

فصل ۳ مدارهای مرتبه اول

مقدمه

تا امروز آن چه دیدیم عناصر بی حافظه بودند؛ یعنی مقاومت و منابع. از این جلسه به بعد قدری با کلاس تر می شویم؛ یعنی با عناصر جدیدی آشنا می شویم؛ به نام خازن و سلف و آنها را درون مدارها به کار می گیریم. تا قبل از این جلسه؛ روابط بین ولتاژ و جریان عناصر به صورت جبری بود، بنابراین معادلات ناشی از KCL و KVL و ... همگی جبری می شدند؛ اما با ورود حضرات سلف و خازن به مدارات ما، روابط به صورت معادلات دیفرانسیلی و یا انتگرالی می شود. اگر معادله توجیه کننده یک مدار به صورت معادله دیفرانسیل مرتبه اول باشد؛ به آن مدار، مرتبه اول می گوئیم. این فصل مقدمه بسیار مهمی برای مدارهای علمی می باشد و اگر مدارهای مرتبه اول را خوب بفهمیم کارمان در مدارهای مرتبه دوم و سوم و ... خیلی روان خواهد بود.

۱-۳ خازن و سلف

ابتدا به معرفی این دو عنصر مهم الکترونیکی می پردازیم. فرق مهم این عناصر با مقاومت در آن است که اینها حافظه



دارند، می دانید یعنی چه؟

یعنی مقدار ولتاژ (یا جریان) در آنها به مقادیر گذشته جریان (یا ولتاژ) بستگی دارد.



اصلاً به همین دلیل است که برای خازن عبارت ولتاژ اولیه و برای سلف، کلمه جریان اولیه معنی دارد. در مقاومت



چنین چیزی نداشتیم.

بله، نداشتیم و نداریم.



۱-۱-۳ روابط و اتصالات خازن‌ها



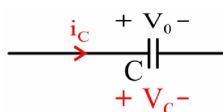
حال به بررسی روابط و فرمول‌های خازن می‌پردازیم. خازن را خوب یاد بگیرید؛ سلف هم خیلی به آن شبیه است. (به

قول بزرگان! دوگان یکدیگرند.

$$q = C \times V \quad \text{رابطهٔ اساسی} \quad (۱-۳)$$

که در آن q (بار الکتریکی) برحسب کولن و C (ظرفیت خازن) برحسب فاراد و V (ولتاژ) برحسب ولت است. (قبول دارم این قسمت بسیار مبتدیان‌ه و ساده بود!)

آنچه مهم است روابط ولتاژ و جریان است به شرح ذیل:



شکل (۱-۳) خازن

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{dV}{dt} \quad (۲-۳)$$

$$V = V_0 + \frac{1}{C} \int_0^t i \cdot dt \quad (۳-۳)$$

و در مورد انرژی:

$$W = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} q \cdot V \quad (۴-۳)$$

پس هر خازن با دو مشخصه، معرفی می‌شود؛ کدام‌ها؟

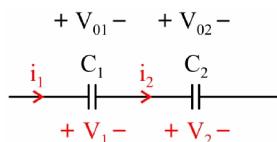


یکی ظرفیت خازن و دیگری ولتاژ اولیهٔ آن؛ اولی مربوط به ساختمان خازن و دومی مربوط به مداری است که خازن

در آن شارژ شده است.



مبحث بعدی به هم‌بستن خازن‌هاست که حدس می‌زنم به خوبی بلد باشید جمع‌بندی آن را بیان کنید



شکل (۲-۳) به هم‌بستن سری خازن‌ها



ابتدا

$$\begin{cases} V_t = V_1 + V_2 + \dots & (۵-۳) \\ I_t = i_1 = i_2 = \dots & (۶-۳) \end{cases}$$

و در نتیجه با توجه به رابطه اساسی:



$$C_t = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots \right)^{-1} \quad (۷-۳)$$

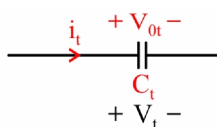
قبل از آنکه سراغ موازی برویم، یک سؤال اساسی! این خازن معادل چه ولتاژ اولیه‌ای دارد؟

خیلی ساده است. چون خازن‌ها سری‌اند، شبیه رابطه ۵-۳ خواهیم داشت:



$$V_{0t} = V_{01} + V_{02} + \dots \quad (۸-۳)$$

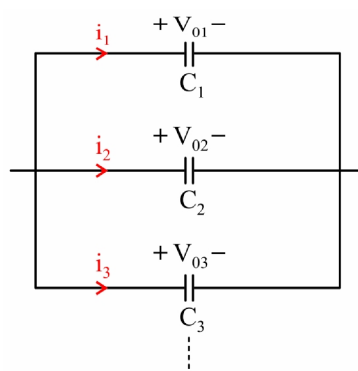
و در یک نگاه:



شکل (۳-۳) خازن معادل در حالت سری



و برای حالت



شکل (۴-۳) به هم بستن موازی خازن‌ها

در این حالت داریم:



$$\begin{cases} i_t = i_1 + i_2 + \dots & (۹-۳) \\ V_t = V_1 = V_2 = \dots & (۱۰-۳) \end{cases}$$

و در نتیجه:

$$C_t = C_1 + C_2 + \dots$$

(۱۱-۳)



باز همان سؤال قبلی، در اینجا ولتاژ اولیه کل چقدر می‌شود؟



این شد یک سؤال اساسی! پس حالا نوبت من است. در اینجا از اصل بقای بار استفاده می‌کنیم:

$$q_{0t} = q_{01} + q_{02} + \dots = C_1 V_{01} + C_2 V_{02} + \dots$$

(۱۲-۳)

$$C_t = C_1 + C_2 + \dots$$

(۱۳-۳)

پس طبق رابطه اساسی خازن داریم:

$$V_{0t} = \frac{q_{0t}}{C_t} = \frac{\sum_i C_i V_{0i}}{\sum_i C_i}$$

(۱۴-۳)



بسیار عالی است و این ولتاژ V_{0t} ولتاژ اولیه مشترک تک تک خازن‌هاست. فقط یادتان باشد که علامت جمع در

رابطه (۱۲-۳) جمع جبری است یعنی باید به پلاریته ولتاژها دقت داشت.



یک سؤال! یعنی اگر خازن‌های از قبل شارژ شده را با هم موازی کنیم، برای هم‌پتانسیل شدن خازن‌ها بارها حرکت

می‌کنند؟



قطعاً!



پس انرژی حرکت این بارها از کجا می‌آید؟



من شروع می‌کنم به توضیح، هرچا متوجه شدید، ادامه بدهید. به مجموع انرژی خازن‌ها، قبل و بعد از اتصال دقت کنید.



ادامه ندهید. من متوجه شدم، انرژی با توجه به شکل (۳-۴) قبل از اتصال خازن‌ها برابر است با:

$$W_{\text{قبل اتصال}} = \frac{1}{2}C_1V_{01}^2 + \frac{1}{2}C_2V_{02}^2 + \dots \quad (۱۵-۳)$$

و انرژی پس از اتصال خازن‌ها برابر است با:

$$W_{\text{بعد از اتصال}} = \frac{1}{2}C_tV_{0t}^2 = \frac{1}{2}(C_1 + C_2 + \dots) \left(\frac{C_1V_{01} + C_2V_{02} + \dots}{C_1 + C_2 + \dots} \right)^2 \quad (۱۶-۳)$$

به راحتی می‌توان دید که:

$$W_{\text{قبل اتصال}} < W_{\text{بعد اتصال}} \quad (۱۷-۳)$$

این اختلاف انرژی ΔW صرف حرکت بارها جهت هم‌پتانسیل شدن خازن‌ها می‌شود.

$$\Delta W = W_{\text{قبل اتصال}} - W_{\text{بعد اتصال}} \quad (۱۸-۳)$$



و به صورت گرما در سیم‌ها ظاهر می‌شود، که البته اگر دقت کنید می‌بینید که این جریان از جنس ضربه یا همان

جرقه است.

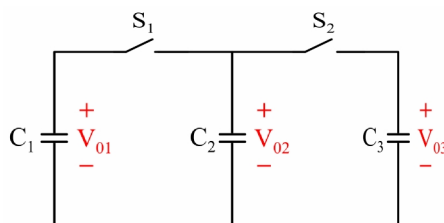
فقط می‌ماند روابط تقسیم بار و تقسیم ولتاژ در خازن‌های موازی و سری:

$$q_1 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} q_t \quad \text{و} \quad q_2 = \dots \quad \text{تقسیم بار در خازن‌های موازی} \quad (۱۹-۳)$$

$$V_1 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} V_t \quad \text{و} \quad V_2 = \dots \quad \text{تقسیم ولتاژ در خازن‌های سری} \quad (۲۰-۳)$$



۱- در مدار زیر $C_1 = 2F$ ، $C_2 = 1F$ و $C_3 = 3F$ و ولتاژ اولیه آن‌ها برابر است با $V_{01} = 3V$ ، $V_{02} = 4V$ و $V_{03} = 2V$ (با پلاریته نشان داده شده روی شکل) کلیدهای S_1 و S_2 در لحظه $t = t_0$ همزمان بسته می‌شوند. انرژی ذخیره شده در مدار در t_0^- تا t_0^+ چه تغییری می‌کند؟



شکل (۳-۵) مدار تمرین ۱



با توجه به روابط (۱۵-۳)، (۱۶-۳) و (۱۸-۳) داریم:

$$t = t_0^- ; W = 9 + 8 + 6 = 23 \text{ j}$$

$$t = t_0^+ ; W = \frac{1}{2} (2+1+3) \times \left(\frac{6+4+6}{2+1+3} \right)^2 = \frac{64}{3} \text{ j}$$

$$\Delta W = 23 - \frac{64}{3} = \frac{5}{3} \text{ j}$$



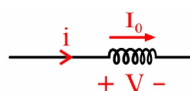
ملاحظه می‌کنید که این نوع مسئله‌ها بسیار ساده‌اند.

۲-۱-۳ روابط و اتصالات سلف‌ها

حال که روابط خازن را آموختید، در مورد سلف به اشاراتی اکتفا می‌کنیم:

رابطه اساسی $\varphi = LI$

(۲۱-۳)



φ (شار) برحسب ویر و L (اندوکتانس) برحسب هانری و I (جریان) برحسب آمپر است.

شکل (۶-۳) سلف!

و برای روابط ولتاژ و جریان:

$$V = \frac{d\varphi}{dt} = L \frac{di}{dt}$$

(۲۲-۳)

$$i = I_0 + \frac{1}{L} \int V \cdot dt$$

(۲۳-۳)

و برای انرژی:

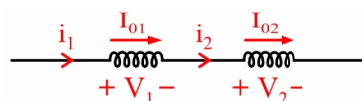
$$W = \frac{1}{2} Li^2$$

(۲۴-۳)

سلف هم دو عامل مشخص‌کننده دارد؛ اندوکتانس و جریان اولیه.



به هم بستن:



شکل (۷-۳) به هم بستن سری سلف‌ها

$$L_t = L_1 + L_2 + \dots$$

(۲۵-۳)

حالا بگویید جریان اولیه مشترک چه می‌شود؟



حتماً در اینجا با توجه به اصل بقای شار می‌گوییم:

$$I_{0t} = \frac{\Phi_{0t}}{L_t} = \frac{L_1 I_{01} + L_2 I_{02} + \dots}{L_1 + L_2 + \dots} \quad (26-3)$$

در صورت کسر رابطه (۲۶-۳)، علامت + به معنی جمع جبری است. (یعنی باید به جهت جریان‌ها توجه داشت.) مثلاً اگر مخالف بودند، روی یکدیگر اثر تضعیفی دارند.

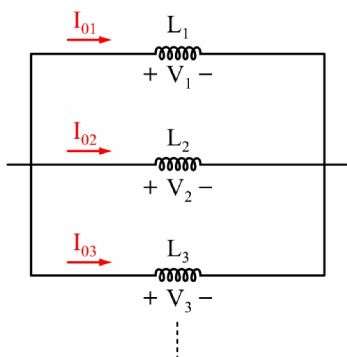


پس به دو اتفاق باید حساس بود. کدام اتفاق‌ها؟



سری شدن سلف‌های از قبل شارژشده یا یکدیگر و موازی شدن خازن‌های از پیش شارژشده با هم، که من بارها

دیدهام وقتی حواسم به آن‌ها نباشد، پس از حل مسئله دچار یأس فلسفی شده‌ام.



را بررسی می‌کنیم:



و بالاخره حالت



شکل (۸-۳) به هم بستن موازی سلف‌ها

$$L_t = \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots \right)^{-1} \quad (27-3)$$

و جریان اولیه سلف معادل برابر است با:

$$I_{0t} = I_{01} + I_{02} + \dots \quad (28-3)$$

در حالت سری در اینجا نیز یک انرژی تلفاتی داریم که به شرح زیر به دست می‌آید:

$$W_{\text{قبل اتصال}} = \frac{1}{2} L_1 I_{01}^2 + \frac{1}{2} L_2 I_{02}^2 + \dots \quad (29-3)$$

$$W_{\text{بعد اتصال}} = \frac{1}{2} L_t I_{0t}^2 = \frac{1}{2} (L_1 + L_2 + \dots) \left(\frac{L_1 I_{01} + L_2 I_{02} + \dots}{L_1 + L_2 + \dots} \right)^2 \quad (30-3)$$

$$\Delta W = W_{\text{قبل اتصال}} - W_{\text{بعد اتصال}} \quad (31-3)$$

در نهایت برای تقسیم شار و تقسیم جریان خواهیم داشت:

$$\varphi_1 = \frac{L_1}{L_1 + L_2} \varphi_t, \quad \varphi_2 = \dots \quad \text{تقسیم شار در سلف‌های سری} \quad (۳۲-۳)$$

$$I_1 = \frac{L_2}{L_1 + L_2} I_t \quad \text{و} \quad I_2 = \dots \quad \text{تقسیم جریان در سلف‌های موازی} \quad (۳۳-۳)$$

حال به بررسی مدارهایی می‌پردازیم که شامل یک سلف یا یک خازن و سایر عناصر مقاومتی و منبع وابسته و مستقل باشند.

۲-۳ مدارهای مرتبه اول

مداری مرتبه اول است که معادله دیفرانسیل آن مرتبه اول شود؛ به عبارت دیگر شامل یک خازن مستقل یا یک سلف



مستقل باشد و...

قبل از اینکه شروع کنید، سؤال دارم؛ اگر مداری شامل n تا سلف یا n تا خازن سری و یا موازی باشد، دیگر مرتبه اول



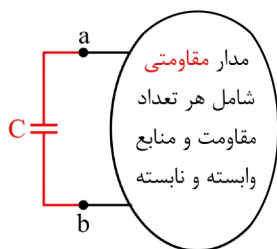
نیست؟

از نوع سؤال پیداست که پاسخ را می‌دانی؛ اصلاً سؤال بسیار خوبی هم مطرح شد! گاهی در یک مسئله با شرایطی



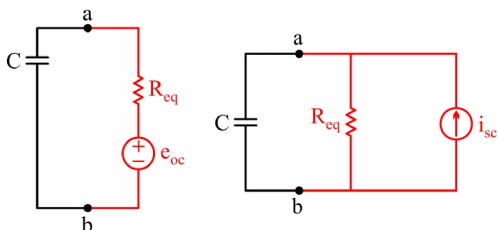
(خصوصاً با کلیدزنی) چند خازن یا سلف با هم سری یا موازی می‌شوند، در این حالت باز مدار مرتبه اول است و از قوانین مدارهای مرتبه اول تبعیت می‌کند.

گفته شد که در این مدارها معادله دیفرانسیل، مرتبه اول می‌شود. حالا مثلاً یک مدار مرتبه اول خازنی در نظر بگیرید که خازن را از آن بیرون کشیده و پشت سرمان قرار داده‌ایم.



شکل (۳-۹) یک مدار مرتبه اول خازنی

می‌توان مدار شکل (۹-۳) را به هر یک از صورت‌های زیر ساده کرد:



شکل (۳-۱۰) مدارهای معادل شبکه شکل (۳-۹)

حال اگر تحلیل همین دو نوع مدار ساده را یاد بگیریم، مسئله حل است. آیا معنی این اسم‌ها را می‌دانید؟ پاسخ ورودی صفر، پاسخ حالت صفر و پاسخ کامل

معنی آن‌ها در خود اسمشان مشخص است؛ یعنی به قول شما اسمشان سرخ‌پوستی است؛ پاسخ ورودی صفر یعنی



پاسخ، وقتی ورودی صفر است، یعنی فقط ناشی از شرایط اولیه و پاسخ حالت صفر، یعنی زمانی که شرایط اولیه صفر است، به عبارت دیگر فقط ناشی از ورودی و پاسخ کامل هم معلوم است دیگر!

روش کلی حل مدارهای شامل سلف و خازن (از هر مرتبه‌ای) در قدم اول نوشتن معادله دیفرانسیل و سپس حل آن



است. من نیز قصد داشتم ابتدا یکی دو مثال را به این روش مرسوم حل کنم تا ببینید کار نسبتاً زمان‌بری است، ولی فرض می‌کنم که این روش را به یاد دارید و فوراً سراغ رابطه‌ای می‌روم که ما را سریع‌تر به پاسخ برساند. من نام این رابطه را رابطه طلایی گذاشته‌ام.

در مدارهای مرتبه اول خطی (تأکید می‌کنم خطی) و با ورودی DC (باز تأکید می‌کنم با ورودی DC) پاسخ کامل از رابطه طلایی زیر به دست می‌آید:



$$y(t) = (y(0) - y(\infty)) e^{-\frac{t}{\tau}} + y(\infty) \quad (3-34)$$

که y هر سیگنالی می‌تواند باشد، (ولتاژ یا جریان) قبل از آنکه جلوتر برویم، دو سه دقیقه به رابطه بالا فکر کنید. اجزای این رابطه را خوب خوب بشناسید:

τ یا ثابت زمانی؛ در موردش چه می‌دانید؟



ثابت زمانی فقط مختص مدارهای مرتبه اول است و طوری که هر مدار پس از مدت زمانی در حدود ۴ الی ۵ برابر آن

به مقدار دائمی یا نهایی یا ماندگار خود می‌رسد و برابر است با:

$$\tau^s = \begin{cases} R_{eq}^{\Omega} \times C^F & \text{برای مدار RC} \\ L^H / R_{eq}^{\Omega} & \text{برای مدار RL} \end{cases} \quad (3-35)$$

که در آن R_{eq} مقاومت معادل دیده‌شده از دو سر خازن یا سلف است.



یک جمله می‌گویم، رویش حسابی فکر کنید؛ بعداً به شدت به درد ما می‌خورد. حالا که این‌طور شد، از این به بعد به

زمان‌های بزرگ‌تر از 5τ می‌گوییم بی‌نهایت! البته بی‌نهایت فیزیکی؛ یعنی ممکن است این بی‌نهایت کمتر از میلی‌ثانیه هم باشد! پس به دست آوردن ثابت زمانی معادل است با:

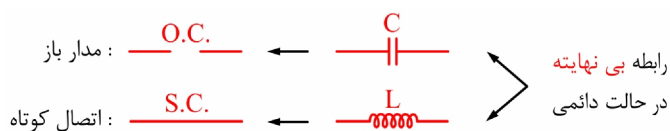


یافتن مقاومت معادل دیده شده از دو سر خازن یا سلف و همان حرف‌های قدیمی ...



$y(0)$ و $y(\infty)$ را خودم باید بگویم، شما هم خوب دقت کنید.

$y(\infty)$ یعنی مقدار ولتاژ یا جریان در حالت دائمی، برای به دست آوردن آن از رابطه بی‌نهایت استفاده می‌کنیم:



اگر متوجه شدید یک‌بار توضیح دهید.

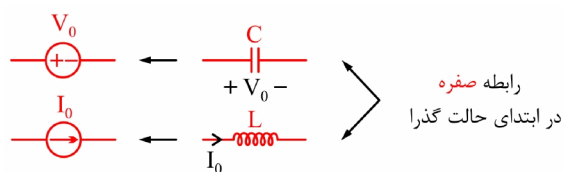


یعنی ابتدا به جای سلف، اتصال کوتاه و به جای خازن، مدار باز می‌گذاریم و پس از این تغییرات مدار را تحلیل می‌کنیم

تا سیگنال مورد نظر در حالت دائمی به دست آید.



دقیقاً درست است و اما برای $y(0)$ از رابطه صفره بهره می‌گیریم:



یعنی به جای خازن، یک منبع ولتاژ با مقدار V_0 و به جای سلف، یک منبع جریان با مقدار I_0 می‌گذاریم و با تحلیل

مدار به $y(0)$ می‌رسیم. اما اگر خازن یا سلف بدون شرایط اولیه بود، چطور؟



خوب واضح است دیگر، یعنی منابع صفر می‌شوند؛ یعنی:

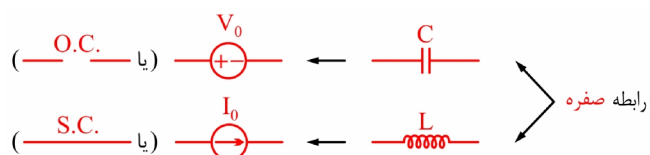


فهمیدم! یعنی به جای خازن، اتصال کوتاه (منبع ولتاژ صفرشده) و به جای سلف، مدار باز (منبع جریان صفرشده)

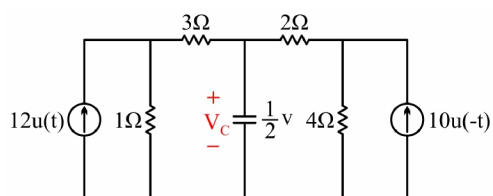
قرار می‌دهیم و ادامه همان حرف‌ها....



پس یک‌بار دیگر تکمیل می‌کنیم:



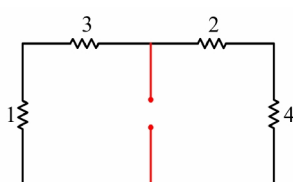
البته از حالا ذهنتان را آماده کنید؛ لحظه‌ی صفر یعنی کلیدزنی. اما ما در اصل دو جور صفر داریم؛ یکی 0^- که بلافاصله قبل از کلیدزنی است و یکی 0^+ که بلافاصله پس از کلیدزنی است. روشن است که برای پیدا کردن $y(0^-)$ باید از رابطه بی‌نهایت استفاده کنیم و برای به دست آوردن $y(0^+)$ باید از رابطه صفره کمک بگیریم، یعنی جنس 0^- از نوع ∞ است؛ یعنی بی‌نهایت ثانیه پس از $-\infty$ اما 0^+ از جنس صفر است؛ لطفاً این حرف‌ها را یکبار خودتان تکرار کنید.



شکل (۱۱-۳) مدار تمرین ۲

۲- معادله V_c را بیابید.

ابتدا یافتن τ :



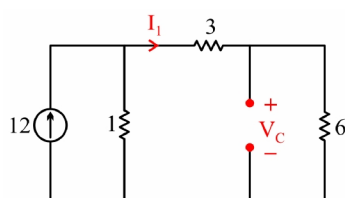
شکل (۱۲-۳) مقاومت دیده شده از دو سر خازن

$$R_{eq} = 4 \parallel 6 = 2.4 \Omega$$

$$\tau = R_{eq} \cdot C = 2.4 \times 0.5 = 1.2 \text{ S}$$

که بسیار هم ساده است؛ از دو سر خازن R_{eq} را پیدا می‌کنیم:

و سپس $y(\infty)$:

شکل (۱۳-۳) یافتن V_c در حالت دائمی

$$I_1 = \frac{1}{9+1} \times 12 = 1.2 \text{ A}$$

$$V_c(\infty) = 6 I_1 = 7.2 \text{ V}$$

به کمک رابطه بی‌نهایت و اینکه منبع $10u(-t)$ در آن زمان صفر

است، مدار به این شکل شده:

و برای $y(0)$ ؛

خوب به کمک رابطه صفره و ...

ادامه ندهید! خوب دقت کنید، در اینجا صفر به چه معنی است؟ در پاسخ به این سؤال، نکته خیلی مهمی نهفته است!



فهمیدم، خیلی جالب است! ابتدا $V_C(0^-)$ را پیدا می‌کنیم و با توجه به پیوستگی ولتاژ خازن $V_C(0^+)$ را هم

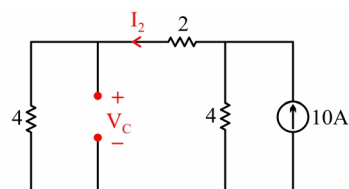


داریم و برای پیدا کردن $y(0^-)$ از رابطه بی‌نهایت استفاده می‌کنیم، چراکه 0^- در اصل معنی بی‌نهایت را می‌دهد؛ یعنی گذشتن زمان بی‌نهایت از زمان $-\infty$

قبل از ادامه حل مسئله، این دو جمله را یک‌بار دیگر تکرار می‌کنیم:



یافتن $y(0^-)$ (سیگنال بلافاصله قبل از کلیدزنی) از رابطه بی‌نهایت است و به دست آوردن $y(0^+)$ (سیگنال بلافاصله پس از کلیدزنی) از رابطه صفره است.



شکل (۱۴-۳) یافتن V_C در 0^-

ادامه می‌دهیم:



$$I_2 = \frac{4}{4+6} \times 10 = 4 \text{ A}$$

$$V_C(0^-) = 4I_2 = 16 \text{ V} \Rightarrow V_C(0^+) = 16 \text{ V}$$

داریم:

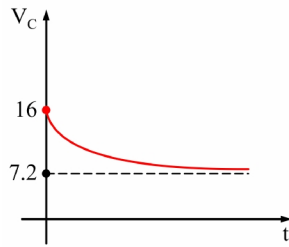


حال که سه پارامتر لازم به دست آمد، با توجه به رابطه



$$V_C(t) = (16 - 7.2)e^{-\frac{t}{1.2}} + 7.2 = 8.8e^{-\frac{t}{1.2}} + 7.2$$

و شکل این سیگنال تقریباً این‌جوری است:



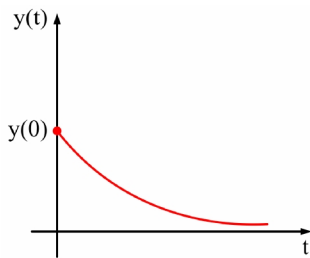
شکل (۱۵-۳) شکل موج ولتاژ خازن در مسئله ۲

درضمن معلوم است که هر پاسخی در مدارهای مرتبه اول به صورت نمایی است و برای انواع پاسخ واضح است که داستان اینگونه می‌شود:

پاسخ ورودی صفر: چون منبع نداریم، $y(\infty)$ برابر صفر می‌شود، پس پاسخ برابر است با:

$$y(t) = y(0)e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (۳۶-۳)$$

و شکل آن:

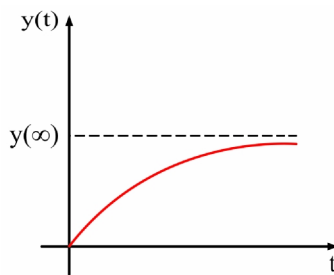


شکل (۱۶-۳) پاسخ ورودی صفر در مدار مرتبه اول

و در مورد پاسخ حالت صفر: $y(0) = 0$ است پس:

$$y(t) = y(\infty) \left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right] \quad (۳۷-۳)$$

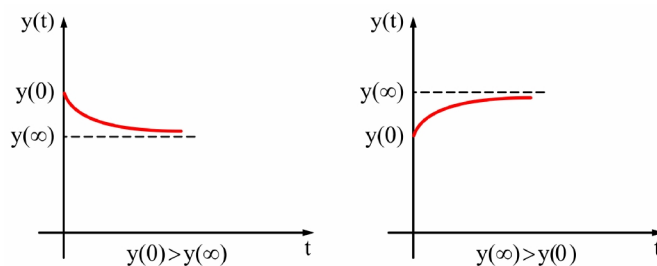
و شکل آن:



شکل (۱۷-۳) پاسخ حالت صفر در مدار مرتبه اول



و شکل پاسخ کامل در مدار مرتبه اول به این صورت است:



شکل (۱۸-۳) پاسخ کامل در مدار مرتبه اول



و اگر $y(0) = y(\infty)$ باشد، چطور؟



آن گاه اصلاً پاسخ گذرا معنی ندارد و داریم:

$$y(t) = y(\infty)$$

(۳۸-۳)



معنی دقیق پاسخ گذرا چیست؟



ببینید، از یک نگاه دیگر هم، پاسخ قابل تقسیم است:



پاسخ گذرا: آن قسمتی از پاسخ که وقتی $t \rightarrow \infty$ می‌رود، صفر می‌شود.



پاسخ ماندگار: حد پاسخ وقتی که $t \rightarrow \infty$.



پاسخ کامل: مجموع دو پاسخ بالا

درضمن باید توجه داشت که پاسخ گذرا ناشی از منبع و شرایط اولیه هر دو است و پاسخ ماندگار ناشی از منبع است و پاسخ کامل هم که معلوم است دیگر



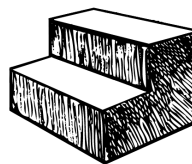
یک نکته جالب! از رابطه طلایی، پاسخ گذرا و ماندگار هم معلوم است.

$$y(t) = (y(0) - y(\infty)) e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{پاسخ گذرا} \quad (39-3)$$

$$y(t) = y(\infty) \quad \text{پاسخ ماندگار} \quad (40-3)$$



اصلاً برای همین است که نام آن را GOLDEN گذاشته‌ایم!



۳-۳ پاسخ پله



می‌دانید یعنی چه؟



واضح است دیگر، پاسخ به ورودی پله.

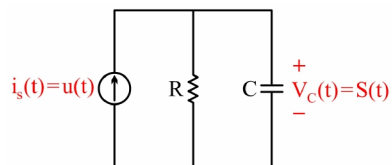


البته با قید حالت صفر یعنی بدون حضور شرایط اولیه



حال اگر بخواهیم پاسخ به ورودی $u(t)$ را $s(t)$ بنامیم، هیچ

حرف جدیدی نداریم؛ به عنوان نمونه در مدار شکل (۱۹-۳) برای خروجی ولتاژ خازن داریم:

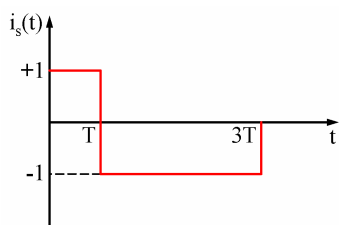


شکل (۱۹-۳) پاسخ پله در مدار RC

$$s(t) = V_C(t) = R \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) u(t)$$

با توجه به رابطه (۳۷-۳):

(۴۱-۳)



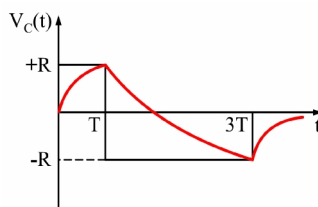
شکل (۲۰-۳) یک ورودی برای مدار شکل (۱۹-۳)

حال اگر ورودی به صورت ترکیبی از توابع پله (به صورت پالسی) باشد، خروجی چگونه می‌شود؟ مثلاً با ورودی نشان داده شده در شکل (۲۰-۳) پاسخ مدار شکل (۱۹-۳) چگونه می‌شود؟



از قضیه جمع آثار استفاده می‌کنیم؛ در T ثانیه اول عمل شارژ خازن و بعد تغییر پلاریته ولتاژ از $+R$ به $-R$ و در

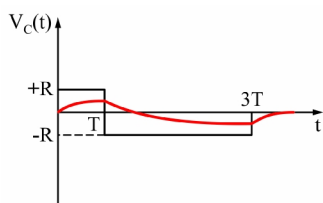
نهایت پس از زمان $3T$ خازن دشارژ می‌شود، یعنی به شکل زیر:



شکل (۲۱-۳) پاسخ مدار شکل (۱۹-۳) به ورودی شکل (۲۰-۳)



اما این پاسخ، یک ایراد اساسی دارد. از کجا معلوم که زمان T برای شارژ کامل خازن، کافی باشد؛ یعنی اصلاً من ادعا می‌کنم که پاسخ به شکل (۲۲-۳) می‌شود:



شکل (۲۲-۳) پاسخ دیگری برای $V_c(t)$

پس در این گونه مواقع شکل پاسخ

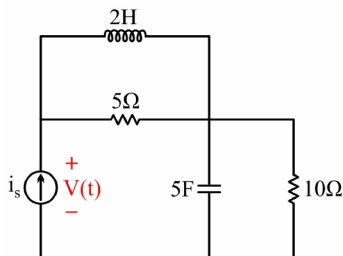
بستگی دارد!

به مقایسه عرض پالس‌ها (یعنی T) و ثابت زمانی (یعنی τ)؛ اگر عرض پالس‌ها از ۵ برابر τ بیشتر بود، زمان کافی برای شارژ و دشارژ هست؛ والا این عمل ناقص انجام می‌شود.




توجه به این نکته در بعضی تست‌های مفهومی بسیار مهم است. حال به تمرین زیبای ۳ دقت کنید.


۳- در مدار شکل (۲۳-۳)، مقدار ولتاژ دو سر منبع جریان در $t = 0^+$ $(V(0^+))$ چقدر است؟



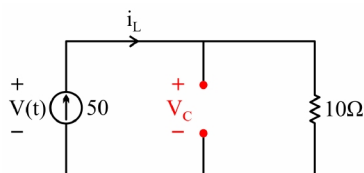
شکل (۲۳-۳) مدار تمرین ۳

- (۱) 500 V
 (۲) 0 V
 (۳) 250 V
 (۴) 50 V

استاد به نظرم این مدار مرتبه اول نیست؛ مگه نه؟! 

هیس! به روی خودت نیاور؛ من عمداً این مدار را که مرتبه دوم است در اینجا آورده‌ام تا بفهمید که خیلی از حرف‌های 

کلاس امروز - غیر از خود رابطه طلایی - مال مدار مرتبه n ام است؛ یعنی حرف‌هایی مثل رابطه صفره و رابطه بی‌نهایت و... برای مدارهای مرتبه شصت و سوم هم جواب می‌دهد! حال بگذریم؛...




شکل (۲۴-۳) مدار تمرین ۳ در $t = 0^-$ به کمک

رابطه بی‌نهایت

$$V_C(0^-) = V(0^-) = 500 \text{ V}$$

$$i_L(0^-) = 50 \text{ A}$$

چون ورودی مدار از ∞ متولد شده است، برای بررسی 

در $t = 0^-$ مدار از رابطه بی‌نهایت بهره می‌گیریم. (سلف، اتصال کوتاه و خازن مدار باز می‌گردد).

پس گزینه ۱ درست است.



گاهی آدم سر جلسه کنکور از اینکه به پاسخی رسیده که در گزینه‌ها هست مشعوف! می‌شود، ولی بعد از جلسه

می‌بیند که $\frac{1}{3}$ - نمره نصیبش شده است! خوب دقت کنید، پاسخ اشتباه است؛ البته اشتباه رایجی است!



سیگنال‌های پیوسته جریان سلف و ولتاژ خازن هستند^۲.

می‌دانید یعنی چه؟



یعنی در پیوستگی سیگنال‌های غیر از V_C و i_L شک کنید، ممکن است پیوسته نباشند.



پس چرا خود شما در حل تمرین ۳ همین اشتباه را مرتکب شدید؟

ببینید، خوب گوش کنید! مثل گوش شکل (۲۵-۳)!



شکل (۲۵-۳) تصویر یک گوش خوب باز شده!

هنگامی که سیگنالی را بلافاصله پس از کلیدزنی مثلاً در $t=0^+$ می‌خواهیم، در قدم اول مدار را در $t=0^-$ رسم می‌کنیم. (به کمک رابطه بی‌نهایت!) و مقادیر $V_C(0^-)$ و $I_L(0^-)$ را به دست می‌آوریم. آن‌گاه می‌گوییم:

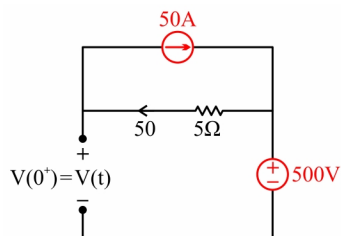
$$V_C(0^+) = V_C(0^-)$$

$$I_L(0^+) = I_L(0^-)$$

1. Common mistake

۲- تازه همین V_C و I_L هم همیشه هنگام کلیدزنی پیوسته نیستند؛ اگر ورودی ضربه باشد باید به پیوستگی این‌ها هم شک کرد؛ در ضمن اگر هنگام کلیدزنی دو تا خازن غیر هم‌پتانسیل با هم موازی شوند، دیگر V_C پیوسته نیست و نیز اگر هنگام کلیدزنی دو تا سلف غیر هم‌جریان با هم سری شوند، دیگر I_L پیوسته نیست و چقدر دقت در این قصه‌ها مهم‌تر از مهم است!

و سپس در قدم آخر، مدار را در $t=0^+$ می‌کشیم! (به کمک رابطه صفره) و حالا با تحلیل مدار هر متغیری را در $t=0^+$ به دست می‌آوریم. پس در ادامه تمرین ۳ داریم:



$$V(0^+) = -250 + 500 = +250 \text{ V}$$

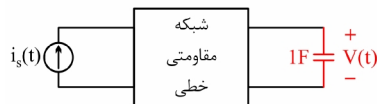
شکل (۲۶-۳) مدار تمرین ۳ در $t=0^+$ به کمک رابطه صفره

یعنی گزینه ۳ درست است.

از این گونه مسائل که نیاز به ریزبینی دارد، در کنکور کارشناسی ارشد کم نبوده است.



۴- در شکل زیر ولتاژ اولیه خازن صفر است و می‌دانیم:



$$V(t) = \frac{1}{4}(1 - e^{-3t})u(t)$$

شکل (۲۷-۳) مدار تمرین ۴

اگر به جای خازن، سلف $L=2\text{H}$ قرار دهیم، $V(t)$ برابر می‌شود با:

$$\frac{1}{4}e^{-\frac{t}{6}}u(t) \quad (۱) \quad \frac{1}{4}e^{-3t}u(t) \quad (۲) \quad \frac{1}{4}\left(1 - e^{-\frac{2}{3}t}\right)u(t) \quad (۳) \quad \frac{1}{4}\left(1 - e^{-\frac{t}{6}}\right)u(t) \quad (۴)$$



با توجه به رابطه داده‌شده در صورت تست داریم:

$$\tau_{\text{قدیم}} = \frac{1}{3} \Rightarrow R_{\text{eq}} \times 1 = \frac{1}{3} \Rightarrow R_{\text{eq}} = \frac{1}{3} \Omega$$

و بنابراین در حالت جدید:

$$\tau_{\text{جدید}} = \frac{L}{R_{\text{eq}}} = \frac{2}{\frac{1}{3}} = 6 \text{ S}$$

یعنی یا گزینه ۱ درست است یا ۴



از طرفی طبق رابطه بی‌نهایت، سلف در بی‌نهایت ($t \rightarrow \infty$) اتصال کوتاه است، یعنی ولتاژش صفر می‌شود، یعنی

گزینه ۱ درست است. (جالب بود!)

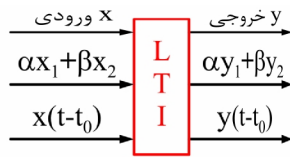


حالا یک نوع دیگر از مسایل که تا به حال شبیه آن، کم نبوده است.



۵- در یک مدار RC در حال سکون^۱، به ازای دریافت سیگنال پله واحد ولتاژ خازنی برابر $V_C(t) = 1 - e^{-2t}$ است. اگر خازن ولتاژ اولیه 1 ولت داشته باشد و سیگنال ورودی $2u(t)$ اعمال شود، پاسخ $V_C(t)$ چقدر می شود؟ این تمرین را خودم توضیح می دهم؛ چون دو سه کلمه حرف حساب می خواهم به بهانه حل آن بگویم!

به شکل (۲۸-۳) توجه کنید و به آن فکر کنید و آن را با یکدیگر زمزمه کنید!



شکل (۲۸-۳) یک شبکه خطی تغییرناپذیر با زمان

پس خروجی ناشی از $2u(t)$ ، برابر خروجی ناشی از $u(t)$ است، یعنی:

$$V_C(t) = 2 - 2e^{-2t} \quad (\text{ناشی از ورودی})$$

و اما خروجی ناشی از شرایط اولیه $V_0 = 1 \text{ V}$ طبق رابطه (۳۶-۳) برابر است با:

$$V_C(t) = 1e^{-2t} \quad (\text{ناشی از شرایط اولیه})$$

و در نتیجه پاسخ کامل برابر است با:

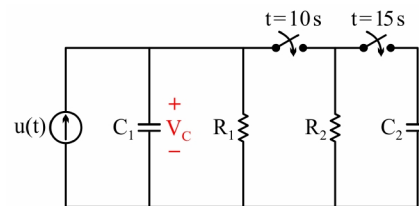
$$V_C(t) = 2 - e^{-2t}$$

۴-۳ مدار مرتبه اول با چند ثابت زمانی



۶- در مدار شکل (۲۹-۳) پاسخ ولتاژ خازن را رسم کنید.

(به زمان قطع و وصل کلیدها دقت کنید.)



شکل (۲۹-۳) مدار تمرین ۶

$$\begin{cases} R_1 = R_2 = 1\Omega \\ C_1 = C_2 = 1F \end{cases}, \quad V_{C_1}(0^-) = V_{C_2}(0^-) = 0$$

1. at first, at rest



در هر بازه، مسئله را جداگانه بررسی می‌کنیم؛ در هر قسمت مدار مرتبه اول است، ولی ثابت زمانی تغییر می‌کند:

$$0 < t < 10^s ; V_c(t) = 1 - e^{-t} \quad \text{و} \quad \tau_1 = 1^s$$

و در نمودار چون 10s بزرگتر از $5\tau_1$ است، پس به مقدار نهایی اش می‌رسد: (اگر نبود، شارژ ناقص بود).
در بازه بعدی:

$$10 < t < 15^s ; \begin{cases} R_{eq} = \frac{1}{2} \Omega \\ C = 1F \end{cases} \rightarrow \tau_2 = \frac{1}{2} s$$

در این بازه پاسخ کامل است، مقدار اولیه این بازه از مقدار نهایی بازه قبلی به دست می‌آید.



بخشید می‌پریم وسط حرف شما! ولی برای آنکه یادتان بماند می‌گوییم: مثل «دوی امدادی»



ادامه بدهید.



پس برای مقدار اولیه بازه داریم:

$$V_c(10^s) = 1 - e^{-10} \approx 1V$$



و طبق رابطه

$$V_c(t) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) e^{-\frac{t-10}{0.5}} + \frac{1}{2}$$

و یا:

$$V_c(t) = \frac{1}{2} e^{-2t} + \frac{1}{2}$$

در اینجا هم زمان 5s برای رسیدن به مقدار نهایی (یعنی $\frac{1}{2}$) کافی است و در نهایت در بازه آخر $t > 15s$ خازن C_2 هم وارد می‌شود و داریم:

$$\begin{cases} R_{eq} = \frac{1}{2} \Omega \\ C_{eq} = 2F \end{cases} \rightarrow \tau_3 = 1s$$

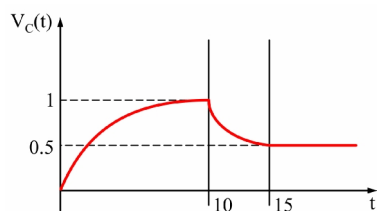
$$V_c(15s) = \frac{1}{2} e^{-2 \times 5} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} V$$



و باز با رابطه

$$V_c(t) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)e^{-t} + \frac{1}{2}$$

$$V_c(t) = \frac{1}{2}$$

شکل (۳۰-۳) پاسخ $V_c(t)$ در تمرین ۶

یعنی در حالت آخر بسیار جالب شد، چراکه پاسخ گذرا وجود ندارد و منحنی $V_c(t)$ به صورت ثابت روی $\frac{1}{2}$ می ماند. مطابق شکل (۳۰-۳):

بسیار عالی است. البته بسیار عالی هم نیست، بهتر است بگویم ای بَدک نیست! اصلاً چرا تعارف می کنم، اواخرش خراب شد! چراکه در پاسخ شما اشکالاتی بود. آن ها را پیدا کنید.



اولاً در معادلات $V_c(t)$ بعد از کلیدزنی باید به جای t مقدار $t-t_0$ قرار دهیم. (همان لحظه کلیدزنی است). مثلاً $V_c(t)$ به صورت زیر می شود:

$$V_c(t) = \frac{1}{2}e^{-2(t-10)} + \frac{1}{2}$$



پس در معادلات پس از کلیدزنی در $t-t_0$ ، به جای t مقدار $t-t_0$ می گذاریم. به عبارت شیک تر! شیفت زمانی پاسخ! و اشکال بعدی؟!



اشکال بعدی، خیلی هم اساسی تر است. ببینید در $t=15S$ به دلیل کلیدزنی دو خازن با هم موازی می شوند. یادم



هست که قرار بود به این موضوع حساس باشیم، اما دوست من هیچ حساسیتی نداشت. ابتدا باید ولتاژ خازن معادل را پیدا کنیم: (طبق رابطه ۱۴-۳)

$$V_c = \frac{\frac{1}{2} \times 1 + 1 \times 0}{1+1} = \frac{1}{4}$$

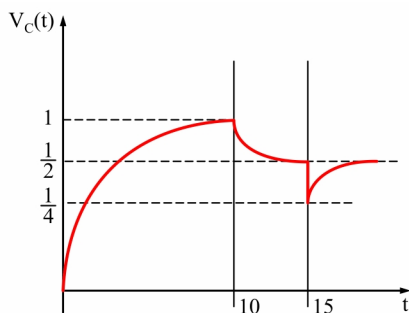
پس رابطه $V_C(t)$ برای $t > 15\text{s}$ به صورت زیر می‌شود:

$$V_C(t) = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)e^{-(t-15)} + \frac{1}{2}$$

و یا:

$$V_C(t) = -\frac{1}{4}e^{-(t-15)} + \frac{1}{2}$$

پس شکل (۳-۳۰) به صورت زیر می‌شود:



شکل (۳-۳۱) جواب درست $V_C(t)$ در تمرین ۶

ملاحظه شد که در $t = 15\text{ s}$ در ولتاژ خازن پیوستگی نبود. پس عبارتی را که چندی پیش گفتیم، اصلاح می‌کنم.



خود سیگنال‌های پیوسته که فقط ولتاژ سلف و جریان خازن بودند نیز در دو صورت ناپیوسته می‌شوند:
هنگام سری شدن سلف‌های از قبل شارژ شده و موازی شدن خازن‌های از قبل شارژ شده و

هنگامی که ورودی ضربه باشد.



احسنت! اصلاً جواب شما بهانه‌ای شد تا راجع به «پاسخ ضربه» چند کلمه حرف بزنم، هرچند تا آخر درس مدار



چندین و چندبار با پاسخ ضربه سروکار خواهیم داشت.

۱- در لحظه $t = 15\text{s}$ در مقدار V_C یک پله دیده می‌شود؛ پس در مشتق ایشان! یعنی i_C یک ضربه قابل مشاهده خواهد بود. جریان ضربه به قول خودمانی یعنی جرقه و موجب اتلاف انرژی بین لحظات 15^- و 15^+ می‌شود که در اوایل این فصل راجع به آن حرف‌های خوبی زدیم.



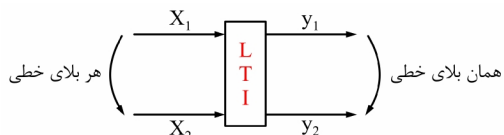
۵-۳ پاسخ ضربه



یعنی پاسخ حالت صفر به ورودی ضربه، البته ضربه می‌آید و یک جهش در شرایط اولیه ایجاد می‌کند و سپس صفر

می‌شود؛ یعنی ذاتاً پاسخ ضربه یک نوع پاسخ ورودی صفر است.

به این شکل نگاه کنید:



شکل (۳۲-۳) نتیجه‌ای از مفهوم خطی بودن

آیا منظورم را فهمیدید؟



یعنی هر بلای خطی بر سر ورودی بیاید، عیناً همان بلا بر سر خروجی می‌آید. بلایای خطی! همچون مشتق،

انتگرال، لاپلاس، فوریه و ...



پس نتیجه می‌گیریم که:



پاسخ ضربه، مشتق پاسخ پله است. پس با توجه به رابطه (۴۱-۳) داریم:

$$h(t) = \frac{ds(t)}{dt} = \frac{1}{C} e^{-\frac{t}{RC}} u(t)$$

(۴۲-۳)



رابطه بالا می‌گوید که در اثر ورودی ضربه:

$$V_c(0^-) = 0$$

(۴۳-۳)

$$V_c(0^+) = \frac{1}{C}$$

(۴۴-۳)

یعنی در اثر ورودی ضربه در ولتاژ خازن به اندازه $\frac{1}{C}$ جهش ایجاد شده است.

۶-۳ مدارهای غیرخطی یا تغییرپذیر با زمان



حل این گونه مدارها یک رمز دارد:

نوشتن معادله دیفرانسیل و حل آن به طریق جداسازی متغیرها... (یا به هر روش دیگری که دوست داشتید!)



۷- پاسخ $V_C(t)$ را بیابید، به طوری که $(V_C(0) = V_0V)$ و $(C=1F)$

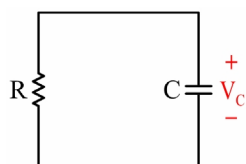
(الف) R یک مقاومت خطی 1 اهمی است.

(ب) R یک مقاومت خطی تغییرپذیر با زمان است، به طوری که:

$$R(t) = \frac{1}{1+0.5 \cos t}$$

(ج) R یک مقاومت غیرخطی تغییرناپذیر با زمان است، به طوری که:

$$i_R = V_R^2$$



شکل (۳-۳) مدار تمرین ۷



حل قسمت (الف) با من و قسمت‌های (ب) و (ج) با شما:

به کمک رابطه طلایی:

$$V_C = V_0 e^{-t} \quad \text{و} \quad \tau = RC = 1$$





برای (ب) چون مقاومت خطی است، می‌توانیم از رابطه $i = \frac{V}{R}$ استفاده کنیم؛ پس داریم:

$$\frac{dV}{dt} + V(1+0.5 \cos t) = 0$$

$$\int_{V_0}^V \frac{dV}{V} = \int_0^t -(1+0.5 \cos t) dt$$

$$\ln \frac{V}{V_0} = -(t+0.5 \sin t)$$

$$V = V_0 e^{-(t+0.5 \sin t)}$$

نکته خیلی جالبی که دیده می‌شود این است که اگر V_0 را  برابر کنیم، خروجی نیز  برابر می‌شود و این منطبق بر خطی بودن مدار است.



حل این قسمت هم مثل قبلی است:



$$\frac{dV}{dt} + V^2 = 0$$

$$\int_{V_0}^V -\frac{dV}{V^2} = \int_0^t dt$$

$$\frac{1}{V} - \frac{1}{V_0} = t$$

$$V = \frac{V_0}{1 + V_0 t}$$

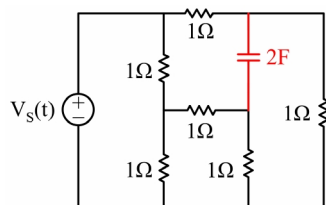


و در اینجا اگر V_0 را  برابر کنیم، خروجی  برابر می‌شود؛ تعجبی هم ندارد، چراکه مدار غیرخطی بود.

و اما یک مسئله یا یک تمرین هدفدار:



۸- ثابت زمانی مدار زیر را بیابید.



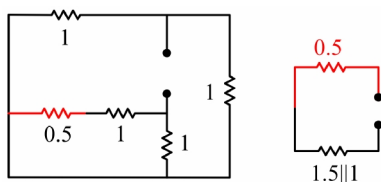
شکل (۳-۳۴) مدار تمرین ۸



خواهش می‌کنم، این مسئله را ابتدا خودتان حل کنید! (البته قرارمان در مورد همهٔ مسایل همین بود.) و حالا به حل

نگاه کنید:

ترجمهٔ مسئله عبارت است از یافتن R_{eq} دیده‌شده از دو سر خازن که ابتدا منبع مستقل را صفر می‌کنیم داریم:



شکل (۳-۳۵) مراحل ساده‌سازی مدار تمرین ۸

پس:

$$R_{eq} = \frac{1}{2} + \frac{3}{5} = \frac{11}{10} \Omega$$

$$\tau = R_{eq} \times C = \frac{11}{10} \times 2 = 2.2s$$

حالا سؤالم این است: آیا جواب آخر را درست به دست آورده بودید؟

اگر نه، یعنی باید بیشتر و بیشتر مسئله حل کنید تا دستتان هم مثل مغزتان! گرم شود. بگذارید حالا که به آخر فصل رسیدیم، کمی برایتان حرف بزنم؛ ببینید بچه‌ها؛ بعضی دروس مبتنی بر **دانایی** هستند؛ مثلاً جغرافی! در آنجا هرچه بیشتر مطالعه کنید، بهتر نتیجه می‌گیرید اما برخی دروس مبتنی بر **توانایی** اند؛ مثل درس مدار یا رانندگی یا شنا! اگر شما n ساعت سر کلاس رانندگی بنشینید، ولی پشت ماشین نروید، هیچ فایده‌ای ندارد؛ اولین بار که ماشین را راه می‌برید، به هزار و یک جا می‌زنید! و این طبیعی است؛ همین‌طور اگر شما نویسنده یک کتاب شنا باشید ولی شنا نکرده باشید، در اولین تجربه غرق می‌شوید؛ پس به جای آن که «مدار» بخوانید، «مداد»تان را بردارید و مرتباً مسئله حل کنید؛ آن قدر مسئله حل کنید که دستتان و مغزتان (تأکید می‌کنم هر دو!) داغ شوند و آن‌گاه در مدار به درجه تبخّر می‌رسید!