ۲ می‌باشد.
درجه آزادی کل سازه از مجموع درجات آزادی گره‌های آن سازه بدست می‌آید و نشان‌دهنده ابعاد ماتریس سختی کل و بردارهای بار و تغییر مکان کل می‌باشد.

در تکیه‌گاه‌ها تعدادی یا همه درجات آزادی گرفته شده و پایداری سازه‌ها تأمین می‌گردد.
مثلاً در قاب شکل (۱) تعداد درجات آزادی هر گره مساوی ۳ است. (دو تغییر مکان X و Y و یک چرخش حول محور Z، θ). در تکیه‌گاه A هر سه این تغییر مکانها گرفته شده‌اند، در تکیه‌گاه D درجات آزادی حرکت در جهات X و Y گرفته شده ولی درجه آزادی حول محور Zها (چرخش) موجود می‌باشد. درجه آزادی کل سازه برابر است با:



۳- عضو (Member-Element) عنصر واصل بین دو گره عضو نام دارد.

۴- بارها (Loads) نیروهای خارجی اعمال شده به سازه بطور کلی بارهای وارده نامیده می‌شود.

۵- بردار نیرو و بردار تغییر مکان تعمیم یافته (Generalized Force Vector)

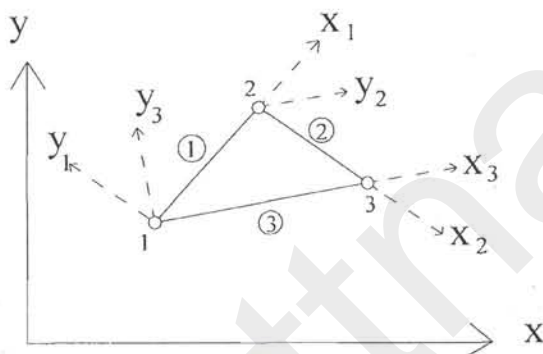
درجات آزادی یک گره و بارهای وارد شده بر آن را اگر چه از نظر ماهیت یکسان نیستند، برای راحتی تعبیر در یک بردار منظم می‌کنیم و آنرا بردار نیرو یا تغییر مکان تعمیم یافته می‌نامیم، بعنوان مثال تغییر مکان‌ها و چرخش در گره‌های یک قاب صلب ماهیتاً مشابه نیستند ولی ما آنها را بصورت بردار تغییر مکان گره‌ی منظم می‌کنیم.

$$\tilde{\mathbf{a}} = (x, y, \theta)^T$$

$$\tilde{\mathbf{R}} = (R_x, R_y, M_z)^T$$

۶- مختصات عمومی و مختصات محلی (Global & Local Coordinate Systems)

مختصات محلی دستگاهی است که معمولاً امتداد محور عضو یکی از امتدادهای اصلی آنست (معمولاً محور X ها) در یک سازه ممکن است به تعداد اعضا، نیاز به دستگاه مختصات منحنی داشته باشیم. اما مختصات عمومی یا کلی دستگاه مختصاتی است که برای تمام سازه در نظر گرفته می شود، معمولاً بردارهای بار و تغییر مکان و ماتریس سختی کل سازه نسبت به این دستگاه تعریف می شود. بعنوان مثال در شکل (۲) دستگاههای مختصات $x_1 y_1$ و $x_2 y_2$ و $x_3 y_3$ محلی و دستگاه XY عمومی می باشد.



شکل ۲

۲-۱- اصول کلی روش تغییر مکان

اصول کلی روش تغییر مکان را میتوان بصورت زیر خلاصه نمود:

رابطه ای بین تغییر مکانها و نیروها در هر عضو در مختصات محلی برقرار می کنیم (تئوری سازه ها، روابط شیب افق)

$$\tilde{\mathbf{K}} \cdot \tilde{\mathbf{a}} = \tilde{\mathbf{f}}$$

- این ضرائب را به دستگاه مختصات عمومی منتقل می کنیم.
- اثر متقابل این ضرائب روی یکدیگر را با سوار کردن یا سر هم کردن ماتریس سختی کل در نظر می گیریم.
- دستگاه معادلات کلی را تشکیل می دهیم.
- بارهای خارجی و شرایط تکیه گاهی را اعمال می کنیم.
- دستگاه معادلات ساده شده را حل می کنیم و تغییر مکانها را بدست می آوریم.
- سایر مجهولات را با کمک روابط تحلیل سازه ها بدست می آوریم.

۳-۱- روابط سختی

بطور خیلی کلی سختی عبارتست از مقاومت یک عضو با جسم در برابر اعمال تغییر مکان در صورتیکه جسمی دارای امکان حرکت در چند مؤلفه باشد بدیهی است که سختی آن بصورت ماتریس تعریف می شود که ضرایب با مؤلفه های این ماتریس را با K_{ij} نشان داده و شرح زیر تعریف می کنیم:

یک ضریب سختی K_{ij} عبارتست از نیروی ایجاد شده در درجه آزادی i تحت اثر اعمال یک تغییر مکان واحد در درجه آزادی j وقتیکه تمامی سایر درجات آزادی گرفته شده اند. ابعاد ماتریس سختی مساوی تعداد درجات آزادی عضو می باشد. بعنوان مثال در مورد خرپای صفحه ای ماتریس سختی 4×4 می باشد زیرا یک عنصر خرپائی دارای ۲ گره بوده و در هر گره ۲ درجه آزادی موجود است. در مورد قاب مسطح ماتریس سختی عضو 6×6 و در مورد خرپای فضائی نیز 6×6 می باشد.

۴-۱- بدست آوردن ماتریس سختی یک عنصر خرپای مسطح (میله)

فرض می کنیم که میله خرپائی $1'-2'$ که فقط تحت تأثیر نیرو تغییر مکان در امتداد محورش (محور X ها) قرار دارد تغییر شکل داده و به وضعیت ۲-۱ برسد (شکل ۳) تغییر مکان نهایی دو انتها را با a_1^e و a_2^e نیروهای حاصل را با R_1^e و R_2^e نشان می دهیم. اگر تنش در میله را با σ^e و سطح مقطع آنرا با A و مدول یانک را با E^e نشان دهیم داریم:

$$R_1^e = -R_2^e = \sigma A^e \quad (1)$$

$$\sigma = \varepsilon A \quad (2)$$

$$\varepsilon = \frac{a_1^e - a_2^e}{\ell^2} \quad (3) \quad \text{که در آن } \varepsilon \text{ کرنش میله می باشد که طبق تعریف عبارتست از:}$$

از ترکیب روابط فوق بدست می آید:

$$R_1^e = -R_2^e = \frac{a_1^e - a_2^e}{\ell^2} E^e A^e \quad (4)$$

این روابط را می توان بصورت ماتریس مرتب نمود.

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} = \left(\frac{EA}{\ell}\right)^e \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

که در واقع معادله رابطه $\tilde{K} \cdot \tilde{a} = \tilde{f}$ می باشد و از آنجا ماتریس سختی عضو میله ای در مختصات محلی به صورت زیر در می آید:

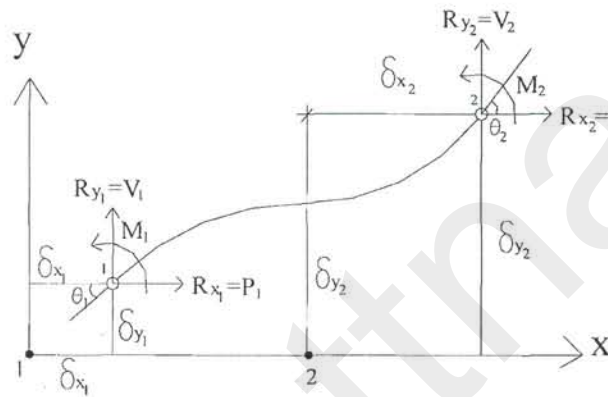
$$\tilde{K}^e = \begin{bmatrix} \left(\frac{EA}{\ell}\right)^e & \left(\frac{-EA}{\ell}\right)^e \\ \left(\frac{-EA}{\ell}\right)^e & \left(\frac{EA}{\ell}\right)^e \end{bmatrix} \quad (6)$$

۵-۱- ماتریس سختی عنصر تیری

یک عنصر تیری مطابق شکل (۴) دارای ۶ درجه آزادی می باشد، برای بدست آوردن ضرایب ماتریس سختی که درجات آزادی را به نیروهای گرهی مرتبط می سازد، از اصل اجتماع اثر قوا یا رویهم گذاری superposition و معادلات شیب افت و ماتریس میله استفاده می کنیم در واقع برای درجات آزادی ۱ و ۴ از روابط سختی برای میله و برای درجات آزادی ۲ و ۳ و ۵ و ۶ از روابط شیب افت استفاده می کنیم.



شکل ۴- الف



شکل ۴- ب

معادله شیب افت با صرفنظر کردن از جمله مربوط به لنگرهای گیرداری به صورت زیر نوشته می شود:

$$\begin{cases} M_{12} = \frac{2EI}{l} (2\theta_1 + \theta_2 - \frac{3\Delta}{l}) = \frac{2EI}{l} (2\theta_1 + \theta_2 - \frac{3(\Delta_1 - \Delta_2)}{l}) \\ M_{21} = \frac{2EI}{l} (\theta_1 + 2\theta_2 - \frac{3\Delta}{l}) \\ V_1 = \frac{M_{12} + M_{21}}{l} = -V_2 = \frac{2EI}{l^2} (3\theta_1 + 3\theta_2 - \frac{6(\Delta_1 - \Delta_2)}{l}) \end{cases}$$

به عنوان مثال برای بدست آوردن K_{22} : طبق تعریف عبارتست از نیروی ایجاد شده در درجه آزادی ۲ (یعنی V_1) تحت اثر اعمال تغییر مکان واحد در درجه آزادی ۲ ($\Delta_1 = 1$) وقتی که سایر درجات آزادی گرفته شده باشند ($\theta_1 = \theta_2 = \Delta_2 = 0$)

$$\begin{cases} M_{12} = \frac{2EI}{l} (0 + 0 - \frac{3(-1)}{l}) = \frac{6EI}{l^2} = M_{21} \\ V_1 = \frac{\frac{6EI}{l^2} + \frac{6EI}{l^2}}{l} = \frac{12EI}{l^3} = K_{22} \quad (a) \end{cases}$$

یا برای بدست آوردن K_{25} طبق تعریف عبارتست از نیروی ایجاد شده در درجه آزادی ۲ (یعنی V_1) تحت

اثر اعمال تغییر مکان واحد در درجه آزادی ۵ یعنی $(\Delta_2 = 1)$ وقتی که سایر درجات آزادی گرفته شده باشند $(\theta_1 = \theta_2 = \Delta_1 = 0)$.

$$\begin{cases} M_{12} = \frac{2EI}{l}(0+0 - \frac{3(1)}{l}) = \frac{-6EI}{l^2} = M_{21} \\ V_1 = \frac{-6EI}{l^2} - \frac{6EI}{l^2} = \frac{-12EI}{l^3} = K_{25} \end{cases}$$

یا مثلاً K_{13} عبارتست از نیروی ایجاد شده در درجه آزادی ۱ (یعنی P_1 شکل ۴-ب) تحت اثر اعمال تغییر مکان واحد در درجه آزادی ۳ یعنی $(\theta_1 = 1)$ وقتی که سایر درجات آزادی گرفته شده باشند، چون چرخشها و Δ ها نیروی محوری ایجاد نمی‌کند پس $K_{13} = 0$ با تجسس مشخص می‌شود که ضرائب ماتریس سختی K^e برای یک عنصر تیری در مختصات محلی به صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \\ -EA & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12EI}{l^3} & \frac{-6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -EA \\ 0 \\ 0 \\ EA \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

۱-۶- مختصات عمومی و تعمیم نتایج حاصل از عنصر میله‌ای برای سوار کردن یا سرهم کردن ماتریس سختی

در مورد یک عنصر خرپائی به طوریکه مشاهده کردیم وقتی در دستگاه مختصات محلی مورد مطالعه قرار گیرد (شکل ۳) دارای یک درجه آزادی در هر گره بوده و ماتریس سختی آن 2×2 و بردار بار و تغییر مکان 2×1 می‌باشد (معادله ۵). اگر همان عنصر میله‌ای در دستگاه مختصات عمومی مورد مطالعه قرار گیرد (شکل ۵) دارای ۲ درجه آزادی در هر گره بوده، ماتریس سختی آن 4×4 می‌باشد در این حال نیرو در گره نیز دارای دو مؤلفه بوده و می‌توان از مفهوم « بردار نیروی گره‌ی » و « ماتریس سختی گره » به جای مؤلفه‌های نیرو ضرایب ماتریس در رابطه ۵ صحبت کرد در واقع می‌توان در معادله ۵

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix}^e = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}^e \quad (5)$$

که در آن $K_{11} = K_{22} = -K_{12} = -K_{21} = \frac{EA}{\ell}$ می‌باشد. هر یک از مؤلفه‌های بردار نیرو (R_1, R_2) را تبدیل به یک بردار و هر یک از مؤلفه‌های ماتریس سختی را تبدیل به یک زیر ماتریس نمود. در حالت کلی وقتی که در یک گره سازه درجه آزادی n باشد، هر یک از مؤلفه‌های بردارهای نیرو و تغییر مکان تبدیل به یک بردار $n \times 1$ و هر مؤلفه ماتریس تبدیل به یک زیر ماتریس $n \times n$ خواهد شد و رابطه به صورت ماتریسی زیر همچنان صادق می‌باشد:

$$\begin{bmatrix} \tilde{R}_1 \\ \tilde{R}_2 \end{bmatrix}^e = \begin{bmatrix} \tilde{K}_{11} & \tilde{K}_{12} \\ \tilde{K}_{21} & \tilde{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \end{bmatrix}^e \quad (10)$$

شکل ۵

به‌عنوان مثال برای یک خرابی صفحه‌ای داریم:

$$\tilde{R}_1^e = \begin{bmatrix} R_{x_1} \\ R_{y_1} \end{bmatrix}^e, \quad \tilde{R}_2^e = \begin{bmatrix} R_{x_2} \\ R_{y_2} \end{bmatrix}^e, \quad \tilde{a}_1 = \begin{bmatrix} \delta_{x_1} \\ \delta_{y_1} \end{bmatrix}^e, \quad \tilde{a}_2 = \begin{bmatrix} \delta_{x_2} \\ \delta_{y_2} \end{bmatrix}^e \quad (b)$$

$$\tilde{K}_{ij} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \quad (c)$$

برای بدست آوردن روابط بین معادلات ۵ و ۱۰ می‌توان گفت که دستگاه مختصات محلی (x, y) نسبت به دستگاه مختصات عمومی XY ، به اندازه α دوران نموده است پس:

$$R_{x_1} = R_1 \cos \alpha, \quad R_{y_1} = R_1 \sin \alpha, \quad \delta_1 = \delta_{x_1} \cos \alpha + \delta_{y_1} \sin \alpha \quad (d)$$

$$\begin{bmatrix} R_{x_1} \\ R_{y_1} \end{bmatrix} = \tilde{T} R_1, \quad \tilde{a}_1 = \tilde{T}^T \begin{bmatrix} \delta_{x_1} \\ \delta_{y_1} \end{bmatrix} \quad (11)$$

یا به صورت ماتریس

$$\tilde{T} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix} \text{ می‌باشد. که در آن}$$

با پیش ضرب کردن مؤلفه های رابطه ۱۰ در \tilde{T} و جاگذاری در رابطه ۱۱ خواهیم داشت:

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} R_{x_1} \\ R_{y_1} \end{bmatrix} &= \tilde{T}k\tilde{T}^T \begin{bmatrix} \delta_{x_1} \\ \delta_{y_1} \end{bmatrix} - \tilde{T}k\tilde{T}^T \begin{bmatrix} \delta_{x_2} \\ \delta_{y_2} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} R_{x_2} \\ R_{y_2} \end{bmatrix} &= -\tilde{T}k\tilde{T}^T \begin{bmatrix} \delta_{x_1} \\ \delta_{y_1} \end{bmatrix} + \tilde{T}k\tilde{T}^T \begin{bmatrix} \delta_{x_2} \\ \delta_{y_2} \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} (12)$$

که به صورت فشرده زیر در می آید:

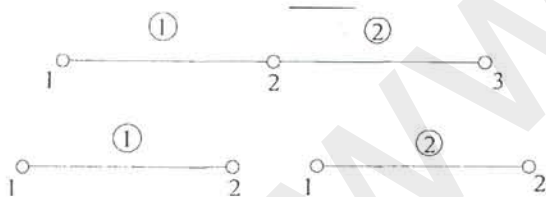
$$\begin{bmatrix} R_{x_1} \\ R_{y_1} \\ R_{x_2} \\ R_{y_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{K}_{11} & \tilde{K}_{12} \\ \tilde{K}_{21} & \tilde{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{x_1} \\ \delta_{y_1} \\ \delta_{x_2} \\ \delta_{y_2} \end{bmatrix} \quad (13)$$

که در آن داریم:

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{11} = \tilde{K}_{22} = -\tilde{K}_{12} = -\tilde{K}_{21} = \tilde{T}k\tilde{T}^T = K \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \end{bmatrix} \\ = \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (14)$$

۷-۱- سوار کردن یا سر هم کردن ماتریس سختی کل

مجدداً یک عنصر خرپای سطح (میله) را در نظر می گیریم این عنصر را در حالتیکه، عنصر دیگری در گره x متصل باشد مورد مطالعه قرار می دهیم (شکل ۶)



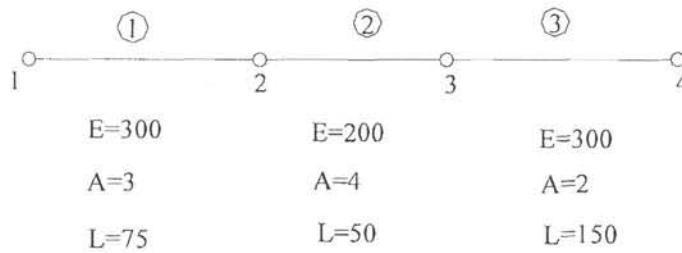
شکل ۶

در این حال تعداد درجات آزادی کل سیستم مساوی $3 \times 1 = 3$ می باشد، بنابراین بردار تغییر مکان یک بردار 3×1 بردار نیرو نیز یک بردار 3×1 و ماتریس سختی کل سیستم یک ماتریس 3×1 می باشد، می توان گفت که تغییر مکان در نقطه ۲ از ترکیب اثر در تغییر مکان دو عضو ۱ و ۲ بدست می آید، در واقع داریم:

$$a_2 = a_2^1 + a_1^2$$

اعداد بالای نمادها نشان دهنده شماره عضو می باشد. از روابط قبلی داریم:

به عنوان مثال می توان این مرحله را برای مجموعه سیستم میله ای شکل ۹ نشان داد، مختصات هر عضو و نیز شماره گذاری کلی در شکل مشخص است.



شکل ۹- مثال

به طوریکه ملاحظه می شود درجات آزادی کل سازه ۴ می باشد. ماتریس سختی هر یک از اعضاء را به دست می آوریم و مطابق شکل (۸) ترکیب می کنیم. ماتریس کل سازه ۴×۴ می باشد.

$$\left(\frac{EA}{L}\right)^1 = \frac{300 \times 3}{75} = 12 \quad ; \quad \tilde{K}^1 = \begin{bmatrix} 12 & -12 \\ -12 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 \end{bmatrix} \quad \text{عضو ۱}$$

$$\left(\frac{EA}{L}\right)^2 = \frac{200 \times 4}{50} = 16 \quad ; \quad \tilde{K}^2 = \begin{bmatrix} 16 & -16 \\ -16 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^2 & K_{12}^2 \\ K_{21}^2 & K_{22}^2 \end{bmatrix} \quad \text{عضو ۲}$$

$$\left(\frac{EA}{L}\right)^3 = \frac{300 \times 2}{150} = 4 \quad ; \quad \tilde{K}^3 = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^3 & K_{12}^3 \\ K_{21}^3 & K_{22}^3 \end{bmatrix} \quad \text{عضو ۳}$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \begin{bmatrix} (12)^1 & (-12)^1 & 0 & 0 \\ (-12)^1 & (12)^1 + (16)^2 & (-16)^2 & 0 \\ 0 & (-16)^2 & (16)^2 + (4)^3 & (-4)^3 \\ 0 & 0 & (-4)^3 & (4)^3 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

اعداد بالای ضرایب سختی نشان دهنده شماره عضو می باشند و از اینجا ماتریس سختی کل به دست می آید:

$$\begin{bmatrix} 12 & -12 & 0 & 0 \\ -12 & 28 & -16 & 0 \\ 0 & -16 & 20 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

ماتریس سختی کل سازه شکل (۹)

- توجه شود که عضو ۱ بین گره های ۱ و ۲ قرار دارد پس ضرایب سختی آن در سطرها و ستونهای ۱ و ۲ نوشته می شود.

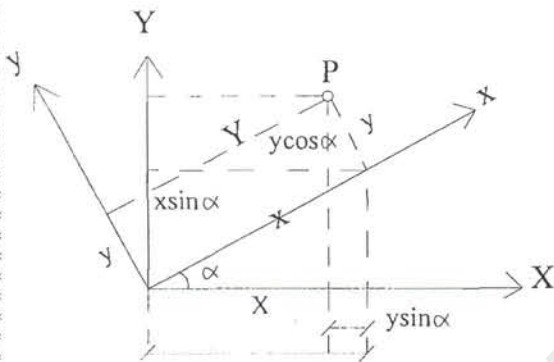
- عضو ۲ بین گره های ۲ و ۳ قرار دارد پس ضرایب سختی آن در سطرها و ستونهای ۲ و ۳ نوشته می شود.

- عضو ۳ بین گره های ۳ و ۴ قرار دارد پس ضرایب سختی آن در سطرها و ستونهای ۳ و ۴ نوشته می شود.

این مطلب را می‌توان برای حالتی که در هر گره به جای ۱ درجه آزادی، nd درجه آزادی داشته باشیم تعمیم داد. بدین معنی که در شکل ۸ بجای ضرائب سختی میله یک بعدی که ماتریسهای 1×1 هستند، زیر ماتریس گرهی مربوطه به ابعاد $nd \times nd$ را قرار داد و در بردارهای تغییر مکان و نیرو نیز بجای هر مولفه یک بردار $nd \times 1$ قرار می‌گیرد و بقیه مطالب کاملاً مثل حالت $nd = 1$ می‌باشد. بعنوان مثال در یک خرپای مسطح در مختصات عمومی تمامی ضرائب K_{ij} در رابطه شکل (۷-ب) تبدیل به زیر ماتریسهای 2×2 و تمامی a_i ها و R_i ها تبدیل به بردارهای 2×1 می‌شوند و در حالت قاب مسطح K_{ij} ها تبدیل به زیر ماتریسهای به ابعاد 3×3 و بردارهای a_i و R_i ها نیز به ابعاد 3×1 خواهند بود. توجه شود که تمامی این ضرایب و یا زیر ماتریسها بایستی در مختصات عمومی محاسبه شوند، یعنی پس از تعیین ماتریسهای سختی و بردارهای مربوط در دستگاه مختصات محلی می‌بایستی همه آنها به مختصات عمومی سازه انتقال داده شوند.

۸-۱- تبدیل مختصات

۱-۸-۱- خرپای مسطح



فرض می‌کنیم که دستگاه مختصات محلی xy نسبت به دستگاه عمومی XY به اندازه α در جهت خلاف عقربه‌های ساعت چرخیده باشد (شکل ۱۰). در این حال داریم:

$$\left. \begin{aligned} X &= x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ Y &= y \cos \alpha + x \sin \alpha \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}^G = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}^L \quad (17)$$

$$\tilde{\tilde{X}} = \tilde{\tilde{T}}_0 \tilde{\tilde{x}} \quad (18)$$

یا به صورت ماتریسی:

این رابطه برای انتقال بردارها به کار می‌رود. در مورد ماتریس سختی عضو که 4×4 می‌باشد رابطه انتقال به-

صورت زیر خواهد بود:

$$\tilde{\tilde{K}} G = \tilde{\tilde{T}}^T K_L \tilde{\tilde{T}} \quad (19)$$

$$\text{که در آن } \tilde{\tilde{T}} = \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{T}}_0 & \tilde{\tilde{O}}^{2 \times 2} \\ \tilde{\tilde{O}}^{2 \times 2} & \tilde{\tilde{T}}_0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

۱-۸-۲- قاب مسطح

در قاب مسطح علاوه بر تغییر مکان‌های x و y چرخش θ حول محور Z نیز جزء درجات آزادی است و بردار تغییر مکان بصورت:

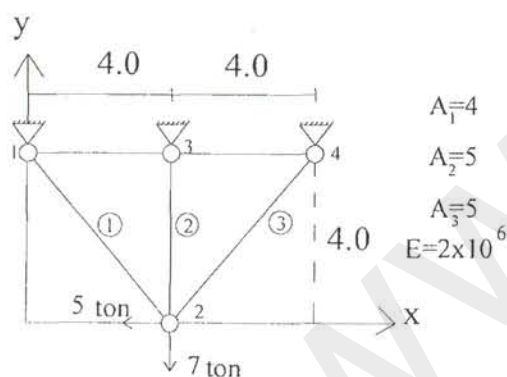
$$\tilde{\alpha}_i = [\delta_{xi} \quad \delta_{yi} \quad \theta_{zi}]^T \quad (21)$$

می باشد. همان طور که از شکل ۱۰ پیداست دوران محورها تأثیری در چرخش θ ندارد بنابراین، ماتریس انتقال در این حالت بصورت زیر می باشد:

$$\tilde{T}_0 = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (22)$$

بنابراین می توان روش سختی را در قدم های زیر خلاصه نمود:

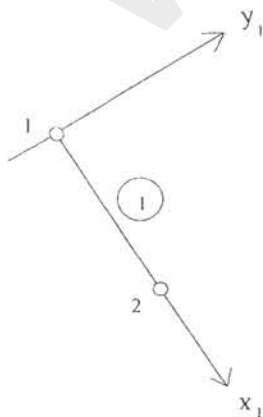
- ۱- محاسبه ماتریس سختی هر عضو (رابطه ۶ برای خرپا و رابطه ۴ برای قاب)
- ۲- محاسبه بردار بارهای گرهی
- ۳- محاسبه ماتریسهای انتقال برای هر عضو (رابطه ۱۷ برای خرپا و رابطه ۲۲ برای قاب)
- ۴- انتقال ماتریسهای سختی و بردار نیروهای گرهی هر عضو به مختصات عمومی (رابطه ۱۸ و رابطه ۱۹)
- ۵- سوار کردن یا سر هم کردن ماتریس سختی کل طبق شمای شکل (۸)
- ۶- حل سیستم معادلات حاصل و به دست آوردن تغییر مکانها
- ۷- بدست آوردن سایر مجهولات از روابط تحلیل (رابطه ۶ و رابطه ۹)



مثال - مطلوبست حل خریای زیر به روش ماتریس سختی

حل:

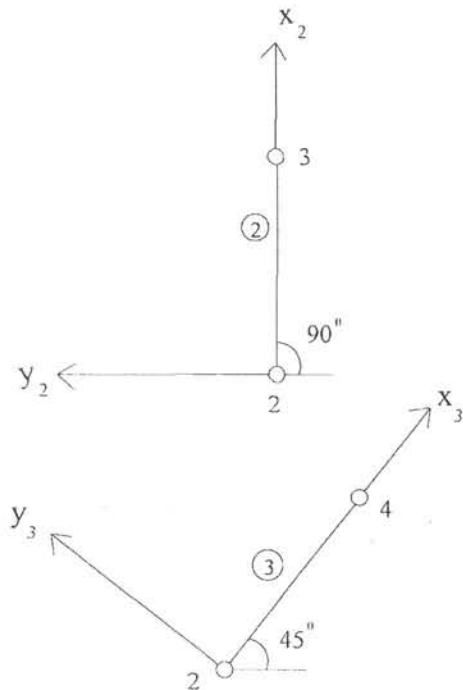
الف- انتخاب محورهای محلی و تشکیل ماتریس های سختی در مختصات محلی. همان طور که به یاد داریم امتداد محور X ها امتداد میله می باشد و برای جلوگیری از اشتباه در مسایل دیگر بهتر است طوری جهت محور X ها را انتخاب کنیم که شماره گره بزرگتر در جهت مثبت محور X ها قرار گیرد پس اولین دستگاه محلی دستگاه $X_1 Y_1$ می باشد.



$$\tilde{K}_{11}^1 = \left(\frac{EA}{L} \right)^T \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \end{bmatrix}$$

$$= \frac{2 \times 10^6 \times 4}{4\sqrt{2} \times 100} \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{k}_{11}^1 = 10^4 \begin{bmatrix} 0.707 & -0.707 \\ -0.707 & 0.707 \end{bmatrix} = \tilde{k}_{22}^1 = -\tilde{k}_{12}^1 = -\tilde{k}_{21}^1$$



برای عضو ۲، دستگاه x_2y_2

$$\tilde{k}_{11}^2 = \frac{5 \times 2 \times 10^6}{4} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{k}_{11}^2 = 10^4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2.5 \end{bmatrix} = \tilde{k}_{22}^2 = -\tilde{k}_{12}^2 = -\tilde{k}_{21}^2$$

برای عضو ۳، دستگاه x_3y_3

$$\tilde{k}_{11}^3 = \frac{5 \times 2 \times 10^6}{4\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{k}_{11}^3 = 10^4 \begin{bmatrix} 0.884 & 0.884 \\ 0.884 & 0.884 \end{bmatrix} = \tilde{k}_{22}^3 = -\tilde{k}_{12}^3 = -\tilde{k}_{21}^3$$

ب- سوار کردن ماتریس سختی کل (روش گرهی)

$$\begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \tilde{k}_{11}^1 & & & \\ \tilde{k}_{21}^1 & \tilde{k}_{22}^1 + \tilde{k}_{11}^2 + \tilde{k}_{11}^3 & & \\ & \tilde{k}_{21}^2 & \tilde{k}_{22}^2 & \\ & \tilde{k}_{21}^3 & \tilde{k}_{22}^3 & \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \\ \tilde{a}_3 \\ \tilde{a}_4 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} \tilde{R}_1 \\ \tilde{R}_2 \\ \tilde{R}_3 \\ \tilde{R}_4 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

مطابق الگوی فوق ماتریس سختی کل و بردارهای تغییر مکان و نیرو را تشکیل می‌دهیم، در مرحله قرار دادن اعضاء ماتریس سختی کل توجه می‌کنیم که مثلاً عضو ۲ بین گره‌های ۲ و ۳ قرار دارد پس مؤلفه‌های ماتریس سختی آن در خانه‌های مربوط به سطر و ستون ۲ و ۳ قرار خواهد گرفت و یا عضو ۳ بین گره‌های ۲ و ۴ قرار دارد، پس مؤلفه‌های مربوطه در تقاطع سطر و ستون ۲ و ۴ قرار می‌گیرد و...

در این مرحله توجه می‌کنیم که در هر خانه ماتریس سختی گرهی بایستی یک زیر ماتریس 2×2 که خود مؤلفه ماتریس سختی یک عنصر می‌باشد قرار داده شود و نیز بردار تغییر مکان‌های گرهی در هر نقطه دارای دو

مؤلفه δ_{x_i} و δ_{y_i} و بردار بارهای گرهی نیز دارای دو مؤلفه R_{x_i} و R_{y_i} می‌باشد، با توجه به این نکات ماتریس سختی کل و بردارهای بار و تغییر مکان، رابطه ماتریس زیر حاصل می‌شود.

$$\begin{bmatrix} 0.707 & -0.707 & -0.707 & 0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.707 & 0.707 & 0.707 & -0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.707 & 0.707 & 0.707+0.884 & -0.707+0.884 & 0 & 0 & -0.884 & -0.884 \\ 0.707 & -0.707 & -0.707+0.884 & 0.707+2.5+0.884 & 0 & -2.5 & -0.884 & -0.884 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2.5 & 0 & 2.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.884 & -0.884 & 0 & 0 & 0.884 & 0.884 \\ 0 & 0 & -0.884 & -0.884 & 0 & 0 & 0.884 & 0.884 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{x_1} \\ \delta_{y_1} \\ \delta_{x_2} \\ \delta_{y_2} \\ \delta_{x_3} \\ \delta_{y_3} \\ \delta_{x_4} \\ \delta_{y_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{x_1} \\ R_{y_1} \\ R_{x_2} \\ R_{y_2} \\ R_{x_3} \\ R_{y_3} \\ R_{x_4} \\ R_{y_4} \end{bmatrix}$$

ج- مرحله حل: این مرحله در محاسبات دستی با استفاده از روش زیر که منجر به کوچک شدن ماتریس سختی کل می‌شود حل می‌شود ولی در برنامه‌های کامپیوتری به جهت سیستماتیک کردن برنامه روش‌های مناسبی جهت حل دستگاه وجود دارد که توضیح داده خواهد شد. در این روش سطرها و ستون‌ها مربوط به تغییر مکان‌های صفر حذف می‌شوند، ماتریس سختی کاهش یافته برای حل مجهولات مورد استفاده قرار می‌گیرد.

$$10^4 \begin{bmatrix} 1.591 & 0.177 \\ 0.177 & 4.091 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{x_2} \\ \delta_{y_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{x_2} \\ R_{y_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$10^4 \begin{bmatrix} 1.591 & 0.177 \\ 0 & 4.091 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{x_2} \\ \delta_{y_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -6.444 \end{bmatrix}$$

$$\delta_{y_2} = -1.583 \times 10^{-4} \text{ m}$$

$$\delta_{x_2} = -2.467 \times 10^{-4} \text{ m}$$

د- به دست آوردن سایر مجهولات: با توجه به این که تمامی تغییر مکان‌ها غیر از δ_{y_2} و δ_{x_2} صفر هستند، مقادیر R_{x_i} از ضرب عناصر ستون‌های ۳ و ۴ در تغییر مکان‌های δ_{y_2} و δ_{x_2} به دست می‌آیند.

$$R_{x_1} = 0.978 \text{ t}$$

$$R_{y_1} = -0.978 \text{ t}$$

$$R_{x_3} = 0.0$$

$$R_{y_3} = 3.958 \text{ t}$$

$$R_{x_4} = 4.02$$

$$R_{y_4} = 4.02$$

$$\sum F_x = -5.0 ; \sum F_y = -7.0$$

۲- روش نرمی یا نیروها Force Method , Flexibility Method

در این روش مجهولات اصلی نیروها هستند و برای فرمول‌سازی از روش‌های انرژی و قضایای کاستیلیانو استفاده می‌شود. انرژی ذخیره شده در یک میله منشوری که تحت اثر نیروهای محوری F ، نیروهای برشی V و لنگرهای خمشی M قرار دارد X به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\Pi = \int_0^L \frac{F^2}{2EA} dx + \int_0^L \frac{V^2}{2GA} dx + \int_0^L \frac{(M + Vx)^2}{2EI} dx$$

اگر از اثر تغییر شکل‌های برشی صرف‌نظر کنیم (معمولاً این‌طور است) فرمول انرژی ذخیره شده در یک میله به صورت زیر ساده می‌شود.

$$\Pi = \int_0^L \frac{F^2}{2EA} dx + \int_0^L \frac{(M + Vx)^2}{2EI} dx$$

در این رابطه Π انرژی تغییر شکل، F نیروی محوری، M لنگر خمشی، V نیروی برشی بوده و I, A, E ترتیب مدول ارتجاعی مصالح و سطح مقطع و لنگر اینرسی می‌باشند. با استفاده از قضیه دوم کاستیلیانو داریم:

$$u = \frac{\partial \Pi}{\partial F}, \quad v = \frac{\partial \Pi}{\partial V}, \quad \theta = \frac{\partial \Pi}{\partial M}$$

برای تعیین رابطه بین نیروها و تغییر مکان‌ها (تنش و کرنش) ضرایب نرمی را تعریف می‌کنیم.

ضریب نرمی f_{ij} برابر است با تغییر مکان حاصل در درجه آزادی i ، تحت اثر اعمال یک نیروی واحد در درجه آزادی j وقتی که تمام سایر درجات آزادی بدون بار هستند. با استفاده از قضیه کاستیلیانو و رابطه انرژی خواهیم داشت:

$$u = \int_0^L \frac{2F}{2EA} \frac{\partial F}{\partial F} dx = \frac{FL}{EA}$$

$$v = \int_0^L \frac{2(M + Vx)}{2EI} x dx = \frac{VL^3}{2EI} + \frac{ML^2}{2EI}$$

$$\theta = \int_0^L \frac{2(M + Vx)}{2EI} dx = \frac{ML}{EI} + \frac{VL^2}{2EI}$$

با توجه به تعریف ضرایب f_{ij} و جهات مثبت مطابق شکل زیر می‌توان این ضرایب را حساب کرد.



$$f_{11} = \left\{ \begin{array}{l} \text{تغییر مکان حاصل در درجه آزادی ۱} \\ \text{تحت اثر اعمال بار واحد در درجه آزادی ۱} \\ \hline F=1 \\ \text{(وقتی که سایر درجات آزادی بدون بار هستند } M=0, V=0 \text{)} \\ \hline u \end{array} \right\} = \frac{L}{EA}$$

$$f_{12} = \left\{ \begin{array}{l} \text{تغییر مکان حاصل در درجه آزادی ۱} \\ \text{تحت اثر اعمال بار واحد در درجه آزادی ۲} \\ \hline V=1 \\ \text{(وقتی که سایر درجات آزادی بدون بار هستند } M=0 \text{ و } F=0 \text{)} \\ \hline u \end{array} \right\} = 0$$

$$f_{13} = \left\{ \begin{array}{l} \text{تغییر مکان حاصل در درجه آزادی ۱} \\ \text{تحت اثر اعمال بار واحد در درجه آزادی ۳} \\ \hline M=1 \\ \text{(وقتی که سایر درجات آزادی بدون بار هستند } V=0 \text{ و } F=0 \text{)} \\ \hline u \end{array} \right\} = 0$$

$$f_{23} = \left\{ \begin{array}{l} \text{تغییر مکان حاصل در درجه آزادی ۱} \\ \text{تحت اثر اعمال بار واحد در درجه آزادی ۳} \\ \hline M=1 \\ \text{(وقتی که سایر درجات آزادی بدون بار هستند } V=0 \text{ و } F=0 \text{)} \\ \hline v \end{array} \right\} = \frac{VL^3}{\underbrace{3EI}_0} + \frac{\overset{1}{M}L^2}{2EI} = \frac{L^2}{2EI}$$

$$f_{33} = \frac{L}{EI}$$

به نکات زیر توجه شود:

ماتریس نرمی یک عضو یعنی ضرائبی که اگر در نیروهای اعمال شده ضرب شود تغییر مکان حاصل را به-

دست می دهد.

$$\tilde{\tilde{F}} \cdot \tilde{f} = \tilde{a}$$

روش های نرمی به علت نیاز به تعریف هر مسئله و عدم یکسان بودن روش حل، روش های مناسبی جهت

برنامه نویسی عمومی نمی باشد، ولی در ترکیب با روش سختی نتایج بسیار ارزنده ای به دست می دهند. مثل

کاربرد در تیرهای خمیده با تیرهای با مقطع متغیر.

فصل دوم

روش شیب افت در تحلیل سازه‌ها

Slope-Deflection Method

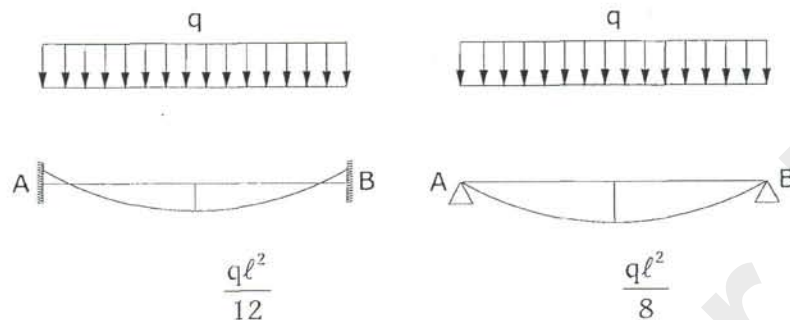
www.ttnar.ir

✓ فهرست مطالب

۲۱	۱- مقدمه
۲۲	۱-۱- روش سختی
۲۲	۲-۱- روش نرمی
۲۲	۳-۱- روش تحلیل
۲۴	۴-۱- روش شیب-افت
۲۵	۲- روابط اصلی شیب-افت
۲۶	۱-۲- بدست آوردن روابط شیب-افت با استفاده از قضیه سطح لنگر
۲۸	۲-۲- به دست آوردن روابط شیب-افت با استفاده از - معادلات دیفرانسیل
۳۲	۳- کاربرد روش شیب-افت برای تحلیل تیرهای سراسری
۳۷	۴- کاربرد روش شیب-افت برای تحلیل قاب‌ها
۳۸	۱-۴- قاب‌های مستطیلی بدون تغییر مکان جانبی
۴۱	۲-۴- قاب‌های مستطیلی با تغییر مکان جانبی
۴۶	۳-۴- قاب‌های مستطیلی با نشست تکیه‌گاهی و دروان تکیه‌گاه
۴۷	۴-۴- قاب مستطیلی با تقارن معکوس
۵۰	۵-۴- قاب غیر مستطیلی بدون تغییر مکان جانبی
۵۲	۶-۴- حل هندسی قاب غیر مستطیلی
۶۹	۵- تأثیر درجه حرارت در سازه‌ها
۷۴	۶- تکیه‌گاه ارتجاعی در سازه‌ها
۷۹	۷- روش شیب-افت برای تحلیل سازه‌ها با مقاطع متغیر
۹۱	۱-۷- مسائل خاص در روش شیب-افت برای مقاطع غیر منشوری

۱- مقدمه

به منظور تامین پایداری و صرفه جوئی در مصالح سازه ها به صورت نامعین طراحی و اجرا می شوند. بعنوان یک مثال ساده می توان باربری تیر ساده و تیر دو سر گیردار را مقایسه نمود که میزان لنگرهای خمشی در تیر دو سر گیردار ملایم تر از تیر معمولی می باشد.



سازه نامعین، سازه ای است که معادلات تعادل استاتیکی برای حل مجهولات آن کافی نیست، لذا از شرایط سازگاری هندسی به منظور تشکیل معادلات اضافی استفاده می شود.

بطور کلی روشهای تحلیل سازه های نامعین به دو دسته روش های نرمی و سختی تقسیم می شوند. قبل از بررسی روش ها به فرضیات زیر که در هر دو روش صادق هستند توجه می کنیم.

۱- تغییر مکان ها و دوران ها بسیار کوچک هستند.

۲- رفتار مصالح خطی و ارتجاعی است.

فرض اول به مفهوم تغییر نکردن هندسه سازه (سیستم) بعد از اعمال نیرو و آثار خارجی و فرض دوم به مفهوم یکسان بودن رفتار سیستم در بارگذاری و باربرداری می باشد.

علاوه بر فرضیات فوق در تحلیل مقدماتی سازه ها دو فرض زیر نیز مورد استفاده قرار می گیرند.

۳- گره های سازه صلب هستند

۴- اثر نیروی محوری قابل صرف نظر کردن می باشد.

از فرض سوم مفهوم می شود که در یک گره که چندین عضو به آن متصل هستند، فقط یک دوران مجهول داریم و فرض چهارم مسئله کمانش یا ناپایداری اعضا تحت اثر بار محوری را از محدوده بحث و تحلیل خارج می کند.

از فرضیات اول و دوم نتیجه بسیار مهمی بدست می آید و آن برقرار بودن اصل اجتماع آثار قوا است که در تحلیل خطی بسیار حائز اهمیت می باشد.

۱-۱- روش سختی

در این روش مجهولات اصلی تغییر مکانها می باشند. فرمول بندی و تحلیل به نحوی است که این تغییر مکانها در اولین مرحله حل پیدا می شوند و سپس با کمک آنها مجهولات ثانوی مثل نیروها، عکس العملها و غیره بدست می آیند.

۱-۲- روش نرمی

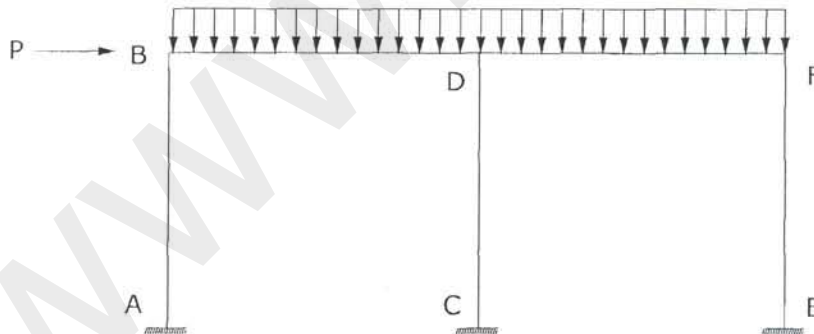
در این روش مجهولات اصلی نیروها یا واکنشهای اضافی می باشند. فرمول بندی و تحلیل به طریقی انجام می شود که در اولین مرحله نیروها و واکنشهای اضافی بدست می آیند و سپس سایر مجهولات مانند تغییر مکانها و غیره بدست خواهند آمد.

۱-۳- روش تحلیل

به طور کلی در تحلیل سیستمهای سازه ای سه دسته معادله الف) تعادل، ب) سازگاری و ج) رفتار مصالح، باید بطور همزمان ارضا شوند تا تحلیل درست انجام پذیرد. بطوریکه خواهیم دید هر دو روش بر مبنای ارضای این سه دسته معادله قرار دارند و به همین دلیل تنها ملاک انتخاب این و یا آن روش، سهولت استفاده از آنها می باشد.

- روش سختی

قاب شکل زیر را در نظر بگیرید:



اگر مجهولات مسئله را تغییر مکانها در نظر بگیریم، با توجه به فرضیات تئوری و نوع تکیه گاهها خواهیم داشت:

گره A:

تغییر مکان جهت $X = 0$

تغییر مکان جهت $Y = 0$

چرخش گره $= 0$

گره B:

تغییر مکان جهت $\Delta = x$

تغییر مکان جهت $\bullet = y$

چرخش گره $\theta_B =$

گره C:

تغییر مکان جهت $\bullet = x$

تغییر مکان جهت $\bullet = y$

چرخش گره $\bullet =$

گره D:

تغییر مکان جهت $\Delta = x$

تغییر مکان جهت $\bullet = y$

چرخش گره $\theta_D =$

گره E:

تغییر مکان جهت $\bullet = x$

تغییر مکان جهت $\bullet = y$

چرخش گره $\bullet =$

گره F:

تغییر مکان جهت $\Delta = x$

تغییر مکان جهت $\bullet = y$

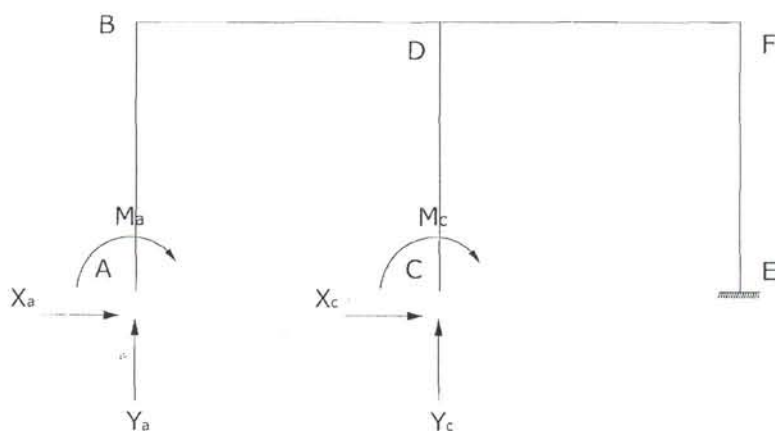
چرخش گره $\theta_F =$

ملاحظه می شود که در این حالت ۴ مجهول تغییر مکانی موجود می باشد.

- روش نرمی

در صورتیکه مجهولات مسئله را نیروهای اضافی یا زائد در نظر بگیریم، واکنش های اضافی عبارتند از:

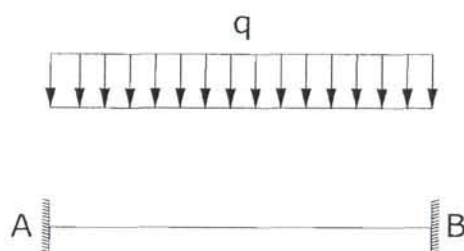
$$X_A, Y_A, M_A, X_C, Y_C, M_C$$



در این حالت تعداد مجهولات مسئله ۶ مجهول نیرویی می باشد. طبیعی است برای تحلیل سیستم باید در حالت اول چهار معادله و در حالت دوم شش معادله تولید کرد تا پس از حل این معادله ها بتوان مسئله را بطور کامل تحلیل نمود. در این مثال تعداد مجهولات ناشی از روش سختی کمتر از روش نرمی است. این موضوع در همه موارد صادق نیست ولی با توجه به قانونمند بودن روش سختی، در مواردی که تعداد مجهولات روش سختی بیشتر از روش نرمی باشد نیز از روش سختی استفاده می شود.

۴-۱- روش شیب-افت

در تحلیل سازه های ساده این روش بعنوان پایه روش سختی مورد استفاده قرار می گیرد. **مبنای روش:** این روش بر مبنای انتخاب مجهولات یک عنصر پایه از سیستم سازه ای که در این حالت تیر می باشد، قرار دارد. هر سیستم سازه ای را می توان به عناصر پایه ای که تیر یا تیر-ستون هستند تفکیک نمود. بنابراین روابط شیب-افت در سطح تیر استخراج شده و سازه پس از تجزیه به تیرها بطور جداگانه فرمول سازی می شود. سپس با استفاده از سازگاری تغییر مکان ها و تعادل نیروها سیستم دوباره جمع شده و دستگاه معادله مورد نظر حاصل می شود. تیر دو سر گیردار شکل به عنوان عنصر پایه در نظر گرفته می شود.



تعداد واکنش های زائد سه می باشد.

با صرف نظر کردن از اثر نیروی محوری دو واکنش و یک معادله حذف شده و تعداد واکنش‌های اضافی ۲ خواهد بود. پس اگر به هر ترتیبی ۲ واکنش اضافی محاسبه شود، تیر معین می‌شود. به این منظور دو واکنش اضافی را دو لنگر انتهائی تیر در نظر می‌گیریم بنابراین نیاز به روابطی داریم که مقدار لنگرهای انتهائی را بر حسب دوران‌ها بدست دهد.

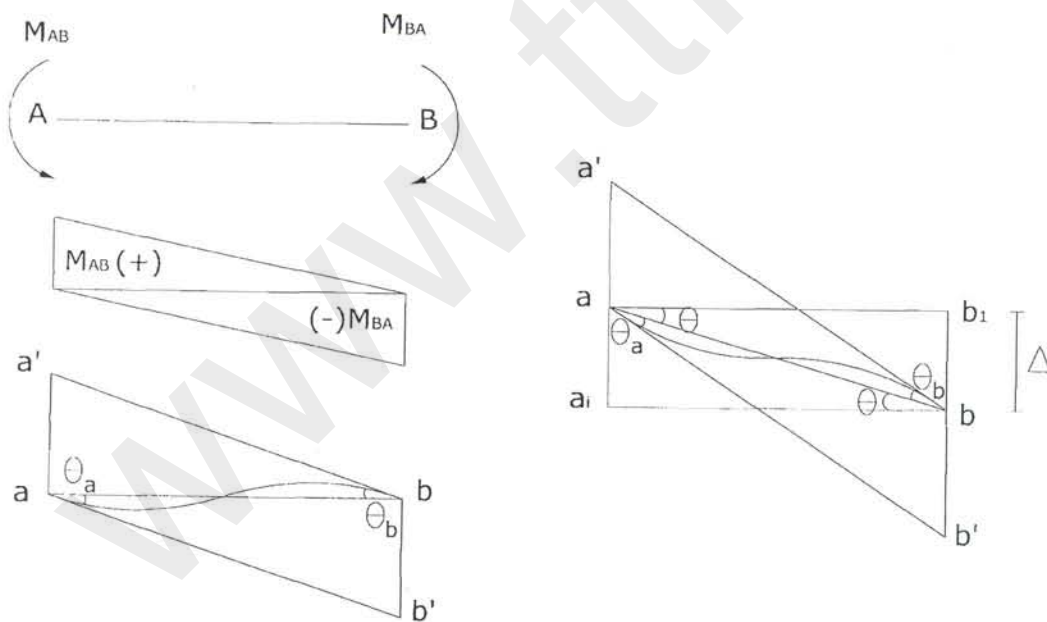


پس اگر θ_1, θ_2 محاسبه شود، تیر معین می‌شود.

در یک سیستم برای همه اعضا به نوبت این کار انجام می‌شود و سپس سازگار بودن تغییر مکان‌ها (یکسان بودن θ ها در گره‌ها و ...) و تعادل نیروها (صفر بودن مجموع لنگرها در هر گره) اعمال می‌شود و از آنجا دستگاه معادله‌ای بر حسب مجهولات تغییر مکانی بدست می‌آید.

۲- روابط اصلی شیب-افت

قبل از نوشتن روابط شیب-افت به شرح قرارداد علائم شیب - افت می‌پردازیم:



۱- لنگرهای انتهائی M_{AB}, M_{BA} در صورتی که در جهت گردش عقربه‌های ساعت باشند، مثبت فرض می‌گردند.

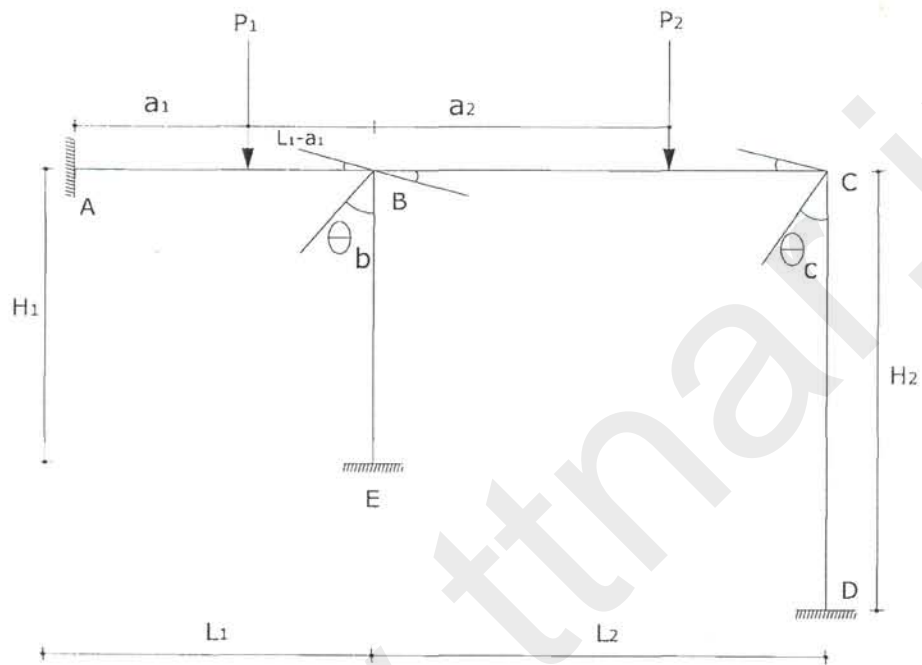
۲- شیب‌های نقاط A, B یعنی θ_A و θ_B در صورتیکه جهت چرخش آنها نسبت به حالت اولیه خود در جهت عقربه‌های ساعت باشند، مثبت در نظر گرفته می‌شوند.

۳- تغییر مکان نقطه B نسبت به نقطه A یعنی Δ_{BA} در صورتی مثبت می‌باشد که حرکت نقطه B نسبت به A در جهت گردش عقربه‌های ساعت باشد.

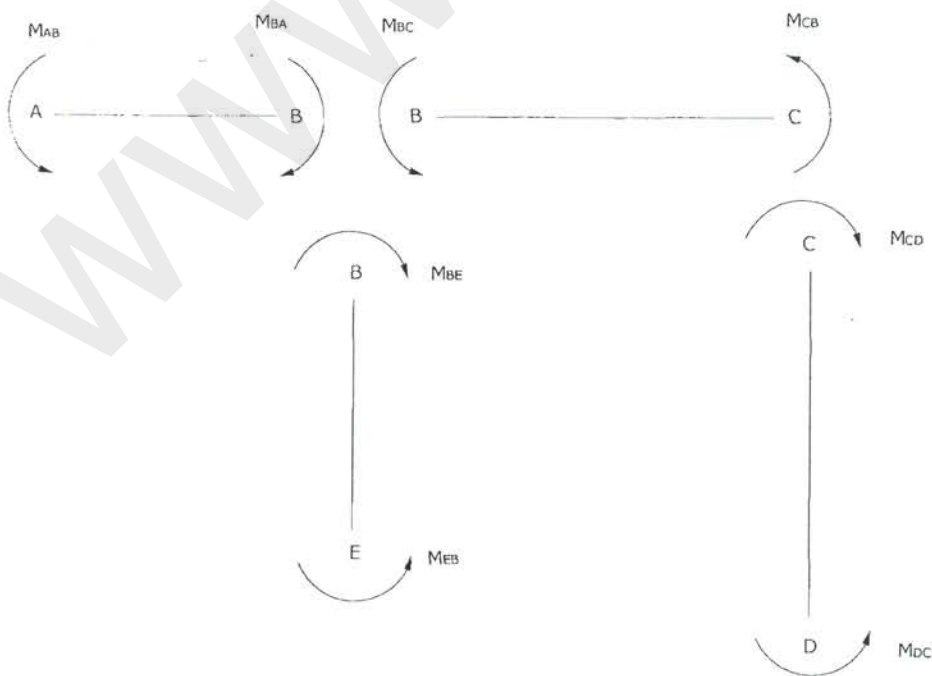
در این بخش معادلات اصلی شیب-افت را به دو روش سطح لنگر و معادلات دیفرانسیل طی یک مثال بدست خواهیم آورد.

۱-۲- بدست آوردن روابط شیب-افت با استفاده از قضیه سطح لنگر

سازه زیر یک قاب ساختمانی است که از نظر استاتیکی ۶ درجه نامعین می‌باشد.

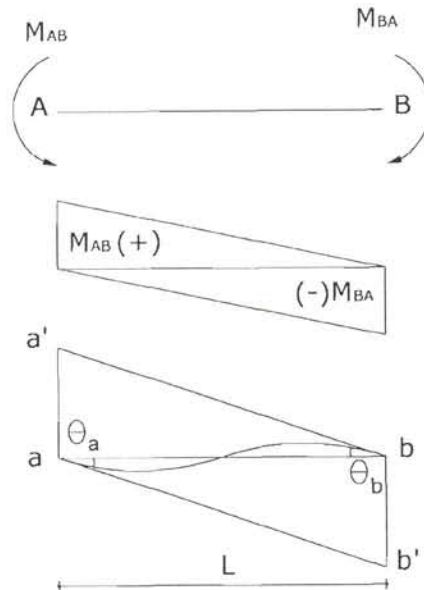


اجزاء آنرا جدا می‌سازیم:



فرض کنیم:

قطعه ab تحت اثر لنگرهای انتهائی M_{ab} , M_{ba} قرار گرفته باشد، چرخش‌های آنرا با θ_A, θ_B نمایش می‌دهیم.



از قضیه دوم سطح لنگر خواهیم داشت:

$$aa' = -\left(\frac{M_{ab}}{EI} \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{L}{3} - \frac{M_{ba}}{EI} \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{2L}{3}\right) \times \frac{6EI}{L^2}$$

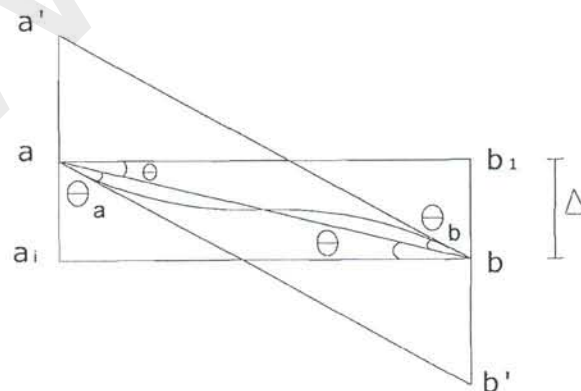
$$bb' = \left(\frac{M_{ab}}{EI} \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{2L}{3} - \frac{M_{ba}}{EI} \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{L}{3}\right) \times \frac{12EI}{L^2}$$

نتیجه می‌شود:

$$M_{ab} = \frac{2EI}{L}(2\theta_a + \theta_b)$$

$$M_{ba} = \frac{2EI}{L}(\theta_a + 2\theta_b)$$

اگر در حالت فوق تکیه گاه‌ها نشست داشته باشند، داریم:



$$a_1a' = \theta_b L \Rightarrow aa' = \theta_b L - \Delta$$

$$aa' = -\left(\frac{M_{ab}}{EI} \cdot \frac{L^2}{6} - \frac{M_{ba}}{EI} \cdot \frac{L^2}{3}\right)$$

$$b_1b' = \theta_a L \Rightarrow bb' = \theta_a L - \Delta$$

$$bb' = \left(\frac{M_{ab}}{EI} \cdot \frac{L^2}{3} - \frac{M_{ba}}{EI} \cdot \frac{L^2}{6}\right)$$

از قضیه دوم سطح لنگر همیشه فاصله بین مماس‌های مرسوم بر منحنی تغییر شکل یعنی aa' و bb' بدست می‌آید. لذا خواهیم داشت:

$$\theta_b L - \Delta = -\left(\frac{M_{ab}}{EI} \cdot \frac{L^2}{6} - \frac{M_{ba}}{EI} \cdot \frac{L^2}{3}\right) \times \frac{6EI}{L^2}$$

$$\theta_a L - \Delta = \left(\frac{M_{ab}}{EI} \cdot \frac{L^2}{3} - \frac{M_{ba}}{EI} \cdot \frac{L^2}{6}\right) \times \frac{12EI}{L^2}$$

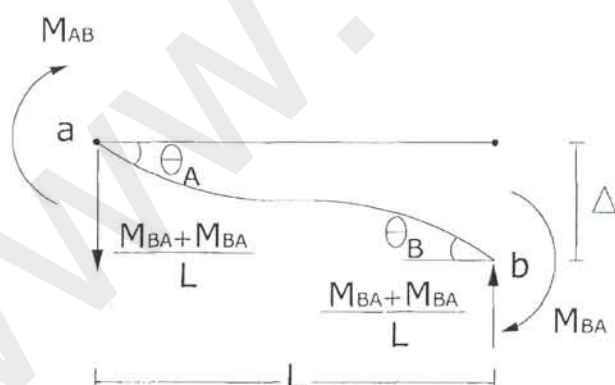
بنابراین معادله شیب-افت بصورت زیر خواهد بود:

$$M_{ab} = \frac{2EI}{L} \left(2\theta_a + \theta_b - \frac{3\Delta}{L}\right)$$

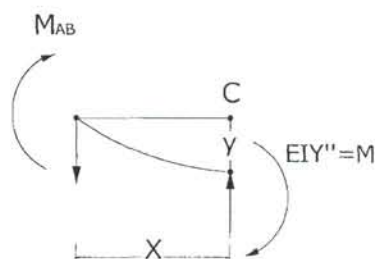
$$M_{ba} = \frac{2EI}{L} \left(\theta_a + 2\theta_b - \frac{3\Delta}{L}\right)$$

۲-۲- به دست آوردن روابط شیب-افت با استفاده از معادلات دیفرانسیل

تیر شکل زیر را در نظر بگیرید:



با توجه به این که در هر مقطع از تیر داریم $M(x) = EIy''''$ در مقطعی به فاصله x از تکیه‌گاه A . مطابق شکل زیر خواهیم داشت:



$$\sum M_c = 0$$

$$EIy'' + M_{AB} - \frac{M_{AB} + M_{BA}}{L} x = 0$$

$$EIy'' = \frac{M_{AB}}{L}(x-L) + \frac{M_{BA}}{L}x \quad (I)$$

با دوبار انتگرال گیری از معادله (I) خواهیم داشت:

$$EIy' = \frac{M_{AB}}{L} \left(\frac{x^2}{2} - Lx \right) + \frac{M_{BA}}{L} \frac{x^2}{2} + C_1 \quad (II)$$

$$EIy = \frac{M_{AB}}{L} \left(\frac{x^3}{6} - \frac{Lx^2}{2} \right) + \frac{M_{BA}}{L} \cdot \frac{x^3}{6} + C_1x + C_2 \quad (III)$$

شرایط مرزی در نقطه A عبارتند از:

$$x = 0, y = 0, y' = \theta_A$$

که با جای گذاری در معادلات (II) و (III) خواهیم داشت:

$$C_1 = EI\theta_A, C_2 = 0$$

و معادلات (II) و (III) بصورت زیر اصلاح می شود:

$$EIy' = \frac{M_{AB}}{L} \left(\frac{x^2}{2} - Lx \right) + \frac{M_{BA}}{L} \frac{x^2}{2} + EI\theta_A \quad (1)$$

$$EIy = \frac{M_{AB}}{L} \left(\frac{x^3}{6} - \frac{Lx^2}{2} \right) + \frac{M_{BA}}{L} \cdot \frac{x^3}{6} + EI\theta_A x \quad (2)$$

شرایط مرزی در نقطه B عبارتند از:

$$x = L, y = \Delta, y' = \theta_B$$

که پس از جای گذاری در معادلات (1) و (2) به معادلات زیر می رسیم:

$$EI\theta_B = \frac{M_{AB}}{L} \left(\frac{L^2}{2} - L^2 \right) + \frac{M_{BA}}{L} \cdot \frac{L^2}{2} + EI\theta_A \quad (3)$$

$$EI\Delta = \frac{M_{AB}}{L} \left(\frac{L^3}{6} - \frac{L^3}{3} \right) + \frac{M_{BA}}{L} \cdot \frac{L^3}{6} + EI\theta_A L \quad (4)$$

که پس از مرتب کردن نسبت به M_{AB} و M_{BA} خواهیم داشت:

$$M_{ab} = \frac{2EI}{L} \left(2\theta_a + \theta_b - \frac{3\Delta}{L} \right) \quad (5)$$

$$M_{ba} = \frac{2EI}{L} \left(\theta_a + 2\theta_b - \frac{3\Delta}{L} \right) \quad (6)$$

در این روابط اثر لنگرهای ناشی از بارهای خارجی در نظر گرفته نشده است و برای منظور کردن این اثر کافی است لنگرهای گیرداری را که در بخش بعدی به توضیح آن خواهیم پرداخت با معادلات (5) و (6) جمع کنیم.

$$M_{ab} = \frac{2EI}{L} \left(2\theta_a + \theta_b - \frac{3\Delta}{L} \right) + M'_{AB} \quad (7)$$

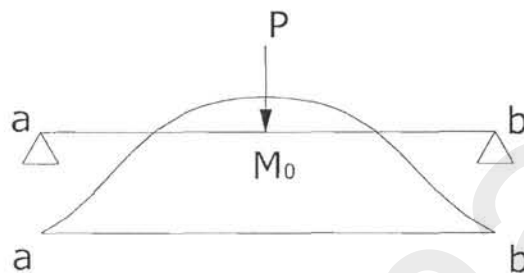
$$M_{ba} = \frac{2EI}{L} \left(\theta_a + 2\theta_b - \frac{3\Delta}{L} \right) + M'_{BA}$$

- لنگرهای گیرداری

اگر تحت اثر بار خارجی یک لنگر M_0 داشته باشیم و m_0 را معادل $\frac{M_0}{EI}$ بگیریم و m_{0a} و m_{0b} به ترتیب

نشان دهنده لنگر ایستائی مساحت نمودار $m_0 = \frac{M_0}{EI}$ نسبت به نقاط a و b باشد، مقادیر aa' و bb' به ترتیب زیر

اصلاح می شود:



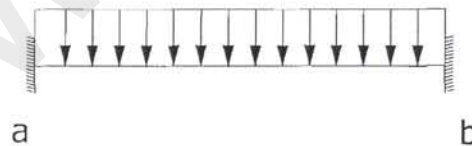
$$aa' = - \left(\frac{M_{ab}}{EI} \cdot \frac{L^2}{6} - \frac{M_{ba}}{EI} \cdot \frac{L^2}{3} + \frac{m_{0a}}{EI} \right)$$

$$bb' = \left(\frac{M_{ab}}{EI} \cdot \frac{L^2}{3} - \frac{M_{ba}}{EI} \cdot \frac{L^2}{6} + \frac{m_{0b}}{EI} \right)$$

$$M_{ab} = \frac{2EI}{L} \left(2\theta_a + \theta_b - \frac{3\Delta}{L} \right) + \frac{2}{L^2} (m_{0a} - 2m_{0b})$$

$$M_{ba} = \frac{2EI}{L} \left(\theta_a + 2\theta_b - \frac{3\Delta}{L} \right) + \frac{2}{L^2} (2m_{0a} - m_{0b})$$

اگر تیری کاملاً گیردار باشد (دو سر گیردار) خواهیم داشت:



$$M'_{ab} = \frac{2}{L^2} (m_{0a} - 2m_{0b})$$

$$M'_{ba} = \frac{2}{L^2} (2m_{0a} - m_{0b})$$

لذا رابطه شیب-افت با در نظر گرفتن اثر بارهای خارجی بدین صورت می باشد:

$$M_{ab} = \frac{2EI}{L} \left(2\theta_a + \theta_b - \frac{3\Delta}{L} \right) + M'_{AB}$$

$$M_{ba} = \frac{2EI}{L} \left(\theta_a + 2\theta_b - \frac{3\Delta}{L} \right) + M'_{BA}$$

همان طور که ملاحظه می‌شود، لنگرهای ایجاد شده به عوامل زیر بستگی دارند:

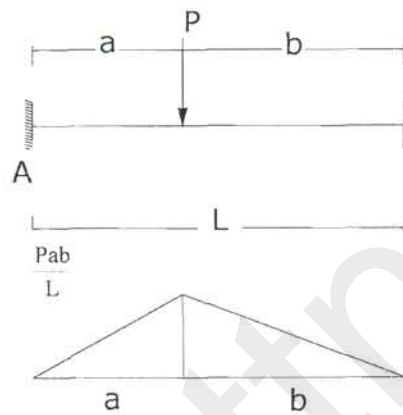
۱- دوران ابتدایی عضو (θ_A)

۲- دوران انتهایی عضو (θ_B)

۳- دوران کلی عضو ($\frac{\Delta}{L}$)

۴- آثار و بارگذاری خارجی (لنگرهای گیرداری)

مثال: لنگرهای گیرداری تیر زیر را تحت اثر بار متمرکز P بدست آورید.



$$m_{0a} = \frac{Pab}{L} \left(\frac{a}{2} \cdot \frac{2a}{3} + \frac{b}{2} \left(a + \frac{b}{3} \right) \right) = \frac{Pab}{6L} (2a^2 + 3ab + b^2) = \frac{Pab}{6} (2a + b)$$

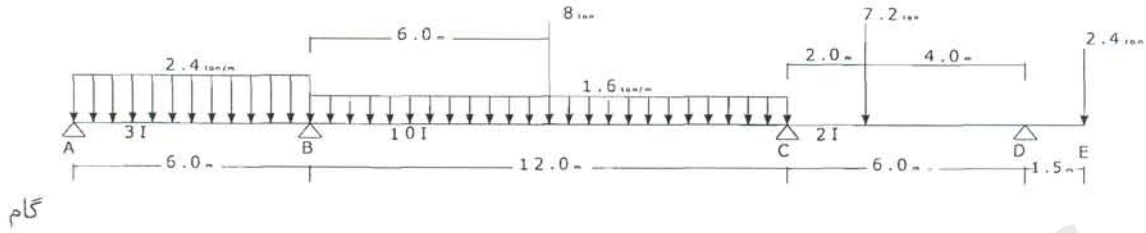
$$m_{0b} = \frac{Pab}{L} \left(\frac{b}{2} \cdot \frac{2b}{3} + \frac{a}{2} \left(b + \frac{a}{3} \right) \right) = \frac{Pab}{6L} (a^2 + 3ab + 2b^2) = \frac{Pab}{6} (a + 2b)$$

$$M_{ab} = \frac{2}{L^2} (m_{0a} - 2m_{0b}) = \frac{2}{L^2} \left[\frac{Pab}{6} (2a + b - 2a - 4b) \right] = -\frac{pab^2}{L^2}$$

$$M_{ba} = \frac{2}{L^2} (2m_{0a} - m_{0b}) = \frac{2}{L^2} \left[\frac{Pab}{6} (a + 2b - a - 2b) \right] = \frac{pa^2b}{L^2}$$

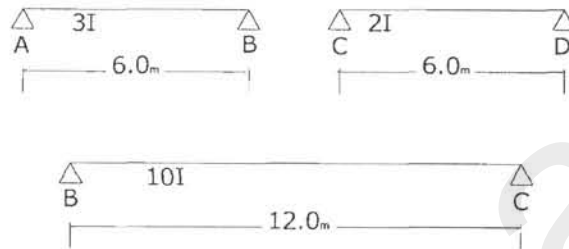
۳- کاربرد روش شیب-افت برای تحلیل تیرهای سراسری

تیر سراسری زیر را در نظر بگیرید:



گام

گام اول: تفکیک تیر به قسمت‌های مجزا



گام دوم: تعیین مجهولات اصلی

همان‌طور که قبلاً ذکر شد مجهولات اصلی در این روش تغییر مکان و شیب‌ها می‌باشند. با توجه به این که در تیر فوق تغییر مکان گرهی وجود ندارد، بنابراین مجهولات مسئله عبارتند از:

$$(\theta_A)_R, (\theta_B)_L, (\theta_B)_R, (\theta_C)_L, (\theta_C)_R, (\theta_D)_L$$

گام سوم: نوشتن معادلات سازگاری

باتوجه به سراسری بودن تیر فوق داریم:

$$\theta_B = (\theta_B)_L = (\theta_B)_R$$

$$\theta_C = (\theta_C)_L = (\theta_C)_R$$

لذا مجهولات تیر عبارتند از $\theta_d, \theta_c, \theta_b, \theta_a$.

گام چهارم: بدست آوردن لنگرهای گیرداری

$$M'_{ab} = -M'_{ba} = -\frac{ql^2}{12} = -\frac{2.4 \times 6^2}{12} = -7.2 \text{ t.m}$$

$$M'_{bc} = -M'_{cb} = -\frac{1.6 \times 12^2}{12} - \frac{8 \times 6 \times 6^2}{12} = -31.2 \text{ t.m}$$

$$M'_{cd} = -\frac{pab^2}{l^2} = -\frac{7.2 \times 2 \times 4^2}{6^2} = -6.4 \text{ t.m}$$

$$M'_{dc} = \frac{pba^2}{l^2} = \frac{7.2 \times 4 \times 2^2}{6^2} = 3.2 \text{ t.m}$$

$$M'_{de} = -pl = -2.4 \times 1.5 = -3.6 \text{ t.m}$$

گام پنجم: نوشتن روابط شیب-افت برای هر یک از اجزای جدا شده

$$M_{ab} = \frac{2E(3I)}{6}(2\theta_a + \theta_b) - M'_{ab} = 2EI\theta_a + EI\theta_b - 7.2$$

$$M_{ba} = \frac{2E(3I)}{6}(\theta_a + 2\theta_b) + M'_{ab} = EI\theta_a + 2EI\theta_b + 7.2$$

$$M_{bc} = \frac{2E(10I)}{12}(2\theta_b + \theta_c) - M'_{bc} = \frac{10}{3}EI\theta_b + \frac{5}{3}EI\theta_c - 31.2$$

$$M_{cb} = \frac{2E(10I)}{12}(\theta_b + 2\theta_c) + M'_{cb} = 3.33EI\theta_c + 1.67EI\theta_b + 31.2$$

$$M_{cd} = \frac{2E(2I)}{6}(2\theta_c + \theta_d) - M'_{cd} = 1.33EI\theta_c + 0.67EI\theta_d - 6.4$$

$$M_{dc} = \frac{2E(2I)}{6}(\theta_c + 2\theta_d) + M'_{cd} = 1.33EI\theta_d + 0.67EI\theta_c + 6.4$$

گام ششم: نوشتن معادلات تعادل

با توجه به این که در تیر فوق تکیه گاهها مفصلی می باشند لذا خواهیم داشت:

$$M_{ab} = 0 \quad 2EI\theta_a + 10EI\theta_b = 7.2$$

$$\sum M_B = 0 \quad M_{ba} + M_{bc} = 0 \quad EI\theta_a + 5.33EI\theta_b + 1.67EI\theta_c = 2.4$$

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow M_{cb} + M_{cd} = 0 \Rightarrow 1.67EI\theta_b + 4.67EI\theta_c + 0.67EI\theta_d = -24.8$$

$$\sum M_D = 0 \quad M_{dc} + M = 0 \quad 0.67EI\theta_c + 1.33EI\theta_d = 0.4$$

معادلات فوق را می توان به صورت ماتریس تبدیل نمود:

$$ka = f \Rightarrow EI \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5.33 & 1.67 & 0 \\ 0 & 1.67 & 4.67 & 0.67 \\ 0 & 0 & 0.67 & 1.33 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_a \\ \theta_b \\ \theta_c \\ \theta_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.2 \\ 2.4 \\ -24.8 \\ 0.4 \end{bmatrix}$$

ماتریس فوق، ماتریس ضرائب سختی یا به طور خلاصه ماتریس سختی نام دارد.

- خواص ماتریس سختی

الف- نسبت به قطر اصلی قرینه می باشد (ماتریس متقارن).

ب- قطر حاکم

ج- نواری

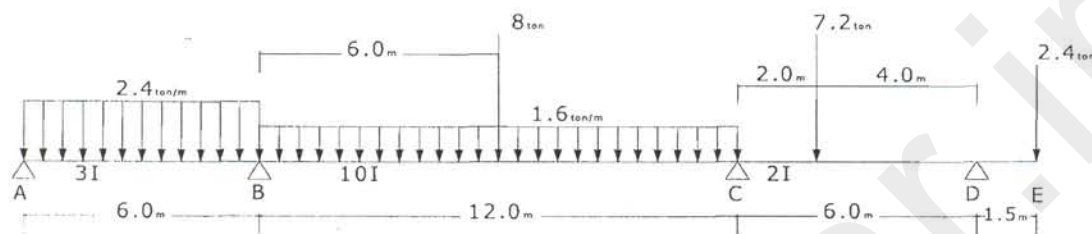
د- مثبت معین

در صورت اضافه کردن عناصر جدید به سازه یا حذف کردن عناصری از سازه، کفایت ماتریس سختی عنصر

را به ماتریس سختی کل اضافه یا از آن کم کنیم.

بهترین روش برای حل دستگاه معادلات "روش حذف مستقیم گاوس" می باشد. در این روش ماتریس ضرائب

بصورت ماتریس بالا مثلثی در آمده به روش جایگزینی برگشتی حل می‌شود؛ لذا از بالا به پایین درایه ها را حذف نموده و از پایین به بالا مجهولات محاسبه می‌شوند. (روش حذف مستقیم و جایگزینی معکوس) لازم به ذکر است که برای حل معادلات فوق روش‌های دیگری از جمله روش گوس-سایدل، روش چولسکی و ... را نیز می‌توان به کار برد. به طوری که ملاحظه می‌شود تشکیل ماتریس سختی و بردار بار و بردار تغییر مکانی مجهول هدف اصلی در تحلیل می‌باشد. در این مرحله روش تشکیل این عناصر را به طور مستقیم بررسی می‌کنیم:



$$M_{ij} = \frac{2EI}{L_{ij}} (2\theta_i + \theta_j - \frac{3\Delta}{L_{ij}}) + M'_{ij}$$

$$\left. \begin{aligned} M_{12} &= \frac{2E3I}{6} (2\theta_1 + \theta_2) - 7.2 \\ M_{21} &= EI(\theta_1 + 2\theta_2) + 7.2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow EI \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7.2 \\ 7.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{12} \\ M_{21} \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} M_{23} &= 1.67EI(2\theta_2 + \theta_3) - 31.2 \\ M_{32} &= 1.67EI(\theta_2 + 2\theta_3) + 31.2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow EI \begin{bmatrix} 3.33 & 1.67 \\ 1.67 & 3.33 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -31.2 \\ 31.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{23} \\ M_{32} \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} M_{34} &= 0.67EI(2\theta_3 + \theta_4) - 6.4 \\ M_{43} &= 0.67EI(\theta_3 + 2\theta_4) + 3.2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow EI \begin{bmatrix} 1.33 & 0.67 \\ 0.67 & 1.33 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6.4 \\ 3.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{34} \\ M_{43} \end{bmatrix}$$

$$EI \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2+3.33 & 1.67 & 0 \\ 0 & 1.67 & 3.33+1.33 & 0.67 \\ 0 & 0 & 0.67 & 1.33 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7.2 \\ 7.2-31.2 \\ 31.2-6.4 \\ 3.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3.6 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow ka = \begin{bmatrix} 7.2 \\ 24 \\ -24.8 \\ 0.4 \end{bmatrix}$$

حال دستگاه معادلات را به دو روش گوس (حذف مستقیم و جایگزینی معکوس) و گوس سیدل به صورت زیر

حل می نماییم:

الف) روش گوس:

$$\theta_D = \frac{5.62}{1.22} = 4.61$$

$$\theta_C = -8.53$$

$$\theta_B = 7.18$$

$$\theta_A = 0.01$$

$$M_{ab} = 0$$

$$M_{ba} = 21.54$$

$$M_{bc} = -21.54$$

$$M_{cb} = 14.73$$

$$M_{cd} = -14.72$$

$$M_{dc} = 3.6$$

$$M_{de} = -3.6$$

ب- روش گوس-سایدل:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5.333 & 1.667 & 0 \\ 0 & 1.667 & 4.667 & 0.667 \\ 0 & 0 & 0.667 & 1.333 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_a \\ \theta_b \\ \theta_c \\ \theta_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.2 \\ 24 \\ -24.8 \\ .4 \end{bmatrix}$$

$$\theta_A = 0 \quad \theta_B = 7.2 \quad \theta_C = -8.64 \quad \theta_D = 5.28 \quad \theta_a = \theta_c = \theta_d = 0$$

$$\theta_A = 3.6 - \frac{\theta_B}{2} \quad \theta_a = 3.6$$

$$\theta_B = -(\theta_a - 1.667\theta_c + 24)/5.33 \quad \theta_b = (3.6 + 24)/5.33 = 5.18$$

$$\theta_C = \frac{1}{4.667}(-1.667\theta_b - 0.667\theta_d - 24.8) \quad \theta_c = -7.16$$

$$\theta_D = \frac{1}{1.333}(-0.667\theta_c + 0.4) \quad \theta_D = 3.88$$

$$\theta_a = 1.01 \quad \theta_b = 6.93 \quad \theta_c = -8.34 \quad \theta_d = 4.47$$

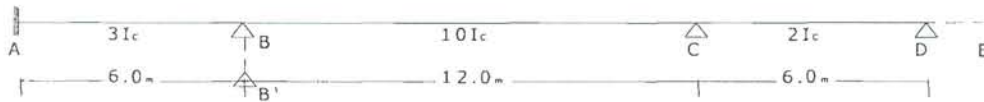
نتایج حاصل بعد از حل مثال:

$$\theta_A = 0.02/EI \quad \theta_B = 7.16/EI \quad \theta_C = -8.52/EI \quad \theta_D = 4.56/EI$$

$$M_{ab} = 0, M_{ba} = 21.541, M_{bc} = -21.541 \text{ (t.m)}$$

$$M_{cb} = 14.735, M_{cd} = -14.73, M_{dc} = 3.6, M_{de} = -3.6 \text{ (t.m)}$$

مثال: تیر سراسری زیر را به روش شیب افت تحلیل کنید:



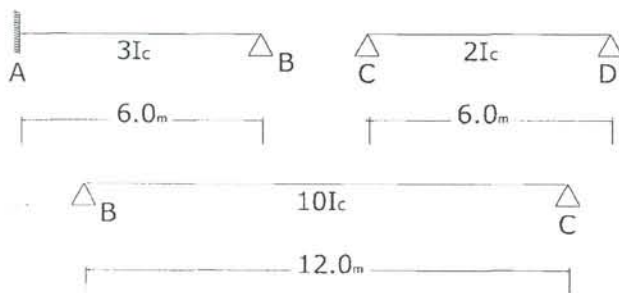
$$E = 20 \times 10^6 \text{ t/m}^2$$

$$I = 400 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$\Delta = 15 \times 10^{-3}$$

فرضیات:

گام اول: تفکیک تیر به قسمتهای مجزا



گام دوم: تعیین مجهولات اصلی

$$(\theta_A)_R, (\theta_B)_L, (\theta_B)_R, (\theta_C)_L, (\theta_C)_R, (\theta_D)_L$$

گام سوم: نوشتن معادلات سازگاری

باتوجه به سراسری بودن تیر فوق داریم:

$$\theta_B = (\theta_B)_L = (\theta_B)_R$$

$$\theta_C = (\theta_C)_L = (\theta_C)_R$$

لذا مجهولات تیر عبارتند از $\theta_b, \theta_c, \theta_d$.

گام چهارم: بدست آوردن لنگرهای گیرداری

بدلیل عدم وجود بار خارجی، لنگر گیرداری ناشی از بار خارجی نداریم.

گام پنجم: نوشتن روابط شیب-افت برای هر یک از اجزای جداشده

$$M_{ab} = \frac{16000 \times 3}{6} \left(2\theta_a + \theta_b - \frac{3 \times 15 \times 10^{-3}}{6} \right) = 18000\theta_b - 60$$

$$M_{ba} = \frac{16000 \times 3}{6} \left(\theta_a + 2\theta_b + \frac{45 \times 10^{-3}}{6} \right) = 16000\theta_b - 60$$

$$M_{bc} = \frac{160000}{12} \left(2\theta_b + \theta_c + \frac{45 \times 10^{-3}}{12} \right) = 26666.7\theta_b + 13333.3\theta_c + 50$$

$$M_{cb} = 2 \times 6666.7(\theta_b + 2\theta_c + \frac{45 \times 10^{-3}}{12}) = 13333.3\theta_b + 26666.7\theta_c + 50$$

$$M_{cd} = 2 \times 2666.7(2\theta_c + \theta_d) = 10666.7\theta_c + 5333.3\theta_d$$

$$M_{de} = 2 \times 2666.7(\theta_c + 2\theta_d) = 5333.3\theta_c + 10666.7\theta_d$$

گام ششم: نوشتن معادلات تعادل

$$\begin{bmatrix} 42666.7 & 13333.3 & 0 \\ 13333.3 & 37333.3 & 5333.3 \\ 0 & 5333.3 & 10666.7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \theta_b \\ \theta_c \\ \theta_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ -500 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\theta_c = -1.7418 \times 10^{-3}$$

$$\theta_b = 0.7787 \times 10^{-3}$$

$$\theta_d = 0.8709 \times 10^{-3}$$

$$M_{ab} = -53.77 \text{ t.m}$$

$$M_{ba} = -47.54 \text{ t.m}$$

$$M_{bc} = 47.54 \text{ t.m}$$

$$M_{cb} = 13.93 \text{ t.m}$$

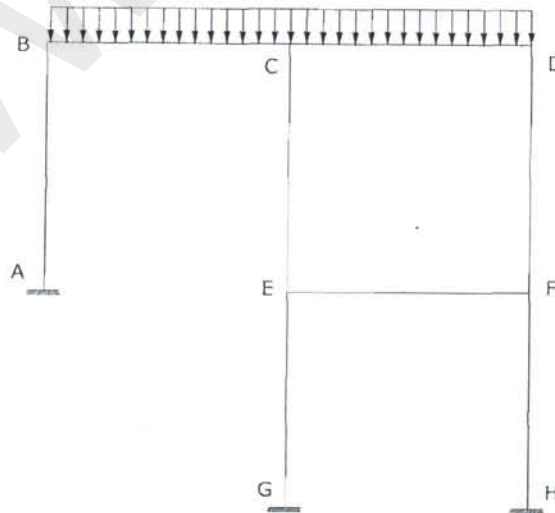
$$M_{cd} = -13.93 \text{ t.m}$$

$$M_{de} = 0 \text{ t.m}$$

۴- کاربرد روش شیب-افت برای تحلیل قاب‌ها

قابها عناصر سازه ای هستند که قادر به تحمل بار در صفحه خودشان می باشند. عناصر افقی، تیر و عناصر قائم ستون نامیده می شوند. به عبارت دیگر عناصری که بار محوری در آنها غالب باشد ستون، و عناصری که لنگر خمشی در آنها غالب است تیر نامیده می شوند.

در حل قاب ها به روش شیب افت از تغییر شکل محوری ستونها صرفنظر می شود پس تغییر طول محوری نداریم یعنی در شکل زیر نقطه B نسبت به نقطه A افت ندارد لذا تغییر مکان نسبی دو سر تیر صفر است.

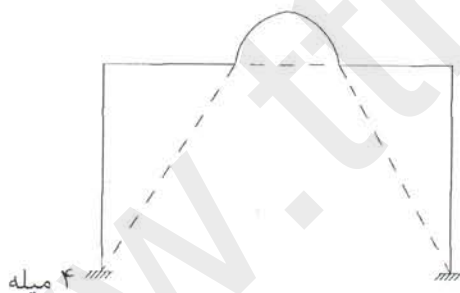


باید توجه کرد که چون ستونهای DF, CE, AB نمی‌توانند تغییر طول محوری داشته باشند، پس نقاط تغییر مکان نسبی ندارند؛ یعنی در تیرهای افقی هیچ افتی بوجود نمی‌آید. قاب‌ها از جنبه شکل ظاهری به دو دسته مستطیلی و غیرمستطیلی (شیدار) تقسیم می‌شوند. همچنین می‌توان آنها را از لحاظ تغییر مکان جانبی به دو دسته قاب‌های با تغییر مکان جانبی و بدون تغییر مکان جانبی تقسیم کرد.

☑ نکته: تعیین درجه آزادی یک قاب

برای تعیین تعداد درجه آزادی یک قاب می‌توان از دو روش زیر استفاده نمود که به ترتیب در ادامه توضیح داده می‌شوند.

- ۱- تمام گره‌ها را به مفصل تبدیل نموده و با قرار دادن تکیه گاه، سازه را پایدار می‌کنیم، تعداد تکیه‌گاه‌ها مشخص کننده درجه آزادی قاب می‌باشد.
- ۲- تمام گره‌ها را به مفصل تبدیل نموده و سپس با اضافه کردن اعضای میله‌ای سازه را به یک سری اعضاء خرابایی تبدیل می‌کنیم. تعداد میله‌ها مبین درجات آزادی است.

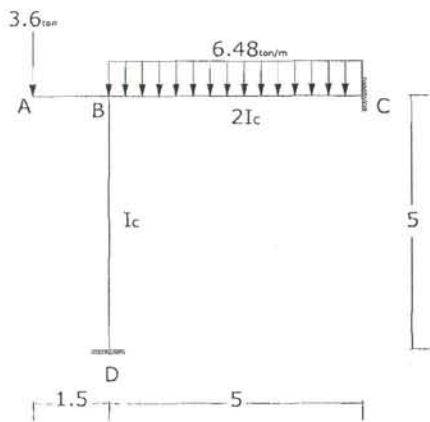


روش تحلیل هر یک از انواع قابها را با ذکر یک مثال پی می‌گیریم:

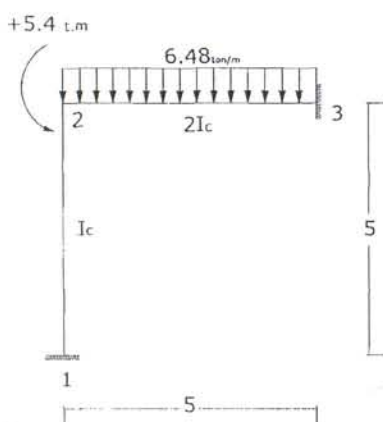
۴-۱- قاب مستطیلی بدون تغییر مکان جانبی

- ۱- زاویه بین اعضا قاب 90° درجه می‌باشد و به یک گره ممکن است بیش از دو عضو متصل باشد.
- ۲- از تغییر شکل‌های ناشی از نیروی محوری صرف‌نظر می‌شود.

مثال: قاب شکل زیر را حل کنید.



بار ۳/۶ تن را بصورت لنگر به نقطه ۲ منتقل می‌کنیم.



با توجه به گیردار بودن تکیه‌گاه‌های ۱ و ۳ تنها مجهول اصلی مسئله θ_2 می‌باشد.
محاسبه لنگرهای گیرداری:

$$M'_{23} = -M'_{32} = \frac{-ql^2}{12} = -13.5 \text{ t.m}$$

نوشتن روابط شیب-افت برای اعضا:

$$M_{12} = \frac{2EI}{5}(2\theta_1 + \theta_2) = 0.4EI\theta_2$$

$$M_{21} = 0.4EI(\theta_1 + 2\theta_2) = 0.8EI\theta_2$$

$$M_{23} = 0.8EI(2\theta_2 + \theta_3) - 13.5 = 1.6EI\theta_2 - 13.5$$

$$M_{32} = 0.8EI(\theta_2 + 2\theta_3) + 13.5 = 0.8EI\theta_2 + 13.5$$

نوشتن معادلات تعادل:

$$M_{21} + M_{23} + 5.4 = 0 \Rightarrow 0.8EI\theta_2 + 1.6EI\theta_2 - 13.5 + 5.4 = 0 \Rightarrow EI\theta_2 = 3.375$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M_{12} = 1.35 \text{ t.m} \\ M_{21} = 2.7 \text{ t.m} \\ M_{23} = -8.1 \text{ t.m} \\ M_{32} = 16.2 \text{ t.m} \end{cases}$$

اگر مثال فوق بدون لنگر خارجی باشد نتایج بصورت زیر خواهد بود:

$$M_{21} + M_{23} = 0 \Rightarrow EI\theta_2 = 5.625$$

$$\begin{cases} M_{12} = 2.25 \text{ t.m} \\ M_{21} = 4.5 \text{ t.m} \\ M_{23} = -4.5 \text{ t.m} \\ M_{32} = 18.0 \text{ t.m} \end{cases}$$

حال برای نشان دادن تاثیر سختی اعضا بر روی لنگرهای بوجود آمده، به بررسی نتایج حاصله با در نظر

گرفتن سختی‌های مختلف برای اعضا می‌پردازیم:

(۱) سختی مساوی تیر و ستون

$$\begin{cases} M_{12} = 0.4EI\theta_2 \\ M_{21} = 0.8EI\theta_2 \\ M_{23} = 0.8EI\theta_2 - 13.5 \\ M_{32} = 0.4EI\theta_2 + 13.5 \end{cases}, M_{21} + M_{23} = 0 \Rightarrow 1.6EI\theta_2 = 13.5 \Rightarrow EI\theta_2 = 8.4375$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M_{12} = 3.375 \text{ t.m} \\ M_{21} = 6.75 \text{ t.m} \\ M_{23} = -6.75 \text{ t.m} \\ M_{32} = 16.875 \text{ t.m} \end{cases}$$

(۲) سختی تیر ده برابر سختی ستون

$$\begin{cases} M_{12} = 0.4EI\theta_2 \\ M_{21} = 0.8EI\theta_2 \\ M_{23} = 8EI\theta_2 - 13.5 \\ M_{32} = 4EI\theta_2 + 13.5 \end{cases}, M_{21} + M_{23} = 0 \Rightarrow 8.8EI\theta_2 = 13.5 \Rightarrow EI\theta_2 = 1.534$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M_{12} = 0.613 \text{ t.m} \\ M_{21} = 1.227 \text{ t.m} \\ M_{23} = 19.636 \text{ t.m} \\ M_{32} = -1.227 \text{ t.m} \end{cases}$$

(۳) سختی ستون ده برابر سختی تیر

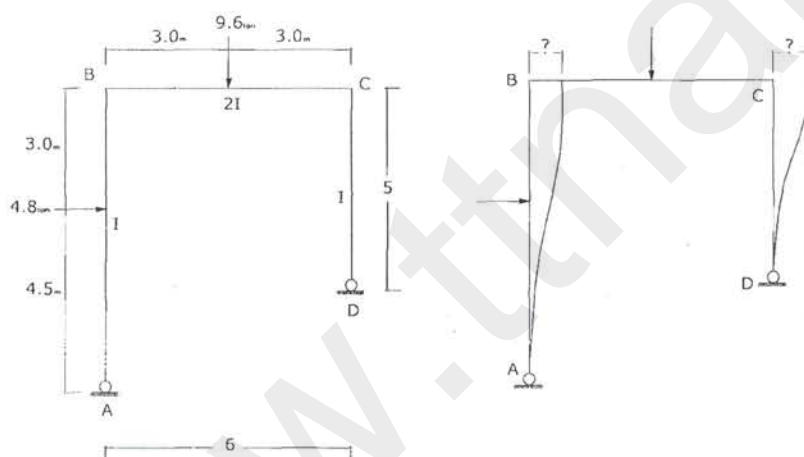
$$\begin{cases} M_{12} = 4EI\theta_2 \\ M_{21} = 8EI\theta_2 \\ M_{23} = 0.8EI\theta_2 - 13.5 \\ M_{32} = 0.4EI\theta_2 + 13.5 \end{cases}, M_{21} + M_{23} = 0 \Rightarrow 8.8EI\theta_2 = 13.5 \Rightarrow EI\theta_2 = 1.534$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M_{12} = 6.136 \text{ t.m} \\ M_{21} = 12.27 \text{ t.m} \\ M_{23} = -12.27 \text{ t.m} \\ M_{32} = 14.11 \text{ t.m} \end{cases}$$

مراتب فوق نشان می‌دهد که سختی نسبی اعضا نسبت به هم در لنگرها تأثیر زیادی ایجاد نمی‌کند.

۲-۴- قاب مستطیلی با تغییر مکان جانبی

مثال ۱- قاب شکل زیر را تحلیل کنید.



مجهولات: $\Delta, \theta_a, \theta_b, \theta_c, \theta_d$

تعیین لنگرهای گیرداری:

$$M'_{ab} = -\frac{4.8 \times 3^2 \times 4.5}{7.5^2} = -3.45 \text{ t.m}$$

$$M'_{ba} = \frac{4.8 \times 4.5^2 \times 3}{7.5^2} = 5.18 \text{ t.m}$$

$$M'_{bc} = -M'_{cb} = -\frac{PL}{8} = -7.2 \text{ t.m}$$

نوشتن معادلات شیب افت (با در نظر گرفتن سازگاری تغییر مکان‌ها)

$$M_{ab} = \frac{2EI}{7.5} (2\theta_a + \theta_b - \frac{3\Delta}{7.5}) + (-3.45) = 0.26667EI(2\theta_a + \theta_b - 0.4\Delta) - 3.45$$

$$M_{ba} = \frac{2EI}{7.5} (\theta_a + 2\theta_b - \frac{3\Delta}{7.5}) + (5.18) = 0.26667EI(\theta_a + 2\theta_b - 0.4\Delta) + 5.18$$

$$M_{bc} = \frac{4EI}{6}(2\theta_b + \theta_c) + (-7.2) = 0.66667EI(2\theta_b + \theta_c) - 7.2$$

$$M_{cb} = \frac{4EI}{6}(\theta_c + 2\theta_b) + (7.2) = 0.66667EI(\theta_c + 2\theta_b) + 7.2$$

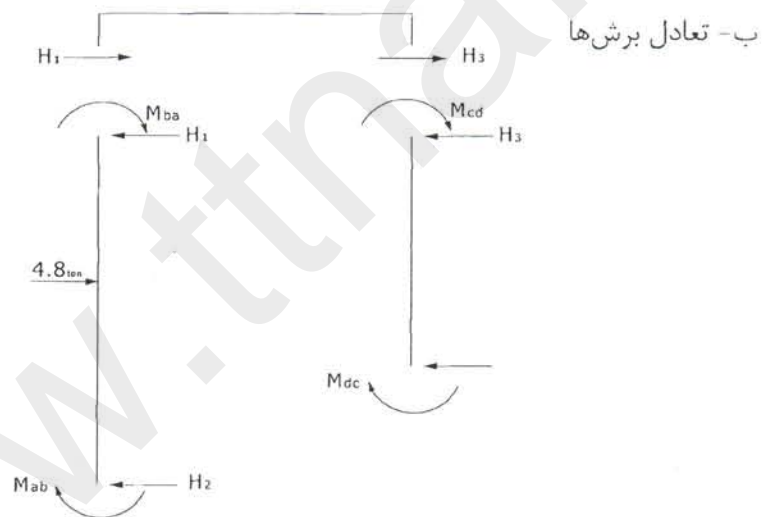
$$M_{cd} = \frac{2EI}{5}(2\theta_c + \theta_d - \frac{3\Delta}{5}) = 0.4EI(2\theta_c + \theta_d - 0.6\Delta)$$

$$M_{dc} = \frac{2EI}{5}(\theta_c + 2\theta_d - \frac{3\Delta}{5}) = 0.4EI(\theta_c + 2\theta_d - 0.6\Delta)$$

اعمال شرایط تعادل :

الف- تعادل لنگرها

$$\begin{cases} M_{ab} = 0 \\ M_{ba} + M_{bc} = 0 \\ M_{cb} + M_{cd} = 0 \\ M_{dc} = 0 \end{cases}$$



$$H_1 = \frac{4.8 \times 4.5}{7.5} + \frac{M_{ab} + M_{ba}}{7.5}$$

$$H_3 = \frac{M_{cd} + M_{dc}}{5}$$

$$2.88 + 0.03555(3\theta_a + 3\theta_b - 0.8\Delta) + 0.23061 + 0.08EI(3\theta_c + 3\theta_d - 1.2\Delta) = 0$$

$$\Rightarrow -0.10667\theta_a - 0.10667\theta_b - 0.24\theta_c - 0.24\theta_d + 0.12444\Delta = 3.1104$$

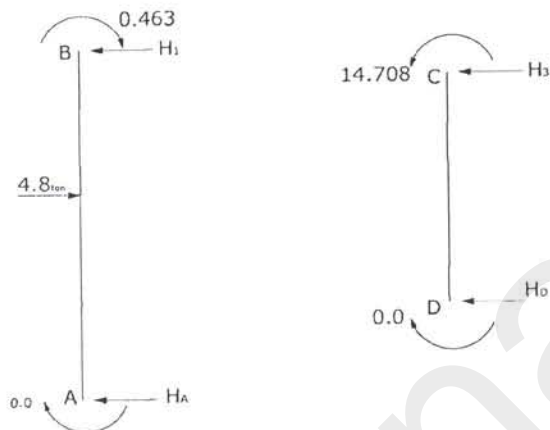
تشکیل ماتریس سختی

$$EI \begin{bmatrix} 0.5333 & 0.26667 & 0 & 0 & -0.10667 \\ 0.26667 & 1.86666 & 0.6667 & 0 & -0.10667 \\ 0 & 0.6667 & 2.1333 & 0.4 & -0.24 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0.8 & -0.24 \\ -0.10667 & 0.10667 & -0.24 & -0.24 & 0.12444 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_a \\ \theta_b \\ \theta_c \\ \theta_d \\ \Delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.45 \\ -5.18 + 7.2 \\ -7.2 + 0 \\ 0 \\ 3.1104 \end{bmatrix}$$

با حل معادله فوق خواهیم داشت:

$$\begin{cases} EI\Delta = 143.27 \\ EI\theta_d = 40.912 \\ EI\theta_c = 4.14 \\ EI\theta_b = 2.982 \\ EI\theta_a = 33.642 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_{ab} = -0.001 \\ M_{ba} = 0.463 \\ M_{bc} = -0.464 \\ M_{cb} = 14.708 \\ M_{cd} = -14.708 \\ M_{dc} = 0.001 \end{cases}$$

کنترل نیروی برشی تکیه گاه‌ها:



$$H_x = \frac{M_{45} + M_{54}}{6.4}$$

$$H_A + H_D = 4.8$$

$$H_A = \frac{4.8 \times 3}{3 + 4.5} - \frac{0.463}{7.5}, H_D = \frac{14.708}{5}$$

$$\left(\frac{14.4}{7.5} - \frac{0.463}{7.5}\right) + \frac{14.708}{5} = 1.8583 + 2.9416 = 4.7999 \cong 4.8$$

اگر در این مسئله تکیه گاه‌های A, D گیردار باشند خواهیم داشت:

$$\theta_a = \theta_d = 0, M_{ab}, M_{cd} \neq 0$$

در نتیجه: (سطر و ستون مربوطه حذف می‌گردد)

$$EI \begin{bmatrix} 1.8666 & 0.6667 & -0.1067 \\ 0.6667 & 2.1333 & -0.24 \\ -0.1067 & -0.24 & 0.1244 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_b \\ \theta_c \\ \Delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.016 \\ -7.2 \\ 3.1104 \end{bmatrix}$$

با حل معادله فوق نتایج زیر حاصل خواهد شد:

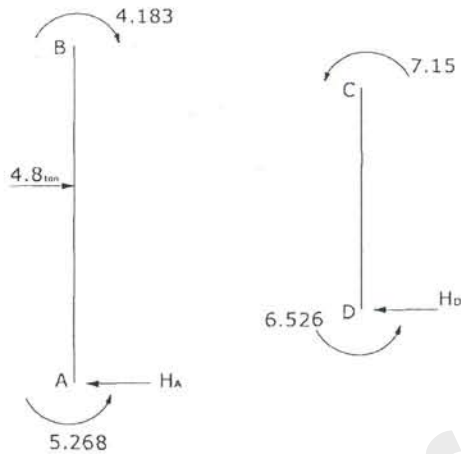
$$\begin{cases} EI\Delta = 24.596 \\ EI\theta_c = -1.5586 \\ EI\theta_b = 3.0422 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_{ab} = -5.268 \\ M_{ba} = 4.183 \\ M_{bc} = -4.183 \\ M_{cb} = 7.15 \\ M_{cd} = -7.15 \\ M_{dc} = -6.526 \end{cases}$$

کنترل نیروی برشی تکیه‌گاه‌ها:

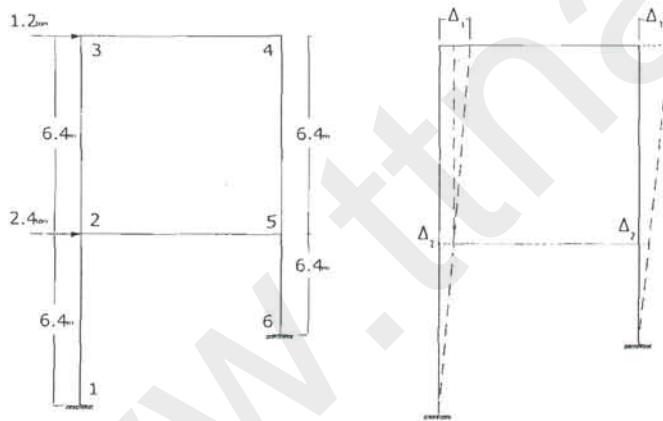
$$H_A = \frac{4.8 \times 3 + 5.268 - 4.183}{7.5} = 2.065$$

$$H_D = \frac{7.15 + 6.526}{5} = 2.735$$

$$H_A + H_D = 2.065 + 2.735 = 4.8 \text{ t}$$



مثال ۲- قاب مستطیلی با دو درجه آزادی.



$\theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \Delta_1, \Delta_2$

در این حالت مجهولات عبارتند از:

برای حل این گونه قاب‌ها نیز مانند موارد قبل شرایط تعادل لنگر در گره‌ها را می‌نویسیم که در این صورت خواهیم داشت:

$$\sum M_2 = \sum M_3 = \sum M_4 = \sum M_5 = 0$$

روابط حاصل از تعادل برش‌ها:

1) $M_{21} + M_{23} + M_{25} = 0$

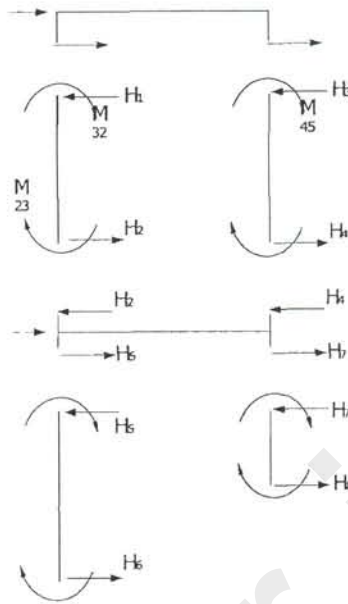
2) $M_{32} + M_{34} = 0$

3) $M_{43} + M_{45} = 0$

4) $M_{54} + M_{56} + M_{52} = 0$

$$5) -1.2 - H_1 - H_3 = 0$$

$$6) -2.4 + H_1 + H_3 - H_5 - H_7 = 0$$



با نوشتن شرایط تعادل نیروها داریم:

$$H_1 = \frac{M_{32} + M_{23}}{6.4}$$

$$H_3 = \frac{M_{45} + M_{54}}{6.4}$$

$$H_5 = \frac{M_{12} + M_{21}}{6.4}$$

$$H_7 = \frac{M_{65} + M_{56}}{3.2}$$

$$M_{ij} = \frac{2EI}{L_{ij}} (2\theta_i + \theta_j - \frac{3\Delta}{L_{ij}}) + M'_{ij}$$

با حل دستگاه شش معادله شش مجهول فوق، تمامی مجهولات به ترتیب زیر بدست می آیند:

$$\theta_2 = 0.79347 \frac{tm^2}{EI}$$

$$\theta_3 = 0.66138 \frac{tm^2}{EI}$$

$$\theta_4 = 0.46592 \frac{tm^2}{EI}$$

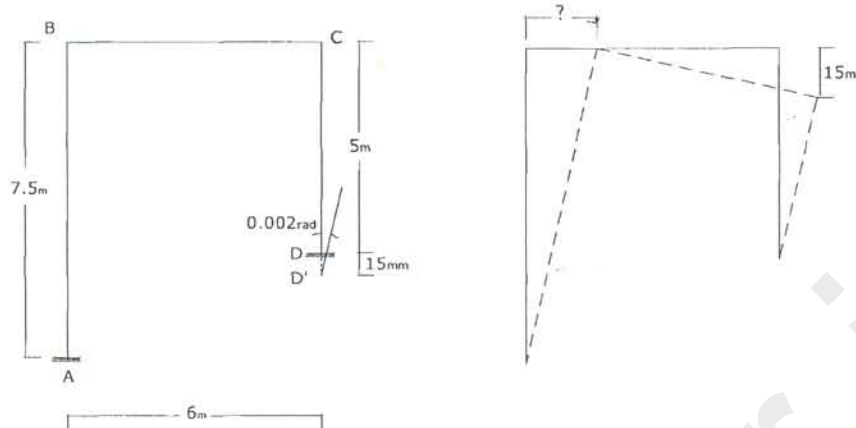
$$\theta_5 = 1.5744 \frac{tm^2}{EI}$$

$$\Delta_1 = 18.601$$

$$\Delta_2 = 6.455$$

۳-۴- قاب مستطیلی با نشست تکیه گاهی و دوران تکیه گاه

مثال: قاب شکل زیر را تحلیل کنید.



نوشتن روابط شیب-افت:

$$M_{ab} = \frac{2EI}{7.5} (\theta_b + \frac{3\Delta_1}{7.5}) = EI(0.267\theta_b - 0.1067\Delta_1)$$

$$\begin{cases} M_{ba} = \frac{2EI}{7.5} (2\theta_b - \frac{3\Delta_1}{7.5}) = EI(0.5333\theta_b - 0.1067\Delta_1) \\ M_{bc} = \frac{2EI}{6} (2\theta_b + \theta_c - \frac{3 \times 15 \times 10^{-3}}{6}) = EI(0.67\theta_b + 0.33\theta_c) - 2.5 \times 10^{-4} EI \end{cases}$$

$$M_{cb} = \frac{2EI}{6} (\theta_b + 2\theta_c - \frac{45 \times 10^{-3}}{6}) = EI(0.333\theta_b + 0.67\theta_c) - 2.5 \times 10^{-4}$$

$$M_{cd} = \frac{2EI}{5} (2\theta_c + 0.002 - \frac{3\Delta_1}{5}) = EI(0.8\theta_c - 0.24\Delta_1) + 8 \times 10^{-4}$$

$$M_{dc} = \frac{2EI}{5} (2 \times 0.002 + \theta_c - \frac{3\Delta_1}{5}) = EI(0.4\theta_c - 0.24\Delta_1) + 16 \times 10^{-4} EI$$

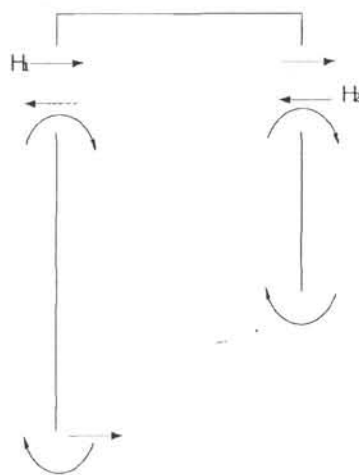
تعداد لنگرها:

$$M_{ba} + M_{bc} = 0$$

$$M_{cb} + M_{cd} = 0$$

تعداد برش:

$$H_1 = \frac{M_{ab} + M_{ba}}{7.5}, H_2 = \frac{M_{cd} + M_{dc}}{5}$$



$$H_1 + H_2 = 0 \Rightarrow \frac{EI}{7.5} (0.50\theta_B - 2 \times 0.1067\Delta_1) - \frac{EI}{5} (1.50\theta_C - 0.48\Delta_1) - 24 \times 10^{-4} EI = 0$$

تشکیل ماتریس سختی:

$$\begin{bmatrix} 1.2 & 0.333 & -0.1067 \\ 0.333 & 1.467 & -0.24 \\ -0.1067 & -0.24 & 0.1244 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \theta_B \\ \theta_C \\ \Delta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 \times 10^{-4} \\ -5.5 \times 10^{-4} \\ 4.8 \times 10^{-4} \end{bmatrix} EI$$

با حل معادله فوق خواهیم داشت:

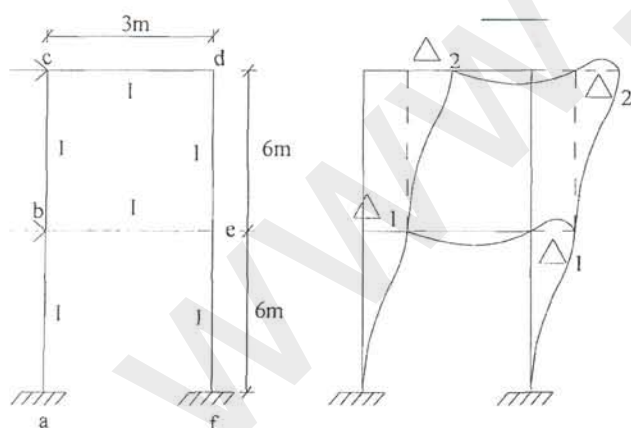
$$\begin{cases} \Delta_1 = 4.92 \times 10^{-3} \text{ (m)} \\ \theta_C = 3.015 \times 10^{-4} \text{ (rad)} \\ \theta_B = 5.62 \times 10^{-4} \text{ (rad)} \end{cases}$$

۴-۴- قاب مستطیلی با تقارن معکوس

قاب های مستطیلی با تقارن معکوس را می توان به دو روش مستقیم و هندسی تحلیل نمود، که در ادامه هر دو روش توضیح داده می شوند.

۱- روش مستقیم

مثال ۱- قاب روبرو تحت اثر نیروهای جانبی تقارن معکوس دارد و در اثر اعمال نیروهای مخالف به حالت اولیه باز می گردد.



$$\Delta_c = \Delta_d, \Delta_b = \Delta_e$$

با توجه به در نظر گرفتن خواص سازه های با تقارن معکوس داریم:

پس مجهولات در این حالت تقلیل یافته و تنها چهار مجهول $\Delta_1, \Delta_2, \theta_b, \theta_c$ باقی می ماند که با توجه به معادلات شیب افت خواهیم داشت:

$$M_{ab} = M_{fc} = \left(\theta_b - \frac{3\Delta_1}{6} \right), \theta_a = 0$$

$$\left. \begin{aligned} M_{ba} = M_{ef} &= \left(2\theta_b - \frac{3\Delta_1}{6} \right) \\ M_{bc} = M_{ed} &= \left(2\theta_b + \theta_c - \frac{3\Delta_2}{6} \right) \\ M_{be} = M_{cb} &= (2\theta_b + \theta_c) = 6\theta_b \quad (\theta_b = \theta_c) \end{aligned} \right\} = 0 \Rightarrow$$

$$M_{ba} + M_{bc} + M_{bc} = 0 \Rightarrow$$

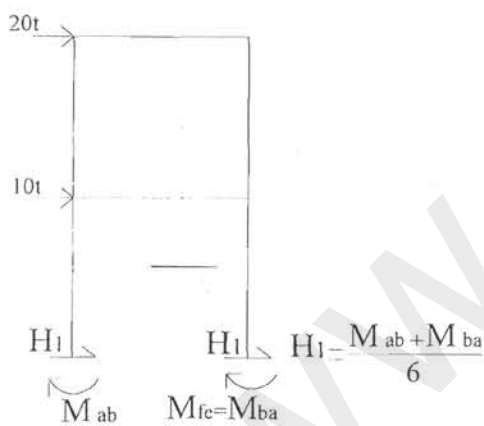
$$-\Delta_1 - \Delta_2 + 20\theta_b + 2\theta_c = 0 \quad (I)$$

$$\left. \begin{aligned} M_{cb} = M_{dc} &= \left(2\theta_c + \theta_b - \frac{3\Delta_2}{6} \right) \\ M_{cd} = M_{dc} &= 2(2\theta_c + \theta_d) = 6\theta_c \quad (\theta_c = \theta_d) \end{aligned} \right\} = 0 \Rightarrow$$

$$M_{cb} + M_{cd} = 0 \Rightarrow$$

$$-0.5\Delta_2 + \theta_b + 8\theta_c = 0 \quad (II)$$

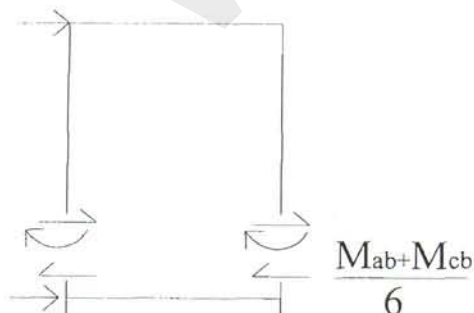
با توجه به معادلات برش:



«برش اول»

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow 2 \left(\frac{M_{ba} + M_{ab}}{6} \right) + 20 + 10 = 0$$

$$0.33\Delta_1 - \theta_b = 30 \quad (III)$$



«برش دوم»

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow 2 \left(\frac{M_{bc} + M_{cb}}{6} \right) + 10 = 0$$

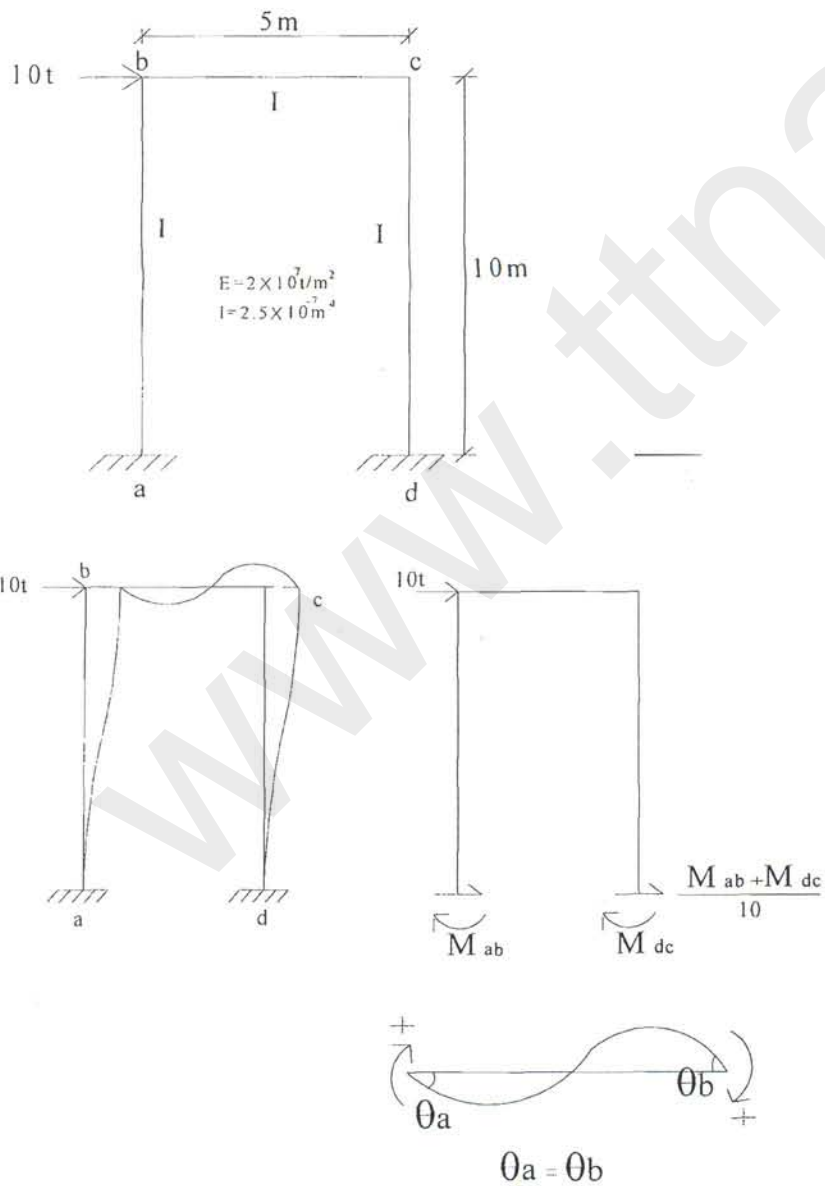
$$0.33\Delta_2 - \theta_b - \theta_c = 10 \quad (IV)$$

دو معادله برش مستقل خطی می‌باشند

با توجه به چهار معادله و چهار مجهول ماتریس سختی را نوشته و مجهولات را بدست می‌آوریم.

$$\begin{bmatrix} 20 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 16 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0.33 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0.33 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \theta_b \\ \theta_c \\ \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 30 \\ 10 \end{bmatrix}$$

مثال ۲- تقارن معکوس



$$M_{ab} = M_{dc} = \frac{2EI}{10} \left(\underbrace{2\theta_a}_0 + \theta_b - \frac{3\Delta}{10} \right) = \theta_b - \frac{3\Delta}{10}$$

$$M_{ba} = M_{cd} = \frac{2EI}{10} \left(\theta_a + 2\theta_b - \frac{3\Delta}{10} \right) = 2\theta_b - \frac{3\Delta}{10}$$

$$M_{bc} = M_{cb} = 2(2\theta_b + \theta_b) = 6\theta_b$$

$$\sum M_b = 0 \Rightarrow 8\theta_b - 0.3\Delta = 0 \quad (I)$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow 2\left(\frac{M_{ab} + M_{ba}}{10}\right) + 10 = 0$$

$$3\theta_b - 0.6\Delta + 50 = 0 \quad (II)$$

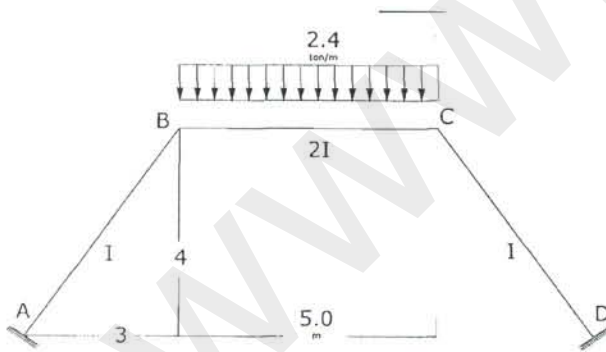
$$(I), (II) : \begin{cases} 8\theta_b - 0.3\Delta = 0 \\ 3\theta_b - 0.6\Delta = -50 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta_b = 50/13 \\ \Delta = 4000/39 \end{cases}$$

۲- روش هندسی: در بخش قاب‌های شیبدار به آن خواهیم پرداخت.

۴-۵- قاب غیر مستطیلی بدون تغییر مکان جانبی

(قاب‌های شیبدار Gable Frame)

مثال- قاب شکل زیر را تحلیل کنید.



(بار جانبی به سازه وارد نمی‌شود و بارگذاری متقارن می‌باشد پس سازه متقارن بوده و تغییر شکل جانبی نداریم.)

(تقارن مستقیم)

محاسبه لنگرهای گیرداری:

$$M'_{AB} = M'_{CD} = 0$$

$$M'_{BC} = -M'_{CB} = -\frac{2.4 \times 5^2}{12} = -5.0 \text{ t.m}$$

نوشتن روابط شیب-افت:

$$M_{ij} = \frac{2EI}{\ell} (2\theta_i + \theta_j - \frac{3\Delta}{\ell}) + M'_{ij}$$

$$M_{ab} = \frac{2EI}{5} (2\theta_a + \theta_b) = 0.4EI\theta_b$$

$$M_{ba} = \frac{2EI}{5} (\theta_a + 2\theta_b) = 0.8EI\theta_b$$

$$M_{bc} = \frac{4EI}{5} (2\theta_b + \theta_c) - 5.0 = 0.8EI\theta_c + 1.6EI\theta_b - 5.0$$

$$M_{cb} = \frac{4EI}{5} (\theta_b + 2\theta_c) + 5.0 = 0.8EI\theta_b + 1.6EI\theta_c + 5.0$$

$$M_{cd} = \frac{2EI}{5} (2\theta_c + \theta_d) = 0.8EI\theta_c$$

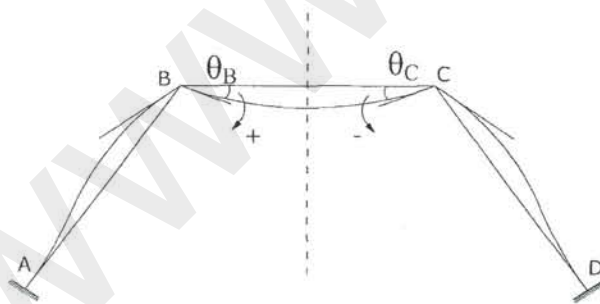
$$M_{dc} = \frac{2EI}{5} (\theta_c + 2\theta_d) = 0.4EI\theta_c$$

با توجه به گیردار بودن تکیه گاه‌های A, D خواهیم داشت: $\theta_a = \theta_d = 0$

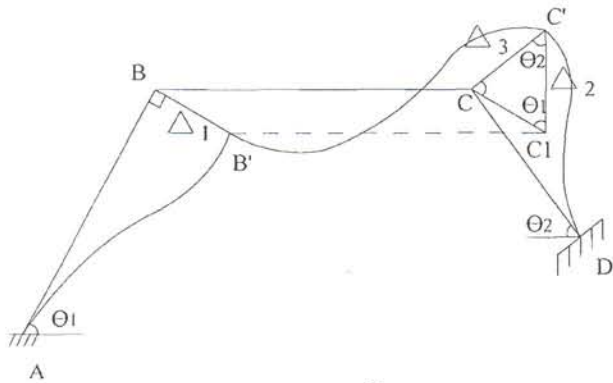
تعداد لنگرها:

$$\begin{cases} M_{bc} + M_{ba} = 0 \\ M_{cb} + M_{cd} = 0 \end{cases} \Rightarrow \theta_B = -\theta_C = +3.125/EI$$

$$\left. \begin{aligned} E &= 200 \times 10^6 \text{ t/m}^2 \\ I &= 40 \times 10^{-6} \text{ m}^4 \\ EI &= 8000 \text{ t.m}^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \theta_B = -\theta_C = 4 \times 10^{-4} \text{ (rad)}$$



۴-۶- حل هندسی قاب‌های غیر مستطیلی



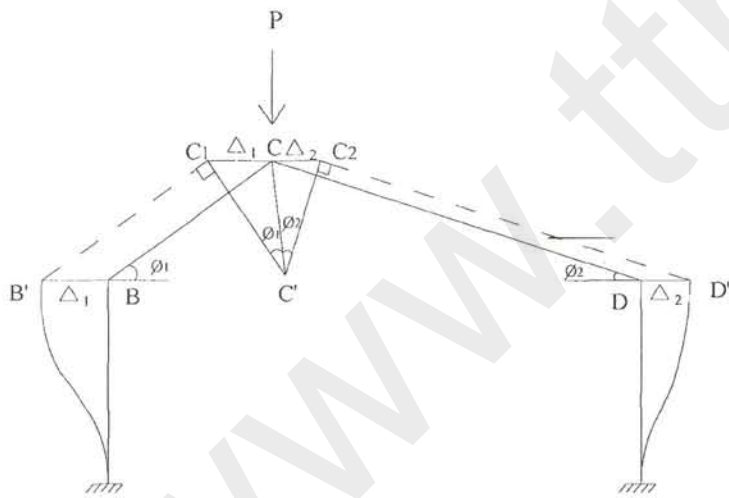
$$\Delta_{ab} = CC_1 = \Delta_1$$

$$\Delta_{bc} = C_1C' = \Delta_2$$

$$\Delta_{cd} = CC' = \Delta_3$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta_1}{\sin \theta_2} = \frac{\Delta_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} = \frac{\Delta_3}{\sin \theta_1}$$

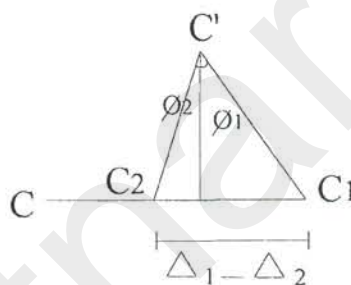
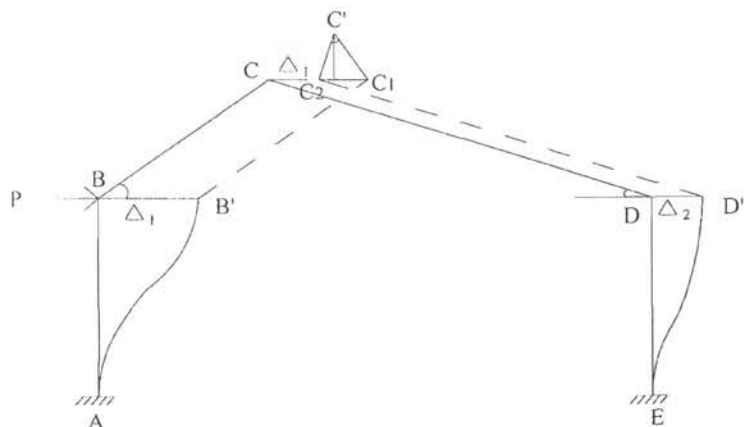
الف) قاب نامتقارن تحت اثر بار قائم:



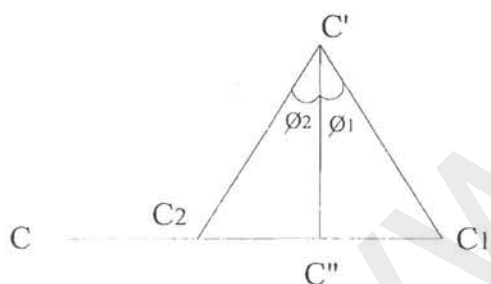
$$\frac{\Delta_{bc}}{\sin(90 - \Phi_1)} = \frac{\Delta_{cd}}{\sin(90 - \Phi_2)} = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{\sin(\Phi_1 + \Phi_2)}$$

(در حالت سازه متقارن $\Delta_1 = \Delta_2, \Phi_1 = \Phi_2$)

ب) قاب نامتقارن تحت اثر بار افقی:



$$\Delta_1 = C_1C, \quad CC_2 = \Delta_2$$

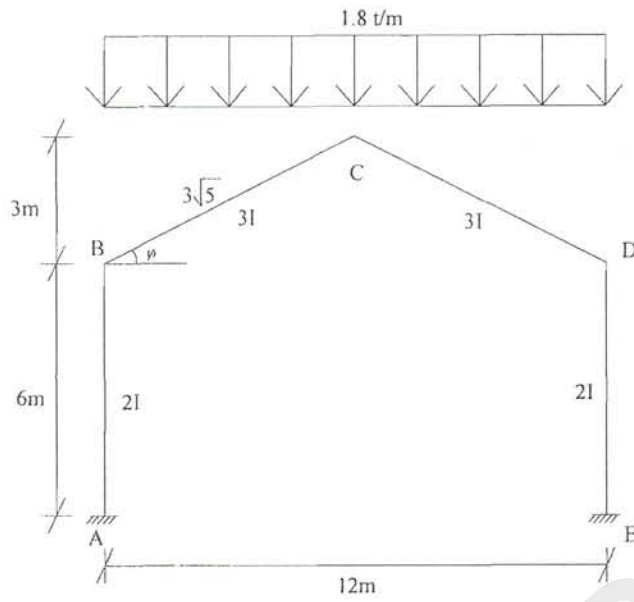


(در حالت سازه متقارن $\Phi_1 = \Phi_2$, $C_2C'' = C''C_1$)

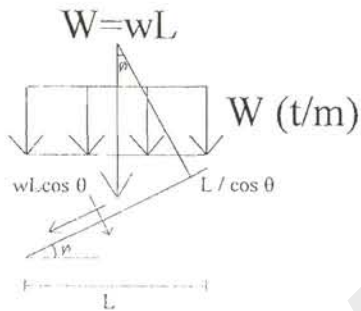
ج) قابهای شیبدار

برای حل قابهای شیبدار ابتدا مجهولات گرهی را تعیین نموده و سپس قاب را از لحاظ هندسی حل می‌کنیم (بدست آوردن تغییر مکان دو سر اعضا) و در نهایت با نوشتن معادلات شیب-افت مجهولات را بدست می‌آوریم.

مثال ۱- سازه متقارن تحت بار قائم

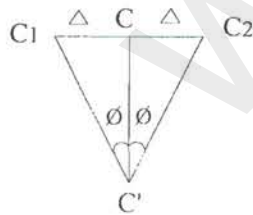


(۱) ابتدا بار قائم بر سطح افق را به بار معادل وارد بر سطح شیبدار قاب تبدیل می کنیم که در این صورت خواهیم داشت:



$$\frac{W l \cos \Phi}{l / \cos \Phi} = W \cdot \cos^2 \Phi$$

(۲) مجهولات: $\Delta, \theta_b, \theta_c, \theta_d$

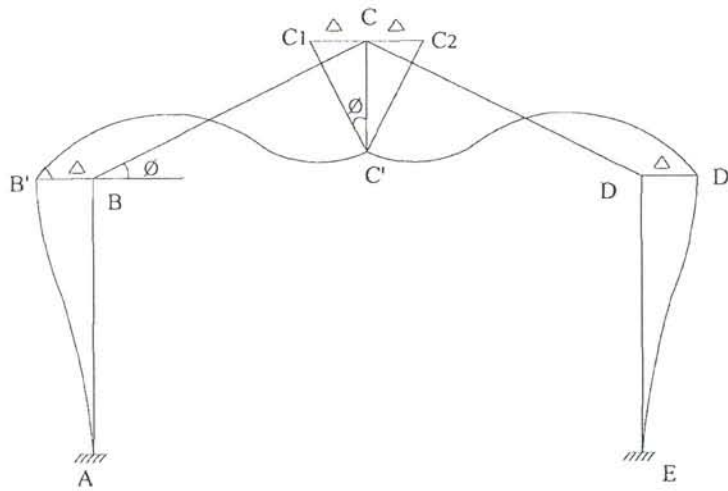


$$\Delta_{ab} = \Delta_{ba} = -\Delta$$

$$\Delta_{bc} = \Delta_{cb} = \frac{CC'}{\sin \alpha} = \sqrt{5}\Delta$$

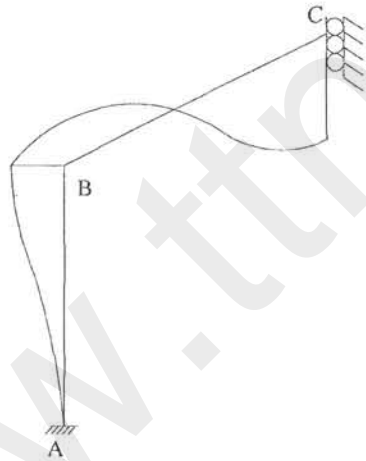
$$\Delta_{cd} = \Delta_{dc} = -\sqrt{5}\Delta$$

$$\Delta_{de} = \Delta_{ed} = \Delta$$



۳) با استفاده از تقارن و با توجه به اینکه تغییر مکان افقی نقطه C صفر است و فقط تغییر مکان قائم دارد. لذا

داریم: $\theta_C = 0$



$$M'_{ab} = -M'_{ba} = 0$$

$$M'_{bc} = -M'_{cb} = -\frac{1}{12} \times 1.8 \times 36 = -5.4 \text{ t.m}$$

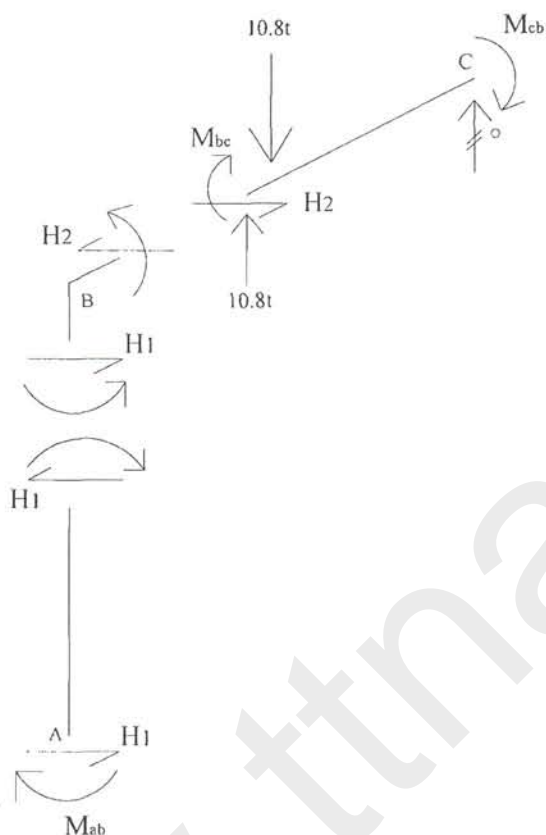
$$M_{ab} = \frac{2E(2I)}{6} \left(\theta_b + \frac{3\Delta}{6} \right), \quad \theta_a = 0, \quad M'_{ab} = 0$$

$$\left. \begin{aligned} M_{ba} &= \frac{2E(2I)}{6} \left(2\theta_b + \frac{3\Delta}{6} \right) \\ M_{bc} &= \frac{2E(3I)}{6} \left(2\theta_b - \frac{3\sqrt{5}\Delta}{3\sqrt{5}} \right) - 5.4 \end{aligned} \right\} = 0 \quad (1)$$

$$M_{cb} = \frac{2E(3I)}{6} \left(\theta_b - \frac{3\sqrt{5}\Delta}{3\sqrt{5}} \right) + 5.4$$

(۴) تعادل برش:

عکس العمل قائم C صفر است چون تکیه گاه غلطکی است و تغییر مکان دارد.



$$\sum F_{x(b)} = 0 \Rightarrow H_1 - H_2 = 0$$

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow$$

$$-3H_2 - 10.8 \times 3 + 10.8 \times 6 + M_{bc} + M_{cb} = 0$$

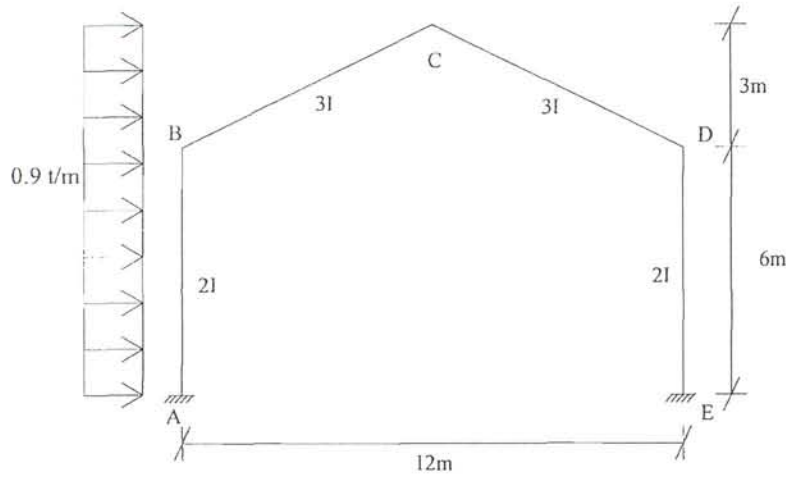
$$H_2 = 10.8 + \frac{M_{bc} + M_{cb}}{3}$$

$$\frac{M_{ab} + M_{ba}}{6} - \frac{M_{bc} + M_{cb}}{3} - 10.8 = 0 \quad (II)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} EI \left[\left(\frac{4}{3} + \frac{4}{\sqrt{5}} \right) \theta_b + \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{\sqrt{5}} \right) \Delta \right] = 5.4 & (I) \\ EI [-3.366\theta_b - 4.25\Delta] = 6 \times 10.8 & (II) \end{cases}$$

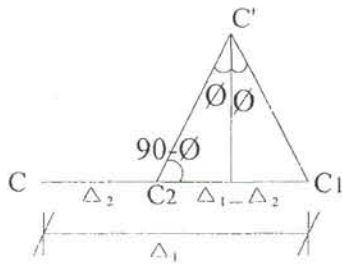
$$\begin{cases} 3.12\theta_b - 0.561\Delta = \frac{5.4}{EI} \\ -0.561\theta_b + 0.7\Delta = \frac{10.8}{EI} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta_b = \frac{5.217}{EI} \\ \Delta = \frac{19.404}{EI} \end{cases}$$

مثال ۲: سازه متقارن تحت بار جانبی

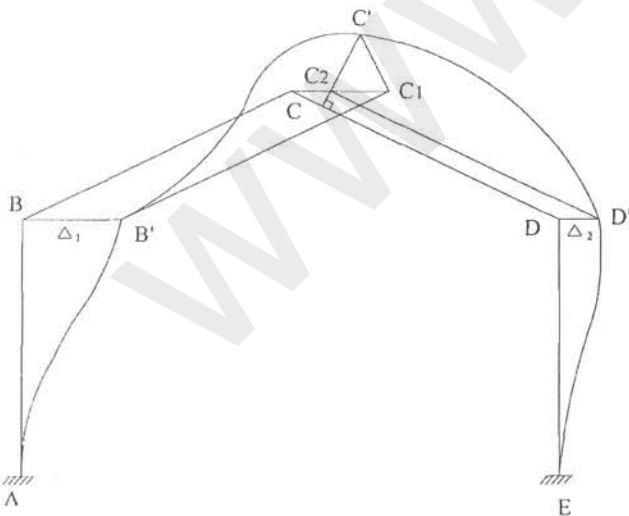


مانند مثال قبل قاب شیبدار متقارن هندسی، تحت بار افقی مانند باد قرار گرفته است.

(۱) مجهولات تغییر مکانی $\Delta_1, \Delta_2, \theta_b, \theta_c, \theta_d$



(۲) حل هندسی - ترسیم منحنی ارتجاعی



الف: از C به اندازه Δ_1 در جهت افقی حرکت و به C_1 می‌رسیم، تغییر مکان یافته نقطه C یعنی C' روی خطی عمود بر امتداد bc یا $b'C_1$ قرار دارد، پس از C_1 عمودی بر $b'C_1$ اخراج می‌کنیم.

ب: از C به اندازه Δ_2 در جهت افقی حرکت به C_2 می‌رسیم، تغییر مکان یافته C یعنی C' روی خطی عمود بر

امتداد cd یا C_2d' قرار دارد پس از C_2 عمودی بر C_2d' اخراج می کنیم.

ج: محل تقاطع نقطه C' می باشد. $C_2C_1 = \Delta_1 - \Delta_2$

د: Δ های اضلاع مختلف را با توجه به مثلث $C_2C'C_1$ به دست می آوریم.

$$\frac{\Delta_1 - \Delta_2}{\sin 2\Phi} = \frac{C_1C'}{\sin(90 - \Phi)}$$

$$\frac{\Delta_1 - \Delta_2}{2\sin\Phi \cos\Phi} = \frac{C_1C'}{\cos\Phi}$$

$$C'C_1 = C'C_2 = \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{2\sin\Phi}$$

$$\Delta_{ab} = \Delta_{ba} = \Delta_1$$

$$\Delta_{bc} = \Delta_{cb} = -C_1C' = -\frac{\Delta_1 - \Delta_2}{2\sin\Phi} = -\frac{(\Delta_1 - \Delta_2)}{\frac{2}{\sqrt{5}}} = -\frac{\sqrt{5}}{2}(\Delta_1 - \Delta_2)$$

$$\Delta_{cd} = \Delta_{dc} = -\Delta_{bc} = \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{2\sin\alpha} = \frac{(\Delta_1 - \Delta_2)}{\frac{2}{\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{5}}{2}(\Delta_1 - \Delta_2)$$

$$\Delta_{de} = \Delta_{ed} = \Delta_2$$

۳) تشکیل معادلات شیب افت

الف: لنگرهای گیرداری

$$M'_{ab} = -M'_{ba} = -\frac{wl^2}{12} = -\frac{0.9 \times 6^2}{12} = -2.7 \text{ t.m}$$

$$M'_{bc} = -M'_{cb} = -\frac{wl^2}{12} = -\frac{0.9 \times 3^2}{12} = -0.675 \text{ t.m}$$

ب: تعیین شرایط مرزی $\theta_a = \theta_e = 0$

ج: نوشتن معادلات

$$M_{ab} = \frac{2E(2I)}{6}(\theta_b - \frac{3\Delta_1}{6}) + (-2.7) = 0.67EI(\theta_b - 0.5\Delta_1) - 2.7$$

$$M_{ba} = 0.67EI(2\theta_b - 0.5\Delta_1) + 2.7$$

$$M_{bc} = \frac{2E(3I)}{3\sqrt{5}} \left[2\theta_b + \theta_c + 3 \times \frac{\sqrt{5}}{2}(\Delta_1 - \Delta_2) \right] - 0.675$$

$$= 0.89EI(2\theta_b + \theta_c) + \frac{EI}{\sqrt{5}}(\Delta_1 - \Delta_2) - 0.675$$

$$M_{cb} = 0.89EI(\theta_b + 2\theta_c) + \frac{EI}{\sqrt{5}}(\Delta_1 - \Delta_2) + 0.675$$

$$M_{cd} = \frac{2E(3I)}{3\sqrt{5}} \left[2\theta_c + \theta_d - \frac{3\sqrt{5}}{2}(\Delta_1 - \Delta_2) \right] = 0.89EI(2\theta_c + \theta_d) - \frac{EI}{\sqrt{5}}(\Delta_1 - \Delta_2)$$

$$M_{dc} = 0.89EI(\theta_c + 2\theta_d) - \frac{EI}{\sqrt{5}}(\Delta_1 - \Delta_2)$$

$$M_{de} = \frac{2E(2I)}{6}(2\theta_d - \frac{3\Delta_2}{6}) = 0.67EI(2\theta_d) - 0.33EI\Delta_2$$

خلاصه می‌شود:

$$M_{ab} = 0.67EI\theta_b - 0.33EI\Delta_1 - 2.7$$

$$M_{cd} = 0.67EI\theta_d - 0.33EI\Delta_2$$

$$\left. \begin{aligned} M_{ba} &= 1.33EI\theta_b - 0.33EI\Delta_1 + 2.7 \\ M_{bc} &= 1.78EI\theta_b + 0.81EI\theta_c + 0.447EI(\Delta_1 - \Delta_2) - 0.675 \end{aligned} \right\} = 0 \quad (I)$$

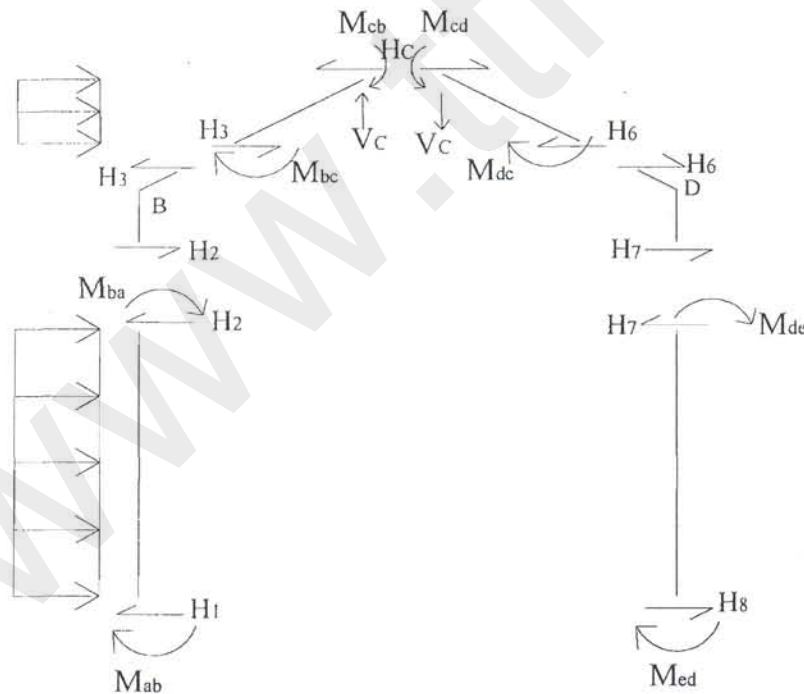
$$\left. \begin{aligned} M_{cb} &= 0.84EI\theta_b + 1.78EI\theta_c + 0.447EI(\Delta_1 - \Delta_2) + 0.675 \\ M_{cd} &= 1.78EI\theta_c + 0.84EI\theta_d - 0.447EI(\Delta_1 - \Delta_2) \end{aligned} \right\} = 0 \quad (II)$$

$$\left. \begin{aligned} M_{dc} &= 0.84EI\theta_c + 1.78EI\theta_d + 0.447EI(\Delta_1 - \Delta_2) \\ M_{de} &= 1.33EI\theta_d + 0.33EI\Delta_2 \end{aligned} \right\} = 0 \quad (III)$$

با حل سه معادله I, II, III بدست می‌آید:

$$M_{cd} = 0.67EI\theta_d - 0.33EI\Delta_2$$

د: روابط برش (برای تأمین دو معادله دیگر):



$$\sum M_d = 0 \Rightarrow$$

$$+3H_c - 6V_c + M_{cd} + M_{dc} = 0$$

$$H_c = \frac{(M_{cb} + M_{bc}) - (M_{dc} + M_{cd})}{6} + 0.675$$

$$\sum F_x = 0 \quad \text{برای (BC)}$$

$$2.7 + H_3 = H_c$$

$$\sum F_x = 0 \quad \text{برای (CD)}$$

$$H_6 = H_c$$

عضو BC, CD انتقال صلب دارند پس دوران ندارند.

$$\left. \begin{aligned} -H_2 + H_3 &= 0 \\ -H_6 - H_7 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$H_2 = 2.7 + \frac{M_{ab} + M_{ba}}{6} \quad \text{(IV)}$$

$$H_7 = \frac{M_{ed} + M_{de}}{6} \quad \text{(V)}$$

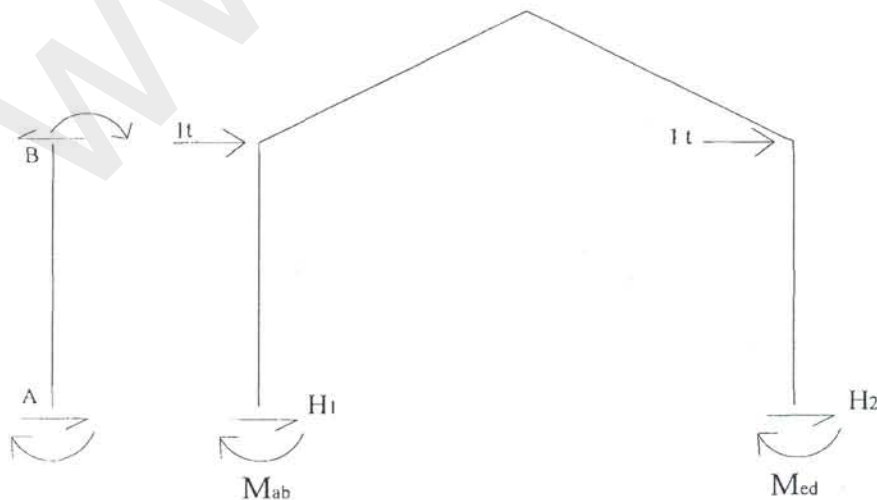
همه: تشکیل معادلات و حل:

$$EI \begin{bmatrix} 3.1221 & 0.8944 & 0 & 0.11388 & -0.44721 \\ 0.8944 & 3.5776 & 0.8944 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8944 & 3.1221 & -0.44721 & 0.11388 \\ 0.11388 & 0 & -0.44721 & 0.40425 & -0.29815 \\ -0.44721 & 0 & 0.11388 & -0.29815 & 0.40925 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \theta_b \\ \theta_c \\ \theta_d \\ \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.025 \\ -0.675 \\ 0 \\ 4.725 \\ 0.675 \end{bmatrix}$$

نتایج

$$\begin{cases} \theta_b = 3.356EI \\ \theta_c = -2.356EI \\ \theta_d = 5.312EI \\ \Delta_1 = 40.95EI \\ \Delta_2 = 33.67EI \end{cases}$$

مثال ۳- آنالیز قاب‌های شیبدار متقارن با استفاده از تقارن معکوس در بارگذاری‌ها:
(منظور محاسبه یک قاب شیبدار تحت اثر بار قرینه معکوس مثل شکل روبرو می‌باشد.)



روش حل ۱) بدون استفاده از تقارن معکوس

C حرکت قائم ندارد) از نظر هندسی تغییر مکان نقطه C ممکن نیست.

مجهولات: $\theta_d, \theta_b, \theta_c, \Delta$

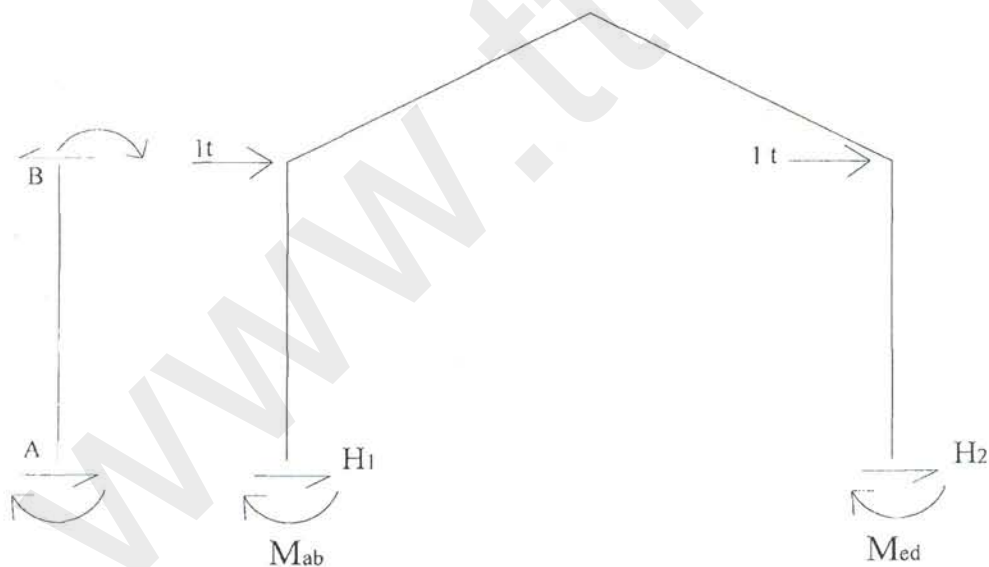
$$M_{ab} = \frac{2EI}{h} \left(\theta_b - \frac{3\Delta}{h} \right) = 2\theta_b - \Delta$$

$$\left. \begin{aligned} M_{ba} &= \frac{2EI}{h} \left(2\theta_b - \frac{3\Delta}{h} \right) = 4\theta_b - \Delta \\ M_{bc} &= \frac{2EI}{l} (2\theta_b + \theta_c) = 4\theta_b + 2\theta_c \end{aligned} \right\} = 0 \Rightarrow 8\theta_b + 2\theta_c - \Delta = 0 \quad (I)$$

$$\left. \begin{aligned} M_{cb} &= \frac{2EI}{l} (\theta_b + 2\theta_c) = 2\theta_b + 4\theta_c \\ M_{cd} &= \frac{2EI}{l} (2\theta_c + \theta_d) = 4\theta_c + 2\theta_d \end{aligned} \right\} = 0 \Rightarrow 2\theta_b + 8\theta_c + 2\theta_d = 0 \quad (II)$$

$$\left. \begin{aligned} M_{dc} &= \frac{2EI}{l} (\theta_c + 2\theta_d) = 2\theta_c + 4\theta_d \\ M_{de} &= \frac{2EI}{h} \left(2\theta_d - \frac{3\Delta}{h} \right) = 4\theta_d - \Delta \end{aligned} \right\} = 0 \Rightarrow 2\theta_c + \theta_d - \Delta = 0 \quad (III)$$

$$M_{ed} = \frac{2EI}{h} \left(\theta_d - \frac{3\Delta}{h} \right) = 2\theta_d - \Delta$$



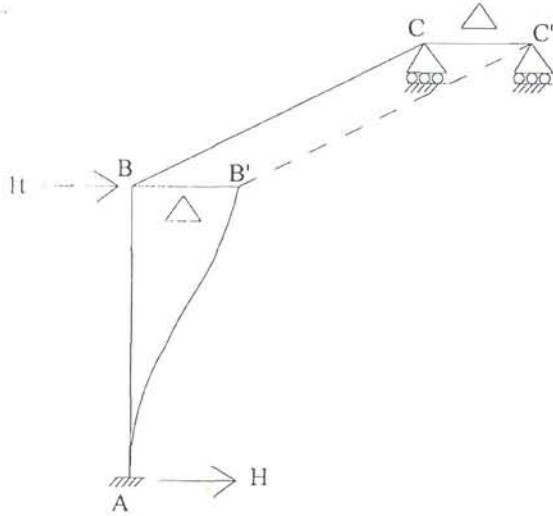
$$H_1 = \frac{M_{ab} + M_{ba}}{6} = H_2$$

معادله تعادل: $H_1 + H_2 + 2 = 0$

$$-\left(\frac{M_{ab} + M_{ba}}{6} \right) + \left(\frac{M_{dc} + M_{ed}}{6} \right) = 2 \Rightarrow -\theta_b - \theta_d - \frac{2}{3}\Delta = 2 \quad (IV)$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 8 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_b \\ \theta_c \\ \theta_d \\ \Delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \theta_b = 0.75 \\ \theta_c = 0.375 \\ \theta_d = 0.75 \\ \Delta = 21/4 \end{cases}$$

روش حل ۲) با استفاده از تقارن معکوس



$$\theta_b, \theta_c, \Delta, \theta_a = 0$$

$$M_{cb} = \frac{2EI}{h}(\theta_b + 2\theta_c) = 0 \text{ مفصل و } \theta_c = -\frac{1}{2}\theta_b$$

$$M_{bc} = \frac{2EI}{l}(2\theta_b + \theta_c) = 3\theta_b$$

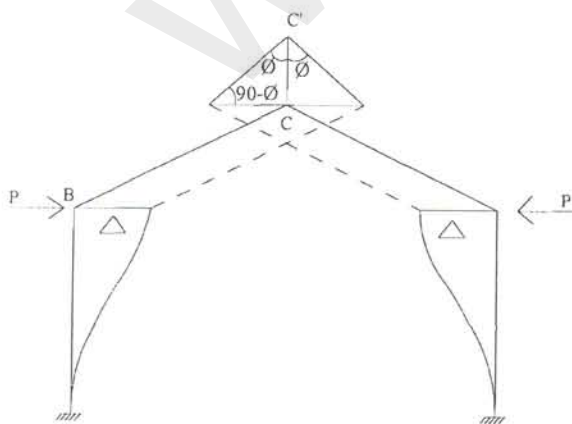
$$M_{ab} = 2\theta_b - \Delta$$

$$\left. \begin{aligned} M_{ba} &= 4\theta_b - \Delta \\ M'_{bc} &= 3\theta_b \end{aligned} \right\} = 0 \Rightarrow 7\theta_b - \Delta = 0 \text{ (I) اصلاح شده}$$

$$-\left(\frac{M_{ab} + M_{ba}}{6}\right) = 1 \Rightarrow -\theta_b - \frac{1}{3}\Delta = 0 \text{ (II)}$$

$$\theta_b = 0.75 \Rightarrow \theta_c = 0.375, \Delta = 21/4$$

◀ قاب یاد شده تحت اثر بارگذاری متقارن:

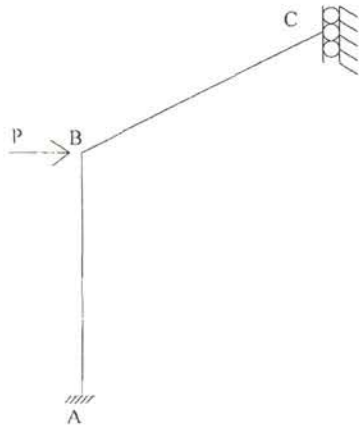


- حل هندسی

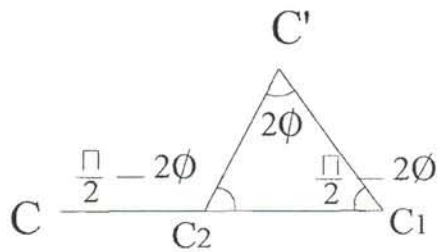
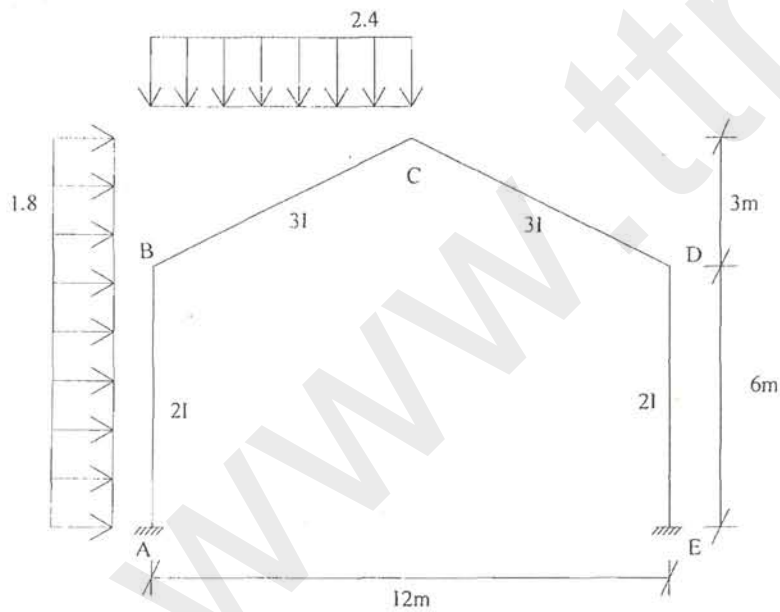
$$CC' = \Delta_{bc} = \Delta \cdot \text{Cotg}\Phi$$

$$\frac{\Delta}{\text{Sin}\Phi} = \frac{\Delta_{bc}}{\text{Cos}\Phi} \Rightarrow \Delta_{bc} = \Delta \cdot \text{Cotg}\Phi$$

مانند مرحله قبل با توجه به تقارن به راحتی حل می شود.



مثال ۴- قاب زیر را تحلیل کنید.



$$\Delta_{cd} = \frac{\sqrt{5}}{2} (\Delta_1 - \Delta_2) = \Delta_{bc}$$

$$M_{AB} = \frac{4}{6}EI(\theta_b - \frac{3\Delta_1}{6}) - 5.4 = \frac{2}{3}\theta_b - \frac{1}{3}\Delta_1 - 5.4$$

$$M_{BA} = \frac{4}{6}EI(2\theta_b - \frac{3\Delta_1}{6}) + 5.4 = \frac{4}{3}\theta_b - \frac{1}{3}\Delta_1 + 5.4$$

$$M_{BC} = \frac{6}{3\sqrt{5}}EI(2\theta_b + \theta_c + \frac{3}{3\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{2}(\Delta_1 - \Delta_2)) - 8.55$$

$$= \frac{4}{\sqrt{5}}\theta_b + \frac{2}{\sqrt{5}}\theta_c + \frac{1}{2}(\Delta_1 - \Delta_2) - 8.55$$

$$M_{CD} = \frac{6}{3\sqrt{5}}EI(2\theta_c + \theta_d - \frac{3}{3\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{2}(\Delta_1 - \Delta_2)) + 0 = \frac{4}{\sqrt{5}}\theta_c + \frac{2}{\sqrt{5}}\theta_d - \frac{1}{2}(\Delta_1 - \Delta_2)$$

$$M_{DE} = \frac{4}{6}EI(2\theta_d - \frac{3\Delta_2}{6}) = \frac{4}{3}\theta_d - \frac{1}{3}\Delta_2$$

$$M_{ED} = \frac{4}{6}EI(\theta_d - \frac{3\Delta_2}{6}) = \frac{2}{3}\theta_d - \frac{1}{3}\Delta_2$$

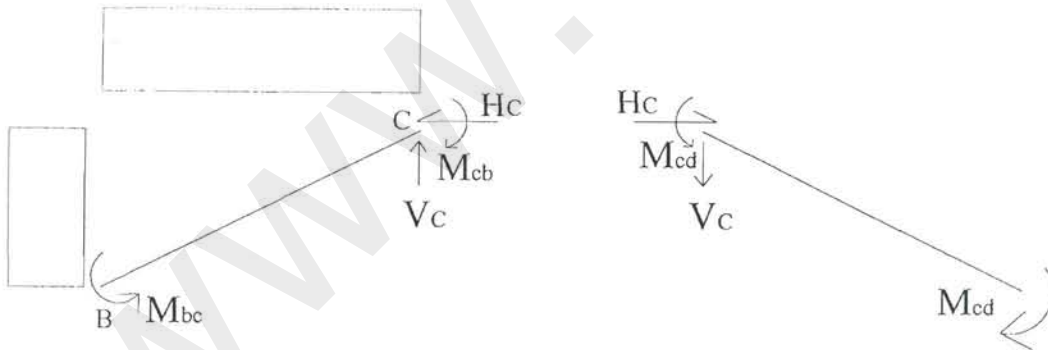
$$\sum M_B = 0 \Rightarrow M_{BC} + M_{BA} = 0$$

$$\Rightarrow (\frac{4}{3} + \frac{4}{\sqrt{5}})\theta_b + \frac{2}{\sqrt{5}}\theta_c + (\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{3})\Delta_1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\Delta_2 - 3.15 = 0 \quad (I)$$

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow M_{CB} + M_{CD} = 0 \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{5}}\theta_b + (\frac{4}{\sqrt{5}} + \frac{4}{\sqrt{5}})\theta_c + \frac{2}{\sqrt{5}}\theta_d + 8.55 = 0 \quad (II)$$

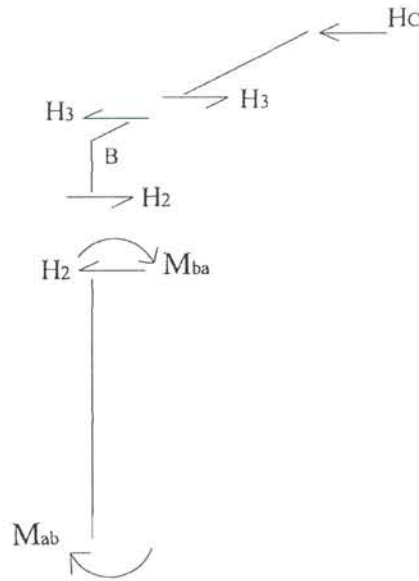
$$\sum M_D = 0 \Rightarrow M_{DC} + M_{DE} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2}{\sqrt{5}}\theta_c + (\frac{4}{3} + \frac{4}{\sqrt{5}})\theta_d + (\frac{-1}{\sqrt{5}})\Delta_1 + (\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{3})\Delta_2 = 0 \quad (III)$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \sum M_B = 0 \Rightarrow M_{BC} + M_{CB} - 3H_C - 6V_C + 51.3 = 0 \\ \sum M_D = 0 \Rightarrow M_{CD} + M_{DC} + 3H_C - 6V_C = 0 \end{array} \right.$$

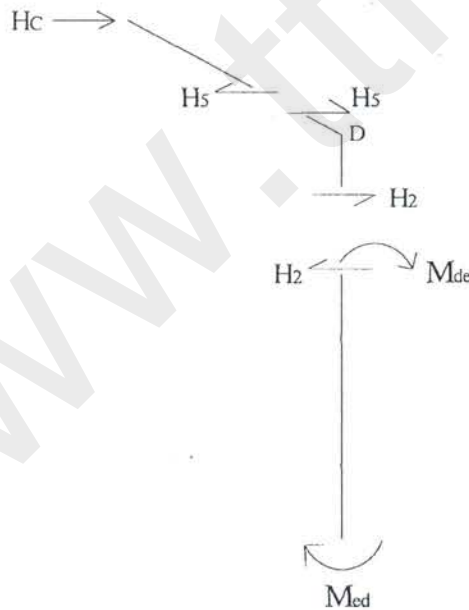
$$\Rightarrow (M_{BC} + M_{CB}) - (M_{CD} + M_{DC}) + 51.3 = 6H_C \quad (IV)$$



$$H_c = H_3 + 5.4 = H_2 + 5.4 = \frac{M_{AB} + M_{BA}}{6} + 5.4 + 5.4 = \frac{M_{AB} + M_{BA}}{6} + 10.8 \quad (V)$$

$$(IV), (V) \Rightarrow (M_{BC} + M_{CB}) - (M_{CD} + M_{DC}) - (M_{AB} + M_{BA}) = 13.5$$

$$\Rightarrow \left(\frac{6}{\sqrt{5}} - 2\right)\theta_B + 0 \times \theta_C + \left(\frac{4}{\sqrt{5}} + \frac{2}{3}\right)\Delta_1 - \frac{6}{\sqrt{5}}\theta_d - \frac{4}{\sqrt{5}}\Delta_2 = 13.5 \quad (VI)$$



$$H_c = H_5, H_5 = -H_2 \Rightarrow H_c = -H_2 = -\frac{M_{DE} + M_{ED}}{6} \quad (VII)$$

$$(VII), (VI) \Rightarrow (M_{DE} + M_{ED}) - (M_{CD} + M_{DC}) + (M_{BC} + M_{CB}) = -51.3$$

$$\frac{6}{\sqrt{5}}\theta_b + \left(2 - \frac{6}{\sqrt{5}}\right)\theta_d + \frac{4}{\sqrt{5}}\Delta_1 - \left(\frac{4}{\sqrt{5}} - \frac{2}{3}\right)\Delta_2 = -51.3$$

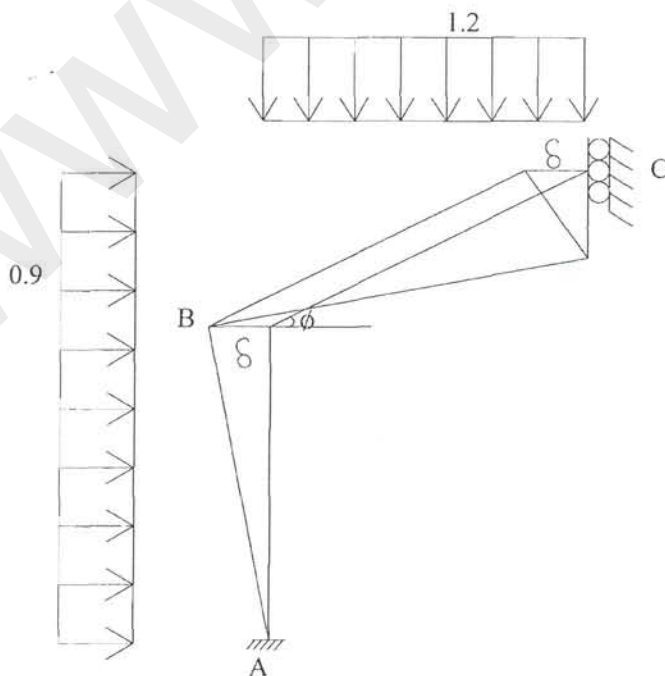
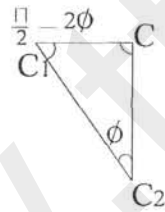
$$\begin{bmatrix} 3.122 & 0.894 & 0 & 0.1139 & -0.447 \\ 0.894 & 3.578 & 0.894 & 0 & 0 \\ 0 & 0.894 & 3.122 & -0.447 & 0.1139 \\ 0.685 & 0 & -2.683 & 2.456 & -1.789 \\ 2.683 & 0 & -0.683 & 1.789 & -2.455 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_b \\ \theta_c \\ \theta_d \\ \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.15 \\ -8.55 \\ 0 \\ 13.5 \\ -51.3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3.122 & 0.894 & 0 & 0.1139 & -0.447 \\ 0.894 & 3.578 & 0.894 & 0 & 0 \\ 0 & 0.894 & 3.122 & -0.447 & 0.1139 \\ 0.1139 & 0 & -0.447 & 0.409 & -0.209 \\ -0.447 & 0 & 0.1139 & -0.298 & 0.409 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_b \\ \theta_c \\ \theta_d \\ \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.15 \\ -8.55 \\ 0 \\ 2.251 \\ 8.547 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \theta_b = 13.40512 \\ \theta_c = -8.3282 \\ \theta_d = 10.36257 \\ \Delta_1 = 78.64233 \\ \Delta_2 = 89.96138 \end{cases}$$

$$\Rightarrow M_{AB} = 22.677, M_{BA} = -2.94, M_{BC} = 2.186, M_{CB} = 0.579, M_{CD} = -2.567, \\ M_{DC} = -16.15, M_{DE} = 16.17, M_{ED} = 23.078$$

روش حل ۳

$$C_1 C_2 = \delta_{BC} = \frac{\delta}{\frac{3}{3\sqrt{5}}} = \sqrt{5}\delta$$



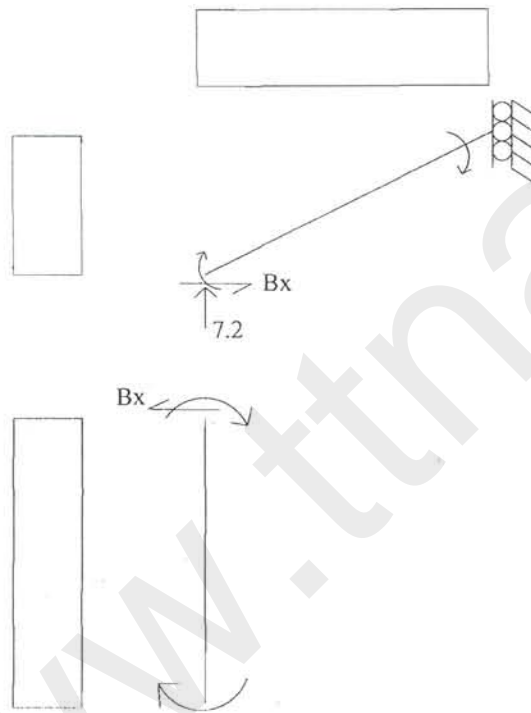
$$M'_{AB} = \frac{4}{6}EI(\theta'_b + 3\frac{\delta}{6}) - 2.7 = 0.20167$$

$$M'_{BA} = \frac{4}{6}EI(2\theta'_b + 3\frac{\delta}{6}) + 2.7 = 6.616$$

$$M'_{BC} = \frac{6}{3\sqrt{5}}EI(2\theta'_b - (\frac{3\sqrt{5}}{3\sqrt{5}})\delta) - 4.275 = -6.616$$

$$M'_{CB} = \frac{6}{3\sqrt{5}}EI(\theta'_b - (\frac{3\sqrt{5}}{3\sqrt{5}})\delta) + 4.275 = 0.573$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow M'_{BC} + M'_{BA} = 0 \Rightarrow (\frac{4}{3} + \frac{4}{\sqrt{5}})\theta'_b + (\frac{1}{3} - \frac{2}{\sqrt{5}})\delta = 1.575$$



$$\left. \begin{aligned} B_x \times 3 &= M'_{BC} + M'_{CB} + 7.2 \times 6 - 1.2 \times 6 \times 3 - 0.9 \times 3 \times 1.5 & \text{(I)} \\ B_x &= \frac{1}{6}(M'_{BA} + M'_{AB}) + 0.9 \times 3 & \text{(II)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$2(M'_{BC} + M'_{CB}) - (M'_{BA} + M'_{AB}) = -18.9 \Rightarrow (\frac{12}{\sqrt{5}} - 2)\theta'_b - (\frac{8}{\sqrt{5}} + \frac{2}{3})\delta = -18.9$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3.122 & -0.561 \\ 3.367 & -4.244 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta'_b \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.575 \\ -18.9 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \delta &= 5.661 \\ \theta'_b &= 1.522 \end{aligned}$$

$$M''_{AB} = \frac{4}{6}EI(\theta''_b + 3\frac{\delta'}{6}) - 2.7 = -22.885$$

$$M''_{BA} = \frac{4}{6}EI(2\theta''_b + 3\frac{\delta'}{6}) + 2.7 = -9.55$$

$$M''_{BC} = \frac{9}{3\sqrt{5}}EI(\theta''_b) - 6.413 = 9.55$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow (4/3 + 3/\sqrt{5})\theta''_b + 1/3\delta' = 3.7125$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow B_x = 2.7 \quad (I)$$

$$B_x = \frac{M''_{AB} + M''_{BA}}{6} + 0.9 \times 3 \quad (II)$$

$$(I), (II) \Rightarrow \left. \begin{aligned} M''_{AB} + M''_{BA} &= -32.4 \\ 2\theta''_b + \frac{2}{3}\delta' &= -32.4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2.673 & 1/3 \\ 2 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta''_b \\ \delta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.7125 \\ -32.4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \theta''_b &= 11.899 \\ \delta' &= -84.354 \end{aligned}$$

$$\Delta_1 = \delta + \delta'$$

$$\Delta_2 = \delta - \delta'$$

$$\theta_b = \theta'_b + \theta''_b$$

$$\theta_c = \theta'_c + \theta''_c$$

$$\theta_d = \theta'_d - \theta''_d$$

$$M_{AB} = M'_{AB} + M''_{AB}$$

$$M_{BA} = M'_{BA} + M''_{BA}$$

$$M_{BC} = M'_{BC} + M''_{BC}$$

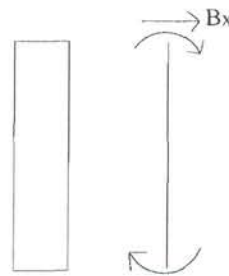
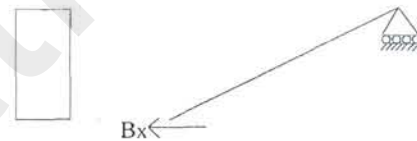
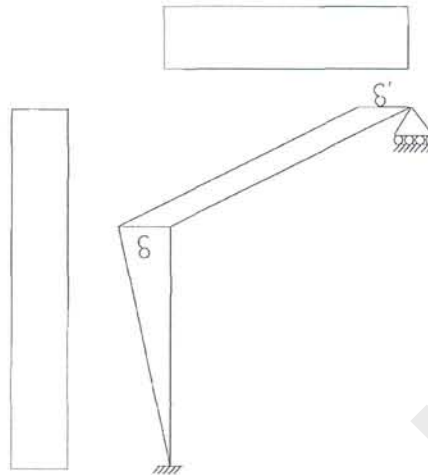
$$M_{CB} = M'_{CB} + 0$$

$$M_{CD} = M'_{CB}$$

$$M_{DC} = M'_{BC} - M''_{BC}$$

$$M_{DE} = M'_{BA} - M''_{BA}$$

$$M_{ED} = M'_{AB} - M''_{AB}$$



۵- تأثیر درجه حرارت در سازه ها

تغییر درجه حرارت در اعضاء سازه ها موجب افزایش یا کاهش حجم می گردد، تغییرات درجه حرارت به دو صورت یکنواخت و غیر یکنواخت (بصورت تفاضلی (گرادیان حرارتی)) خواهد بود.

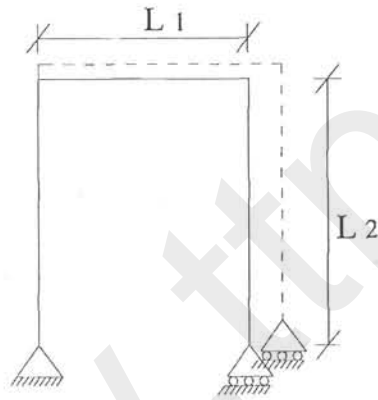
الف- تغییرات درجه حرارت یکنواخت:

(۱) در سازه های آزاد (بدون تکیه گاه) انبساط بصورت خطی که فقط افزایش یا کاهش طول را بررسی می کنیم $\Delta l = \alpha l \Delta T$ که در آن α ضریب انبساط حرارتی بوده که در جداول موجود می باشد، مثلاً:

$$\alpha_{st} = 12 \times 10^{-6} 1/^{\circ}C = 6.5 \times 10^{-6} 1/^{\circ}F$$

$$\alpha_{con} = 11 \times 10^{-6} 1/^{\circ}C = 6.0 \times 10^{-6} 1/^{\circ}F$$

(۲) در سازه های معین یا سازه هایی که در جهت افزایش طول اعضاء مانعی وجود نداشته باشد، فقط و فقط تولید انبساط اعضاء گردیده و تنش ایجاد نمی شود.



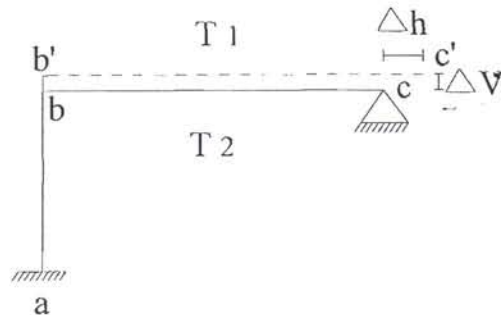
(۳) اگر سازه های دارای رانش اضافی یا نامعین خارجی باشد (از نظر ایستاتی) در آن تنش حرارتی ایجاد می شود.

(۴) برای بدست آوردن اثر تغییر درجه حرارت در سازه های نامعین و تحلیل آنها:

(a) سازه را معین می کنیم

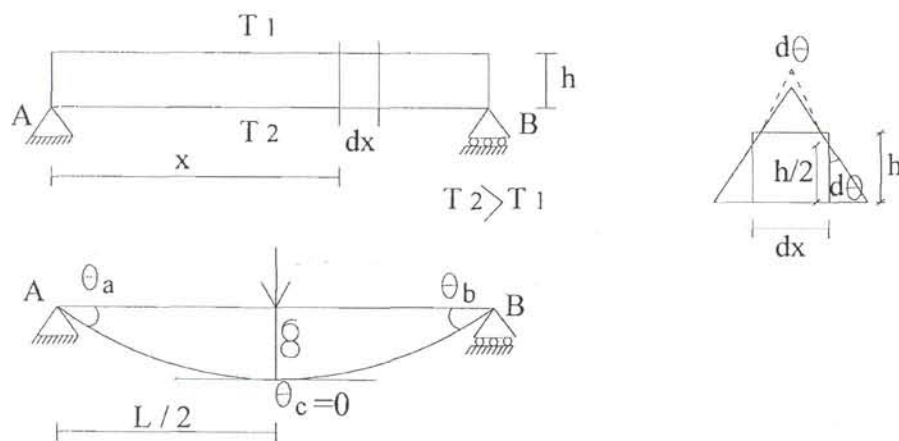
(b) آن را برای افزایش یا کاهش طول در اثر درجه حرارت حل می کنیم. $\Delta l = \alpha l (T_2 - T_1)$

(c) واکنش های اضافی را اثر داده (تکیه گاه را بجای خودش منتقل می کنیم) و نیروهای حاصل را حساب می کنیم.



-در تکیه گاه فوق C به اندازه ΔV به سمت پائین و Δh به سمت چپ حرکت کرده است.

تأثیر این حرکت‌ها را می‌توان به روش شیب افت به حساب آورده و سازه را تحلیل نمود.
 ب:- تغییرات درجه حرارت تفاضلی یا غیر یکنواخت (گرادیان حرارتی)



$$d\theta = \frac{\alpha(T_2 - T_1)}{h} dx$$

$$\theta_a = \theta_b = \int_0^{L/2} \frac{\alpha(T_2 - T_1)}{h} dx = \frac{\alpha l(T_2 - T_1)}{2h}$$

δ تغییر مکان مربوط به بار واحد را در کلیه نقاط تیر می‌توان به روش بار واحد محاسبه نمود. m لنگر ناشی از بار واحد.

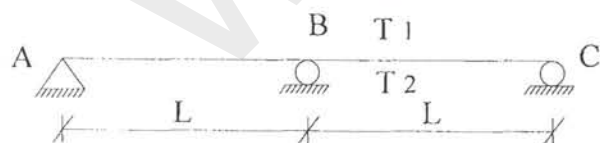
$$\delta = \int m d\theta$$

مثلاً:

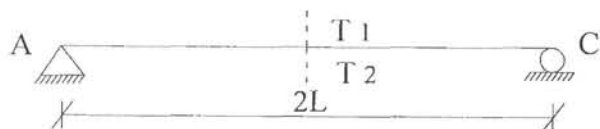
$$\delta_c = \int m d\theta = 2 \int_0^{L/2} \frac{x \alpha(T_2 - T_1)}{2h} = \frac{\alpha(T_2 - T_1)l^2}{8h}$$

روش حل

(۱) تیر را آزاد می‌کنیم تا تغییر مکان دهد سپس تغییر مکان‌ها را از رابطه فوق حساب نموده و به عنوان نشست و دوران تکیه‌گاهی اعمال می‌کنیم، بعنوان مثال تیر زیر تحت تأثیر حرارت غیر یکنواخت است.
 تکیه‌گاه b را بر می‌داریم. این نقطه به اندازه δ تحت اثر حرارت نشست می‌کند:



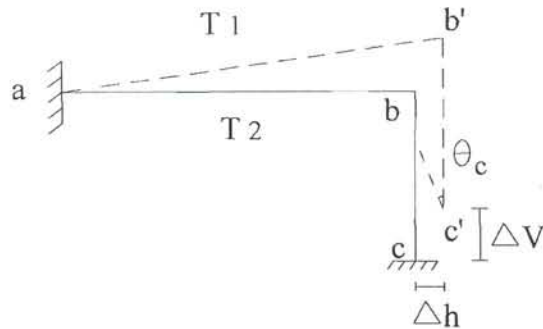
$$\delta_b = \frac{\alpha(T_2 - T_1)L^2}{2h}$$



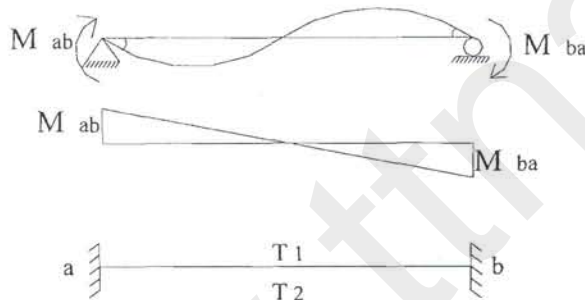
پس تأثیر تکیه‌گاه b اینست که تیر را به اندازه δ_b بطرف بالا حرکت می‌دهد، یعنی تیر abc با تغییر مکان معلوم

δ_b که قبلاً حل شده .

در حالت زیر می‌توانیم $\Delta V, \Delta h, \theta_c$ را به روش بار واحد یا هر روش دیگری حساب کنیم. سپس تکیه گاه را از C به C' منتقل نموده و آنرا مثل قابی با تغییر مکان و دوران معلوم تکیه‌گاهی در C حل می‌کنیم.



روش حل (۲) می‌توان لنگرهای گیرداری معادل تغییر حرارت غیر یکنواخت را حساب نموده و مستقیماً به سازه اعمال نمود.



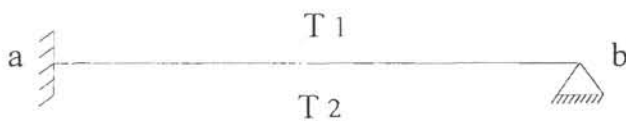
$$\theta_a = \frac{M_{ab}l}{3EI} - \frac{M_{ba}l}{6EI} \quad \theta_a = \frac{\alpha l(T_2 - T_1)}{2h} \quad \text{در اثر حرارت:}$$

حال اگر تیر دوسرگیر دار تحت اثر اختلاف درجه حرارت قرار گیرد - لنگرهای گیرداری بایستی بقسمی باشد که از دوران a و b جلوگیری کنند یعنی:

$$\frac{\alpha l(T_2 - T_1)}{2h} - \frac{M_{ab}l}{3EI} + \frac{M_{ba}l}{6EI} = 0 \quad (1)$$

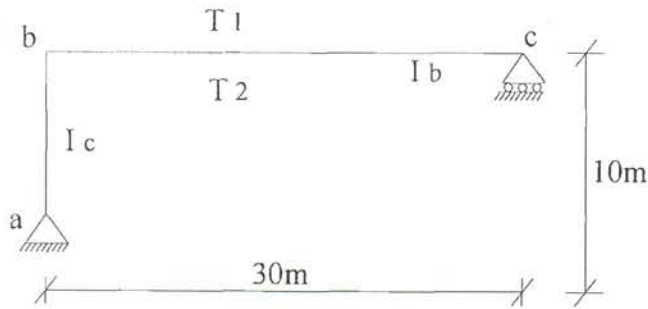
$$\Rightarrow M_{ab} = -M_{ba} = \frac{\alpha EI(T_2 - T_1)}{h}$$

اگر مثل شکل روبرو $M_{ba} = 0$ که آنرا در (۱) قرار می‌دهیم:



$$M_{ab} = \frac{3\alpha EI(T_2 - T_1)}{2h}$$

مسئله: مطلوبست تعیین نیروهای ناشی از افزایش درجه حرارت در قاب روبرو:



حل به روش لنگر گیرداری:

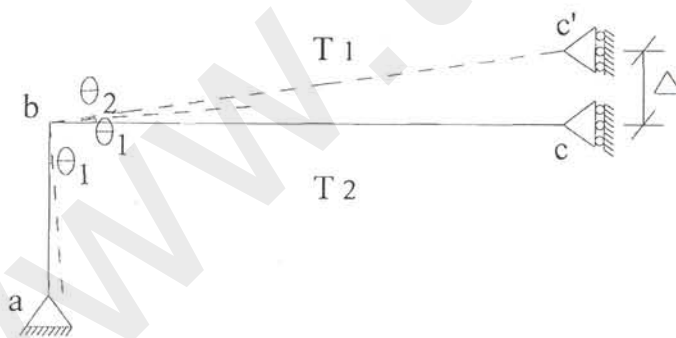
$$M'_{ba} = \frac{3\alpha EI_c (T_2 - T_1)}{2h_c} = 28.35 \text{ (t.m)}$$

$$M'_{bc} = -\frac{3\alpha EI_b (T_2 - T_1)}{2h_b} = -51.03 \text{ (t.m)}$$

$$\left. \begin{aligned} M_{ba} &= \frac{3EI_c}{L_{ab}} \theta_b + 28.35 \\ M_{bc} &= \frac{3EI_b}{L_{bc}} \theta_b - 51.0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2E \left(\frac{I_c}{L_c} + \frac{I_b}{L_b} \right) \theta_b = 22.68 \Rightarrow \theta_b = 1.8 \times 10^{-3} \text{ (rad)}$$

$$\Rightarrow M_{ba} = 6.3 \times 10^3 \times 1.8 \times 10^{-3} + 28.35 = 39.69 \text{ (t.m)}$$

$$M_{bc} = -39.69 \text{ (t.m)}$$



$$\Delta = (\theta_1 + \theta_2) L_b$$

$$\theta_1 = \frac{\alpha L_c \Delta T}{2h_c} = 4.5 \times 10^{-3} \text{ (rad)}$$

$$\theta_2 = \frac{\alpha L_b \Delta T}{2h_b} = 8.1 \times 10^{-3} \text{ (rad)}$$

$$\Rightarrow \Delta = (4.5 \times 10^{-3} + 8.1 \times 10^{-3}) 30 = 0.378 \text{ (m)}$$

حال اگر نقطه C' را بطرف C به اندازه Δ پائین بیاوریم. لنگر گیرداری اصلاح شده از b بصورت زیر خواهد بود (چون تکیه‌گاه بطرف پائین می آید پس علامت Δ مثبت خواهد بود).

$$M'_{bc} = -\frac{3EI_b \Delta}{L_b^2} = -79.38 \text{ (t.m)}, M'_{ba} = 0$$

$$M_{ba} = \frac{3EI_c}{L_c} \theta_b$$

$$M_{bc} = \frac{3EI_b}{L_b} \theta_b - 79.38$$

$$\text{B گره در تعادل: } M_{ba} + M_{bc} = 0 \Rightarrow 3E\left(\frac{I_c}{L_c} + \frac{I_b}{L_b}\right)\theta_b = 79.38$$

$$\Rightarrow \theta_b = 6.3 \times 10^{-3} \text{ (rad)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M_{ba} = 39.69 \text{ (t.m)} \\ M_{bc} = -39.69 \text{ (t.m)} \end{cases}$$

لنگرهای بدست آمده با روش قبل کاملاً مساوی هستند.

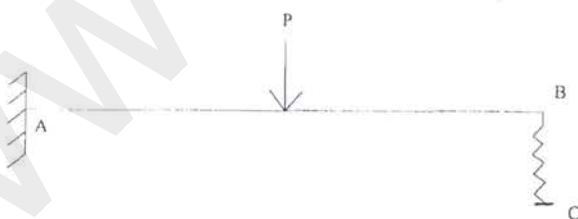
۶- تکیه گاه ارتجاعی در سازه ها

تکیه گاهها دارای انواع مختلفی می باشند که به طور نمونه می توان به انواع زیر اشاره نمود:

۱- تکیه گاه غلطکی: این نوع تکیه گاه تنها قابلیت تحمل نیرو در راستای قائم را دارد.

۲- تکیه گاه مفصلی: این نوع تکیه گاه قابلیت تحمل نیروهای قائم و افقی را دارد ولی در برابر چرخش هیچ مقاومتی از خود نشان نمی دهد.

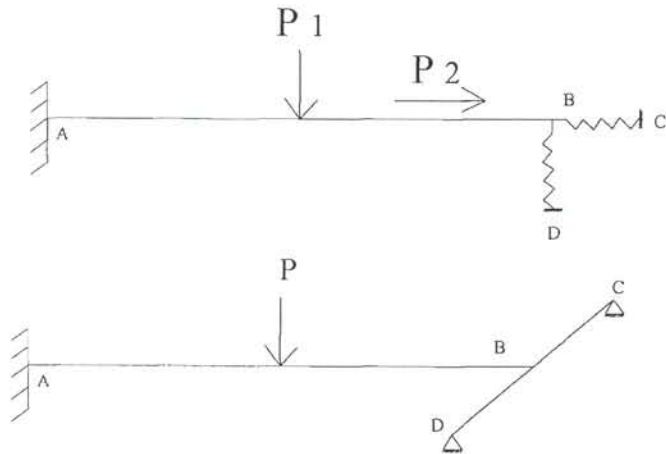
۴- تکیه گاه ارتجاعی: تکیه گاهی است که تغییر مکان در آن بصورت نیم آزاد صورت می گیرد (تغییر شکل محدود) و بهترین مثال جهت شبیه سازی آن فنر می باشد. این نوع تکیه گاه به دو دسته فنرهای برشی و فنرهای پیچشی تقسیم می شوند.



فنر وقتی تحت اثر نیرو قرار می گیرد، تغییر طول می دهد یعنی به نحوی از تغییر مکان آزاد تکیه گاه جلوگیری می کند ولی نمی تواند از تمام تغییر مکان ممانعت بعمل آورد.

ضریب فنریت K ، بصورت (واحد طول/نیرو) تعریف شده و مقدار آن نیروئیست که سبب افزایش یا کاهش طول فنر به اندازه یک واحد می شود (این مقاومت نسبی فقط در یک جهت اعمال می شود یعنی برای محدود کردن هر حرکت بایستی یک فنر اعمال کنیم).

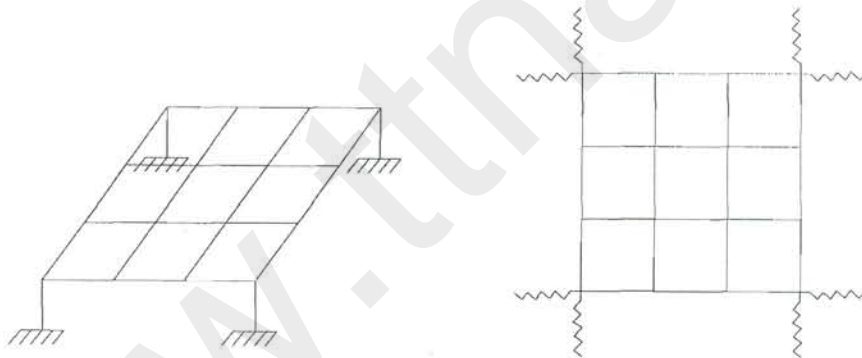
انواع تکیه‌گاه ارتجاعی:



I- تیر بصورت تکیه‌گاه تیر دیگر

II- عنصر سازه ای بصورت تکیه‌گاه $k=AE/L$

III- ستونهای مدل شده توسط فنر در شبکه های سقف تحت اثر بار جانبی

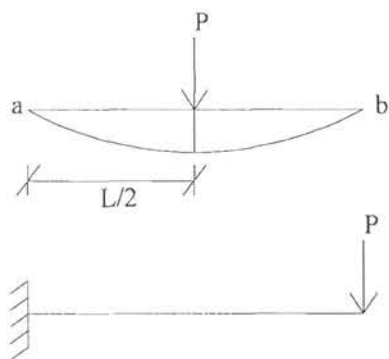


IV- اثرات متقابل سازه و فونداسیون:

وقتی بار به فونداسیون وارد می‌شود بواسطه صلب نبودن پی، در زمین تغییر مکان بوجود می‌آید و تحت اثر تغییر شکل‌هایی قرار می‌گیرد، لذا نمی‌توان فونداسیون‌ها را تکیه‌گاه صلب فرض نمود، در این حالت رفتار زمین را با استفاده از یک سری فنرهای برشی و پیچشی مدل‌سازی می‌نمایند.

۱-۶- ضریب فنر و محاسبه آن

در حالتی که تیری بر روی تیر دیگر قرار می‌گیرد می‌توان از رابطه تغییر مکان در نقطه تکیه‌گاهی مقدار ضریب فنر را بدست آورد.



$$\delta = \frac{PL^3}{48EI}$$

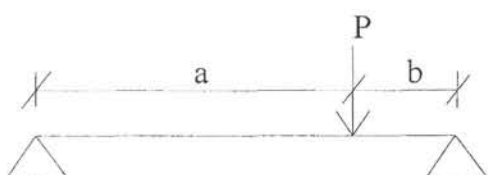
$$\text{if } \delta = 1 = \frac{K PL^3}{48EI}$$

$$\delta = \frac{PL^3}{3EI} \Rightarrow 1 = \frac{KL^3}{3EI}$$

$$\delta = \frac{PL}{EA} \Rightarrow 1 = \frac{KL}{EA}$$

$K = \frac{48EI}{L^3}$
$K = \frac{3EI}{L^3}$
$K = \frac{EA}{L}$

بسته به محل تاثیر نیرو می توان δ را حساب کرد و از آنجا k را بدست آورد.



طریقه حل مسائل

روش های زیادی جهت محاسبه ضریب فنریت وجود دارد که در زیر می توان به روش جمع آثار قوا با فرض داشتن K اشاره نمود.

a - تکیه گاه ساده فرض می شود و نیروها حساب می شود، نیروی تکیه گاه را R^0 می نامیم.

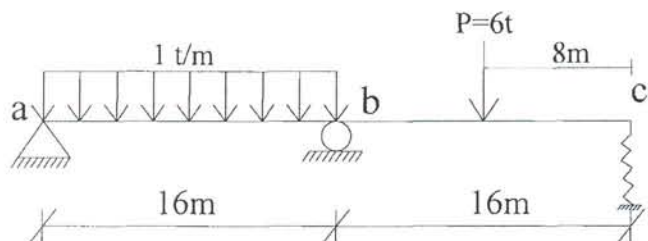
b - در محل فنر، تغییر مکان واحد (Δ) اعمال می کنیم و نیروها را حساب می کنیم. نیروی تکیه گاه R^1

c - ضریب نیروها را بدست می آوریم (با توجه به سازگاری تغییر مکان ها).

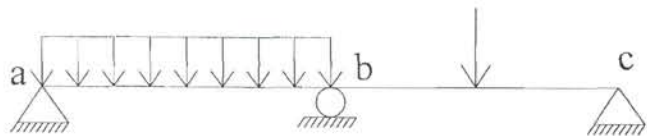
$$\left\{ \begin{array}{l} R^0 = \alpha R^1 = R_c \\ R_c = \alpha K (\Delta = 1) \end{array} \right\} \alpha = \frac{R^0}{K - R^1}$$

d - نیروها در مسئله واقعی از رابطه $\tilde{F} = \tilde{F}^0 + \alpha \tilde{F}^1$ حساب می شود. که در آن \tilde{F} بردار تعمیم یافته به روش شیب افت می باشد.

مثال - مطلوبست حل تیر سراسری ذیل به روش شیب افت:



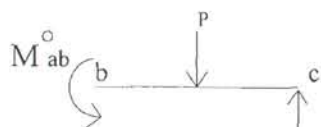
گام اول: تکیه گاه C را تبدیل به تکیه گاه ساده می‌کنیم و سپس سازه را به روش شیب افت حل می‌کنیم.



$$M'_{ba} = \frac{WL^2}{8} = 32 \text{ (t.m)} \quad , \quad M'_{ab} = 0$$

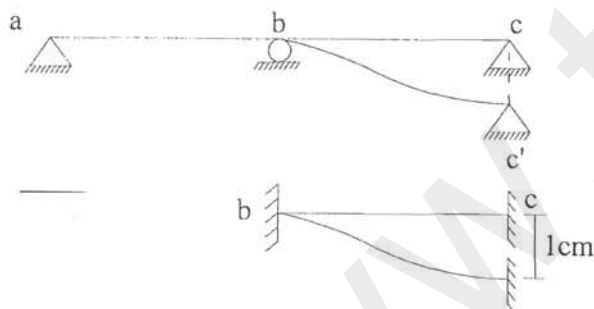
$$M'_{bc} = \frac{-3PL}{16} = -18 \text{ (t.m)} \quad , \quad M'_{cb} = 0$$

$$\left. \begin{aligned} M_{ba} &= \frac{3EI}{L} \theta_b + M'_{ba} = \frac{3EI}{L} \theta_b + 32 \\ M_{bc} &= \frac{3EI}{L} \theta_b + M'_{bc} = \frac{3EI}{L} \theta_b - 18 \end{aligned} \right\} = 0 \Rightarrow 6EI\theta_b^0 = -14 \Rightarrow \theta_b^0 = -5.374 \times 10^{-6} \text{ (rad)}$$



$$R_c = \frac{P}{2} - \frac{M'_{bc}}{16} \Rightarrow R_c = 1.4375 \text{ (t)} \quad , \quad M_b^0 = -25 \text{ (t.m)}$$

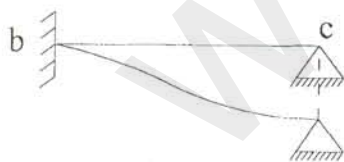
گام دوم: فرض می‌کنیم در نقطه C تغییر مکان واحد داریم.



$$M'_{ab} = -M'_{ba} = 0$$

$$M'_{bc} = \frac{2EI}{L} (2\theta_b^0 + \theta_c^0 - \frac{3\Delta}{L}) = -\frac{6EI\Delta}{L^2}$$

در حالت اصلاح شده (یک سر مفصل) میتوان اثر نشست Δ را بصورت M' گیرداری اعمال نمود.



$$M'_{bc} = \frac{2EI}{L} (2\theta_b^0 + \theta_c^0 - \frac{3\Delta}{L})$$

$$M'_{cb} = \frac{2EI}{L} (2\theta_c^0 + \theta_b^0 - \frac{3\Delta}{L}) = 0$$

$$\theta_c^0 = \frac{3\Delta}{2L} \Rightarrow M'_{bc} = -\frac{3EI\Delta}{L^2}$$

چون گروه C مفصلی است

لنگر گیرداری اصلاح شده

می‌توان اثر نشست تکیه‌گاهی Δ را در فرمولهای شیب افت یک لنگرگیرداری اعمال نمود که در بالا این

لنگرگیرداری محاسبه شده است. در حل این مثال از این روش استفاده نموده و روابط اصلاح شده را در دو عضو نوشتیم:

$$\left. \begin{aligned} M_{ba}^I &= \frac{3EI}{L} \theta_b \\ M_{bc}^I &= \frac{3EI}{L} \theta_b - \frac{3EI\Delta}{L^2} \end{aligned} \right\} = 0 \Rightarrow \theta_b^I = \frac{\Delta}{2L}$$

$$M_{bc}^I = \frac{3EI}{L} \left(\frac{\Delta}{2L} \right) - \frac{3EI\Delta}{L^2} = -\frac{3EI\Delta}{2L^2}$$

$$\Delta = 1 \text{ cm} \Rightarrow R_C^I = -\frac{3EI\Delta}{2L^3} = -0.254 \text{ (t)}$$

گام سوم: با فرض اینکه تغییر مکان فنر α باشد شرط سازگاری در گره C اعمال می‌شود

$$R^0 + \alpha R^I = R_C = \alpha K \quad (\alpha K \text{ نیروی کل ایجاد شده در فنر تحت تغییر مکان } \alpha)$$

$$\alpha = \frac{R^0}{K - R^I} \Rightarrow \alpha = \frac{1.4327}{3 - 0.254} = 0.4417$$

$$R_C = 1.325 \text{ (t)}$$

$$M_{bc} = -25.0 + 0.4417 \times (-4.07) = -26.8 \text{ (t.m)}$$

۶-۲- روش تقریبات متوالی

روش‌های تکراری هستند که احتیاج به یک حل اولیه دارند.

الف: حل اولیه (حل صفر) سازه را برای حذف تکیه گاه فنری در نظر می‌گیریم: $\Delta^0 \leftarrow R^0$

ب: با فرض R^0 جواب مسئله که تولید Δ^0 نموده را به سازه اعمال می‌کنیم و R^I را بدست می‌آوریم:

$$\Delta^I \leftarrow R^I = K\Delta^I$$

ج: با استفاده از Δ^I ، M^I این بار $R^I \leftarrow R^{II} = K\Delta^{II} \leftarrow R^{II} \leftarrow \Delta^{II} \leftarrow \dots$ و ادامه می‌دهیم تا به جواب نزدیک شویم.

روش دیگر: تا مرحله الف معادل روش فوق بوده بعد از محاسبه Δ^0 ، M^I پس R^I و آنگاه $R = R^0 + R^I$ و

$$\Delta^I = \frac{R}{K} \text{ را بدست می‌آوریم.}$$

سپس در مرحله بعد جاگذاری Δ^I و محاسبه M^{II} و R^{II} به ترتیب فوق $R = R^0 - R^{II} \leftarrow \Delta^{II} = \frac{R^{II}}{K}$ تا آنجا

$$\text{که } R = R^0 - R^n \text{ و بعد } \Delta^n = \Delta^{n-1} \dots$$

مثال - مسئله قبل را به روش تقریب متوالی بدون در نظر گرفتن فنر (تکیه گاه ساده) حل می‌نمائیم.

$$R^0 = 1.4375 \quad \Delta^0 = 0.47916 \text{ cm}$$

حال Δ^0 را روی سازه بدون بار اعمال می‌کنیم که تولید یک لنگر گیرداری در عضو bc می‌نماید.

$$\left. \begin{array}{l} M' = -\frac{3EI\Delta}{L^2} \text{ (I)} \\ M_{bc} + M_{ba} = 0 \text{ (II)} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \theta_b^i = \frac{\Delta^{i-1}}{2L} \\ M_{bc}^i = -\frac{3EI\Delta^{i-1}}{2L^2} \\ R^i = -\frac{3EI\Delta^{i-1}}{2L^3} \end{cases}$$

دو راه حل جهت ادامه موجود است:

(cross) نمو را بطور متوالی بدست آورده و نمو را صفر می کنیم.

$$\bar{R} = \bar{R}^0 + \sum_{i=1}^{11} \delta \bar{R}^i$$

(kany) هر بار که نمو را حساب کردیم مقدار R^i را اصلاح می کنیم:

$$R = R^n, R^n - R^{n-1} = 0$$

روش اول:

$$R^0 \rightarrow \Delta^0 = 0.48 \text{ (cm)}$$

$$i=1 \rightarrow \delta R^1 = -\frac{3EI\Delta_0}{2L^3} = -0.122 \rightarrow \Delta^1 = 0.041$$

$$i=2 \rightarrow \delta R^2 = 0.0103 \rightarrow \Delta^2 = 3.4 \times 10^{-3}$$

$$i=3 \rightarrow \delta R^3 = -8.8 \times 10^{-4} \rightarrow \Delta^3 = 0$$

$$R = R^0 + \sum \delta R^i = 1.41 - 0.122 + 0.0103 - 4.8 \times 10^{-4} = 1.3$$

روش دوم:

$$\delta R^1 = -0.122 \rightarrow \bar{R}^1 = 1.4375 - 0.122 = 1.3155 \rightarrow \Delta^1 = 0.4385$$

$$\delta R^2 = -0.122 \rightarrow \bar{R}^2 = 1.4375 - 0.1115 = 1.3259 \rightarrow \Delta^2 = 0.44198$$

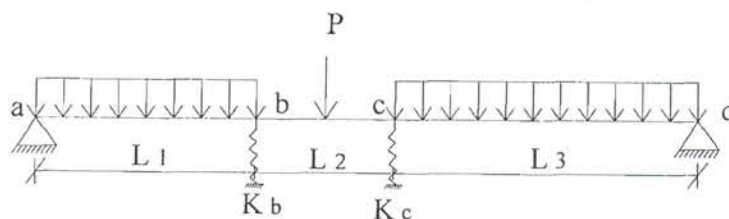
$$\delta R^3 = -0.1124 \rightarrow \bar{R}^3 = 1.325 \rightarrow \Delta^3 = 0.44169$$

$$\delta R^4 = -0.1124 \rightarrow \bar{R}^4 = 1.325 \rightarrow \Delta^4 = 0.44169$$

$$R^{IV} - R^{III} = 0 \rightarrow R = R^{IV} = 1.325$$

تیر روی بیش از یک تکیه گاه ارتجاعی:

روش حل (اصل رویهم گذاری اجتماع اثر قوا)



(۱) تیر را با در نظر گرفتن دو تکیه گاه ساده بجای فنرها حل می کنیم و عکس العمل های تکیه گاهی را بدست

می آوریم: R_b^0, R_c^0

- ۲) تکیه گاه b را تحت اثر تغییر مکان واحد قرار داده و دوباره نیروها را در سازه بدست می آوریم: R_b^I, R_c^I
- ۳) تکیه گاه c را تحت اثر تغییر مکان واحد قرار داده و دوباره نیروها را در سازه بدست می آوریم: R_b^{II}, R_c^{II}
- ۴) تغییر مکان تکیه گاه b برابر است با α پس نیروهای تکیه گاهی در اثر تغییر مکان واقعی b برابرند با: $\alpha R_b^I, \alpha R_c^I$
- ۵) تغییر مکان واقعی تکیه گاه c برابر است با β پس نیروهای تکیه گاهی در اثر تغییر مکان واقعی c برابرند با: $\beta R_b^{II}, \beta R_c^{II}$
- ۶) نیروی واقعی در تکیه گاه b برابر است با αK_b و در تکیه گاه c برابرست با βK_c
- ۷) با توجه به اصل اجتماع قوا از دستگاه ذیل α و β به دست آمده و کلیه مجهولات مشخص می گردد.

$$\begin{cases} R^o + \alpha R_b^I + \beta R_b^{II} = \alpha K_b \\ R_c^o + \alpha R_c^I + \beta R_c^{II} = \beta K_c \\ F = F^o + \alpha R^I + \beta F^{II} \\ a = a^o + \alpha a^I + \beta a^{II} \end{cases}$$

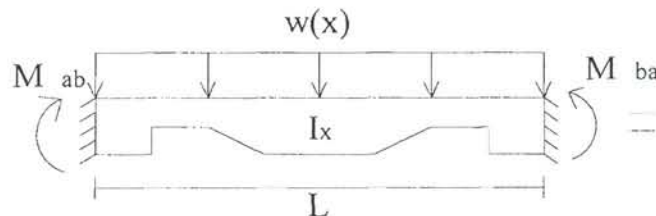
پس برای یک سیستم که دارای n تکیه گاه ارتجاعی باشد، می بایستی سیستم را $n+1$ بار حل کنیم، نتیجه کلی از ترکیب این جوابها بدست می آید. باید توجه کرد که در محدوده خطی عمل شده و کلیه جوابها باید با توجه به ترکیب خطی اعضاء بدست آید.

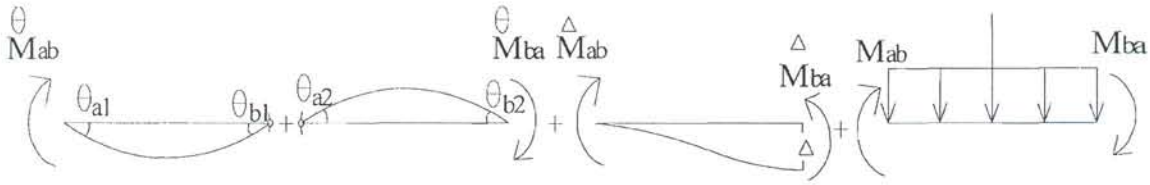
۷- روش شیب افت برای تحلیل سازه ها با مقاطع متغیر

روابط کلی شیب افت که در مرحله قبلی استخراج شده بصورت:

$$M_{ij} = \frac{2EI}{\ell} (2\theta_i + \theta_j - \frac{3\Delta}{\ell}) + M'_{ij}$$

بوده و برای حالتی است که مقطع تیر ثابت باشد در حالتی ممکن است از تیرهای با مقطع متغیر استفاده شود که در اینحال لنگر اینرسی مقطع را بصورت β نشان می دهیم که در آن β کوچکترین ممان اینرسی موجود در مقطع β عددی بزرگتر از واحد است که بر حسب X تغییر می کند.





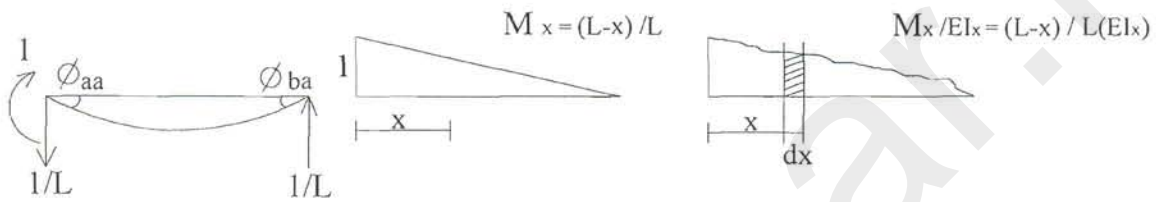
$$M_{ab} = M_{ab}^0 + M_{ab}^{\Delta} + M_{ab}^{\theta}$$

$$\theta_a = \theta_{a1} - \theta_{a2}$$

$$\theta_b = -\theta_{b1} + \theta_{b2}$$

الف- محاسبه M_{ba}^0 , M_{ab}^0

برای این منظور ابتدا لنگر واحد را بر a اثر می دهیم و زوایای حاصل یعنی Φ_{aa} و Φ_{ba} را حساب می کنیم.



$$\Phi_{aa} = \frac{1}{L} \int_0^L \frac{M_x}{EI_x} dx \quad \text{(لنگر } \frac{M}{EI} \text{ بین a و b حول b)}$$

$$= \frac{1}{L} \int_0^L \frac{M_x}{EI_x} dx (L-x) = \frac{1}{L} \int_0^L \frac{(L-x)^2}{EI_c L \cdot n_x} dx$$

$$C_1 = \frac{1}{L^3} \int_0^L \frac{(L-x)^2}{n_x} dx$$

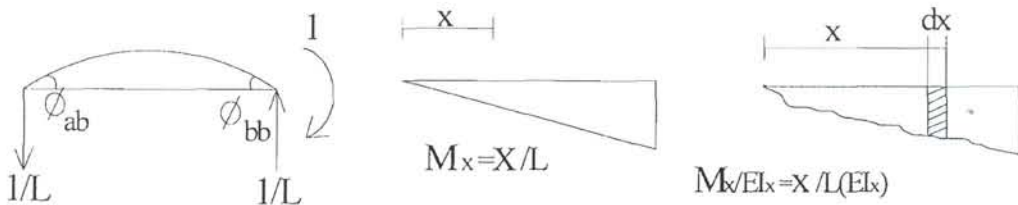
$$\Phi_{aa} = \frac{C_1}{EI_c}, \quad \Phi_{ba} = \frac{1}{L} \int_0^L \frac{M_x}{EI_x} dx \quad \text{(لنگر سطح زیر } \frac{M}{EI} \text{ بین a و b حول a)}$$

$$\Phi_{ba} = \frac{1}{L} \int_0^L \frac{M_x}{EI_x} dx (x) = \frac{1}{L^2} \int_0^L \frac{(L-x)x}{EI_c L \cdot n_x} dx$$

$$C_2 = \frac{1}{L^3} \int_0^L \frac{x(L-x)}{n_x} dx$$

$$\Phi_{ba} = \frac{C_2 L}{EI_c}$$

در مرحله بعد لنگر واحد را بر b اعمال کرده و زوایای Φ_{ab} و Φ_{bb} را حساب می کنیم:



$$\Phi_{ab} = (b \text{ حول } a \text{ و } a \text{ بین } b \text{ سطح لنگر زیر سطح}) / L = \frac{1}{L} \int_0^L \left(\frac{x}{L}\right) \frac{dx}{EI_C n_x} (L-x)$$

$$= \frac{1}{L^2} \int_0^L \frac{x(L-x)}{EI_C n_x} dx = \frac{C_2 L}{EI_C}, \quad C_2 = \frac{1}{L^3} \int_0^L \frac{x(L-x)}{n_x} dx$$

$$\Phi_{bb} = (a \text{ حول } b \text{ و } a \text{ بین } b \text{ سطح لنگر زیر سطح}) / L = \frac{1}{L} \int_0^L \left(\frac{x}{L}\right) \frac{dx}{EI_C n_x} x$$

$$= \frac{C_3 L}{EI_C}, \quad C_3 = \frac{1}{L^3} \int_0^L \frac{x^2}{n_x} dx$$

$$\theta_{a1} = M_{ab}^{\theta} \left(\frac{C_1 L}{EI_C} \right) \quad \theta_{b1} = M_{ab}^{\theta} \left(\frac{C_2 L}{EI_C} \right)$$

$$\theta_{a2} = M_{ba}^{\theta} \left(\frac{C_2 L}{EI_C} \right) \quad \theta_{b2} = M_{ba}^{\theta} \left(\frac{C_3 L}{EI_C} \right)$$

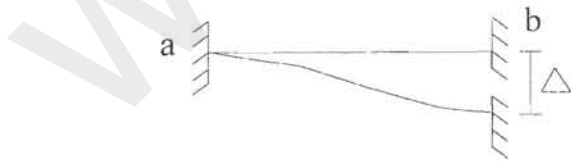
$$\theta_a = M_{ab}^{\theta} \left(\frac{C_1 L}{EI_C} \right) - M_{ba}^{\theta} \left(\frac{C_2 L}{EI_C} \right)$$

$$\theta_b = -M_{ab}^{\theta} \left(\frac{C_2 L}{EI_C} \right) + M_{ba}^{\theta} \left(\frac{C_3 L}{EI_C} \right)$$

$$\begin{bmatrix} \theta_a \\ \theta_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{C_1 L}{EI_C} & -\frac{C_2 L}{EI_C} \\ -\frac{C_2 L}{EI_C} & \frac{C_3 L}{EI_C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{ab}^{\theta} \\ M_{ba}^{\theta} \end{bmatrix} \Rightarrow \tilde{\theta} = \frac{L}{EI_C} \begin{bmatrix} C_1 & -C_2 \\ -C_2 & C_3 \end{bmatrix} \tilde{M}^{\theta}$$

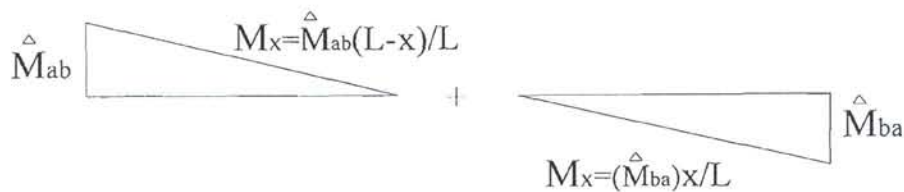
$$\begin{bmatrix} M_{ab}^{\theta} \\ M_{ba}^{\theta} \end{bmatrix} = \frac{2EI_C}{L} \begin{bmatrix} K_{aa} & -K_{ab} \\ -K_{ba} & K_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_a \\ \theta_b \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} M_{ab}^{\theta} \\ M_{ba}^{\theta} \end{bmatrix} = \frac{2EI_C}{L} \begin{bmatrix} K_{aa} & -K_{ab} \\ -K_{ba} & K_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_a \\ \theta_b \end{bmatrix}$$

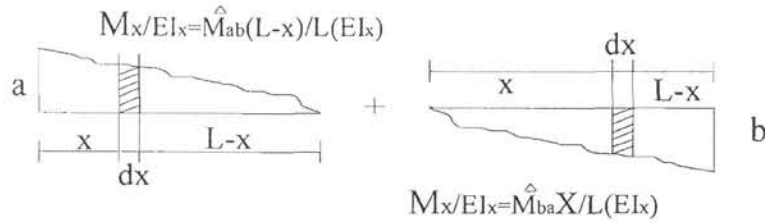


ب- بررسی اثر نشست Δ

منحنی لنگر خمشی



منحنی $\frac{M}{EI}$ با توجه به متغیر بودن EI در طول تیر



$$I) \Delta = - \int_0^L \left(\frac{M_{ab}^\Delta}{EI_c n_x} \frac{L-x}{L} dx \right) (L-x) + \int_0^L \left(\frac{M_{ba}^\Delta}{EI_c n_x} \frac{x}{L} dx \right) (L-x) = - \frac{M_{ab}^\Delta L^2}{EI_c} C_1 + \frac{M_{ba}^\Delta L^2}{EI_c} C_2$$

$$II) \Delta = \int_0^L \left(\frac{M_{ab}^\Delta}{EI_c n_x} \frac{L-x}{L} dx \right) (x) - \int_0^L \left(\frac{M_{ba}^\Delta}{EI_c n_x} \frac{x}{L} dx \right) (x) = \frac{M_{ab}^\Delta L^2}{EI_c} C_2 - \frac{M_{ba}^\Delta L^2}{EI_c} C_3$$

$$\frac{M_{ab}^\Delta}{L} = - \frac{2EI_c}{L} \frac{C_2 + C_3}{2(C_1 C_3 - C_2^2)} \Delta = - \frac{2EI_c}{L} \frac{K_{aa} + K_{ab}}{K_{ab} + K_{bb}} \frac{\Delta}{L}$$

از جمع دو رابطه فوق:

(I) + (II) :

$$1) M_{ab} = \frac{2EI_c}{L} \left[(K_{aa} \theta_a + K_{ab} \theta_b) - (K_{aa} + K_{ab}) \frac{\Delta}{L} \right] + M'_{ab}$$

$$2) M_{ba} = \frac{2EI_c}{L} \left[(K_{ba} \theta_a + K_{bb} \theta_b) - (K_{ab} + K_{bb}) \frac{\Delta}{L} \right] + M'_{ba}$$

$$K_{aa} = \frac{C_3}{2(C_1 C_3 - C_2^2)}$$

$$K_{ab} = \frac{C_2}{2(C_1 C_3 - C_2^2)}$$

$$K_{bb} = \frac{C_1}{2(C_1 C_3 - C_2^2)}$$

اگر یک سر تیر مفصل باشد با فرض نداشتن Δ و M' (مثلاً b مفصل) خواهیم داشت:

$$M_{ba} = 0 \xrightarrow{(2)} \theta_b = - \frac{K_{ba}}{K_{bb}} \theta_a$$

$$M'_{ba} = \frac{2EI_c}{L} \left(K_{aa} - \frac{K_{ba}}{K_{bb}} K_{ab} \right) \theta_a$$

روابط اصلاح شده شیب افت:

$$M'_{ab} = M'_{ab} - C_{ba} M'_{ba}$$

$$M'_{ab} = \frac{2EI_c}{L} (K_{aa} - C_{ba} K_{ab}) \theta_a$$

$$C_{ba} = \frac{K_{ba}}{K_{ab}}, \quad C_{ab} = \frac{K_{ab}}{K_{ba}}$$

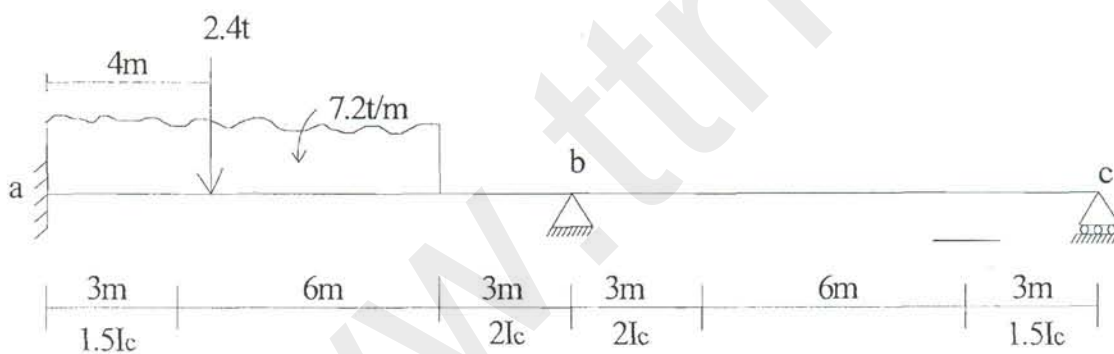
✓ برای به دست آوردن لنگرهای گیرداری از فرمول‌های زیر نیز می‌توان استفاده کرد:

$$C_4 = \int_0^L \frac{M(x)}{EI(x)} (L-x) dx$$

$$C_5 = \int_0^L \frac{M(x)}{EI(x)} x dx$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} M_{ab} \\ M_{ba} \end{bmatrix} = \frac{1}{2(C_1 C_3 - C_2^2)} \begin{bmatrix} C_3 & C_2 \\ C_2 & C_1 \end{bmatrix} \times \frac{2}{L^2} \begin{bmatrix} -C_4 \\ C_5 \end{bmatrix}$$

مثال ۱-



الف- دهانه ab

۱- محاسبه ضرایب ثابت C_1, C_2, C_3 .

$$C_1 = \frac{1}{L^3} \int_0^L \frac{(L-x)^2}{nx} dx = \frac{1}{12^3} \left[\int_0^3 \frac{1}{1.5} (12-x)^2 dx + \int_3^9 \frac{1}{1} (12-x)^2 dx + \int_9^{12} \frac{1}{2} (12-x)^2 dx \right]$$

$$= 0.266493$$

$$C_2 = \frac{1}{L^3} \int_0^L \frac{(L-x)x}{nx} dx = \frac{1}{12^3} \left[\int_0^3 \frac{1}{1.5} (12-x)x dx + \int_3^9 \frac{1}{1} (12-x)x dx + \int_9^{12} \frac{1}{2} (12-x)x dx \right]$$

$$= 0.144965$$

$$C_3 = \frac{1}{L^3} \int_0^L \frac{x^2}{nx} dx = \frac{1}{12^3} \left[\int_0^3 \frac{1}{1.5} x^2 dx + \int_3^9 \frac{1}{1} x^2 dx + \int_9^{12} \frac{1}{2} x^2 dx \right]$$

$$= 0.235243$$

$$2(C_1 C_3 - C_2^2) = 0.0833516$$

$$K_{aa} = \frac{C_3}{2(C_1 C_3 - C_2^2)} = 2.8223$$

$$K_{ab} = \frac{C_2}{2(C_1 C_3 - C_2^2)} = 1.7392$$

$$K_{bb} = \frac{C_1}{2(C_1 C_3 - C_2^2)} = 3.1972$$

ب- دهانه bc (بعلت مساوی بودن با ab)

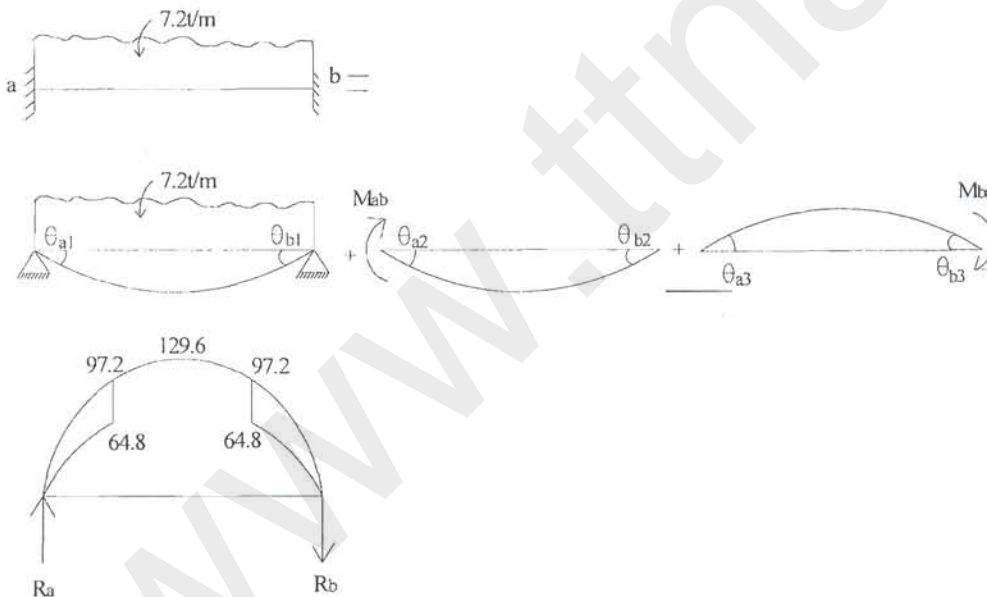
$$C_1 = 0.266493 \quad K_{bb} = 3.1972$$

$$C_2 = 0.144965 \quad K_{bc} = 1.7392$$

$$C_3 = 0.235243 \quad K_{cc} = 2.8223$$

ج- لنگرهای گیرداری در دهانه ab

۱- تحت بار گسترده



$$M_x = -\frac{Wx^2}{2} + 43.2x = -3.6x^2 + 43.2x$$

$$R_a = EI_c \theta_{a1} = \frac{1}{L} \int_0^L \frac{M(x)(L-x) dx}{n_x EI_c}$$

$$= \frac{1}{12} \left[\int_0^3 \frac{1}{1.5} (43.2x - 3.6x^2)(12-x) dx + \int_3^9 \frac{1}{1} (43.2x - 3.6x^2)(12-x) dx + \int_9^{12} \frac{1}{2} (43.2x - 3.6x^2)(12-x) dx \right] = 460.0125$$

$$R_b = EI_c \theta_{b1} = \frac{1}{L} \int_0^L \frac{M(x)x}{n_x EI_c} dx$$

$$= \frac{1}{12} \left[\int_0^3 \frac{1}{1.5} (43.2x - 3.6x^2)x dx + \int_3^9 \frac{1}{1} (43.2x - 3.6x^2)x dx + \int_9^{12} \frac{1}{2} (43.2x - 3.6x^2)x dx \right] = 441.7875$$

زوایای تحت اثر لنگرهای متمرکز

$$EI_c \theta_{a2} = M'_{ab} C_1 L = 3.197916 M''_{ab}$$

$$EI_c \theta_{b2} = M'_{ab} C_2 L = 1.73958 M''_{ab}$$

$$EI_c \theta_{a3} = M'_{ba} C_2 L = 1.73958 M''_{ba}$$

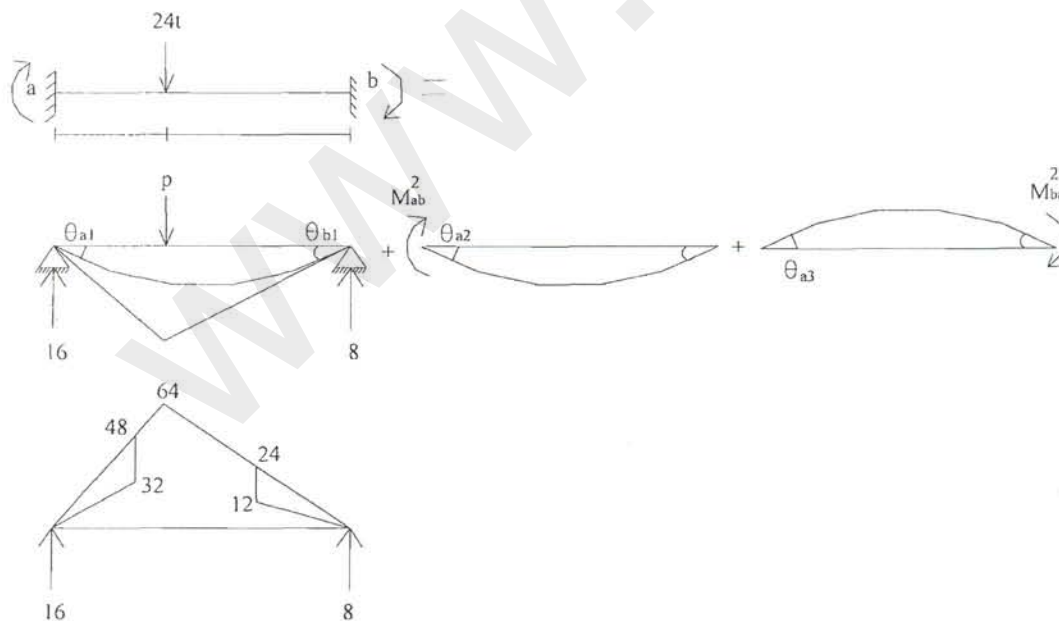
$$EI_c \theta_{b3} = M'_{ba} C_3 L = 2.822916 M''_{ba}$$

با استفاده از اصل سازگاری تغییر مکان‌ها

$$\begin{cases} \theta_{a1} + \theta_{a2} - \theta_{a3} = 0 \\ \theta_{b1} - \theta_{b2} + \theta_{b3} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{460.0125}{EI_c} + \frac{3.197916}{EI_c} M'_{ab} - \frac{1.73958}{EI_c} M'_{ba} = 0 \\ -\frac{441.7875}{EI_c} - \frac{1.73958}{EI_c} M''_{ab} + \frac{2.822916}{EI_c} M''_{ba} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M'_{ab} = -88.323 \\ M''_{ba} = 102.073 \end{cases}$$

۲- بار متمرکز:



به روش تیر مزدوج مانند قبل:

$$EI_c \theta_{a1} = 190.333$$

$$EI_c \theta_{b1} = 151.666$$

زوایای تحت اثر لنگر متمرکز مانند قبل:

$$EI_c \theta_{a2} = 3.197916 M_{ab}'^2$$

$$EI_c \theta_{b2} = 1.73958 M_{ab}'^2$$

$$EI_c \theta_{a3} = 1.73958 M_{ba}'^2$$

$$EI_c \theta_{b3} = 2.822916 M_{ba}'^2$$

با استفاده از اصل سازگاری تغییر مکان‌ها:

$$\begin{cases} \theta_{a1} + \theta_{a2} - \theta_{a3} = 0 \\ -\theta_{b1} - \theta_{b2} + \theta_{b3} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{190.333}{EI_c} + \frac{3.197916}{EI_c} M_{ab}'^2 - \frac{1.73958}{EI_c} M_{ba}'^2 = 0 \\ -\frac{151.666}{EI_c} - \frac{1.73958}{EI_c} M_{ab}'^2 + \frac{2.822918}{EI_c} M_{ba}'^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_{ab}'^2 = -45.566 \\ M_{ba}'^2 = 25.647 \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_{ab}' = -133.889 \\ M_{ba}' = 127.72 \\ M_{bc}' = M_{cb}' = 0 \end{cases}$$

حل: معادلات شیب افت را می‌نویسیم:

$$M_{ab} = \frac{2EI_c}{L} \left[K_{aa} \theta_a + K_{ab} \theta_b - (K_{aa} + K_{ab}) \frac{\Delta}{L} \right] + M_{ab}^*$$

$$M_{ba} = \frac{2EI_c}{L} \left[K_{ab} \theta_a + K_{bb} \theta_b - (K_{ab} + K_{bb}) \frac{\Delta}{L} \right] + M_{ba}^*$$

$$M_{bc} = \frac{2EI_c}{L} \left[K_{bb} \theta_b + K_{bc} \theta_c - (K_{bb} + K_{bc}) \frac{\Delta}{L} \right] + M_{bc}^*$$

$$M_{cb} = \frac{2EI_c}{L} \left[K_{bc} \theta_b + K_{cc} \theta_c - (K_{bc} + K_{cc}) \frac{\Delta}{L} \right] + M_{cb}^*$$

$$\begin{cases} \sum M_b = 0 \\ \sum M_c = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{2EI_c}{L} = 1, \theta_a = 0, \Delta = 0$$

$$M_{ab} = 1.7392 \theta_b - 133.889$$

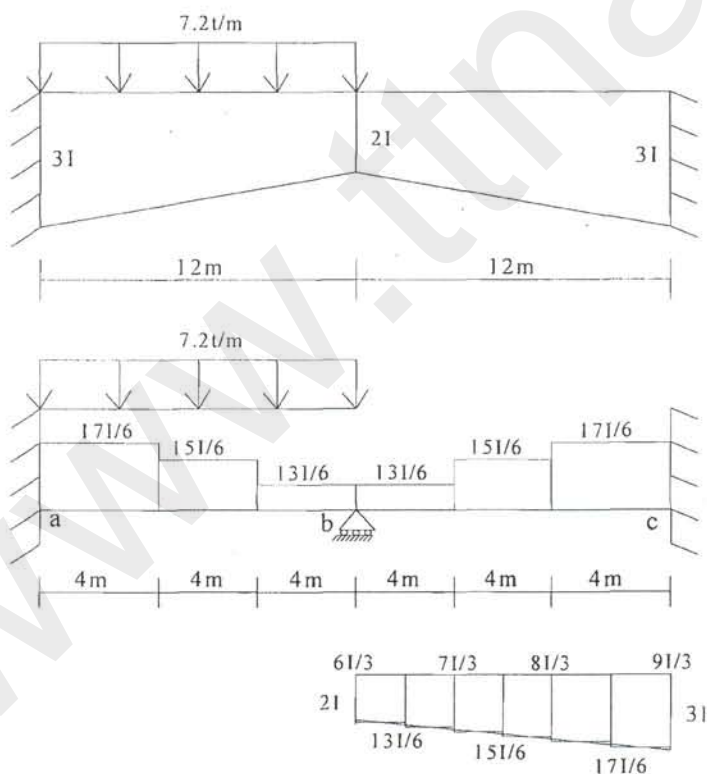
$$\begin{cases} \theta_b = -23.3 \\ \theta_c = 14.96 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_{ba} = 3.19722 \theta_b + 127.72 \\ M_{bc} = 3.1972 \theta_b + 1.7392 \theta_c \\ 0 = M_{cb} = 1.7392 \theta_b + 2.8223 \theta_c \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M_{ab} = 175.6 \\ M_{ba} = 51.0 \\ M_{bc} = -51.0 \\ M_{cb} = 0 \end{cases}$$

کنترل پیوستگی:

علت	$EI_c\theta_a$	$EI_c\theta_b$	$EI_c\theta_b$	$EI_c\theta_c$
بار گسترده	460.0	-441.8	0	0
بار متمرکز	190.3	-151.67	0	0
لنگر انتهای نزدیک $EI\theta = C_1LM$	-561.5	144 $EI\theta_b = C_3LM$	C_1ML (-) -144	0
لنگر انتهای دور $EI\theta = C_2LM$	-88.7	305.5 C_2ML (-)(-)	0	C_2ML (-)(-)
	≈ 0	≈ -144	-144	≈ -88.7

مثال ۲- تیر ماهیچه ای زیر به روش شیب افت حل نمائید.



$$C_1 = \frac{1}{L^3} \int_0^L \frac{(L-x)^2}{nx} dx = \frac{1}{12^3} \left[\int_0^4 \frac{1}{2.883} (12-x)^2 dx + \int_4^8 \frac{1}{2.5} (12-x)^2 dx + \int_8^{12} \frac{1}{2.169} (12-x)^2 dx \right]$$

$$= 0.1231$$

$$C_2 = \frac{1}{L^3} \int_0^L \frac{(L-x)x}{nx} dx = \frac{1}{12^3} \left[\int_0^4 \frac{1}{2.883} (12-x)x dx + \int_4^8 \frac{1}{2.5} (12-x)x dx + \int_8^{12} \frac{1}{2.169} (12-x)x dx \right]$$

$$= 0.0673$$

$$C_3 = \frac{1}{L^3} \int_0^L \frac{x^2}{nx} dx = \frac{1}{12^3} \left[\int_0^4 \frac{1}{2.883} x^2 dx + \int_4^8 \frac{1}{2.5} x^2 dx + \int_8^{12} \frac{1}{2.169} x^2 dx \right] = 0.1472$$

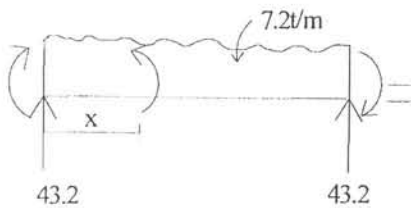
به علت تقارن : $C_1^{ab} = C_3^{bc}$, $C_2^{ab} = C_2^{bc}$, $C_3^{ab} = C_1^{bc}$

$$2(C_1 C_3 - C_2^2) = 2(0.1231 \times 0.1472 - 0.0673^2) = 0.0272$$

$$K_{aa} = \frac{C_3}{0.0272} = \frac{0.1472}{0.0272} = 5.4118$$

$$K_{ab} = \frac{C_2}{0.0272} = \frac{0.0673}{0.0272} = 2.4743$$

$$K_{bb} = \frac{C_1}{0.0272} = \frac{0.1231}{0.0272} = 4.5257$$



$$K_{cc} = 5.4118$$

$$K_{bc} = 2.4743$$

$$K_{bb} = 4.5257$$

$$M_x = 43.2x + 7.2x\left(\frac{x}{2}\right) = 0$$

معادله منحنی لنگر خمشی بار گسترده :

$$= 43.2x - 3.6x^2$$

$$R_a = EI_c \theta_{a1} = \frac{1}{L} \int_0^L \frac{M(x)}{EI_c nx} dx$$

$$= \frac{1}{12} \left[\int_0^4 \frac{1}{2.883} (43.2x - 3.6x^2)(12-x) dx + \int_4^8 \frac{1}{2.5} (43.2x - 3.6x^2)(12-x) dx \right.$$

$$\left. + \int_8^{12} \frac{1}{2.167} (43.2x - 3.6x^2)(12-x) dx \right] = 200.9705$$

$$R_b = EI_c \theta_{b1} = \frac{1}{L} \int_0^L \frac{M(x) x dx}{EI_c n x}$$

$$= \frac{1}{12} \left[\int_0^4 \frac{1}{2.833} (43.2x - 3.6x^2) x dx + \int_4^8 \frac{1}{2.5} (43.2x - 3.6x^2) x dx + \int_8^{12} \frac{1}{2.169} (43.2x - 3.6x^2) x dx \right] = 217.6337$$

$$EI_c \theta_{a2} = C_1 M_{ab} \cdot L = 0.1231(12)M'_{ab} = 1.4772M'_{ab}$$

$$EI_c \theta_{b2} = -C_2 M_{ab} \cdot L = -0.0673(12)M'_{ab} = -0.8076M'_{ab}$$

$$EI_c \theta_{a3} = -C_2 M_{ba} \cdot L = -0.8076M'_{ab}$$

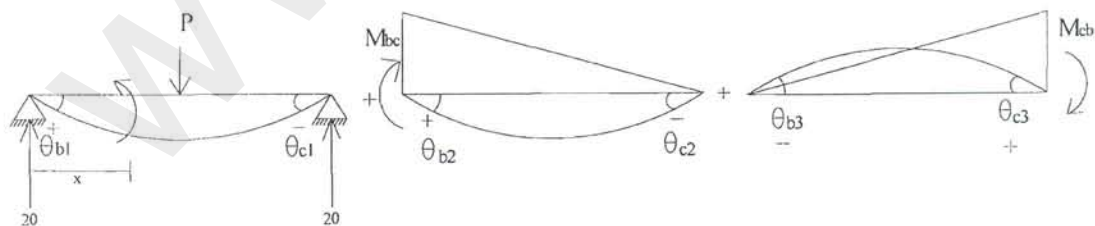
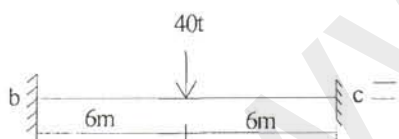
$$EI_c \theta_{b3} = C_3 M_{ba} \cdot L = 1.7664M'_{ab}$$

چون تکیه‌گاه‌ها گیردار هستند پس M به M' تبدیل شده و نیز باید برآیند جبری θ توجه به جهات مثبت و منفی صفر باشد.

$$\begin{cases} \theta_{a1} + \theta_{a2} + \theta_{a3} = 0 \\ \theta_{b1} + \theta_{b2} + \theta_{b3} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{200.9705}{EI_c} + \frac{1.4772}{EI_c} M'_{ab} - \frac{0.8076}{EI_c} M'_{ba} = 0 \\ -\frac{217.6337}{EI_c} - \frac{0.8076}{EI_c} M'_{ab} + \frac{1.7664}{EI_c} M'_{ba} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1.4772M'_{ab} - 0.8076M'_{ba} = -200.9705 \\ -0.8076M'_{ab} + 1.7664M'_{ba} = 217.6337 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M'_{ab} = -91.5813 \\ M'_{ba} = 81.3355 \end{cases}$$



معادلات لنگر خمشی بار نقطه‌ای:

$$M(x) - 20x = 0 \Rightarrow M(x) = 20x \quad , \quad 0 \leq x \leq 6$$

$$M(x) - 20x + 40(x - 6) = 0 \Rightarrow M(x) = -20x + 240 \quad , \quad 6 \leq x \leq 12$$

$$EI_c \theta_{b1} = \frac{1}{L} \int_0^L \frac{M(x)}{EI_c n x} (L - x) dx$$

$$= \frac{1}{12} \left[\int_0^4 \frac{1}{2.833} (20x)(12-x) dx + \int_4^6 \frac{1}{2.5} (20x)(12-x) dx \right. \\ \left. + \int_6^8 \frac{1}{2.5} (240-20x)(12-x) dx + \int_8^{12} \frac{(240-20x)(12-x)}{2.167} dx \right] \\ = 140.3345$$

$$EI_c \theta_{c1} = \frac{1}{L} \int_0^L \frac{M(x)}{EI_c} x dx \\ = \frac{1}{12} \left[\int_0^4 \frac{1}{2.833} (20x)x dx + \int_4^6 \frac{1}{2.5} (20x)x dx + \int_6^8 \frac{1}{2.5} (240-20x)x dx + \int_8^{12} \frac{(240-20x)x}{2.167} dx \right] \\ = 149.9776$$

$$EI_c \theta_{b2} = C_1 M_{bc} \cdot L = 1.7664 M'_{bc}$$

$$EI_c \theta_{c2} = -C_2 M_{bc} \cdot L = -0.8076 M'_{bc}$$

$$EI_c \theta_{b3} = -C_2 M_{cb} \cdot L = -0.8076 M'_{cb}$$

$$EI_c \theta_{c3} = C_3 M_{cb} \cdot L = 1.4772 M'_{cb}$$

$$\begin{cases} \theta_{b1} + \theta_{b2} + \theta_{b3} = 0 \\ \theta_{c1} + \theta_{c2} + \theta_{c3} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 140.3345 + 1.7664 M'_{bc} - 0.8076 M'_{cb} = 0 \\ -143.9776 - 0.8076 M'_{bc} + 1.4772 M'_{cb} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M'_{cb} = 77.4530 \\ M'_{bc} = -44.0350 \end{cases}$$

$$M_{ba} = \frac{2EI_c}{L} \left[\underbrace{(K_{ab} \theta_a + K_{bb} \theta_b)}_0 - \underbrace{(K_{ba} + K_{bb})}_0 \frac{\Delta}{L} \right] + M^*_{ba} \\ = \frac{2EI_c}{12} (4.5257 \theta_b) + 81.3353$$

$$M_{bc} = \frac{2EI_c}{L} \left[\underbrace{(K_{bb} \theta_b + K_{bc} \theta_c)}_0 - \underbrace{(K_{cc} + K_{bc})}_0 \frac{\Delta}{L} \right] + M^*_{bc} \\ = \frac{2EI_c}{12} (4.5257 \theta_b) - 44.035$$

$$\Rightarrow \frac{2EI_c}{12} (4.5257 \theta_b) + 81.3353 + \frac{2EI_c}{12} (4.5257 \theta_b) - 44.0350 = 0$$

$$\Rightarrow \theta_b = -\frac{24.7258}{EI_c}$$

با جاگذاری مقدار θ_b در معادلات شیب افت لنگرهای گیری داری را می توان محاسبه نمود.

	$\sum EI_c \theta_a$	$\sum EI_c \theta_b$	$\sum EI_c \theta_b$	$\sum EI_c \theta_c$
ناشی از بار گسترده	200.9705	-217.6337	0	
ناشی از بار متمرکز	0	0	140.3345	
ناشی از لنگر انتهای نزدیک	-135.2839	143.6710	-77.7834	
ناشی از لنگر انتهای دور	-65.6865	73.9611	-62.55	
	$\sum EI_c \theta_a = 0.0001 \approx 0$		$\sum EI_c \theta_c = 0$	
	$(\sum EI_c \theta_b)_L = (\sum EI_c \theta_b)_R$			

۷-۱- مسائل خاص در روش شیب افت برای مقاطع غیر منشوری

الف- وقتیکه تیر بجای دوسر گیردار، یک سر مفصل و یک سر گیردار باشد. ضرایب اصلاح شده برای لنگر گیرداری و سختی تیر بصورت زیر می باشد.

$$M'_{ab} = M_{ab} - C_{ba} M_{ba}$$

$$K'_{aa} = K_{aa} (1 - C_{ab} C_{ba})$$

که در آن ضرایب انتقال لنگر بصورت زیر بدست می آید:

$$C_{ab} = \frac{K_{ba}}{K_{aa}}$$

$$C_{ba} = \frac{K_{ab}}{K_{bb}}$$

در تیرهای منشوری $C_{cb} = C_{bc} = \frac{1}{2}$ ، پس $M'_{ab} = M_{ab} - \frac{1}{2} M_{ba}$ و $K'_{aa} = K_{aa} (2 - \frac{1}{4}) = \frac{3}{2} K_{aa}$ خواهد بود.

ب- در حالت وجود تقارن مستقیم، سختی اصلاح شده برابر خواهد بود با:

$$K'_{aa} = K_{aa} (1 - C_{ab})$$

در تیرهای منشوری این رابطه بصورت $K'_{aa} = 2(1 - \frac{1}{2}) = 1$ می باشد.

ج- در حالت وجود تقارن معکوس، سختی اصلاح شده برابر خواهد بود با:

$$K'_{aa} = K_{aa} (1 + C_{ab})$$

در تیرهای منشوری این رابطه بصورت $K'_{aa} = 2(1 + \frac{1}{2}) = 3$ می باشد.

◀ توجه: در هر یک از حالات الف و ب و ج، معادله شیب افت فقط برای θ_a نوشته می شود.

د- در حالت نشت Δ در تکیه گاه b.

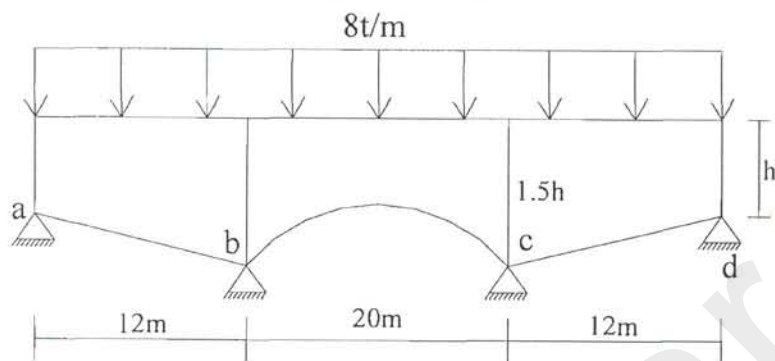
$$M_{ab} = -K_{aa} (1 + C_{ab}) \frac{\Delta}{\ell} \times \frac{2EI_o}{\ell}$$

$$M_{ba} = -K_{bb} (1 + C_{ba}) \frac{\Delta}{\ell} \times \frac{2EI_o}{\ell}$$

نشست تکیه گاهی برای b در حالتیکه تکیه گاه b مفصلی باشد.

$$M'_{ab} = M_{ab} - C_{ba} M_{ba} = -K_{aa} (1 - C_{ab} C_{ba}) \frac{\Delta}{\ell} \times \frac{2EI_0}{\ell}$$

مثال- با استفاده از روش شیب افت برای تیرهای غیر منشوری حل کنید:



الف- روش مستقیم

دهانه AB :

$$C_1 = \frac{1}{L^3} \int_0^L \frac{(L-x)^2}{nx} dx = \frac{1}{12^3} \int_0^{12} \frac{(12-x)^2}{(1+\frac{x}{24})^3} dx = 0.2437$$

$$C_2 = \frac{1}{L^3} \int_0^L \frac{(L-x)x}{nx} dx = \frac{1}{12^3} \int_0^{12} \frac{(12-x)x}{(1+\frac{x}{24})^3} dx = 0.0896$$

$$C_3 = \frac{1}{L^3} \int_0^L \frac{x^2}{nx} dx = \frac{1}{12^3} \int_0^{12} \frac{x^2}{(1+\frac{x}{24})^3} dx = 0.13261$$

$$K_{aa} = 2.73 \quad K_{ab} = 1.84 \quad K_{bb} = 5.017$$

دهانه BC :

$$C_1 = \frac{1}{L^3} \int_0^L \frac{(L-x)^2}{nx} dx = \frac{1}{20^3} \int_0^{20} \frac{(20-x)^2}{[1+0.5(1-\frac{x}{10})^2]^3} dx = 0.212392$$

$$C_2 = \frac{1}{20^3} \int_0^{20} \frac{(20-x)x}{[1+0.5(1-\frac{x}{10})^2]^3} dx = 0.131367$$

$$C_3 = \frac{1}{20^3} \int_0^{20} \frac{x^2}{[1+0.5(1-\frac{x}{10})^2]^3} dx = 0.212392$$

$$\begin{cases} a_a = 0.5 \\ r_a = \frac{1.5-1}{1} = 0.5 \\ a_b = 0.5 \\ r_b = 0.5 \end{cases}$$

$$K_{bb} = 3.813 \quad K_{bc} = 2.358 \quad K_{cc} = 3.813$$

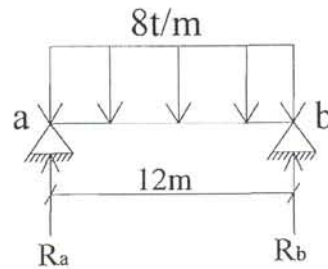
دهانه cd ، به علت تقارن

$$C_1 = 0.13261 \quad K_{cc} = 5.017$$

$$C_2 = 0.0896 \quad K_{cc} = 1.84$$

$$C_3 = 0.2437 \quad K_{cc} = 2.73$$

بدست آوردن لنگرهای گیرداری برای دهانه AB



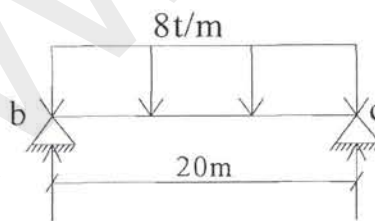
$$EI\theta_{a_1} = \frac{1}{L} \int_0^L \frac{Mx(L-x)}{nx} dx = \frac{1}{12} \int_0^{12} \frac{(48x - 4x^2)(12-x)}{\left(1 + \frac{x}{24}\right)^3} dx = 347.21$$

$$EI\theta_{b_1} = \frac{1}{L} \int_0^L \frac{Mx \cdot x}{nx} dx = \frac{1}{12} \int_0^{12} \frac{(48x - 4x^2)x}{\left(1 + \frac{x}{24}\right)^3} dx = 272.19$$

$$C_1L = 2.924 \quad C_2L = 1.075 \quad C_3L = 1.591$$

$$\begin{cases} \theta_{a_1} + \theta_{a_2} + \theta_{a_3} = 0 \\ \theta_{b_1} + \theta_{b_2} - \theta_{b_3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 347.21 + 2.924M_a - 1.075M_b = 0 \\ 272.19 + 1.075M_a - 1.591M_b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_{ab} = -79.31 \\ M_{ba} = 120.88 \end{cases}$$

بدست آوردن لنگرهای گیرداری برای دهانه BC



$$EI\theta_{b_1} = \frac{1}{20} \int_0^{20} \frac{(80x - 4x^2)(20-x)}{\left[1 + 0.5\left(1 + \frac{x}{10}\right)^2\right]^3} dx = 2101.88$$

$$EI\theta_{c_1} = \frac{1}{20} \int_0^{20} \frac{(48x - 4x^2)x}{\left[1 + 0.5\left(1 + \frac{x}{10}\right)^2\right]^3} dx = 2101.88$$

$$C_1L = 4.248 \quad C_2L = 2.627 \quad C_3L = 4.248$$

$$\begin{cases} \theta_{b_1} + \theta_{b_2} + \theta_{b_3} = 0 \\ \theta_{c_1} + \theta_{c_2} - \theta_{c_3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2101.88 + 4.248M_a - 2.627M_b = 0 \\ 2101.88 + 2.627M_a - 4.248M_b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_{ab} = -305.73 \\ M_{ba} = 305.73 \end{cases}$$

$$0 = M_{ab} = \frac{1}{6}(2.73\theta_a + 1.48\theta_b) - 74.31$$

$$0 = \begin{cases} M_{ba} = \frac{1}{6}(1.84\theta_a + 5.0178\theta_b) + 120.88 \\ M_{ab} = \frac{1}{10}(2.358\theta_b + 3.8138\theta_c) + 305.73 \end{cases}$$

$$0 = \begin{cases} M_{cb} = \frac{1}{10}(3.813\theta_b + 2.358\theta_c) - 120.88 \\ M_{cd} = \frac{1}{6}(1.84\theta_c + 2.73\theta_d) + 74.31 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{به علت تقارن} \begin{cases} M_{cd} = -120.88 \\ M_{dc} = 74.31 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \theta_a & \theta_b & \theta_c & \theta_d \\ \frac{2.73}{6} & \frac{1.84}{6} & 0 & 0 \\ \frac{1.84}{6} & 1.217 & 0.2358 & 0 \\ 0 & 0.2358 & 1.217 & \frac{1.84}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1.84}{6} & \frac{2.73}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_a \\ \theta_b \\ \theta_c \\ \theta_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 74.31 \\ 184.85 \\ -184.85 \\ -74.31 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \theta_a = 46.1142 \\ \theta_b = 173.896 \\ \theta_c = -173.896 \\ \theta_d = -46.1142 \end{cases} \begin{cases} M_{ab} = 0.0 \\ M_{ba} = 280.43 \\ M_{ab} = -280.43 \\ M_{cb} = 280.43 \\ M_{bc} = -280.43 \\ M_{ab} = 0 \end{cases}$$

ب- استفاده از جدول

$$\text{دهانه AB} \begin{cases} a_a = 0 & a_b = 1 \\ r_a = 0 & r_b = 1 \end{cases}$$

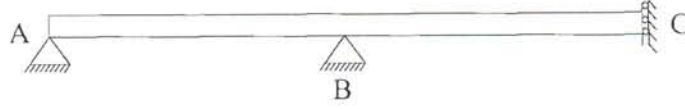
بین دو جدول ۵ و ۱۰ باید انترپوله کنیم.

جدول ۵۲ (بین ۰/۴ و ۰/۶ انترپوله می‌کنیم)	C_{ab}	C_{ba}	K_{ab}	K_{ba}	M_{ab}	M_{ba}
	0.676	0.369	5.455	10.1	0.0647	0.1049
جدول ۵ (بین ۰/۴ و ۰/۶ انترپوله می‌کنیم)	0.6275	0.59	6.99	7.455	0.0913	0.098
جدول ۱۰ (بین ۰/۴ و ۰/۶ انترپوله می‌کنیم)	0.6085	0.6465	8.245	7.78	0.09975	0.09305

پس از انترپوله کردن بین نتایج بدست آمده از جدول ۵ و ۱۰ خواهیم داشت:

$$\begin{cases} C_{bc} = 0.618 \\ C_{cb} = 0.618 \end{cases} \quad \begin{cases} k_{bc} = 7.618 \\ K_{cb} = 7.618 \end{cases} \quad \begin{cases} M_{bc} = 0.0955 \\ M_{cb} = 0.0955 \end{cases}$$

بعلت تقارن نصف سازه را تحلیل می کنیم.



$$K'_{ab} = \frac{5.455}{12} = 0.4546 \quad K'_{bc} = \frac{7.618}{20} = 0.3809$$

$$K'_{ba} = \frac{10.1}{12} = 0.842 \quad K'_{cb} = \frac{7.618}{20} = 0.3809$$

$$M_{ij} = K'_{ij}(\theta_i + C_{ij}\theta_j) + M_{ij}$$

$$M_{ji} = K'_{ji}(\theta_j + C_{ji}\theta_i) + M_{ji}$$

$$M_{ab} = 0.0647 \times 8 \times 12^2 = -74.53$$

$$M_{ba} = 0.1049 \times 8 \times 12^2 = 120.84$$

$$M_{bc} = -M_{cb} = -0.09975 \times 8 \times 20^2 = -305.6$$

$$0 = \{M_{ab} = 0.4546(\theta_a + 0.676\theta_b) - 74.53$$

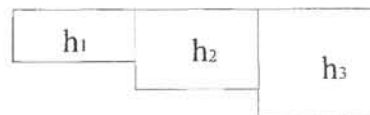
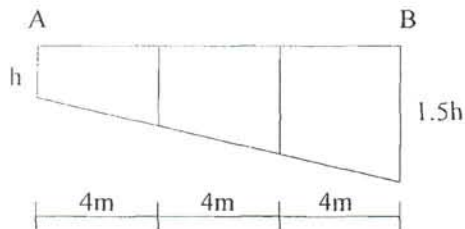
$$0 = \begin{cases} M_{ab} = 0.842(0.369\theta_a + \theta_b) + 120.84 \\ M_{bc} = 0.3809(0.618\theta_c + \theta_b) - 305.6 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 0.4546 & 0.310 \\ 0.310 & 0.988 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_a \\ \theta_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 74.53 \\ 184.76 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} \theta_a = 46.34 \\ \theta_b = 172.46 \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_{ab} = 0 \\ M_{ba} = 280.45 \\ M_{bc} = -280.45 \\ M_{cb} = 280.45 \\ M_{cd} = -280.45 \\ M_{dc} = 0 \end{cases}$$

ج- تقسیم تیر به قطعات منشوری

دهانه AB را سه قسمت و دهانه BC را پنج قسمت می کنیم.



$$h = 1 + \frac{x}{24} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 4 \quad h = 1 + \frac{1}{6} \\ x = 8 \quad h = 1 + \frac{1}{6} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} h_1 = \frac{h(1 + (1 + \frac{1}{6}))}{2} = 1.083h \\ h_2 = \frac{(1 + \frac{1}{6}) + (1 + \frac{1}{3})}{2} h = 1.25h \\ h_3 = \frac{1 + \frac{1}{3} + 1.5}{2} h = 1.417h \end{array} \right.$$

$$h = 1 + 0.5 \left(1 - \frac{x}{10}\right)^2$$

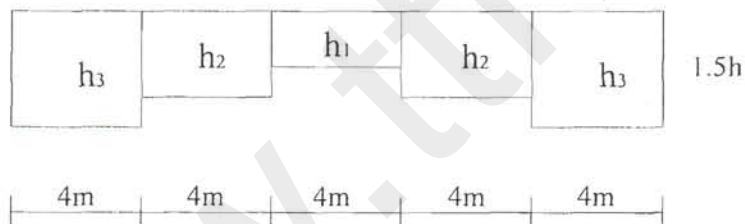
$$x = 4 \quad h = 1.18$$

$$x = 8 \quad h = 1.02$$

$$x = 12 \quad h = 1.02$$

$$x = 16 \quad h = 1.18$$

$$h_1 = \frac{1.5 + 1.18}{2} = 1.34 \quad h_2 = \frac{1.18 + 1.02}{2} = 1.1 \quad h_3 = \frac{2 \times 1.02}{2} = 1.02$$



$$C_1 = \frac{1}{2 \cdot 0.3^3} \left[\int_0^4 \frac{(2.0 - x)^2}{1.34^3} dx + \int_4^8 \frac{(2.0 - x)^2}{1.13^3} dx + \int_8^{12} \frac{(2.0 - x)^2}{1.02^3} dx \right. \\ \left. + \int_{12}^{16} \frac{(2.0 - x)^2}{1.13^3} dx + \int_{16}^{20} \frac{(2.0 - x)^2}{1.34^3} dx \right] = 0.20461$$

$$C_2 = \frac{1}{2 \cdot 0.3^3} \left[\int_0^4 \frac{(2.0 - x)x}{1.34^3} dx + \int_4^8 \frac{(2.0 - x)x}{1.13^3} dx + \int_8^{12} \frac{(2.0 - x)x}{1.02^3} dx \right. \\ \left. + \int_{12}^{16} \frac{(2.0 - x)x}{1.13^3} dx + \int_{16}^{20} \frac{(2.0 - x)x}{1.34^3} dx \right] = 0.123$$

$$C_3 = C_1 = 0.20461$$

بدست آوردن لنگرهای گیرداری

$$\begin{aligned}
 EI\theta_{a_1} &= \frac{1}{L} \int_b^L \frac{M_x(L-X)}{n_x} dx \\
 &= \frac{1}{12} \left[\int_1^4 \frac{(48x-4x^2)(12-x)}{1.083^3} dx + \int_4^8 \frac{(48x-4x^2)(12-x)}{1.125^3} dx \right. \\
 &\quad \left. + \int_8^{12} \frac{(48x-4x^2)(12-x)}{1.417^3} dx \right] = 349.23 \\
 EI\theta_{b_1} &= \frac{1}{12} \left[\int_1^4 \frac{(48x-4x^2)x}{1.083^3} dx + \int_4^8 \frac{(48x-4x^2)x}{1.25^3} dx \right. \\
 &\quad \left. + \int_8^{12} \frac{(48x-4x^2)x}{1.417^3} dx \right] = 274.86
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \theta_{a_1} + \theta_{a_2} - \theta_{a_3} = 0 \\ \theta_{b_1} + \theta_{b_2} - \theta_{b_3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 349.23 + 2.797M_a - 1.084M_b = 0 \\ 274.86 + 1.084M_a - 1.637M_b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_{ab} = -80.43 \\ M_{ba} = 114.65 \end{cases}$$

$$C_1L = 2.797 \quad C_2L = 1.084 \quad C_3L = 1.637$$

بدست آوردن لنگرهای گیرداری برای دهانه BC

$$\begin{aligned}
 EI\theta_{a_1} &= \frac{1}{20} \left[\int_1^4 \frac{(80x-4x^2)(20-x)}{1.34^3} dx + \int_4^6 \frac{(80x-4x^2)(20-x)}{1.1^3} dx \right. \\
 &\quad \left. + \int_6^{12} \frac{(80x-4x^2)(20-x)}{1.02^3} dx + \int_2^6 \frac{(80x-4x^2)(20-x)}{1.1^3} dx + \int_6^{20} \frac{(80x-4x^2)(20-x)}{1.34^3} dx \right] \\
 &= 1968.212 = EI\theta_{b_1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 1968.212 + 4.097M_a - 2.46M_b = 0 \\ 1968.212 + 2.46M_a - 4.09M_b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_{bc} = -300.49 \\ M_{cb} = 300.49 \end{cases}$$

معادلات شیب افت (بعلت تقارن نصف سازه را تحلیل می کنیم) $\theta_b = -\theta_c$

$$0 = M_{ab} = \frac{1}{6}(2.885\theta_a + 1.91\theta_b) - 80.43$$

$$0 = \begin{cases} M_{ba} = \frac{1}{6}(1.91\theta_a + 4.93\theta_b) - 80.43 \\ M_{bc} = \frac{1}{6}(3.82\theta_b + 2.3\theta_c) - 80.43 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} 0.481 & 0.318 \\ 0.318 & 0.974 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_a \\ \theta_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80.43 \\ 185.84 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} \theta_a = 52.38 \\ \theta_b = 173.7 \end{cases}$$

$$M_{ab} = 0 \quad , \quad M_{bc} = -274.05 \quad , \quad M_{cd} = -274.05$$

$$M_{ba} = 274.05 \quad , \quad M_{cb} = 274.05 \quad , \quad M_{dc} = 0$$

فصل سوم

Cross Method

روش توزیع لنگر (کراس)

www.ttnar.ir

✓ فهرست مطالب

- ۱- توزیع لنگر ۱۰۰
- ۱-۱- تعاریف پایه ۱۰۰
- الف- قرارداد علامت ۱۰۰
- ب- لنگرهای گیرداری ۱۰۰
- ج- لنگرهای ناشی از تغییر مکان نسبی دو انتهای عضو ۱۰۰
- د- سختی دورانی مطلق ۱۰۱
- ه- سختی دورانی کاهش یافته ۱۰۱
- و- ضرایب توزیع ۱۰۱
- ز- ضریب انتقال ۱۰۳
- ۱-۲- روش حل ۱۰۳
- مثال ۱۰۴
- ۱-۳- کاربرد روش توزیع لنگر در تحلیل تیرهای سراسری ۱۰۵
- مثال ۱۰۵
- ۱-۴- کاربرد روش توزیع لنگر در تحلیل تیرهای سراسری با نشست تکیه‌گاهی ۱۰۸
- مثال ۱۰۸
- ۱-۵- کاربرد روش توزیع لنگر در تحلیل قابهای مستطیلی بدون حرکت جانبی ۱۱۰
- مثال ۱۱۰
- ۱-۶- کاربرد روش توزیع لنگر در تحلیل قابهای مستطیلی با حرکت جانبی ۱۱۱
- مثال ۱۱۱
- ۱-۷- کاربرد روش توزیع لنگر در تحلیل قابهای شیبدار بدون حرکت جانبی ۱۱۲
- مثال ۱۱۲
- ۱-۸- کاربرد روش توزیع لنگر در تحلیل قابهای شیبدار با حرکت جانبی ۱۱۳
- مثال ۱۱۳

۱- توزیع لنگر

همان‌طور که در فصل‌های گذشته ملاحظه گردید روش‌های مختلفی برای تحلیل سازه‌های نامعین وجود دارد که جامع‌ترین آن‌ها روش شیب-افت می‌باشد. در تحلیل سازه‌های نامعین به این روش در نهایت به دستگاه چند مجهولی خواهیم رسید که حل این دستگاه برای سازه‌های با درجه نامعینی بالا بسیار مشکل خواهد بود. برای احتراز از تشکیل دستگاه معادلات می‌توان از روش‌های تکراری استفاده نمود. روش‌های تکراری مبتنی بر فرض یک حل اولیه و پیش‌بینی روش مناسبی برای اصلاح جواب‌ها تا رسیدن به جواب با دقت مناسب می‌باشد.

در تحلیل سازه‌های نامعین به روش تکراری می‌توان حل اولیه را لنگرهای گیرداری فرض نمود و برای بدست آوردن روش بهتر کردن پاسخ از دو مفهوم توزیع لنگر و انتقال لنگر استفاده کرد. به این منظور برای حل اولیه که لنگرهای گیرداری می‌باشند فرض می‌شود که در محل گره‌های سازه قفل‌هایی اعمال شده که مانع دوران گره‌ها می‌شوند به این ترتیب هریک از اعضا به تیرهای دوسر گیردار تبدیل می‌شوند و جواب اولیه مسئله همان لنگرهای گیرداری می‌باشند.

بعد از این مرحله تعادل گره‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرد. با توجه به پیوستگی سازه بایستی جمع لنگرها در گره‌ها صفر باشد ولی با فرض وجود قفل این‌گونه نیست و در هر گره لنگر نامتعادلی وجود دارد. این لنگر نامتعادل در گره‌های سازه بین اعضای منتهی به گره توزیع می‌شود و از هر انتهای عضو به انتهای دیگر آن لنگرهایی منتقل خواهد شد. برای درک بهتر موضوع دو پدیده توزیع لنگر و انتقال لنگر را به طور جداگانه مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۱-۱- تعاریف پایه

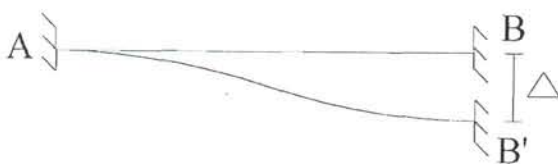
الف- قرارداد علامت

علامت‌های ما همان علامت‌های روش شیب افت می‌باشد (لنگر وارد بر انتهای عضو در صورتی مثبت است که در جهت حرکت عقربه‌های ساعت عمل نماید).

ب- لنگرهای گیرداری

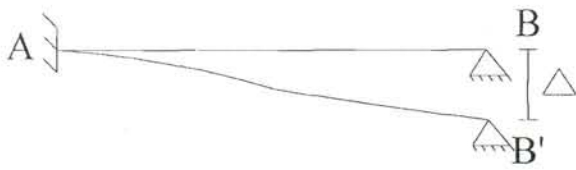
در استفاده از روش فوق باید لنگرهای انتهای تولید شده در عضو وقتی که دو انتهای آن گیردار فرض می‌شود، معلوم باشد.

ج- لنگرهای ناشی از تغییر مکان نسبی دو انتهای عضو



$$M_{ab} = \frac{2EI}{l} (2\theta_a + \theta_b - \frac{3\Delta}{l}) = \frac{6EI\Delta}{l^2} \quad (I)$$

$$M_{ba} = \frac{6EI\Delta}{l^2}$$



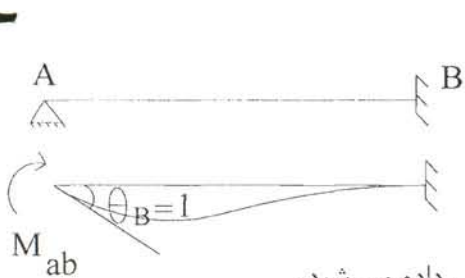
$$M_{ab} = \frac{2EI}{l} \left(2\theta_a + \theta_b - \frac{3\Delta}{l} \right)$$

$$M_{ba} = \frac{2EI}{l} \left(\theta_a + 2\theta_b - \frac{3\Delta}{l} \right) = 0 \quad (II)$$

$$\theta_b = \frac{3\Delta}{l} \Rightarrow M_{ba} = -\frac{3EI\Delta}{l^2}$$

د- سختی دورانی مطلق

لنگر انتهایی لازم برای ایجاد دورانی به اندازه واحد در یک انتها، وقتی که انتهای دیگر گیردار فرض می‌شود و از دوران کلی عضو جلوگیری شده باشد. برای تیرشکل زیر با صلبیت خمشی EI خواهیم داشت:



$$M_{ab} = \frac{2EI}{l} \left(2\theta_a + \theta_b - \frac{3\Delta}{l} \right) = \frac{4EI\theta_a}{l}$$

$$M_{ab} \Big|_{\theta_a=1} = \frac{4EI}{l} = k' \text{ سختی دورانی مطلق}$$

نسبت $\frac{l}{L}$ را ضریب سختی یا سختی نسبی می‌نامند که با k نمایش داده می‌شود.

ه- سختی دورانی کاهش یافته

لنگر انتهایی لازم برای ایجاد دورانی به اندازه واحد در یک انتها، وقتی که انتهای دیگر ساده فرض می‌شود. (B)

$$M_{ab} = \frac{2EI}{l} (2\theta_a + \theta_b) \quad (\text{مفصلی})$$

$$M_{ba} = \frac{2EI}{l} (1 + 2\theta_b) = 0 \Rightarrow \theta_b = -\frac{1}{2}$$

سختی دورانی کاهش یافته



$$M_{ab} \Big|_{\theta_a=1} = \frac{2EI}{l} = k'^R = \frac{3}{4} k'$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود سختی دورانی کاهش یافته $\frac{3}{4}$ سختی دورانی مطلق می‌باشد.

و- ضرایب توزیع

شکل زیر را در نظر بگیرید که از چهار عضو تشکیل شده است که یک انتهای هر عضو گیردار می‌باشد. فرض می‌کنیم لنگر M بر گره C وارد می‌شود. این گره به اندازه θ می‌چرخد، به علت این چرخش لنگری در اعضا ایجاد می‌شود.

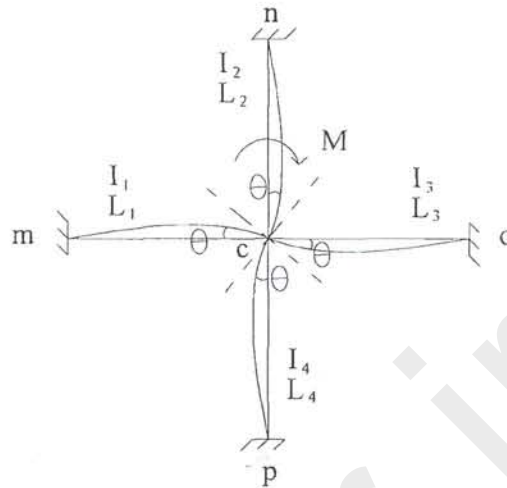
با توجه به معادلات شیب-افت داریم:

$$M_{cm} = \frac{2EI}{l_1}(2\theta) = 4E \frac{I_1}{l_1} \theta = k'_1 \theta$$

$$M_{cn} = \frac{2EI}{l_2}(2\theta) = 4E \frac{I_2}{l_2} \theta = k'_2 \theta$$

$$M_{co} = \frac{2EI}{l_3}(2\theta) = 4E \frac{I_3}{l_3} \theta = k'_3 \theta$$

$$M_{cp} = \frac{2EI}{l_4}(2\theta) = 4E \frac{I_4}{l_4} \theta = k'_4 \theta$$



معادلات فوق نشان می‌دهد که لنگر خارجی وارد بر گره C باعث ایجاد لنگر در انتهای نزدیک هر تیر می‌شود تا اثر لنگر خارجی را خنثی کند. این لنگرها را لنگرهای توزیع شده و نسبت هر لنگر به لنگر کل را ضریب توزیع برای آن عضو می‌نامیم.

با توجه به تعادل گره C می‌دانیم:

$$M_{cm} + M_{cn} + M_{co} + M_{cp} = M$$

$$(K'_1 + K'_2 + K'_3 + K'_4)\theta = M$$

$$4E(K_1 + K_2 + K_3 + K_4)\theta = M \Rightarrow \theta = \frac{M}{4E \sum K}$$

با جایگذاری مقدار θ به معادلات زیر می‌رسیم:

$$\left. \begin{aligned} M_{cm} &= \frac{K_1}{\sum K} M = r_1 M \\ M_{cn} &= \frac{K_2}{\sum K} M = r_2 M \\ M_{co} &= \frac{K_3}{\sum K} M = r_3 M \\ M_{cp} &= \frac{K_4}{\sum K} M = r_4 M \end{aligned} \right\} \Rightarrow r_i = \frac{K_i}{\sum K}$$

نسبت $\frac{K_i}{\sum K}$ را ضریب توزیع لنگر می‌نامند و با r_i نمایش داده می‌شود. اگر یک انتها مفصلی بود باید به جای K_i ، K_i^R قرار داده شود.

همان‌طور که ملاحظه می‌شود لنگر خارجی M با توجه به ضریب توزیع هر عضو بین اعضای متصل به یک گره پخش می‌شود.

ز - ضریب انتقال

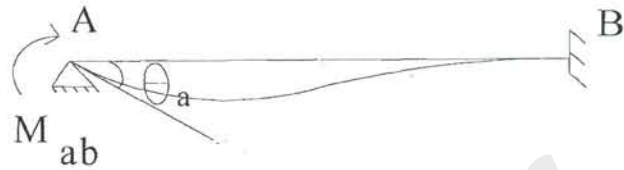
اگر لنگر به یک انتهای تیر وارد شود، لنگر ایجاد شده در انتهای دیگر را لنگر انتقال می نامیم و نسبت این دو لنگر را ضریب انتقال نامیده و با C نشان می دهیم.

$$M_{ab} = \frac{2EI}{l} (2\theta_a)$$

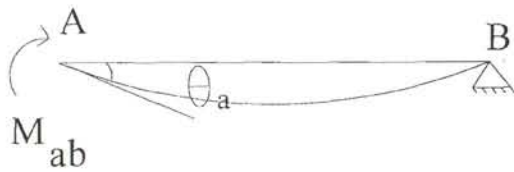
$$M_{ba} = \frac{2EI}{l} (\theta_a) = \frac{1}{2} M_{ab} \Rightarrow C_{ab} = \frac{1}{2}$$

$$M_{ba} = C_{ab} M_{ab}$$

$$C_{ba} = \frac{1}{2}$$



با تعویض تکیه گاه ها و عمل تأثیر لنگرهای خارجی داریم:

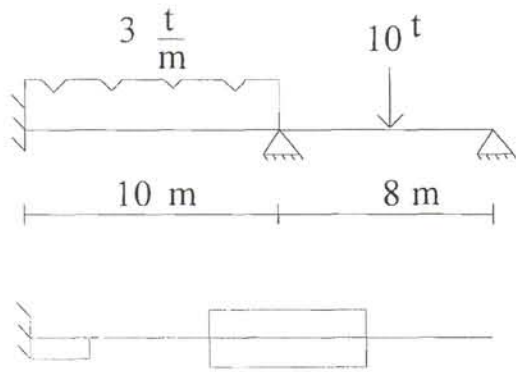


$$M_{ba} = 0 \Rightarrow C_{ab} = 0$$

- در تکیه گاه گیردار همه لنگرها ذخیره می شوند یعنی ضریب انتقال صفر می باشد.
- در تکیه گاه مفصلی هم لنگرها بر می گردند یعنی ضریب انتقال یک می باشد.

۱-۲- روش حل

- ۱- ضرایب سختی، ضرایب توزیع و ضرایب انتقال برای تمام اعضاء محاسبه گردند.
- ۲- گره ها در مقابل دوران گیردار شوند. (حل صفر)
- ۳- لنگرهای گیرداری به اعضاء اعمال شوند.
- ۴- گرهی که بیشترین عدم تعادل را دارد انتخاب شود و لنگر متعادل کننده بر آن اعمال شود.
- ۵- این لنگر بین انتهای نزدیک اعضاء متصل به گره توزیع شود.
- ۶- لنگرهای انتقالی به اعضاء دور تعیین شوند.
- ۷- گره تعادل یافته گیر دار شود و گره بعدی انتخاب شود. مراحل ۴ تا ۷ تکرار شود تا همه گره ها یک بار به تعادل برسند.
- ۸- مراحل ۴ تا ۷ برای همه گره ها تکرار شود تا نمو به صفر برسد.



$$M_{ab} = -M_{ba} = -\frac{3 \times 10^2}{12} = -25 \text{ t.m}$$

$$M'_{bc} = -\frac{3Pl}{16} = -\frac{3 \times 10 \times 8}{16} = -15 \text{ t.m}$$

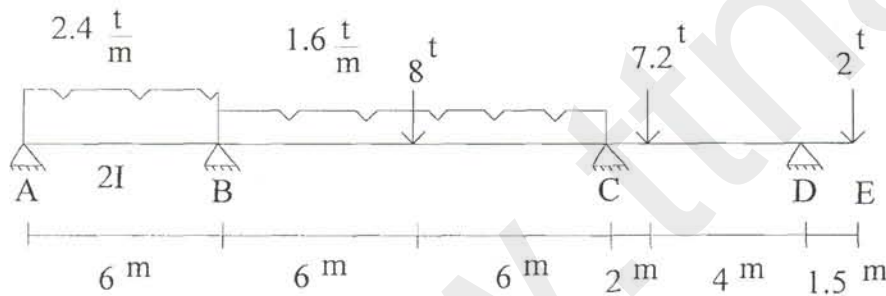
$$\frac{I}{L} = \frac{1}{10}, \quad \frac{1}{8} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{32}$$

$$\sum K = \frac{1}{10} + \frac{3}{32} = \frac{31}{160}$$

$$r_1 = \frac{1/10}{31/160} = 0.52$$

$$r_2 = \frac{3/32}{31/160} = 0.48$$

مثال - مطلوبست تحلیل تیر سراسری زیر به روش توزیع لنگر.



گام (۱) محاسبه لنگرهای گیرداری

$$M'_{ab} = -M'_{ba} = -\frac{2.4 \times 6^2}{12} = -7.2 \text{ t.m}$$

$$M'_{bc} = -M'_{cb} = -\left(\frac{1.6 \times 12^2}{12} + \frac{pl}{8}\right) = -31.2 \text{ t.m}$$

$$M'_{cd} = -\frac{7.2 \times 4^2}{6^2} = -6.4 \text{ t.m}, \quad M'_{dc} = 3.2 \text{ t.m}, \quad M'_{de} = -3.6 \text{ t.m}$$

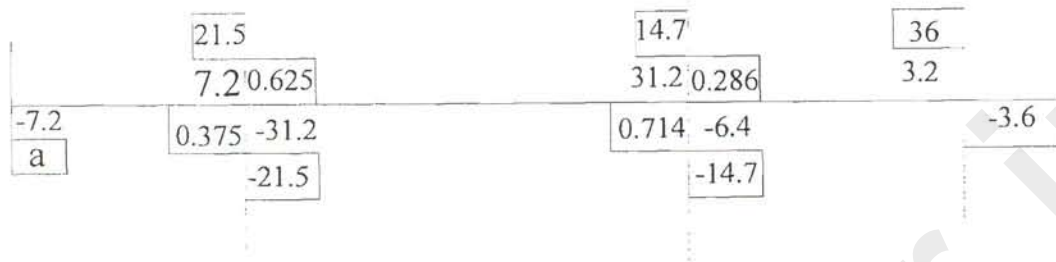
گام (۲) محاسبه ضرایب سختی نسبی و ضرایب توزیع

$$\left(\frac{EI}{l}\right)_{AB} = 0.5, \quad \left(\frac{EI}{l}\right)_{BC} = 0.833, \quad \left(\frac{EI}{l}\right)_{CD} = 0.333$$

$$B) \sum K = 0.5 + 0.833 = 1.333 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = 0.375 \\ r_2 = 0.625 \end{cases}$$

$$C) \sum K = 0.833 + 0.333 = 1.166 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = 0.714 \\ r_2 = 0.286 \end{cases}$$

گام ۳) توزیع لنگر، ضرایب انتقال $\frac{1}{2}$



۳-۱- کاربرد روش توزیع لنگر در تحلیل تیرهای سراسری

گام‌های حل مسئله عبارتند از:

الف) تعیین لنگرهای گیرداری

ب) تعیین ضرایب توزیع

ج) متعادل کردن گره‌ها بر روی یک شکل مشابه سازه واقعی.

نکات:

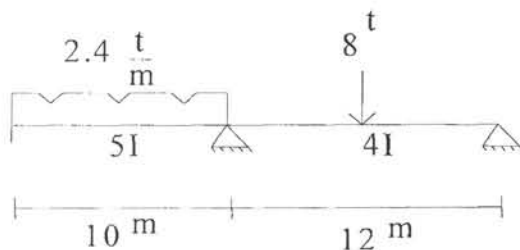
- در هر حالتی بهتر است از روش‌های اصلاح‌شده برای حالات انتهای مفصل، تقارن مستقیم و تقارن معکوس استفاده شود.

- متعادل کردن گره‌ها بهتر است از گره‌ای که بیشترین عدم تعادل را دارد آغاز شود.

- می‌توان همه گره‌ها را با هم یا چندتا چندتا متعادل نمود.

- می‌توان از تکنیک‌های ویژه مثل رهایی بیش از حد و رهایی کمتر از حد استفاده نمود.

مثال - تیر سراسری زیر را تحلیل کنید.



- روش عادی

گام ۱) محاسبه لنگرهای گیرداری

$$M'_{ab} = -M'_{ba} = -\frac{2.4 \times 100}{12} = -20 \text{ t.m}$$

$$M'_{bc} = -M'_{cb} = -\frac{8 \times 12}{8} = -12 \text{ t.m}$$

گام ۲) محاسبه ضرایب توزیع

$$\left. \begin{aligned} K_{ab} &= \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \\ K_{bc} &= \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sum K = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

$$\left\{ \begin{aligned} r_{ba} &= \frac{1/2}{5/6} = 0.6 \\ r_{bc} &= \frac{1/3}{5/6} = 0.4 \end{aligned} \right.$$

گام ۳) توزیع لنگر

(تمام گره‌ها را متعادل و لنگرها را منتقل می‌کنیم.)

	→	0.85			
		<u>-0.3</u>			<u>0.2</u>
	→	<u>0.3</u>		→	<u>-0.2</u>
		<u>-0.6</u>			<u>0.4</u>
	→	<u>0.6</u>		→	<u>-0.4</u>
		<u>-1.2</u>			<u>0.8</u>
	→	<u>1.2</u>		→	<u>-0.8</u>
		<u>-2.4</u>			<u>1.6</u>
	→	<u>10</u>		→	<u>-1.6</u>
		<u>-4.8</u>			<u>-12</u>
		<u>+20</u>	<u>0.4</u>		<u>12</u>
		<u>0.6</u>	<u>-12</u>		
-20			<u>-3.2</u>		
20			<u>-6</u>	←	
-2.4	←		<u>-1.6</u>	←	
2.4			<u>0.8</u>	←	
-1.2	←		<u>-0.8</u>	←	
1.2			<u>0.4</u>	←	
-0.6	←		<u>-0.4</u>	←	
0.6			<u>0.2</u>	←	
-0.3	←		<u>-0.2</u>	←	
0.3					
-0.15	←				

		0.6		
		20	0.4	12
-20		-4.8	-12	-12
20	→	10	-3.2	-1.6
-2.4	←	-2.4	-6	1.6
2.4	→	1.2	-1.6	-0.8
-1.2	←	-1.2	0.8	0.8
1.2	→	0.6	-0.8	-0.21
-0.6	←	-0.6	0.4	0.21
0.6	→	0.3	-0.4	-0.2
-0.3	←	-0.3	0.2	0.2
0.3	→	0.15	-0.2	-0.1
-0.15	←	-0.15	0.1	0.1
0.15	→	0.08	-0.1	-0.05
-0.08	←	-0.08	0.05	0.05
0.08	→	0.05	-0.05	0.0
0.0		22.5		
			-22.8	

- روش اصلاح شده

گام (۱) محاسبه لنگرهای گیرداری

$$M'_{ab} = 0.0, \quad M'_{ba} = \frac{wl^2}{8} = +30 \text{ t.m}$$

$$M'_{bc} = -\frac{3PL}{16} = -18 \text{ t.m}, \quad M'_{cb} = 0.0$$

گام (۲) محاسبه ضرایب توزیع

$$K'_{ba} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{10} = 0.375 \quad r_{ba} = 0.6$$

$$K'_{bc} = \frac{3}{4} \times \frac{4}{12} = 0.75 \quad r_{bc} = 0.4$$

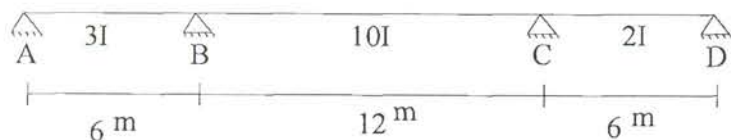
گام (۳) توزیع لنگر

	22.8		
	-7.2		
	30	0.4	0.0
0.0	0.6	-18	
		-4.8	
		-22.8	

۴-۱- کاربرد روش توزیع لنگر در تحلیل تیرهای سراسری با نشست تکیه گاهی

همان گونه که در فصل شیب-افت بیان شد نشست تکیه گاهها باعث ایجاد لنگر گیرداری در سازه می شود. بنابراین در روش توزیع لنگر، لنگرگیرداری ناشی از نشست را برای عضو مورد نظر بدست آورده و ادامه حل را مانند آنچه ذکر شد ادامه می دهیم.

مثال- تیر شکل ذیل را با فرض نشست تکیه گاه B به میزان ۱۵ میلی متر تحلیل نمایید.



$$I = 4 \times 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$E = 2 \times 10^7 \text{ t/m}^2$$

- روش عادی

گام (۱) محاسبه لنگرهای گیرداری

$$M'_{ab} = M'_{ba} = -\frac{6 \times 2 \times 10^7 \times 3 \times 4 \times 10^{-4} \times 0.015}{6 \times 6} = -60 \text{ t.m}$$

$$M'_{bc} = M'_{cb} = -\frac{6 \times 2 \times 10^7 \times 10 \times 4 \times 10^{-4} \times -0.015}{12 \times 6} = +50 \text{ t.m}$$

گام (۲) محاسبه ضرایب توزیع

$$K_{ab} = \frac{I}{L} = \frac{3}{6} = 0.5, \quad K_{bc} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}, \quad K_{cd} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

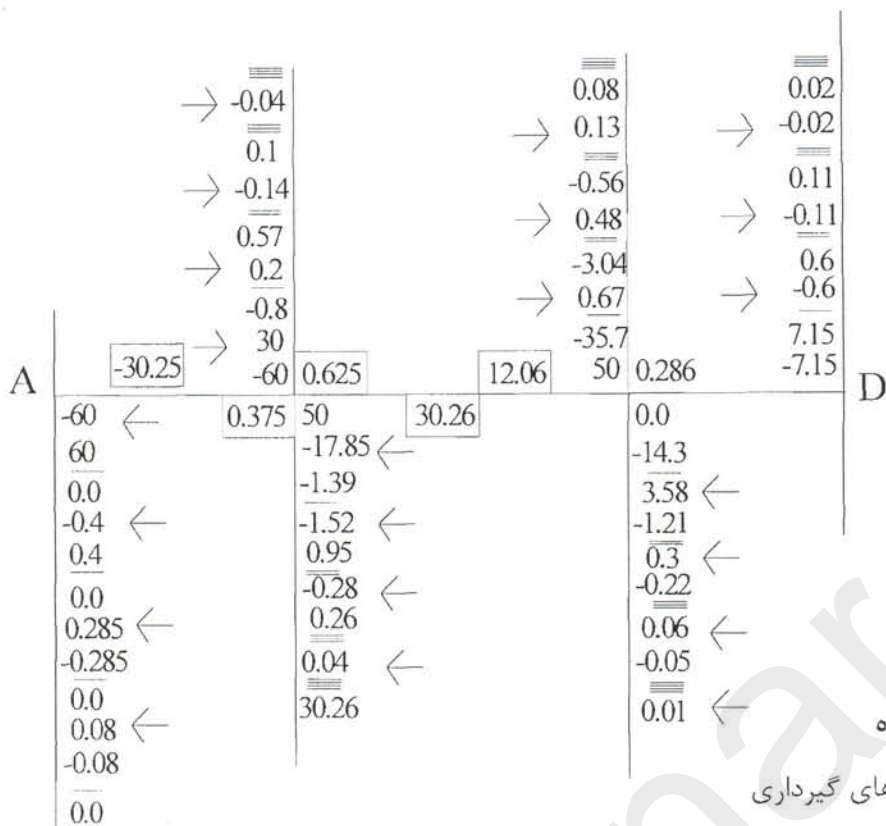
$$r_{ab} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{5}{6}} = \frac{6}{16} = 0.375$$

$$r_{bc} = 0.625$$

$$r_{cb} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{1}{3} + \frac{5}{6}} = \frac{5}{7} = 0.714$$

$$r_{cd} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + \frac{5}{6}} = 0.286$$

گام (۳) توزیع لنگر. (گره A را متعادل می کنیم.)



- روش اصلاح شده

گام (۱) محاسبه لنگرهای گیرداری

$$M'_{ab} = 0, \quad M'_{ba} = -\frac{3EI\Delta}{L^2} = -30 \text{ t.m}$$

$$M'_{bc} = M'_{cb} = -\frac{6EI\Delta}{L^2} = +50 \text{ t.m}$$

گام (۲) محاسبه ضرایب توزیع

$$K'_{ab} = \frac{3}{4} K_{ab} = \frac{3 \times 3}{6 \times 4} = 0.375$$

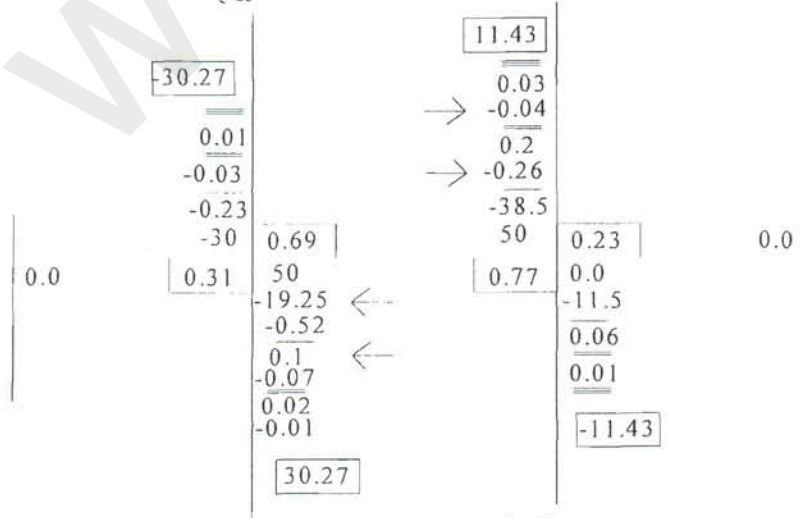
$$K_{bc} = \frac{10}{12} = 0.833$$

$$K'_{cd} = \frac{3}{4} \times \frac{2}{6} = 0.25$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r_{ab} = \frac{0.375}{0.833 + 0.375} = 0.31 \\ r_{bc} = 0.69 \end{cases}$$

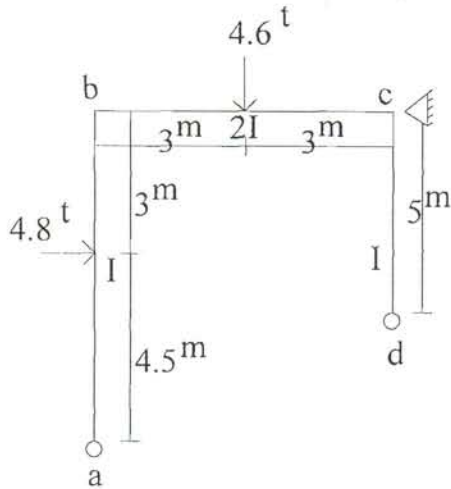
$$\Rightarrow \begin{cases} r_{cd} = \frac{0.833}{0.833 + 0.25} = 0.77 \\ r_{dc} = 0.23 \end{cases}$$

گام (۳) توزیع لنگر



۱-۵- کاربرد روش توزیع لنگر در تحلیل قابهای مستطیلی بدون حرکت جانبی

مثال- قاب شکل زیر را حل کنید.



گام (۱) محاسبه لنگرهای گیرداری

$$M'_{ba} = \frac{4.8 \times 4.5^2 \times 3}{(7.5)^2} + \frac{1}{2} \times \frac{4.8 \times 3^2 \times 4.5}{(7.5)^2} = 6.9 \text{ t.m}$$

$$M'_{bc} = M'_{cb} = -\frac{PL}{8} = -7.2 \text{ t.m}$$

گام (۲) محاسبه ضرایب توزیع

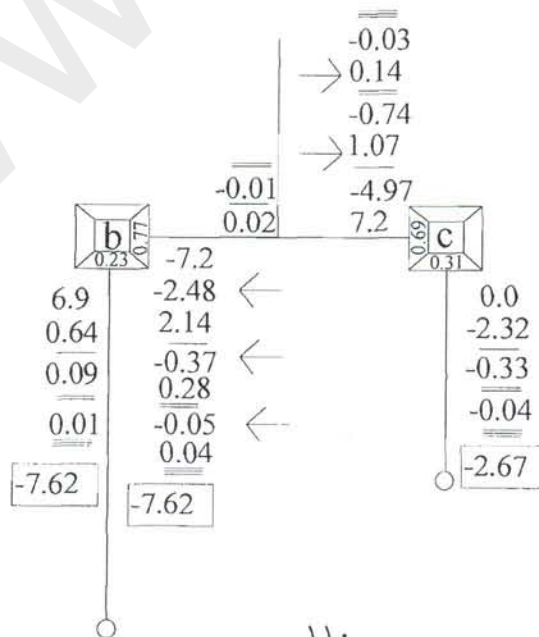
$$\left. \begin{aligned} K'_{ba} &= \frac{3}{4} \times \frac{1}{7.5} = 0.1 \\ K_{bc} &= \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sum K = 0.433 \Rightarrow \begin{cases} r_{bc} = 0.23 \\ r_{cb} = 0.77 \end{cases}$$

گره b-

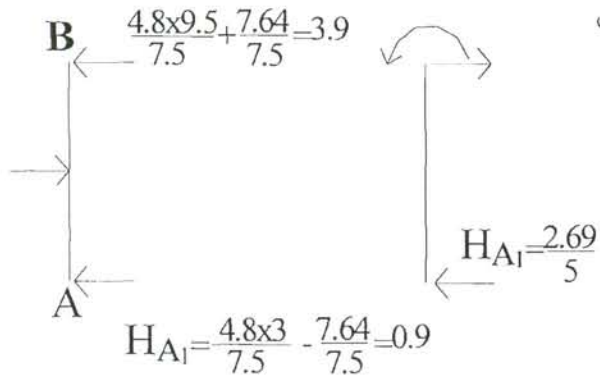
$$\left. \begin{aligned} K_{cb} &= \frac{1}{3} \\ K'_{cd} &= \frac{3}{4} \times \frac{1}{5} = 0.15 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sum K = 0.485 \Rightarrow \begin{cases} r_{cb} = 0.69 \\ r_{cd} = 0.31 \end{cases}$$

گره c-

گام (۳) توزیع لنگر



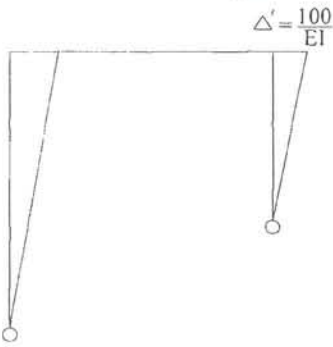
گام ۴) به دست آوردن عکس العمل در تکیه‌گاه مجازی



۱-۶- کاربرد روش توزیع لنگر در تحلیل قابهای مستطیلی با حرکت جانبی

مثال - قاب شکل ذیل را که دارای تغییر مکان جانبی

برابر $\Delta' = \frac{100}{EI}$ می باشد، حل کنید.



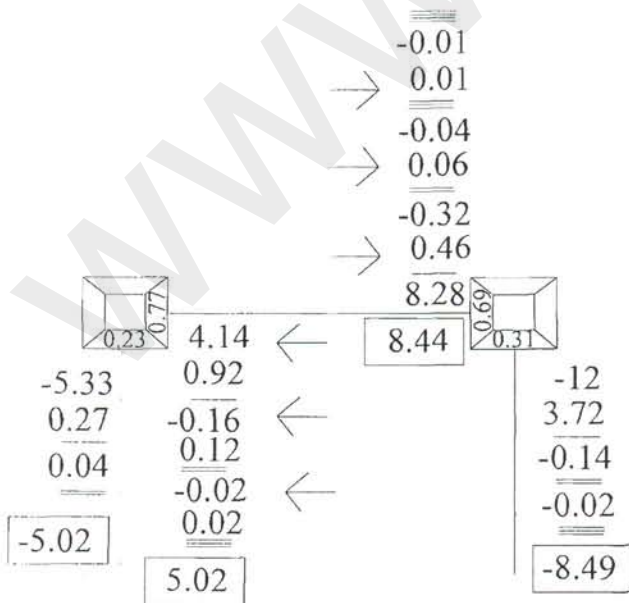
گام ۱) محاسبه لنگرهای گیرداری

$$M'_{ba} = -3 \frac{EI}{L^2} \Delta = -5.33 \text{ t.m} , \quad M'_{cd} = -12.0 \text{ t.m}$$

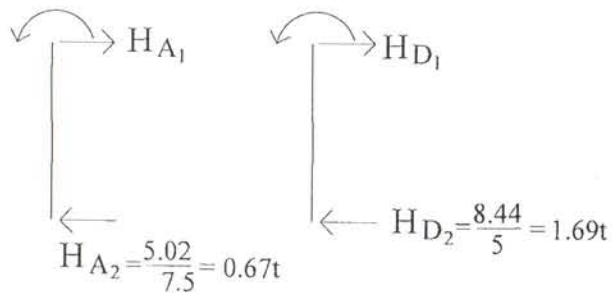
گام ۲) محاسبه ضرایب توزیع

ضرایب توزیع مانند مثال قبل می باشد.

گام ۳) توزیع لنگر



گام ۴) بدست آوردن عکس العمل در تکیه گاه مجازی



$$(H_{A_1} + H_{D_1}) + \alpha(H_{A_2} + H_{D_2}) = 4.8 \Rightarrow \alpha = 1.43$$

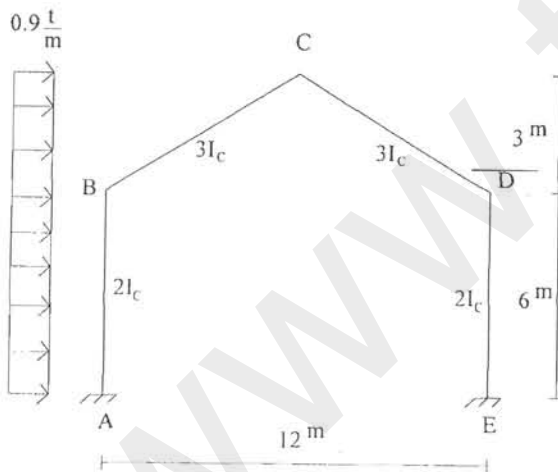
$$\Delta = \alpha \Delta' = 1.43 \times \frac{100}{EI} = \frac{143}{EI}$$

$$M = M^o + \alpha M'$$

۷-۱- کاربرد روش توزیع لنگر در تحلیل قابهای شیبدار بدون حرکت جانبی

حل قابهای شیبدار همانند قابهای مستطیلی است با این تفاوت که در همه اعضا لنگرهای گیرداری ایجاد می‌شود.

مثال - قاب شیبدار زیر را با فرض این که تکیه‌گاه‌های B و D حرکت جانبی ندارند، با روش توزیع لنگر تحلیل نمایید.



گام ۱) محاسبه لنگرهای گیرداری

$$M'_{ab} = -M'_{ba} = -\frac{0.9 \times 36}{12} = -2.7 \text{ t.m}$$

$$M'_{bc} = -M'_{cb} = -\frac{0.9 \times 9}{12} = -0.675 \text{ t.m}$$

گام ۲) محاسبه ضرایب توزیع

$$\left. \begin{aligned} K_{ab} &= \frac{2}{6} = 0.333 \\ K_{bc} &= \frac{3}{3\sqrt{5}} = 0.447 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sum K = 0.75$$

$$r_{ba} = 0.43 \quad , \quad r_{bc} = 0.57$$

$$r = \frac{1}{2}$$

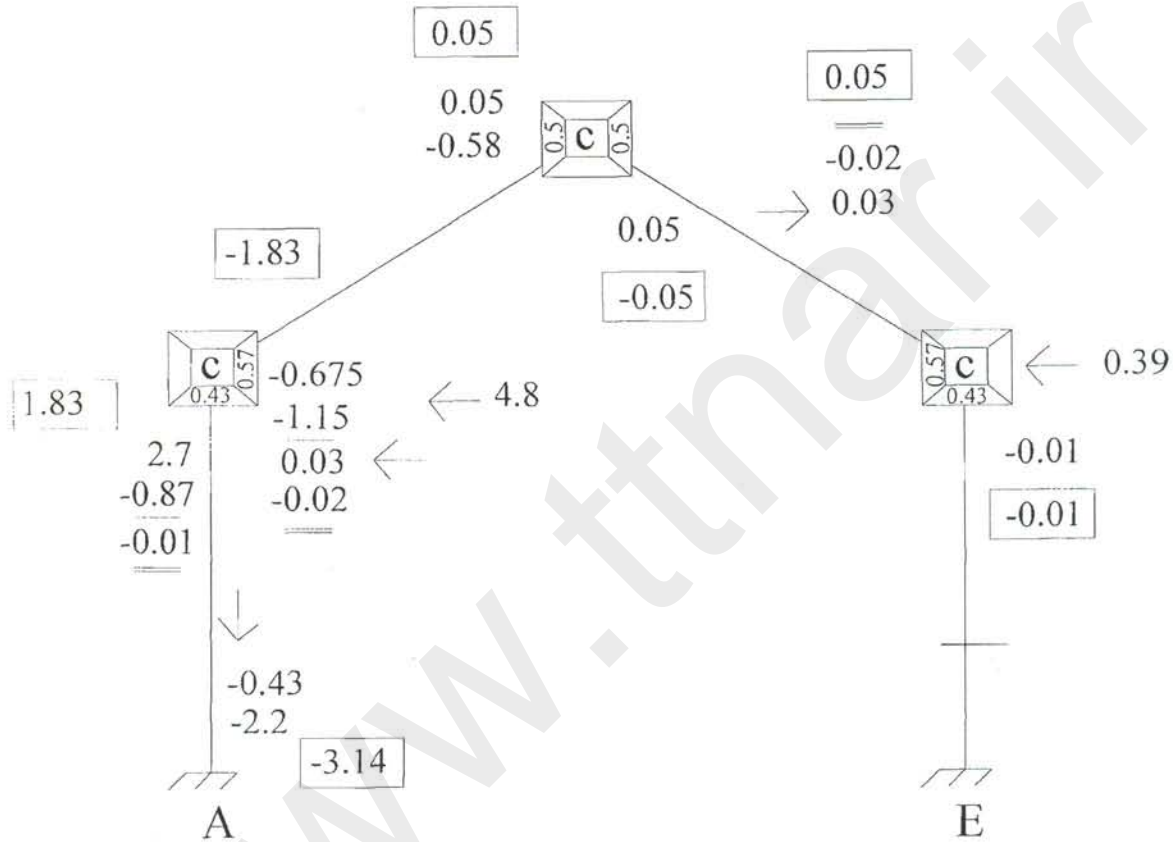
$$r_{dc} = 0.57 \quad , \quad r_{de} = 0.43$$

b گره -

C گره -

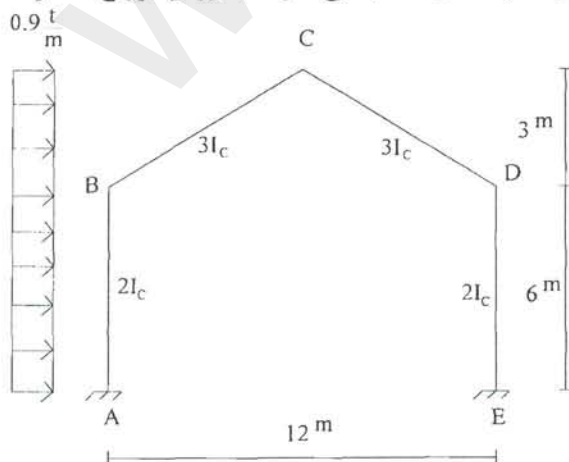
d گره -

گام ۳) توزیع لنگر



۸-۱- کاربرد روش توزیع لنگر در تحلیل قابهای شیبدار با حرکت جانبی

مثال - قاب شیبدار زیر را با فرض این که تکیه‌گاه‌های B و D حرکت جانبی دارند، با روش توزیع لنگر تحلیل



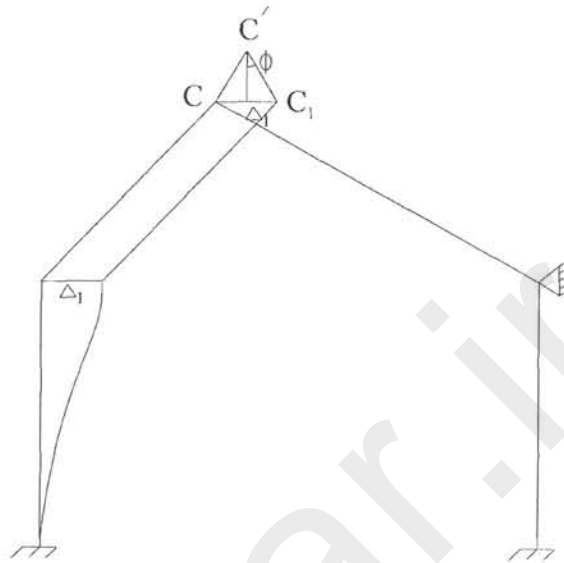
نمایید.

گام ۱) حل هندسی

$$\Delta = \frac{100}{EI}$$

$$\frac{CC_1}{\sin 2\Phi} = \frac{C'C_1}{\cos \Phi} \Rightarrow \sin \Phi = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\Delta = 2 \sin \Phi C'C_1 \Rightarrow C'C_1 = \frac{\Delta}{2 \sin \Phi} = \frac{\sqrt{5}}{2} \Delta$$



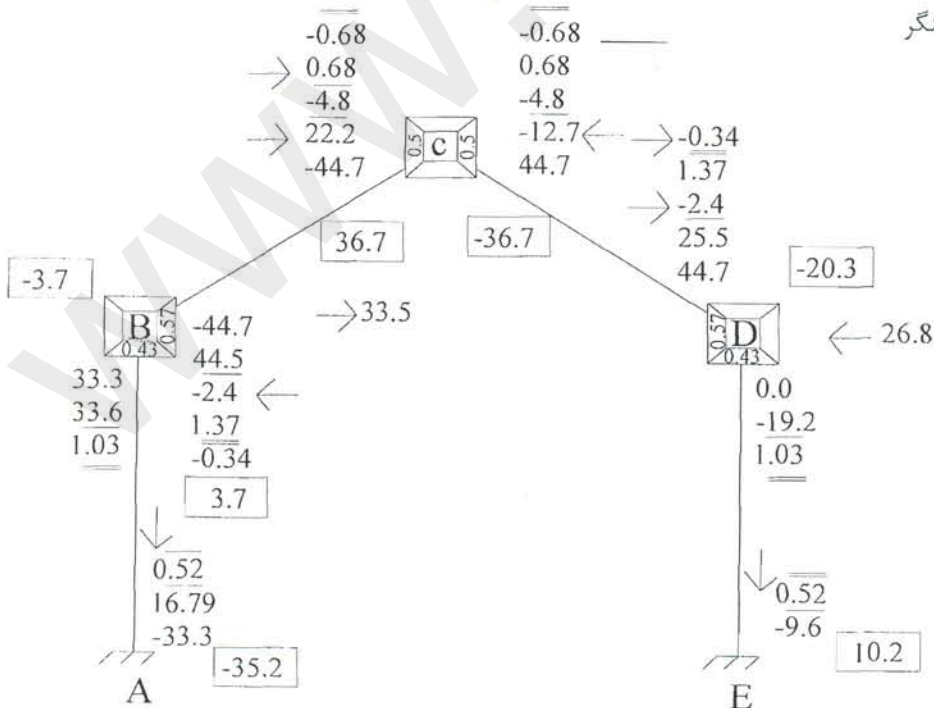
گام ۲) لنگرهای گیرداری

$$M'_{ab} = -M'_{ba} = -\frac{6E(2I)}{36} \times \frac{100}{EI} = -33.33 \text{ t.m}$$

$$M'_{bc} = -M'_{cb} = -\frac{6E(3I)}{(3\sqrt{5})^2} \times \frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{100}{EI} = -44.72 \text{ t.m}$$

$$M'_{cd} = -M'_{dc} = 44.72 \text{ t.m}$$

گام ۳) توزیع لنگر



فصل چهارم

Kani Method روش کانی

www.ttnar.ir

☑ فهرست مطالب

- ۱- روش کانی..... ۱۱۷
- ۱-۱- فرضیات ۱۱۷
- مثال ۱۱۸
- ۱-۲- روش کانی - بررسی با حرکت جانبی ۱۲۱
- مثال ۱۲۳
- ۱-۳- روش کانی در تحلیل سازه‌های با بارگذاری افقی و تغییر مکان جانبی ۱۲۹
- مثال ۱۳۰
- ۱-۴- نکات در مورد ستون‌های طبقه اول ۱۳۵
- مثال ۱۳۷

۱- روش کانی

یک روش تکراری است که با دقت مناسبی جواب می‌دهد و پایه آن روش شیبافت است.

۱-۱- فرضیات

- سازه ارتجاعی است.
- تغییر مکان‌ها کوچک هستند.
- گره‌ها صلب هستند.
- از اثر نیروی محوری صرف‌نظر می‌کنیم.

۱- مجموع لنگرهایی که سبب عدم تعادل می‌شود در روش کراس با علامت منفی به گره اعمال می‌شود. در

روش کانی همین مجموع لنگرها را لنگر مقاوم گره می‌نامیم- بدون تغییر علامت. (I)

$$\sum M'_{ij} = M'_i \quad (I)$$

$$M_{ij} = M'_{ij} + 2M_{ij}^0 + M_{ji}^0 \quad (II)$$

۲- در حالت بدون درجه آزادی تغییر مکان

$$M_{ij} = 2 \frac{EI}{L} (2\theta_i) + 2 \frac{EI}{L} (\theta_j) + M'_i$$

در واقع روابط شیبافت به صورت

$$\begin{cases} M_{ij}^{(0)} = 2EK\theta_i \\ M_{ji}^{(0)} = 2EK\theta_j \end{cases}$$

می‌باشد. پس در واقع با فرض $\frac{I}{L} = K$ خواهیم داشت:

جمع لنگره‌های ناشی از اعضاء در گره i از رابطه II می‌شود:

$$\begin{aligned} \sum M'_{ij} &= \sum M'_{ij} + \sum M_{ji}^0 + 2 \sum M_{ij}^0 \\ \sum M'_{ij} + \sum M_{ji}^0 &= -2 \sum M_{ij}^0 \\ M'_i + \sum M_{ji}^0 &= -2 \sum M_{ij}^0 \end{aligned} \quad (III)$$

$$\sum M_{ij}^0 = -\frac{1}{2} \left[\sum M'_{ij} + \sum M_{ji}^0 \right] \quad (IV)$$

نتیجه می‌شود:

یعنی اگر ضریب توزیع را به جای این که از تقسیم عدد ۱ بر مجموعه سختی‌ها به دست آوریم، از تقسیم عدد

$-\frac{1}{2}$ به دست آوریم و می‌توان چرخش انتهایی هر گره را حساب کرد.

پس روش را به شرح زیر مرحله به مرحله بررسی می‌کنیم:

۱- تعیین لنگرهای گیرداری هر گره و به دست آوردن جمع کلی آنها

۲- تعیین ضرایب توزیع برای روش کانی

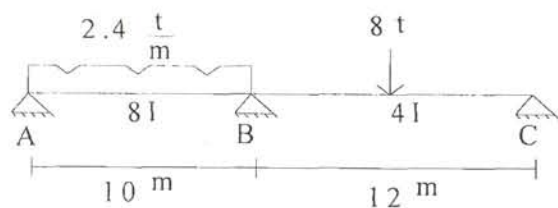
۳- به دست آوردن لنگرهای چرخش با استفاده از روابط IV

۴- تکرار مرحله سوم تا اینکه جوابها یکسان شود.

۵- جواب نهایی عبارتست از:

$$M'_{ij} + M''_{ij} + (M''_{ij} + M''_{ji}) = M_{ij}$$

مثال ۱- تیر شکل زیر را به روش کانی تحلیل کنید.



$$M'_{ba} = \frac{2.4 \times 10^2}{8} = +30 \text{ t.m}$$

$$M'_{bc} = -18$$

(الف) لنگرهای گیرداری

(ب) ضرایب توزیع

$$\left. \begin{aligned} K_{ab} &= \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \\ K_{bc} &= \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sum K = \frac{5}{6} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} r_{ab} &= -\frac{1}{2} \times \frac{K_{ba}}{\sum K} = -\frac{1}{2} \times \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{6}} = -0.3 \\ r_{bc} &= -\frac{1}{2} \times \frac{K_{bc}}{\sum K} = -\frac{1}{2} \times \frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{6}} = -0.2 \end{aligned} \right.$$

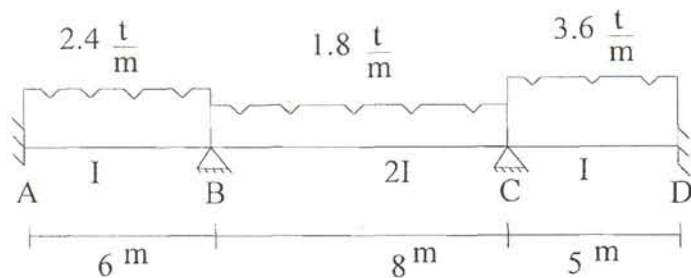


(ج) لنگر چرخش انتهای دور = صفر

$$M_{ba} = 30 + (-3.6) + (-3.6 + 0) = 22.8$$

$$M_{bc} = (-18) + (-2.4) + (-2.4 + 0) = -22.8$$

مثال ۲- (برای مقایسه روش‌های توزیع لنگر و کانی)



۱- روش کراس

الف) لنگرهای گیرداری

$$M'_{ab} = -M'_{ba} = -\frac{2.4 \times 36}{12} = -7.2 \text{ t.m}$$

$$M'_{bc} = -M'_{cb} = -\frac{1.8 \times 64}{12} = -9.6 \text{ t.m}$$

$$M'_{cd} = -M'_{dc} = -\frac{3.6 \times 25}{12} = -7.5 \text{ t.m}$$

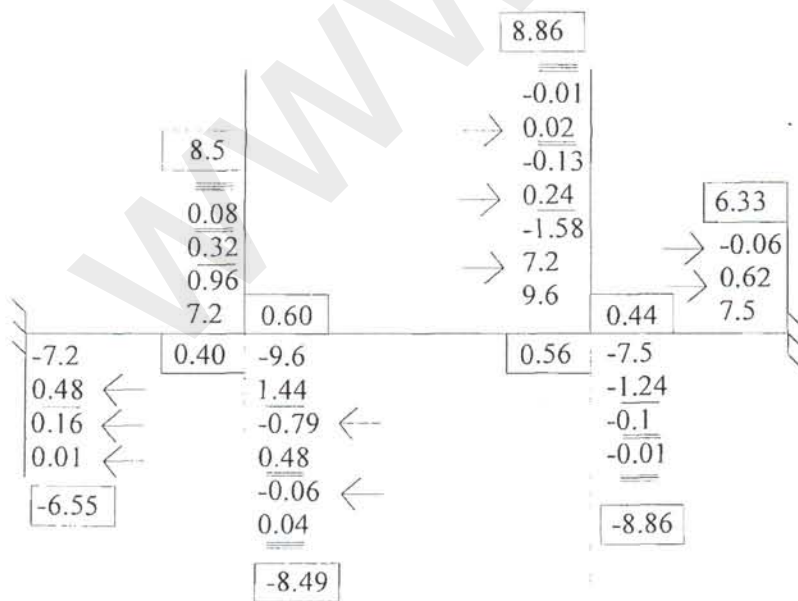
$$\left. \begin{matrix} K_{ba} = \frac{1}{6} \\ K_{bc} = \frac{1}{4} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \sum K = \frac{5}{12} \Rightarrow \begin{cases} r_{ba} = 0.4 \\ r_{bc} = 0.6 \end{cases}$$

ب) ضرایب توزیع - گره B

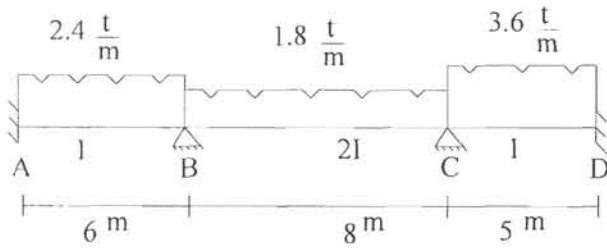
$$\left. \begin{matrix} K_{cb} = \frac{1}{4} \\ K_{cd} = \frac{1}{5} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \sum K = \frac{9}{20} \Rightarrow \begin{cases} r_{cb} = 0.56 \\ r_{cd} = 0.44 \end{cases}$$

ضرایب توزیع - گره C

ج) مرحله توزیع



۲- حل به روش کانی



$$\begin{cases} M'_{ab} = -M'_{ba} = -7.2 \\ M'_{bc} = -M'_{cb} = -9.6 \\ M'_{cd} = -M'_{dc} = -7.5 \end{cases}$$

الف) لنگرهای گیرداری

$$\left. \begin{matrix} K_{ba} = \frac{1}{4} \\ K_{bc} = \frac{1}{4} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \sum K = \frac{5}{12} \Rightarrow \begin{cases} r_{ba} = -\frac{1}{2} \times \frac{12}{5} \times \frac{1}{6} = -0.2 \\ r_{bc} = -\frac{1}{2} \times \frac{12}{5} \times \frac{1}{4} = -0.3 \end{cases}$$

ب) ضرایب توزیع - گره B

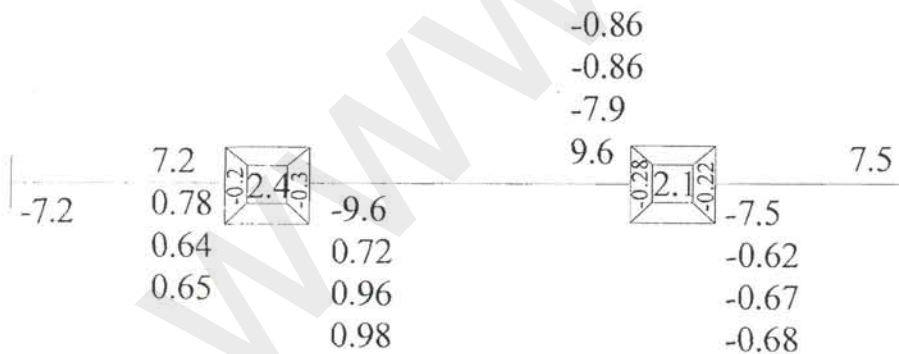
$$\left. \begin{matrix} K_{cb} = \frac{1}{4} \\ K_{cd} = \frac{1}{5} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \sum K = \frac{9}{20} \Rightarrow \begin{cases} r_{cb} = -\frac{1}{2} \times \frac{20}{9} \times \frac{1}{4} = -0.28 \\ r_{cd} = -\frac{1}{2} \times 9 \times \frac{1}{5} = -0.22 \end{cases}$$

گره C

ج) به دست آوردن لنگر چرخشی در گره B

$$\begin{aligned} \sum M_{ij} &= 2.1 & \sum M_{ji} &= -2.4 \\ \sum M_{ji}^0 &= \frac{0.72}{2.82} & \sum M_{ji}^0 &= 0 \end{aligned}$$

د) مرحله توزیع



(B) $\sum M_{ji}^0 = -0.79$

(C) $\sum M_{ji}^0 = 9.6$

در مرحله دوم

(B) $\sum M_{ji}^0 = -0.86$

(C) $\sum M_{ji}^0 = -0.98$

در مرحله سوم

$$M_{ij} = M'_{ij} + M_{ij}^{\theta} + (M_{ij}^{\theta} + M_{ji}^{\theta}) \quad \text{د) لنگرهای انتهایی}$$

$$M_{ab} = -7.2 + 0 + (0 + 0.65) = -6.55 \quad \text{در گره A}$$

$$\begin{cases} M_{ba} = 7.2 + 0.65 + (0 + 0.65) = 8.5 \\ M_{bc} = -9.6 + 0.98 + (0.98 - 0.86) = -8.5 \end{cases} \quad \text{در گره B}$$

$$\begin{cases} M_{cb} = 9.6 + (-0.86) + (-0.86 + 0.98) = 8.86 \\ M_{cd} = -7.5 + (-0.68) + (0 - 0.68) = -8.86 \end{cases} \quad \text{در گره C}$$

$$M_{dc} = 7.5 + (0.0) + (0 - 0.68) = 6.82 \quad \text{در گره D}$$

۱-۲- روش کانی- بررسی با حرکت جانبی

در معادلات شیبافت دیدیم که لنگر کل انتهایی در یک عضو ناشی از :

- لنگر ناشی از چرخش انتهای ۱ در حالتی که انتهای ۲ ثابت است و هیچ گونه تغییر مکان صورت نمی گیرد.

- لنگر ناشی از چرخش انتهای ۲ در حالتی که انتهای ۱ بدون چرخش بوده و هیچ گونه تغییر مکان صورت نمی گیرد.

- لنگر ناشی از تغییر مکان Δ بین دو سر عضو در حالتی که تیر به صورت کاملاً گیردار در نظر گرفته شده است. در بخش قبلی تعیین اجزاء لنگر ناشی از چرخش‌های دو انتهای نزدیک و دور و نیز ناشی از بارگذاری خارجی به روش کانی مورد بحث قرار گرفتند و در اینجا بخش بعدی مورد بحث قرار می‌گیرد.

$$M_{ij} = M'_{ij} + 2M_{ij}^{\theta} + M_{ji}^{\theta} + M_{ij}^{\Delta}$$

$$\sum M_{ij} = 0 \quad \text{شرط تعادل در گره i}$$

$$\sum M'_{ij} + \sum (M_{ji}^{\theta} + M_{ji}^{\Delta}) = -2 \sum M_{ij}^{\theta}$$

$$\sum M'_{ij} + \sum M_{ji}^{\theta} = -2 \sum M_{ij}^{\theta} \quad \text{از مقایسه این رابطه با رابطه}$$

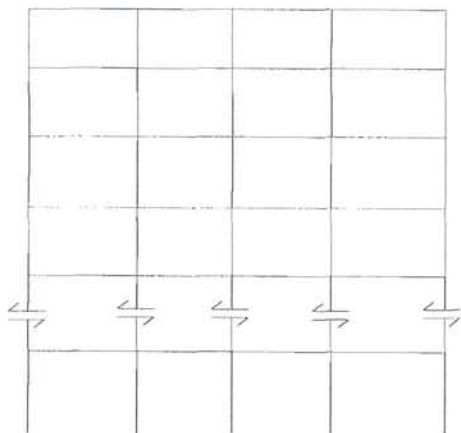
که در حالت بدون حرکت جانبی مورد مطالعه قرار گرفت، نتیجه می‌شود که می‌توان مثل قبل جزء چرخشی انتهای نزدیک را با داشتن لنگرهای گیرداری و جزء چرخشی انتهای دور به دست آمد و در این حالت بایستی

$$M_{ij}^{\Delta} = M_{ji}^{\Delta} = -\frac{6EI}{L^2} \Delta \quad \text{یک جمله مربوط به تغییر مکان را نیز اضافه کنیم. از آنجایی که:}$$

فقط یک جزء تغییر مکان برای هر عضو وجود دارد و به طور کلی می توان این اجزاء را با محاسباتی شبیه آنچه در مورد اجزاء چرخش انجام دادیم به دست آورد. بدین منظور مسئله را به دو حالت تفکیک می کنیم:

الف) حالت حرکت جانبی تحت اثر بار قائم

ب) حالت حرکت جانبی تحت اثر بار افقی



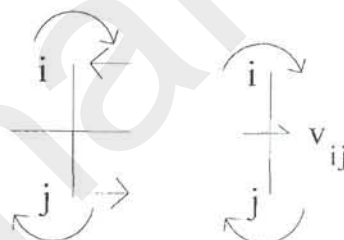
الف) حالت حرکت جانبی تحت اثر بار قائم

$$\sum v_{ij} = 0$$

$$v_{ij} = \frac{M_{ij} + M_{ji}}{h_{ij}}$$

$$\sum v_{ij} = \frac{1}{h_{ij}} \sum (2M_{ij}^0 + M_{ji}^0 + M_{ij}^\Delta + 2M_{ji}^0 + M_{ij}^0 + M_{ji}^\Delta) = 0$$

$$(i) \sum M_{ij}^\Delta = -\frac{3}{2} \sum (M_{ij}^0 + M_{ji}^0)$$



پس می توان لنگر ناشی از تغییر مکان در یک طبقه دلخواه را از جمع چرخش اجزاء دو سر ستون به دست آورد و چون در اثر تغییر مکان Δ در طبقه کلیه ستون های این طبقه به اندازه Δ تغییر مکان می کنند، پس با توجه به رابطه $M = -EK \frac{\delta}{h}$ یا $M = -\frac{6EI\Delta}{l^2}$ و چون δ و h ثابت هستند پس لنگر بین ستون ها به نسبت K ها بر کل این ستون ها تقسیم می شوند.

- راه حل عملی

$\frac{-3}{2}$ را بین ستون های طبقه به نسبت $\frac{I}{L}$ ستون ها تقسیم می کنیم و پس از انجام عملیات برای محاسبه چرخش هر انتها از جمع آن ها طبق رابطه I مقدار لنگر کل ناشی از تغییر مکان را به دست می آوریم و آن را به نسبت بین ستون ها تقسیم می کنیم. پس روش عملی به شرح زیر است:

۱- لنگرهای گیرداری حساب می شوند و جمع آن ها در مربع نوشته می شود.

۲- ضرایب توزیع در گره ها از تقسیم $\frac{-1}{2}$ به نسبت سختی اعضاء متصل به آن ها به دست می آید و در مربع

نوشته می‌شود.

۳- ضریب جزء تغییر مکان از تقسیم $\frac{-3}{2}$ به نسبت سختی ستون‌های هر طبقه به دست آمده در وسط ستون

نوشته می‌شود.

۴- در تکرار اول، جزء چرخش نزدیک از جمع لنگرهای گیرداری طبق رابطه $\sum M_{ij}^0 = \sum M'_{ij} + \sum (M_{ji}^0)$ حساب شده و بین اعضاء بر حسب سختی آن‌ها تقسیم می‌شود.

۵- در تکرار اول، پس از تعیین چرخش‌ها از رابطه $\sum M_{ij}^\Delta = \frac{-3}{2} \sum (M_{ij}^0 + M_{ji}^0)$ مقادیر لنگر ناشی از تغییر مکان حساب شده و در وسط ستون نوشته می‌شود.

۶- در تکرار دوم و بعد از رابطه I مقادیر مربوط به چرخش انتهای نزدیک حساب شده و سپس مقادیر مربوط به تغییر مکان نیز حساب می‌شود تا مقدار واقعی به دست آید.

$$-2 \sum M_{ij}^0 = \sum M'_{ij} + \sum (M_{ji}^0 + M_{ij}^\Delta)$$

مثال ۱- قاب شکل مقابل را که دارای حرکت جانبی است، با استفاده از روش کراس و کانی تحلیل نمایید.

۱ - روش کراس

$$M'_{ab} = -M'_{ba} = -\frac{1.8 \times 16}{12} = -2.4$$

$$M'_{bc} = -M'_{cb} = -\frac{1.8 \times 2}{12} = -3.75$$

$$M'_{dc} = -M'_{cd} = -\frac{2.4 \times 16}{12} = -3.2$$

$$M'_{ef} = -M'_{fe} = -\frac{2.4 \times 25}{12} = -5.0$$

- لنگرهای گیرداری

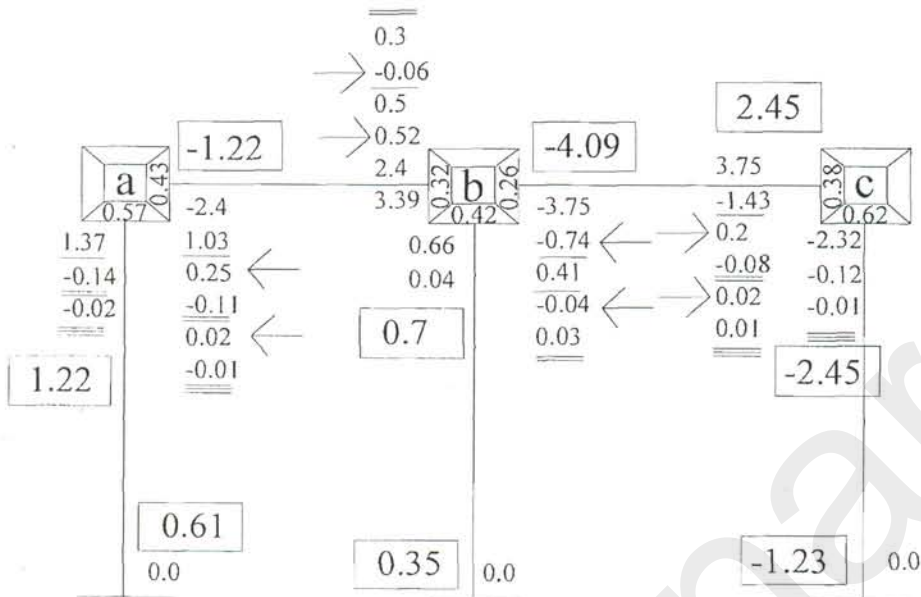
- ضرایب پخش

$$(a) \left. \begin{array}{l} K_{ab} = \frac{1}{4} \\ K_{ad} = \frac{1}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum K = \frac{7}{12} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} r_{ab} = \frac{12}{7} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{7} = 0.43 \\ r_{ad} = \frac{4}{7} = 0.57 \end{array} \right.$$

$$(b) \left. \begin{array}{l} K_{ba} = \frac{1}{4} \\ K_{bc} = \frac{1}{5} \\ K_{bc} = \frac{1}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum K = \frac{47}{60} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} r_{ba} = \frac{60}{47} \times \frac{1}{4} = 0.32 \\ r_{bc} = \frac{60}{47} \times \frac{1}{5} = 0.26 \\ r_{bc} = \frac{60}{47} \times \frac{1}{3} = 0.42 \end{array} \right.$$

$$(a) \left. \begin{matrix} K_{cb} = \frac{1}{5} \\ K_{cf} = \frac{1}{3} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \sum K = \frac{8}{15} \Rightarrow \begin{cases} r_{cb} = \frac{15}{8} \times \frac{1}{5} = 0.38 \\ r_{cf} = \frac{15}{8} \times \frac{1}{3} = 0.62 \end{cases}$$

-مرحله توزیع

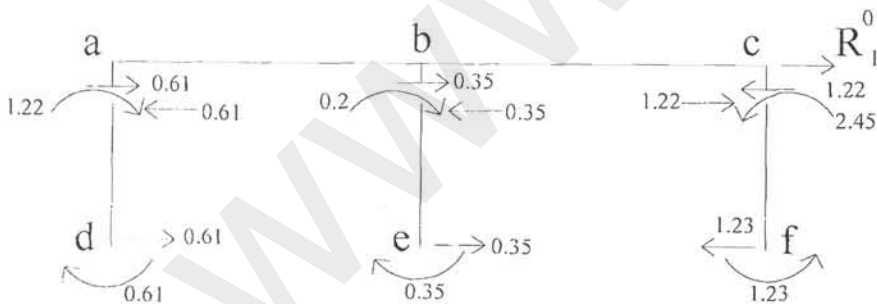


- حل با فرض امکان تغییر مکان جانبی

حل الف- همان حل قبلی است و فقط بایستی نیروی معادل را حساب کرد.

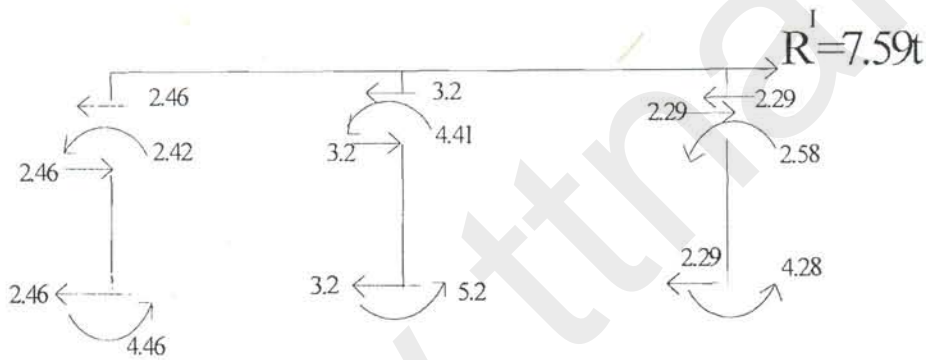
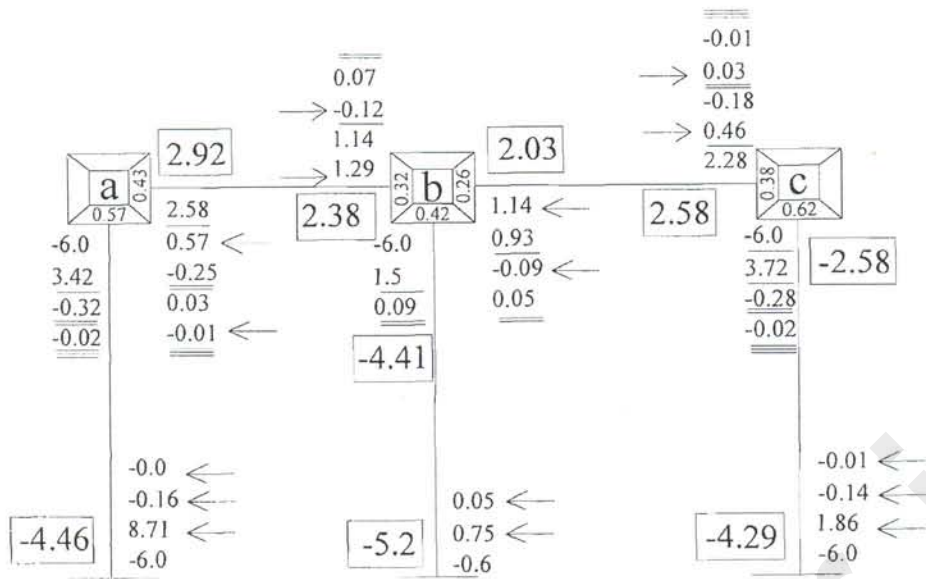
$$R_1^0 + 0.61 + 0.35 - 1.22 = 0$$

$$R_1^0 = 0.26 \text{ t}$$



حل ب- به ازاء $\Delta = \frac{9.0}{EI}$ تغییر مکان به سمت راست در نظر می گیریم.

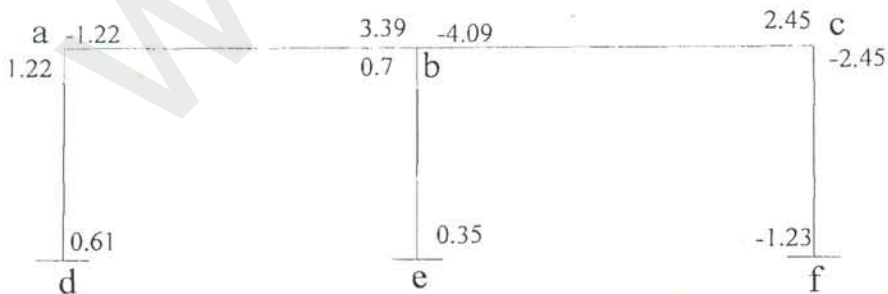
$$M'_{da} = M'_{ad} = M'_{cb} = M'_{bc} = M'_{fe} = M'_{ef} = -\frac{6EI}{(3)^2} \times \frac{9}{EI} = -6.0 \text{ t.m}$$



$$R^0 + \alpha R^1 = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{R^0}{R^1} = -\frac{0.26}{7.95} = -0.0327$$

$$\tilde{F} = \tilde{F}^0 + \alpha \tilde{F}^1$$

$$\Delta = \Delta^0 + \alpha \Delta^1 = -0.327 \times \frac{9}{EI} = -\frac{0.29}{EI}$$



$$M_{da} = 0.61 + (-0.0327 \times -4.46) = 0.76$$

$$M_{ad} = 1.22 + (-0.0327 \times -2.92) = 1.32$$

$$M_{ab} = -1.22 + (-0.0327 \times -2.92) = -1.32$$

$$M_{ba} = 3.39 + (-0.0327 \times 2.38) = 3.31$$

$$M_{bc} = 0.7 + (-0.0327 \times -4.47) = 0.58$$

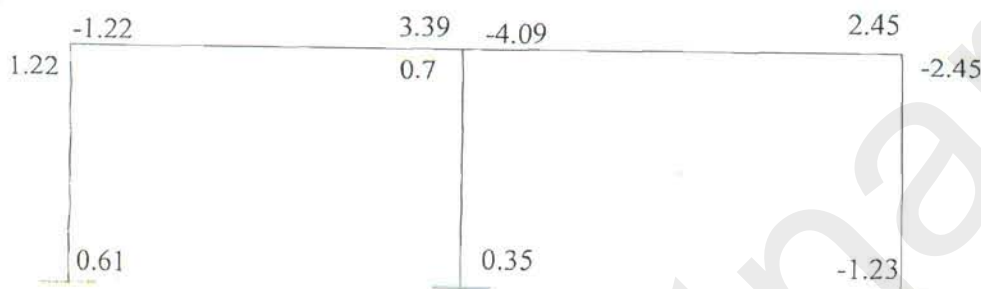
$$M_{eb} = 0.35 + (-0.0327 \times -5.2) = 0.52$$

$$M_{bc} = 2.45 + (-0.0327 \times 2.58) = -4.15$$

$$M_{cb} = 2.45 + (-0.0327 \times 2.58) = 2.37$$

$$M_{cf} = -2.45 + (-0.0327 \times -2.58) = -2.34$$

$$M_{fe} = -1.23 + (-0.0327 \times -4.29) = -1.09$$



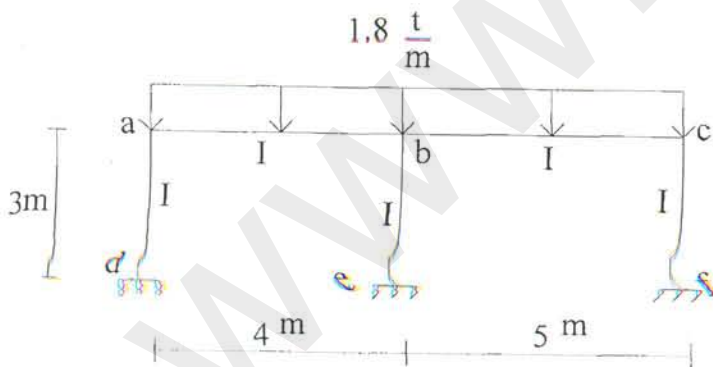
- حل تقریبی

$$\frac{0.76 - 0.61}{0.61} \approx \%25 \text{ (ad)}$$

درصد خطا در پای ستون ad

$$\frac{0.52 - 0.35}{0.35} \approx \%50 \text{ (eb)}$$

درصد خطا در پای ستون ad



۲- حل به روش کانی

$$\begin{cases} M'_{ab} = -M'_{ba} = -2.4 \\ M'_{bc} = -M'_{cb} = -3.75 \end{cases}$$

گام (۱) محاسبه لنگرهای گیرداری

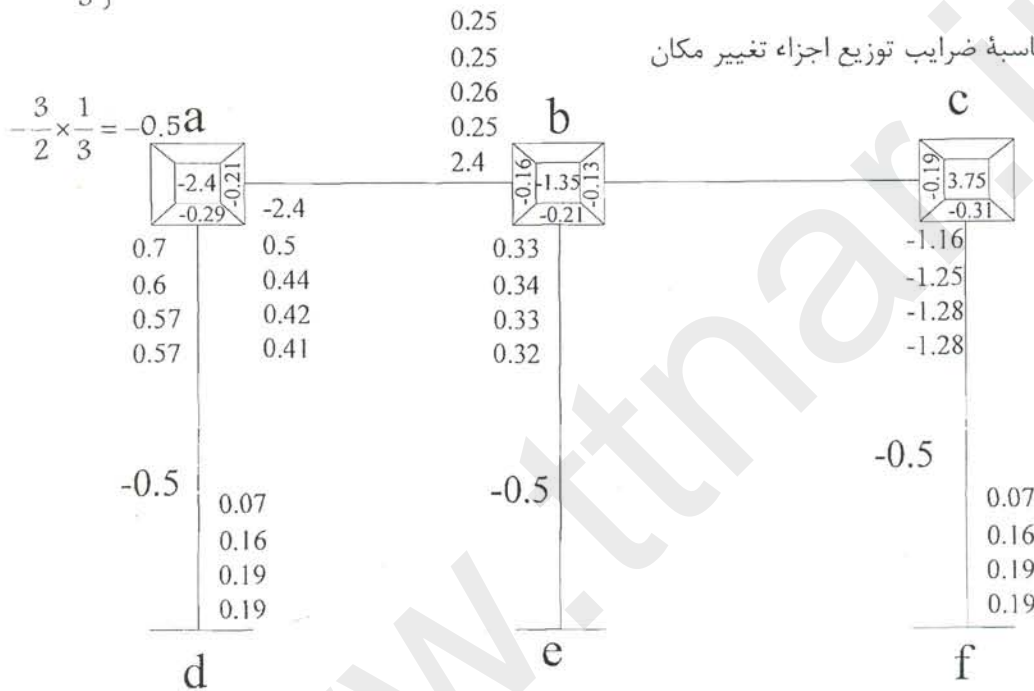
گام (۲) محاسبه ضرایب توزیع اجزاء چرخشها

$$(a) \left. \begin{cases} K_{ab} = \frac{1}{4} \\ K_{ad} = \frac{1}{3} \end{cases} \right\} \Rightarrow \sum K = \frac{7}{12} \Rightarrow \begin{cases} r_{ab} = -\frac{1}{2} \times \frac{12}{7} \times \frac{1}{4} = -0.21 \\ r_{ad} = -\frac{1}{2} \times \frac{12}{7} \times \frac{1}{3} = -0.29 \end{cases}$$

$$(b) \left. \begin{array}{l} K_{ba} = \frac{1}{4} \\ K_{bc} = \frac{1}{5} \\ K_{bc} = \frac{1}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum K = \frac{47}{60} \Rightarrow \begin{cases} r_{ba} = -0.16 \\ r_{bc} = -0.13 \\ r_{bc} = -0.21 \end{cases}$$

$$(c) \left. \begin{array}{l} K_{cb} = \frac{1}{5} \\ K_{cf} = \frac{1}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum K = \frac{8}{15} \Rightarrow \begin{cases} r_{cb} = -0.19 \\ r_{cf} = -0.31 \end{cases}$$

گام ۳) محاسبه ضرایب توزیع اجزاء تغییر مکان



گام ۴) شروع تکرار در گره C

$$\sum M_{ij}^0 = \sum M'_{ij} + \sum \underbrace{M_{ji}^0}_0$$

$$M_{cf}^0 =$$

⋮

⋮

$$\sum M_b = -1.35 - 0.71 + 0.5 = -1.56$$

$$\sum (M_{ij}^0 + M_{ji}^0) = 0.71 + 0.35 - 1.16 = -0.13 \times 0.05 = 0.065$$

دور اول

دور دوم

$$\sum M = \sum M' + \sum (M_{ij}^0 + M_{ji}^0) = 3.75 + 0.2 + 0.07 = 4.02 \quad (c)$$

$$= -2.4 + (0.25 + 0.07) = -2.08 \quad (a)$$

$$= -1.35 + 0.44 + (-0.76) + 0.07 = -1.6 \quad (b)$$

$$\sum (M_{ij}^0 + M_{ji}^0) = 0.6 + 0.34 - 1.25 = -0.31 \quad (M^A)$$

$$M^A = -0.31 \times -0.5 = 0.16$$

دور سوم

$$\sum M = 3.75 + 0.21 + 0.16 = 4.12 \quad (c)$$

$$= -2.4 + 0.26 + 0.16 = -1.98 \quad (a)$$

$$= -1.35 + 0.42 - 0.78 + 0.16 = -1.55 \quad (b)$$

$$\sum (M_{ij}^0 + M_{ji}^0) = 0.57 + 0.33 + 1.28 = -0.38 \quad (M^A)$$

$$-0.38 \times -0.5 = 0.19$$

دور چهارم

$$\sum M = 3.75 + 0.2 + 0.19 = 4.14 \quad (c)$$

$$= -2.4 + 0.25 + 0.19 = -1.96 \quad (a)$$

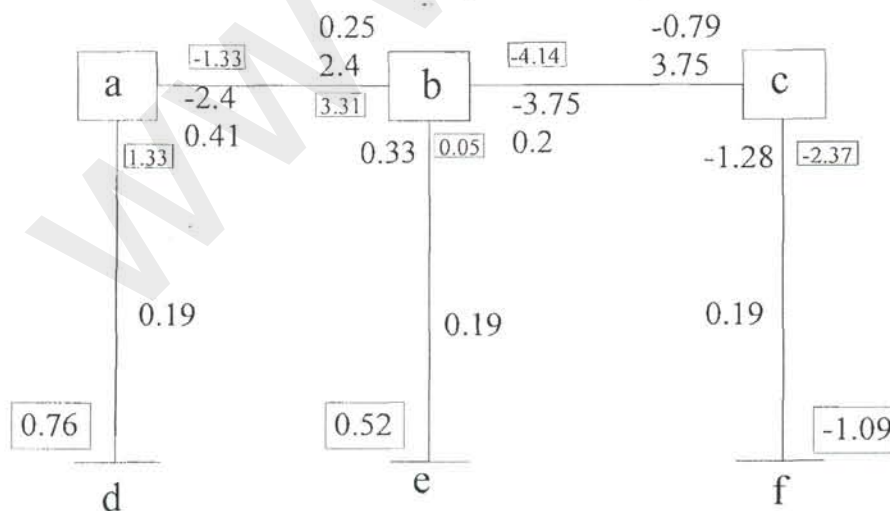
$$= -1.35 + 0.41 - 0.79 + 0.19 = -1.54 \quad (b)$$

$$\sum (M_{ij}^0 + M_{ji}^0) = 0.57 + 0.32 + 1.28 = -0.39 \quad (M^A)$$

$$-0.39 \times -0.5 = 0.19$$

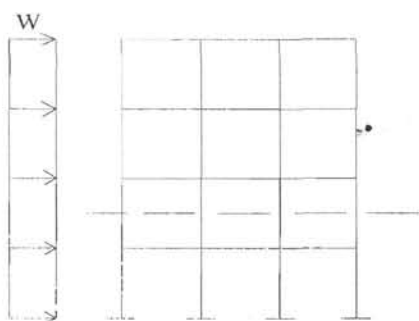
گام ۵) محاسبه لنگرهای انتهایی

$$M_{ij} = M'_{ij} + M_{ij}^0 + (M_{ij}^0 + M_{ji}^0 + M_{ij}^A)$$



$$\begin{aligned}
 M_{da} &= 0.0 + 0.0 + 0.57 + 0.19 = 0.76 \\
 M_{ad} &= 0.0 + 0.57 + 0.0 + 0.19 + 0.07 = 1.33 \\
 M_{ab} &= -2.4 + 0.41 + (0.41 + 0.25) = -1.33 \\
 M_{ba} &= 2.4 + 0.25 + (0.25 + 0.41 + 0.0) = 3.31 \\
 M_{be} &= 0.0 + 0.33 + (0.33 + 0.0 + 0.19) = 0.85 \\
 M_{eb} &= 0.0 + 0.0 + (0.0 + 0.33 + 0.19) = 0.52 \\
 M_{bc} &= -3.75 + 0.2 + (0.2 - 0.79 + 0.0) = -4.14 \\
 M_{cb} &= 3.75 - 0.79 + (-0.79 + 0.2 + 0.0) = 2.37 \\
 M_{cf} &= 0.0 - 1.28 + (-1.28 + 0.0 + 0.198) = -2.37 \\
 M_{fc} &= 0.0 + 0.0 + (0.0 - 1.28 + 0.19) = -1.09
 \end{aligned}$$

۱-۳- روش کانی در تحلیل سازه‌های با بارگذاری افقی و تغییر مکان جانبی



$$\sum V_{ij} = \sum H_s = V_s$$

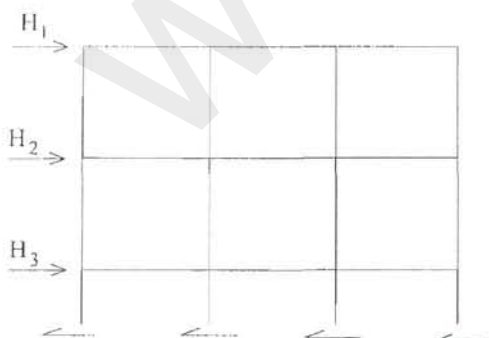
مجموع نیروهای افقی موجود در یک طبقه برابر است با کل نیروهای افقی که در تراز بالای ساختمان اثر می‌کند.

$$V_{ij} = -\frac{M_{ij} + M_{ji}}{h_{ij}} = -\frac{(2M_{ij}^0 + M_{ji}^0 + M_{ij}^\Delta) + (2M_{ji}^0 + M_{ij}^0 + M_{ji}^\Delta)}{h_{ij}}$$

$$\sum V_{ij} = -\sum \frac{[3(M_{ij}^0 + M_{ji}^0) + 2M_{ij}^\Delta]}{h_{ij} = h_s} \quad (I)$$

$$\sum V_{ij} = V_s$$

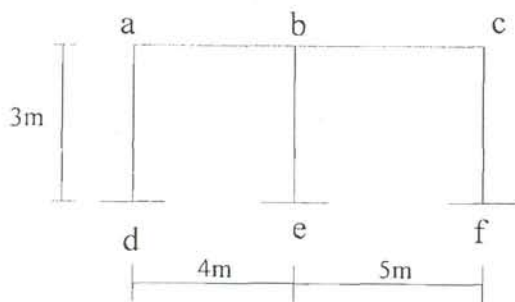
$$V_s h_s = -\sum [3(M_{ij}^0 + M_{ji}^0) + 2M_{ij}^\Delta] \quad (II)$$



از رابطه II می‌توانیم مجموع اجزاء تغییر مکان تمام ستون‌های طبقه را به دست آورد.

$$\sum M_{ij}^\Delta = -\frac{3}{2} \left[\frac{V_s h_s}{3} + \sum (M_{ij}^0 + M_{ji}^0) \right] \quad (III)$$

حاصل ضرب برش هر طبقه در $\frac{h}{3}$ را لنگر طبقه می‌نامیم و با M_s نشان می‌دهیم. از مقایسه این رابطه با رابطه مربوط به بار قائم که بدین صورت می‌باشد $\sum M_{ij}^{\Delta} = -\frac{3}{2} \sum [M_{ij}^0 + M_{ji}^0]$ نتیجه می‌گیریم که جزء تغییر مکان در این حالت نیز مثل حالت بار قائم به دست می‌آید و فقط بایستی مقدار لنگر طبقه را بر مجموعه لنگرهای انتهایی اضافه نمود. حال مثل قبل این مجموعه لنگر را به نسبت سختی ستون‌های این طبقه بین آن‌ها تقسیم می‌کنیم و برای راحتی کار، ضرایب سختی را در $\frac{-3}{2}$ ضرب می‌کنیم تا ضریب سمت راست برابر واحد شود.



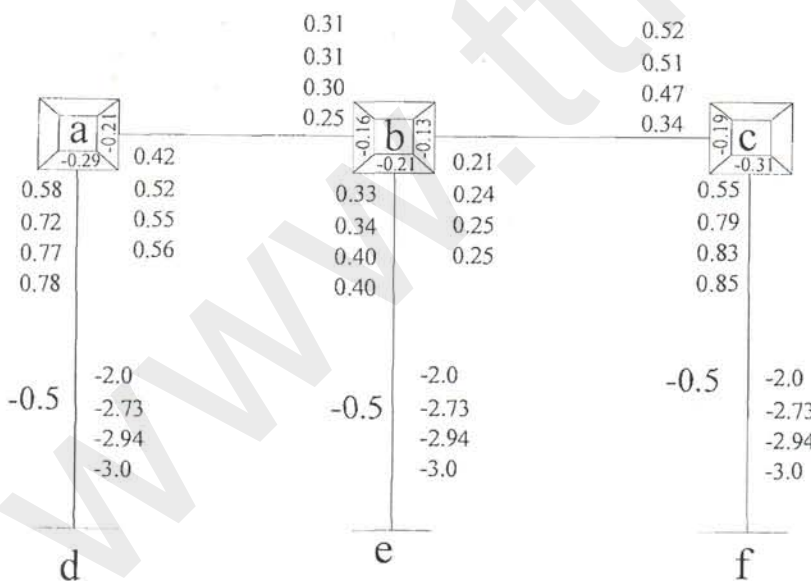
مثال ۱- قاب زیر را با روش کانی تحلیل نمایید.

گام ۱) لنگرهای گیرداری = صفر

گام ۲) محاسبه ضرایب پخش

گام ۳) محاسبه لنگر طبقه

$$H_1 = 4 \quad h_1 = 3 \text{ m} \Rightarrow M_1 = \frac{4 \times 3}{3} = 4$$



گام ۴)

موجود M_r $M^{\Delta} = 0$ $\theta = 0$ دور

تکرار ۱

$$\sum M_{ij}^0 = \sum M'_{ij} + \sum (M_{ij}^0 + M_{ij}^{\Delta})$$

تکرار ۲

$$(a) = 0.0 + \sum(0.0 + (-2.0)) = -2.0 \quad \begin{cases} -0.29 \\ -0.21 \end{cases}$$

$$(b) = 0.0 + \sum(0.0 + (-2.0)) = -2.0 \quad \begin{cases} -0.21 \\ -0.16 \\ -0.13 \end{cases}$$

$$(c) = 0.0 + 0.21 - 2 = -1.79 \quad \begin{cases} -0.31 \\ -0.19 \end{cases}$$

$$\text{ستون ۱} \quad \sum M^{\Delta} = [M_s + \sum(M_{ij}^{\theta} + M_{ji}^{\theta})] \\ = (4 + 0.58 + 0.33 + 0.55) = 5.46$$

$$\text{هر ستون} \quad M^{\Delta} = -2.73$$

تکرار ۳

$$\sum M_{ij} = \sum M'_{ij} + \sum(M_{ji}^{\theta} + M_{ij}^{\Delta})$$

$$(a) = 0.0 + 0.25 - 2.73 = -2.48 \quad \begin{cases} -0.29 \\ -0.21 \end{cases}$$

$$(b) = 0.0 + 0.52 + 0.34 - 2.73 = -1.87 \quad \begin{cases} -0.16 \\ -0.21 \\ -0.13 \end{cases}$$

$$(c) = 0.0 + 0.24 - 2.73 = -2.49 \quad \begin{cases} -0.31 \\ -0.19 \end{cases}$$

$$\sum M^{\Delta} = [4 + (0.72 + 0.39 + 0.77)] = 5.88$$

$$M = -2.94$$

$$\text{هر ستون} \quad M = -2.94$$

تکرار ۴

$$\sum M_{ij} = M'_{ij} + \sum(M_{ji}^{\theta} + M_{ij}^{\Delta})$$

$$(a) = 0.0 + 3 - 2.94 = -2.64$$

$$(b) = 0.0 + 0.55 + 0.47 - 2.94 =$$

$$(c) = 0.0 + 0.25 - 2.94 = -2.69$$

$$\text{جزء لنگر تغییر مکان} \quad \sum M^{\Delta} = [4 + (0.77 + 0.4 + 0.85)] = 6.0$$

$$\text{هر ستون} \quad M = -3.0$$

تکرار ۵

$$(a) \quad \sum M_{ij} = 0.0 + 0.31 - 3 = -2.69$$

$$(b) = 0.0 + 0.56 + 0.51 - 3.0 = -1.93$$

$$(c) = 0.0 + 0.25 - 3 = -2.75$$

$$\sum M^A = [4 + (0.78 + 0.4 + 0.85)] = 6.1$$

$$M = -3.01$$

محاسبه لنگرهای انتهایی

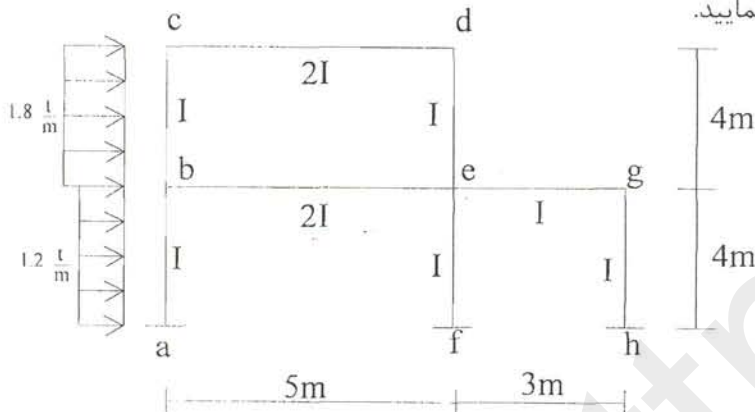
$$\sum M_{ij} = M'_{ij} + M''_{ij} + (M_{ij}^0 + M_{ji}^0 + M_{ij}^A)$$

$$M_{da} = 0.0 + 0.0 + (0.0 + 0.78 - 3) = -2.22$$

$$M_{ad} = 0.0 + 0.78 + (0.78 + 0.0 - 3) = -1.44$$

$$M_{ab} = 0.0 + 0.56 + (0.56 + 0.31 + 0.0) = 1.43$$

مثال ۲- قاب زیر را با روش کانی تحلیل نمایید.



$$\begin{cases} M'_{ab} = -M'_{ba} = -\frac{1.2 \times 16}{12} = -1.6 \text{ t.m} \\ M'_{bc} = -M'_{cb} = -\frac{1.8 \times 16}{12} = -2.4 \text{ t.m} \end{cases}$$

گام (۱) لنگرهای گیرداری

گام (۲) محاسبه ضرایب پخش

$$(d) = (b) \begin{cases} K_{ba} = \frac{1}{4} & r_{ba} = -\frac{1}{2} \times \frac{20}{18} \times \frac{1}{4} = -0.14 \\ K_{bc} = \frac{2}{5} & \sum K = \frac{18}{20} & r_{bc} = -\frac{1}{2} \times \frac{20}{18} \times \frac{2}{5} = -0.22 \\ K_{bc} = \frac{1}{4} & r_{bc} = -0.14 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} K_{cb} = \frac{1}{4} & r_{cb} = -\frac{1}{2} \times \frac{20}{13} \times \frac{1}{4} = -0.19 \\ K_{cd} = \frac{2}{5} & \sum K = \frac{13}{20} & r_{cd} = -\frac{1}{2} \times \frac{20}{13} \times \frac{2}{5} = -0.31 \end{cases}$$

$$(e) \left\{ \begin{array}{l} K_{ed} = \frac{1}{4} \\ K_{cb} = \frac{2}{5} \\ K_{eg} = \frac{1}{3} \\ K_{cf} = \frac{2}{4} \end{array} \right. \quad \sum K = \frac{89}{60}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{ed} = -\frac{1}{2} \times \frac{60}{89} \times \frac{1}{4} = \\ r_{cb} = -\frac{1}{2} \times \frac{60}{89} \times \frac{2}{5} = -0.13 \\ r_{eg} = -\frac{1}{2} \times \frac{60}{89} \times \frac{1}{3} = -0.11 \\ r_{cf} = -\frac{1}{2} \times \frac{60}{89} \times \frac{2}{4} = -0.17 \end{array} \right.$$

$$(g) \left\{ \begin{array}{l} K_{gc} = \frac{1}{3} \\ K_{gh} = \frac{1}{4} \end{array} \right. \quad \sum K = \frac{7}{12}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{gc} = -0.29 \\ r_{gh} = -0.21 \end{array} \right.$$

گام ۳) محاسبه لنگر طبقه

$$\text{طبقه بالا} \left\{ \begin{array}{l} K_{bc} = \frac{1}{4} \\ K_{cd} = \frac{1}{4} \end{array} \right. \Rightarrow \sum K = \frac{1}{2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} r_{bc} = -\frac{3}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = -0.75 \\ r_{cd} = -\frac{3}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = -0.75 \end{array} \right.$$

$$\text{طبقه پایین} \left\{ \begin{array}{l} K_{ba} = \frac{1}{4} \\ K_{cf} = \frac{2}{4} \\ K_{gh} = \frac{1}{4} \end{array} \right. \Rightarrow \sum K = 1.0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} r_{bc} = -\frac{2}{3} \times 1 \times \frac{1}{4} = -0.375 \\ r_{cd} = -\frac{2}{3} \times 1 \times \frac{2}{4} = -0.75 \\ r_{gh} = -\frac{2}{3} \times 1 \times \frac{1}{4} = -0.375 \end{array} \right.$$

$$\leftarrow (1.8 \times 4) / 2 = 3.6$$

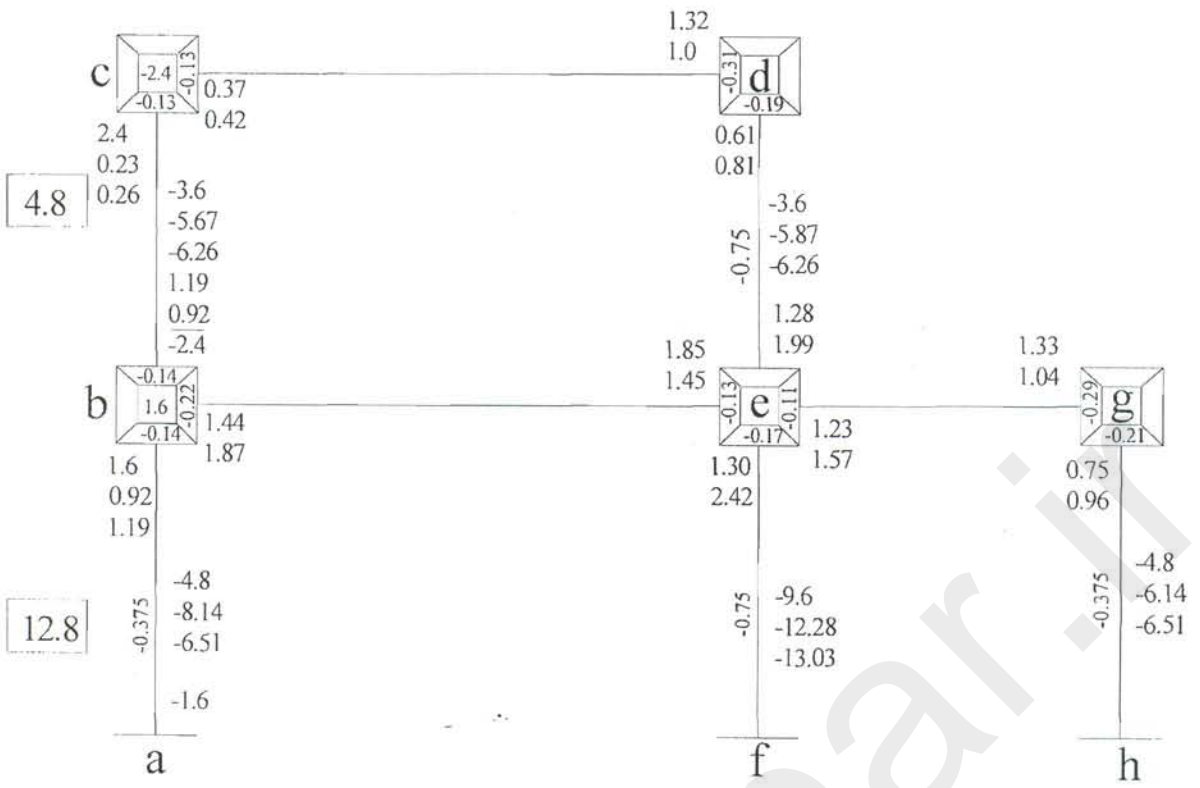
$$\leftarrow 3.6 \quad \leftarrow 2.4$$

$$\leftarrow (1.2 \times 4) / 2 = 2.4$$

$$M_1 = \frac{3.6 \times 4}{3} = 3.6$$

$$M_2 = \frac{9.6 \times 4}{3} = 12.8$$

لنگر طبقه بالا



4.8

12.8

تکرار ۱

$$\sum M_{ij} = \sum M'_{ij} + \sum (M_{ij}^0 + M_{ij}^A), \quad \sum M_{ij}^A = M_s + \sum (M_{ij}^0 + M_{ij}^A)$$

$$(c) = 2.4 - 3.6 = -1.2 \quad \begin{cases} -0.19 \\ -0.13 \end{cases}$$

$$(b) = 1.6 + 0.23 - 3.6 - 4.8 = -6.57 \quad \begin{cases} -0.19 \\ -0.22 \\ -0.14 \end{cases}$$

$$(d) = 0.0 + 0.37 + (-3.6) = -3.23$$

$$(e) = 0.0 + 1.44 + 0.61 - 4.8 - 3.6 = -11.15$$

$$(g) = 0.0 + 1.23 - 4.8 = -3.57$$

$$\sum M^A \text{ طبقه بالا} = 4.8 + 0.23 + 0.92 + 0.61 + 1.0 = 7.56$$

$$\sum M^A \text{ طبقه پایین} = 12.8 + 0.92 + 1.9 + 0.75 = 16.37$$

سهم هر ستون طبقه بالا = -5.67 و سهم هر ستون طبقه پایین = -12.28

تکرار ۲

$$\sum M_{ij}^0 = \sum M'_{ij} + \sum (M_{ij}^0 + M_{ij}^A)$$

$$(c) = 2.4 - 5.67 + 0.92 + 1.0 = -1.35$$

$$(b) = 1.6 + 0.26 + 1.45 - 5.67 - 6.14 = -8.5$$

$$(d) = 0.0 + 0.42 + 1 - 5.67 = -4.25$$

$$(e) = 0.0 + 0.81 + 1.87 + 1.04 - 5.67 - 12.28 = -14.23$$

$$(g) = 0.0 + 1.57 - 6.14 = -4.57$$

$$\sum M^{\Delta} = 4.8 + 0.26 + 1.19 + 0.81 + 1.18 = 8.24$$

$$\sum M^{\Delta} = 12.8 + 1.19 + 2.41 + 0.96 = 17.37$$

سهام هر ستون طبقه بالا = -6.26

سهام هر ستون کناری طبقه پایین = -6.51

سهام هر ستون وسطی طبقه پایین = -13.03

دیدیم که پس از تعیین لنگرهای گیرداری و ضرایب پخش گره‌ها و ضرایب پخش ستون‌ها و نیز محاسبه لنگرهای طبقه عملیات محاسبات شروع می‌شود. این فرمول‌ها برای حل مسائل می‌باشند:

$$\sum M_{ij}^{\theta} = \sum M'_{ij} + \sum (M_{ij}^{\theta} + M_{ji}^{\theta}) \quad (I)$$

$$\sum M_{ij}^{\Delta} = [M_s + \sum (M_{ij}^{\theta} + M_{ji}^{\theta})] \quad (II)$$

$$M_s = \frac{V_s h_s}{3}$$

در قاب‌های دارای حرکت جانبی با بارگذاری افقی روش حل به شرح زیر است:

۱- تعیین لنگرهای گیرداری

۲- تعیین ضرایب پخش گره‌ها

۳- تعیین ضرایب پخش ستون‌ها

۴- تعیین لنگر طبقات

۵- شروع تقریب برای به دست آوردن چرخش نزدیک از فرمول I (با استفاده از M^{Δ} که فقط مربوط به M_s می‌باشد- در تکرار اول)

۶- پس از اتمام این تقریب M^{Δ} حساب می‌شود و دوباره تکرار می‌شود الی آخر

۷- محاسبه لنگر نهایی از فرمول

$$M_{ij} = M'_{ij} + M_{ij}^{\theta} + (M_{ij}^{\theta} + M_{ji}^{\theta} + M_{ij}^{\Delta})$$

۴-۱- نکات در مورد ستون‌های طبقه اول

۱- اگر تمام ستون‌های طبقه اول مفصلی باشد و طول آن‌ها نامساوی باشد، می‌توان ستون‌های مفصلی را به ستون‌های گیردار با سختی معادل $K' = \frac{3}{4}K$ تبدیل نمود. ضرایب تغییرمکان به جای $\frac{-3}{2}$ از تقسیم ۲- به نسبت سختی ستون‌ها به دست می‌آید.

۲- چنان که در یک طبقه طول ستون‌ها نامساوی باشد (معمولاً طبقه زیرزمین) یک طول ستون به عنوان طول مبنا انتخاب می‌شود (h_s)

(از نظر نامساوی بودن Δ ها ممکن است این اتفاق در طبقات بالا رخ دهد.)

و نسبت $\gamma_{ij} = \frac{h_s}{h_{ij}}$ که به نام ضریب کاهش یا اصلاح نامیده می‌شود.

$$V_s = \sum V_{ij} = -\frac{1}{h_{ij}} \sum (3M_{ij}^0 + 3M_{ji}^0 + 2M_{ij}^\Delta)$$

$$V_s \frac{h_s}{3} = -\frac{h_s}{h_{ij}} \left(\sum (M_{ij}^0 + M_{ji}^0) + \frac{2}{3} \sum M_{ij}^\Delta \right) \quad \text{طرفین را ضرب در } \frac{h_s}{3} \text{ می‌کنیم}$$

$$\sum M_{ij}^\Delta \frac{h_s}{h_{ij}} = -\frac{3}{2} \left[\frac{V_s h_s}{3} + \sum (M_{ij}^0 + M_{ji}^0) \frac{h_s}{h_{ij}} \right] \quad \text{و از این جا}$$

$$V_s \frac{h_s}{h_{ij}} = M_s, \quad \frac{h_s}{h_{ij}} = \gamma_{ij} \quad \text{و چون}$$

$$\sum \gamma_{ij} M_{ij}^\Delta = -\frac{3}{2} [M_s + \sum \gamma_{ij} (M_{ij}^0 + M_{ji}^0)]$$

مقدار سهم هر ستون متناسب با $\frac{K_{ij}}{h_{ij}}$ یا $\gamma_{ij} K_{ij}$ می‌باشد و از تقسیم مجموع لنگر Δ به نسبت $\gamma_{ij} K_{ij}$ بین تمام

ستون‌ها مقدار سهم هر ستون از رابطه $M_{ij}^\Delta = \sum \gamma_{ij} M_{ij}^\Delta \times \frac{\gamma_{ij} K_{ij}}{\sum \gamma_{ij}^2 K_{ij}}$ به دست می‌آید.

و از آجا ضرائب جزء لنگر تغییر مکان برای ستون‌ها به شرح زیر حساب می‌شود.

$$v_{ij} = -\frac{3}{2} \times \frac{\gamma_{ij} K_{ij}}{\sum \gamma_{ij}^2 K_{ij}}$$

و رابطه به شرح زیر می‌باشد.

$$M_{ij}^\Delta = v_{ij} [M_s + \sum \gamma_{ij} (M_{ij}^0 + M_{ji}^0)]$$

$$\sum \gamma_{ij} v_{ij} = -\frac{3}{2} \quad \text{- کنترل ضریب از رابطه}$$

۳- حالت کلی: برخی ستون‌ها مفصلی برخی گیردار، طول نامساوی

الف- ستون‌های مفصلی با ستون‌های گیردار دارای ضرائب سختی $K' = \frac{3}{4} K$ و طول $h' = \frac{3}{2} h$ جایگزین می‌شوند.

$$v_{ij} = -\left(\frac{3M_{ij}^0}{h'_{ij}} + m \frac{2M_{ij}^\Delta}{h'_{ij}} \right) \quad \text{ب- نیروی برشی ستون‌ها در این حال برابر خواهد بود با}$$

معرفی ضریب m : (مفصلی $m = \frac{3}{4}$ و گیردار $m = 1$)

ج- ضرائب پخش برای لنگر انتقالی از رابطه زیر حساب می‌شوند.

$$v_{ij} = \frac{-\frac{3}{2} v_{ij} K'_{ij}}{\sum m \gamma_{ij}^2 K'_{ij}}$$

$$\sum m \gamma_{ij} v_{ij} = -\frac{3}{2}$$

$$\sum \gamma_{ij} v_{ij} = -2$$

د- کنترل محاسبات ضرایب پخش
ه- اگر تمام ستون‌ها مفصلی باشند، برای همه آن‌ها $m = \frac{3}{4}$ بوده و داریم:

روی یک قاب مشابه قاب مورد نظر فقط:

۱- لنگرهای گیرداری + ضرایب توزیع گره و ستون‌ها + لنگر طبقه +

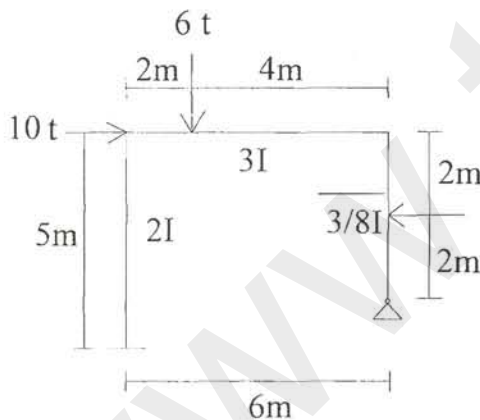
۲- جزء لنگر چرخش نزدیک عضو

۳- روی ستون- در وسط آن جزء لنگر انتقال

۴- مجموع اجزاء لنگر (چرخش نزدیک + چرخش دور + انتقال) در گره

۵- بهتر است زیر لنگر گیرداری را خط بکشیم یا با رنگ دیگر نشان دهیم.

۶- لنگر گیرداری در مورد اعضاء مفصلی، از روابط مربوطه به دست می‌آید.



مثال - قاب شکل مقابل را تحلیل کنید.

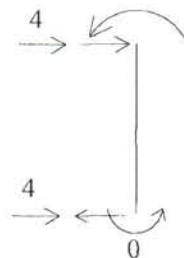
۱) لنگر گیرداری

$$M'_{ab} = 0$$

$$M'_{bc} = -\frac{6 \times 2 \times 4^2}{6^2} = -5.33$$

$$M'_{cb} = \frac{6 \times 2^2 \times 4}{6^2} = 2.67$$

$$M'_{cd} = -\frac{4 \times 1^2 \times 3}{4^2} - \frac{1}{2} \times \frac{4 \times 1 \times 3^2}{4^2} = -1.875$$



۲) لنگر و نیروی طبقه

$$H_1 = -4 + \frac{-1.875}{4} = -4.47$$

$$V_s = 10.0 - 4.47 = 5.53 \text{ t}$$

ارتفاع معادل $h_{ab} = 5.0$ ، $h_{dc} = \frac{3}{2} \times 4.0 = 6.0 \text{ m} \Rightarrow h_s = 6.0$

طبقه $M_s = \frac{5.53 \times 6}{3} = 11.06 \text{ t.m}$

(۳) ضرائب دوران

$K_{ab} = \frac{2}{5} = 0.4$ $r_{ab} = -0.22$

$K_{bc} = \frac{3}{6} = 0.5$ $r_{bc} = -0.28$

$K_{bc} = \frac{1}{2} = 0.5$ $r_{ab} = -0.25$

$K'_{cd} = \frac{3}{4} \times \frac{8}{3} \times \frac{1}{4} = 0.5$ $r_{ab} = -0.25$

(۴) ضرائب انتقال

$$v_{ij} = -\frac{3}{2} + \frac{\gamma_{ij} K'_{ij}}{\sum m \gamma_{ij}^2 K'_{ij}}$$

(ab) $\gamma_{ab} = \frac{h_s}{h_{ab}} = \frac{6}{5} = 1.2$ $K_{ab} = \frac{2}{5}$, $m = 1$

(cd) $\gamma_{cd} = 1.0$ $K'_{cd} = \frac{1}{2}$, $m = \frac{3}{4}$

$\sum m \gamma_{ij}^2 K'_{ij} = 1 \times 1.2^2 \times 0.4 + \frac{3}{4} \times 1^2 \times \frac{1}{2} = 0.951$

$v_{ab} = -\frac{3}{2} \times \frac{1.2 \times 0.4}{0.951} = -0.76$

$v_{cd} = -\frac{3}{2} \times \frac{1.0 \times 0.5}{0.951} = -0.76$

کنترل $\sum m \gamma_{ij} v_{ij} = -\frac{3}{2}$

فصل پنجم

روش‌های تقریبی تحلیل سازه‌ها

Approximate Methods

www.ttnar.ir

✓ فهرست مطالب

- ۱- روش‌های تقریبی تحلیل سازه‌های نامعین ۱۴۱
- ۱-۱- روش پرتال ۱۴۱
- ۱-۱-۱- روش حل ۱۴۱
- ۱-۱-۲- مثالی از روش پرتال ۱۴۲
- ۲-۱- روش طره ۱۴۳
- ۲-۱-۱- روش حل ۱۴۳
- ۲-۲-۱- مثالی از روش طره ۱۴۴
- ۳-۱- روش بومن ۱۴۵
- ۳-۱-۱- مثالی از روش بومن ۱۴۷
- ۴-۱- روش فاکتور ۱۵۰
- ۴-۱-۱- مثالی از روش فاکتور ۱۵۱

۱- روش‌های تقریبی تحلیل سازه‌های نامعین

به‌واسطهٔ پرکار و وقت‌گیر بودن تحلیل سازه‌های نامعین و همچنین نیاز به مشخص بودن سطح مقطع و ممان اینرسی اعضاء در شروع تحلیل، با استفاده از روش‌های تقریبی و مفروضات منطقی که خطاهای حاصل از آن‌ها ناچیز و عرف مسائل مهندسی قابل قبول باشد، می‌توان تحلیل سازه‌های نامعین را با استفاده از اصول ایستایی (استاتیک) میسر نمود.

یکی از قسمت‌های تحلیل که همیشه وقت زیادی از محاسبهٔ یک ساختمان را به خود اختصاص می‌دهد، تحلیل قاب ساختمانی چند طبقه در مقابل بارهای جانبی (باد و زلزله) می‌باشد. بدین منظور برای کاستن از وقت صرف شده برای محاسبات و پیدا کردن مشخصات هندسی اولیه معقول برای استفاده در تحلیل دقیق، روش‌های تقریبی متعددی برای تحلیل تقریبی قاب‌ها در مقابل بار جانبی ارائه می‌شود که در این بخش روش‌های «پرتال، طره‌ای، بومن و فاکتور» از روش‌های متداول در تحلیل تقریبی قاب‌ها در مقابل بارهای جانبی ارائه می‌شود.

۱-۱- روش پرتال

اساس روش پرتال متکی بر سه فرض زیر می‌باشد:

- ۱- نقطهٔ عطف تیر در وسط دهانه قرار دارد.
- ۲- نقطهٔ عطف ستون در وسط ارتفاع قرار دارد.
- ۳- نیروی برشی طبقه به نسبت مشخصی بین ستون‌های آن طبقه تقسیم می‌شود.

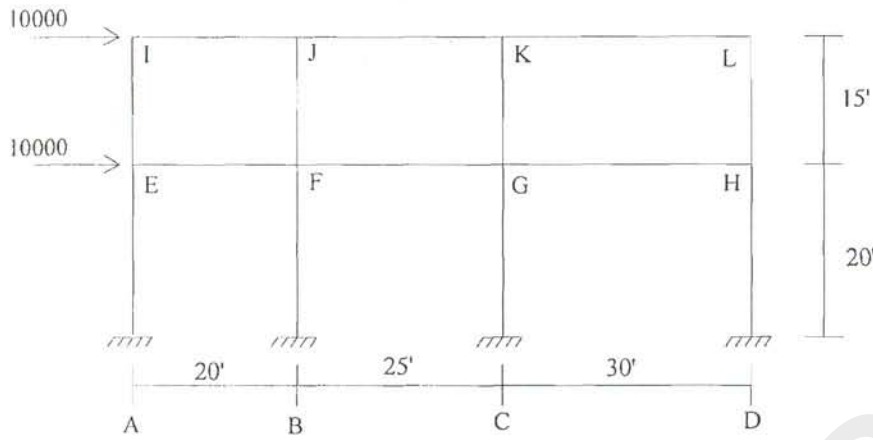
۱-۱-۱- روش حل

در روش پرتال، مراحل حل به صورت زیر می‌باشد:

- ۱- نیروی برشی هر طبقه را به دست می‌آوریم.
- ۲- برش را به نسبت دهانهٔ بارگیر بین ستون‌ها تقسیم می‌کنیم.
- ۳- لنگر سر ستون‌ها را از ضرب برش در نصف ارتفاع ستون به دست می‌آوریم.
- ۴- لنگر تیرها از تساوی لنگر کل بین تیر و ستون به دست می‌آید.
- ۵- برش تیر از تقسیم لنگر تیر بر نصف دهانهٔ تیر به دست می‌آید.
- ۶- نیروی محوری ستون‌ها از برش تیرهای متصل به آن‌ها به دست می‌آید.
- ۷- محاسبات از سمت چپ و بالا شروع می‌شود و بار را معمولاً از چپ به راست اعمال می‌کنیم.

۱-۱-۲- مثالی از روش پرتال

قاب شکل زیر را به روش پرتال حل کنید.



- طبقه بالا

برش طبقه = 10000

سطح بارگیر ستون اول = 10'

سطح بارگیر کل طبقه =

$$\frac{10}{20 + 25 + 30} \times 10000 = 1333$$

$$\frac{22.5}{75} \times 10000 = 3000$$

$$\frac{12.5 + 15}{75} \times 10000 = 3666$$

$$\frac{15}{75} \times 10000 = 2000$$

= ستون دوم

= ستون سوم

= ستون چهارم

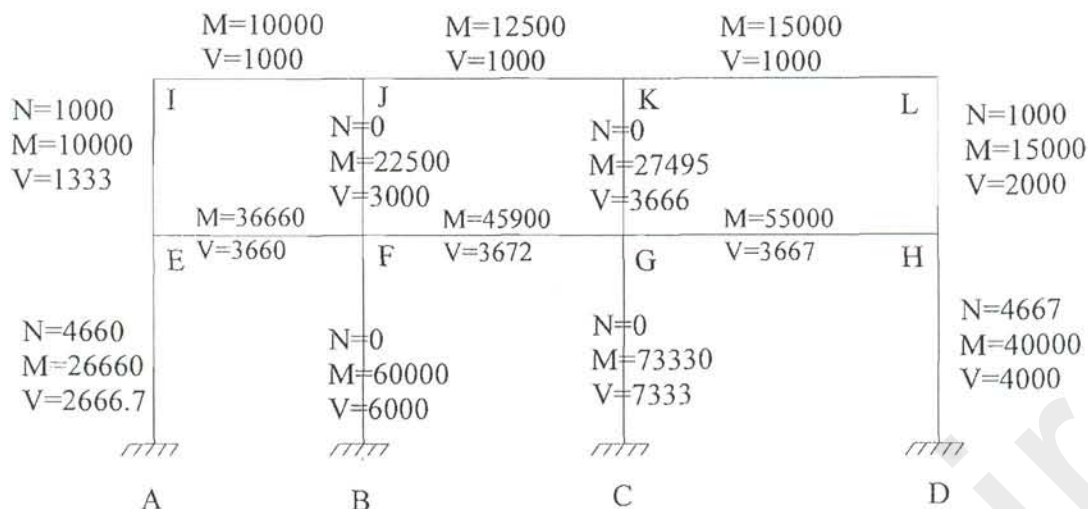
- طبقه پایین

$$\left\{ \frac{10}{75} \times 20000 = 2666.7 \right.$$

$$\left. \frac{22.5}{75} \times 20000 = 6000 \right.$$

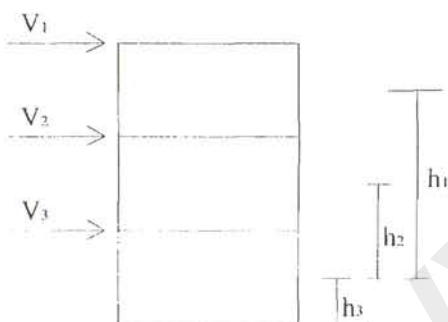
$$\left. \frac{12.5 + 15}{75} \times 20000 = 7333 \right.$$

$$\left. \frac{15}{75} \times 20000 = 4000 \right.$$



۱-۲- روش طرح

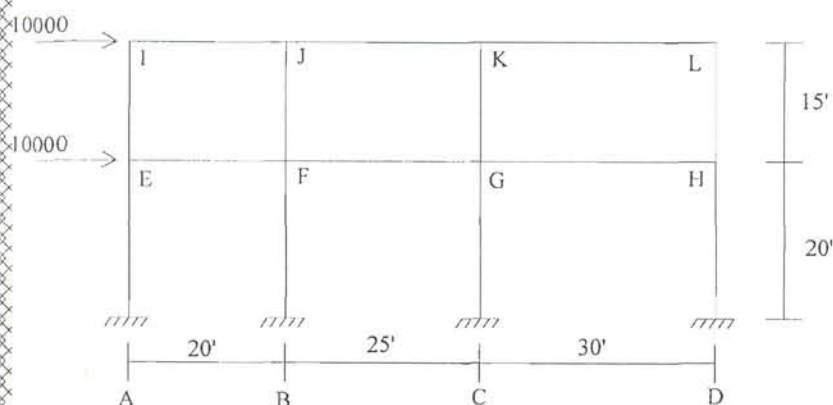
در این روش نیز مثل روش پرتال نقاط عطف تیرها و ستون‌ها در وسط دهانه و ارتفاع در نظر گرفته می‌شود که در آن در هر تار موازی تار خنثی، تنش از رابطه $\sigma = \frac{MV}{I}$ به دست می‌آید، این تنش نیروی محوری است (در صورتی که سطح مقطع ستون واحد فرض شود).



۱-۲-۱- روش حل

- ۱- محل تار خنثی محاسبه می‌شود.
- ۲- ممان اینرسی مقطع سازه (قاب) نسبت به تار خنثی تعیین می‌شود.
- ۳- نیروی برشی و لنگر خمشی هر طبقه تعیین شده و در کنار قاب نوشته می‌شود. لنگر خمشی هر طبقه از حاصلضرب کلیه نیروهای بالاتر و خود آن طبقه در فاصله آن‌ها تا وسط ستون‌های آن طبقه به دست می‌آید.
- ۴- نیروی محوری ستون‌ها از رابطه حساب می‌شود، نیروی کششی را با علامت مثبت و نیروی فشاری را با علامت منفی نشان می‌دهیم.
- ۵- از دیگرام آزاد اعضاء با شروع از سمت چپ و بالا نیروهای برشی ستون‌ها به دست می‌آید.
- ۶- لنگر انتهای تیرها از حاصلضرب برش تیرها در نصف دهانه به دست می‌آید.
- ۷- لنگر انتهای ستون‌ها از تعادل گره‌ها محاسبه می‌شود.
- ۸- نیروی برشی ستون‌ها حساب می‌شوند (از تقسیم لنگر ستون بر نصف ارتفاع)* برای مواقعی که سازه منظم و نسبت ارتفاع به پایه حداقل ۵ باشد.

۱-۲-۲- مثالی از روش طره



قاب زیر را به روش طره تحلیل کنید.

گام ۱- به دست آوردن محل تار خنثی

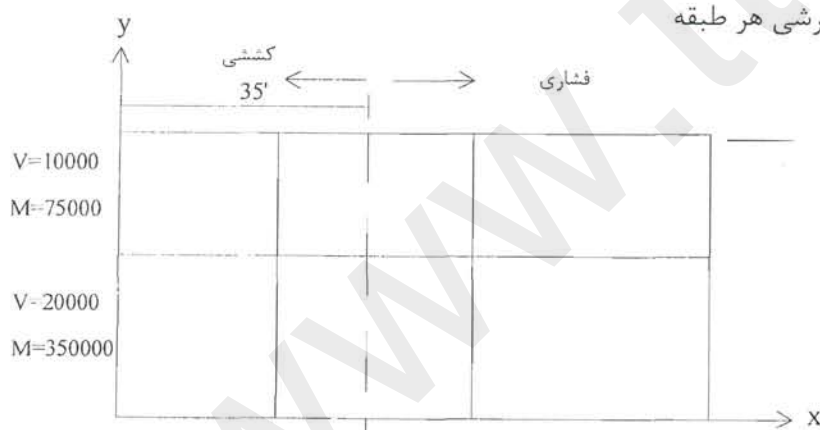
$$\bar{x} = \frac{\sum A_i x_i}{\sum A_i}, \quad A = 1 \text{ ستون ها}$$

$$\bar{x} = \frac{1 \times 0 + 1 \times 20 + 1 \times 45 + 1 \times 75}{1 + 1 + 1} = 35$$

گام ۲- ممان اینرسی کل

$$I = \sum Ad^2 = 1 \times 35^2 + 1 \times 15^2 + 1 \times 40^2 = 3050$$

گام ۳- به دست آوردن لنگر و نیروی برشی هر طبقه



گام ۴- به دست آوردن نیروی محوری ستون ها

$$p_1 = \frac{My}{I} = \frac{75000 \times 35}{3150} = 833$$

$$p_2 = \frac{75000 \times (35 - 20)}{3150} = 357$$

$$p_3 = \frac{75000 \times (45 - 35)}{3150} = -2380$$

$$p_4 = \frac{75000 \times (75 - 35)}{3150} = -952$$

- طبقه بالا

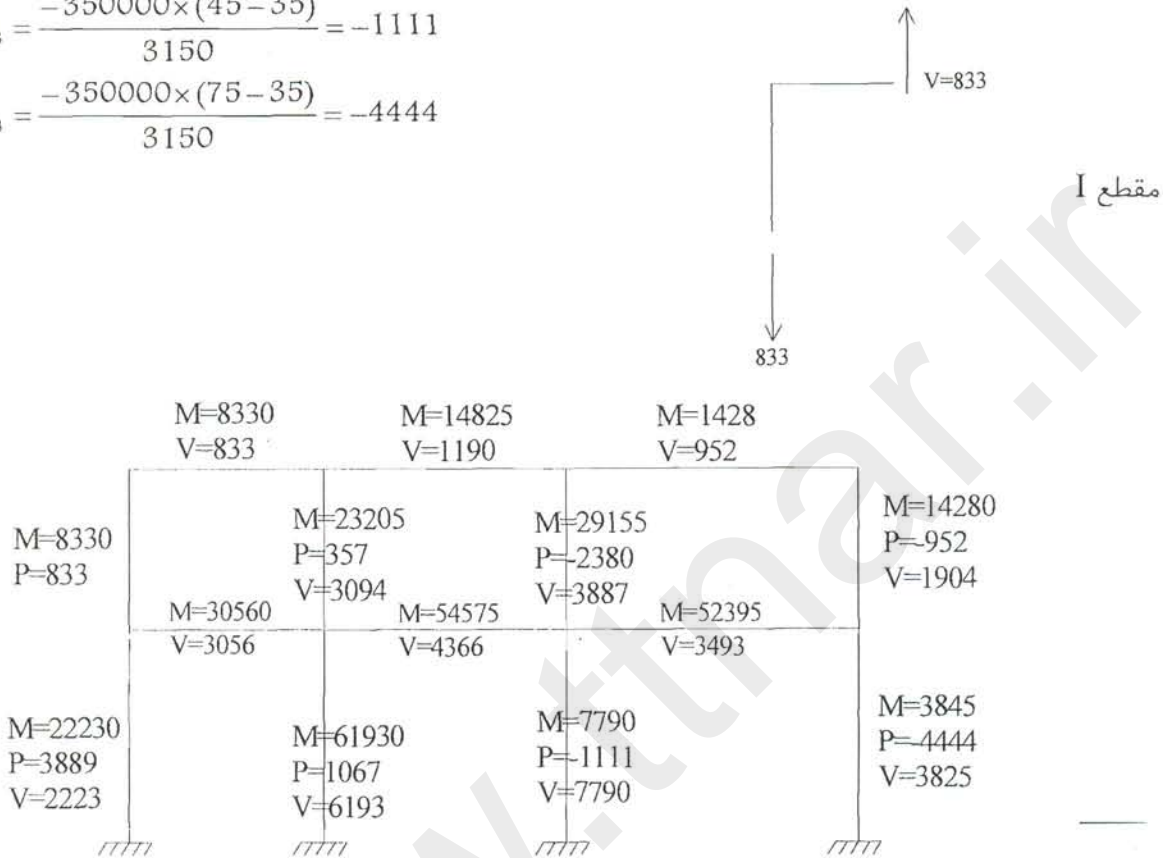
- طبقه پایین

$$p_1 = \frac{350000 \times 35}{3150} = 3889$$

$$p_2 = \frac{350000 \times (35 - 20)}{3150} = 1667$$

$$p_3 = \frac{-350000 \times (45 - 35)}{3150} = -1111$$

$$p_4 = \frac{-350000 \times (75 - 35)}{3150} = -4444$$



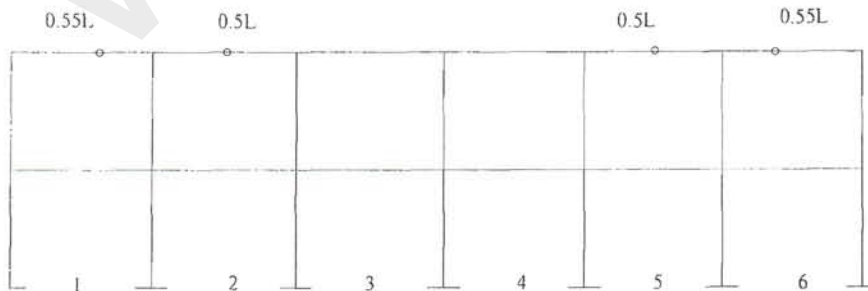
۱-۳- روش بومن

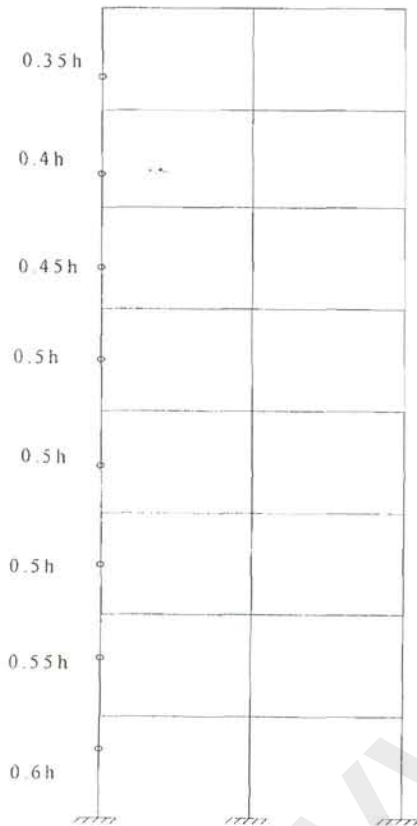
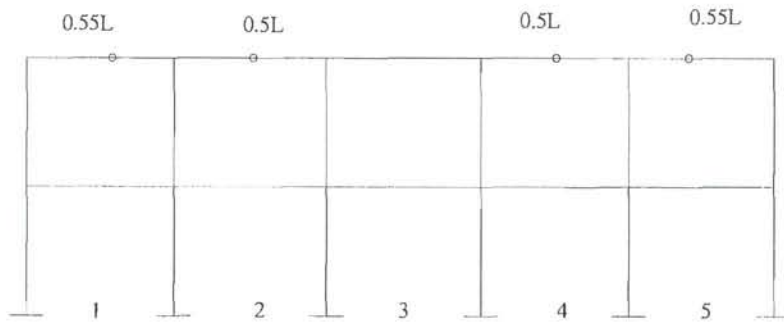
فرضیات روش بومن به شرح زیر می باشند:

۱- محل نقطه عطف در در تمام تیرهای خارجی ۰/۵۵ از انتهای بیرونی است.

در سایر تیرها غیر از دهانه میانی در قابهایی که تعداد دهانهها فرد است یا دو دهانه میانی در قابهایی که

تعداد دهانهها زوج است، نقطه عطف در وسط دهانه تشکیل می شود.





$$V = V_1 + V_2$$

$$V_1 = \alpha V_t$$

$$\alpha = \frac{(\frac{1}{2} - \text{تعداد دهانه‌ها})}{(\text{تعداد ستون‌ها})}$$

$$\alpha = \frac{(2 - \text{تعداد دهانه‌ها})}{(\text{تعداد ستون‌ها})}$$

۲- نقطه عطف ستون‌ها

(a) در ستون‌های طبقه پایین $0.16h$ از پایین.

(b) در ستون‌های طبقه آخر $0.35h$ از پایین.

(c) در ستون‌های یکی مانده به آخر $0.4h$ از پایین.

(d) در ستون‌های دو تا مانده به آخر $0.45h$ از پایین.

(e) در ستون‌های طبقه بعد از همکف در حالت ۶ طبقه

بیشتر $0.55h$ از پایین.

یعنی در واقع طبقه اول و آخر را می‌گذاریم، سپس از پایین می‌آییم و بعد از این که حداقل ۱ طبقه به ارتفاع a و h عطف داشتیم و هنوز یک طبقه دیگر تا زیرزمین فاصله داشتیم این طبقه را $0.55h$ می‌گیریم تا بعد به $0.16h$ برسیم.

۳- نیروی برشی هر طبقه به دو بخش تقسیم می‌شود:

V_1 به نسبت مساوی بین ستون‌ها تقسیم می‌شود.

V_2 به نسبت عکس دهانه (مثل پرتال)

طریقه به دست آوردن V_1 و V_2 مطابق زیر است:

(الف) در طبقه زیرین

(ب) در طبقات بالا

۴- لنگر دو انتهای ستون از حاصلضرب برش ستون در بازوی مربوطه‌اش (برش‌ها در نقطه عطف) به دست می‌آید.

۵- لنگر تیرها:

الف) لنگر تیرهای خارجی در گره خارجی (از تعادل گره)

ب) لنگر تیرهای خارجی در گره داخلی ($\frac{9}{11}$ بند الف)

ج) لنگر تیرهای داخلی از تعادل گره‌ها

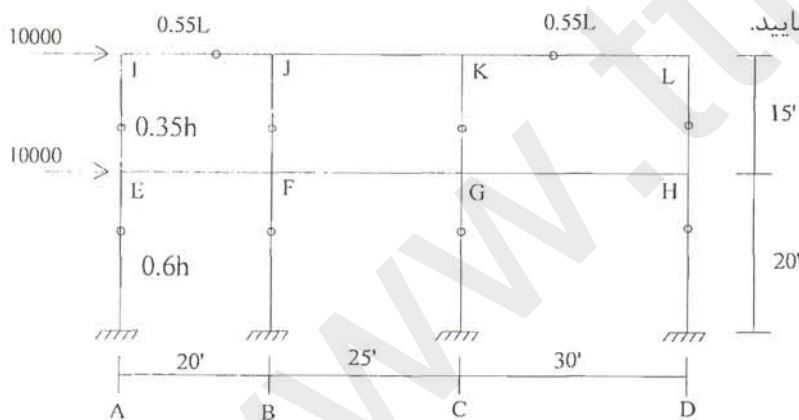
لنگرهای دو سر از بند ج معلوم است و لنگر ستون‌ها را به نسبت $\frac{I}{\ell}$ تقسیم می‌کنیم و سپس با داشتن لنگر هر دو انتها، نقطه عطف به دست می‌آید. در حالت تک‌دهانه لنگرهای دو طرف از ج به دست می‌آید و سپس نقطه عطف مشخص می‌شود.

۶- تعیین برش در تیرها: برش از تقسیم لنگر بر فاصله به دست می‌آید.

۷- نیروی محوری ستون‌ها از برش تیرها به دست می‌آید.

۱-۳-۱- مثالی از روش بومن

قالب شکل زیر به روش بومن تحلیل نمایید.



گام ۱- به دست آوردن نقاط عطف ستون‌ها و تیرها

ستون‌ها در طبقه دوم $0.35h$ از پایین، ستون‌ها در طبقه اول $0.6h$ از پایین، تیرهای خارجی $0.55l$ و تیرهای داخلی از تعادل به دست می‌آیند.

گام ۲- به دست آوردن نیروی برشی ستون‌ها

طبقه دوم:

$$V = 10000 \text{ کل}$$

$$\alpha = \frac{\left(\frac{1}{2} - \text{تعداد دهانه‌ها}\right)}{\text{تعداد ستون‌ها}}$$

$$\alpha = \frac{3-2}{4} = \frac{1}{4}$$

$$V_1 = \alpha V = \frac{1}{4} \times 10000 = 2500$$

V_1 به نسبت مساوی بین ستون‌ها تقسیم می‌شود

$$V_2 = V - V_1 = 10000 - 2500 = 7500$$

V_2 به نسبت دهانه‌های بارگیر تقسیم می‌شود.

$$V_{IE} = \frac{V_1}{4} + \frac{10}{75} \times V_2 = 1625 \quad V_{JF} = \frac{V_1}{4} + \frac{22.5}{75} \times V_2 = 2875$$

$$V_{KG} = \frac{V_1}{4} + \frac{27.5}{75} \times V_2 = 3375 \quad V_{LH} = \frac{V_1}{4} + \frac{15}{75} \times V_2 = 2125$$

طبقه اول:

$$V = 10000 + 10000 = 20000$$

$$V_1 = \alpha V = 0.625 \times 2000 = 12500$$

V_1 به نسبت مساوی

$$V_2 = V - V_1 = 20000 - 12500 = 7500$$

V_2 به نسبت دهانه‌های بارگیر تقسیم می‌شود.

$$V_{EA} = \frac{V_1}{4} + \frac{10}{75} \times V_2 = 4125 \quad V_{FB} = \frac{V_1}{4} + \frac{22.5}{75} \times V_2 = 5375$$

$$V_{GC} = \frac{V_1}{4} + \frac{27.5}{75} \times V_2 = 5875 \quad V_{HD} = \frac{V_1}{4} + \frac{15}{75} \times V_2 = 4625$$

گام ۳- به دست آوردن لنگر پایین و بالای ستون‌ها

طبقه دوم:

$$M_{IE} = 0.65 \times 15 \times 1625 = 15843.75 \quad M_{EI} = 0.35 \times 15 \times 1625 = 8531.25$$

$$M_{JF} = 0.65 \times 15 \times 2875 = 28031.25 \quad M_{FJ} = 0.35 \times 15 \times 2875 = 15093.75$$

و به همین ترتیب لنگرها را در بالا و پایین ستون‌ها به دست می‌آوریم.

گام ۴- به دست آوردن لنگر تیرها از تعادل لنگرها (از سمت چپ و بالا شروع می‌کنیم)

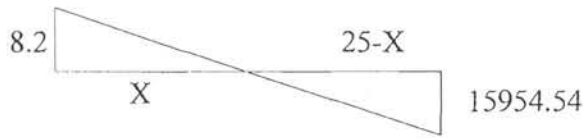
$$M_{IJ} = M_{IE} = 15843.75 \rightarrow M_{JI} = \frac{9}{11} M_{IJ} = 12963$$

$$\sum M_C = \sum M_B \quad M_{JF} = M_{JI} + M_{JK}$$

- به دست آوردن نقطه عطف تیر میانی

$$M_{JK} = 28031.25 - 12963 = 15068.2 \quad M_{LK} = M_{LH} = 20718.75$$

$$M_{KL} = \frac{9}{11} M_{LH} = 16951.7 \quad M_{KJ} = M_{KG} - M_{KL} = 32906.25 - 16951.7 = 15954.54$$



$$\frac{15954.54}{15068.2} = \frac{25-x}{x}$$

$$x = 12.14$$

طبقه اول:

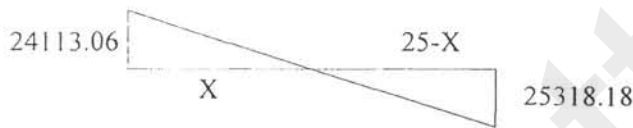
$$M_{EF} = M_{Ei} + M_{EA} = 41531.25$$

$$M_{FE} = \frac{9}{11} M_{EF} = 33980.11$$

$$M_{FG} = M_{FJ} + M_{FB} - M_{FE} = 24113.06$$

$$M_{HG} = M_{HL} + M_{HD} = 28156.25 \rightarrow M_{GH} = \frac{9}{11} M_{HG} = 39400.57$$

$$M_{GF} = M_{GK} + M_{GC} - M_{GH} = 25318.18$$



$$\frac{25318.18}{2443.06} = \frac{25-x}{x}$$

$$x = 12.12$$

گام ۵- به دست آوردن نیروی برشی تیرها

- طبقه دوم

$$V_{IJ} = \frac{M_{IJ}}{0.55 \times 20} = 1440.34$$

$$V_{JK} = \frac{M_{JK}}{12.14} = 1241.2$$

$$V_{LK} = \frac{M_{LK}}{0.55 \times 30} = 1255.68$$

- طبقه اول

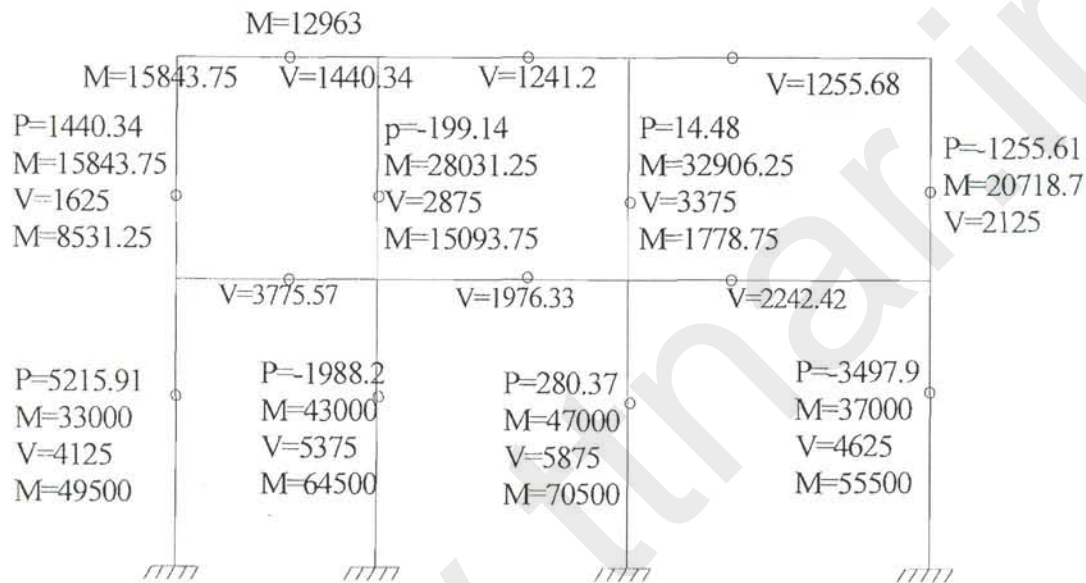
$$V_{EF} = \frac{M_{EF}}{0.55 \times 20} = 3775.57$$

$$V_{FG} = \frac{M_{FG}}{12.2} = 1976.53$$

$$V_{HG} = \frac{M_{HG}}{0.55 \times 30} = 2242.42$$

گام ۶- به دست آوردن نیروی محوری ستونها

$$\begin{aligned}
 P_{JE} &= V_{IJ} = 1440.34 \\
 P_{JF} &= V_{JK} - V_{JI} = 1241.2 - 1440.34 = -199.14 \\
 P_{LH} &= -V_{LK} = -1255.68 \\
 P_{KG} &= V_{KL} - V_{KJ} = 1255.68 - 1241.2 = 14.48 \\
 P_{EA} &= V_{IJ} + V_{EF} = 5215.91 \\
 P_{FB} &= V_{JK} + V_{FG} - (V_{JI} + V_{FE}) = -1998.2 \\
 P_{GC} &= V_{KL} + V_{GH} - (V_{KJ} + V_{GF}) = 280.37 \\
 P_{HD} &= -(V_{HG} + V_{LK}) = -3497.88
 \end{aligned}$$



۴-۱- روش فاکتور

این روش از حل تقریبی معادلات شیبافت به دست آمده است. روش حل به شرح زیر است:

$$K = \frac{I}{\ell}$$

۱- سختی نسبی تمام اعضا را محاسبه نموده و در وسط اعضا می‌نویسیم.

۲- محاسبه ضریب g برای هر گره و نوشتن آن در انتهای تیرهایی که به این گره متصل می‌شوند.

$$g_i = \frac{\sum K_c}{\sum K} = \frac{\text{مجموع سختی ستون‌های متصل به گره}}{\text{مجموع سختی کلیه اعضا متصل به گره}}$$

۳- محاسبه ضریب C برای هر گره و نوشتن آن در انتهای هر ستون

$$C_i = 1 - g_i \quad \text{برای حالت تکیه‌گاه گیردار} \quad C_i = 1$$

۴- به هر عدد مربوط به تیر یا ستون نصف عدد انتهای گیردار همان عضو را می‌افزاییم و G' و C' را در هر گره به دست می‌آوریم.

$$G' = g_N + g_{\frac{F}{2}} \quad , \quad C' = C_N + C_{\frac{F}{2}}$$

۵- محاسبه ضریب لنگر ستون‌ها و تیرها: از حاصلضرب سختی نسبی هر عضو در G' و C' مربوطه، ضرایب C_{ij} و G_{ij} به دست می‌آید.

۶- محاسبه لنگر ستون‌ها: از رابطه $M_{ij}^C = C_{ij} \times A$ که در آن

$$A = \frac{Vh}{\sum C_{ij}} = \frac{\text{لنگر طبقه}}{\sum C_{ij} \text{ طبقه}}$$

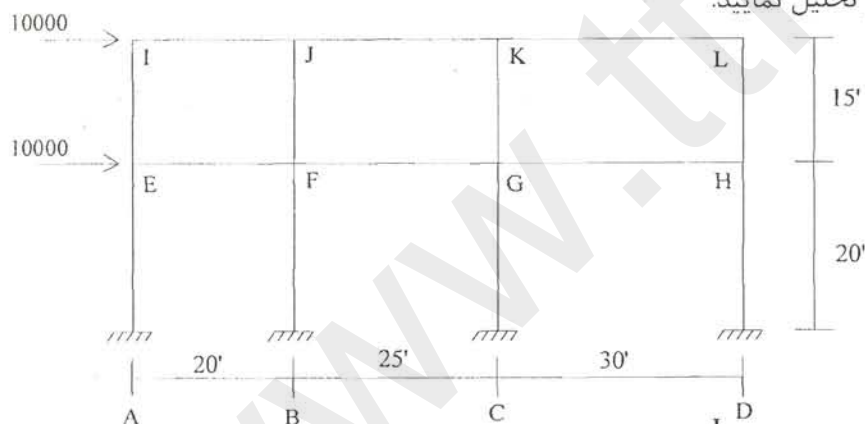
۷- محاسبه لنگر تیرها از رابطه $M_{ij}^G = G_{ij} \times B$ که در آن

$$B = \frac{\sum M_{ij}^C}{\sum G_{ij}} = \frac{\text{مجموع لنگر ستون‌ها در گره } N}{\text{مجموع گره } N}$$

در واقع پخش مجموع لنگر ستون‌های یک گره به نسبت سختی تیرهای آن و ضرب آن در سختی تیر، لنگر تیر را می‌دهد.

۱-۴-۱- مثالی از روش فاکتور

قاب شکل زیر را به روش فاکتور تحلیل نمایید.



گام اول- محاسبه سختی نسبی تمام اعضا و $K = \frac{I}{\ell}$

گام دوم- محاسبه ضریب g (girder) برای هر گره از فرمول $g_i = \frac{\sum K_c}{\sum K}$

این فرمول محاسبه و در تیر سمت راست پایین و در تیر سمت چپ بالای تیر می‌نویسیم.

گام سوم- محاسبه ضریب C برای هر گره از فرمول $C_i = 1, C_i = 1 - g_i$. این ضریب را در انتهای تمام ستون‌های متصل به گره می‌نویسیم.

گام چهارم- به C و g مربوط به تیر یا ستون نصف عدد متناظر آن (عدد انتهای دیگر همان عضو) را می‌افزاییم و C' و g' به دست می‌آید.

گام پنجم- محاسبه ضریب لنگر ستون‌ها و ضریب لنگر ستون‌ها از حاصلضرب سختی نسبی هر عضو در C' و g' مربوطه، در اینجا ضرایب C_{ij} و G_{ij} به دست می‌آیند.

گام ششم- محاسبه لنگر ستون‌ها از رابطه $M_{ij}^C = C_{ij}A$ نه در آن A برابر است با:

$$A = \frac{Vh}{\sum C_{ij}} = \frac{\text{لنگر طبقه}}{\sum C_{ij} \text{ طبقه}}$$

گام هفتم- محاسبه لنگر تیرها از رابطه $M_{ij}^G = G_{ij}B$ که در آن B برابر است با:

$$B = \frac{\sum M_{ij}^C}{\sum G_{ij}} = \frac{\text{مجموع لنگر ستون‌ها در گره } N}{\text{مجموع گره } N}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} g_I = \frac{0.133}{0.133 + 0.25} = 0.347 \quad C_I = 1 - 0.347 = 0.653 \\ g_J = \frac{0.267}{0.25 + 0.267 + 0.4} = 0.291 \quad C_J = 1 - 0.291 = 0.709 \\ g_K = \frac{0.333}{0.4 + 0.333 + 0.5} = 0.27 \quad C_K = 1 - 0.27 = 0.73 \\ g_L = \frac{0.2}{0.5 + 0.2} = 0.286 \quad C_L = 1 - 0.286 = 0.714 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} g_E = \frac{0.133 + 0.1}{0.331 + 0.25 + 0.1} = 0.482 \quad C_E = 1 - 0.347 = 0.518 \\ g_F = \frac{0.267 + 0.2}{0.25 + 0.267 + 0.4 + 0.2} = 0.418 \quad C_F = 1 - 0.291 = 0.582 \\ g_G = \frac{0.333 + 0.25}{0.4 + 0.333 + 0.5 + 0.25} = 0.393 \quad C_G = 1 - 0.27 = 0.607 \\ g_H = \frac{0.2 + 0.15}{0.5 + 0.2 + 0.15} = 0.411 \quad C_H = 1 - 0.286 = 0.589 \end{array} \right.$$

$$g'_{IJ} = g_I + \frac{g_J}{2} = 0.347 + \frac{0.291}{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} g'_{JI} = g_I + \frac{g_I}{2} = 0.291 + \frac{0.347}{2} \\ g'_{JK} = g_J + \frac{g_K}{2} = 0.291 + \frac{0.27}{2} \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} g'_{KJ} = g_K + \frac{g_J}{2} = 0.416 \\ g'_{KL} = g_K + \frac{g_L}{2} = 0.413 \end{cases}$$

$$\begin{cases} g'_{LK} = g_L + \frac{g_K}{2} = 0.421 \end{cases}$$

$$C'_{IE} = C_I + \frac{C_E}{2} = 0.912 \quad C'_{KG} = C_K + \frac{C_G}{2} = 0.34$$

$$\begin{cases} C'_{EI} = C_E + \frac{C_I}{2} = 0.845 & C'_{GK} = C_G + \frac{C_K}{2} = 0.972 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C'_{EA} = C_E + \frac{C_A}{2} = 1.018 & C'_{GC} = C_G + \frac{C_C}{2} = 1.107 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C'_{JF} = C_J + \frac{C_F}{2} = 1.00 & C'_{IH} = C_I + \frac{C_H}{2} = 1.009 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C'_{FJ} = C_F + \frac{C_J}{2} = 0.937 & C'_{HL} = C_H + \frac{C_L}{2} = 0.946 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C'_{FA} = C_F + \frac{C_A}{2} = 1.082 & C'_{HD} = C_H + \frac{C_D}{2} = 1.089 \end{cases}$$

$$M_{ij}^C = C_{ij} \cdot A$$

محاسبه لنگر ستون‌ها:

$$A = \frac{V \times h}{\sum C_{ij}} = \frac{10000 \times 25}{1.808} = 82964.6$$

طبقه دوم

$$\sum C_{ij} = (0.121 + 0.112 + 0.267 + 0.25 + 0.344 + 0.323 + 0.202 + 0.189) = 1.808$$

$$\begin{cases} M_{IE} = 0.121 \times A = 10039 & M_{JF} = 0.267 \times A = 22152 \\ M_{EI} = 0.112 \times A = 9293 & M_{FJ} = 0.250 \times A = 20741 \\ M_{KG} = 0.344 \times A = 28540 & M_{IH} = 0.202 \times A = 16759 \\ M_{GK} = 0.323 \times A = 26797 & M_{HL} = 0.189 \times A = 15680 \end{cases}$$

$$A = \frac{V \times h}{\sum C_{ij}} = \frac{20000 \times 20}{1.661} = 240818.8$$

طبقه اول

$$\sum C_{ij} = (0.102 + 0.126 + 0.216 + 0.25 + 0.276 + 0.326 + 0.163 + 0.194) = 1.661$$

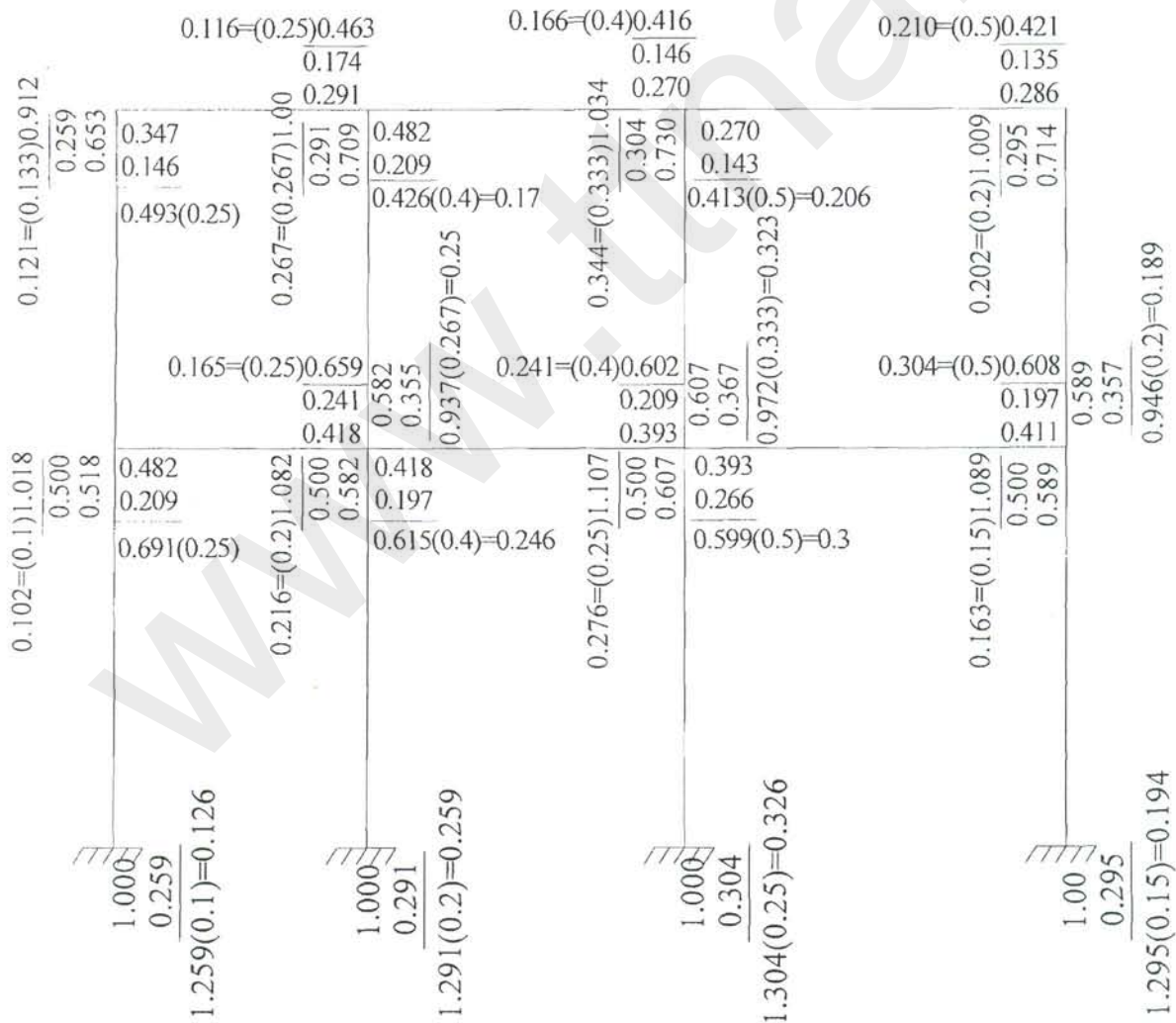
$$\begin{cases} M_{EA} = 0.102 \times A = 24564 & M_{FB} = 0.216 \times A = 52017 \\ M_{AE} = 0.126 \times A = 30343 & M_{BF} = 0.258 \times A = 62131 \\ M_{GC} = 0.276 \times A = 66466 & M_{HD} = 0.163 \times A = 39253 \\ M_{CG} = 0.326 \times A = 78507 & M_{DH} = 0.199 \times A = 46719 \end{cases}$$

$$\text{گروه I} \begin{cases} B = \frac{10039}{0.123} \\ M_{IJ} = 0.123 \times B = 10039 \end{cases}$$

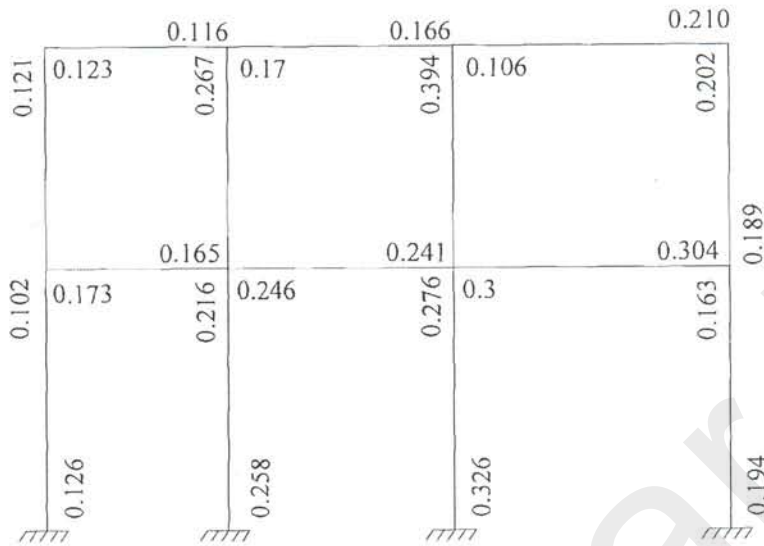
$$\text{گروه J} \begin{cases} B = \frac{22152}{0.116 + 0.17} = 77454.5 \\ M_{JI} = 0.116 \times B = 18985 \quad M_{JK} = 0.17 \times B = 13167 \end{cases}$$

$$\text{گروه K} \begin{cases} B = \frac{28540}{0.116 + 0.206} = 76720 \\ M_{KJ} = 0.166 \times B = 12736 \quad M_{KL} = 0.206 \times B = 15804 \end{cases}$$

$$\text{گروه I} \begin{cases} B = \frac{16759}{0.21} = 79805 \\ M_{LK} = 0.21 \times B = 16759 \end{cases}$$



بعد از به دست آوردن c' و g' سختی نسبی عضو مربوط را در آن ضرب می‌کنیم تا c_{ij} و g_{ij} به دست آید. (شکل قبل)

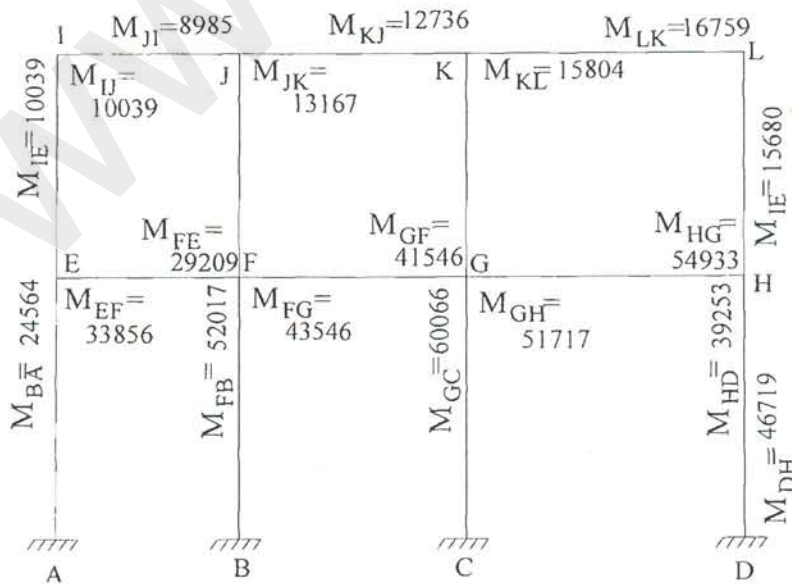


در شکل فوق c_{ij} و g_{ij} (ضرایب پخش لنگر ستون‌ها و تیرها) نشان داده شده است.

$$\text{گره E} \quad B = \frac{9292 + 24564}{0.173} \quad M_{EF} = 0.173 \times B = 33856$$

$$\text{گره F} \quad B = \frac{20741 + 52017}{0.165 + 0.246} \\ M_{FE} = 0.165 \times B = 29209 \quad M_{FG} = 0.246 \times B = 43540$$

$$\text{گره G} \quad B = \frac{26797 + 66461}{0.291 + 0.3} \\ M_{GF} = 0.241 \times B = 41546 \quad M_{GH} = 0.3 \times B = 51717$$



ردیف	نام محصول	تعداد
فیلم های مهندسی عمران		
۱	مجموعه ۱۲ فیلم آموزشی مهندسی عمران دوبله	4 DVD
۲	مهندسی بینهایت , مجموعه ۵۴ مستند آموزشی	6 DVD
۳	۵۱ فیلم آموزشی مهندسی عمران - ابر سازه ها	6 DVD
۴	مجموعه اشتباهات مهندسی	4 DVD
۵	مستند برج دبی	1 DVD
۶	مقالات چهارمین کنگره سراسری مهندسی عمران	1 CD
۷	مقالات هفتمین کنگره سراسری مهندسی عمران	1 CD
۸	فیلم مراحل ساخت برج ماریچج در اسپانیا	1 CD
۹	مستند آموزشی بررسی ساخت برترین آسمانخراشها	1 CD
۱۰	فیلم مستند گسترش مسجد النبی	2 CD
۱۱	فیلم آموزشی آشنایی و بررسی جزئیات برج بلند سبرز در شیکاگو آمریکا	1 CD
۱۲	فیلم آموزشی ساخت فرودگاه کانسای ژاپن	1 CD
۱۳	فیلم آموزشی مراحل ساخت سد کارون ۳	2 CD
۱۴	فیلم آموزشی مراحل ساخت پل های کارون ۳	1 CD
۱۵	مجموعه فیلم های مستند عظیم تر بسازید	3 DVD
۱۶	مستند آموزشی زلزله های عظیم	1 DVD
جدید	مجموعه مهندسی یک امپراطوری	2 DVD
جدید	مجموعه مستند شهر های عظیم	2 DVD
جدید	مجموعه مجلات نشنال جئوگرافیک (آرشیو ۱۲۰ ساله)	6DVD 8 gig
۱۷	ماجرای جوی در معماری (دوبله فارسی)	2 DVD
۱۸	مجموعه مجلات و کتابهای مهندسی معماری و دکراسیون داخلی تا سال ۲۰۱۰	5 DVD
۱۹	مجموعه فیلمهای برترین آثار بهترین معماران جهان	2 DVD
۲۰	Help فارسی نرم افزار اتوکد به همراه کتاب الکترونیکی آموزشی ۶۲۰ صفحه ای	1 CD
۲۱	جدیدترین آبجکتهای سه بعدی معماری برای D Max۳	1 DVD
جدید	ژورنال های داخلی و خارجی معماری	3 DVD
مجموعه نقشه های اتوکد		
۲۲	سمبلهای اتوکد	1 CD
۲۳	۳۴۰ نقشه ساختمانهای اداری تجاری و فرهنگی و ...	1 CD
۲۴	بیش از ۱۰۰ نقشه معماری ساختمان	1 CD
۲۵	مجموعه نقشه اتوکد طرح هادی و ثبتی	1 CD
۲۶	مجموعه نقشه های اتوکد معماری و سازه	1 CD
۲۷	۸۰۰ نقشه سازه ساختمان در محیط اتوکد	1 CD
۲۸	بیش از ۱۰۰ نقشه سه بعدی	1 CD
آموزش نرم افزار های عمران و معماری		
۲۹	آموزش ETABS	1 DVD
۳۰	آموزش SAFE	1 DVD
۳۱	آموزش AOUTOCAD۲۰۱۱	1 DVD
۳۲	آموزش 3D HOME	1 DVD
۳۳	آموزش ARCHICAD	1 DVD
۳۴	آموزش SAP	1 DVD
۳۵	آموزش TEKLA STRUCTURES	1 DVD
تعداد	نام محصول	

		ردیف
فیلم ها و محصولات آموزش زبان انگلیسی (ویژه)		
6 DVD	مجموعه کامل آموزش زبان انگلیسی English For You (به همراه نسخه قابل نمایش در موبایل) مجموعه English For You و یا به اختصار، EFU برترین مجموعه ویدئویی آموزش زبان انگلیسی است که حقیقتاً نیاز به استاد و کلاس را به طور کامل برطرف می کند. در این مجموعه شما انگلیسی را از اساتید انگلیسی زبان یاد می گیرید و مطمئناً تفاوت آن را با مؤسسات ایران که اکثراً اساتیدی دانشگاهی دارند متوجه خواهید شد.	۳۶
3 DVD	سریال آموزشی زبان انگلیسی EXTRA (به همراه نسخه قابل نمایش در موبایل و فایل ورد متن) سریال آموزش زبان EXTR@-TV مجموعه ای است ویدئوی که در قالب طنز و با روشی بسیار ساده و قوی بیننده را در مسیری ویژه جهت یادگیری زبان انگلیسی قرار می دهد.	۳۷
1 DVD	جامع ترین دوره ی آموزشی IELTS	۳۸
1 DVD	آموزش گرامر زبان انگلیسی بصورت فیلم - Complete English Grammar Series	۳۹
2 DVD	انگلیسی به روش اعجاب انگیز X.L.C	۴۰
1 DVD	دوره آموزش زبان NEW Interchange Intro	۴۱
1 CD	بسته آموزش مکالمه Fluent English	۴۲
1 DVD	آموزش زبان انگلیسی در خواب	۴۳
1 DVD	آموزش زبان نصرت ۲ همراه با تقویت حافظه نصرت	۴۴
4 DVD	مجموعه آموزش ۱۲ زبان زنده دنیا	۴۵

محصولات جدید:

آموزش پریماورا	3cd	۶۵۰۰
آموزش ۲۰۱۲ 3dmax	1dvd	۹۹۰۰
آموزش MS project	1dvd	۸۹۰۰
مجموعه عکس های ۳۰۰ dpi	4cd	۸۰۰۰
مجموعه آموزش زبان دیالوگ	7dvd	۱۰۰۰۰

فروشگاه تخصصی مهندسی عمران و معماری و فروشگاه تخصصی زبان (zabanshop.ir) افتخار دارد که در راستای بالا بردن توان علمی شما دانشجویان و مهندسیین عزیز محصولات متنوع آموزشی را برای شما به عنوان اولین فروشگاه تخصصی مهندسی عمران و معماری و زبان مهیا کرده است شما دوست گرامی میتوانید برای سفارش هر یک از محصولات به یکی از سه روش زیر اقدام فرمایید

۱ - سفارش از طریق سایت (خرید پستی - تحویل و تسویه درب منزل)

برای سفارش به این روش به سایت WWW.OMRANSHOP.IR و www.zabanshop.ir رفته و روی دکمه خرید پستی محصول مورد نظر کلیک کنید و مشخصات خود را در فرم وارد نموده و منتظر بمانید تا بسته پستی شما توسط پستچی درب منزل تحویل شما شود و همانجا طبق فاکتور مبلغ مورد نظر را به پستچی تحویل دهید

۲ - سفارش تلفنی یا از طریق ایمیل

اگر به اینترنت دسترسی ندارید یا در مرحله ثبت سفارش به مشکلی برخوردید میتوانید محصولات درخواستی خود را همراه با آدرس دقیق و کد پستی و نام گیرنده به شماره همراه ۰۹۱۵۸۲۰۶۶۴۶ پیامک کنید یا با تماس تلفنی این موضوع را با همکاران ما در میان بگذارید و یا از طریق ایمیل info@icivil.ir موارد بالا را ایمیل بزنید تا همکاران ما در فروشگاه راسا اقدام به ثبت سفارش برای شما کنند

۳ - خرید نقدی

مزیت خرید نقدی بر آنست که بسته شما زودتر به دست شما خواهد رسید و شما از هزینه پستی معاف هستید برای ثبت سفارش مبلغ محصولات درخواستی را به شماره حساب های اعلام شده در سایت واریز نموده و فرم خرید پستی را تکمیل کنید در صورتی که به اینترنت دسترسی ندارید با همکاران ما با شماره تماس ۰۹۱۵۸۲۰۶۶۴۶ تماس حاصل فرمایید تا شمارا راهنمایی کنند

با تشکر از شما