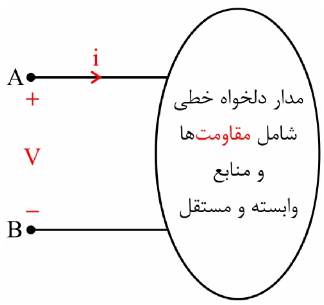
فصل ۲ مدارهای معادل

مقدمه

از دوران کودکی معادل‌سازی در اکثر درس‌ها و کارهایمان کاربرد داشته است؛ و تا لحظه‌های آخر عمر هم این چنین خواهد بود. وقتی معلم ریاضی‌مان یک فرمول بزرگ را می‌داد و جواب آخر می‌شد "0" چه کیفی داشت؛ در اینجا هم داستان معادل‌سازی وجود دارد؛ یک مدار مفصل شامل یک عالمه مقاومت و منبع مستقل و وابسته و... آنقدر کوچک می‌شود که نگوی و نپرس! فقط می‌ماند یک مقاومت و یک منبع مستقل! این نوع نگاه در ساده‌سازی تحلیل مدارها نقش زیادی دارد: یک مثال کوچک می‌زنیم: مطمئناً شما هم قبول دارید که سیستم تلویزیون یک مدار بسیار پیچیده است؛ اما از دو پورت که آنتن به آن وصل می‌شود، کل این سیستم تلویزیون پیچیده مثلاً معادل با یک مقاومت 75Ω است. (و یا شاید 50Ω) انصافاً این نگاه چقدر کار آقای آنتن را ساده می‌کند! یعنی جناب آنتن به جای آنکه فکر کند با یک موجود عجیب و پیچیده سروکار دارد؛ فرض می‌کند که فقط به یک مقاومت بسیار ساده معمولی وصل شده است! این معادل‌سازی زندگی مداری ما را ساده خواهد کرد! بنابراین تا جلسه آخر با آن سروکار خواهیم داشت.

۲ـ۱ مفهوم

برای درک مفهوم مدارهای معادل، ابتدا فرض کنید درون یک جعبهٔ سیاه! یک مدار دلخواه خطی شامل مقاومت‌ها و منابع وابسته و مستقل (نابسته) در اختیار داریم، به این صورت:



شکل (۲ـ۱) یک مدار خطی مقاومتی از دو سر AB

رابطهٔ ولتاژ و جریان در این شبکه به صورت زیر است:

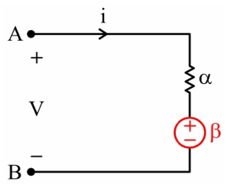
$$V=\alpha i+\beta \qquad (۲ـ۱)$$

زیرا این مدار، خطی است.

اصلاً شرط خطی بودن مدار آن است که بتوانیم رابطهٔ بین ولتاژ و جریان آن را به صورت رابطه بالا بنویسیم. حال اگر کسی از احوالات و مدارات درون جعبه سیاه از ما بپرسد چیزی نمی دانیم؛امّا آیا با داشتن رابطهٔ بین ولتاژ و جریان هیچ نمی‌توان گفت؟

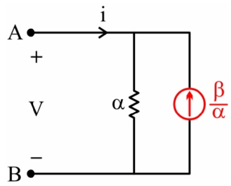
۲ـ۲ معادل‌های تونن و نورتن

به نظر من، مدار زیر معادل با مدار شکل (۲ـ۱) است، چراکه اگر برای این مدار KVL بزنیم، به رابطهٔ (۲ـ۱) می‌رسیم. این مدار به نام آقای تونن ثبت شده است.



شکل (۲ـ۲) مدار معادل تونن

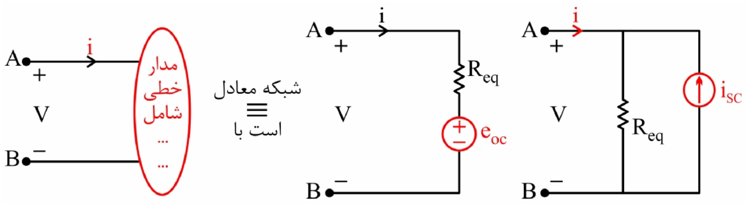
و یک مدار معادل دیگر، به نام دوست آقای تونن، یعنی آقای نورتن به صورت زیر است:



شکل (۲ـ۳) مدار معادل نورتن

در اینجا نیز با KCL در گرهٔ A به معادله (۲ـ۱) دسترسی پیدا می‌کنیم.

پس برای هر مدار **خطی**، یک مدار معادل تونن داریم و یک مدار معادل نورتن؛ برای نام‌گذاری بامسمّاتر، α را با R_{eq} یا R_{th} یا R_N نشان می‌دهیم و مقدار منبع ولتاژ را با e_{oc} (یعنی ولتاژ مدار باز) یا V_{th} و مقدار منبع جریان را با i_{sc} (یعنی جریان اتصال کوتاه) یا i_N مشخص می‌کنیم، به طور خلاصه:



شکل (۲ـ۴) مدار خطی و معادل‌هایش (تونن و نورتن)

حال برویم سراغ روش‌های یافتن مدار معادل…

راستش را بخواهید در خلال حرف‌هایم یک روش برای یافتن مدار معادل گفته‌ام! چه روشی؟


اینکه اگر بتوانیم برای ولتاژ و جریان مدار رابطه‌ای خطی به صورت زیر بنویسیم:

$$V=\alpha i+\beta \qquad (۱\_۲)$$


شیب خط برابر مقاومت معادل (R_{eq}) و عرض از مبدأ برابر ولتاژ مدار باز (e_{oc}) می‌شود، و برای رسیدن به این رابطه، بهترین راه، KCL بازی و سپس KVL در حلقه‌های خاص برای حذف جریان‌های اضافی و نهایتاً KVL در حلقهٔ ورودی است و البته KVL بازی و سپس KCL در گرهٔ خوب نیز کار بسیار پسندیده‌ای است. تا جایی که می‌توانید، از این کارها بکنید.


و با داشتن α و β برای i_{sc} چه باید کرد؟


سؤال بسیار خوبی است، چراکه به بهانهٔ این سؤال یک رابطهٔ کلی بیان می‌شود. بین مقادیر e_{oc} و i_{sc} و R_{eq} رابطهٔ زیر برقرار است:

$$e_{oc}=R_{eq}\times i_{sc}=\beta \qquad (۲\_۲)$$

$$i_{sc}=\frac{e_{oc}}{R_{eq}}=\frac{\beta}{\alpha} \qquad (۳\_۲)$$


به عبارت دیگر به کمک رابطه (۲ـ۳) تبدیل مدار معادل تونن و نورتن به یکدیگر کار بسیار ساده‌ای است.


و بیش از ساده بودن، کار بسیار مفیدی است. (در ساده‌سازی مدارها)

حال کمی بیشتر در مورد e_{oc} و i_{sc} گفتگو می‌کنیم.

e_{oc} یعنی ولتاژ مدار باز؛ از همین نام معلوم است که برای دسترسی به آن باید دو سر AB را باز کرد (یعنی $i=0$) و سپس با تحلیل مدار ولتاژ دو سر A و B را به دست آورد، آن‌گاه:

$$V_{AB}=e_{oc} \qquad (۴\_۲)$$

حالا پیشنهاد شما برای i_{sc} چیست؟

دو سر AB را اتصال کوتاه می‌کنیم، جریان گذرنده از A به B برابر مقدار i_{sc} است یعنی:

$$i_{AB} = i_{sc} \quad (۲\text{ـ}۵)$$

۲ـ۳ مقاومت معادل

R_{eq} همان مقاومت معادل دیده‌شده از دو سر AB است و برای به دست آوردن آن می‌توان از روش‌های مختلفی استفاده کرد. پیشنهاد اول را ارائه دهید.

ابتدا دو سر AB را باز کرده، مدار را تحلیل می‌کنیم تا e_{oc} به دست آید و سپس دو سر AB را اتصال کوتاه می‌کنیم، جریان گذرنده از A به B برابر i_{sc} است و نهایتاً به کمک رابطهٔ (۲ـ۲) داریم:

$$R_{eq} = \frac{e_{oc}}{i_{sc}} \quad (۲\text{ـ}۶)$$

کاملاً درست است، اما این روش در شرایط عادی روش عاقلانه‌ای نیست. چرا؟

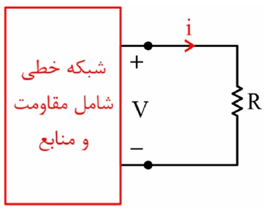
زیرا در این روش برای محاسبهٔ e_{oc} و i_{sc} باید دو مدار جداگانه را تحلیل کرد. دو مداری که در یکی AB مدار باز است و در دیگری AB ، اتصال کوتاه است.

مرحبا! و تحلیل این دو مدار کاملاً متفاوت است؛ چراکه این دو مدار هیچ ربطی به هم ندارند!

البته گاهی استفاده از این روش، بهترین راه است. دقت کنید!

۱ـ در مدار مقابل وقتی $R \to \infty$ ، ولتاژ V برابر 3 ولت است و وقتی $R \to 0$، جریان عبوری i برابر 3 آمپر است. به ازای $R = 2\ \Omega$، جریان عبوری از مقاومت، کدام گزینه است؟

۱) 1 A
۲) 1.5 A
۳) 2 A
۴) 2.5 A



شکل (۲ـ۵) مدار تمرین ۱

اینجا پیشنهاد من بهترین راه است! چون از صورت سؤال پیداست که:

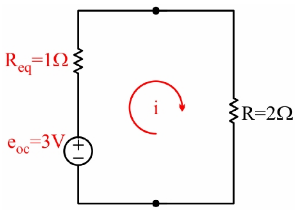
$$\left.\begin{matrix} R \to \infty \\ V = 3\,V \end{matrix}\right\} \Rightarrow e_{oc} = 3\,V$$

$$\left.\begin{matrix} R \to 0 \\ i = 3\,A \end{matrix}\right\} \Rightarrow i_{sc} = 3\,A$$

و بنابراین:

$$R_{eq} = \frac{e_{oc}}{i_{sc}} = 1\,\Omega$$

یعنی مدار به این شکل تبدیل می‌شود:



شکل (۲ـ۶) ساده شده مدار تمرین ۱

و داریم:

$$i = \frac{3}{1+2} = 1A$$

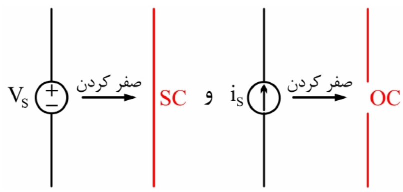
بنابراین گزینهٔ ۱ درست است.

قبل از آنکه روش دوم را بگویم یک نکتهٔ جالب قابل ذکر است و آن این است که، مقدار منابع مستقل، روی R_{eq} تأثیری ندارد. یعنی اگر در مدار یک منبع ولتاژ 5 ولتی داشته باشیم و آن را به منبع ولتاژ 10 ولتی تبدیل کنیم، در مقدار R_{eq} هیچ تأثیری ندارد؛ همین‌طور در مورد منبع جریان نیز، مقدارش در R_{eq} تأثیری ندارد. نتیجه‌اش را شما بگویید.

یعنی برای به دست آوردن R_{eq} می‌توان آن‌ها را صفر کرد.

و صفر کردن منابع مستقل یعنی چه؟

صفر کردن منبع ولتاژ، یعنی صفر کردن ولتاژش، یعنی به‌جای آن اتصال کوتاه بگذاریم و صفر کردن منبع جریان، یعنی صفر کردن جریانش، یعنی به‌جای آن مدار باز بگذاریم.



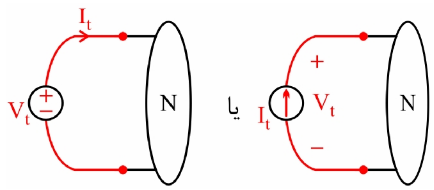
شکل (۲ـ۷) صفر کردن منابع مستقل

پس برای به دست آوردن R_{eq} می‌توانیم در ابتدا منابع مستقل را صفر کنیم (فقط یادتان باشد که گفته شد صفر کردن منابع مستقل، و نه منابع وابسته) و سپس سراغ روش دوم برای به دست آوردن R_{eq} برویم.

و روش دوم به این صورت است که در دو سر AB یک منبع جریان تست $\left(I_t\right)$ می‌گذاریم و با تحلیل مدار ولتاژ دو سرش را محاسبه می‌کنیم $\left(V_t\right)$، آن‌گاه می‌گوییم:

$$R_{eq} = \frac{V_t}{I_t} \qquad (۲\text{ـ}۷)$$

و یا بالعکس در دو سر AB یک منبع ولتاژ تست می‌گذاریم $\left(V_t\right)$ و جریان عبوری از آن را حساب می‌کنیم $\left(I_t\right)$ و باز همان رابطهٔ (۲ـ۷)



شکل (۲ـ۸) روش‌های مرسوم برای دسترسی به R_{eq}

مزیت این روش به روش قبلی آن است که:

یک‌بار مدار را تحلیل می‌کنیم. (به عبارت دیگر یک مدار را تحلیل می‌کنیم.)

حال سؤالی مطرح می‌شود و آن اینکه کدام‌یک از روش‌های الف یا ب مناسب‌تر است؟ البته واضح است که کلمات ابتدایی پاسخ شما آن است که «بستگی دارد!»

اما نیاز به توضیح دارد؛

در مدارهای با گرهٔ کمتر که روش KCL بهتر است، استفاده از منبع جریان و سپس یافتن V_t معقول‌تر است و در مدارهای با تعداد حلقه کمتر که روش KVL توصیه می‌شود، استفاده از منبع ولتاژ و سپس محاسبهٔ I_t بهتر است.

البته باید این‌گونه مهارت‌ها را در حل تست‌ها به دست آورد.

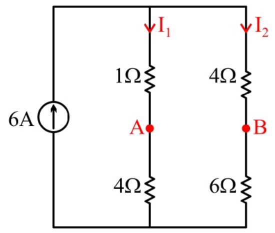
یادم است که در دبیرستان برای یافتن R_{eq} ، هیچ‌کدام از این کارها را نمی‌کردیم، آیا اینجا هم ممکن است آن روش‌ها مفید باشد؟

قطعاً؛ یعنی در بعضی از مدارها برای دسترسی به R_{eq}، می‌توان ابتدا منابع مستقل را صفر کرد و سپس با قواعد سری، موازی، تقارن، شبکه‌های بی‌نهایتی و ... R_{eq} را حساب کرد!

۲ــ مدار معادل تونن از دو سر A و B کدام است؟

۱) $\frac{10}{3}\Omega\,,\,-16\,V$ ۲) $19\,\Omega\,,\,-12\,V$

۳) $\frac{16}{5}\,\Omega\,,\,4V$ ۴) $\frac{10}{3}\Omega\,,\,4V$



شکل (۲ـ۹) **مدار تمرین ۲**

ابتدا محاسبهٔ e_{oc}؛ با تقسیم جریان داریم:

$$I_1=\frac{10}{15}\times 6=4\ A$$

$$I_2=\frac{5}{15}\times 6=2\ A$$

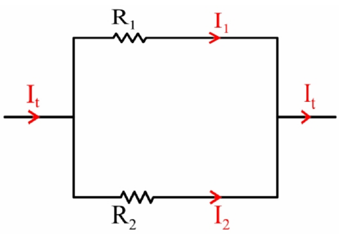
$$e_{oc}=V_a-V_b=4I_1-6I_2=16-12=4V$$

و برای R_{eq} البته منبع جریان را پاک می‌کنیم (یا همان .O.C) و حالا از دو سر A و B داریم:

$$R_{AB}=(4+1)||(4+6)=\frac{50}{15}=\frac{10}{3}\Omega$$

یعنی گزینهٔ ۴ درست است.

در خلال حل این تست، عبارت تقسیم جریان گفته شد. بد نیست به اندازهٔ دقایقی کوتاه این روابط را یادآوری کنیم. با آنکه بسیار پیش‌پا افتاده‌اند، اما در درس مدار فوق‌العاده پرکاربرد هستند.

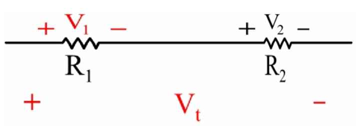


شکل (۲ـ۱۰) **تقسیم جریان**

$$I_1=\frac{R_2}{R_1+R_2}I_t \tag{۲ـ۸}$$

$$I_1+I_2=I_t \tag{۲ـ۹}$$

و برای تقسیم ولتاژ داریم:



شکل (۲ـ۱۱) **تقسیم ولتاژ**

$$V_1=\frac{R_1}{R_1+R_2}V_t \tag{۲ـ۱۰}$$

$$V_1+V_2=V_t \tag{۲ـ۱۱}$$

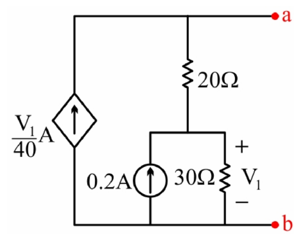
۳ـ مقاومت معادل را پیدا کنید. (یک نفر پای تخته بیاید و مسئله را حل کند!)

۱) $100\ \Omega$

۲) $200\ \Omega$

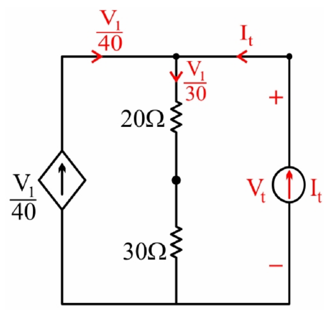
۳) $300\ \Omega$

۴) $400\ \Omega$



شکل (۲ـ۱۲) مدار تمرین ۳

ابتدا منبع جریان را حذف می‌کنیم، در دو سر مدار یک منبع جریان I_t می‌گذاریم و $V_{ab} = V_t$ را محاسبه می‌کنیم.



شکل (۲ـ۱۳) ساده شده مدار تمرین ۳

با KCL در گرهٔ بالایی داریم:

$$KCL : \frac{V_1}{40} + I_t - \frac{V_1}{30} = 0 \Rightarrow V_1 = 120 I_t$$

و با KVL در حلقه ورودی داریم:

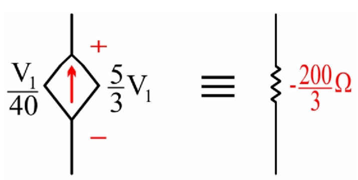
$$KVL : V_t = \frac{2}{3} V_1 + V_1 = \frac{5}{3} \times 120\ I_t = 200\ I_t$$

و در نتیجه:

$$R_{eq} = 200\ \Omega$$

راه بسیار خوبی بود، یعنی گزینهٔ ۲ درست شد.

اما من یک راه ساده‌تر می‌گویم؛ دیدیم که ولتاژ دو سر منبع وابسته برابر $\frac{5}{3}V_1$ شد، یعنی، یک منبع وابسته جریان به ولتاژ دو سر خودش وابسته شد. (شکل (۱ـ۳۸) را نگاه کنید.)

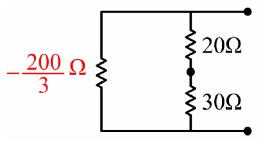


شکل (۲ـ۱۴) بحثی از مدار تمرین ۳

و آن مقاومت برابر است با ولتاژ تقسیم بر جریان یعنی:

$$R=-\frac{\frac{5}{3}V_1}{\frac{V_1}{40}}=-\frac{200}{3}\ \Omega$$

پس مدار اصلی به شکل زیر ساده شد:



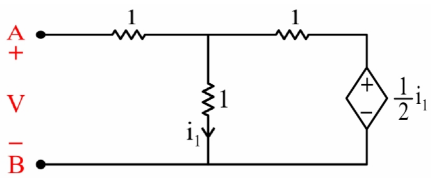
شکل (۲ـ۱۵) ساده شده تمرین ۳

یعنی:

$$R_{eq}=50 \parallel \left(-\frac{200}{3}\right)=\frac{50\times\frac{-200}{3}}{50-\frac{200}{3}}=200\ \Omega$$

البته همان‌طور که خوردن کله پاچه برای کودکان ممکن است خطرناک باشد، گفتن بعضی حرف‌ها در فصل دوم هم باید با احتیاط باشد. ببینید، اگر من جای شما بودم به‌جای منبع جریان I_t یک منبع ولتاژ $V_t=50\,V$ می‌گذاشتم. به روشنی پیداست که $V_1=30\,V$ شده و در نتیجه با یک KCL کوچولو در بالای مدار، $I_t=\frac{1}{4}A$ معلوم می‌شود و بنابراین $R_{eq}=200\,\Omega$ مثل نوشیدن آب خنک در تابستان داغ یا چای داغ در زمستان سرد به دست می‌آید.

۴ــ مدار معادل تونن شبکه زیر را پیدا کنید.



شکل (۲ـ۱۶) مدار تمرین ۴

اولاً این شبکه به خودی خود، منبع مستقل ندارد. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

مطمئناً e_{oc} و i_{sc} برابر صفر هستند.

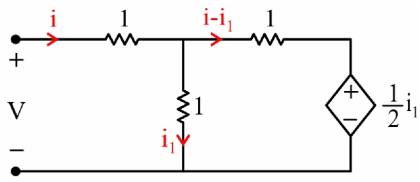
یعنی اگر در شبکه‌ای منبع مستقلی نبود، در آنجا:

$$e_{oc} = i_{sc} = 0 \qquad (۲ـ۱۲)$$

و آن مدار تنها معادل با یک مقاومت است.

برویم سراغ حل مسئله خودمان؛ باید رابطه‌ای بین V و i پیدا کنیم.

ابتدا KCL بازی می‌کنیم:



شکل (۲ـ۱۷) باز مدار تمرین ۴

اگر در حلقهٔ چپی KVL بزنیم، i_1 مزاحم است. چه کنیم؟

با یک KVL در حلقهٔ راستی، i_1 را برحسب i به دست می‌آوریم و سپس KVL در حلقهٔ چپی برای یافتن رابطه بین V و i.

در حلقهٔ راستی $KVL: i - i_1 + \frac{1}{2}i_1 - i_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad i_1 = \frac{2}{3}i$

در حلقهٔ چپی $KVL: V = i + i_1 = i + \frac{2}{3}i = \frac{5}{3}i$

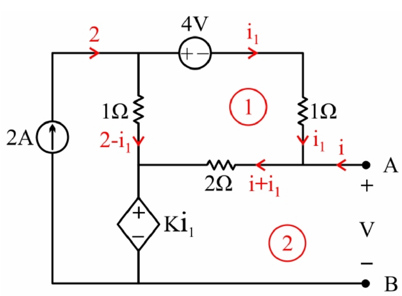
$$\begin{cases} R_{eq} = \frac{5}{3}\Omega \\ e_{oc} = 0 \end{cases}$$

در خیلی از مسایل این الگو قابل تکرار است. KVL در حلقهٔ فلان! برای حذف یک جریان مجهول و سپس KVL در حلقهٔ ورودی برای یافتن رابطهٔ V و i و ... با همین دید مسئلهٔ ۵ را حل کنید.

۵ـ مقدار K را طوری تعیین کنید که مدار مقابل:

الف) معادل یک باتری بدون مقاومت داخلی باشد.

ب) معادل یک مقاومت خالص باشد.



شکل (۲ـ۱۸) مدار تمرین ۵

روی مدار شکل اصلی KCL بازی می‌کنیم و سپس در حلقه‌های ۱ و ۲، KVL می‌زنیم:

$$\text{KVL (1)}: \quad 4+i_1+2i+2i_1-2+i_1=0 \quad \Rightarrow \quad i_1=-\frac{1}{2}(i+1)$$

$$\text{KVL (2)}: \quad V=2i+2i_1+Ki_1=\left(1-\frac{K}{2}\right)i+\left(-1-\frac{K}{2}\right)$$

یعنی:

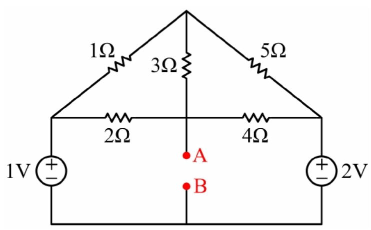
$$R_{eq}=1-\frac{K}{2} \quad , \quad e_{oc}=-1-\frac{K}{2}$$

و بنابراین:

الف $\rightarrow \quad R_{eq}=0 \quad \Rightarrow \quad 1-\frac{K}{2}=0 \Rightarrow K=+2$

ب $\rightarrow \quad e_{oc}=0 \quad \Rightarrow \quad -1-\frac{K}{2}=0 \Rightarrow K=-2$

۶ـ رابطهٔ بین V و i دو سر AB ، در مدار زیر کدام است؟



شکل (۲ـ۱۹) مدار تمرین ۶

۱) $V=\frac{92}{93}i+\frac{140}{93}$

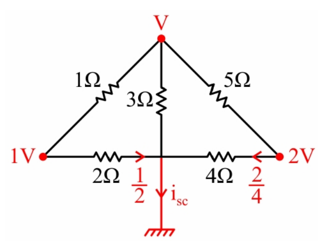
۲) $V=\frac{92}{93}i+\frac{120}{93}$

۳) $V=\frac{70}{93}i+\frac{16}{93}$

۴) $V=\frac{90}{93}i+\frac{16}{93}$

می‌خواهم برای حل این مسئله، یک روش میان‌بُر بسیار مفید ارائه کنیم. ببینید به‌جای حل مسئله و یافتن رابطه‌ای بین V و i (که کمی طولانی است.)، فقط i_{sc} را پیدا می‌کنیم و آن‌گاه می‌گوییم گزینه‌ای درست است که در آن $\frac{e_{oc}}{R_{eq}}$ برابر مقدار i_{sc} به دست آمده است. (صد البته که این روش فقط در مسایل تستی کاربرد دارد و می‌توان بارِدّ گزینه به پاسخ درست رسید.) درضمن آفرین به کسی که این حرف را تعمیم می‌دهد و می‌گوید:

اصولاً هر وقت در یک مسئله بیش از یک پارامتر را خواسته بودند، به‌جای به دست آوردن تک‌تک آن‌ها، رابطه‌ای بین آن پارامترهای مطلوب به دست می‌آوریم و بعد با رد گزینه کلک آن مسئله را می‌کَنیم!



شکل (۲ـ۲۰) ساده شده تمرین ۶

جالب است که با اتصال کوتاه کردن A و B ، مداری که دوتا گره با ولتاژ مجهول داشت، حالا فقط یک گره با ولتاژ مجهول دارد (گرهٔ بالایی)؛ در آن گره KCL می‌زنیم:

$$KCL: V-1+\frac{V}{3}+\frac{V-2}{5}=0 \Rightarrow V=\frac{21}{23}\,V$$

و برای i_{sc} داریم:

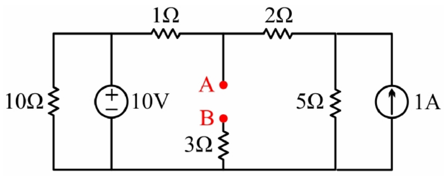
$$i_{sc}=\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{\frac{21}{23}}{3}=\frac{30}{23}$$

طبق توضیح استاد، فقط گزینهٔ ۲ می‌تواند درست باشد!

۷ـ در مدار زیر، ولتاژ مدار باز دو سر AB کدام است؟

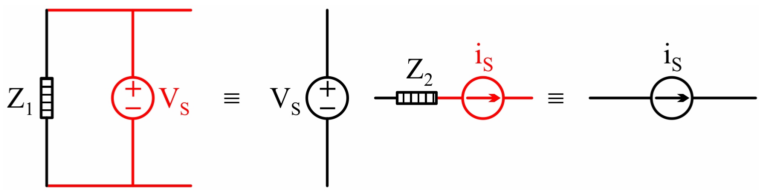
۱) $7V$ ۲) $\frac{59}{7}V$

۳) $10V$ ۴) $\frac{75}{8}V$



شکل (۲ـ۲۱) مدار تمرین ۷

توجه کنید که مقاومت 10 اهمی هیچ تأثیری ندارد، چراکه از خودش هیچ اختیاری ندارد. ولتاژ دو سرش $10V$ و جریانش $1A$ است، پس قابل حذف است. به‌طور کلّی، هر عنصری موازی با منبع ولتاژ باشد، از دید بیرونی قابل حذف است و به همین ترتیب هر عنصری سری با منبع جریان باشد، از دید بیرونی قابل حذف است.

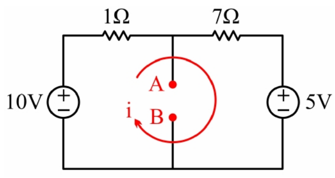


شکل (۲ـ۲۲) عناصر الف) موازی منبع ولتاژ ب) سری با منبع جریان

البته هر یک از روابط بالا یک استثنا دارد؛ آیا می‌دانید؟

بله، اگر Z_1 اتصال کوتاه باشد، قدرتش از منبع ولتاژ بیشتر است و اگر Z_2 مدار باز باشد، در مبارزه با منبع جریان سری، پیروز می‌شود. یعنی در حالت موازی، اتصال کوتاه بر منبع ولتاژ و سایر عناصر اولویت دارد و در حالت سری، مدار باز، منبع جریان و سایر عناصر به ترتیب قدرت‌نمایی می‌کنند.

واما حل مسئلهٔ ۷ توسط شما:



شکل (۲ـ۲۳) ساده شده تمرین ۷

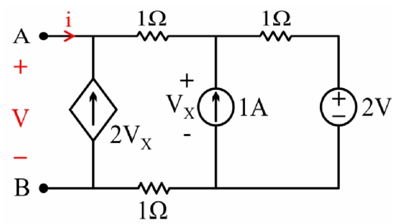
در شکل بالا مقاومت 10 اهمی را حذف می‌کنیم؛ از طرفی مقاومت 3 اهمی اینجا روی هوا وِل است! (چراکه AB مدار باز است) پس آن را هم حذف می‌کنیم و در سمت راست هم یک‌بار تبدیل نورتن به تونن زده‌ایم و به شکل (۸۶) رسیده‌ایم؛ حالا با KVL داریم:

$$\text{KVL}: \quad -10+i+7i+5=0 \quad \Rightarrow \quad i=\frac{5}{8}\text{A}$$

$$V_{AB}=7\times\frac{5}{8}+5=\frac{75}{8}\text{v}$$

پس گزینهٔ ۴ درست است.

۸ـ رابطهٔ $V-i$ شبکهٔ یک‌قطبی زیر کدام است؟



شکل (۲ـ۲۴) مدار تمرین ۸

۱) $V=-3i-15$

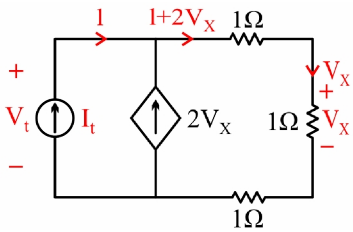
۲) $V=2i+10$

۳) $V=3i+10$

۴) $V=-2i+10$

برای حل این مسئله، ابتدا به شکل (۱ـ۴۷) مراجعه کنید؛ چه می‌بینید؟

شیب خط در ۴ گزینه متفاوت است. پس تنها به محاسبهٔ R_{eq} می‌پردازیم؛ بنابراین ابتدا منابع مستقل را صفر می‌کنیم؛ داریم:



شکل (۲ـ۲۵) ساده شده تمرین ۸

یک منبع جریان I_t می‌گذاریم و V_t را محاسبه می‌کنیم. برای این کار...

قبل از اینکه شما ادامه بدهید، یک نکتهٔ نسبتاً مفید دیگر بگویم؛ وقتی شما منبع I_t می‌گذارید و به دنبال V_t هستید تا از تقسیم آن‌ها مقاومت معادل R_{eq} را حساب کنید (و به دنبال e_{oc} و i_{sc} نیستید) می‌توانیم برای سادگی I_t را مساوی یک (یا هر عدد دیگر) بگیریم تا قدری محاسباتمان ساده شود. این را در تمرین ۸ اعمال کنید.

با این توضیح استاد، ادامه می‌دهیم و V_t را پیدا می‌کنیم، و با داشتن V_t داریم:

$$R_{eq} = V_t \tag{۲ـ۱۳}$$

$$1 + 2V_x = V_x \Rightarrow V_x = -1\,\text{v}$$

از طرفی:

$$V_t = 3V_x = -3\text{V} \Rightarrow R_{eq} = -3\ \Omega$$

پس تنها گزینهٔ ۱ می‌تواند درست باشد.

حالا یکی دو مثال، از روش KCL بازی و KVL در حلقهٔ خوب و یا KVL بازی و KCL در گرهٔ خوب حل کنیم:

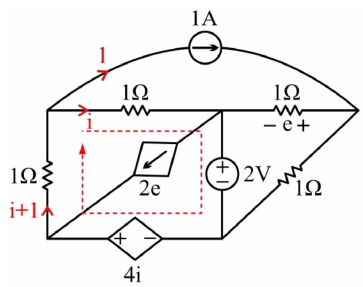
۹ـ در مدار مقابل شدت جریان i برابر است با:

۱) 1

۲) 1.5

۳) 2

۴) 2.5



شکل (۲ـ۲۶) مدار تمرین ۹

جریان مقاومت 1 اهمی سمت چپ مدار برابر $i+1$ می‌شود. (KCL بازی) حال در مربع نشان داده شده، KVL می‌زنیم؛ داریم:

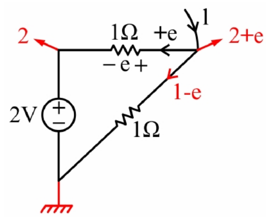
$$KVL: \quad i+2-4i+i+i+1=0 \Rightarrow i=1.5\,A$$

پس گزینهٔ ۲ درست است.

۱۰ــ حال اگر در همین مسئله، مقدار e را می‌خواست چه می‌کردید؟

جالب است !! در مثلث سمت راستی KCL بازی کرده و سپس KVL می‌زنیم:

$$KVL: \quad e+2+e-1=0 \quad \Rightarrow \quad e=-0.5\,v$$



شکل (۲ـ۲۷) بخش مفید! از مدار تمرین ۹ برای حل تمرین ۱۰

و یا می‌توانستیم KVL بازی کرده و سپس در گره شمال شرقی! یک KCL بزنیم تا جناب e را پیدا کنیم؛ یعنی:

$$KCL: -1+e+2+e=0 \quad \Rightarrow \quad e=-0.5\,V$$

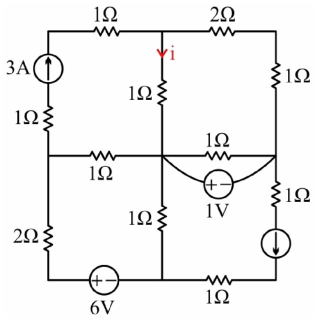
به نظر شما این بهتر نبود؟

دعوا نکنید؛ روش هر دوی شما خوب است ولی کمی دقت کنین؛ یک کار بهتر هم می‌شد انجام بدهیم؛ این یک روش ترکیبی کم‌نظیر است. ابتدا KCL بازی و KVL بازی را همزمان انجام بدهید، بعد عینکتان را مثل دانشمندان به نوک بینی‌تان منتقل کنید، اصلاً شاید جواب را دیدید!!! مثلاً در همین مسئله آخر؛ KCL بازی می‌گوید که جریان شاخه راستی برابر $1-e$ است و از طرفی KVL بازی هم می‌گوید که این جریان برابر $2+e$ است. پس:

$$1-e=2+e \quad \Rightarrow \quad e=-0.5\,V$$

عجب روشی بود ها !

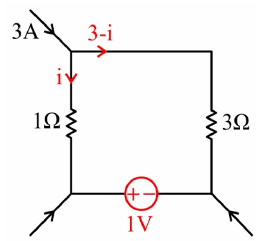
۱۱ــ جریان i چند آمپر است؟



شکل (۲ـ۲۸) مدار تمرین ۱۱

عبارت توضیح شکل (۲-۲۷) جالب بود! «بخش مفید». سعی کنید برای حل یک مدار تا حد امکان فقط سراغ بخش مفید بروید و سایر بخش‌ها را حذف کنید.

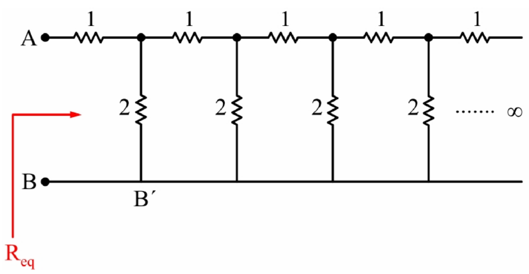
بخش مفید به صورت زیر است. KCL بازی کرده و سپس در بخش مفید (یا همان حلقهٔ خوب!) KVL می‌زنیم:



شکل (۲ـ۲۹) بخش مفید مدار تمرین ۱۱

$$\text{KVL}: \quad 3(3-i)-1-i=0 \quad \Rightarrow \quad i=2A$$

۱۲ــ مقاومت معادل دیده‌شده چقدر است؟



شکل (۲ـ۳۰) مدار نردبانی بی‌نهایت شاخه تمرین ۱۲

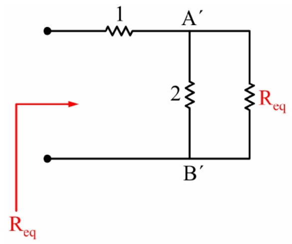
در اینجا به هیچ‌وجه نمی‌توان دو عنصر سری یا موازی پیدا کرد. رمز حل این‌گونه مسایل استفاده از مفهوم بی‌نهایت است. اگر ما از سر AB نگاه کنیم چه می‌بینیم؟

باید بگویم که از آنجا ...

ببخشید حرفتان را قطع می‌کنم! ولی مهم سؤال بعدی است؛ از سر $A'B'$ چه می‌بینیم؟

دقیقاً همان چیزی ! که از سر AB می‌دیدیم.

احسنت! حل مسئله تمام شد. همین ادعا را دوباره روی مدار پیاده می‌کنیم:



شکل (۲ـ۳۱) مدار ساده شده تمرین ۱۲

یعنی داریم:

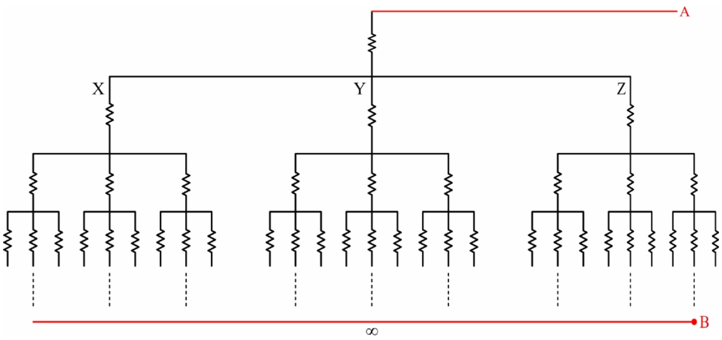
$$R_{eq} = \frac{2R_{eq}}{2+R_{eq}} + 1 \quad \Rightarrow \quad R_{eq} = 2\Omega$$

به همین سادگی حل شد. در مدارهای شامل بی‌نهایت‌شاخه، از این لِم کمک بگیرید. یادتان هست دبیر ریاضی اول دبیرستانتان را؟ می‌گفت: مقدار $x = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}$ را پیدا کنین و بعد برای حل آن چه می‌گفت؟ می‌گفت که طرفین را به توان 2 می‌رسانیم و چنین داریم:

$$x^2 = 2 + x$$

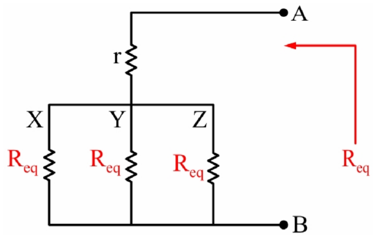
حرف‌هایی که در مثال آخر گفته شد، دقیقاً با همین استدلالی است که از معلم دبیرستانمان آموختیم!

۱۳ـ مقاومت دیده‌شده از دو سر AB چقدر است؟ (همهٔ مقاومت‌ها برابر r هستند.)



شکل (۲ـ۳۲) مدار تمرین ۱۳

دوباره مثل قبل است. آنچه ما از سر بالایی می‌بینیم، دقیقاً همان را از گره‌های X و Y و Z مشاهده می‌کنیم. این حرف را پیاده می‌کنیم:



شکل (۲ـ۳۳) مدار ساده شده تمرین ۱۳

یعنی داریم:

$$R_{eq}=r+\frac{1}{3}R_{eq}\Rightarrow R_{eq}=\frac{3}{2}r$$

اگر کسی علاقه‌مند به حفظ فرمول‌های به‌دردنخور است! بشنود:

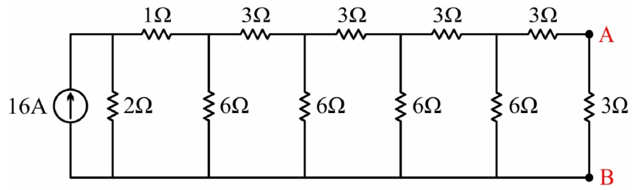
در مدارهایی شبیه مدار مسئله ۱۳ که در هر مقطع به n شاخه تقسیم می‌شوند، مقاومت معادل از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$R_{eq}=\frac{n}{n-1}r \qquad (۲ـ۱۴)$$

توجه داشته باشید که این حرف‌ها فقط در شبکه‌های بی‌نهایت‌شاخه مصداق دارد، در غیر این صورت باید از ترفندهای دیگری استفاده کنیم. به مثال ۱۴ توجه کنید.

۱۴ـ در مدار زیر ولتاژ V_{AB} چند ولت است؟

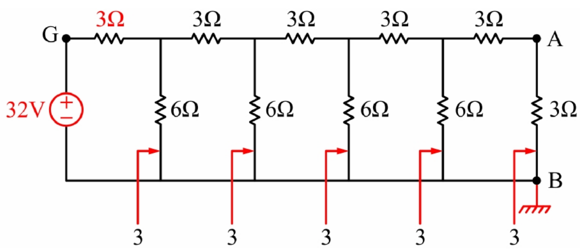
۱) 3
۲) 1
۳) 2
۴) 4



شکل (۲ـ۳۴) مدار تمرین ۱۴

برای حل در سمت چپ یک تبدیل نورتن به تونن زده و از پله‌های متوالی نردبان به سمت راست نگاه کنید. چی می‌بینید؟

مدار این‌جوری می‌شود:



شکل (۲ـ۳۵) ساده شده مدار تمرین ۱۴

پس چون همه مقاومت‌های دیده‌شده برابر 3Ω است، داریم:

$$V_C = 2V_A \ , V_D = 2\ V_C \ , V_E = 2\ V_D \ , V_F = 2V_E \ , V_G = 2V_F$$

از طرفی معلوم است که:

$$V_G = 32\,v$$

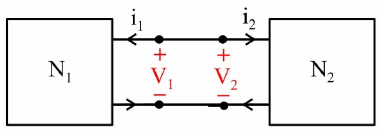
پس:

$$32 = 2^5\ V_A \quad \Rightarrow \quad V_A = 1\,v$$

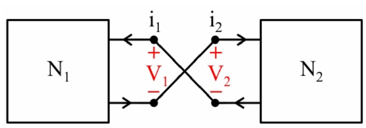
یعنی گزینهٔ ۲ درست است.

۲ـ۴ اتصال دو شبکه

هر دو مدار به یکی از صورت‌های زیر به هم متصل می‌شوند:



شکل (۲ـ۳۶) اتصال مستقیم دو شبکه N_1 و N_2



شکل (۲ـ۳۷) اتصال معکوس دو شبکه N_1 و N_2

برای یافتن پاسخ‌های ولتاژ V و جریان i، در ابتدا باید به نوع اتصال توجه داشت، واضح است که:

در اتصال مستقیم:

$$V = V_1 = V_2 \quad , \quad i = i_1 = -i_2 \qquad (۲ـ۱۵)$$

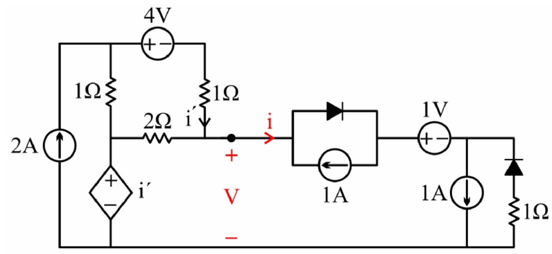
و در اتصال معکوس:

$$V = V_1 = -V_2 \quad , \quad i = i_1 = i_2 \qquad (۲ـ۱۶)$$

و با داشتن مشخصهٔ ولتاژ و جریان در هر یک از شبکه‌ها ـ چه به صورت فرمولی و چه به صورت نموداری ـ و از یافتن محل تلاقی آن‌ها V و i به دست می‌آیند.

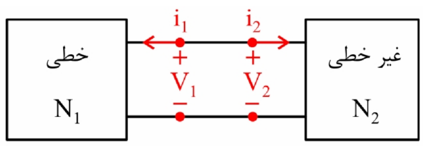
توجه داشته باشید که در مدارهای غیرخطی ممکن است پاسخ یکتا نباشد.

۱۵ـ در مدار زیر پاسخ‌های V و i را پیدا کنید.



شکل (۲ـ۳۸) مدار تمرین ۱۵ اتصال دو شبکه

جالب آن است که هر دو بخش چپی و راستی در تمرینات گذشته بررسی شده است.



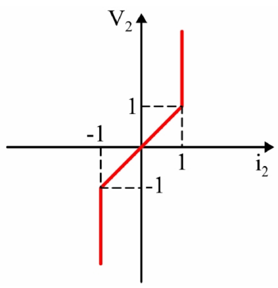
شکل (۲ـ۳۹) مدلی از اتصال مدار در تمرین ۱۵

ادامه با شما:

در تمرینات قبل برای N_1 دیدیم که:

$$V_1 = \frac{1}{2} i_1 - \frac{3}{2}$$

و برای N_2:



شکل (۲ـ۴۰) مشخصه ولتاژ جریان نیمه راستی مدار تمرین ۱۵

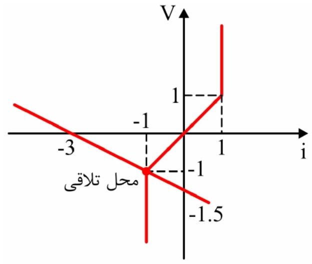
حال توجه داریم که اتصال مستقیم است، یعنی:

$$V = V_1 = V_2 \quad \text{و} \quad i = -i_1 = i_2$$

یعنی ملاک جهت‌های V و i را جهت‌های مربوط به مدار غیرخطی گرفتیم، پس رابطهٔ بالایی به صورت زیر می‌شود:

$$V = -\frac{1}{2} i - \frac{3}{2}$$

حالا این مدار را با معادلهٔ مشخصه مدار غیرخطی شکل (۲ـ۴۰) تلاقی می‌دهیم، داریم:



شکل (۲ـ۴۱) حل تمرین ۱۵ (تلاقی مشخصه‌ها)

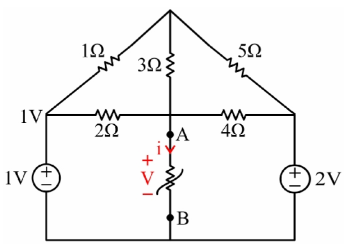
و با توجه به محل تلاقی:

$$V = V_1 = V_2 = -1^{V} \quad \text{و} \quad i = i_2 = -i_1 = -1^{A}$$

و یک نمونهٔ دیگر از همین نوع مسایل:

۱۶ـ جریان i را پیدا کنید. مشخصهٔ مقاومت غیرخطی به صورت زیر است:

$$V = \frac{1}{93}\left(i^3 + 27i\right)$$



شکل (۲ـ۴۲) مدار تمرین ۱۶

در اینجا هم یک مقاومت غیرخطی، به صورت مستقیم به یک شبکهٔ خطی که از قبل بررسی شده متصل شده است، بدون توضیح اضافی داریم:

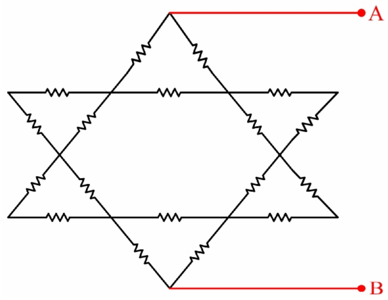
$$V = V_1 = V_2 \quad \text{و} \quad i = i_1 = -i_2$$

اندیس‌های ۱ مربوط به مقاومت غیرخطی و اندیس ۲ مربوط به شبکه بادبادکی خطی است! که قبلاً مشخصهٔ آن داده شده است، فقط در اینجا i را به $-i$ تبدیل می‌کنیم.

$$\frac{1}{93}\left(i^3 + 27i\right) = -\frac{92}{93}i + \frac{120}{93}$$

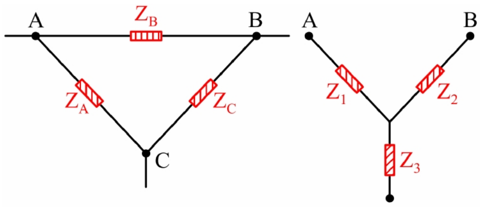
$$i^3 + 119i - 120 = 0 \quad \Rightarrow \quad i = 1A$$

۱۷ـ مقاومت معادل دیده‌شده از دو سر AB چقدر است؟ (تمام مقاومت‌ها سه‌اهمی‌اند.)



شکل (۲ـ۴۳) مدار تمرین ۱۷

قبل از حل این مسئله، بد نیست اشاره‌ای به تبدیلات ستاره و مثلث داشته باشیم. به تخته کلاس به دقت نگاه کنید:



شکل (۲ـ۴۴) شبکه‌های الف) مثلث و ب) ستاره

ابتدا تبدیل ستاره به مثلث:

$$Z_A = \frac{Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3}{Z_2} \quad (۱۷ـ۲)$$

$$Z_B = \frac{\text{صورت همان بالا}}{Z_3} \quad (۱۸ـ۲)$$

$$Z_C = \frac{\text{باز همان صورت بالا}}{Z_1} \quad (۱۹ـ۲)$$

و در حالت خاص هرگاه:

$$Z_1 = Z_2 = Z_3 \quad (۲۰ـ۲)$$

$$Z_A = Z_B = Z_C = 3Z_1 \quad (۲۱ـ۲)$$

و اکنون تبدیل مثلث به ستاره:

$$Z_1 = \frac{Z_A \,.\, Z_B}{Z_A + Z_B + Z_C} \quad (۲۲ـ۲)$$

$$Z_2 = \frac{Z_B \,.\, Z_C}{\text{همان مخرج بالا}} \quad (۲۳ـ۲)$$

$$Z_3 = \frac{Z_A \,.\, Z_C}{\text{باز همان مخرج بالا}} \quad (۲۴ـ۲)$$

و اگر:

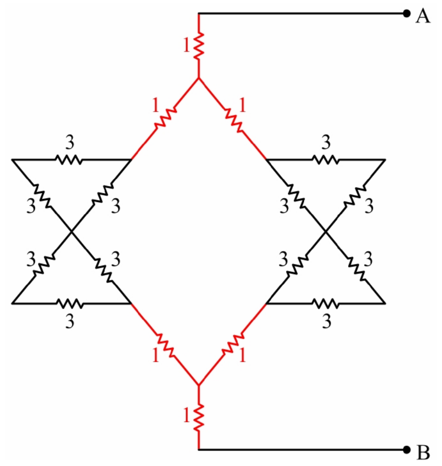
$$Z_A = Z_B = Z_C \quad (۲۵ـ۲)$$

$$Z_1 = Z_2 = Z_3 = \frac{1}{3} Z_A \quad (۲۶ـ۲)$$

در مورد شبکه‌های Π و T چطور؟

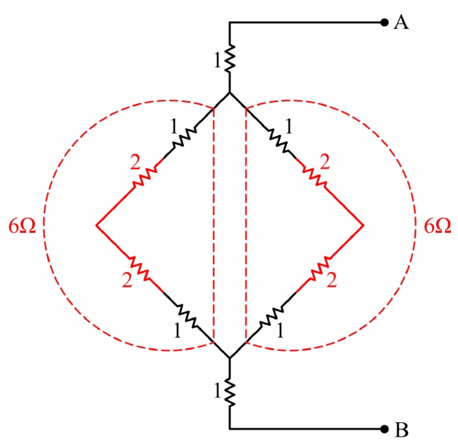
یادتان باشد، مدار π همان مثلث (پاهای پایین آن را به هم بچسبانید!) و مدار T همان ستاره است. (بازوهای بالایی را باز کنید.) پس نکتهٔ جدیدی ندارد. برویم سراغ حل تمرین ۱۷.

برای دو مثلث بالایی و پایینی، معادل ستاره می‌نویسیم و مقاومت معادل شاخه‌های چپی و راستی را هم حساب می‌کنیم؛ به صورت زیر



شکل (۲ـ۴۵) مدار ساده شده تمرین ۱۷

و باز اگر ساده‌تر کنیم:



شکل (۲ـ۴۶) مدار خیلی ساده‌تر ! شده تمرین ۱۷

یعنی:

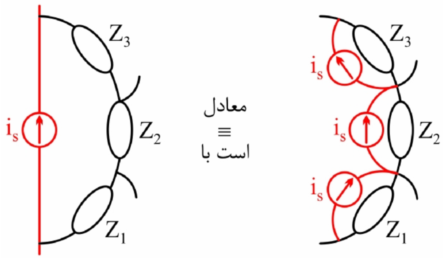
$$R_{AB} = 1 + 6 \| 6 + 1 = 5\ \Omega$$

راه‌حل شما درسته ولی اگر کسی چشماشو باز بکنه، می‌بینه که مدار متقارن است؛ پس می‌شود آن را روی محور تقارنش تا کرد و بعد هم مثل آب خوردن دوباره $R_{eq} = 5\Omega$ به دست می‌آید.

۲ـ۵ تبدیل منابع

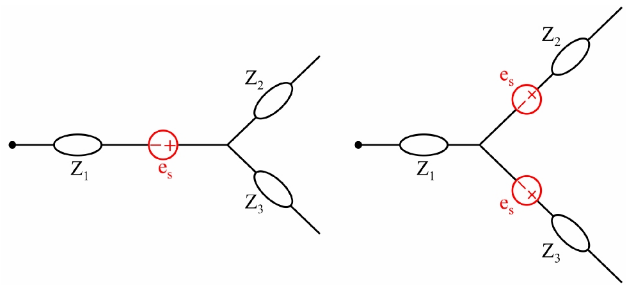
گاهی این روش‌های تبدیل منابع کار را بسیار ساده می‌کنند؛

دقت کنید:



شکل (۲ـ۴۷) تبدیل منابع مستقل جریان

و یا در مورد منابع ولتاژ:

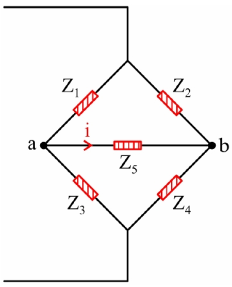


شکل (۲ـ۴۸) تبدیل منابع مستقل ولتاژ

این دو تبدیل در کاهش تعداد مش‌های مستقل یا کاهش تعداد گره‌های مستقل در بعضی مدارها می‌توانند مؤثر باشند. البته برای شما که اهل KCL بازی و KVL بازی هستید، خیلی نیازی به این تبدیل منابع نیست.

۲ـ۶ پل وتستون

سال‌هاست با این پل آشنا هستید، پس بدون توضیح می‌گذریم.



شکل (۲ـ۴۹) پل آقای وتستون!

اگر $Z_1Z_4 = Z_2Z_3 \quad \Rightarrow \quad i=0 \quad \Rightarrow$ **شاخهٔ ab قابل حذف است.** (۲ـ۲۷)