فصل چهارم

مدارهای مرتبه دوم

یعنی مدارهای با معادله دیفرانسیل مرتبه‌ی دوم، و به عبارت دیگر:

یک سلف و یک خازن و هر تعداد مقاومت و منبع و یا دو سلف یا دو خازن مستقل (غیرسری، غیرموازی) و هر تعداد مقاومت و منبع.

عالی است. معادله دیفرانسیل کلی این مدارها بصورت زیر است:

$$\frac{d^2y}{dt^2}+2\alpha\frac{dy}{dt}+\omega_0^2 y = \text{عباراتي برحسب ورودي و مشتقاتش} \qquad (۴۱۲$$

و به یاد درس معادلات دیفرانسیل!، معادله مشخصه بصورت زیر می‌شود:

$$S^2+2\alpha S+\omega_0^2=0 \qquad (۴۱۳$$

که در آن ω_0 فرکانس تشدید و α ضریب تضعیف است.

ببینید اساس کار در مدارهای مرتبه‌ی دوم، نوشتن معادله دیفرانسیل و حل آن است. و خیلی از پارامترها از دل همین معادله دیفرانسیل متولد می‌شود. مثلاً :

ضریب کیفیت یا Q :

طبق تعریف در هر مدار هرچه انرژی دیرتر تلف شود، (یا مدار دیرتر بمیرد!) Q بالاتر است و بالعکس، و برابر است با:

$$Q \stackrel{\Delta}{=} \frac{\omega_0}{2\alpha} \qquad (۴۱۴$$

آیا حالا می‌توانید مراحل یافتن ضریب کیفیت را بگویید؟

خُب واضح است دیگر:

تشکیل معادله‌ی دیفرانسیل مدار

یافتن ω_0^2 و 2α

رابطه‌ی ۴۱۴)

حالا سؤالی پیش می‌آید؛ چگونه باید به معادله دیفرانسیل رسید؟

باید اولاً روابط ولتاژ و جریان عناصر را دانست و به کمک آن‌ها و KVL و KCL و حذف متغیرهای اضافی، به معادله دیفرانسیل رسید.

یک‌بار روابط ولتاژ و جریان در عناصر را با هم مرور می‌کنیم:

$$V_r = R\times i_r \qquad (۴۱۵$$

$$i_r = \frac{1}{R}\times V_r \qquad (۴۱۶$$

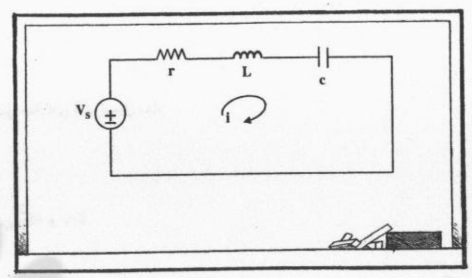
$$V_C = V_0 + \frac{1}{C}\int i_c \, dt \qquad (۲۱۷$$

$$i_c = C\frac{dV_c}{dt} \qquad (۲۱۸$$

$$V_L = L\frac{di_L}{dt} \qquad (۲۱۹$$

$$i_L = I_0 + \frac{1}{L}\int V_L \, dt \qquad (۲۲۰$$

به عنوان نمونه در یک مدار خیلی ساده (مثلاً RLC سری) برای جریان مدار معادله دیفرانسیل بنویسید:



شکل (۱۴۸): مدار RLC سري

با یک KVL ساده و توجه به شش رابطه‌ی بالا داریم:

$$V_s = ri + L\frac{di}{dt} + V_0 + \frac{1}{C}\int i \, dt \qquad (۲۲۱$$

و با مشتق‌گیری داریم:

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{r}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}i = \frac{1}{L}\frac{dV_s}{dt} \qquad (۲۲۲$$

از این رابطه پیداست که:

$$2\alpha = \frac{r}{L} \quad \text{و} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \qquad (۲۲۳$$

و مثلاً ضریب کیفیت برابر است با:

$$Q = \frac{\frac{1}{\sqrt{LC}}}{\frac{r}{L}} = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{L}{C}} \qquad (۲۲۴$$

خُب کافی است، پس در مدارهای بسیار ساده RLC سری و موازی داریم:

در RLC سری:

$$2\alpha = \frac{r}{L} \quad \text{و} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad (۲۲۵$$

در RLC موازی:

$$2\alpha = \frac{1}{rC} \quad \text{و} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad (۲۲۶$$

و در سایر مدارهای مرتبه‌ی دوم

همان مراحل مرسوم: ۱- نوشتن معادله دیفرانسیل و ...

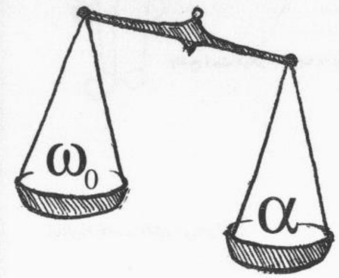
حال با هم سَری به درس معادلات دیفرانسیل می‌زنیم؛ به معادله‌ی ۲۱۳ نگاه کنید:

$$S^2 + 2\alpha S + \omega_0^2 = 0 \qquad (۲۲۷$$

و ریشه‌هایش:

$$S_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \qquad (۲۲۸$$

برحسب نوع ریشه‌ها، حالات مدارهای مرتبه‌ی دوم را نام‌گذاری می‌کنیم:

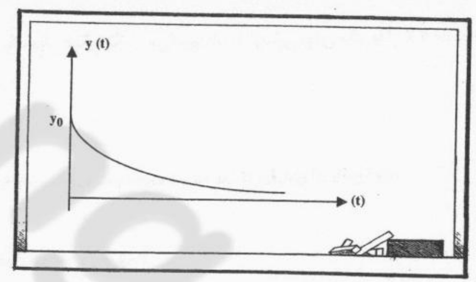


۱ـ اگر $\alpha > \omega_0$ ، به عبارت دیگر دو ریشه حقیقی منفی متمایز داریم؛ فرم کلی پاسخ چگونه می‌شود؟

در درس معادلات داشتیم:

$$(s_1\ ,\ s_2 < 0) \rightarrow y(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t} \qquad (۲۲۹)$$

و شکل آن:

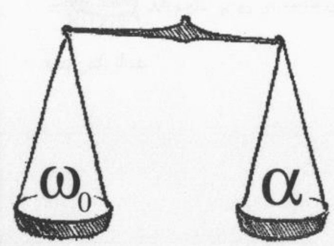


شکل (۱۴۹): پاسخ در حالت میرای شدید

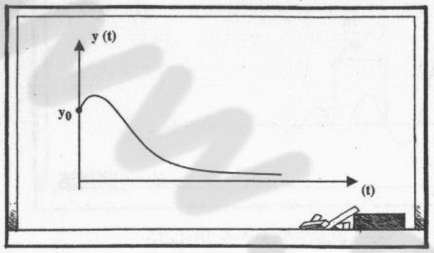
نام این حالت میرای شدید یا Over damped است.

حالات دیگر نیز بسیار ساده‌اند:

۲ـ اگر $\alpha = \omega_0$ ، یعنی دو ریشه مضاعف حقیقی منفی داریم.

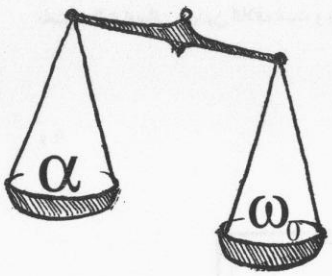


$$S_1 = S_2 < 0 \rightarrow (K_1 + K_2 t)e^{s_1 t} \qquad (۲۳۰)$$



شکل (۱۵۰): پاسخ در حالت میرای بحرانی

نام این حالت هم میرای بحرانی یا Critically damped است.



۳ـ و هرگاه $\alpha < \omega_0$ ، یعنی دو ریشه‌ی مزدوج مختلط خواهیم داشت.

$$S_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_d \qquad (۲۳۱)$$

به طوری که:

$$\omega_d^2 = \omega_0^2 - \alpha^2 \qquad (۲۳۲)$$

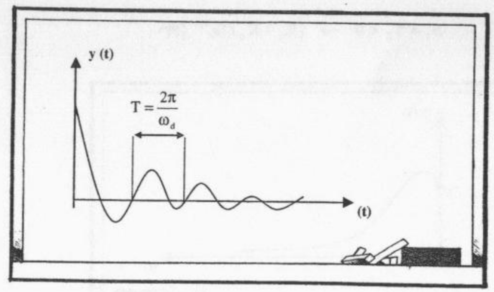
در این‌جا ω_d را فرکانس نوسانات میراشونده می‌نامیم و از رابطه‌ی ۲۳۲ حاصل می‌گردد. فرم کلی پاسخ این‌گونه است:

$$y(t) = Ke^{-\alpha t}\cos(\omega_d t + \theta) \qquad (۲۳۳)$$

و یا:

$$y(t) = e^{-\alpha t}(A\cos\omega_d t + B\sin\omega_d t) \qquad (۲۳۴)$$

و شکل سیگنال خروجی در این حالت که نامش میرای ضعیف یا under damped است ، اینگونه می‌گردد:



شکل (۱۵۱): پاسخ در حالت میرای ضعیف

۴ـ و نهایتاً چنانچه $\alpha = 0$ باشد، دو ریشه مزدوج موهومی محض داریم.

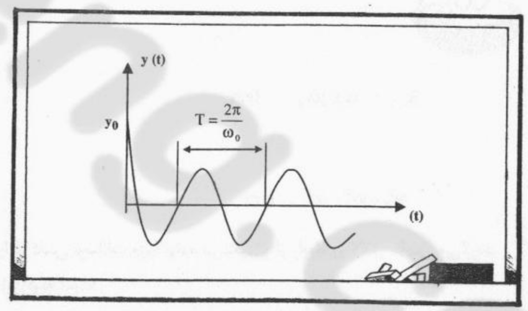
$$S_{1,2} = \pm j\omega_0 \qquad (۲۳۵)$$

نامش حالت نوسانی یا بدون اتلاف است و پاسخ بدین صورت می‌گردد:

$$y(t) = K\cos(\omega_0 t+\theta) \qquad (۲۳۶)$$

و یا

$$y(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t \qquad (۲۳۷)$$



شکل (۱۵۲): پاسخ در حالت بدون اتلاف یا نوسانی

و در هر یک از این حالات برای بدست آوردن ثابت‌ها، از صدق دادن شرایط اولیه و مشتقات آن بهره می‌گیریم. در این ۴ حالت در مورد Q (یا ضریب کیفیت) چه می‌توان گفت؟

واضح است دیگر. با توجه به رابطه‌ی

$$Q=\frac{\omega_0}{2\alpha} \qquad (۲۳۸)$$

اینگونه تقسیم‌بندی می‌شود:

میرای شدید (۲۳۹) $Q<\frac{1}{2}$

میرای بحرانی (۲۴۰) $Q=\frac{1}{2}$

میرای ضعیف (۲۴۱) $Q>\frac{1}{2}$

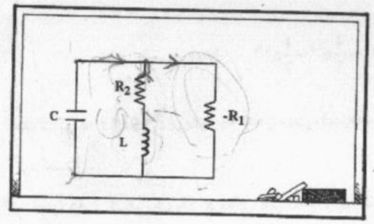
نوسانی (۲۴۲) $Q\to\infty$

حالت چهارم را با یک بیان دیگر، تکرار می‌کنیم؛ شرط نوسانی بودن یک مدار ۲ تا است: (۱) $\alpha = 0$ و ضمناً (۲) $\omega_0^2 > 0$

به نظر شما شرط دوم، بیهوده نیست؟ چرا که برقراری آن واضح است!

پس لازم شد با هم یک تمرین ببینیم !

۳۸ : ابتدا برای i_L معادله‌ی دیفرانسیلی بنویسید و سپس مقدار R_1 را طوری تعیین کنید که مدار زیر یک نوسان‌ساز باشد.



شکل (۱۵۳): مدار تمرین ۳۸

ولتاژ دو سر خازن برابر است با:

$$V_C = R_2 i_L + L\frac{di_L}{dt} \qquad (۲۴۳$$

با داشتن این ولتاژ، حالا KCL می‌زنیم:

$$R_2 C\frac{di_L}{dt} + LC\frac{d^2 i_L}{dt^2} + i_L - \frac{R_2}{R_1} i_L - \frac{L}{R_1}\frac{di_L}{dt} = 0 \qquad (۲۴۴$$

و بعد از مرتب کردن:

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{1}{LC}\left(R_2 C - \frac{L}{R_1}\right)\frac{di_L}{dt} + \frac{1}{LC}\left(1 - \frac{R_2}{R_1}\right) i_L = 0 \qquad (۲۴۵$$

حال آن دو شرط نوسانی را اعمال می‌کنیم:

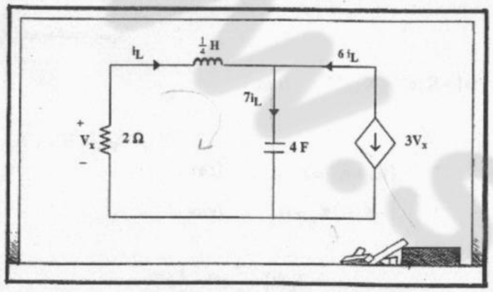
$$2\alpha = 0 \rightarrow R_1 = \frac{L}{R_2 C} \qquad (۲۴۶$$

$$\omega_0^2 > 0 \rightarrow R_1 > R_2 \qquad (۲۴۷$$

پس پاسخ، اشتراک دو شرط ۲۴۶ و ۲۴۷ است، یعنی حرفم را پس می‌گیرم!

حالا یک مسأله‌ی نسبتاً جامع حل می‌کنیم:

۳۹ ؛ ابتدا معادله دیفرانسیلی برای i_L تشکیل دهید و سپس پاسخ ورودی صفر $i_L(t)$ را بیابید. (ضمناً $i_L(0)=1\,A$ و $V_C(0)=-2\,V$)



شکل (۱۵۴): مدار تمرین ۳۹

ابتدا روی شکل KCL بازی می‌کنیم!

$$V_x = -2i_L \rightarrow 3V_x = -6i_L \qquad (۲۴۸$$

و سپس روی حلقه‌ی چپی KVL می‌زنیم:

$$2i_L + \frac{1}{4}\frac{di_L}{dt} + V_C(0) + \frac{7}{4}\int_0^t i_L\,dt = 0 \qquad (۲۴۹$$

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + 8\frac{di_L}{dt} + 7i_L = 0 \qquad (۲۵۰$$

و برای شرایط اولیه:

$$i_L(0) = 1 \qquad (۲۵۱$$

در معادله (۲۴۹) $t=0$ را قرار می دهیم، خواهیم داشت:

$$\cancel{2i_L(0)}^{2} + \frac{1}{4}\frac{di_L}{dt}(0) + \cancel{V_C(0)}^{-2} + 0 = 0 \qquad (۲۵۲$$

$$\frac{di_L}{dt}(0)=0 \qquad (۲۵۳$$

حالا باید معادله‌ی ۲۵۰) را با شرایط ۲۵۱) و ۲۵۳) حل کنیم:

$$S^2+8S+7=0 \;\rightarrow\; S_{1,2}=-1,\,-7 \qquad (۲۵۴$$

یعنی میرای شدید است، پس:

$$i_L(t)=K_1e^{-t}+K_2e^{-7t} \qquad (۲۵۵$$

و برای K_1 و K_2 داریم:

$$i_L(0)=1 \;\rightarrow\; \begin{cases} K_1+K_2=1 & (۲۵۶ \\ -K_1-7K_2=0 & (۲۵۷ \end{cases} \leftarrow\; \frac{di_L}{dt}(0)=0$$

و لذا:

$$i_L(t)=\frac{7}{6}e^{-t}-\frac{1}{6}e^{-7t}$$

دقیقاً درست است؛ حالا همین جا یک سؤال مطرح می‌شود و آن این که اگر در یک تست، پاسخ را بخواهند، اینقدر نیاز به دنگ و فنگ! دارد؟ یعنی راه ساده‌تری برای یافتن پاسخ صحیح نداریم؟

آخر من چه بگویم ! به نظرم چرا! می‌شود از ابتدا به روش «رد گزینه‌ها، پاسخ را بدست آوریم! و بگوییم گزینه‌ای درست است که در آن شرایط اولیه $i_L(0)=1A$ بخواند.

چرا شما حرفی نمی‌زنی؟ آیا با دوستت مخالفی!

به نظرم ایشان خیلی ساده لوحانه با مسأله برخورد می‌کند! آخر مگر می‌شود یک طراح تست اینقدر ساده و Low IQ باشد، مثلاً در همین تمرین ۳۹ گزینه‌ها را چنین قرار می‌دهیم.

1) $i_L(t)=5e^{-t}-4e^{-7t}$ (۲۵۹

2) $i_L(t)=-9e^{-t}+10e^{-7t}$ (۲۶۰

3) $i_L(t)=\frac{7}{6}e^{-t}-\frac{1}{6}e^{-7t}$ (۲۶۱

4) $i_L(t)=\frac{4}{3}e^{-t}-\frac{1}{3}e^{-7t}$ (۲۶۲

حال از این که $i_L(0)=1$ می‌دانید چه نکته‌ی مهمی را متوجه می‌شویم؟! اینکه یا گزینه‌ی ۱ درست است یا ۲ یا ۳ و یا ۴.

و یا این که زمین، گرد است!

اما ناامید نشوید! اگر خوب دقت کنید، یک راه حرفه‌ای هست، بگویید گزینه‌ای درست است که در آن «شرایط اولیه‌ی مشتق» سیگنال صدق کند. یعنی مثلاً در این تمرین باید

$$\frac{di_L}{dt}(0)=0 \qquad (۲۶۳$$

که اگر این را در گزینه‌ها چک کنیم، به کمک رد گزینه‌ها، فقط گزینه‌ی ۳ می‌تواند درست باشد.

اگر بی‌ادبی نباشد! من یک اعتراض دارم؛ بدست آوردن خود شرایط اولیه‌ی مشتق هم قدری زمان می‌برد، اگر می‌شد آن را هم سریع‌تر بدست آوریم که عالی بود.

بسیار خوب، برای این هم راهی داریم!

به این روابط دقت کنید:

$$\frac{di_L}{dt}(0^+)=\frac{1}{L}V_L(0^+)=\frac{1}{L}\times(\text{ولتاژ اولیه‌ی سلف}) \qquad (۲۶۴$$

$$\frac{dV_C}{dt}(0^+)=\frac{1}{C}I_C(0^+)=\frac{1}{C}\times(\text{جریان اولیه‌ی خازن}) \qquad (۲۶۵$$

من اسم این دو رابطه را «تعبیرهای فیزیکی» نهاده‌ام.

می‌دانید این روابط به چه دردی می‌خورند؟

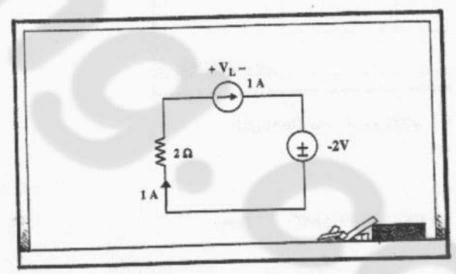
خیلی جالب شد، به کمک این روابط برای بدست آوردن شرایط اولیه مشتق (یعنی $\frac{di_L}{dt}(0^+)$, $\frac{dV_C}{dt}(0^+)$) ابتدا مدار را در $t=0^+$ رسم می‌کنیم. (به کمک رابطه صفره) و سپس با تحلیل مدار، $V_L(0^+)$ (و در نتیجه $\frac{di_L}{dt}(0^+)$) و یا $I_C(0^+)$ (و در نتیجه $\frac{dV_C}{dt}(0^+)$) را داریم.

بگذارید من تمام کنم، و در نتیجه می‌گوییم گزینه‌ای درست است که شرایط اولیه‌ی مشتق سیگنال در آن صدق کند!...

خُب پس حالا همین تمرین ۳۹) را با گزینه‌های ۲۵۹) الی ۲۶۲) با این روش حل کنید.

با رسم مدار در $t=0^+$ به کمک رابطه صفره داریم:

in $t=0^+$



شکل (۱۵۵): مدار تمرین ۳۹) در حالت $t=0^+$

با یک KVL ساده:

$$KVL:\ V_L=-2-(-2)=0 \rightarrow \frac{di_L}{dt}(0^+)=0 \qquad (۲۶۶$$

و نهایتاً با ردّ گزینه، مسأله حل است.

یک مشکل:

وقتی می‌خواهیم مدار را در $t=0^+$ به کمک رابطه‌ی صفره رسم کنیم، نیاز به $V_C(0^+)$ و $i_L(0^+)$ داریم، اگر آن‌ها را نداشتیم، چه کنیم؟

سؤال خوبی است، آنگاه ابتدا مدار را در $t=0^-$ به کمک رابطه بی‌نهایته رسم می‌کنیم تا $V_C(0^-)$. (و در نتیجه $V_C(0^+)$) و یا $i_L(0^-)$ (و در نتیجه $i_L(0^+)$) بدست آیند و سپس سایر قدم‌ها ... پس یک نفر جمع‌بندی کند.

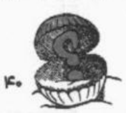
قدم صفرم: رسم مدار در $t=0^-$ به کمک رابطه بی‌نهایته و یافتن شرایط اولیه $V_C(0^-)$ و $i_L(0^-)$

قدم یکم: رسم مدار در $t=0^+$ به کمک رابطه صفره و یافتن $V_L(0^+)$ و $i_C(0^+)$.

قدم دوم: استفاده از تعبیرهای فیزیکی (روابط ۲۶۴ و ۲۶۵)

قدم نهایی: حل تست به کمک ردّ گزینه‌ها و ...

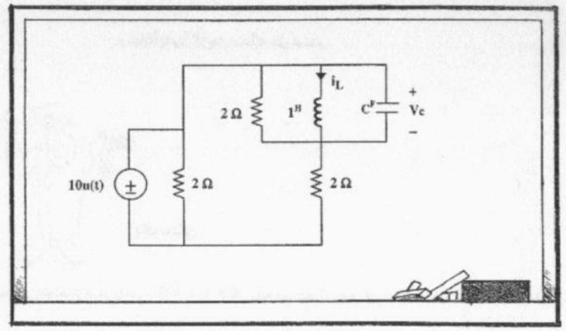
تا دیر نشده با هم، یکی دوتا مثال خوب ببینیم:



۴۰ : در مدار شکل ۱۵۶) داریم:

$$\frac{dV_C}{dt}(0^+)=10 \qquad (۲۶۷$$

$$\frac{di_L}{dt}(0^+)=V_C(0^+)=i_L(0^+)=0 \qquad (۲۶۸$$

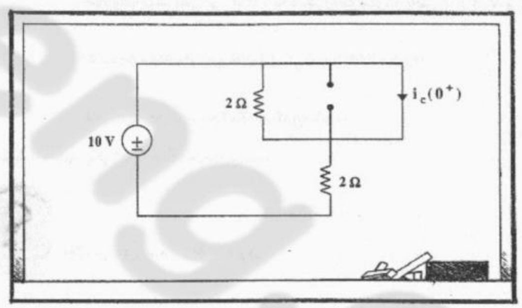


شکل (۱۵۶): مدار تمرین ۴۰

مقدار ظرفیت خازن (C) چقدر است؟

به راحتی از قدم یکم شروع می‌کنیم:

$t = 0$

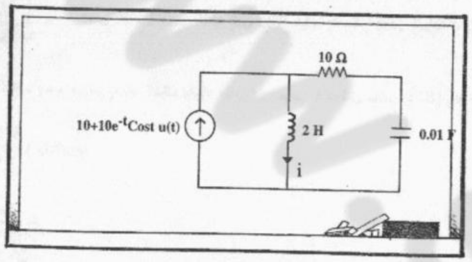


شکل (۱۵۷): مدار تمرین ۴۰ در $t = 0^+$

و با یک KVL ساده:

$$i_c(0^+)=\frac{10}{2}=5=C\frac{dV_c}{dt}(0^+)=10C \Rightarrow C=0.5F \qquad (۲۶۹$$

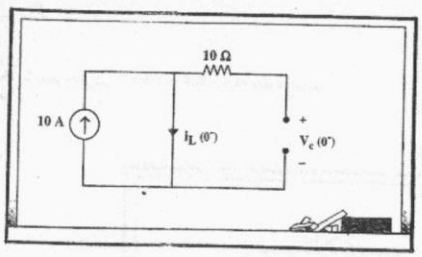
۴۱: در شکل (۱۵۸)، $\frac{di}{dt}(0^+)$ چقدر می‌شود؟



شکل (۱۵۸): مدار تمرین ۴۱

در تمرین قبلی به قدم صفرم نیازی نبود ولی در این‌جا قدم صفرم لازم است، پس دست به کار می‌شویم:

$t = 0^-$



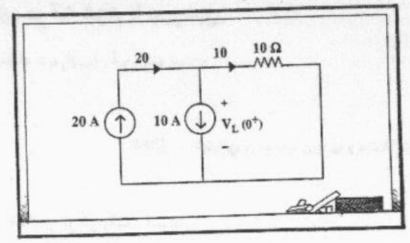
شکل (۱۵۹): مدار تمرین ۴۱ در $t = 0^-$

واضح است که:

$$i_L(0^-)=10^A \ , \ V_c(0^-)=0^V \qquad (۲۷۰$$

و حالا قدم اول:

t = 0



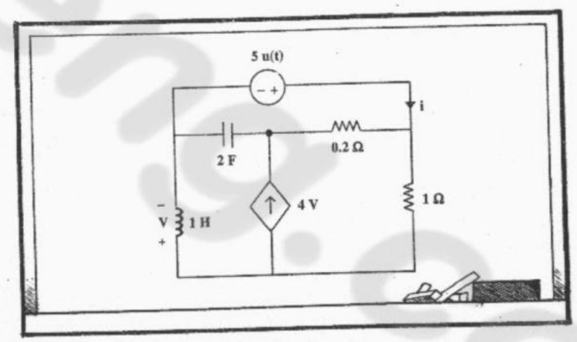
شکل (۱۲۰): مدار تمرین ۴۱ در $t=0^+$

$$V_L(0^+) = 10\times10 = 100v \qquad (۲۷۱)$$

و در نهایت:

$$\frac{di_L}{dt}(0^+) = \frac{1}{2}\times100 = 50\,A/s \qquad (۲۷۲)$$

۴۲: در مدار شکل زیر شرایط اولیه، صفر هستند، $i(0^+)$ و $i(\infty)$ برابر کدام است؟



شکل (۱۲۱): مدار تمرین ۴۲

۱) $i(\infty)=5\,,\,i(0^+)=29$

۲) $i(\infty)=-5\,,\,i(0^+)=29$

۳) $i(\infty)=-5\,,\,i(0^+)=-29$

۴) $i(\infty)=5\,,\,i(0^+)=-29$

قبل از آن‌که شما، مسأله را حل کنید، یک نکته‌ی مهم بگوییم؛ لطفاً خوب دقت کنید:

ببینید گاهی صورت بعضی تست‌ها فریاد می‌زند که:

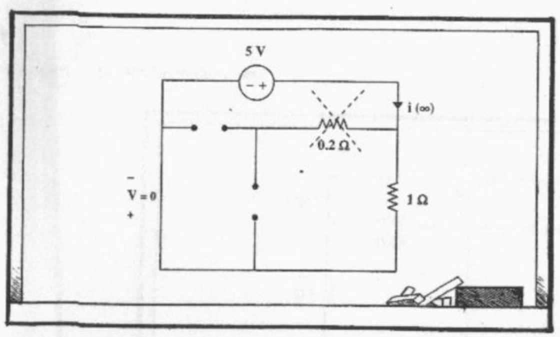
" مرا اینگونه حل کنید!!! "

مثلاً صورت این تست، می‌گوید یک بار از رابطه صفره و یک بار از رابطه بی‌نهایته کمک بگیرید و.....

ولی گاهی در یک تست این شمائید که باید بفهمید چه راهی بهینه است مثلاً اگر در همین مسأله، در مورد $i(t)$ سؤال کر بود و ما می‌خواستیم با " رد گزینه" مسأله را حل کنیم، خودمان (بدون آنکه مسأله مستقیماً بگوید) $i(0)$, $i(\infty)$ را می‌کردیم و آن گاه می‌گفتیم گزینه‌ای درست است که.....

حالا من مسأله را حل می‌کنم!

in $t\to\infty$

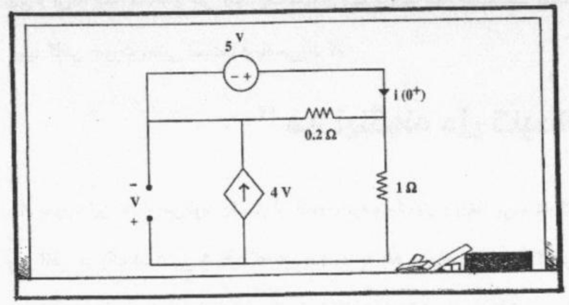


شکل (۱۲۲): مدار تمرین ۴۲ در بی‌نهایت

$$i(\infty)=\frac{5}{1}=5^A \qquad (۲۷۳)$$

و سپس $i(0^+)$:

in $t=0^+$

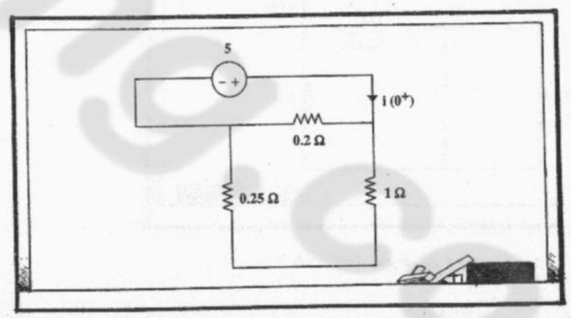


شکل (۱۲۳): مدار تمرین ۴۲ در 0^+

برای حل از روش گره استفاده می‌کنیم....

شرمنده !، اما من راه حل بهتری سراغ دارم، در این مدار منبع جریان وابسته‌ای داریم که به ولتاژ خودش وابسته است. یعنی یک مقاومت $\frac{1}{4}$ اهمی،

پس مدار این جوری می‌شود:



شکل (۱۲۴): مدار تمرین ۴۲ پس از ساده‌سازی در $t=0^+$

$$i(0^+)=\frac{5}{0.2\,\|\,1.25}=+29 \qquad (۲۷۴$$

یعنی گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

مدارهای مرتبه دوم با ورودی:

فرم کلی معادله دیفرانسیل این‌گونه است:

$$\frac{d^2y}{dt^2}+2\alpha\frac{dy}{dt}+\omega_0^2y= \text{عباراتي بر حسب ورودي و مشتقاتش} \qquad (۲۷۵$$

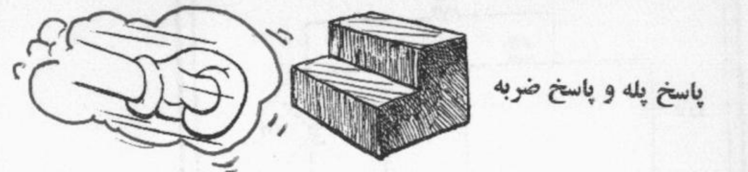
پاسخ کامل مشتمل بر دو بخش است:

$$y(t)=y_h(t)+y_p(t) \qquad (۲۷۶$$

که y_h همان پاسخ همگن و y_p پاسخ خصوصی است. (یاد درس معادلات دیفرانسیل بیافتید!)

پاسخ همگن ناشی از شرایط اولیه است. (ورودی =0 یا سمت راست معادله دیفرانسیل =0)

پاسخ خصوصی ناشی از ورودی است، و هم جنس با سمت راست معادله‌ی دیفرانسیل.



پاسخ پله و پاسخ ضربه

مثلاً در یک مدار RLC موازی پاسخ پله را برای جریان سلف می‌خواهیم.

معادله دیفرانسیل اینجوری می‌شود:

$$\begin{cases}\dfrac{d^2 i_L}{dt^2}+\dfrac{1}{RC}\dfrac{di_L}{dt}+\dfrac{1}{LC}i_L=\dfrac{1}{LC}u(t)\\ i_L(0)=0\ ,\ i_L'(0)=0\end{cases} \qquad (۲۷۷)$$

حالا برای پاسخ همگن مثلاً فرض کنید به صورت میرای ضعیف است:

پاسخ همگن $i_{Lh}(t)=e^{-\alpha t}(A\cos\omega_d t+B\sin\omega_d t)$ (۲۷۸)

پاسخ خصوصی $i_{LP}(t)=?$ (۲۷۹)

قبل از اتمام حل مسأله یک نکته‌ی جالب دیگر بگویم، ببینید اگر بنویسیم:

$$i_L(t)=i_{Lh}(t)+i_{LP}(t) \qquad (۲۸۰)$$

و با توجه به میرا بودن $i_{Lh}(t)$ داریم:

$$\lim_{t\to\infty} i_L(t)=\lim_{t\to\infty} i_{LP}(t) \qquad (۲۸۱)$$

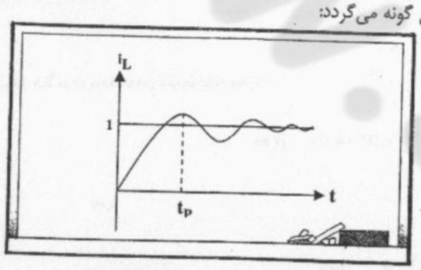
آیا اصل منظورم را فهمیدید؟

جالب شد. یعنی در اینجا پاسخ خصوصی همان پاسخ دائمی یا ماندگار شد، و می‌شود مقدار آن را از $y(\infty)$ (به کمک رابطه بی‌نهایته) بدست آورد و لزومی به مراحل انجام شده برای یافتن پاسخ خصوصی در درس معادلات دیفرانسیل نمی‌باشد.

پس یعنی در این مسأله

$$i_{LP}(t)=1 \qquad (۲۸۲)$$

یعنی فرم پاسخ در این مسأله این گونه می‌گردد:



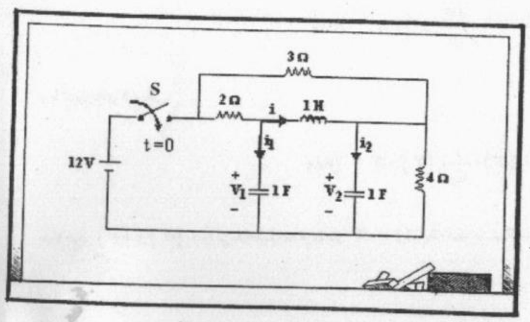
شکل (۱۲۵): پاسخ پله مدار RLC موازی

و برای پاسخ ضربه، می‌توان از پاسخ پله مشتق گرفت:

$$h(t)=\frac{ds(t)}{dt}=\left(\frac{\omega_0^2}{\omega_d}e^{-\alpha t}\sin\omega_d t\right)u(t) \qquad (۲۸۳)$$

و برای یافتن سایر پاسخ‌ها، مثل پاسخ پالس در مدارهای خطی تغییرناپذیر با زمان، از خواص جمع آثار و شیفت زمانی استفاده می‌کنیم.

۴۳: S مدت طولانی باز بوده و در $t=0$ بسته می‌گردد. $\dfrac{d^2 i}{dt^2}(0^+)$ چقدر است؟



شکل (۱۲۶): مدار تمرین ۴۳

اگر $\frac{di}{dt}(0^+)$ را می‌خواست، خیلی ساده بود، چرا که با تعبیرهای فیزیکی که قبلاً حرفش را زدیم، کار ساده می‌شد، در حلقه‌ی وسطی می‌گفتیم:

$$KVL: \frac{di}{dt}(0^+) + V_2(0^+) - V_1(0^+) = 0 \qquad (۲۸۴$$

و چون مدار قبلاً مرده بوده همه‌ی شرایط اولیه صفرند:

$$i(0^+) = V_2(0^+) = V_1(0^+) = 0 \qquad (۲۸۵$$

پس:

$$\frac{di}{dt}(0^+) = 0 \qquad (۲۸۶$$

اما حیف که حرفهای من ربطی به خواسته‌ی مسأله نداشت!

اشتباه می‌کنید، خیلی هم حرف‌های خوبی بود، از رابطه‌ی ۲۸۴) مشتق بگیرید و از تعبیرهای فیزیکی استفاده کنید:

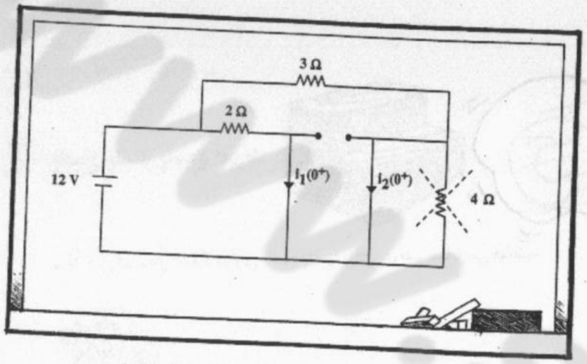
با مشتق‌گیری داریم:

$$\frac{d^2i}{dt^2}(0^+) + \frac{dV_2}{dt}(0^+) - \frac{dV_1}{dt}(0^+) = 0 \qquad (۲۸۷$$

و با تعبیرهای فیزیکی،

$$\frac{d^2i}{dt^2}(0^+) + \frac{1}{C_2} i_2(0^+) - \frac{1}{C_1} i_1(0^+) = 0 \qquad (۲۸۸$$

حالا فقط $i_2(0^+), i_1(0^+)$ را می‌خواهیم، مدار را در $t = 0^+$ (با رابطه صفره) می‌کشیم:



شکل (۱۲۷): مدار تمرین ۴۳ در $t = 0^+$ (با رابطه صفره)

$$i_1(0^+) = \frac{12}{2} = 6A \qquad (۲۸۹$$

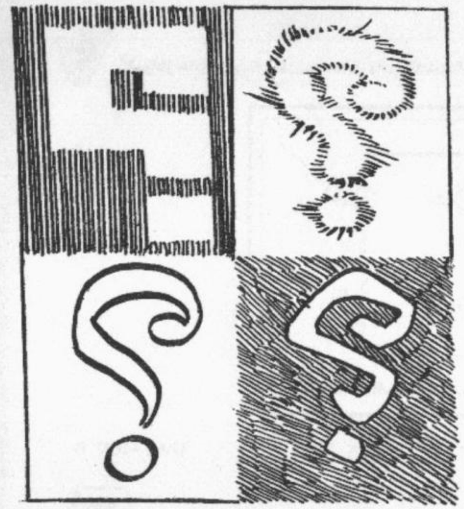
$$i_2(0^+) = \frac{12}{3} = 4A \qquad (۲۹۰$$

پس:

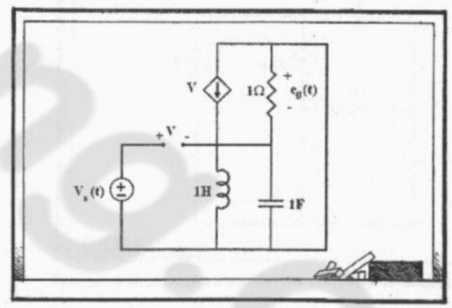
$$\frac{d^2i}{dt^2}(0^+) + 4 - 6 = 0 \rightarrow \frac{d^2i}{dt^2}(0^+) = 2 \qquad (۲۹۱$$

تا اینجا در مورد مدارهای مرتبه دوم کافی است. بعداً با هم از این مبحث نیز مسایل بیشتری حل می کنیم.

تمرینات فصل چهارم

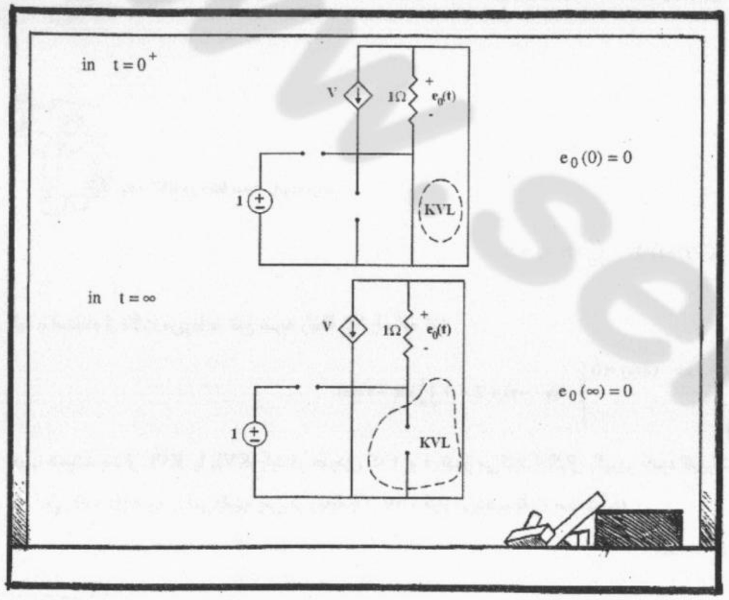


۱ـ پاسخ پله $e_0(t)$ کدام است؟



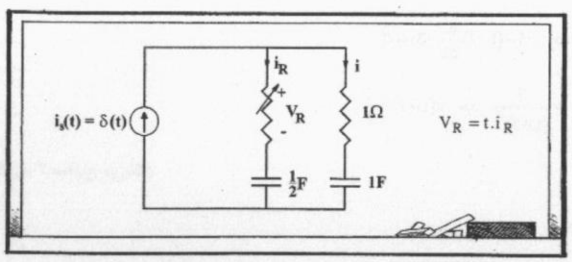
۱) $\left(1-e^{-t}\right)u(t)$ ۲) $\left(1+te^{-t}\right)u(t)$ ۳) $e^{-t}u(t)$ ۴) $-te^{-t}u(t)$

به نظرم با بررسی مقدار اولیه و نهایی $e_0(t)$ گزینهٔ صحیح مشخص می‌شود.



و تنها گزینهٔ ۴ دو شرط فوق را دارد.

۲ـ همگی شرایط اولیه صفر هستند. $i(C=1F)$ در $t=1s$ کدام است؟



۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{8}$ ۴) $\frac{1}{16}$

چون مقاومت غیرخطی داریم و مدار مرتبهٔ دو پس از رابطهٔ طلایی نمی‌توانیم استفاده کنیم پس به سراغ KCL و KVL برویم.

$i_R = \delta(t) - i$

یک KVL در حلقهٔ سمت راست بزنیم.

$$t(\delta(t)-i)+\frac{1}{\frac{1}{2}}\int_0^t(\delta(t)-i)\,dt-\int_0^t i\,dt-i=0$$

باید با استفاده از نکات مربوط به تابع ضربه رابطهٔ بالا را ساده کنید.

$$\left.\begin{array}{l} f(t)\,\delta(t)=f(0)\,\delta(t) \;\Rightarrow\; t\,\delta(t)=0 \\ \int_0^t \delta(t)\,dt=1 \end{array}\right\} \Rightarrow -ti+2-3\int_0^t i\,dt-i=0$$

خوب همیشه بعد از KCL یا KVL، باید در حدودی که t و i تغییر می‌کنند انتگرال بگیریم حدود تغییرات t را می‌دانیم از 0 تا 1 ولی $I_0=i(t=0)$ را نمی‌دانیم، پس در رابطهٔ بالا $t=0$ قرار می‌دهیم تا I_0 بدست آید:

$$0+2-0-i=0 \;\Rightarrow\; i=2A$$

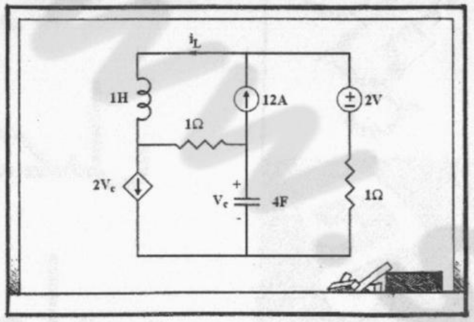
و برای آن که di و dt در رابطه ظاهر شوند، یکبار از رابطه برحسب t مشتق می‌گیریم:

$$\frac{d\left[-(t+1)i+2-3\int_0^t i\,dt\right]}{dt}=0 \;\Rightarrow\; -i-(t+1)\frac{di}{dt}-3i=0$$

$$\Rightarrow\; \int_2^i \frac{di}{-4i}=\int_0^t\frac{dt}{t+1} \;\Rightarrow\; i=\frac{2}{(t+1)^4} \;\Rightarrow\; i(t=1)=\frac{1}{8}$$

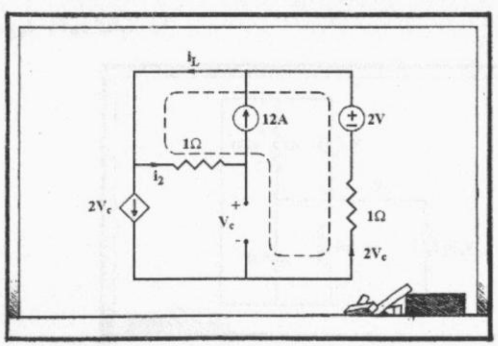
پس گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

۳ـ ولتاژ خازن و جریان سلف در حالت دائمی کدامند؟



۱) $12A\,,\,-10V$ ۲) $12A\,,\,-12V$ ۳) $\frac{16}{3}A\,,\,-\frac{10}{3}V$ ۴) $\frac{16}{3}A\,,\,-12V$

در حالت دائمی سلف اتصال کوتاه و خازن مدار باز است:



حالا اگر یک KVL در مدار بزنیم داریم:

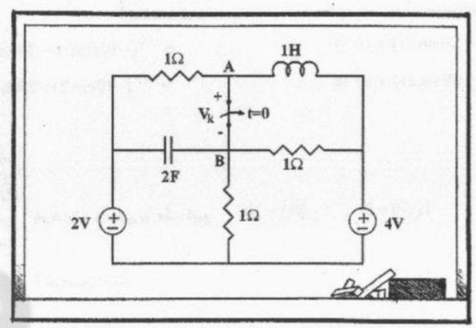
$$+V_C+2V_C-2+12=0 \;\rightarrow\; V_C=-\frac{10}{3}V$$

و با یک KCL هم i_L بدست می‌آید:

$$i_L = 12 + 2V_C = \frac{16}{3}$$

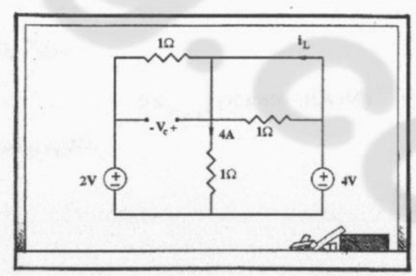
پس گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

۴ـ کلید K به مدت طولانی بسته بوده و مدار به حالت دائمی درآمده است، در $t = 0$ کلید باز می‌شود V_K در $t = 1s$ کدام است؟



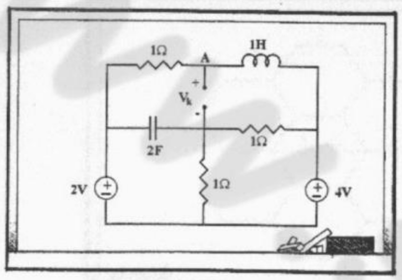
۱) 2 ۲) 2.37 ۳) 2.74 ۴) 3.1

در ابتدا باید مدار را در حالت دائمی رسم کنیم و مقادیر اولیه را بدست آوریم.



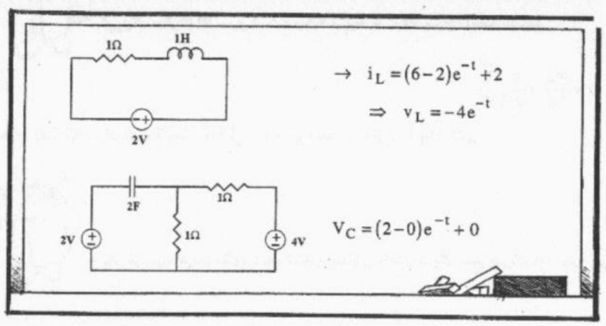
با کمی دقت به راحتی $i_L(0) = 6A$ و $V_C(0) = 2V$ بدست می‌آید.

بعد از باز شدن کلید مدار به صورت زیر در می‌آید:



قبول دارید که ولتاژ دو سر هر کدام از دو شاخه شامل سلف و خازن 2V است؟

بله، چقدر جالب. فهمیدم، می‌شه مدار بالا را به صورت دو مدار مرتبهٔ اول نوشت:



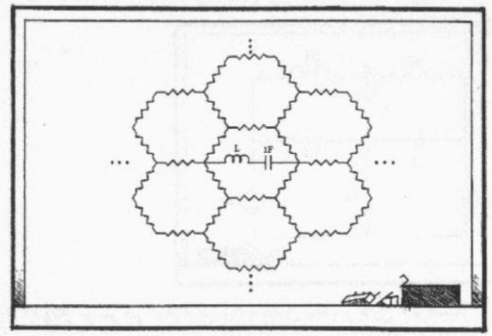
حالا با یک KVL هم V_K بدست می‌آید:

$$V_K = -V_L + 4 - 2 - V_C = 2e^{-t} + 2$$

پس گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$V_K(t=1) = 2e^{-1} + 2 = 2.74$$

۵ـ تمام مقاومت‌ها 1Ω هستند و شبکه از هر طرف به بینهایت می‌رود، به ازاء کدام مقدار L، $Q=1.2$ خواهد بود؟



۱) 0.5 H
۲) 1 H
۳) 1.2 H
۴) 1.96 H

این یک مدار RLC سری است و روابط مربوط به RLC سری را حفظ هستیم.

$$2\alpha=\frac{R}{L}\ ,\ \omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}\ \Rightarrow\ Q=\frac{\omega_0}{2\alpha}=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

و حالا فقط کافی است، مقاومت معادل از دو سر سلف و خازن را پیدا کنیم.

و راه حل پیدا کردن مقاومت شبکه‌های بینهایتی را بلدیم، یک منبع جریان 1A وارد می‌کنیم و یک منبع جریان 1A هم خارج می‌کنیم.

در اثر منبع جریان 1A ورودی: $V=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}$

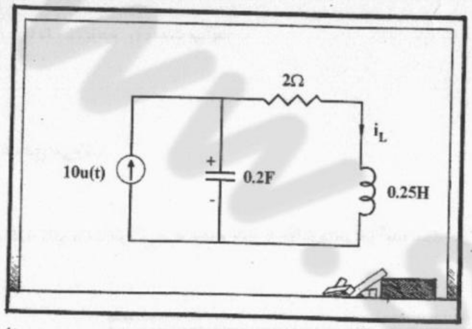
و در اثر منبع جریان 1A خروجی: $V=\frac{1}{12}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}$

پس کلاً داریم:

$$R_{eq}=V=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}\right)=\frac{7}{6}\ \rightarrow\ Q=\frac{6}{7}\sqrt{\frac{L}{1}}=1.2\ \rightarrow\ L=1.96\text{H}$$

پس گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

۶ـ $i_L(t)$ کدام است؟



۱) $e^{-4t}(-10\cos 2t-20\sin 2t)$
۲) $e^{-4t}(-10\cos 2t-20\sin 2t)+10$
۳) $e^{-2t}(-10\cos 2t-20\sin 2t)$
۴) $e^{-4t}(-10\cos 2t+20\sin 2t)+10$

شرط اولیه و نهایی را چک کنیم. $i_L(0)=0\ ,\ i_L(\infty)=10$

پس گزینهٔ ۲ یا ۴ صحیح است.

حالا باید از تعبیرهای فیزیکی و مشتق گرفتن از i_L استفاده کنیم.

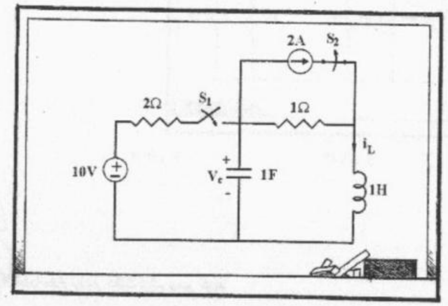
$$V_L\left(0^+\right)=0\ \rightarrow\ \frac{di_L}{dt}\left(0^+\right)=0$$

از گزینهٔ ۲ مشتق بگیریم.

$$\frac{di_L\left(0^+\right)}{dt}=\left[-4e^{-4t}(-10\cos 2t-20\sin 2t)+e^{-4t}(20\sin 2t-40\cos 2t)\right]\Bigg|_{t=0}=0$$

پس گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

۷ـ در مدار شکل زیر کلید S_1 برای مدت طولانی باز و کلید S_2 برای مدت طولانی بسته بوده است. در $t=0$ کلید S_1 را بسته و S_2 را باز می‌کنیم. کمیت‌های $\frac{dV_C(0^+)}{dt}$ و $\frac{di_L(0^+)}{dt}$ به ترتیب کدامند؟

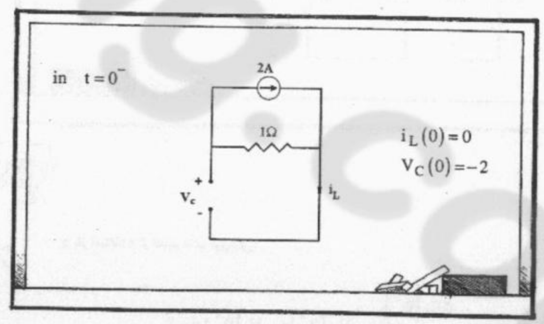


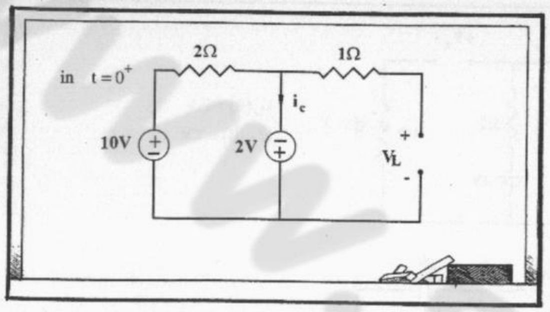
۱) 6 و 2-   ۲) 4 و 2-   ۳) 3 و 1-   ۴) 6 و 2

باید از تعبیرهای فیزیکی استفاده کنیم.

$$\frac{dV_C(0^+)}{dt}=\frac{1}{C}i_C(0^+)$$

$$\frac{di_L}{dt}(0^+)=\frac{1}{L}V_L(0^+)$$

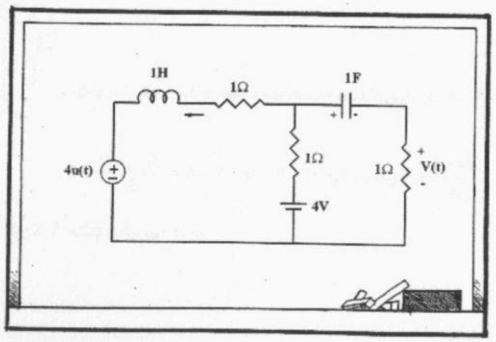




$$\begin{matrix} V_L(0^+)=-2V \\ i_C(0^+)=6A \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dV_C(0^+)}{dt}=1\times 6=6 \\ \frac{di_L(0^+)}{dt}=\frac{1}{1}\times -2=-2 \end{cases}$$

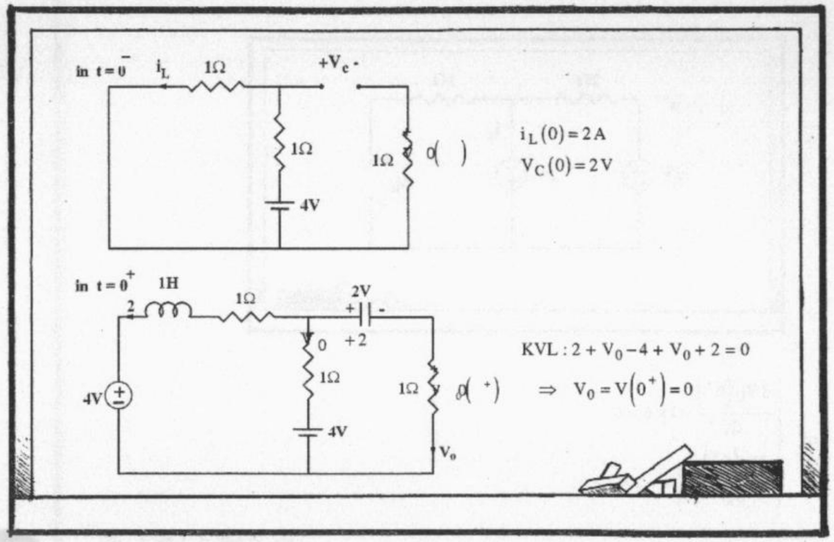
پس گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

۸ـ در $t<0$ مدار در حالت دائمی است، $V(t)$ برای $t>0$ کدام است؟



۱) $2(t+1)e^{-t}$ ۲) $\frac{1}{2}te^{-t}$ ۳) $\frac{1}{2}(t+4)e^{-t}$ ۴) $2te^{-t}$

ابتدا مدار را در 0^- رسم کنیم و مقادیر اولیه را بیابیم:



پس گزینهٔ ۲ یا ۴ صحیح است.

و حالا با زدن یک KVL در حلقهٔ سمت راست و مشتق‌گیری از آن $V'(0)$ را با استفاده از تعبیرهای فیزیکی می‌یابیم.

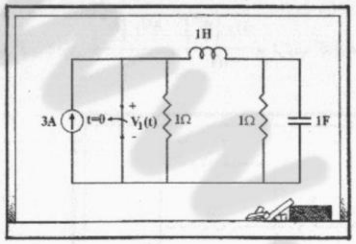
$$V(t)-4+V(t)+i_L(t)+V_C=0 \Rightarrow 2\frac{dV(t)}{dt}+V_L(t)+i_C(t)=0 \Rightarrow V'(0)=\frac{-0-(-4)}{2}=2$$

حال اگر از گزینهٔ ۴ مشتق بگیریم، داریم:

$$V'(t)\Big|_{t=0}=\left(2e^{-t}-2te^{-t}\right)\Big|_{t=0}=2$$

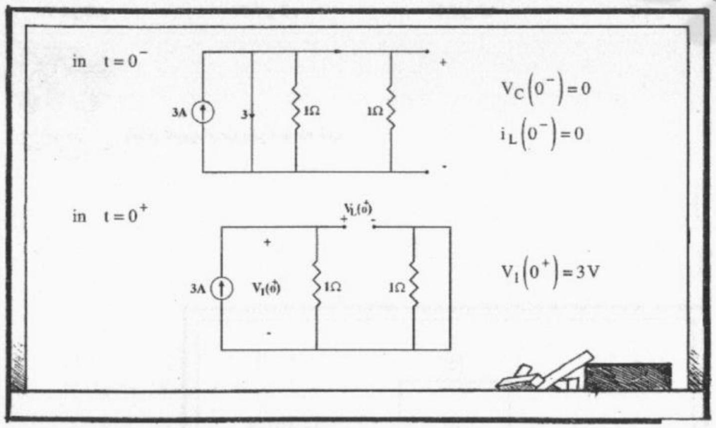
پس گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

۹ـ کلید در $t=0$ باز می‌شود و قبل از آن به حالت دائم رسیده است. $V_1(0^+)$ و $\frac{dV_1(0^+)}{dt}$ کدامند؟



۱) 0 و 3   ۲) 0 و -3 ۳) 3 و 3   ۴) 3 و -3

ابتدا مدار را در حالت دائم رسم کنیم:

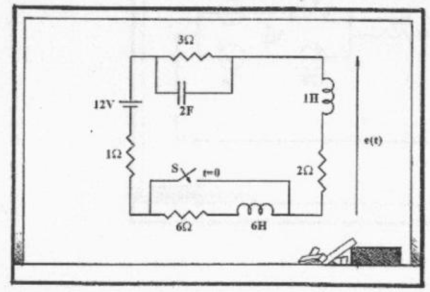


و باز استفاده از تعبیرهای فیزیکی:

$$V_1(t)+i_L(t)=3 \rightarrow \frac{dV_1}{dt}+\frac{di_L}{dt}=0 \rightarrow \frac{dV_1(0^+)}{dt}=-V_L(0^+)=-V_1(0^+)=-3$$

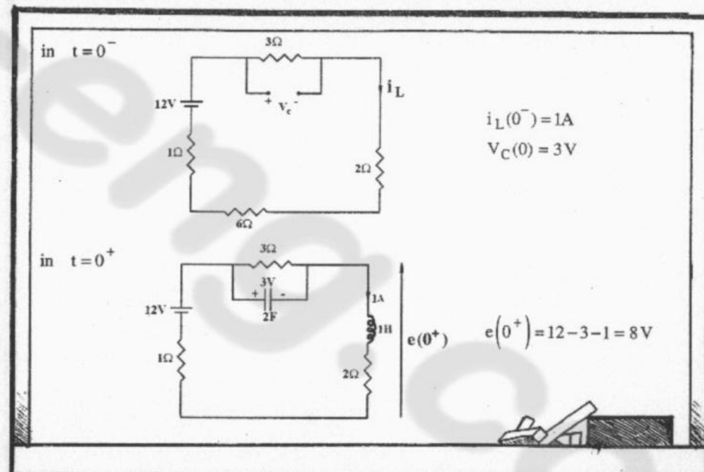
پس گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

۱۰ـ مدار شکل مقابل در حالت دائمی است. در لحظهٔ $t=0$ کلید S بسته می‌شود. $e(0^+)$ و $\frac{de(0^+)}{dt}$ کدامند؟



۱) $8V$ و $-6\frac{V}{sec}$ ۲) $8V$ و $0\frac{V}{sec}$ ۳) $3V$ و $-12\frac{V}{sec}$ ۴) هیچکدام

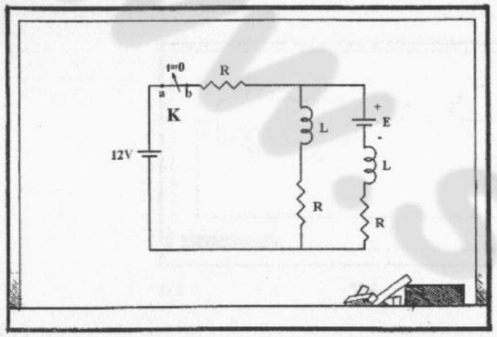
قبل از $t=0$ مدار به حالت دائم رسیده است.



$$e(t)=12-V_C-i_L \Rightarrow \frac{de(t)}{dt}=-\frac{dV_C}{dt}-\frac{di_L}{dt}=-\frac{1}{2}i_C-V_L \Rightarrow \frac{de(0^+)}{dt}=0-(8-2)=-6$$

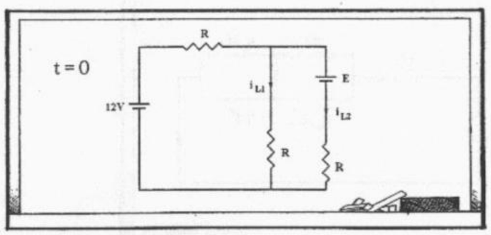
پس گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

۱۱ـ کلید K به مدت طولانی بسته بوده و در $t=0$ باز می‌شود، E چقدر باشد تا در لحظهٔ باز شدن کلید ولتاژ ضربه‌ای بین دو سر ab ایجاد نشود؟



۱) 4 ۲) 12 ۳) 16 ۴) 24

قبل از باز شدن کلید، مدار به حالت دائم رسیده است، پس:



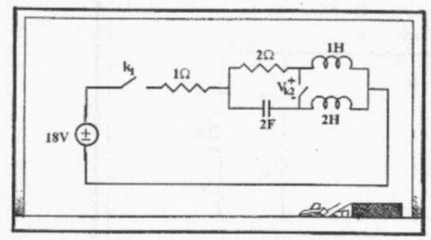
$$\begin{cases}12=R\left(i_{L_1}+i_{L_2}\right)+Ri_{L_1}\\ -E+Ri_{L_1}-Ri_{L_2}=0\end{cases} \Rightarrow i_{L_1}=\frac{1}{3R}(12+E)\ ,\quad i_{L_2}=\frac{1}{3R}(12-2E)$$

و برای آن‌که ولتاژ ضربه ایجاد نشود، باید:

$$i_{L_1}=-i_{L_2} \Rightarrow E=24V$$

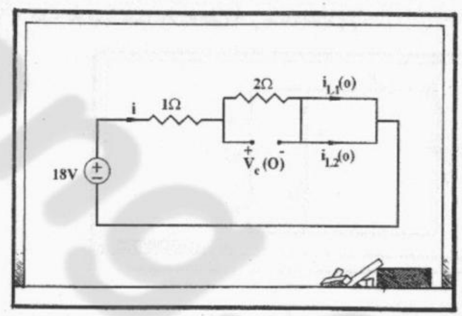
پس گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

۱۲ـ در مدار شکل زیر در حالی که سلف‌ها و خازن‌ها بدون انرژی هستند، کلیدهای k_1 و k_2 به‌طور هم‌زمان بسته می‌شوند. پس از آن‌که مدار به حالت دائمی خود رسید، کلید k_2 را مجدداً باز می‌کنیم. درست پس از باز شدن کلید k_2 ولتاژ دو سر V_{k_2} کدام است؟



۱) 0 ۲) 2 ۳) 4 ۴) 8

اول با رسم مدار در حالت دائمی مقادیر اولیه جریان سلف‌ها و ولتاژ خازن را می‌یابیم.



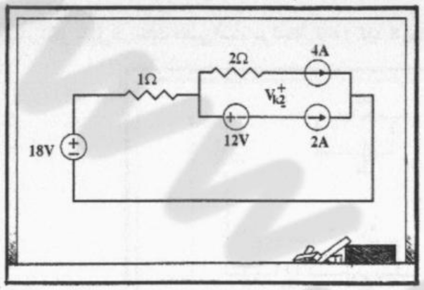
$$i = \frac{18}{3} = 6A$$

$$i_{L_1}(0) = \frac{2}{2+1} \times 6 = 4A$$

$$i_{L_2}(0) = \frac{1}{2+1} \times 6 = 2A$$

$$V_C(0) = 2 \times 6 = 12V$$

حالا که مدار به حالت دائمی رسیده است کلید k_2 باز می‌شود و مدار به‌صورت زیر درمی‌آید.



$$V_{k_2} = -2 \times 4 + 12 = 4V$$

پس گزینه ۳ صحیح می‌باشد.