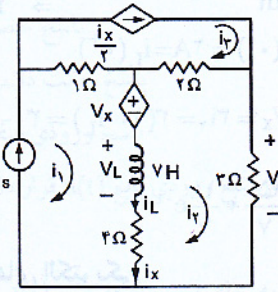
مثال ۴-۱۰) در مدار شکل (۴-۱۰) مقدار V_X را بیابید. فرض کنید: $i_L(0^-) = 2A, i_s = 10u(t)$

تذکر: با توجه به صورت سؤال، مجهول خواسته شده، i_L نمی‌باشد. اما برای استفاده از شرایط اولیه، ابتدا i_L را بدست آورده و سپس مقدار V_X را محاسبه می‌کنیم.



شکل (۴-۱۰) مدار مثال ۴-۱۰

حل:

مطابق الگوریتم ارائه شده، ابتدا جهت جریان سلف را در جهت ساعتگرد مشخص نموده و ولتاژ دو سر آن را V_L می‌نامیم. طبق آنالیز مش، مسئله را حل کنیم.

بیان روابط حاکم بر مدار:

روابط اصلی: $KVL(1): 4(i_2-i_1)-V_L-V_X+2(i_2-i_3)+3i_2=0$

روابط کمکی: $(2): i_1=10^A$

$(3): i_x=2i_3$

$(4): i_x=i_1-i_2$

$(5): V_X=3i_2$

بیان جریان سلف برحسب i_2, i_1: $(6): i_L=i_1-i_2$

بیان جریان i_3, i_2, i_1 برحسب i_S, V_L, i_L:

$(2)\ i_1=i_s=10^A$

$(3),(4): 2i_3=i_1-i_2=10-i_2 \Rightarrow 2i_3+i_2=10A \quad (7)$

$(6)\ i_L=10-i_2 \Rightarrow i_2=10-i_L \quad (8)$

$(7),(8): 2i_3=10-i_2=10-(10-i_L)=+i_L \Rightarrow i_3=\frac{1}{2}i_L \quad (9)$

با توجه به معادلات، از رابطه (۱) KVL و (۵) استفاده نشده است که با جایگذاری (۲)، (۸) و (۹) در این روابط داریم:

$$4i_2-4i_1-V_L-3i_2+2i_2-2i_3+3i_2=0 \Rightarrow 6i_2-4i_1-V_L-2i_3=0$$

$$۶(۱۰-i_L)-۴(۱۰)-V_L-۲(\frac{۱}{۲}i_L)=۰$$

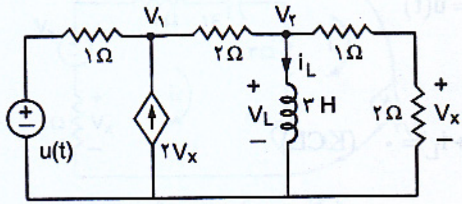
با توجه به $V_L=L\frac{di_L}{dt}$ داریم:

$$V_L+۷i_L=۲۰ \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} ۷\frac{di_L}{dt}+۷i_L=۲۰ \\ i_L(۰^-)=۲A=i_L(۰^+) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad i_L(t)=\frac{۲۰}{۷}+(۲-\frac{۲۰}{۷})e^{-t}$$

$$i_L(t)=\frac{۲۰}{۷}-\frac{۶}{۷}e^{-t} \quad , \quad V_x=۳i_۲=۳(۱۰-i_L)=۳۰-۳i_L$$

$$V_x=۳۰-\frac{۶۰}{۷}+\frac{۱۸}{۷}e^{-t}=\frac{۱۵۰}{۷}+\frac{۱۸}{۷}e^{-t}$$

مثال ۴-۱۳) مطلوبست محاسبه $i_L(t)$ برای تمامی زمانها.



شکل (۴-۱۳) مدار مثال ۴-۱۳

حل:

چون تنها ورودی مدار $u(t)$ می‌باشد بنابراین $i_L(0^-) = 0$.

برای $t>0$، از روش معادله دیفرانسیل (طبق الگوریتم بیان شده) مسئله را حل خواهیم نمود:

با استفاده از آنالیز گره داریم:

$$\begin{cases} \dfrac{V_۱-۱}{۱}+\dfrac{V_۱-V_۲}{۲}-۲V_x=۰ \\[2ex] \dfrac{V_۲-V_۱}{۲}+\dfrac{V_۲-۰}{۳}+i_L=۰ \\[2ex] V_x=\dfrac{۲}{۳}V_x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲V_۱-۲+V_۱-V_۲-۴(\dfrac{۲}{۳}v_۲)=۰ \\[2ex] ۳V_۲-۳V_۱+۲V_۲+۶i_L=۰ \end{cases} \quad V_۲=V_L$$

$$\begin{cases} ۳V_۱=۵V_۲+۶i_L \\[1ex] ۳V_۱-V_۲-\dfrac{۸}{۳}V_۲=۲ \end{cases} \Rightarrow \quad ۵V_۲+۶i_L-V_۲-\dfrac{۸}{۳}V_۲=۲ \quad \Rightarrow \quad \dfrac{۴}{۳}V_۲+۶i_L=۲$$

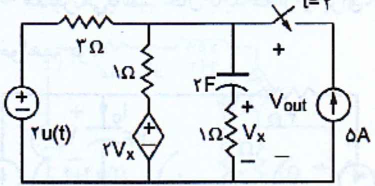
جایگذاری: $V_۲=V_L=\dfrac{۳di_L}{dt}$

$$\dfrac{۴}{۳}(۳\dfrac{di_L}{dt})+۶i_L=۲ \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} ۴\dfrac{di_L}{dt}+۶i_L=۲ \\[2ex] i_L(۰^-)=۰ \end{cases}$$

بعد از حل معادله دیفرانسیل:

$$i_L(t)=\dfrac{۱}{۳}+\dfrac{-۱}{۳}e^{-\frac{۳}{۲}t}=\dfrac{۱}{۳}(۱-e^{\frac{-۳}{۲}t})$$

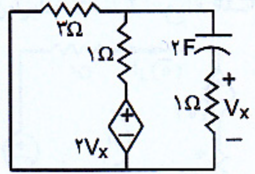
مثال ۴-۲۱) در مدار شکل زیر فرض کنید کلید به مدت زیادی باز بوده و در $t=2$ بسته می‌شود. مطلوبست محاسبه $V_C(t)$.



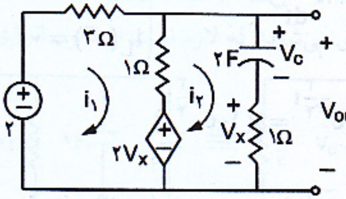
شکل (۴-۲۱) مدار مثال ۴-۲۱

حل:

در $t<0$ چون مدار شامل منبع مستقل نمی‌باشد بنابراین شرایط اولیه $V_C(0^-)=0$ است.



برای $۲ > t \geq ۰$ مدار به صورت زیر می‌باشد.



با استفاده از روش معادله دیفرانسیل مدار را حل می‌کنیم.

$$\begin{cases} (۱):\ -۲+۳i_۱+i_۱-i_۲+۲V_x=۰ \\ (۲):\ -۲V_x+i_۲-i_۱+V_C+i_۲=۰ \\ (۳):\ V_x=i_۲ \\ (۴):\ i_C=i_۲ \end{cases}$$

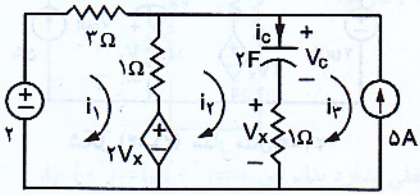
$$(۱):\ ۴i_۱=i_۲-۲V_x+۲=i_C-۲i_C+۲=۲-i_C \quad \Rightarrow \quad i_۱=\frac{۱}{۴}(۲-i_C)$$

$$(۲):\ -۲i_C+i_C-\frac{۱}{۴}(۲-i_C)+V_C+i_C=۰ \quad \Rightarrow \quad \frac{۱}{۴}i_C+V_C=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dV_C}{dt}+۲V_C=۱ \\ V_C(۰^-)=۰ \end{cases} \Rightarrow \ V_C(t)=\frac{۱}{۲}+(۰-\frac{۱}{۲})e^{-۲t}=\frac{۱}{۲}(۱-e^{-۲t})$$

پاسخ بدست آمده برای $۲ > t \geq ۰$ معتبر می‌باشد. حال باید مدار را برای $t > ۲$ تحلیل کنیم.

برای $t \geq ۲$ با مدار زیر مواجه خواهیم بود:



$$\begin{cases} (۱):\ -۲+۳i_۱+i_۱-i_۲+۲V_x=۰ \\ (۲):\ -۲V_x+i_۲-i_۱+V_C+i_۲-i_۳=۰ \\ (۳):\ V_x=i_۲-i_۳ \\ (۴):\ i_C=i_۲-i_۳ \\ (۵):\ i_۳=-۵^A \\ (۶):\ V_x=i_C \end{cases}$$

$$(۴),(۵) \Rightarrow \quad i_۲=(i_C-۵)$$

$$(۱): ۴i_۱=i_۲-۲V_x+۲=i_۲-۲i_۲+۲i_۳+۲ \quad \Rightarrow \quad i_۱=\frac{۱}{۴}(-i_C+۵-۱۰+۲)$$

$$\Rightarrow i_۱=\frac{-۳}{۴}-\frac{۱}{۴}i_C \quad , \quad i_۲=i_C-۵ \quad , \quad i_۳=۵$$

$$(۲),(۶): -۲i_C+۲(i_C-۵)+\frac{۳}{۴}+\frac{۱}{۴}i_C+۵+V_C=۰$$

$$\Rightarrow \quad -۴۰-۱۷+i_C-۲۰+۴V_C=۰ \quad \Rightarrow \quad ۲\frac{dV_C}{dt}+۴V_C=۱۷ \quad \Rightarrow \quad \frac{dV_C}{dt}+۲V_C=۸/۵$$

برای حل این معادله دیفرانسیل نیاز به یک شرط اولیه داریم که باید از حالت قبلی مدار یعنی (۰≤t<۲) محاسبه شود.

تذکر: همواره شرایط اولیه مدار از یک مرحله قبل‌تر محاسبه می‌شود.

$$V_C(t)=\frac{۱}{۲}(۱-e^{-۲t})\Big|_{t=۲^-} \quad \Rightarrow \quad V_C(۲^-)=\frac{۱}{۲}(۱-e^{-۴})=۰/۴۹$$

برای ۰≤t<۲

$$V_C(t)=۴/۲۵+Ke^{-۲t}$$

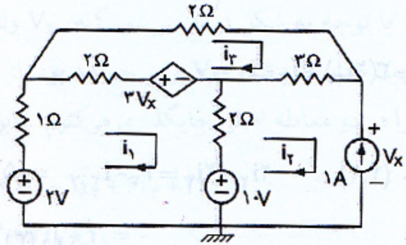
باید مقدار $V_C(۲^+)$ با $V_C(۲^-)$ برابر شود.

$$\Rightarrow \quad V_C(۲^-)=V_C(۲^+) \quad \Rightarrow \quad ۰/۴۹=۴/۲۵+ke^{-۴} \quad \Rightarrow \quad k=-۲۰۵/۳$$

برای t≥۲:

$$V_C(t)=۴/۲۵-۲۰۵/۳e^{-۲t}$$

مثال ۲-۴) با استفاده از الگوریتم آنالیز مش V_x را بیابید.



شکل (۲-۴) مدار مثال ۲-۴

حل:

در این مثال، ولتاژ دو سر منبع جریان مشخص می‌باشد، بنابراین می‌توان در دو سر آن رابطه KVL را نوشت. دقت کنید این رابطه جزء روابط کمکی به شمار می‌آید.

تعداد روابط اصلی: تعداد KVL = تعداد مش‌ها − تعداد منابع جریان (وابسته یا مستقل) = ۳ − ۱ = ۲

تعداد روابط کمکی: تعداد منابع جریان (وابسته یا مستقل) + تعداد منابع وابسته (ولتاژ یا جریان) = ۱ + ۱ = ۲

روابط اصلی:

$$KVL(1): -2 + 1i_1 + 2(i_1 - i_3) + 3V_x + 2(i_1 - i_2) + 10 = 0$$

$$KVL(2): 2i_3 + 3(i_3 - i_2) - 3V_x + 2(i_3 - i_1) = 0$$

رابطه کمکی:

$$KVL(3): -10 + 2(i_2 - i_1) + 3(i_2 - i_3) + V_x = 0$$

$$i_2 = -1A$$

مرتب سازی روابط و جایگذاری i_2:

$$KVL(1): 5i_1 - 2i_3 + 3V_x = -10$$

$$KVL(2): -2i_1 + 7i_3 - 3V_x = -3$$

$$KVL(3): -2i_1 - 3i_3 + V_x = 15 \rightarrow V_x = 15 + 2i_1 + 3i_3$$

V_x را در رابطه KVL (۲) و KVL(۳) قرار می‌دهیم:

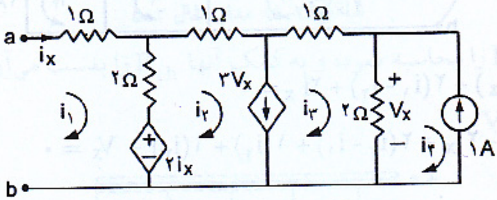
$$\begin{cases} 11i_1 + 7i_3 = -55 \\ -8i_1 - 2i_3 = 42 \end{cases} \rightarrow i_1 = \frac{-184}{34} \quad , \quad i_3 = \frac{22}{34} \quad , \quad V_x = \frac{208}{34}$$

مرحله ۳: محاسبه R_{th}

$$R_{th}=\frac{V_{th}}{I_{S.C}}=\frac{\frac{۴}{۵}}{-۲}=-\frac{۲}{۵}$$

تذکر: مقاومت منفی وجود خارجی ندارد. بلکه بعضی از المان‌های غیرخطی و الکترونیکی در ناحیه‌ای از بازه کاری خود دارای مقاومت منفی هستند. یعنی شیب تغییرات ولتاژ به تغییرات جریان منفی است.

مثال ۳-۴) از دو سر b و a مدار معادل تونن را محاسبه کنید.



شکل (۳-۴) مدار مثال ۳-۴

حل:

مرحله ۱: محاسبه V_{th} (V_{ab})

یادآوری: با توجه به شکل $i_x=۰$. از این رو می‌توان نتیجه گرفت که منبع ولتاژ وابسته به i_x نیز صفر می‌باشد و صفر شدن منبع ولتاژ یعنی اینکه می‌توان منبع ولتاژ را اتصال کوتاه کرد.

روش حل: آنالیز مش

روابط اصلی:

$$KVL(۱):\ -V_{ab}+۲(i_۱-i_۲)=۰$$

$$KVL(۲,۳):\ -۲i_x+۲(i_۲-i_۱)+۱(i_۲)+۱(i_۳)+۲(i_۳-i_۴)=۰$$

روابط کمکی:

$$(۱):i_۴=-۱$$

$$(۲):۳V_x=i_۲-i_۳$$

$$(۳):V_x=۲(i_۳-i_۴)$$

$$(۴):i_۱=i_x=۰$$

جانشینی روابط کمکی:

$$KVL(۱):\ V_{ab}=-۲i_۲$$

$$KVL(۲,۳),(۱),(۴):\ ۲(i_۲-i_۱)+i_۲+i_۳+۲(i_۳+۱)=۰$$

دو رابطه کمکی (۲) و (۳) را با هم ترکیب می‌کنیم.

$$(۲),(۳):\ ۶(i_۳-i_۴)=i_۲-i_۳\ \rightarrow\ ۶i_۳-۶i_۴=i_۲-i_۳\ \rightarrow\ ۷i_۳-i_۲=-۶$$

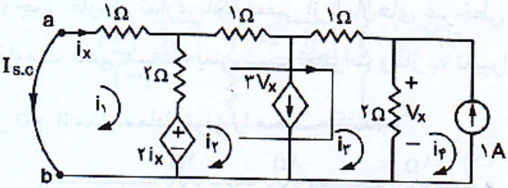
خلاصه‌نویسی روابط:

$$\begin{cases}KVL(۲,۳):\ ۳i_۲+۳i_۳=-۲\\(۲,۳):\ -i_۲+۷i_۳=-۶\end{cases}\ \Rightarrow\ i_۲=\frac{۱}{۶}\ ,\ i_۳=\frac{-۵}{۶}$$

محاسبه V_{th}: $KVL(1) = V_{ab} = -2 \times \frac{1}{6} = -\frac{1}{3} \Rightarrow V_{th} = V_{ab} = \frac{-1}{3}$

مرحله ۲: محاسبه $I_{S.C}$

ترسیم مدار تونن:



روابط اصلی:

$$KVL(1): 1(i_x) + 2(i_1 - i_2) + 2i_x = 0$$

$$KVL(2,3): -2i_x + 2(i_2 - i_1) + 1(i_2) + 1(i_3) + V_x = 0$$

روابط کمکی:

$$(1): i_x = -I_{S.C} = i_1$$

$$(2): V_x = 2(i_3 - i_4)$$

$$(3): i_4 = -1$$

$$(4): 3V_x = i_2 - i_3$$

جانشینی روابط کمکی:

$$KVL(1): i_1 + 2i_1 - 2i_2 + 2i_1 = 0 \Rightarrow i_1 = \frac{2}{5} i_2$$

$$KVL(2,3): -2i_1 + 2i_2 - 2i_1 + i_2 + i_3 + 2i_3 - 2i_4 = 0 \Rightarrow -4i_1 + 3i_2 + 3i_3 = -2$$

از ترکیب روابط (۲) و (۴) داریم:

$$(2,4): 6(i_3 - i_4) = i_2 - i_3 \Rightarrow 7i_3 - i_2 = 6i_4 = -6$$

بازنویسی روابط اصلی:

$$\begin{cases} KVL(1): i_1 = \frac{2}{5} i_2 \\ KVl(2,3): -4i_1 + 3i_2 + 3i_3 = -2 \\ (2,4): -i_2 + 7i_3 = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} i_1 &= \frac{1}{8} \\ i_2 &= \frac{5}{16} \\ i_3 &= \frac{-13}{16} \end{aligned}$$

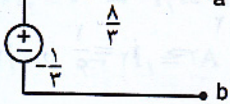
محاسبه $I_{S.C}$

$$(4): I_{S.C} = -i_1 \Rightarrow I_{S.C} = -\frac{1}{8}$$

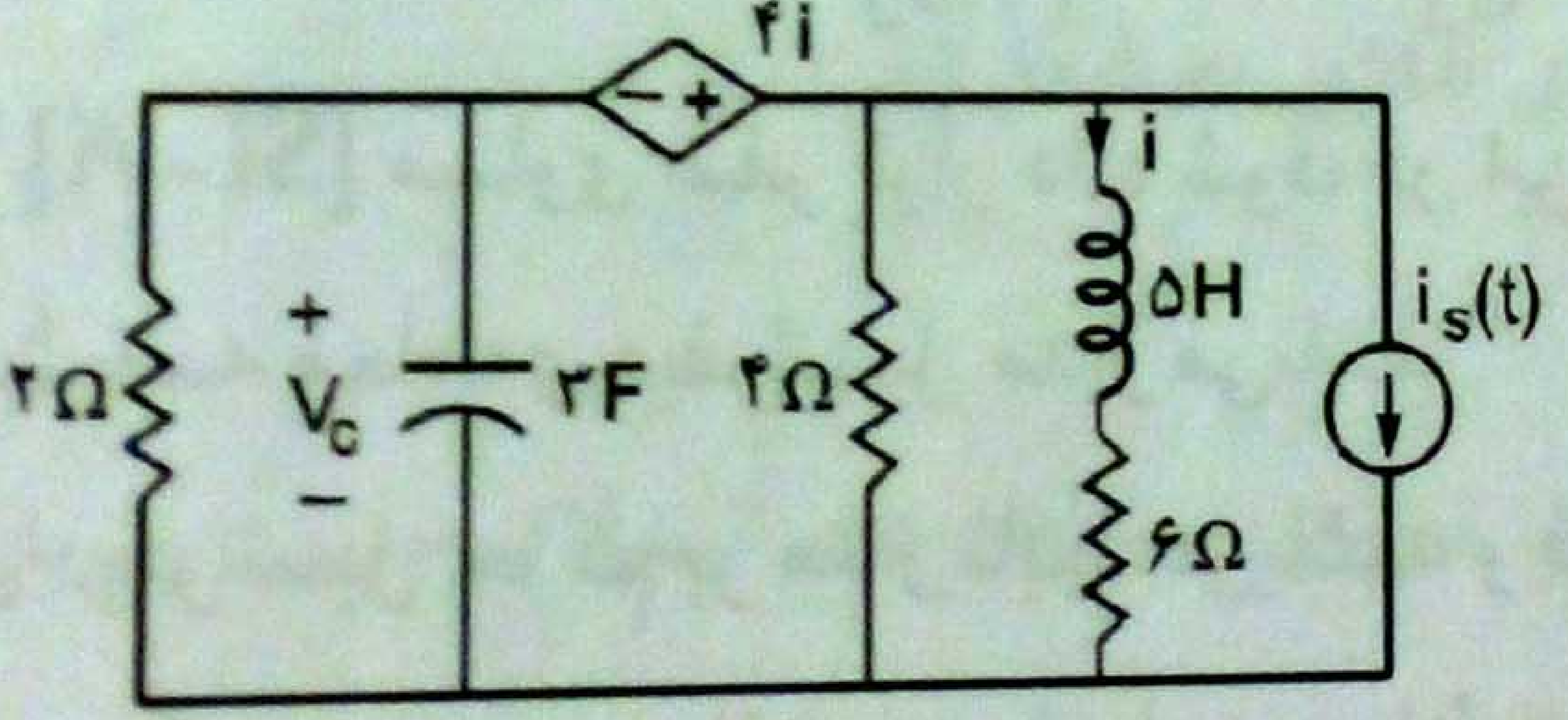
مرحله ۳: محاسبه R_{th}

$$R_{th} = \frac{V_{th}}{I_{S.C}} = \frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{1}{8}} = \frac{8}{3}$$

ترسیم مدارمعادل تونن:

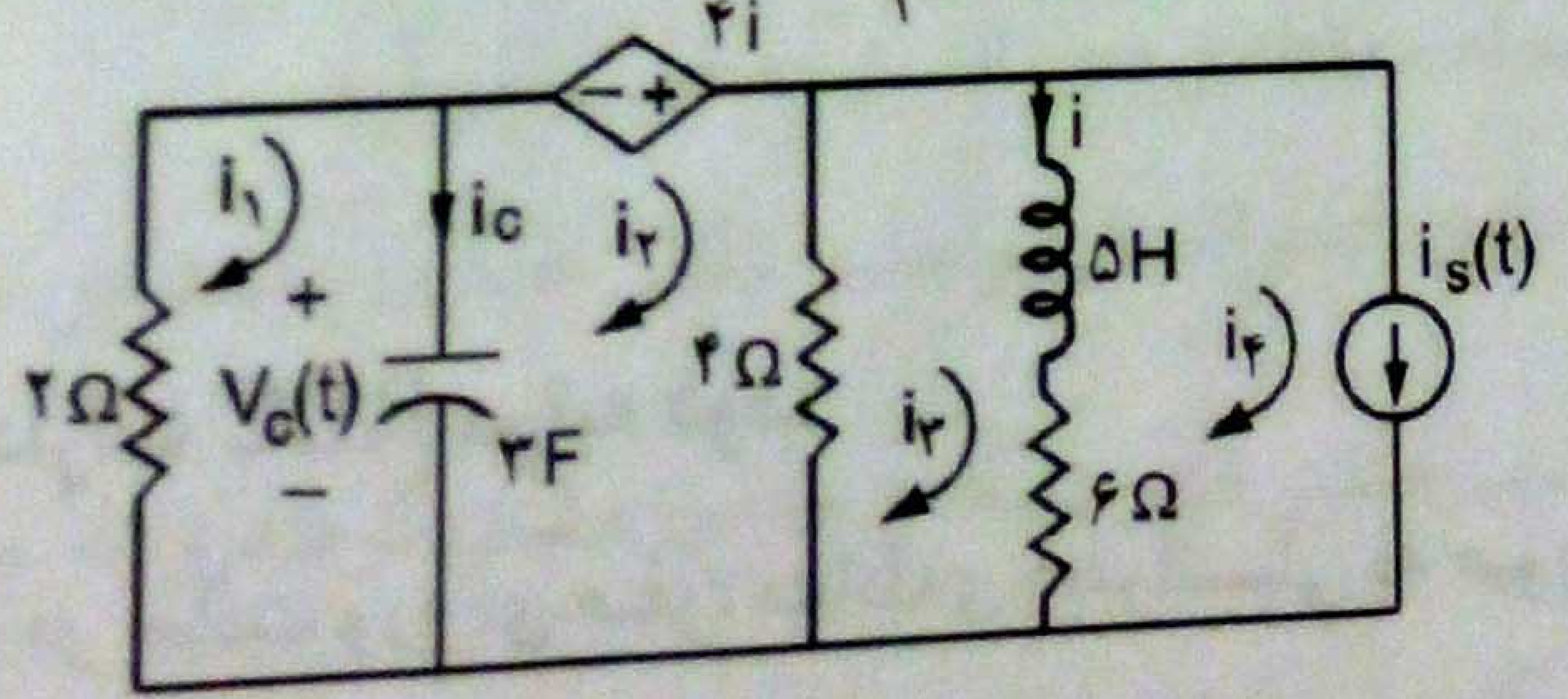


مثال ۵–۱) پاسخ پله V_C را در مدار زیر به دست آورید.



شکل (۵–۱) مدار مثال ۵–۱

در ابتدا پلاریته خازن و سلف را تعیین می‌کنیم.



روابط اصلی:

$$KVL(۱):\quad ۲i_۱+V_C=۰$$

$$KVL(۲):\quad -V_C-۴i+۴(i_۲-i_۳)=۰$$

$$KVL(۳):\quad ۴(i_۳-i_۲)+V_L+۶(i_۳-i_۴)=۰$$

روابط کمکی:

$$(۱):\quad i_C=i_۱-i_۲$$

$$(۲):\quad i=i_۳-i_۴$$

$(۳): \ i_۴=i_S$

$(۴): \ i=i_L$

از رابطه (۱) و (۴) نتیجه می‌شود:

$$i_L=i_۳-i_۴ \overset{(۳)}{\Rightarrow} i_L=i_۳-i_S \Rightarrow (۵): \ i_L+i_S=i_۳$$

$$KVL(۱): \ ۲i_۱+V_C=۰ \Rightarrow ۲i_۱=-V_C \Rightarrow (۶): \ i_۱=-\frac{V_C}{۲}$$

رابطه (۶) در رابطه (۱) قرار می‌دهیم:

$$i_C=-\frac{V_C}{۲}-i_۲ \Rightarrow -i_۲=i_C+\frac{V_C}{۲} \Rightarrow (۷): \ i_۲=-i_C-\frac{V_C}{۲}$$

روابط (۲) تا (۷) را در KVL(۲) و KVL (۳) می‌گذاریم:

$$KVL(۲): \ -V_C-۴i_L+۴(-i_C-\frac{V_C}{۲})-۴(i_L+i_S)=۰$$

$$KVL(۲): \ -V_C-۴i_L-۴i_C-۲V_C-۴i_L-۴i_S=۰$$

$$KVL(۲): \ -۳V_C-۸i_C-۴i_S-۴i_C=۰$$

$$KVL(۳): \ ۴(i_L+i_S)-۴(-i_C-\frac{V_C}{۲})+V_L+۶(i_L+i_S-i_S)=۰$$

$$KVL(۳): \ ۴i_L+۴i_S+۴i_C+۲V_C+V_L+۶i_L=۰$$

$$KVL(۳): \ ۱۰i_L+۴i_S(t)+۴i_C+۲V_C+V_L=۰$$

KVL(۲) و KVL(۳) به صورت معادلات طلایی می‌نویسیم:

$$(۷): -۴i_C=۸i_L+۴i_S+۳V_C \Rightarrow i_C=-۲i_L-i_S-\frac{۳}{۴}V_C$$

$$(۸): V_L=-۲V_C-۴i_C-۴i_S-۱۰i_L$$

معادلات طلایی به فرم زیر است:

$$\begin{cases} V_L=f_۱(V_S,i_S,i_L,V_C) \\ i_C=f_۲(V_S,i_S,i_L,V_C) \end{cases}$$

پس باید معادل i_C را در V_L جایگذاری نماییم.

$$V_L=-۲V_C-۴(-۲i_L-i_S-\frac{۳}{۴}V_C)-۴i_S-۱۰i_L$$

$$=-۲V_C+۸i_L+۴i_S+۳V_C-۴i_S-۱۰i_L=V_C-۲i_L$$

معادلات طلایی:

$$(۹): i_C=-۲i_L-i_S-\frac{۳}{۴}V_C$$

$$(۱۰): V_L=V_C-۲i_L$$

بنابراین معادلات حالت به صورت زیر است:

$$۳\frac{dV_C}{dt}=-۲i_L-i_S-\frac{۳}{۴}V_C \Rightarrow \frac{dV_C}{dt}=-\frac{۲}{۳}i_L-\frac{۱}{۳}i_S-\frac{۱}{۴}V_C$$

$$(۱۱): V_L=۵\frac{di_L}{dt}=V_C-۲i_L \Rightarrow \frac{di_L}{dt}=+\frac{۱}{۵}V_C-\frac{۲}{۵}i_L$$

$$(۱۲): \frac{d^۲V_C}{dt^۲}=-\frac{۲}{۳}\frac{di_L}{dt}-\frac{۱}{۳}\frac{di_S}{dt}-\frac{۱}{۴}\frac{dV_C}{dt}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{V}_C\\ \dot{i}_L\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{۱}{۴} & \frac{-۲}{۳}\\ \frac{۱}{۵} & \frac{-۲}{۵}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_C\\ i_L\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\frac{۱}{۳}\\ ۰\end{bmatrix}[i_S]$$

از رابطه (۹)، i_L را به دست آورده و در رابطه (۱۱) قرار می‌دهیم:

$$i_C+i_S+\frac{۳}{۴}V_C=-۲i_L \Rightarrow i_L=-\frac{۱}{۲}i_C-\frac{۱}{۲}i_S-\frac{۳}{۸}V_C$$

$$\frac{di_L}{dt}=\frac{۱}{۵}V_C-\frac{۲}{۵}(-\frac{۱}{۲}i_C-\frac{۱}{۲}i_S-\frac{۳}{۸}V_C)=\frac{۱}{۵}V_C+\frac{۱}{۵}i_C+\frac{۱}{۵}i_S+\frac{۳}{۲۰}V_C=+\frac{۷}{۲۰}V_C+\frac{۱}{۵}i_C+\frac{۱}{۵}i_S$$

رابطه بدست آمده بالا را در رابطه (۱۲) قرار می‌دهیم:

$$\frac{d^۲V_C}{dt^۲}=-\frac{۲}{۳}(\frac{۷}{۲۰}V_C+\frac{۱}{۵}i_C+\frac{۱}{۵}i_S)-\frac{۱}{۳}\frac{di_S}{dt}-\frac{۱}{۴}\frac{dV_C}{dt}$$

$$=-\frac{۷}{۳۰}V_C-\frac{۲}{۱۵}i_C-\frac{۲}{۱۵}i_S-\frac{۱}{۳}\frac{di_S}{dt}-\frac{۱}{۴}\frac{dV_C}{dt}$$

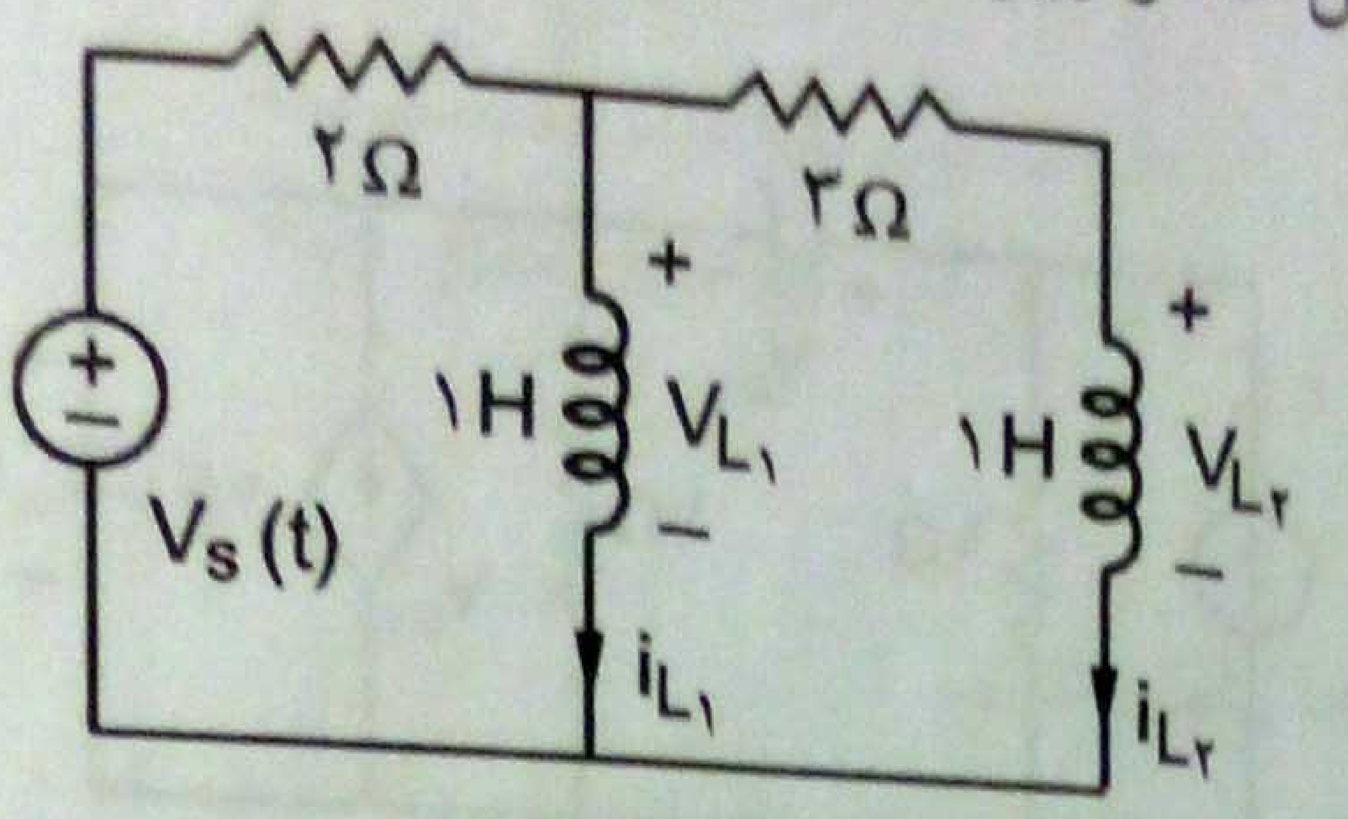
در رابطه بالا به جای i_C، $۳\frac{dV_C}{dt}$ قرار می‌دهیم $(i_C=C\frac{dV_C}{dt})$

$$\frac{d^۲V_C}{dt}=-\frac{۷}{۳۰}V_C-\frac{۲}{۱۵}(۳\frac{dV_C}{dt})-\frac{۲}{۱۵}i_S-\frac{۱}{۳}\frac{di_S}{dt}-\frac{۱}{۴}\frac{dV_C}{dt}$$

$$=-\frac{۷}{۳۰}V_C-\frac{۳۹}{۶۰}\frac{dV_C}{dt}-\frac{۲}{۱۵}i_S-\frac{۱}{۳}\frac{di_S}{dt}$$

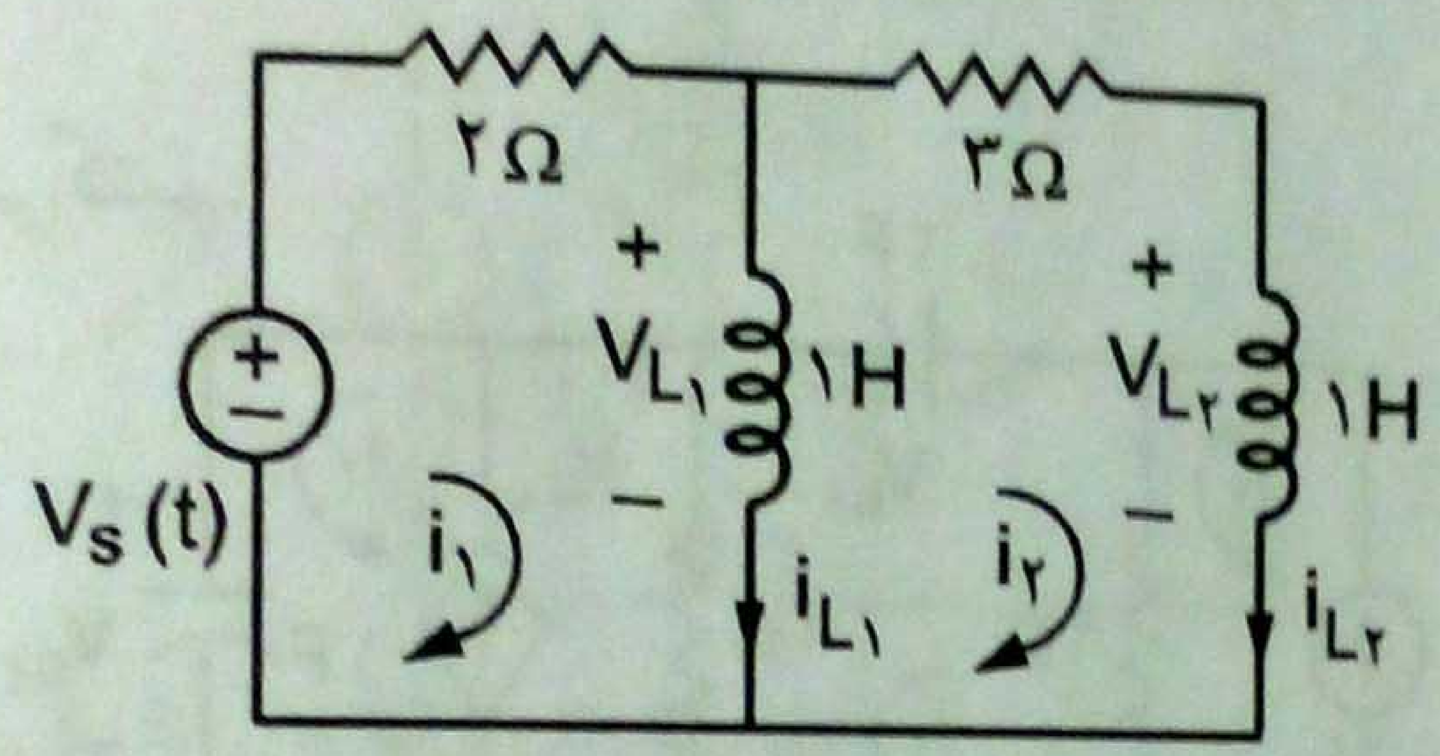
$$\frac{d^۲V_C}{dt}+\frac{۳۹}{۶۰}\frac{dV_C}{dt}+\frac{۷}{۳۰}V_C=\frac{-۲}{۱۵}i_S-\frac{۱}{۳}\frac{di_S}{dt}=-\frac{۲}{۱۵}u(t)-\frac{۱}{۳}\delta(t)$$

مثال ۵-۵) معادله دیفرانسیل مدار زیر را برحسب i_{L_1} حساب کنید.



شکل (۵-۵) مدار مثال ۵-۵

حل:



روابط اصلی:

$$KVL(1):\quad -V_S + 2i_1 + V_{L_1} = 0$$

$$KVL(2):\quad -V_{L_1} + 3i_2 + V_{L_2} = 0$$

روابط کمکی:

$$(1):\quad i_{L_1} = i_1 - i_2$$

$$(2):\quad i_2 = i_{L_2}$$

روابط (۲) را در (۱) قرار می‌دهیم:

$$i_{L_1} = i_1 - i_{L_2} \quad \Rightarrow \quad i_1 = i_{L_1} + i_{L_2}$$

جانشینی روابط کمکی در روابط اصلی:

$$KVL(1):\quad -V_S + 2(i_{L_1} + i_{L_2}) + V_{L_1} = 0$$

$$-V_S + 2i_{L_1} + 2i_{L_2} + V_{L_1} = 0$$

$$KVL(2):\quad -V_{L_1} + 3(i_{L_2}) + V_{L_2} = 0$$

$$KVL(1):\quad V_{L_1} = -2i_{L_1} - 2i_{L_2} + V_S$$

$$KVL(2):\quad V_{L_2} = V_{L_1} - 3i_{L_2} \quad \Rightarrow \quad V_{L_2} = -2i_{L_1} - 2i_{L_2} + V_S - 3i_{L_2}$$

$$V_{L_2} = -2i_{L_1} - 5i_{L_2} + V_S$$

$$KVL(1):\quad \frac{di_{L_1}}{dt} = -2i_{L_1} - 2i_{L_2} + V_S$$

$$\text{KVL}(2):\quad \frac{di_{L_2}}{dt}=-2i_{L_1}-5i_{L_2}+V_S$$

معادلات حالت این مدار عبارت است از:

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_{L_1} \\ \dot{i}_{L_2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_{L_1} \\ i_{L_2} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_S \end{bmatrix}$$

از KVL(۱) مشتق می‌گیریم:

$$\text{KVL}(1):\quad \frac{d^2 i_{L_1}}{dt^2}=-2\frac{di_{L_1}}{dt}-2\frac{di_{L_2}}{dt}+\frac{dV_S}{dt}$$

$$\frac{d^2 i_{L_1}}{dt^2}=-2\frac{di_{L_1}}{dt}-2(-2i_{L_1}-5i_{L_2}+V_S)+\frac{dV_S}{dt}$$

$$(3):\frac{d^2 i_{L_1}}{dt^2}=-2\frac{di_{L_1}}{dt}+4i_{L_1}+10i_{L_2}-2V_S(t)+\frac{dV_S}{dt}$$

i_{L_1} را از KVL(۱) به دست می‌آوریم:

$$\text{KVL}(1):\quad \frac{di_{L_1}}{dt}+2i_{L_1}-V_S=-2i_{L_2}$$

$$(4):i_{L_2}=-\frac{1}{2}\frac{di_{L_1}}{dt}-i_{L_1}+\frac{1}{2}V_S$$

با جایگذاری رابطه (۴) در (۳) داریم:

$$\frac{d^2 i_{L_1}}{dt^2}=-2\frac{di_{L_1}}{dt}+4i_{L_1}+10(-\frac{1}{2}\frac{di_{L_1}}{dt}-i_{L_1}+\frac{1}{2}V_S)-2V_S+\frac{dV_S}{dt}$$

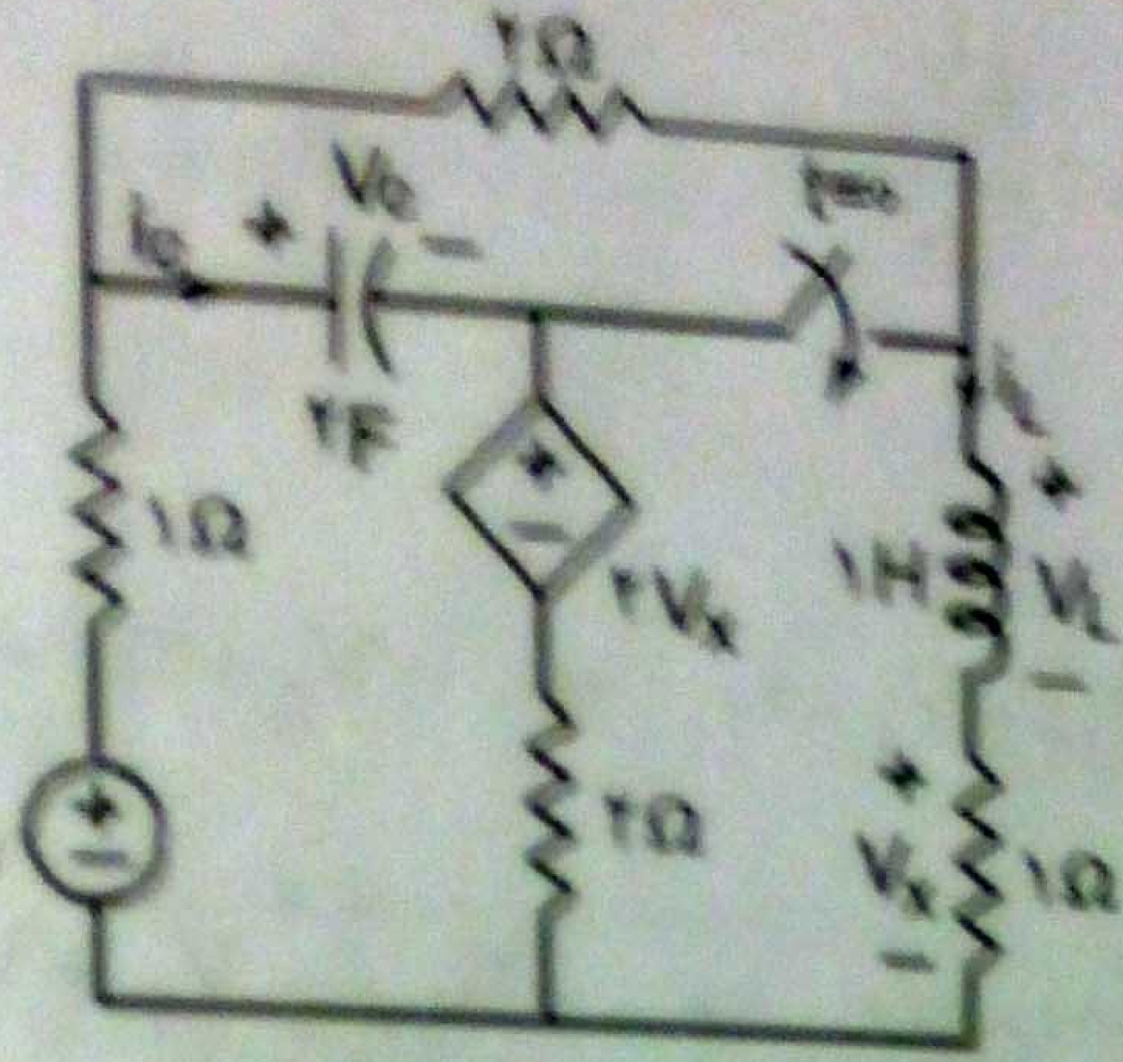
خلاصه‌نویسی روابط:

$$\frac{d^2 i_{L_1}}{dt^2}=-2\frac{di_{L_1}}{dt}+4i_{L_1}-5\frac{di_{L_1}}{dt}-10i_{L_1}+5V_S-2V_S+\frac{dV_S}{dt}$$

$$\frac{d^2 i_{L_1}}{dt^2}+7\frac{di_{L_1}}{dt}+6i_{L_1}=3V_S+\frac{dV_S}{dt}$$

تشکیل معادله دیفرانسیل برای جریان سلف.

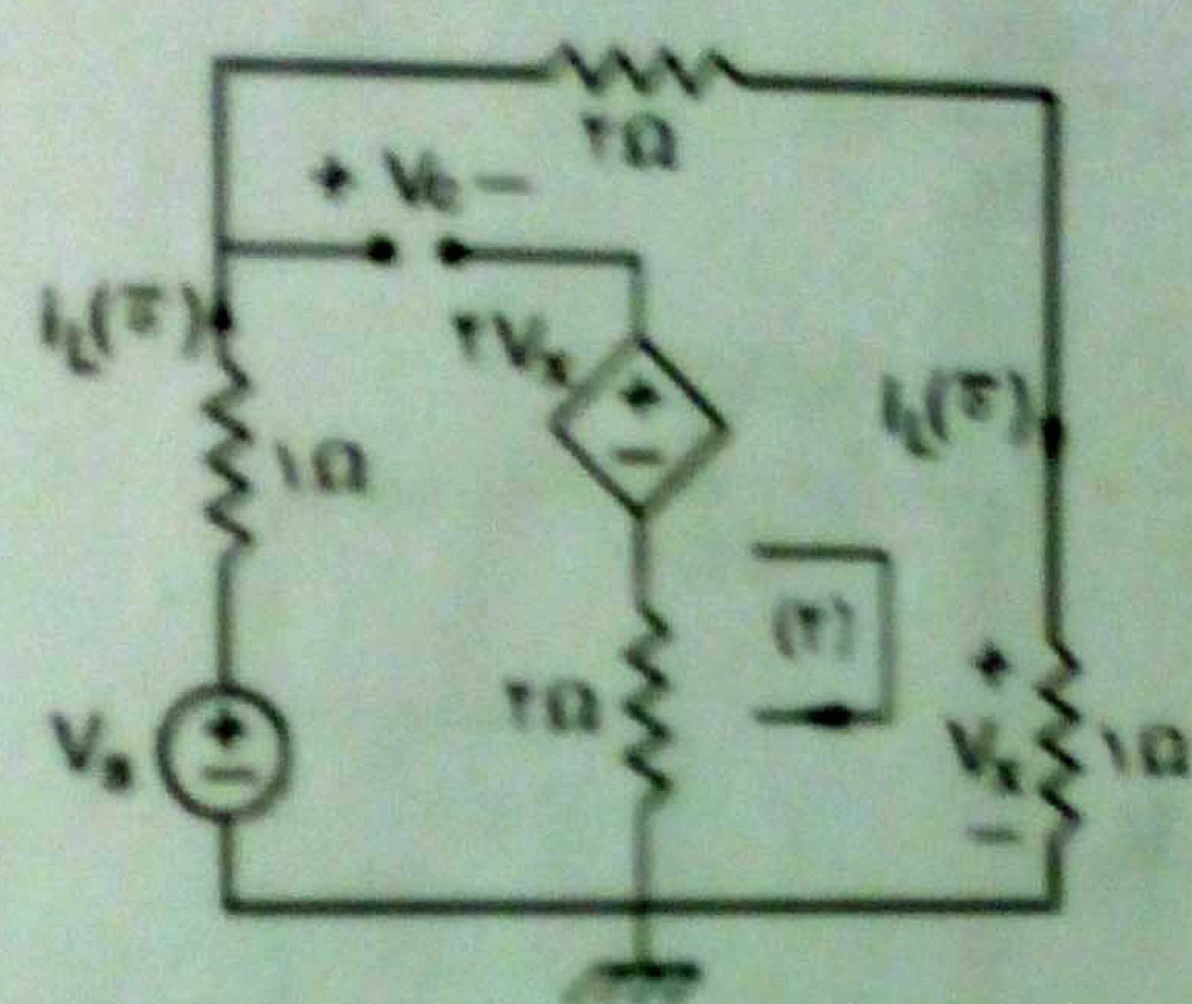
مثال ۵-۷) مطلوب است تشکیل معادله



شکل (۵-۷) مدار مثال ۵-۷

حل:

ترسیم مدار در $t<0$:



تذکر: برای محاسبه شرایط اولیه در $t=0^-$ باید مدار در $t<0$ رسم شود. فرض می‌شود که در $t<0$ مدار در حالت ماندگار است پس خازن مدار باز و سلف اتصال کوتاه می‌شود.

روابط اصلی:

$$KVL(1):\quad -V_S + i_L(0^-) + 2i_L(0^-) + i_L(0^-) = 0 \rightarrow i_L(0^-) = \frac{V_S}{4}$$

$$KVL(2): -V_S + i_L(0^-) + V_C(0^-) + 2V_x(0^-) = 0$$

روابط کمکی:

$$V_x(0^-) = i_L(0^-)$$

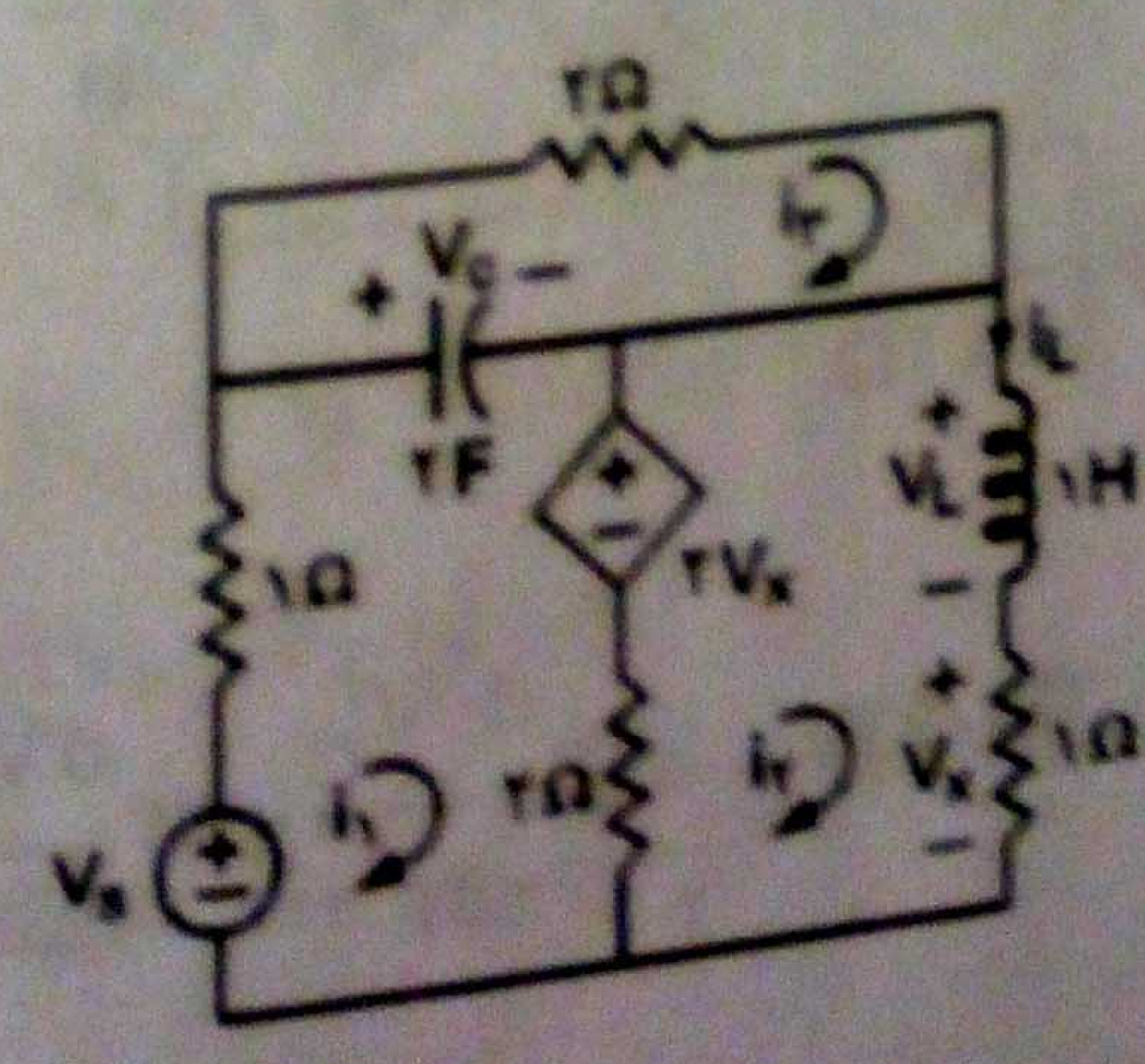
رابطه کمکی را در KVL (۲) می‌گذاریم:

$$-V_S + 3i_L(0^-) + V_C(0^-) = 0$$

با توجه به KVL (۱) داریم:

$$-V_S + \frac{3V_S}{4} + V_C(0^-) = 0 \rightarrow V_C(0^-) = \frac{V_S}{4}$$

ترسیم مدار در $t>0$:



روابط اصلی:

$$KVL(۱): -V_S + ۱i_۱ + V_C + ۲V_x + ۲(i_۱ - i_۲) = ۰$$

$$KVL(۲): ۲(i_۲ - i_۱) - ۲V_x + V_L + V_x = ۰$$

$$KVL(۳): -V_C + ۲i_۳ = ۰$$

روابط کمکی:

$$(۱): V_L = L\frac{di_L}{dt} \rightarrow V_L = \frac{di_L}{dt}$$

$$(۲): V_x = i_۲ = i_L$$

$$i_C = i_۱ - i_۳ = c\frac{dV_C}{dt} = ۲\frac{dV_C}{dt}$$

طبق (۳) KVL داریم:

$$KVL(۳): i_۳ = \frac{V_C}{۲}$$

طبق (۳) داریم:

$$(۳): i_C = i_۱ - \frac{V_C}{۲} \rightarrow i_۱ = i_۲ + \frac{V_C}{۲}$$

خلاصه‌نویسی روابط اصلی:

$$KVL(۱): -V_S + ۳i_۱ + V_C + ۲V_x - ۲i_۲ = ۰$$

$$KVL(۲): ۲i_۲ - ۲i_۱ - V_x + V_L = ۰$$

جانشینی روابط کمکی:

$$KVL(۱): -V_S + ۳i_C + \frac{۳}{۲}V_C + V_C + ۲i_L - ۲i_L = ۰$$

$$KVL(۲): ۲i_L - ۲i_C - V_C - i_L + V_L = ۰$$

خلاصه‌نویسی روابط اصلی:

$$KVL(۱): -V_S + ۳i_C + \frac{۵}{۲}V_C = ۰$$

$$KVL(۲): i_L - ۲i_C - V_C + V_L = ۰$$

از (۱) KVL داریم:

$$KVL(۱): ۶\frac{dV_C}{dt} + \frac{۵}{۲}V_C = V_S$$

برای تشکیل معادله دیفرانسیل بر اساس i_L معادله (۱)KVL را برحسب D تنظیم می‌کنیم.

$$(۶D+۲/۵)V_C \rightarrow V_C = \frac{V_S}{۶D+۲/۵}$$

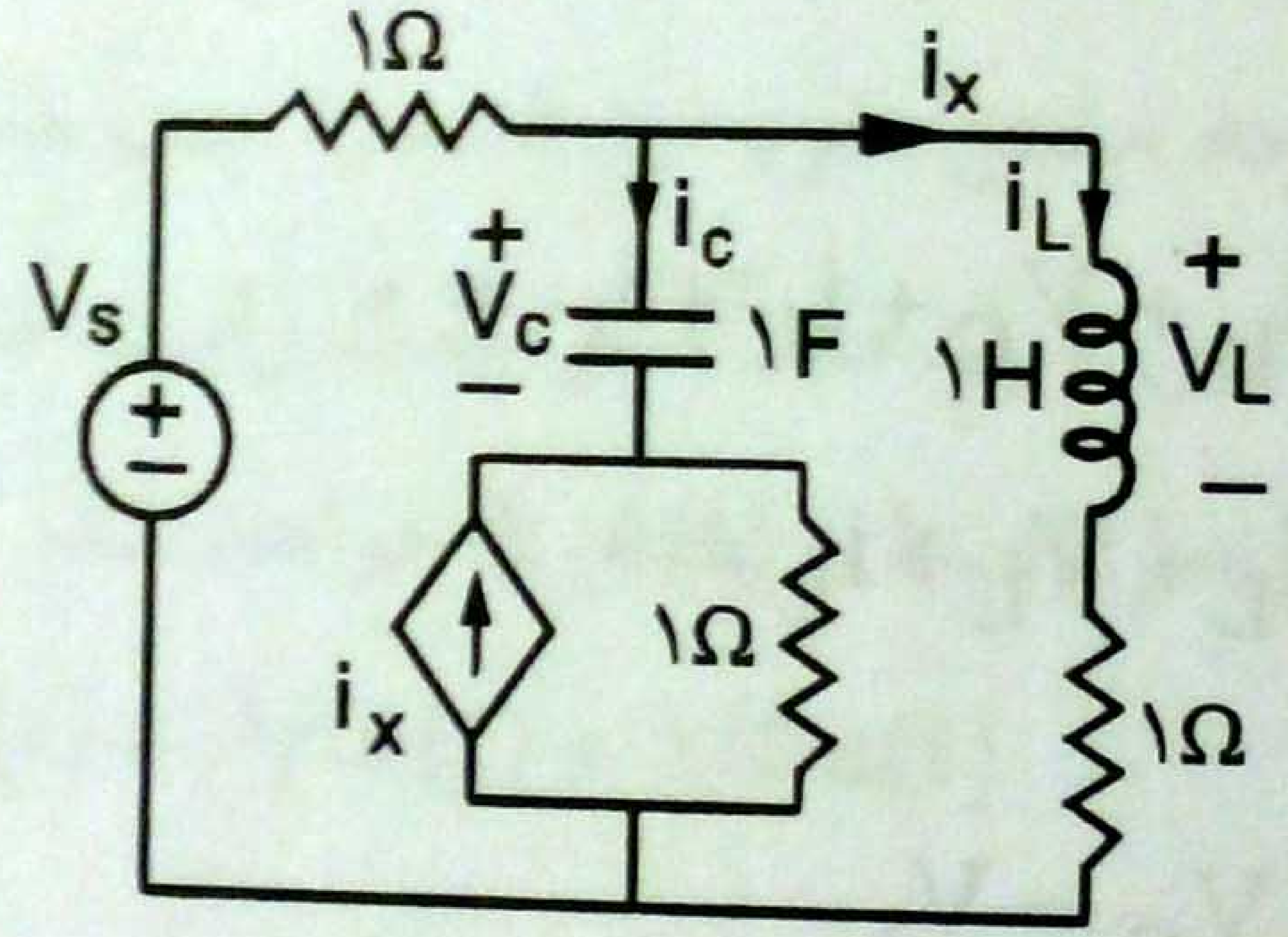
معادله (۲)KVL را برحسب D تنظیم می‌کنیم.

$$i_L + V_L = V_C + ۲i_C \rightarrow i_L + Di_L = V_C + ۴DV_C \rightarrow (۱+D)i_L = V_C(۱+۴D)$$

$$(۱+D)i_L = \frac{V_S(۱+۴D)}{۶D+۲/۵} \rightarrow (۶D^۲ + ۸/۵D + ۲/۵)i_L = (۱+۴D)V_S$$

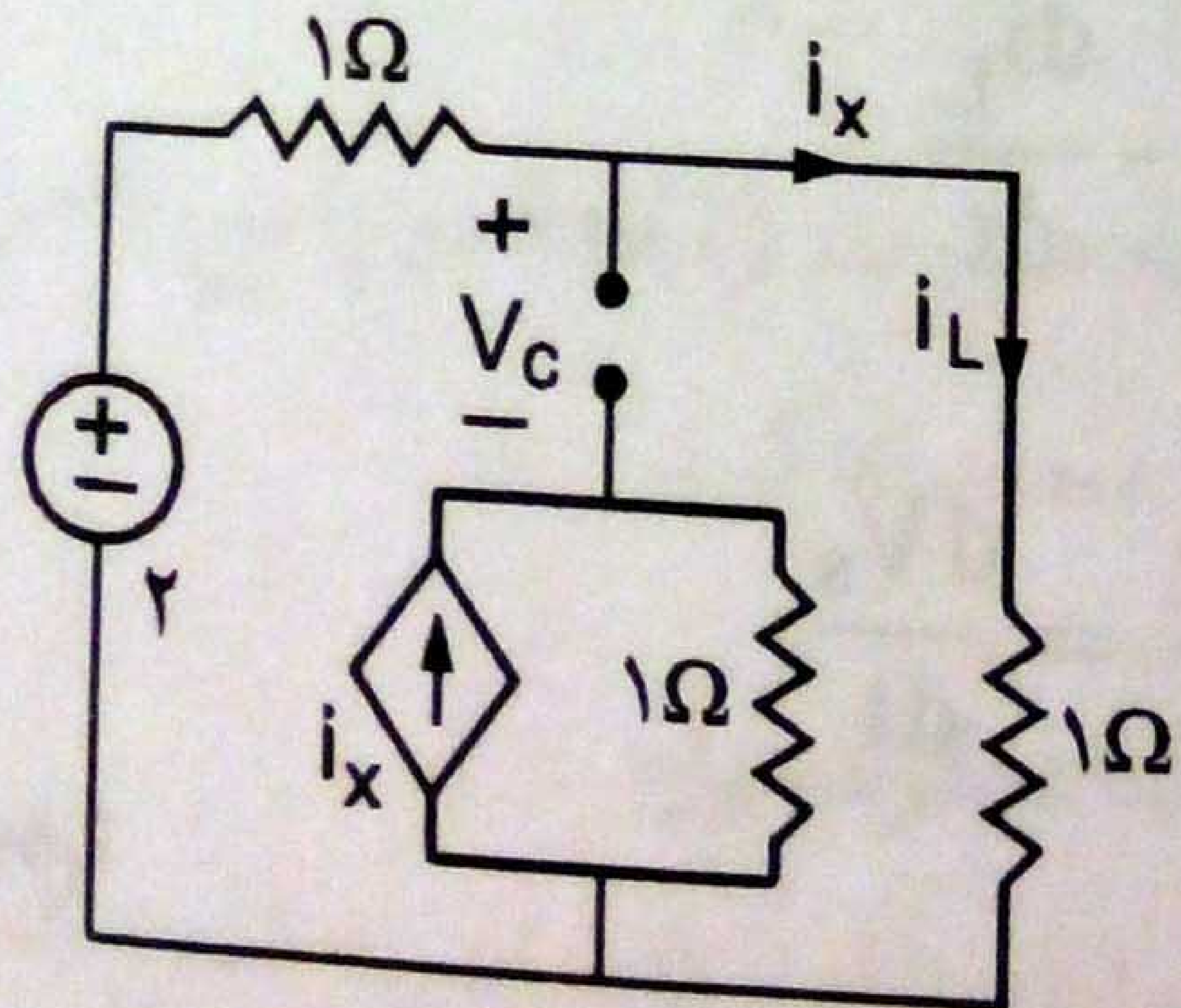
$$۲\frac{d^۲i_L}{dt^۲} + ۸/۵\frac{di_L}{dt} + ۲/۵i_L = ۴\frac{dV_S}{dt} + V_S$$

مثال ۶-۱۶) جریان سلف را برای $t \geq ۰$ بدست آورید. فرض کنید: $V_S = ۲u(-t) + ۳u(t)$



شکل (۶-۱۶) مدار مثال ۶-۱۶

فرض کنید $(t < ۰)$: در این حالت فقط منبع $۲u(-t)$ در مدار است. فرض بر این است که مدت‌ها از اتصال منبع $۲u(-t)$ گذشته است. پس سلف اتصال کوتاه و خازن مدار باز است.



$$KVL: -۲ + i_L + i_L = ۰$$

$$i_L = \frac{۲}{۲} = ۱\ A$$

$$\begin{cases} KVL: -۲ + i_x + V_C + i_x = ۰ \\ i_x = i_L = ۱A \end{cases} \rightarrow \ V_C = ۰$$

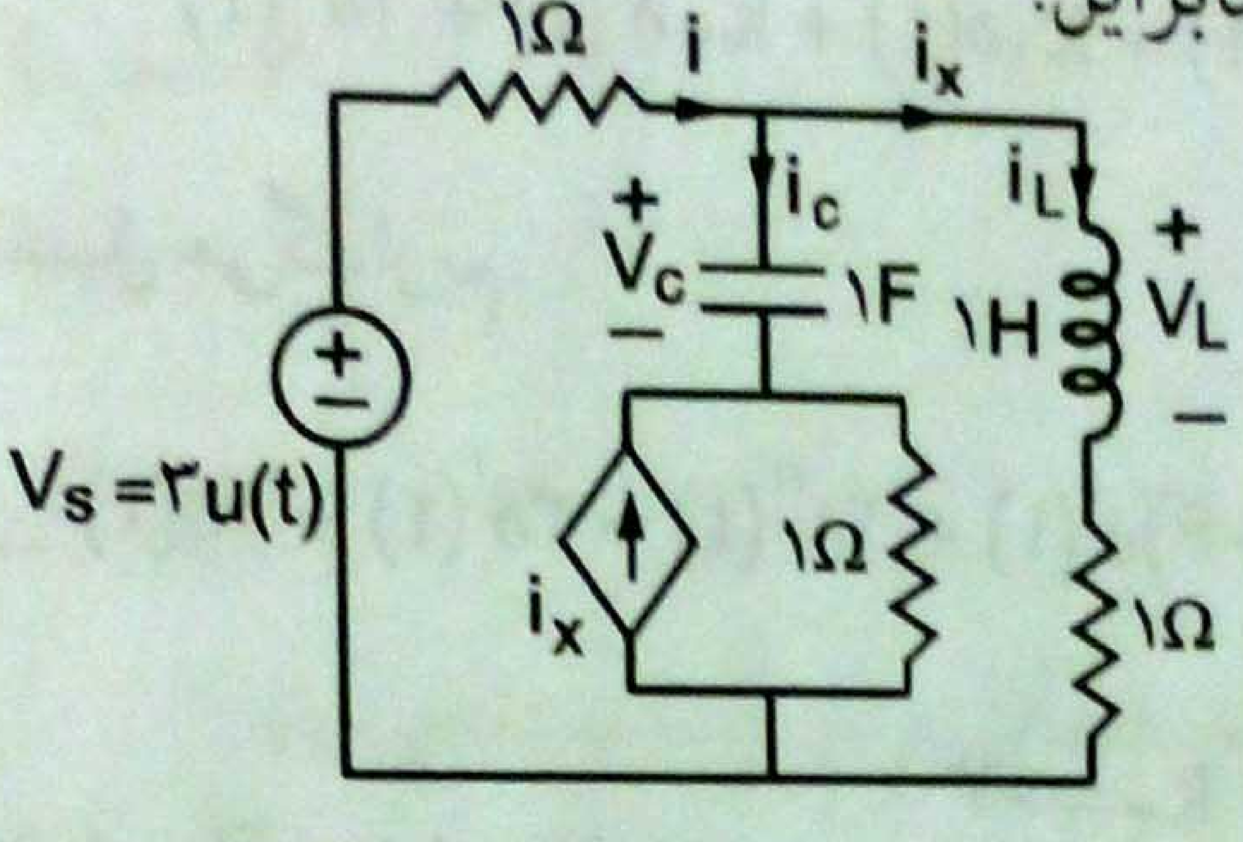
$$V_L = L\frac{di_L}{dt} \Rightarrow \frac{di_L}{dt} = \frac{V_L}{L} = ۰$$

$$i_C = C\frac{dV_C}{dt} \Rightarrow \frac{dV_C}{dt} = \frac{i_C}{C} = ۰$$

پس داریم:

$$V_C(۰^-) = ۰ \quad , \quad i_L(۰^-) = ۱ \quad , \quad \frac{dV_C}{dt}(۰^-) = ۰ \quad , \quad \frac{di_L(۰^-)}{dt} = ۰$$

مدار در $t \geq ۰$ بصورت زیر است. بنابراین:



$$KCL(۱): i = i_C + i_x$$

$$KVL(۱): -V_s + i + V_C + i_x + i_C = ۰$$

$$KVL(۲): -V_s + i + V_L + i_L = ۰$$

$$i_x = i_L$$

با جایگذاری i داریم:

$$KVL(۱): -V_s + i_C + i_L + V_C + i_L + i_C = ۰$$

$$KVL(۲): -V_s + i_C + i_L + V_L + i_L = ۰$$

ساده کردن معادلات:

$$(۱) \; : \; ۲\frac{dV_C}{dt} + ۲i_L + V_C = V_s$$

$$(۲): \frac{di_L}{dt} + ۲i_L + \frac{dV_C}{dt} = V_s$$

از معادله (۲) داریم:

$$(۳) \; : \; \frac{dV_C}{dt} = V_C - ۲i_L - \frac{di_L}{dt}$$

از معادله (۱) مشتق می‌گیریم:

$$۲\frac{d^۲V_C}{dt^۲} + ۲\frac{di_L}{dt} + \frac{dV_C}{dt} = \frac{dV_s}{dt}$$

معادله (۳) را در این معادله قرار می‌دهیم:

$$۲\frac{dV_s}{dt} - ۴\frac{di_L}{dt} - ۲\frac{d^۲i_L}{dt^۲} + ۲\frac{di_L}{dt} + V_s - ۲i_L - \frac{di_L}{dt} = \frac{dV_s}{dt}$$

$$۲\frac{d^۲i_L}{dt^۲} + ۳\frac{di_L}{dt} + ۲i_L = \frac{dV_s}{dt} + V_s$$

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + 1/5\frac{di_L}{dt} + i_L = \frac{1}{2}\frac{dV_s}{dt} + \frac{1}{2}V_s$$

$$V_s = 3u(t) \Rightarrow \frac{d^2 i_L}{dt^2} + 1/5\frac{di_L}{dt} + i_L = 1/5\delta(t) + 1/5u(t)$$

پاسخ همگن:

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + 1/5\frac{di_L}{dt} + i_L = 0$$

$$S^2 + 1/5S + 1 = 0 \Rightarrow S_{1,2} = -0/75 \pm j\,0/66$$

$$i_{L_h} = Ae^{-0/75t}\operatorname{Cos}(0/66t + \phi)$$

روش محاسبه پاسخ خصوصی: یکی از روش‌های محاسبه پاسخ خصوصی این است که به جای خروجی یک تابع برحسب ورودی و با ضریب مجهول می‌نویسیم و با قرار دادن آن در معادله دیفرانسیل ضرایب مجهول را بدست می‌آوریم. در این مسئله چون ورودی $u(t)$ است پس پاسخ خصوصی را به صورت $ku(t)$ می‌نویسیم و در معادله دیفرانسیل قرار می‌دهیم و k را بدست می‌آوریم. اگر بالاترین درجه مشتق ورودی (سمت راست معادله) از بالاترین درجه مشتق خروجی (سمت چپ معادله) بیشتر باشد به تعداد درجات بالاتر از تابع ضربه و مشتقات آن قرار می‌دهیم. مثلاً اگر سمت راست معادله دو درجه بالاتر از سمت چپ باشد پاسخ خصوصی بصورت $k_1u(t) + k_2\delta(t) + k_3\delta'(t)$ خواهد شد.

$$k\delta'(t) + 1/5k\,\delta(t) + ku(t) = 1/5\delta(t) + 1/5u(t)$$

ضرایب $u(t)$ را مساوی قرار می‌دهیم.

$$k = 1/5$$

پاسخ خصوصی:

$$i_{Lp} = 1/5u(t)$$

پاسخ کامل:

$$i_L(t) = \left[Ae^{-0/75t}\operatorname{Cos}(0/66t + \phi) + 1/5\right]u(t)$$

همچنین می‌توان پاسخ خصوصی را به صورت $ku(t)$ در پاسخ کامل نوشت و با قرار دادن پاسخ کامل در معادله دیفرانسیل k و بقیه مجهولات را محاسبه کرد.

محاسبه شرایط اولیه با استفاده از معادله دیفرانسیل

چون بالاترین درجه سمت راست معادله شامل تابع ضربه است بنابراین از همان ابتدا از طرفین انتگرال $\int_{0^-}^{0^+}$ می‌نویسیم.

$$\frac{di_L(0^+)}{dt} - \frac{di_L(0^-)}{dt} + 1/5(i_L(0^+) - i_L(0^-)) + \int_{0^-}^{0^+} i_L\,dt = 1/5\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)dt + \int_{0^-}^{0^+} 1/5u(t)dt$$

طبق انتگرال‌گیری مشخص می‌شود که تفاوت $\frac{di_L}{dt}$ در $t=۰^+$ و $t=۰^-$ می‌تواند عددی غیر از صفر باشد

ولی درجات پایین‌تر آن یعنی i_L ، $\int i_L$ و... دارای مقدار مساوی در $t=۰^+$ و $t=۰^-$ خواهند شد.

$$\frac{di_L(۰^+)}{dt} = ۱/۵ \quad , \quad i_L(۰^+) = i_L(۰^-) = ۱$$

$$i_L(۰^+) = ۱ \Rightarrow A\cos\phi + ۱/۵ = ۱ \Rightarrow (۴): \quad A\cos\phi = ۰/۵$$

$$\frac{di_L}{dt} = a[-۰/۷۵e^{-۰/۷۵t}\cos(۰/۶۶t+\phi) - ۰/۶۶\, e^{-۰/۷۵t}\sin(۰/۶۶t+\phi)]$$

$$(۵): \quad \frac{di_L(۰^+)}{dt} = A\,[-۰/۷۵\cos\phi - ۰/۶۶\sin\phi] = ۱/۵$$

از (۴) و (۵) داریم:

$$-۰/۷۵ \times -۰/۵ - ۰/۶۶\, A\sin\phi = ۱/۵ \Rightarrow (۶): \quad A\sin\phi = -۱/۷$$

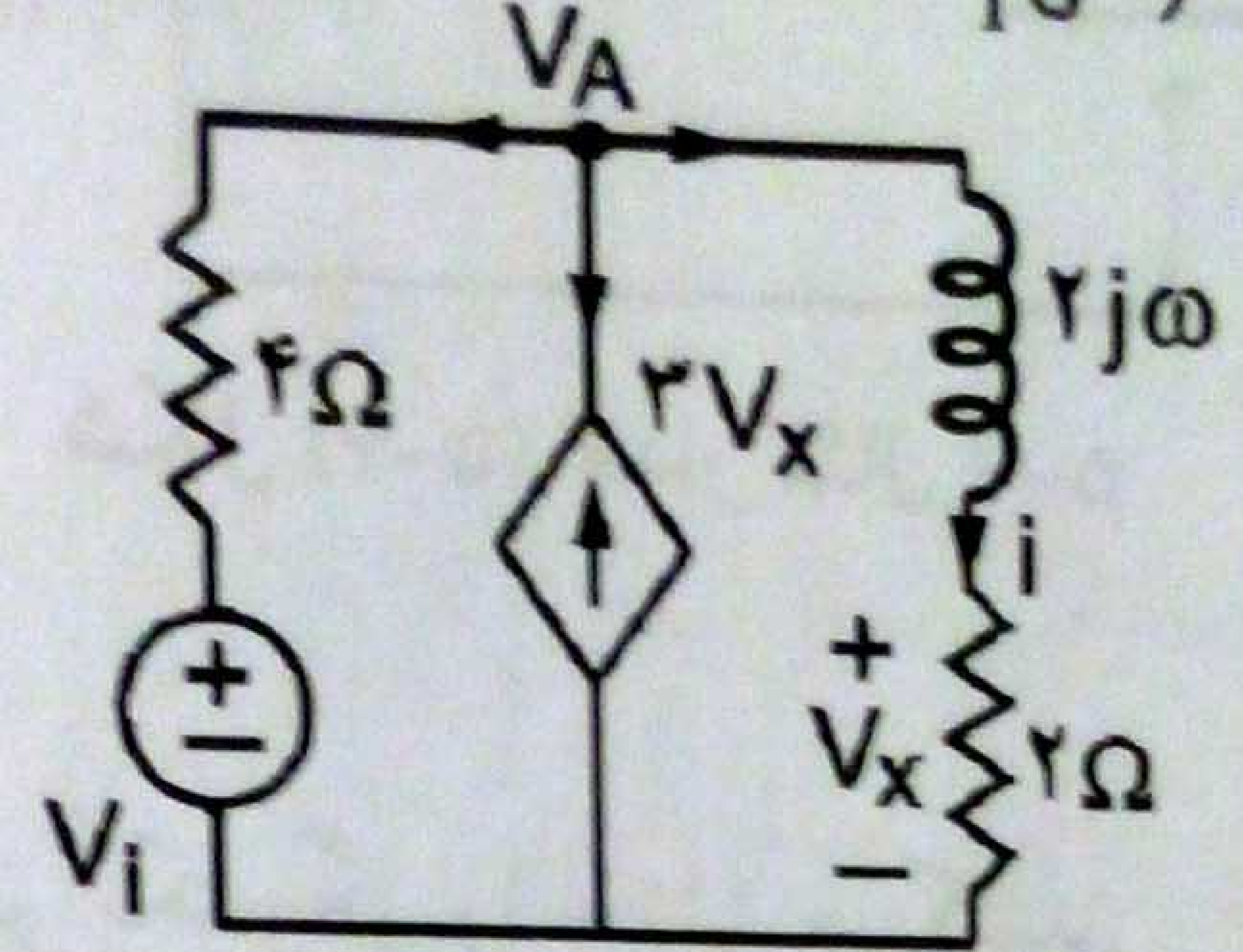
از (۴) و (۶) داریم:

$$A = \sqrt{(۰/۵)^۲ + (۱/۷)^۲} = ۱/۷۷ \quad , \quad \phi = ۲۵۳/۶^\circ$$

پاسخ کامل بصورت زیر بدست می‌آید:

$$i_L(t) = (۱/۷۷e^{-۰/۷۵t}\cos(۰/۶۶t + ۲۵۳/۶^\circ) + ۱/۵)u(t)$$

مثال ۷–۷) در مدار شکل نسبت $\frac{V_x(j\omega)}{V_i(j\omega)}$ را محاسبه کنید.



شکل (۷–۷) مدار مثال ۷–۷

$$\text{KCL (A)}: \frac{V_A - V_i}{۴} + \frac{V_A - ۰}{۲ + ۲j\omega} - ۳V_x = ۰$$

$$(۱): V_x = ۲\left(\frac{V_A - ۰}{۲j\omega + ۲}\right) \quad , \; (۲): V_x = ۲i \quad , \; (۳): i = \frac{V_A - ۰}{۲j\omega + ۲}$$

$$(۱), \text{KCL (A)}: \frac{V_A}{۴} - \frac{V_i}{۴} + \frac{V_x}{۲} - ۳V_x = ۰ \quad \rightarrow \quad V_A - V_i + ۲V_x - ۱۲V_x = ۰$$

$$(۱): V_A = \left(\frac{۲j\omega + ۲}{۲}\right) V_x = (j\omega + ۱) V_x$$

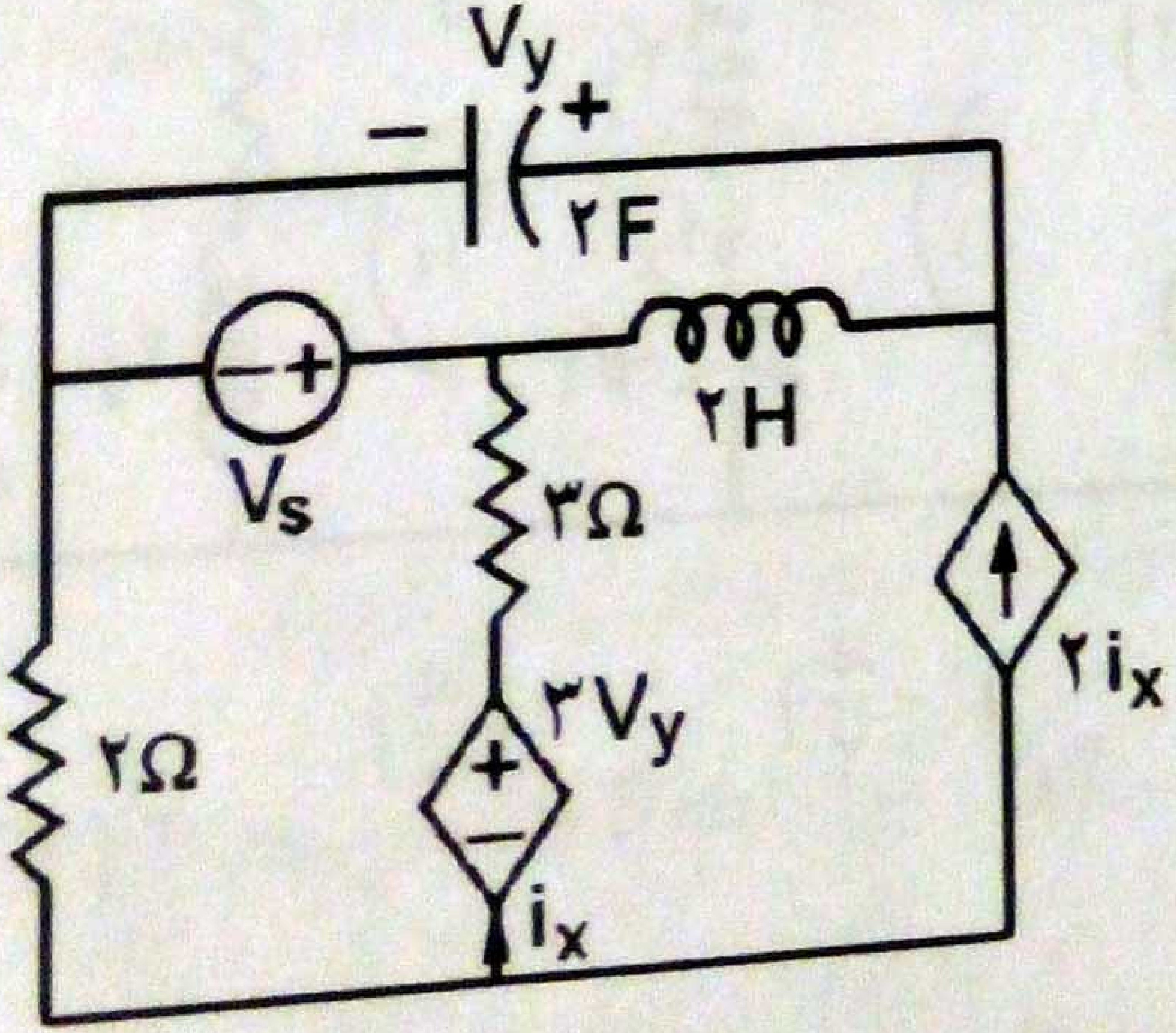
$$V_x (j\omega + ۱) - V_i - ۱۰V_x = ۰ \quad \rightarrow \quad V_x = \left(\frac{۱}{j\omega - ۹}\right) V_i$$

$$H(j\omega) = \frac{V_x}{V_i} = \frac{۱}{j\omega - ۹}$$

نکته: اگر مدار مرتبه اول باشد توان ω در مخرج یا صفر و یا یک است.

نکته: اگر مدار مرتبه دوم باشد توان ω در مخرج کمتر یا مساوی ۲ می‌باشد.

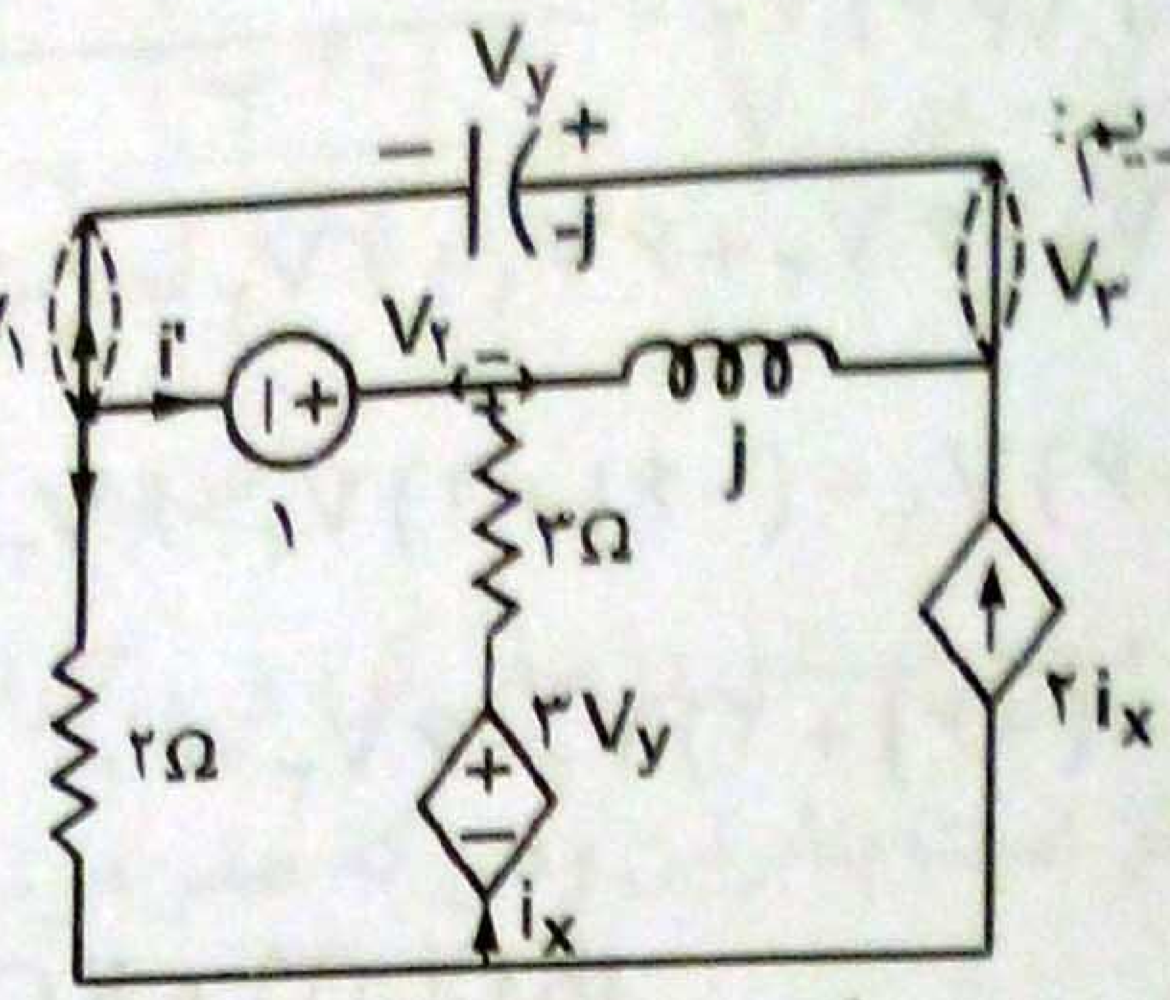
مثال ۷–۱۰) V_y را بیابید.



شکل (۷–۱۰) مدار مثال ۷–۱۰

حل:

با ترسیم مدار در حوزه فازور داریم:



نکته: منبع ولتاژ بین دو گره غیرمبنا قرار گرفته است بنابراین جریان i' را انتخاب می‌کنیم.

روش حل: آنالیز گره

$$KCL\,(۱):\ \frac{V_۱}{۲}+\frac{V_۱-V_۳}{-j}+i'=۰$$

$$KCL(۲):\ \frac{V_۲-V_۳}{j}-i_x-i'=۰$$

$$KCL\,(۳):\ \frac{V_۳-V_۱}{-j}+\frac{V_۳-V_۲}{j}-۲i_x=۰$$

روابط کمکی:

$$(۱):\ V_y=V_۳-V_۱$$

$$(۲):\ i_x=\frac{۳V_y-V_۲}{۳}=\frac{۳V_۳-۳V_۱-V_۲}{۳}$$

$$(۳):\ V_۲-V_۱=۱\ \rightarrow\ V_۲=۱+V_۱$$

$$KCL\,(۱,۲):\ \frac{V_۱}{۲}+\frac{V_۱-V_۳}{-j}+\frac{V_۲-V_۳}{j}-i_x=۰$$

$$KCL\,(۳):\ \frac{V_۳-V_۱}{-j}+\frac{V_۳-V_۲}{j}-۲i_x=۰$$

با جایگذاری رابطه در $KCL\,(۱,۲)$ داریم:

$$KCL\,(۱,۲):\ \frac{V_۱}{۲}+\frac{V_۱-V_۳}{-j}+\frac{V_۲-V_۳}{j}-\frac{۳V_۳-۳V_۱-V_۲}{۳}=۰$$

$$KCL\,(۳):\ \frac{V_۳-V_۱}{-j}+\frac{V_۳-V_۲}{j}-۲\left(\frac{۳V_۳-۳V_۱-V_۲}{۳}\right)=۰$$

$$KCL\,(۱,۲):\ \frac{V_۱}{۲}+V_۱j-V_۳j-V_۲j+V_۳j-\frac{۳V_۳-۳V_۱-V_۲}{۳}=۰$$

$$۳V_۱+۶V_۱j-۶V_۲j-۶V_۳+۶V_۱+۲V_۲=۰$$

$$KCL(۳):\ jV_۳ - jV_۱ - jV_۳ + jV_۲ - \frac{۶V_۳ - ۶V_۱ - ۲V_۲}{۳} = ۰$$

$$KCL(۳): -۳jV_۱ + ۳jV_۲ - ۶V_۳ + ۶V_۱ + ۲V_۲ = (-۳j + ۶)V_۱ + (۳j + ۲)V_۲ - ۶V_۳ = ۰$$

$$KCL(۱,۲):\ (۳ + ۶j + ۶)V_۱ + (-۶j + ۲)V_۲ - ۶V_۳ = ۰$$

$$KCL(۲): (۹ + ۶j)V_۱ + (-۶j + ۲)V_۲ - ۶V_۳ = ۰$$

با جانشینی رابطه (۳) در $KCL(۱,۲)$ و $KCL(۳)$:

$$KCL(۱,۲):\ (۹ + ۶j)V_۱ + (-۶j + ۲)(۱ + V_۱) - ۶V_۳ = ۰$$

$$KCL(۱,۲): (۹ + ۶j)V_۱ + (-۶j + ۲) + (-۶j + ۲)V_۱ - ۶V_۳ = ۰$$

$$KCL(۱,۲):\ ۱۱V_۱ - ۶V_۳ = ۶j - ۲$$

$$KCL(۳): (-۳j + ۶)V_۱ + (۳j + ۲)(۱ + V_۱) - ۶V_۳ = ۰$$

$$KCL(۳): ۸V_۱ - ۶V_۳ = -۳j - ۲$$

از حل این دو معادله داریم:

$$V_۱ = ۳j \qquad , \qquad V_۳ = ۰/۳۳۳ + ۴/۵j$$

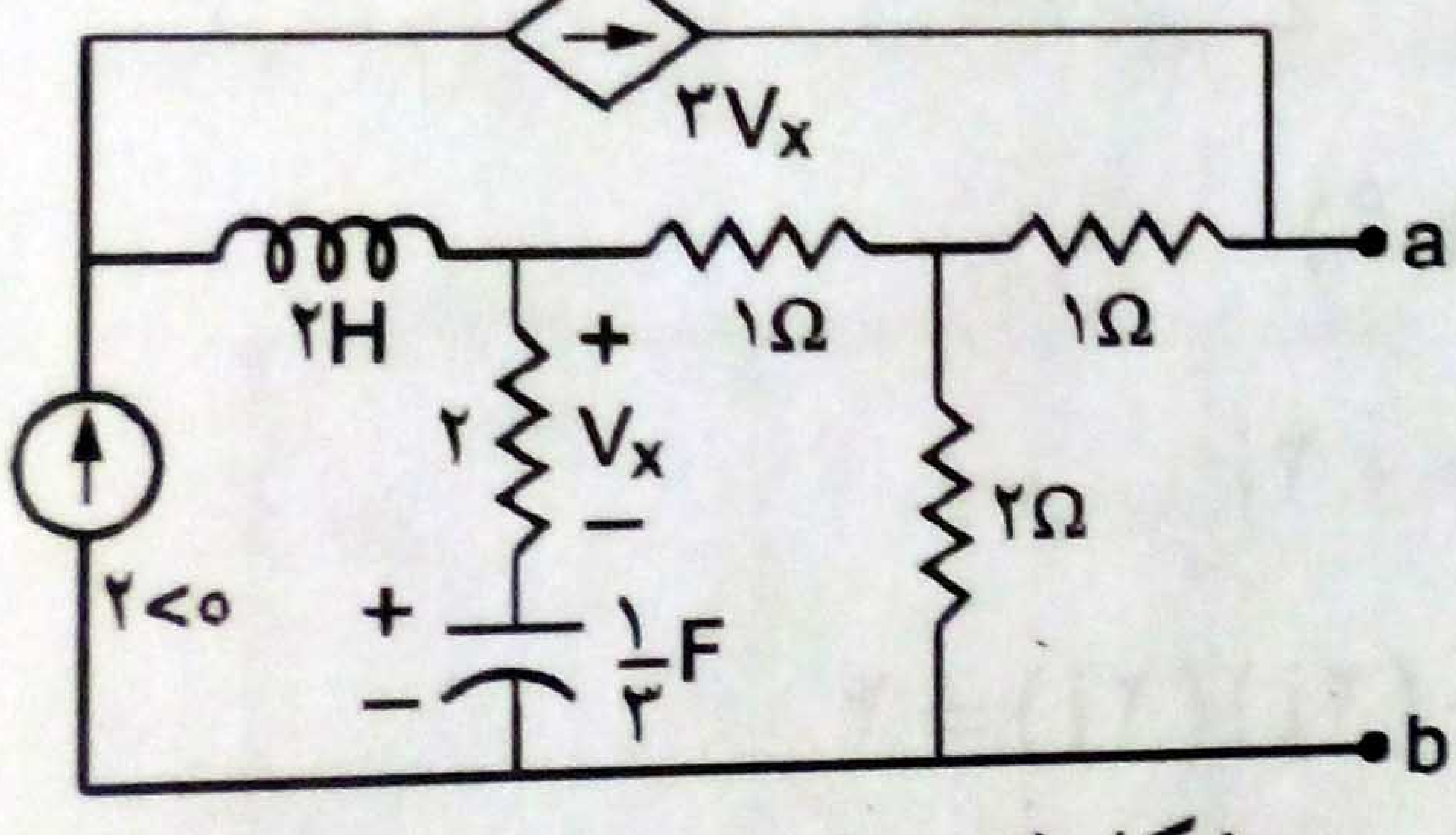
با استفاده از رابطه کمکی (۱)، V_y را به دست می‌آوریم:

$$V_y = V_۳ - V_۱ \quad \rightarrow \quad V_y = ۵/۴j + ۰/۳۳ - ۳j = ۰/۳۳ + ۱/۴j$$

V_y در حوزه زمان برابر است با:

$$V_y = ۱/۵۳ \angle ۷۷/۵^\circ \quad \Rightarrow \quad V_y = ۱/۵۳\cos(\frac{۱}{۲}t + ۷۷/۵^\circ)$$

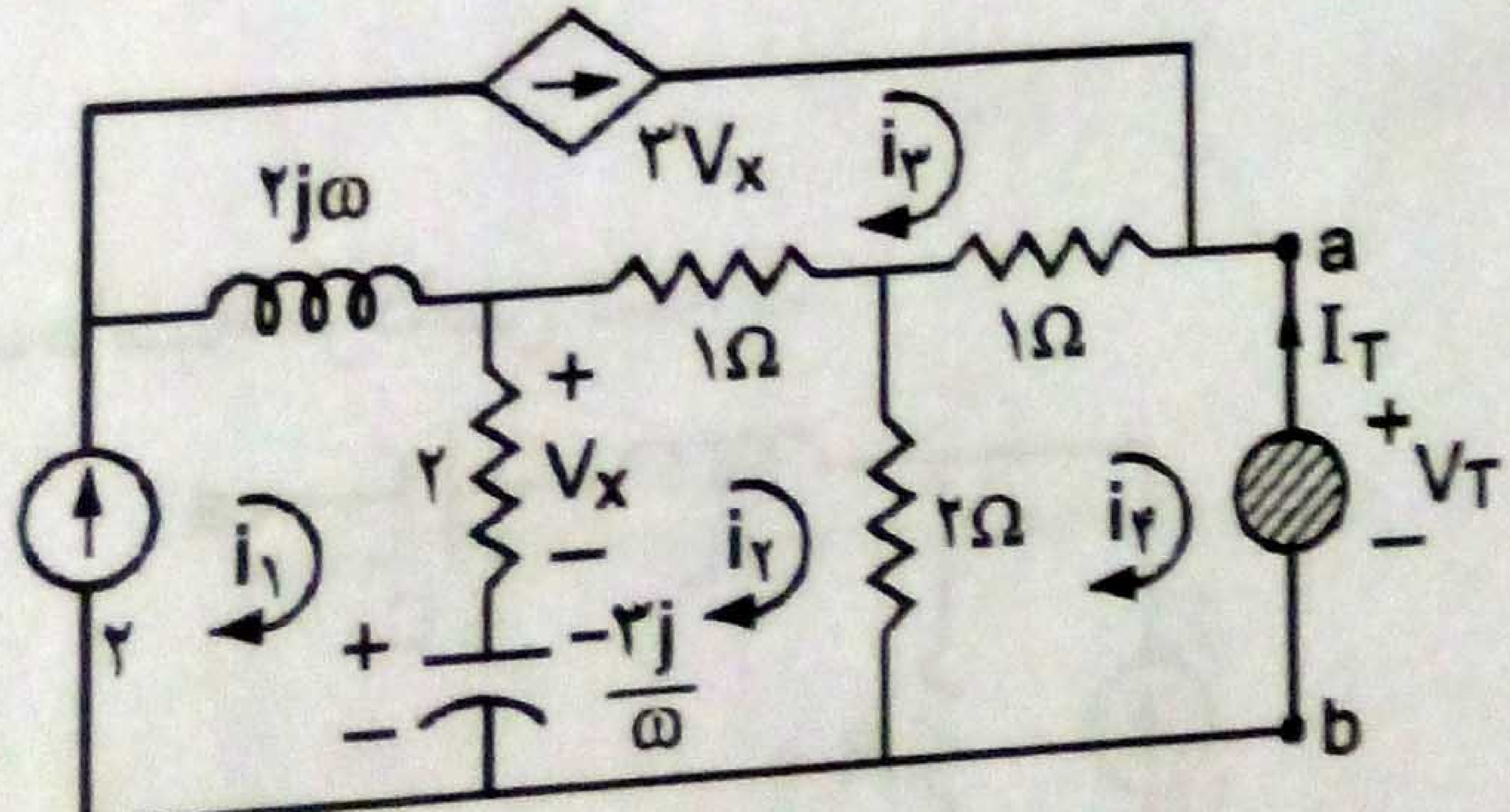
مثال ۷-۲۲) مطلوب است محاسبه فرکانس تشدید در مدار زیر



شکل (۷-۲۲) مدار مثال ۷-۲۲

حل:

ترسیم مدار در حوزه فازور:



روابط اصلی:

$$KVL(1): \left(-\frac{3j}{\omega}\right)(i_2-i_1)+2(i_2-i_1)+i_2-i_3+2i_2-2i_4=0$$

$$KVL(2): 2i_4-2i_2+i_4-i_3+V_T=0$$

روابط کمکی:

$$(1): i_3=3V_x$$

$$(2): V_x=2i_1-2i_2$$

$$(3): i_4=-I_T$$

$$(4): i_1=2$$

از رابطه (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$(1),(2) \rightarrow i_3=6i_1-6i_2=12-6i_2 \Rightarrow (5): i_3=12-6i_2$$

با جانشینی روابط کمکی در KVL(2):

$$KVL(2): 3(-I_T)-2i_2-12+6i_2+V_T=0 \rightarrow i_2=\frac{1}{4}(3I_T-V_T)+3$$

جانشینی i_2 در رابطه (۵):

$$i_3=12-\frac{3}{2}(3I_T-V_T)-18=-6-1.5(3I_T-V_T)$$

$$KVL(1): i_1\left(\frac{+3j}{\omega}-2\right)+i_2\left(\frac{-3j}{\omega}+5\right)-i_3-2i_4=0$$

جانشینی روابط کمکی در KVL(1):

$$KVL(1): \frac{+6j}{\omega}-4+\left[\frac{1}{4}(3I_T-V_T)+3\right]\left(-\frac{3j}{\omega}+5\right)+6+1.5(3I_T-V_T)+2I_T=0$$

$$\frac{-9j+41\omega}{4\omega}I_T+\frac{3j-11\omega}{4\omega}V_T=-17\omega+3j$$

$$V_T=\frac{9j-41\omega}{3j-11\omega}I_T+\frac{(3j-17\omega)4\omega}{3j-11\omega}$$

$$Z_{th}=\frac{9j-41\omega}{3j-11\omega}\times\frac{-3j-11\omega}{-3j-11\omega}=\underbrace{\frac{27+451\omega^2}{3^2+(11\omega)^2}}_{Re}+j\underbrace{\frac{+24\omega}{3^2+(11\omega)}}_{Im}$$

برای محاسبه فرکانس تشدید، قسمت موهومی را مساوی صفر قرار دهید.

$$+24\omega=0 \rightarrow \omega=0$$