فصل اول - سیالات تراکم پذیر

سیالات مکانیک II

رابطه گاز ایده آل :

$$Pv = nRT \longrightarrow P = \rho RT \longrightarrow \rho = \frac{MW \cdot P}{R \cdot T}$$

$$C_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_P \qquad C_v = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v \qquad \text{واحد } C_v, C_p \rightarrow \frac{J}{kg \cdot C^\circ}$$

$$H = U + P \cdot v \longrightarrow dH = du + p\,dv + v\,dp^{\circ} = du + R\,dT$$

$$H = u + RT \qquad \text{مانند واحد جرم}$$

$$C_p\,dT = C_v\,dT + R\,dT \longrightarrow \boxed{C_p = C_v + R}$$

ضریب گرمایی $K = \frac{C_p}{C_v}$ ضریب گرمایی : این ضریب برای هر گاز مقدار ثابتی است که در فیزیک پ جدول 3 کتاب استریتر وجود دارد

$$\boxed{C_p = \frac{K}{K-1} \cdot R} \quad , \quad \boxed{C_v = \frac{R}{K-1}}$$

قانون اول ترمودینامیک :

سیستم‌های بسته $du = Q - W$

$$Q = du + W = du + p\,dv$$

$$\xrightarrow[\text{قانون دوم}]{\text{آنتروپی}} Tds = du + p\,dv \longrightarrow Tds = C_v\,dT + p\,dv$$

$$ds = C_v \frac{dT}{T} + p\frac{dv}{T} \longrightarrow ds = \frac{C_v}{T} + \frac{R}{v}\,dv$$

$$\int ds = S_2 - S_1$$

$$\longrightarrow \boxed{S_2 - S_1 = C_v \ln\frac{T_2}{T_1} + R \ln\frac{V_2}{V_1}} \xrightarrow[\text{دانستیه}]{\text{برابای}} \boxed{S_2 - S_1 = C_v \ln\frac{T_2}{T_1} + R \ln\frac{P_1}{P_2}}$$

$$S_2 - S_1 = C_v \ln\left[\frac{T_2}{T_1} \cdot \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{K-1}\right]$$

$$S_2 - S_1 = C_v \ln\left[\frac{P_2}{P_1} \cdot \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{K}\right]$$

$$S_2 - S_1 = C_v \ln\left[\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{K} \cdot \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{1-K}\right]$$

فرآیند ایزوترومیک: هرگاه فرآیند آرمانی باشد و همچنین Reversible باشد آنگاه به فرآیند ایزوترومیک گفته می‌شود

$$\frac{P_1}{\rho_1^k} = \frac{P_2}{\rho_2^k} \longrightarrow \frac{P_1}{\rho^k} = \text{Constant} \longrightarrow \Delta S = 0 \text{ یا } dS = 0$$

نکته: فرآیند پلی‌ترومیک، ایزوترومیک خواهد شد اگر $n=k$ باشد در فرمول $\frac{P}{\rho^n} = \text{Constat}$

مثال: استوانه‌ای شامل 2 kg نیتروژن در فشار مطلق 0.14 MPa و دمای $5c^\circ$ قرار دارد. آزمایشی به صورت ایزوترومیک به 0.3 MPa افزایش یابد، دمای نهایی و کار انجام شده چقدر است؟ $(k=1.4)$

حل:

$$\frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^k = \left(\frac{T_2 P_1}{T_1 P_2}\right)^k \longrightarrow \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{k-1}{k}} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{k-1}$$

$$\longrightarrow \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{k-1}{k}} \longrightarrow \frac{T_2}{273+5} = \left(\frac{0.3}{0.14}\right)^{\frac{1.4-1}{1.4}} \longrightarrow T_2 = 345.6\ ^\circ K$$

$T_2 = 72.6\ ^\circ C$

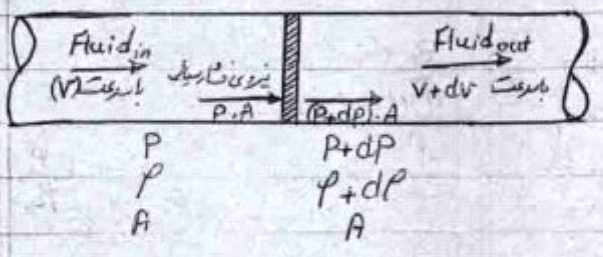
از قانون اول $\longrightarrow du = \delta Q - W \longrightarrow W = -du = -C_v dT \longrightarrow$

$$= -mC_v(T_2 - T_1) = -100.2\ kj$$

$\delta W = +100.2\ kj$

سرعت امواج صوت و عدد ماخ:

همانطور که عدد ماخ یک تابعی از سیالات تراکم پذیرات و M نمایش داده می‌شود که هنگامی که سرعت صوت در یک سیم ایجاد می‌شود یک موج عمودی در سیم ایجاد شده که به تدریج به موج افقی در طول سیم تبدیل می‌شود



اثبات فرمول سرعت صوت:

معادله پیوستگی $\rho VA = (\rho + d\rho)(V+dV)\cdot A$

$$\longrightarrow \rho dV + V d\rho = 0 \quad (I)$$

معادله مومنتوم خطی (اندازه حرکت) $\Sigma F_x = \rho VA\cdot(V+dV) - \rho\cdot V\cdot A\cdot V$ (سرعت، حجم)

$$\longrightarrow PA - (P+dP)A = \rho\cdot V\cdot A(V+dV) - \rho\cdot V\cdot A\cdot V$$

③ $dp = -\rho v\, dv$ (II)

از (I) و (II) داریم $\Rightarrow v^2 = \frac{dp}{d\rho}$ ← سرعتی که نشان دهنده تغییرات جریان

$v = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} \Rightarrow C = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$ ← سرعت سیال ← سرعت صوت

I : سرعت صوت برحسب ضریب انبساط حجمی

اثبات

ضریب انبساط حجمی $K = \frac{-dp}{dv/v}$ $\longrightarrow$ $\frac{-dv}{v} = \frac{d\rho}{\rho}$ $\xrightarrow{\text{لذا}}$ $K = \frac{dp}{d\rho/\rho}$

یا $K = \frac{\rho\, dp}{d\rho}$ برای کلیه گازها $\longrightarrow$ $C = \sqrt{K/\rho}$ برای مایعات و گازها قابل استفاده است

2 جریان ایزوانتروپیک :

با فرض تغییرات ناچیز در شرایط دما و فشار می‌توان تصور کرد سیستم برگشت پذیر و با فرض کوتاه بودن مسیر sys آدیاباتیک است یا بطور کلی سیستم ایزوانتروپیک می‌باشد

اثبات:

$$\frac{P}{\rho^k} = \text{Constant} \longrightarrow \underbrace{P.\rho^{-k}}_{\text{رابطه ایزوانتروپیک}} = \text{Constant} \longrightarrow \frac{dp}{d\rho} = \frac{kP}{\rho},\ \rho = \frac{P}{RT}$$

$\Longrightarrow$ لذا داریم $C = \sqrt{kRT}$ ← نسبت ظرفیت گرمایی $\left(\frac{C_p}{C_v}\right)$

* بطور کلی برای کلیه گازها سرعت صوت تقریباً تابعی است از دما.

II $C = \sqrt{kRT}$ بطور کلی : گازایده‌آل

2 $C = \sqrt{\frac{kP}{\rho}}$ جریان ایزوانتروپیک

3 $C = \sqrt{K/\rho}$ برحسب انبساط حجمی

رابطه بین گازایده‌آل و جریان ایزوانتروپیک $K = kP$

عدد ماخ (M) : عبارت است از سرعت سیال در محیطی به سرعت صوت در همان محیط که نشان دهنده قابلیت تراکم پذیری است (در سیالات تقریباً غیرقابل تراکم $M = 0$)

$$M = \frac{v}{C} = \frac{\text{سرعت سیال در محیط}}{\text{سرعت صوت در همان محیط}} \Rightarrow \frac{\text{انرژی جنبشی سیال}}{\text{انرژی حرارتی سیال}} = \frac{v^2}{c^2}$$

④

مثال: سرعت صوت در هوای خشک موقعی دما 20c° سانتی گراد و وقتی 20c°- است چقدر است؟

هوا $K=1.4$ ، $R=\frac{8314}{29}=287$

حل:

$$C_1=\sqrt{KRT}=\sqrt{(1.4)(287)(273+20)}=343\ m/s$$

$$C_2=\sqrt{KRT}=\sqrt{(1.4)(287)(273-20)}=319\ m/s$$

تذکر: هرگاه System تبادل گرما با محیط نداشته باشد آدیاباتیک است و هرگاه System علاوه بر آدیاباتیک برگشت پذیر هم باشد جریان آیزنتروپیک خواهد بود که در صنایع در ونتوریها - نازلها و دیفیوزرها که طول مسیر کوتاه و جریان آنها Reversible است استفاده شده و مسیر را بدون اصطکاک در نظر می گیریم و اثر تغییرات دیگر ناچیز است صرف نظر می کنیم

معادله انرژی: بررسی معادله بین دو نقطه و ارتفاع نداریم لذا $dz=0$

معادله اولر $\longrightarrow$ $g\,dz+vdv+\frac{dP}{\rho}=0 \longrightarrow vdv+\frac{dP}{\rho}=0$ (II) $\rho UA=Cte$

از ρUA لگاریتم می گیریم $\xrightarrow{\text{مشتق}}$ $\rho UdA+\rho Adv+UA\,d\rho=0$

طرفین را بر ρUA تقسیم می کنیم $\longrightarrow$ $\frac{dA}{A}+\frac{dv}{v}+\frac{d\rho}{\rho}=0$ (III) ، از فرض داریم $\longrightarrow$ $c^2=\frac{dP}{d\rho}$ (III)

از ① و ② و ③ داریم $\longrightarrow$ $vdv+c^2\frac{d\rho}{\rho}=0$ (IV)

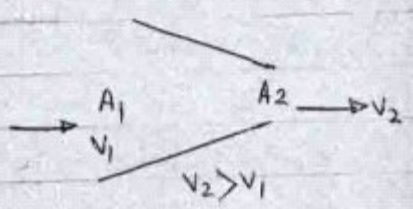
با جایگذاری (II) در (IV) داریم $\longrightarrow$ $\frac{dA}{dv}=\frac{A}{v}\left(\frac{v^2}{c^2}-1\right)=\frac{A}{v}\left(M^2-1\right)$

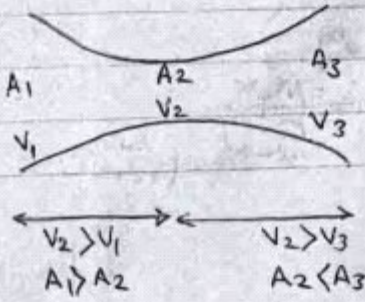
فرمول تغییرات دطح مقطع با سرعت توسط عدد ماخ

$M<1$: سرعت مادون صوت باشد : برای افزایش سرعت باید سطح مقطع را کاهش دهیم یعنی $\frac{v^2}{c^2}$

$M=1$: سرعت صوت $\longrightarrow$ سرعت در حال افزایش تا در گلوگاه به سرعت صوت برسد یعنی $V_2>V_1$

$M>1$: سرعت مافوق صوت است : برای افزایش سرعت باید سطح مقطع را افزایش دهیم





④

جریان ایزوانتروپیک $\frac{P_1}{\rho_1^k} = \frac{P_2}{\rho_2^k} = \frac{P_3}{\rho_3^k} \longrightarrow P = \rho_1^{-k} \cdot \rho^k P_1$ و $v dv + \frac{dP}{\rho} = 0$ ⑤

از معادله ایزوانتروپیک دیفرانسیل گرفته و در معادله ① قرار می‌دهیم $\longrightarrow$ $v dv + k \frac{P_1}{\rho_1^k} \rho^{k-2} d\rho = 0$

از ③ انتگرال گیری می‌کنیم $\longrightarrow$ $\frac{v^2}{2} + \frac{k}{k-1} \cdot \frac{P_1}{\rho_1^k} \cdot \rho^{k-1} = \text{Constant}$

$\star$ $\frac{v_1^2}{2} + \frac{k}{k-1} \cdot \frac{P_1}{\rho_1^k} \cdot \rho_1^{k-1} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{k}{k-1} \cdot \frac{P_2}{\rho_2^k} \rho_2^{k-1}$ ، $P = \rho RT$

با جایگذاری معادله حالت در آن $\longrightarrow$ $\frac{v_1^2}{2} + \frac{k}{k-1} \cdot RT_1 = \frac{v_2^2}{2} + \frac{k}{k-1} RT_2$

معادله تغییرات سرعت و دما از نقطه 1 به 2 در گلوگاه یا شیپوره

معادله‌های تغییر دما و فشار برحسب عدد ماخ در گلوگاه :

$c^2 = kRT$

$\frac{dA}{A} + \frac{dv}{v} + \frac{d\rho}{\rho} = 0$

$M^2 = \frac{v^2}{c^2} = \frac{2kR(T_0 - T)}{kRT(k-1)}$ ساده می‌کنیم $\longrightarrow$ $\frac{T_0}{T} = 1 + \left(\frac{k-1}{2}\right) M^2$

با توجه به جریان ایزوانتروپیک $\longrightarrow$ $\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{k-1}{k}} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{k-1}$ ← تغییرات دما برحسب عدد ماخ

$\frac{P_0}{P} = \left(1 + \left(\frac{k-1}{2}\right) M^2\right)^{\frac{k}{k-1}}$ ← تغییرات فشار برحسب عدد ماخ

$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \left(\frac{k-1}{2}\right) M^2\right)^{\frac{1}{k-1}}$ ← تغییرات چگالی برحسب عدد ماخ

نکته : در گلوگاه اگر سرعت به سرعت صوت تبدیل شود آنگاه $M = 1$ شده و شرایط بحرانی داریم و روابط به صورت زیر تغییر می‌کند

$\frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{k+1}$

$\frac{P^*}{P_0} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{k/(k-1)}$

$\frac{\rho^*}{\rho_0} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}}$

برای هوا با $k = 1.4$ داریم $\longrightarrow$

$\frac{T^*}{T_0} = 0.833$

$\frac{P^*}{P_0} = 0.528$

$\frac{\rho^*}{\rho_0} = 0.634$

(۴)

محاسبه سطح مقطع بحرانی (A^*) :

$$\dot{m} = \rho V A = \rho^* V^* A^* = \text{Constant}$$

$$\frac{A}{A^*} = \frac{\rho^* V^*}{\rho V} \longrightarrow V^* = \sqrt{K R T^*} \quad , \quad V = M\sqrt{KRT}$$

$$\frac{V^*}{V} = \frac{1}{M}\sqrt{\frac{T^*}{T}} = \frac{1}{M}\sqrt{\frac{T^*}{T_0}} \times \sqrt{\frac{T_0}{T}} = \frac{1}{M}\left(\frac{1+\left(\frac{K-1}{2}\right)M^2}{\left(\frac{K+1}{2}\right)}\right)$$

$$\longrightarrow \frac{V^*}{V} = \frac{1}{M}\left[\frac{1+(K-1/2)M^2}{(K+1)/2}\right]$$ ← تغیرات سرعت با عدد ماخ

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M}\left[\frac{1+(K-1/2)M^2}{(K+1)/2}\right]^{(K+1/2(K-1))}$$ ← تغیرات سطح مقطع با عدد ماخ

نکته : نسبت $\frac{A}{A^*}$ همیشه از ۱ بزرگتر است . $\frac{A}{A^*} > 1$

چنانچه سیال ما هوا باشد رابطه بصورت زیر ساده می گردد :

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M}\left(\frac{5+M^2}{6}\right)^3$$

محاسبه دبی جرمی ماکسیمم ($\dot{m}_{max}$) یا بحرانی :

$$\dot{m}_{max} = \rho^* \cdot V^* \cdot A^* = \rho_0 \left(\frac{2}{K+1}\right)^{(1/K-1)} \cdot A^* \sqrt{\frac{KRT_0 \times 2}{K+1}}$$

$$\rho_0 = \frac{P_0}{RT} \longrightarrow \dot{m}_{max} = \frac{A^* P_0}{\sqrt{T_0}} \cdot \sqrt{\frac{K}{R}\left(\frac{2}{K+1}\right)^{[(K+1)/(K-1)]}}$$

if $K = 1.4$ $\quad \dot{m}_{max} = 0.686 \frac{A^* \cdot P_0}{\sqrt{RT_0}}$

مثال: برای یک تونل باد عدد ماخ در خروجی 3 می باشد در فشار 90 kpa و دمای 25c° (T₀=25c°) میزان دبی جرمی $\dot{m}$ یک کیلوگرم بر ثانیه می باشد مطلوبست:

حل:

$R=287\ J/kg.K$

$M=3$

$k=1.4$

$T_0=25c°$

$\dot{m}=1\ kg/s$

الف) سطح مقطع گلوگاه

ب) سطح خروجی

ج) سرعت - فشار - دما - چگالی خروجی

$$\rho_0=\frac{P_0}{RT_0}=1.0523\ kg/m^3$$

$$\dot{m}_{max}=0.686\frac{A^*.P_0}{\sqrt{RT_0}} \rightarrow 1=0.686.\frac{A^*.90\times10^3}{\sqrt{287\times(273+25)}}$$

$$\rightarrow A^*=0.00474\ m^2$$

جدول توابع ایزنتروپ

$$\frac{A}{A^*}=\frac{1}{M}\left(\frac{5+M^2}{6}\right)^3=\frac{1}{3}\left(\frac{5+3^2}{6}\right)^3=4.23 \rightarrow A=4.23\times A^*=0.02m^2$$

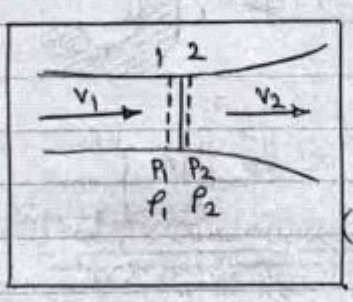
$$P/P_0=0.027 \rightarrow P=0.027\times90000=2430\ Pa$$

$$\rho/\rho_0=0.076 \rightarrow \rho=0.076\times1.0523=0.08\ kg/m^3$$

$$T/T_0=0.357 \rightarrow T=0.357\times(25+273)=-166.6\ C°$$

سرعت

$$\dot{m}=\rho UA \rightarrow V=\frac{\dot{m}}{\rho.A}=\frac{1}{0.08\times0.02}=625\ \frac{m}{s}$$



موج شوک: موج شوک باعث می شود جریان در مقطع شوک که ضخامت این مقطع خیلی کوچک است که به اندازه طول پویش آزاد مولکولی است و فرآیند از حالت ایزنتروپیک خارج می شود و جریان مافوق صوت به جریان مادون صوت تبدیل می شود (آنتروپی در حال افزایش)

در مقطع شوک عمودی ماخ و سرعت صوت کاهش می یابد و آنتروپی - فشار - دانسیته - دما افزایش می یابد

$$V_1-V_2=\left[\frac{c^{*2}.(k+1)}{2kV_1V_2}+\frac{k-1}{2k}\right](V_1-V_2)$$

M_1: عدد ماخ در شرایط اولیه

$$\frac{P_2}{P_1}=\frac{1}{k+1}\left(\frac{2k\,P_1.V_1^2}{kP_1}-(k-1)\right)=\frac{2kM_1-(k-1)}{k+1}\ ,\ \frac{P_2}{P_1}=\frac{M_1^2(k+1)}{2+M_1^2(k-1)}$$

$$S_2-S_1=C_v\ln\left(\left[\frac{2kM_1^2-(k+1)}{k+1}\right]\times\left[\frac{2+M_1^2(k-1)}{M_1^2(k+1)}\right]^k\right)$$

تغییرات دما بسیار ناچیز است

$$M_1=\sqrt{\frac{V_1}{c}}$$