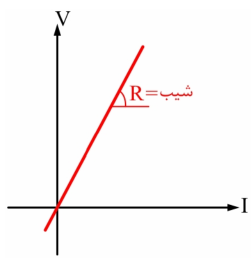
فصل ۱ مدارهای مقاومتی و روش‌های تحلیل

مقدمه

قبل از شروع درس کمی مقدمه لازم است؛ اسم این درس **«مدار»** است؛ اگر جای حروف دوم و سوم آن را عوض کنیم به نقش بی‌بدیل این درس در رشته **«مهندسی برق»** پی می‌بریم؛ درس مدار نه تنها پایه‌ی اکثر دروس این رشته است؛ بلکه در سایر رشته‌ها نیز با عنوان مبانی برق مورد بررسی قرار می‌گیرد. از طرفی هم در بیشتر آزمون‌های تحصیلات تکمیلی (کارشناسی ارشد و دکتری) این درس مورد سؤال قرار می‌گیرد؛ پس با درس بسیار مهمی سر و کار خواهیم داشت. از طرفی تمام سعی ما بر این است که به دلچسب‌ترین و شیرین‌ترین شیوه ممکن بحث را هضم کنیم. در فصل اول عناصر مداری را می‌شناسیم و به روش‌های تحلیل مدارهای مقاومتی می‌پردازیم؛ این فصل مبنای تمام فصول بعدی است؛ برای همین با تمام هوش و حواس سرکلاس جلسه اول حاضر شوید.

۱ـ۱ مشخصهٔ ولتاژ ـ جریان

یعنی رابطه‌ای را که بین ولتاژ و جریان یک مدار وجود دارد، در یک شکل مشخص کنیم. مثلاً در یک مقاومت خطی این مشخصه به صورت زیر است:

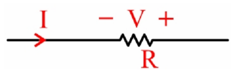


شکل (۱ـ۱) مشخصه ولتاژ ـ جریان در یک مقاومت خطی

به نظر شما اِشکال مشخصهٔ بالا (یا بهتر بگویم، نقص آن) چیست؟

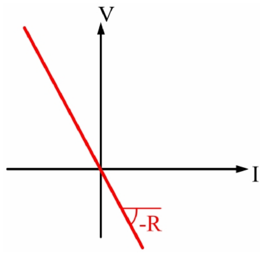
در نظر اول هیچ ایرادی ندارد ولی با کمی دقت می‌بینیم که جهت‌های ولتاژ و جریان مشخص نشده است!

دقیقاً ! یکی از مهم‌ترین چیزهایی که باید در درس مدار به آن توجه داشت، **جهت**‌های ولتاژ و جریان است. مثلاً اگر پلاریتهٔ ولتاژ و جهت جریان را به صورت زیر فرض کنیم:



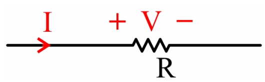
شکل (۱ـ۲) یک مقاومت خطی با پلاریته ولتاژ و جهت جریان مشخص شده

آنگاه مشخصهٔ ولتاژ ـ جریان آن به صورت شکل (۱ـ۳) می‌شود:



شکل (۱ـ۳) مشخصه ولتاژ و جریان در مقاومت نشان داده‌شده در شکل (۱ـ۲)

پس برای شکل (۱-۱) داریم:



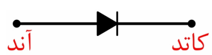
شکل (۱ـ۴) مقاومت خط با پلاریته ولتاژ و جهت جریان استاندارد

۱ـ۱ـ۱ عناصر مداری

حال مشخصه ولتاژ ـ جریان چند عنصر را بررسی می‌کنیم.

الف) مقاومت خطی (که بررسی شد!)

ب) دیود ایده‌آل: می‌دانیم در دیود ایده‌آل هر گاه ولتاژ آند از کاتد بیشتر باشد، دیود در حکم اتصال کوتاه یا همان .S.C است، یعنی:



$$V = 0 \qquad (۱ـ۱)$$

و هرگاه ولتاژ کاتد از آند بیشتر شود، دیود نقش مدار باز یا همان .O.C را ایفا می‌کند، به عبارت دیگر:

$$I = 0 \qquad (۱ـ۲)$$

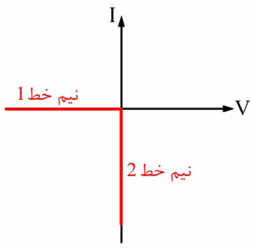
حال با توجه به این عبارات بسیار ساده و توجه به جهت‌های ولتاژ و جریان برای هر دیودی می‌توان مشخصهٔ ولتاژ ـ جریان رسم کرد.

۱ــ برای دیودهای نشان داده شده مشخصهٔ جریان ــ ولتاژ رسم کنید.

(الف) (ب) (ج) (د)

شکل (۱ـ۵) حالات مختلف برای یک دیود ایده‌آل

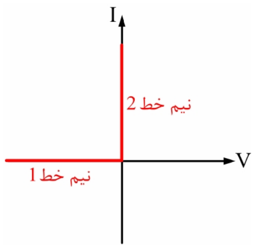
در شکل الف) هنگامی که $V < 0$ است، دیود قطع می‌شود، یعنی $I = 0$ (نیم‌خط۱) و هنگامی که دیود وصل شود، یعنی $V = 0$، نیم‌خط۲ را داریم:



شکل (۱ـ۶) مشخصه جریان ـ ولتاژ دیود ایده‌آل
شکل (۱ـ۵ـ الف) (پاسخ غلط !)

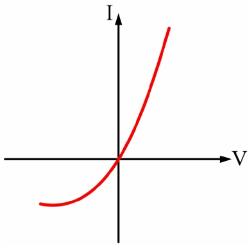
اِشکال این پاسخ کجاست؟

نیم‌خط۱ مشکلی ندارد، منتها در نیم‌خط۲، مقادیر جریان منفی‌اند، درحالی‌که با توجه به جهت جریان در شکل (۱ـ ۵ ـ الف) جریان مثبت است. (از آند به کاتد) پس جواب درست به این شکل می‌شود:



شکل (۱ـ۷) مشخصه صحیح! جریان ـ ولتاژ دیود ایده‌آل شکل (۱ـ۵ـ الف) (پاسخ درست)

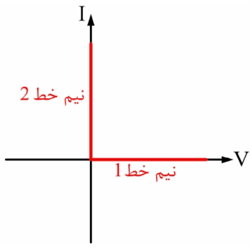
کاملاً درست است. از طرفی با کمی دقت نیز ملاحظه می‌کنید که این شکل، یک تقریبِ ایده‌آل برای دیود واقعی است. (موافقید؟)



شکل (۱ـ۸) مشخصه جریان ـ ولتاژ دیود واقعی
شکل (۱ـ۵ـ الف)

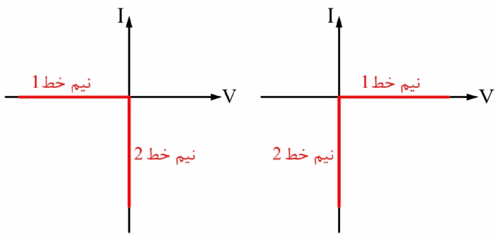
و اما ادامهٔ پاسخ تمرین ۱:

در شکل (۱ـ۵ـب) وقتی دیود قطع است که $V > 0\ 0020$ (به جهت پلاریتهٔ ولتاژ نگاه کنید!)، یعنی نیم‌خط ۱ و مشخصهٔ دیود هنگام وصل بودن (یعنی $V = 0$)، بر نیم‌خط ۲ منطبق می‌شوند. (این بار اشتباه قبلی را مرتکب نشدم!)

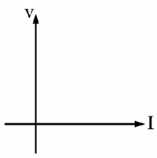
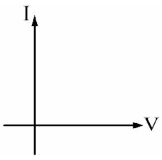


شکل (۱ـ۹) مشخصه جریان ـ ولتاژ دیود ایده‌آل شکل (۱ـ۵ـ ب)

پس جمع‌بندی می‌کنیم: **ابتدا** حالت قطع را بررسی می‌کنیم، حالتی که $V_{\text{کاتد}} > V_{\text{آند}}$ در اینجا $I = 0$ است و نیم‌خط مربوط، مشخص می‌شود و **سپس** حالت وصل که $V = 0$ است؛ برای این نیم‌خط، توجه به **جهت جریان** لازم است.

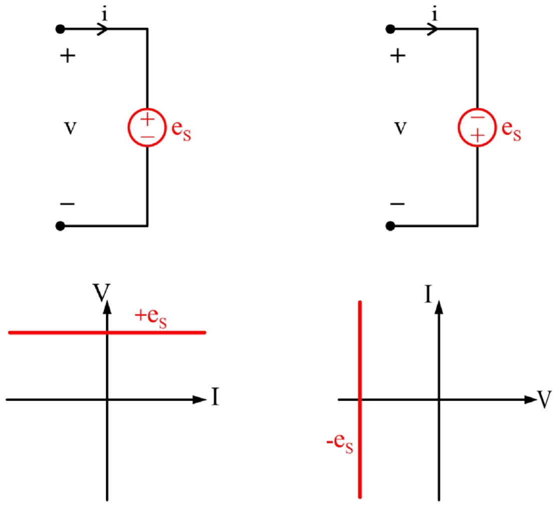


شکل (۱ـ۱۰) مشخصه جریان ـ ولتاژ دیود ایده‌آل شکل‌های (۱ـ۵ـ ج و د)

بدیهی است که به سادگی می‌توانستیم مشخصهٔ  را به‌جای  رسم کنیم.

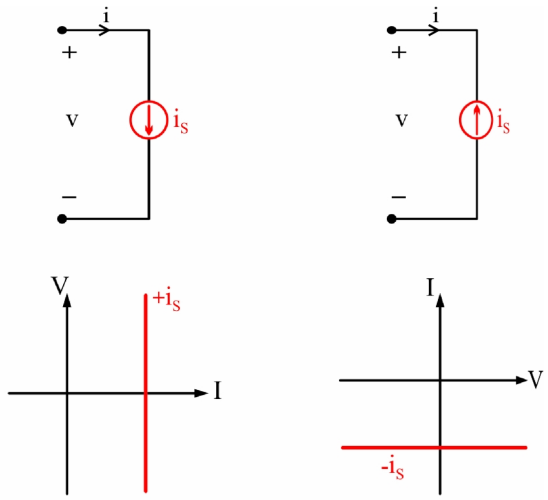
نمودار نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه می‌شود و در نتیجه **شیب‌ها**، **معکوس** می‌شوند.

ج) منبع ولتاژ ایده‌آل: توضیحی نیاز ندارد، فقط نگاه کنید.



شکل (۱ـ۱۱) مشخصه ولتاژ ـ جریان در منبع ولتاژ ایده‌آل

د) منبع جریان ایده‌آل: باز تنها یک نگاه کافی است.



شکل (۱ـ۱۲) مشخصه ولتاژ ـ جریان در منبع جریان ایده‌آل

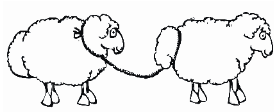
یک نفر موضوع را جمع‌بندی کند.

هر منبع ولتاژ یا منبع جریانی، بسته به جهتش، مقدار ولتاژ و یا جریان را در مشخصهٔ $V-I$ به اندازهٔ e_s و یا i_s شیفت می‌دهد. (به راست و چپ و یا به بالا و پایین)

۱ـ۱ـ۲ به هم بستن عناصر

حالا مسئله این است که هیچ‌گاه مشخصهٔ ولتاژ ـ جریان را در یک عنصر تنها به ما نمی‌دهند. (مگر در آزمون ورودی مدارس ابتدایی!) بلکه مداری می‌دهند متشکل از تعدادی عناصر به‌هم‌پیوسته به یکی از صورت‌های زیر:

الف) اول سری:

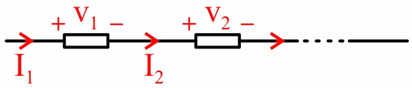


در این حالت می‌دانیم:

$$\begin{cases} I_{\text{کل}} = I_1 = I_2 = \cdots \\ V_{\text{کل}} = V_1 + V_2 + \cdots \end{cases} \qquad (۱ـ۳)$$

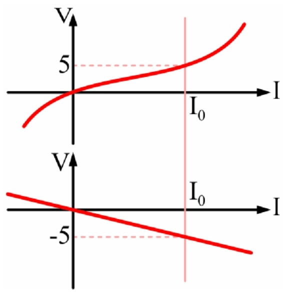
و البته

$$R_{eq} = \sum_i R_i \qquad (۱ـ۴)$$



شکل (۱ـ۱۳) المان‌های سری (هم‌جریان)

پس برای رسم مشخصهٔ $V-I$ نهایی، به ازای **جریان‌های یکسان**، **ولتاژ**های متناظر را **جمع** می‌کنیم.

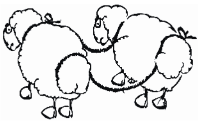


شکل (۱ـ۱۴) مشخصه $V-I$ دو عنصر سری

یعنی به ازای جریان $I = I_0$، ولتاژهای متناظر را جمع می‌کنیم:

$$I_1 = I_2 = I_0 \quad \Rightarrow \quad V_{\text{کل}} = V_1 + V_2 = 5 + (-5) = 0$$

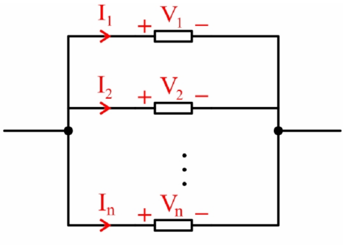
ب) و حالا موازی:



در این حالت:

$$\begin{cases} V_{\text{کل}} = V_1 = V_2 = \cdots \\ I_{\text{کل}} = I_1 + I_2 + \cdots \end{cases} \qquad (۱\text{ـ}۵)$$

و البته:



شکل (۱ـ۱۵) المان‌های موازی (هم‌ولتاژ)

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_i \frac{1}{R_i} \qquad (۱\text{ـ}۶)$$

پس برای رسم مشخصهٔ $I-V$ نهایی، به ازای **ولتاژهای یکسان**، **جریان**‌های **متناظر** را جمع می‌کنیم.

یادتان هست که هنگام جمع کردن دو خط، در حقیقت شیب‌ها و عرض از مبدأ آن‌ها را با هم جمع می‌کردیم؛ در ضمن فراموش نکنید که:

$$/m + \overline{\;0\;} = /m \qquad (۱\text{ـ}۷)$$

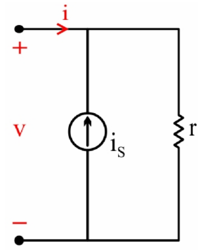
$$/m + |\infty = |\infty \qquad (۱\text{ـ}۸)$$

مفهوم روابط (۱-۷) و (۱-۸) را فهمیدید؟

رابطهٔ (۱-۷) یعنی هر خط با شیب m وقتی با یک خط **افقی** جمع شود، شیب آن تغییر نمی‌کند، بلکه به قول الکترونیکی‌ها! تنها مقدار dc آن تغییر می‌کند (شیفت dc) و رابطهٔ (۱-۸) به این معنی است که خط با شیب m هنگام جمع شدن با خط قائم، همان خط قائم (با شیب بی‌نهایت) می‌شود؛ به قول الکترونیکی‌ها بریده می‌شود!

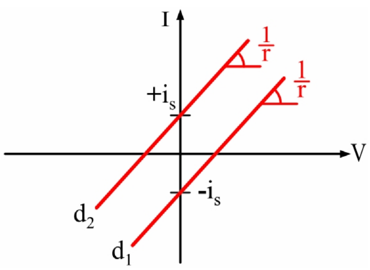
حالا نوبت حل تعدادی نمونه سؤال است؛ شما هم قدم به قدم با من حرکت کنید، قبل از مشاهدهٔ حل هر تمرین، حتماً از قبل خودتان آن را حل کنید تا ... !

۲ــ در مدارهای زیر مشخصهٔ $I-V$ رسم کنید.



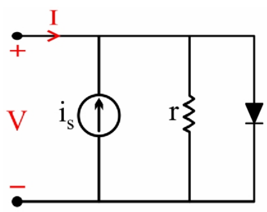
شکل (۱ــ۱۶) تمرین ۲ــ الف

در اینجا پاسخ خط d_1 است ولی اگر جهت منبع جریان بالعکس بود؛ پاسخ خط d_2 می‌شد.



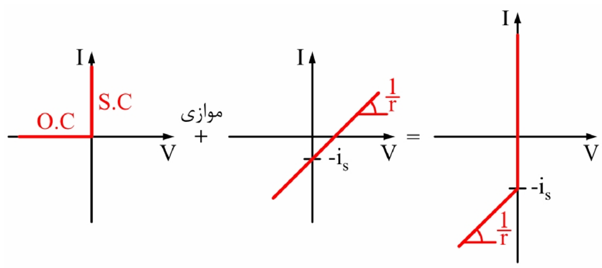
شکل (۱ــ۱۷) پاسخ تمرین ۲ــ الف

و حالا مداری با یک عنصر غیرخطی (دیود):

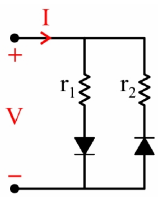


شکل (۱ــ۱۸) تمرین ۲ــ ب

پاسخ قسمت الف) با دیود موازی است، پس مشخصه آن‌ها جمع می‌شود.



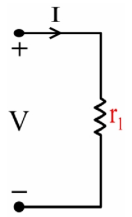
شکل (۱ــ۱۹) پاسخ تمرین ۲ــ ب



شکل (۱ــ۲۰) تمرین ۲ــ ج

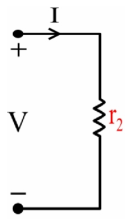
مطابق روال گذشته، در هر شاخه، حاصل سری شدن مقاومت با دیود را به دست می‌آوریم و نتایج را با هم موازی می‌کنیم. آیا راه حل سریع‌تری سراغ دارید؟

بله! شاخهٔ چپی را شاخهٔ ۱ و شاخهٔ راستی را شاخهٔ ۲ بنامید. حال معلوم است که وقتی $V > 0$، آن‌گاه شاخهٔ۱ وصل و شاخهٔ۲ قطع است و مدار به شکل زیر می‌شود:



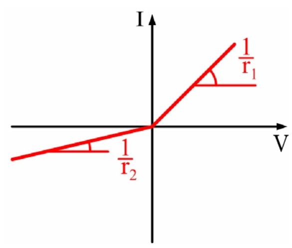
شکل (۱ـ۲۱) مدار معادل در حالت $V > 0$

و هنگامی که $V < 0$، بالعکس است، یعنی مدار به فرم زیر می‌شود:



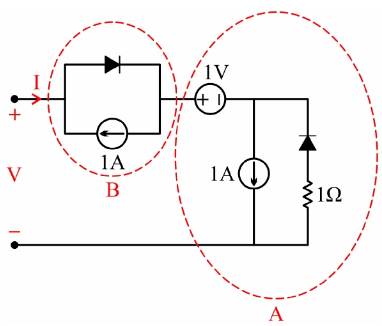
شکل (۱ـ۲۲) مدار معادل در حالت $V < 0$

پس با تقسیم به دو ناحیهٔ $V > 0$ و $V < 0$، مشخصهٔ ولتاژ ـ جریان به صورت زیر می‌شود:



شکل (۱ـ۲۳) پاسخ تمرین ۲ـ ج

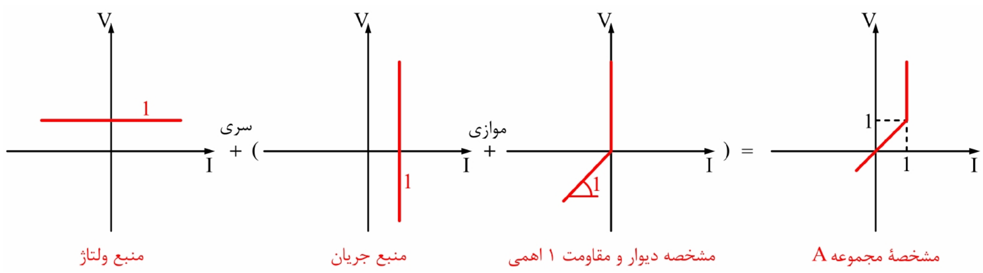
بسیار خوب؛ در ضمن این مسئله، سؤال آزمون ورودی دورهٔ دکترای یکی از دانشگاه‌ها بوده است، البته با صورتی متفاوت، با این مضمون که مدار تمرین ۲ـ ج یک تقریب **تکه‌ای خطی** برای دیود واقعی است البته به شرطی که $r_1 << r_2$. (به شکل (۱ـ۸) مراجعه کنید.) و اما شکل بعدی:



شکل (۱ـ۲۴) تمرین ۲ـ د

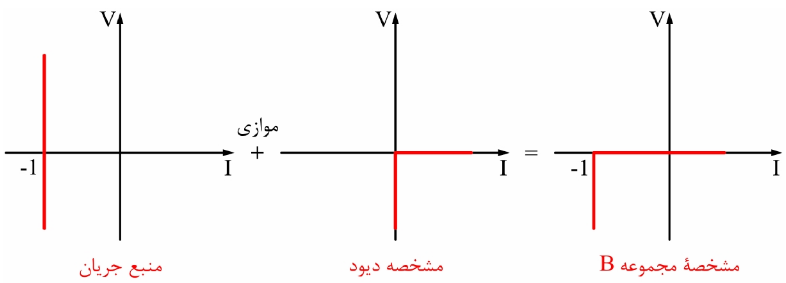
تازه این شد یک تمرین کامل! واضح است که باید قسمت‌های مختلف مدار را ـ تکه‌تکه ـ بررسی کنید تا حاصل نهایی به دست آید. منتظر چه هستید؟ شروع کنید.

ابتدا مجموعهٔ A (بخش سمت راستی):



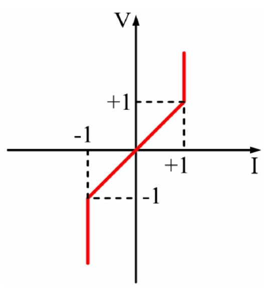
شکل (۱ـ۲۵) مراحل حل تمرین ۲ـ د

و سپس مجموعهٔ B :

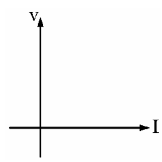
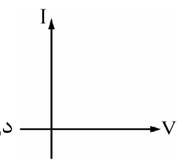


شکل (۱ـ۲۶) ادامه مراحل حل تمرین ۲ـ د

و در نهایت این دو بخش با هم سری می‌شوند و حاصل نهایی به صورت زیر است:

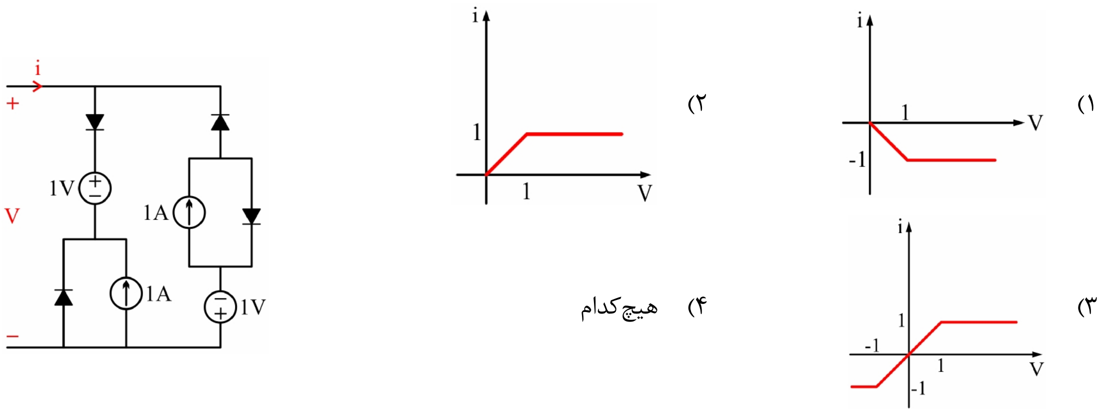


شکل (۱ـ۲۷) پاسخ تمرین ۲ـ د

بنابراین بهتر است که در حل یک مسئلهٔ نسبتاً مفصل، تمام مشخصه‌ها را به صورت یکی از فرم‌های  یا  در نظر بگیریم تا تبدیل این فرم‌ها به یکدیگر وقت ما را تلف نکند.

۳ـ حالا یک مسئلهٔ تستی!

کدام‌یک از منحنی‌های زیر، منحنی مشخصه مدار زیر است؟



شکل (۱ـ۲۸)   تمرین ۳

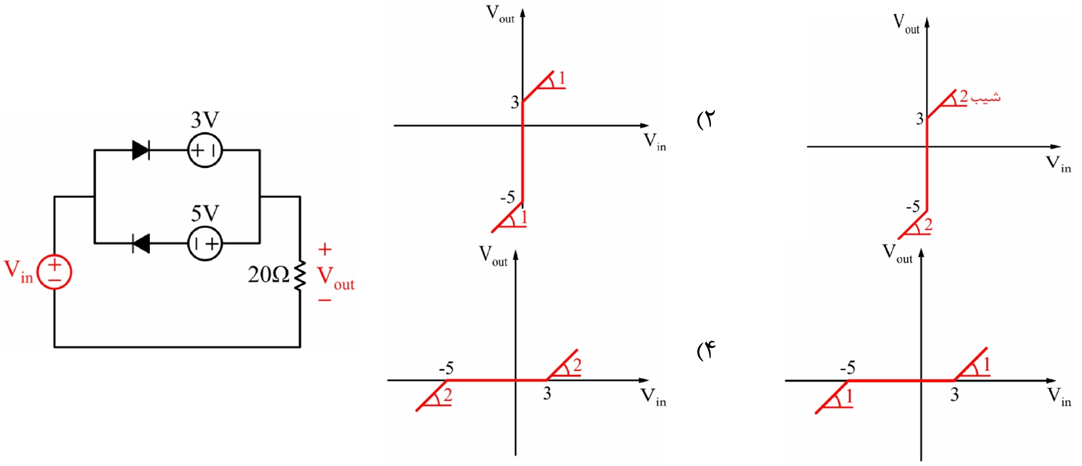
برای حل این مسئله باید از یک گوشهٔ مدار شروع کنیم و...

اگر به گزینه‌ها نگاه کنیم، نیازی به شروع از این گوشه به آن گوشه ندارد. قطعاً گزینهٔ ۴ درست است، چراکه در هر سه گزینه اول خط مایل وجود دارد، درحالی‌که خط مایل در اثر مقاومت خطی  حاصل می‌شود و حال آن‌که اثری از این اِلمان در مدار نیست.

بسیار عالی است. در حل تست باید چشمان شما چپ باشد!  البته نه این شکلی، یعنی همواره باید نیم‌نگاهی به گزینه‌ها نیز داشته باشید. به موقع در این مورد به تفصیل حرف می‌زنیم!

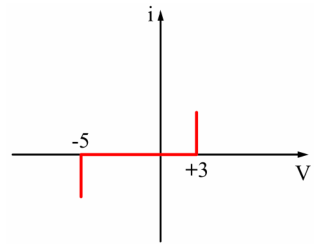
گاهی به جای مشخصهٔ ولتاژ ـ جریان، ممکن است مشخصه‌های دیگری همچون $V_{in} - V_{out}$ را بخواهند. دقت کنید!

۴ــ در مدار شکل زیر دیودها ایده‌آل فرض می‌شوند. مشخصهٔ $V_{out} - V_{in}$ به چه صورت خواهد بود؟



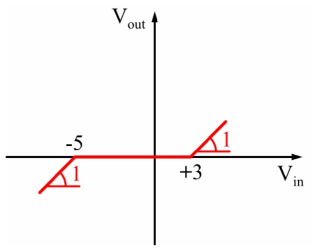
شکل (۱ـ۲۹) تمرین ۴

با سری کردن دیودها با منابع ولتاژ و سپس موازی شدن دو شاخه، مشخصهٔ $I - V$ به صورت زیر می‌شود:



شکل (۱ـ۳۰) مراحل حل تمرین ۴

حال با سری شدن این مجموعه با مقاومت ۲ اهمی، مشخصهٔ $V_{out} - V_{in}$ به صورت زیر در می‌آید:



شکل (۱ـ۳۱) پاسخ تمرین ۴

پس گزینهٔ ۳ درست است. در ضمن فراموش نکنید که در این‌جا:

$V_{out} = 2i$

و به همین دلیل بود که شیب خط‌ها، به جای $\frac{1}{2}$ برابر یک شد!

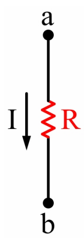
قبل از اتمام این بحث و رفتن به سراغ بحث بعدی، متذکر می‌شوم که مشخصهٔ ولتاژ ـ بار (در مورد خازن) و مشخصهٔ شار ـ جریان (در سلف) عیناً شبیه مشخصهٔ ولتاژ ـ جریان (در مقاومت) است و از تکرار آن پرهیز می‌کنیم.

خلاصه اینکه در مدارهای شامل خازن، نقش i (جریان) را q (بار) بازی می‌کند (V سر جای خودش است) و در مدارهای شامل سلف، نقش V (ولتاژ) را φ (شار) ایفا می‌کند. (i سرجای خودش هست.)

۱ـ۲ عناصر مداری (معرفی و روابط)

۱ـ۲ـ۱ مقاومت

از دورهٔ راهنمایی! به خاطر دارید که:



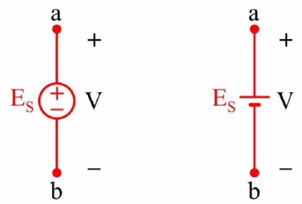
شکل (۱ـ۳۲) مقاومت R و جریان I !

$$I = \frac{V_a - V_b}{R}$$ جریان رونده از a به b (۱ـ۹)

۱ـ۲ـ۲ منابع مستقل (نابسته)

الف ـ منبع ولتاژ

که همان باتری است؛

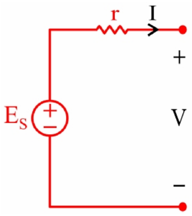


شکل (۱ـ۳۳) منبع ولتاژ مستقل (نابسته) ایده‌آل

در حالت ایده‌آل داریم:

$$V = E_s$$ (۱ـ۱۰)

و در حالت واقعی یک مقاومت r با آن سری می‌شود که آن را مقاومت داخلی می‌نامیم:



شکل (۱ـ۳۴) منبع ولتاژ مستقل (نابسته) واقعی

$$V = E_s - rI \tag{۱ـ۱۱}$$

مقدار rI را در رابطهٔ بالا را افت ولتاژ مقاومت داخلی منبع نیز می‌گوییم.

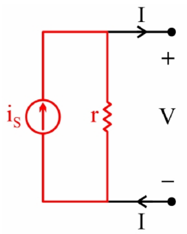
ب ـ منبع جریان

در حالت ایده‌آل:

شکل (۱ـ۳۵) منبع جریان مستقل (نابسته) ایده‌آل

$$I = i_s \tag{۱ـ۱۲}$$

و در حالت واقعی یک مقاومت r اهمی با آن موازی می‌شود؛ باز هم به نام مقاومت داخلی!



شکل (۱ـ۳۶) منبع جریان مستقل (نابسته) واقعی

$$I = i_s - \frac{V}{r} \tag{۱ـ۱۳}$$

می‌توان مشابه قبل $\frac{V}{r}$ را افت جریان منبع نامید.

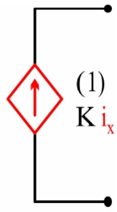
چرا در منبع جریان، مقاومت داخلی را سری با آن فرض نکردیم؟

این‌که ساده است، چراکه آن مقاومت داخلی، هیچ‌گونه افتی در جریان منبع ایجاد نمی‌کرد، به‌طور کلی هر **چیزی!** **موازی منبع ولتاژ** قابل حذف است (یعنی تأثیری در سایر قسمت‌های مدار ندارد) و هر **المانی سری با منبع جریان** نیز همین‌طور!

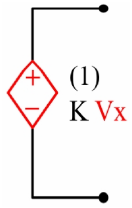
البته برای آن چیز! و اِلمان استثنائاتی هم هست! اگر آن چیز (که موازی با منبع ولتاژ شده) اتصال کوتاه (یا .S.C) باشد، خود منبع ولتاژ حذف می‌شود و در صورتی که آن اِلمان (سری با منبع جریان) مدار باز (یا .O.C) باشد، خود منبع جریان منهدم! می‌شود.

۱ـ۲ـ۳ منابع وابسته

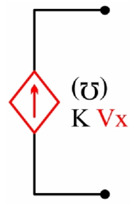
که به یکی از چهار شکل زیر است:



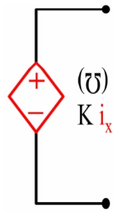
الف) منبع جریان وابسته به جریان



ب) منبع ولتاژ وابسته به ولتاژ



ج) منبع جریان وابسته به ولتاژ



د) منبع ولتاژ وابسته به جریان

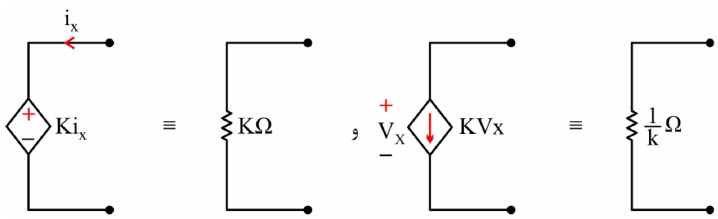
شکل (۱ـ۳۷) چهار نوع منبع وابسته

که در آن‌ها i_x و V_x به ترتیب جریان یا ولتاژ هر شاخه از مدار می‌توانند باشند.

حالت خاص! منابع وابسته به خود!

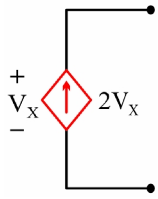
در شکل‌های (۱ ـ ۳۷ - ج) و (۱ ـ ۳۷ ـ د) فرض کنید i_x جریان خود منبع ولتاژ و یا V_x ولتاژ خود منبع جریان باشد؛ در این صورت منبع وابسته در حکم یک مقاومت می‌شود.

ملاحظه کنید:



شکل (۱ـ۳۸) منابع وابسته به خود و معادل مقاومتی آن‌ها

بدیهی است که توجه به این موضوع، گاهی حل تست را ساده می‌کند.

۵ـ معادل  **چیست؟**

یک مقاومت نیم اهمی!

به نظرم، دوستم اشتباه می‌کند. اگر به جهت جریان و پلاریته ولتاژ دقت کنیم (که البته این دقت ضروری است!)، این منبع معادل با یک مقاومت $-\frac{1}{2}$ اهمی است.

باز تکرار می‌کنم: توجه به پلاریته ولتاژ و جهت جریان در درس مدار ضروری است. گاهی با یک بی‌دقتی در جهت‌ها، تستی را حل می‌کنید، در ضمن پاسخ به‌دست آمدهٔ خود را در گزینه‌ها ملاحظه می‌کنید. بنابراین مشعوف می‌شوید از اینکه $+1$ نمره گرفته‌اید، غافل از آن‌که $-\frac{1}{3}$ نمره نصیبتان شده است!

۱ـ۳ توان الکتریکی

برابر است با ولتاژ ضربدر جریان و واحد آن «وات» است؛

$$P = V \times I \qquad (۱ـ۱۴)$$

که در مقاومت به صورت‌های دیگری هم قابل بیان است:

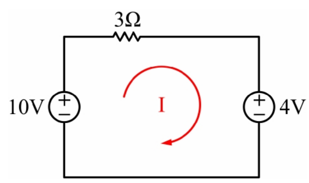
$$P = \frac{V^2}{R} = R I^2 \qquad (۱ـ۱۵)$$

تنها نکتهٔ مهم، در تولیدی یا مصرفی بودن آن است؛ اگر جریان از سر مثبت ولتاژ وارد شود، توان مصرفی و اگر جریان از سر منفی ولتاژ وارد شود (و یا از سر مثبت خارج شود)، توان تولیدی است.

بنابراین همهٔ مقاومت‌ها مصرف‌کننده هستند و

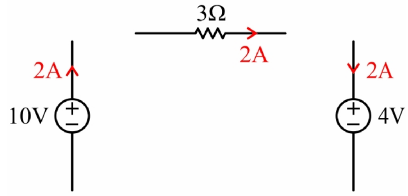
تمامی منابع مستقل (همچون باتری‌ها) مولد هستند.

باز به نظرم، دوستم مرتکب اشتباهی شده است؛ به مدار مقابل نگاه کنید:



شکل (۱ـ۳۹) مثال دانشجوی باهوش!

در اینجا واضح است که جریان I با جهت نشان داده شده برابر 2 آمپر است.



شکل (۱ـ۴۰) مدار قبلی با اجزای تفکیک‌شده

در اینجا دیده می‌شود که مقاومت ۱۲ وات مصرف کرده و منبع ۱۰ ولتی به میزان ۲۰ وات تولید می‌کند. همان‌طور که شکل نیز تأیید می‌کند، ۸ وات دیگر را منبع ولتاژ ۴ ولتی مصرف کرده است.

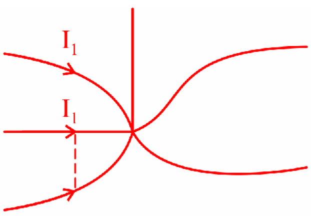
دقیقاً همین‌طور است، پس همهٔ مقاومت‌ها مصرف‌کننده‌اند و

منابع مستقل (اعم از ولتاژ یا جریان) بسته به شرایط می‌توانند مصرف‌کننده باشند یا مولد!

۱ـ٤

مبنای درس مدارهای الکتریکی، این دو قانون ارزشمند هستند.

۱) قانون جریان یا KCL : جمع جبری جریان‌های خروجی از هر گره برابر صفر است.

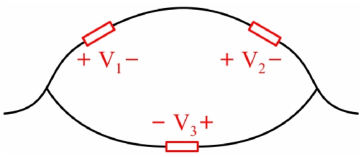


شکل (۱ـ۴۱) قانون جریان KCL

در هر گره یا سوپر گره یا کات ست داریم:

$$\sum I_{out} = 0 \qquad (۱ـ۱۶)$$

۲) قانون ولتاژ یا KVL: جمع جبری ولتاژهای عناصر در هر مسیر بسته صفر است.



شکل (۱ـ۴۲) قانون ولتاژ KVL

و در هر مش یا سوپر مش یا حلقه داریم:

$$\sum_i V_i = 0 \quad (۱۷ـ۱)$$

مدارهای مقاومتی و روش‌های تحلیل:

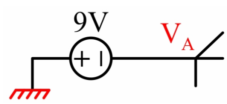
در کتاب‌های مدار، ۲ روش استاندارد برای تحلیل مدار معرفی می‌شود، روش گره و روش مش. ما ابتدا به دقت این دو روش را مورد بررسی قرار می‌دهیم و سپس روش سوم را ـ که روش بهینه خصوصاً در حل مسایل تستی است ـ مورد کنکاش قرار می‌دهیم.
از هم‌اکنون توصیه می‌کنم که خصوصاً روش سوم را به خوبی فرا بگیرید. پایهٔ درس ما تا انتها بر همین مبانی تحلیل مدارهای مقاومتی استوار است.

۱ـ۴ـ۱ روش تحلیل گره

هدف: پیدا کردن ولتاژ گره‌ها (به‌جز گرهٔ مبنا یا زمین که در آن $V=0$)
روش: KCL را در همهٔ گره‌ها (به‌جز گرهٔ زمین و گره‌های با ولتاژ معلوم) می‌نویسیم.

منظور شما از گره با ولتاژ معلوم چیست؟

سؤال خوبی است. مثلاً اگر ولتاژ یک سر منبع ولتاژی معلوم باشد، ولتاژ سر دیگرش هم معلوم است دیگر!
مثلاً در شکل (۱ـ۴۳) $V_A = -9^V$ است.



شکل (۱ـ۴۳) یک منبع ولتاژ با یک سر زمین

حالا من یک سؤال می‌پرسم. آیا KCL زدن در گره‌های با ولتاژ معلوم غلط یا غیرضروری است؟

بدیهی است که KCL یک قانون است و همواره درست است. اما مگر هدف از KCL زدن در گره‌ها، یافتن ولتاژ آن گره‌ها نبود؟!
اگر چنین است، پس KCL زدن در آن گره‌ها کاری بیهوده است.

می‌خواستم چند نکتهٔ مهم به شما بگویم، به یاد آن پیر مداری افتادم که در کلامی حکیمانه می‌فرمود: «**نکات به حل مسئله سرعت می‌بخشند.**» از این به بعد هر وقت به یاد او افتادم، بدانید نکات بسیار مهمی در پیش است.

KCL را حتی‌المقدور بر حسب ولتاژ گره‌ها می‌نویسیم. یادتان باشد که یک مهندس برق باید دکترای KVL و KCL داشته باشد!!

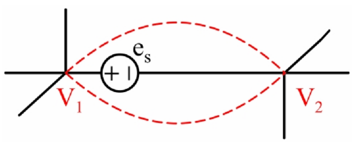
اگر گره زمین مشخص نبود، آن را یک سر منبع ولتاژ می‌گذاریم.

تا دیگر نوشتن KCL در آن سرِ دیگر غیرضروری باشد.

دقیقاً! و یک معادله از معادلات ما کاسته شود.

اگر بین دو گره با ولتاژ مجهول، منبع ولتاژ بود، برای راحتی، از نوشتن KCL در گرهٔ مرکب یا سوپرگره استفاده می‌کنیم. باز یک معادله از معادلات ما کاسته می‌شود.

بچه‌ها اجازه بدین خیالتون رو راحت کنم؛ اصلاً اگر به یک کودک ۵ ساله یک خودکار بدهید و بگویید که یک شکل بسته روی مدار بکش؛ آن شکل بسته یک گره است. مستقل از اینکه داخلش چیه! و گاهی ممکنه این کودک ۵ ساله حل مسئله رو خیلی ساده‌تر کنه!



شکل (۱ـ۴۴) **یک منبع ولتاژ با دو گره مجهول**

در شکل (۱ـ۴۴) ملاحظه می‌شود که:

$$\boxed{V_1 - V_2 = e_s} \qquad (۱۸\text{ـ}۱)$$

رابطهٔ بالا را که در یک مستطیل قرار دارد، با عنوان **رابطهٔ مستطیلیه** می‌شناسیم!

پس خلاصهٔ KCL در گرهٔ مرکب چه شد؟

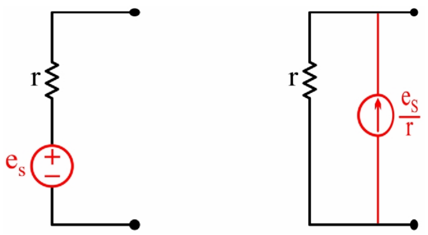
ابتدا به کمک رابطهٔ مستطیلیه ولتاژ یکی از گره‌ها را برحسب دیگری می‌نویسیم؛ سپس کل نقطه‌چین نشان داده شده در شکل (۱ـ۴۴) را در حکم یک گره (گرهٔ ورم کرده!) در نظر می‌گیریم، و برایش KCL می‌زنیم.

خُب اگر منبع جریان بود، چه می‌کنیم؟

سؤال خوبی است؛ البته اگر سؤال خیلی خوبی هم نباشد، پاسخ خیلی خوبی خواهد داشت! در روش گره که مبنای آن

KCL

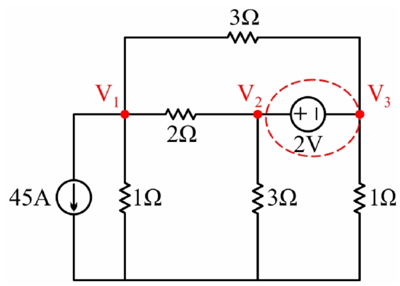
است، به منبع جریان علاقه‌مندیم. چراکه کار کردن با منبع جریان در KCL راحت است، برای همین، ترکیب‌های به صورت شکل (۱ـ۴۵ـ الف) را به صورت (۱ـ۴۵ـ ب) تبدیل می‌کنیم.



شکل (۱ـ۴۵) **مدارهای معادل الف: تونن و ب: نورتن**

عجله نکنید، به زودی در مورد مدارهای معادل تونن و نورتن به تفصیل صحبت می‌کنیم.

۶ـ در مدار زیر پس از تحلیل مقادیر V_1 و V_2 و V_3 را پیدا کنید.



شکل (۱ـ۴۶) **مدار تمرین ۶**

برای حل، در نگاه اول سه معادله سه مجهول داریم ولی بین گره‌های V_2 و V_3، منبع ولتاژ ملاحظه می‌شود. پس:

گرهٔ مرکب و رابطهٔ مستطیلیه و...

پس دست به کار می‌شویم!

رابطهٔ مستطیلیه $\boxed{V_2 - V_3 = 2^{\,V}}$

$$\begin{cases} \text{KCL در گرهٔ ۱} : & V_1 + \dfrac{V_1 - V_3 - 2}{2} + \dfrac{V_1 - V_3}{3} + 45 = 0 \\ \text{KCL در گرهٔ مرکب} : & \dfrac{V_3 + 2 - V_1}{2} + \dfrac{V_3 + 2}{3} + V_3 + \dfrac{V_3 - V_1}{3} = 0 \end{cases}$$

و از حل این، دو معادله دو مجهول، مقادیر حاصل می‌شوند!

جالب بود! شما هنگام نوشتن معادلات به زبان می‌گفتید: V_2 ولی با دست می‌نوشتید: $V_3 + 2$ (به کمک رابطهٔ مستطیلیه!) و این کار، سرعت را زیاد می‌کرد!

قبل از آن‌که سراغ مسئلهٔ بعدی برویم، یک حرف بسیار واضح ولی در عین حال پر اهمیت باید بگویم. ببینید فرق یک مسئلهٔ تستی با تشریحی در آن است که در یک تست پاسخ جلوی چشم شماست، فقط باید چشمتان را خوب باز کنید.

شکل (۱ـ۴۷) یک چشم خوب‌بازشده !!!

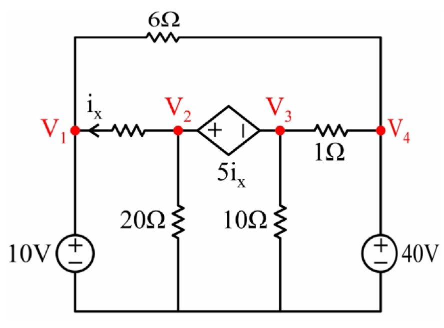
مثلاً در همین مسئله، اگر دقت کنید، گزینه‌ای درست است که در آن رابطهٔ زیر برقرار باشد:

$$V_2 - V_3 = 2$$

مستقل از آن که این V_2 و V_3 چه مقادیری هستند.

البته کاربرد چشمِ خوب‌بازشده در اینجا بسیار ساده و پیش پا افتاده بود. به زودی در مسایل تستی دشوار از آن بهره‌های اساسی خواهیم برد! به عبارت دیگر چشم را باید شست؛ جور دیگر باید دید!

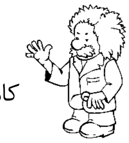
۷ـ ولتاژهای V_1 و V_2 و V_3 و V_4 را پیدا کنید.



شکل (۱ـ۴۸) مدار تمرین ۷

به نظر شما اولین قدم در حل این مسئله، چه باید باشد؟

اینکه i_x را (که منبع وابسته به آن مربوط است) برحسب متغیرهای مطلوبمان (مثلاً در این مسئله ولتاژها) بنویسیم.



کاملاً درست است؛ تا بی‌خودی متغیر اضافی ایجاد نشود.

پس می‌نویسیم:

$$i_x = \frac{V_2 - V_1}{5}$$

آیا اشکالی دارد که از همین ابتدا بنویسیم:

$V_1 = 10^V$ و $V_4 = 40^V$

نه تنها اشکالی ندارد، بلکه کاملاً عاقلانه و لازم است.

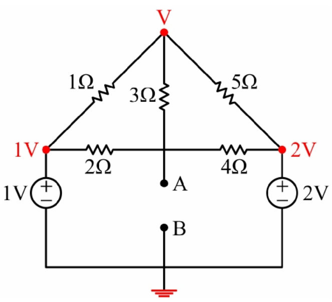
حالا در گرهٔ مرکب V_2 و V_3، یک KCL می‌زنیم. (شروع از رابطهٔ مستطیلیه !)

$$V_2 - V_3 = 5i_x = 5 \times \frac{V_2 - V_1}{5} = V_2 - V_1$$

$$V_3 = V_1 = 10^V$$

KCL در گرهٔ مرکب : $\frac{V_2 - 10}{5} + \frac{V_2}{20} + \frac{10}{10} + \frac{10-40}{1} = 0 \quad \Rightarrow \quad V_2 = 124^V$

۸ـ در صورتی که شاخهٔ AB را اتصال کوتاه کنیم، چه جریانی از آن می‌گذرد؟



شکل (۱ـ۴۹) **مدار تمرین ۸**

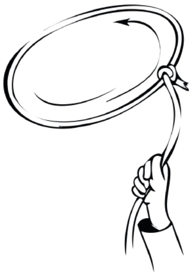
اگر شاخهٔ AB را اتصال کوتاه کنیم و نقطهٔ B را زمین در نظر بگیریم، فقط یک گره با ولتاژ مجهول باقی می‌ماند. (گرهٔ بالایی مدار) در آن گره KCL می‌زنیم:

$$\text{KCL}: V - 1 + \frac{V}{3} + \frac{V-2}{5} = 0 \quad \Rightarrow \quad V = \frac{21}{23} \text{v}$$

حال برای جریان شاخهٔ AB باید سه جریان را حساب کرده و سپس جمع کنیم:

$$i_{AB} = \frac{1-0}{2} + \frac{2-0}{4} + \frac{\frac{21}{23} - 0}{3} = \frac{30}{23} \text{A}$$

تا این‌جا فعلاً برای روش گره کافی است؛ به سراغ روش دوم می‌رویم:



۱ـ۴ـ۲ روش تحلیل مش

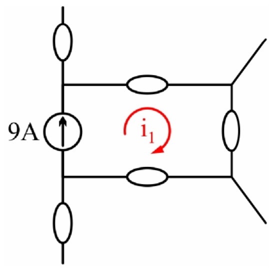
هدف: پیدا کردن جریان مش‌ها

روش: KVL را در همهٔ مش‌ها (به‌جز مش بیرونی و مش‌های با جریان معلوم) می‌نویسیم.

منظور از مش با جریان معلوم چیست؟

یعنی هرگاه در یک مش، منبع جریان مستقل وجود داشته باشد؛

البته به‌گونه‌ای که بتوان مقدار جریان مش را با یک نگاه به دست آورد.



شکل (۱ـ۵۰) مش با جریان معلوم

مثلاً در شکل (۱ـ۵۰) جریان مش i_1 مشخص است و دیگر نیازی به KVL زدن در آن حلقه نیست، هرچند این KVL غلط نیست ولی کاری بیهوده است.

آیا در اینجا مشابه قبل که گرهٔ مرکب داشتیم، مش مرکب نیز معنی دارد؟

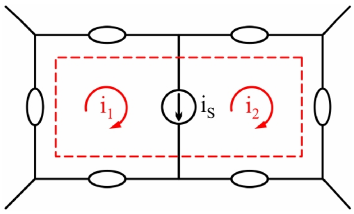
:

حتماً ! چرا که این روش دوگان روش گره است. با توجه به مفاهیم دوگانی خود شما حدس می‌زنید که در چه صورتی مش مرکب داریم؟

وقتی بین دو مش با جریان مجهول، یک منبع جریان باشد !

و آن‌گاه چه می‌کنیم؟

ابتدا به کمک رابطهٔ مستطیلیه ! جریان یکی از مش‌ها را برحسب جریان مش **همسایه** می‌نویسیم؛ سپس کل دو مش همسایه را در حکم یک مش در نظر می‌گیریم و برایش KVL می‌زنیم.



شکل (۱ـ۵۱) **مش مرکب**

و در این‌جا رابطهٔ مستطیلیه به این صورت است:

$$i_1 - i_2 = i_s \qquad (۱ـ۱۹)$$

تا دیر نشده، چند مفهوم کوچک را برای دانشجویانی که کمی دچار فراموشی شده‌اند!، یادآوری می‌کنم.

مش: ساده‌ترین حلقه‌ای که شاخه‌ای درونش نباشد.

جریان مش: یک جریان **فرضی** با جهت دلخواه ـ مثلاً در جهت عقربه‌های ساعت ـ است که از همه شاخه‌های درون مش می‌گذرد.

آیا منظور از جریان فرضی را می‌فهمید؟

یعنی مثلاً در شاخه‌ای که بین دو مش مشترک باشد، جریان **واقعی** برابر تفاضل جریان مش‌هاست.

حالا کمی در مورد KVL حرف بزنیم، چرا که مبنا در این روش:

KVL

است.

ببینید، در این روش دو جهت داریم؛ یکی جهت جریان و یکی جهت حرکت در حلقه‌ها. اگر هنگام حرکت در مش از سر منفی منبع ولتاژ وارد شویم، مقدار $-E_s$ منظور می‌کنیم و اگر از سر مثبت منبع ولتاژ وارد شویم، $+E_s$ قرار می‌دهیم.

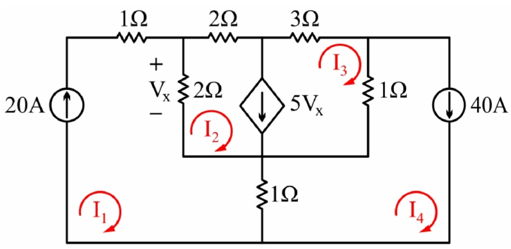
و اما در مورد مقاومت‌ها (و به عبارتی امپدانس‌ها):

اگر هنگام حرکت، هم‌جهت جریان بودیم، مقدار $+RI$ را در نظر می‌گیریم و اگر در خلاف جهت جریان در حال حرکت بودیم، $-RI$ قرار می‌دهیم.

و اگر به منبع جریان برخوردیم چطور؟

واضح است، چراکه در این روش به منبع ولتاژ علاقه‌مند هستیم! پس مدارهای به شکل (۱ـ۴۵ـ ب) را به صورت ترکیب (۱ـ۴۵ـ الف) تبدیل می‌کنیم.

۹ـ جریان‌های I_1 تا I_4 را محاسبه کنید.



شکل (۱ـ۵۲) **مدار تمرین ۹**

ظاهراً این مدار چهار مش دارد؛ یعنی چهار معادله، چهار مجهول، اما با نگاهی ساده داریم:

$$I_1 = 20\,A \quad , \quad I_4 = 40\,A$$

$$V_x = 2\left(20 - I_2\right)$$

و برای رابطهٔ مستطیلیه ! :

$$I_2 - I_3 = 5V_x \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_3 = 11I_2 - 200}$$

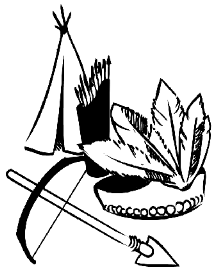
حالا در مش مرکب (۲ و ۳) KVL می‌زنیم:

$$KVL : 2I_2 + 3\left(11I_2 - 200\right) + 1\left(11I_2 - 200 - 40\right) + 2\left(I_2 - 20\right) = 0$$

یعنی یک معادله یک مجهول ☺ پس I_2 و در نتیجه I_3 معلوم شد ...

حالا می‌خواهم راجع به یک روش جدید و به عبارتی من درآوردی! با هم حرف بزنیم.

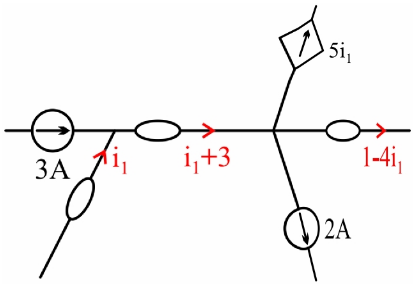
ببینید، روش‌های گره و مش روش‌های استاندارد هستند که ممکن است بهترین روش برای حل یک مسئله نباشند؛ اما به هر حال مِتدهای سنتی تحلیل مدار هستند. روش بهینهٔ ما یک اسمِ سرخ‌پوستی[1] دارد:



۱ـ۴ـ۳ روش KCL بازی؛ و سپس KVL در حلقهٔ خوب!

عملکرد ما در این روش از نامش پیداست. ابتدا KCL بازی می‌کنیم و سپس در حلقه یا حلقه‌های خوب KVL می‌زنیم. می‌دانید یعنی چه؟

KCL بازی یعنی با جریان‌های واقعی روی شکل خود مدار بازی می‌کنیم؛ یعنی جریان شاخه‌ها را روی شکل مدار مشخص می‌کنیم. مثلاً این‌جوری:



شکل (۱ـ۵۳) نمونه‌ای برای KCL بازی

و حال واضح است که حلقهٔ خوب به حلقه‌ای گفته می‌شود که با KVL زدن در آن، جریان مجهول معلوم شود؛ یعنی دارای کمترین جریان‌های مجهول باشد.

ضمناً حلقهٔ خوب، حلقه‌ای است که حتی‌المقدور شامل یک عنصر نباشد. خودتان حدس بزنید!

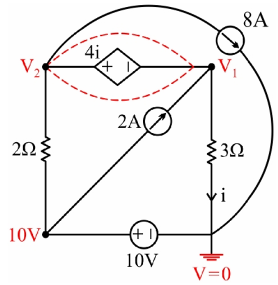
قطعاً منبع جریان، چراکه ولتاژ منبع جریان مجهول است و این از خوبی حلقهٔ خوب می‌کاهد.

عالی است!

حال بهترین راه برای فهم این روش، حل تعدادی مسئله نمونه است.

۱ـ در فرهنگ ما ممکن است نام کسی «شجاع» باشد، اما با دیدن یک سوسک جان به جان آفرین تسلیم می‌کند؛ ولی در فرهنگ سرخ‌پوستی وقتی اسم کسی را «درازقد فریادکش» می‌گذارند، یعنی قطعاً قدِ بلندی دارد و دائماً فریاد سر می‌دهد. به نظر من اسم‌های بامسمّا بهترند!

۱۰ــ جریان i چند آمپر است؟



شکل (۱ـ۵۴) مدار تمرین ۱۰ـ روش گره

ابتدا به روش گره:

گرهٔ زمین را سمت راست منبع ولتاژ می‌گیریم، ولتاژ سمت چپ برابر 10 ولت شده، حالا ۲ گره با ولتاژ مجهول داریم (V_1 و V_2) که بین آن‌ها منبع ولتاژ است. ابتدا داریم:

$$i=\frac{V_1}{3}$$

و رابطهٔ مستطیلیه!:

$$V_2-V_1=4i=4\frac{V_1}{3}\quad\Rightarrow\quad\boxed{V_2=\frac{7}{3}V_1}$$

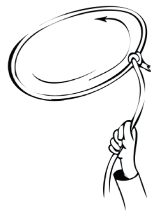
و در نهایت KCL در گرهٔ مرکب:

$$KCL:\frac{\frac{7}{3}V_1-10}{2}+8-2+\frac{V_1}{3}=0$$

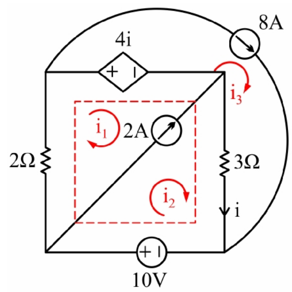
$$7V_1-30+36+2V_1=0\quad\Rightarrow\quad 9V_1=-6\quad\Rightarrow\quad V_1=-\frac{2}{3}\ V$$

و بالاخره برای i داریم:

$$i=\frac{V_1}{3}=-\frac{2}{9}\ A$$



حالا به روش مش:



شکل (۱ـ۵۵) مدار تمرین ۱۰ـ روش مش

جریان i_3 که معلوم است و برای مش‌های ۱ و ۲ از KVL در مش مرکب بهره می‌گیریم:

ابتدا:

$$i_3 = 8\,A$$
$$i = i_2 - 8$$

و رابطهٔ مستطیلیه!:

$$i_2 - i_1 = 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{i_1 = i_2 - 2}$$

و حالا KVL در مش مرکب:

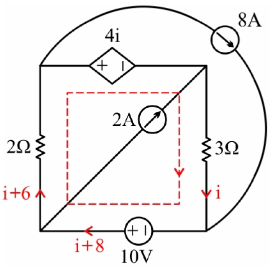
$$KVL: 4(i_2 - 8) + 3(i_2 - 8) - 10 + 2(i_2 - 2) = 0$$

$$4i_2 - 32 + 3i_2 - 24 - 10 + 2i_2 - 4 = 0 \Rightarrow 9i_2 = 70 \quad \Rightarrow \quad i_2 = \frac{70}{9}$$

و سرانجام برای i داریم:

$$i = i_2 - 8 = -\frac{2}{9}\,A$$

ببینید این مسئله به دو روش گره و مش حل شد؛ هر دو روش هم برای این مثال روش‌های خیلی خوبی بودند، چراکه به یک معادلهٔ یک مجهولی تبدیل شدند، با این حال، حتّی همین مثال هم یک تبلیغ! خوبی برای روش «KCL بازی و KVL در حلقهٔ خوب» است. این مدار را به روش ابتکاری حل می‌کنیم:



شکل (۱ـ۵۶) مدار تمرین ۱۰ روش KCL بازی، KVL در حلقهٔ خوب!

اول روی شکل مدار، با جریان‌های واقعی KCL بازی می‌کنیم؛ سپس در حلقهٔ مشخص‌شده KVL می‌زنیم:

$$KVL: 4i + 3i - 10 + 2(i + 6) = 0 \rightarrow 9i + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad i = -\frac{2}{9}\,A$$

ملاحظه می‌کنید که این روش چقدر کار را ساده می‌کند! بعداً چندین مثال دیگر با این روش حل خواهیم کرد.

روش بهینه:

واضح است که در مدارهای با گرهٔ کمتر، روش گره و در مدارهای با مش کمتر، روش مش، روش بهینه است.

و برای آدم‌های باهوش!، روش ابتکاری KCL بازی و سپس KVL در حلقهٔ خوب توصیه می‌شود.

دقیقاً! و گاهی هم روش ابتکاری KVL بازی و سپس KCL در گرهٔ خوب.

خوب دقت کنید، یک‌بار دیگر تکرار می‌کنم:

۱ـ۴ـ۴ روش KVL بازی و سپس KCL در گرهٔ خوب!

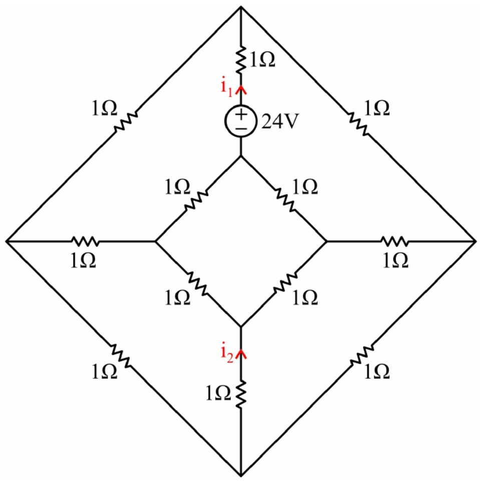
و حتماً KVL بازی یعنی مشخص کردن ولتاژ گره‌ها روی خود شکل مدار؛ یعنی همین‌جور روی گره‌ها قدم می‌زنیم و ولتاژ آن‌ها را با اعداد معلوم یا مقادیر پارامتری مجهول مشخص می‌کنیم و چشمانمان را باز کرده و در یک گره خوب که البته گاهی گره مرکب هست، KCL می‌زنیم تا مجهول مثل آب خوردن به دست بیاید.

۱ـ۵ مدارهای متقارن

گاهی توجه به تقارن در تحلیل مدار، کار را بسیار ساده‌تر می‌کند. (یعنی از تعداد مجهولات می‌کاهد.)

روش تشخیص: واضح است دیگر، فقط باید چشممان را خوب باز کنیم. نباید تخفیف دهیم، متقارن یعنی در مدار یک آینه باشد، حتّی اگر پلاریتهٔ یک منبع، تقارن را به هم بزند، دیگر متقارن نیست.

۱۱ــ در مدار زیر جریان‌های i_1 و i_2 را پیدا کنید.

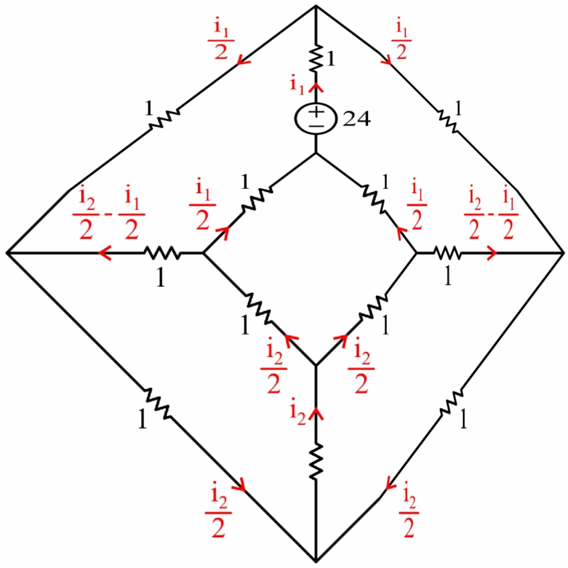


شکل (۱ـ۵۷) مدار تمرین ۱۱

حالا پیشنهاد بدهید.

اولاً مدار نسبت به محور قائم وسطی متقارن است؛ پس جریان i_1 به دو جریان مساوی $\frac{i_1}{2}$ تقسیم می‌شود.

همچنین در پایین مدار، دو جریان $\frac{i_2}{2}$ خواهیم داشت، با این کار در دو مش سمت راستی یا سمت چپی، دو جریان i_1 و i_2 مجهول بوده و با KVL مقادیرشان مشخص می‌شود.



شکل (۱ـ۵۸) استفاده از تقارن در تقسیم جریان‌ها

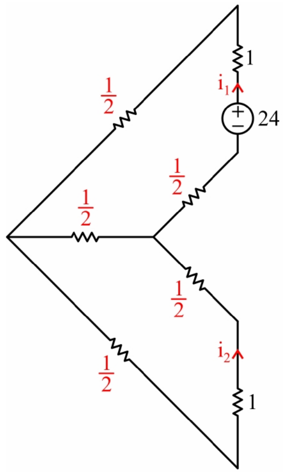
و داریم:

$$\text{KVL}:\begin{cases} i_1+\frac{i_1}{2}-\frac{i_2}{2}+\frac{i_1}{2}+\frac{i_1}{2}=24 \\ i_2+\frac{i_2}{2}+\frac{i_2}{2}-\frac{i_1}{2}+\frac{i_2}{2}=0 \end{cases} \Rightarrow \quad i_1=10\,\text{A} \quad , \quad i_2=2\,\text{A}$$

احسنت! من خلاصه می‌کنم:

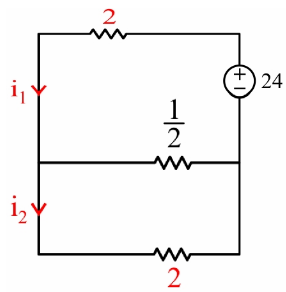
در یک مدار متقارن، وقتی جریان i در محور تقارن مدار به n شاخه یکسان می‌رسد، سهم هر شاخه برابر $\frac{i}{n}$ می‌شود. و این یک سبک حل مسایل شامل مدارهای متقارن است.

اما من پیشنهاد بهتری دارم؛ می‌گویم چون مدار متقارن است، آن را از وسط (یعنی محور تقارنش) **تا** کنیم و روی نیمهٔ دیگر قرار دهیم. در این آینه هر گره‌ای روی تصویر خود قرار می‌گیرد، چون آن گره‌ها، هم‌پتانسیل هستند. این کار مجاز است. واضح است که مقاومت‌های R متناظر که روی هم قرار می‌گیرند، برابر $\frac{R}{2}$ می‌شوند. $(R\|R)$.



شکل (۱ـ۵۹) استفاده از تا کردن! در مدار متقارن

و باز این مدار ساده و ساده‌تر می‌شود، به طوری که:



شکل (۱ـ۶۰) مدار ساده‌شده

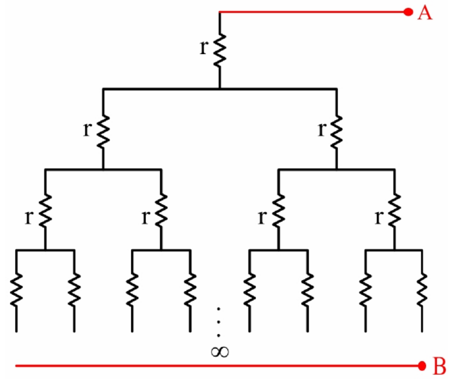
و داریم:

$$i_1 = \frac{24}{2+\frac{1}{2.5}} = 10\,A$$

$$i_2 = \frac{0.5}{2.5} \times i_1 = 2A$$

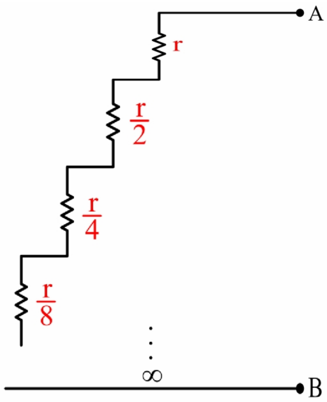
به عبارت دیگر، در هر مدار متقارن، می‌توان گره‌های هم‌پتانسیل را روی هم قرار داد؛ یعنی می‌توان مدار را روی محور تقارنش تا کرد و معمولاً این روش سریع‌تر ما را به پاسخ می‌رساند. در مجموع دیدید که توجه به تقارن، یک مدار شامل تعداد گره‌ها و مش‌های زیاد را با حداقل معادلات ممکن تحلیل می‌کند. فقط یادمان باشد که هنگام تا کردن مدار، کاری به عناصر روی محور تقارن نداریم؛ ولی سایر عناصر با جفت یکسان خود موازی می‌شوند؛ یعنی مقاومت‌ها و سلف‌ها نصف و خازن‌ها دو برابر شده و همین‌طور منابع جریان هم دو برابر می‌شوند اما منابع ولتاژ هیچ تغییری نمی‌کنند. این **تا** کردن کار خیلی خوبی است، دست‌کم کار ما را نصف می‌کند.

۱۲ـ مقاومت معادل در مدار زیر چقدر است؟



شکل (۱ـ۶۱) مدار تمرین ۱۲

باز مدار را روی محور وسطی (محور تقارنش) تا می‌کنیم. جالب اینکه باز یک مدار متقارن دیگر به وجود می‌آید و همین‌طور تا بی‌نهایت، این عمل را تکرار می‌کنیم تا در نهایت به مدار زیر برسیم:



شکل (۱ـ۶۲) بی‌نهایت بار تا شدهٔ مدار تمرین ۱۲

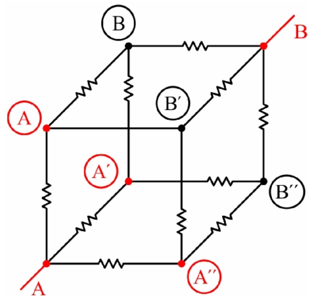
و حالا به راحتی می‌گوییم:

$$R_{AB}=r+\frac{r}{2}+\frac{r}{4}+\frac{r}{8}+\cdots=r\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right)=2r$$

البته این مسئله را هم می‌توانستیم از تقسیم جریان در شاخه‌های محور تقارن حل کنیم.

همین‌طور است، ولی معمولاً قرار دادن گره‌های هم‌پتانسیل روی هم بهتر است. باز یک مثال دیگر:

۱۳ـ مقاومت معادل پیدا کنید. (همه مقاومت‌ها برابر r است.)

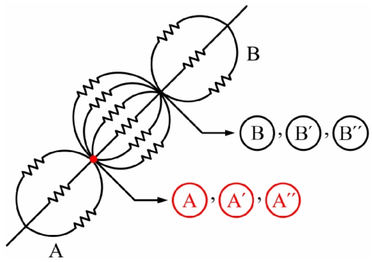


شکل (۱ـ۶۳) مدار تمرین ۱۳

در ابتدا برای حل این مسئله هیچ‌گونه مقاومت سری یا موازی، در هیچ شرایطی دیده نمی‌شود، اما اگر دقت کنیم، گره‌های A، A' و A'' با یکدیگر هم‌پتانسیل هستند؛ همچنین گره‌های B، B' و B''.

پس آن‌ها را روی هم قرار می‌دهیم. مدار به شکل زیر می‌شود:

(تجسم فضایی کنید!)



شکل (۱ـ۶۴) ساده شده مدار تمرین ۱۳

حال همچون نوشیدن آب گوارا می‌گوییم:

$$R_{AB} = \frac{r}{3} + \frac{r}{6} + \frac{r}{3} = \frac{5r}{6}$$