ویرایش چهارم

مقاومت مصالح

فصل

۲

تنش و کرنش
بارگذاری محوری

مهندس سید رضا مطلبی - دانشگاه پیام نور مرکز رشت ۱۳۸۸

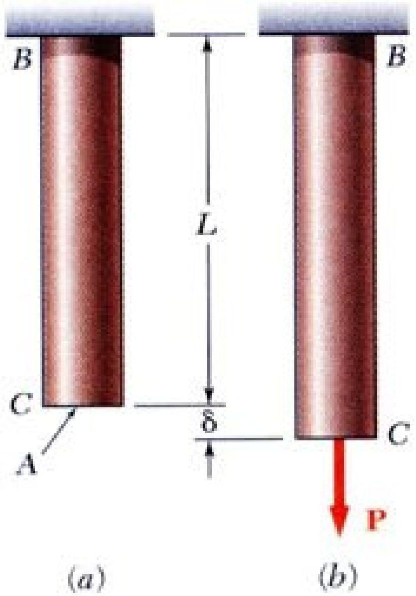
دانشگاه پیام نور

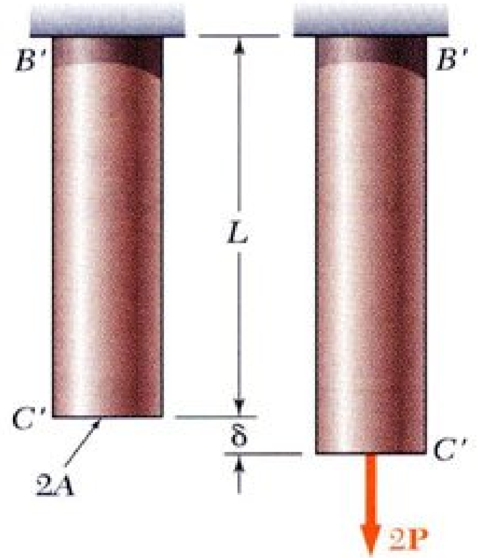
فهرست

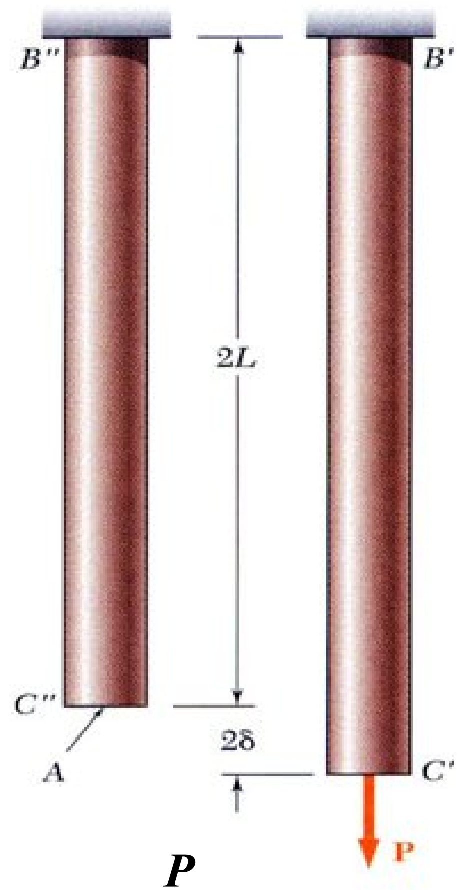
تنش و کرنش – بارگذاری محوری

- ویژه گی هر سازه یا ماشین به تغییر شکلها و نیز تنشهای القائی تحت بارگذاری بستگی دارد و تحلیل های استاتیکی به تنهایی کافی نیست.
- با در نظر گرفتن سازه ها بصورت تغییر شکل پذیر، امکان تعیین نیروهای درونی و عکس العملها در اعضائ نامعین استاتیکی وجود خواهد داشت.
- برای تعیین توزیع تنش در یک عضو لازم است که تغییر شکل در آن عضو در نظر گرفته شود. فصل ۲ به تغییر شکلهای عضو تحت بارگذاری محوری مربوط میشود.

کرنش عمودی تحت بارگذاری محوری







$$\sigma = \frac{P}{A} = \text{stress}$$

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L} = \text{normal strain}$$

$$\sigma = \frac{2P}{2A} = \frac{P}{A}$$

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L}$$

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

$$\varepsilon = \frac{2\delta}{2L} = \frac{\delta}{L}$$

میزان تغییر مکان ایجاد شده δ (دلتا) بر واحد طول را کرنش نامیده و با حرف یونانی ε (اپسیلن) نشان خواهیم داد.

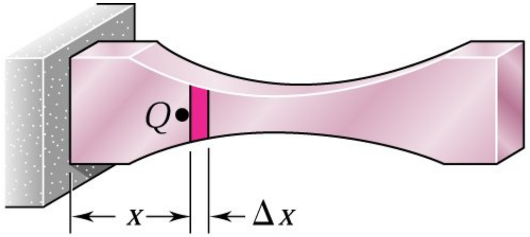
- برای اعضاء با سطح مقطع متغییر، تنش عمودی در طول آن نیز متغییر خواهد بود.
- برای تعیین کرنش، آنرا در نقطه دلخواه Q با در نظر گرفتن المانی بطول Δx (از تغییر مقطع در این المان صرفنظر شود) معیین میکنیم.
- اگر تغییر مکان المان $\Delta\delta$ باشد.

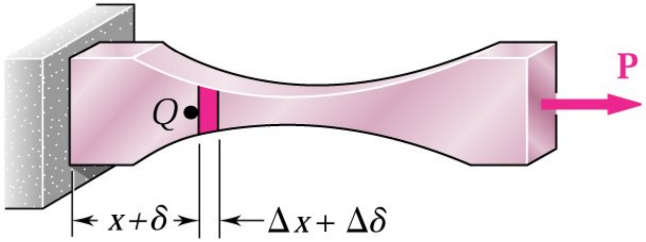
$$\varepsilon = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\delta}{\Delta x} = \frac{d\delta}{dx}$$

- در عضوی با سطح مقطع ثابت A و طول L، کرنش مقدار ثابتی داشته و برابر با تغییر مکان کل بر طول کل میله:

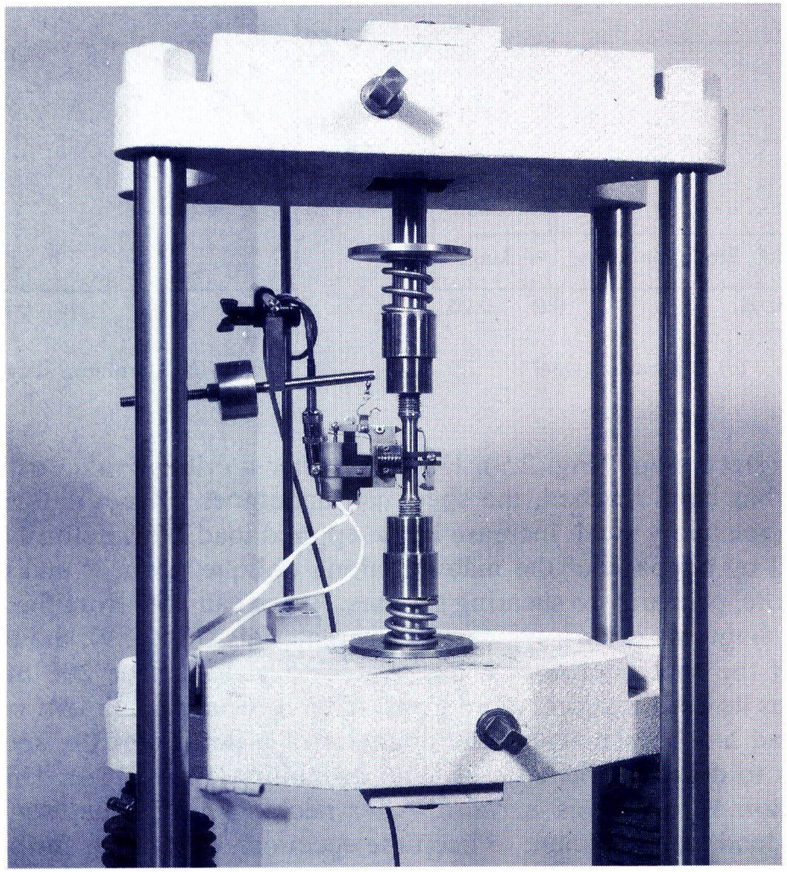
$$\varepsilon = \frac{\delta}{L}$$

- از آنجایی که تغییر مکان و طول هر دو واحدهای یکسان دارند، کمیت کرنش بدون بعد خواهد بود.

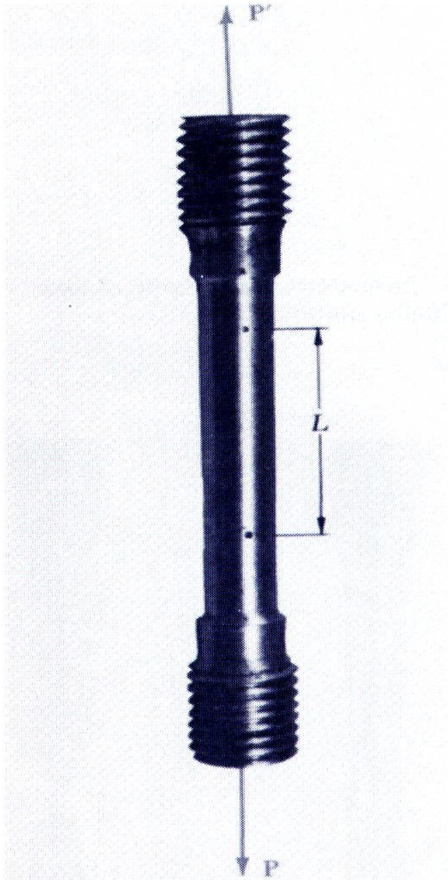




آزمون تنش - کرنش

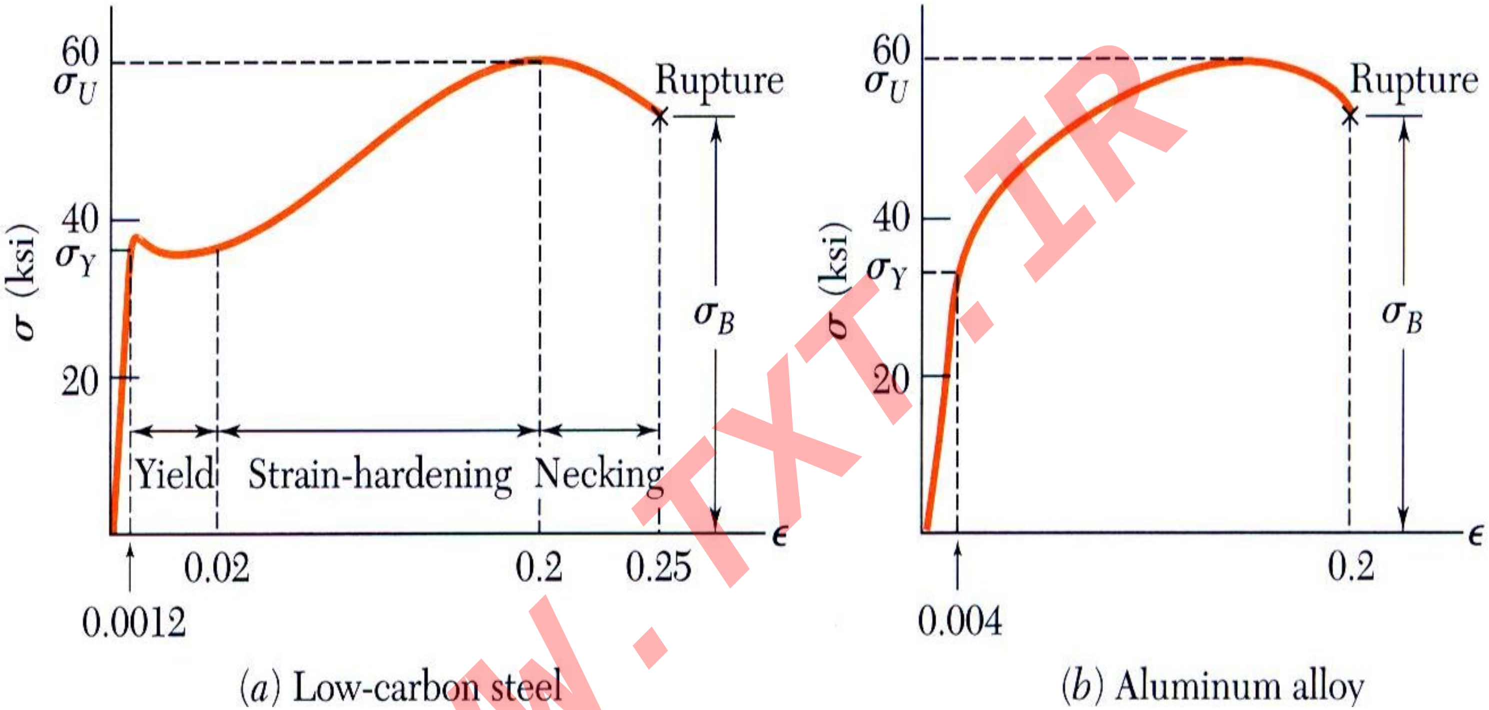


این ماشین برای آزمون کششی در نمونه آزمایشی بکار می رود

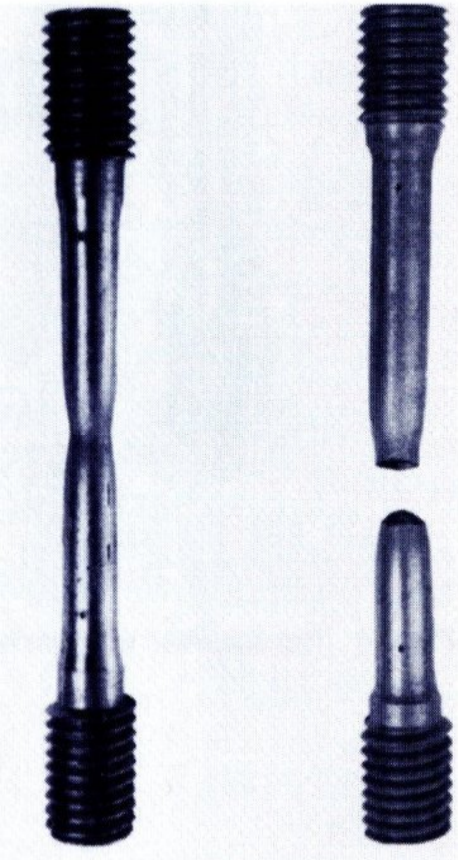


نمونه آزمون با بار کششی

نمودار تنش – کرنش : مواد نرم



- بطور کلی نمودارهای تنش-کرنش به دو دسته مصالح تغییر شکل پذیر و مصالح ترد یا شکننده تقسیم میشوند.
- مصالح تغییر شکل پذیر نظیر فولاد ساختمانی و بسیاری از آلیاژهای فلزات دارای این ویژه گی هستند که در دمای معمولی به حد تسلیم می رسند. در حین بارگذاری در لحظات اولیه با افزایش بار، طول نمونه به طور خطی نسبت به بار افزایش می یابد. بعد از رسیدن به نقطه تسلیم تغییر طول زیاد در برابر افزایش بسیار کم بار رخ میدهد.



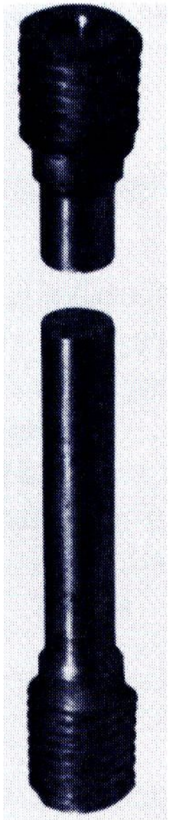
(a) (b)

- مطابق منحنی، تغییر طول نمونه پس از رسیدن به حد تسلیم میتواند تا حدود ۲۰۰ برابر قبل از تسلیم باشد.
- اگر بار به حد معینی برسد تغییر فرم جانبی شروع میشود و اندکی افزایش بار باعث گسیختگی خواهد شد.
- گسیختگی در امتداد یک سطح مخروطی پدید آمده و این سطح با سطح اولیه نمونه زاویه ۴۵ درجه میسازد. بنابراین برش درگسیختگی مصالح تغییر شکل پذیر نقش اول را دارد یعنی در بارگذاری محوری تنشهای برشی در سطوح با زاویه ۴۵ درجه ماکزیمم مقدار را دارند.
- تنشی که تحت آن نمونه شروع به تسلیم میکند، تنش تسلیم σ_Y **(Yield Stress)** نامیده میشود.
- تنشی که تحت آن نمونه گسیخته میشود، تنش گسیحتگی σ_B **(Breaking Stress)** نامیده میشود.

نمودار تنش – کرنش : مواد شکننده

- تنشی که در آن ماکزیمم بار به نمونه وارد شود، تنش نهایی σ_U **(Ultimate Stress)** نامیده میشود.
- در مصالح ترد نظیر چدن، شیشه و سنگ گسیختگی نمونه بدون تغییرات محسوس در تغییر طول پدید می آید.

در نتیجه تفاوتی بین σ_U و σ_B وجود ندارد.در گسیختگی مواد ترد، تنشهای عمودی نقش اصلی را ایفا میکند.



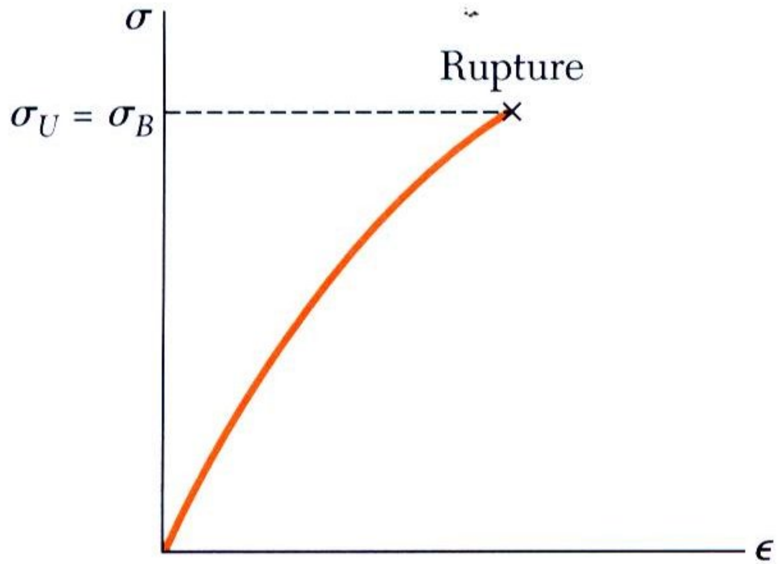
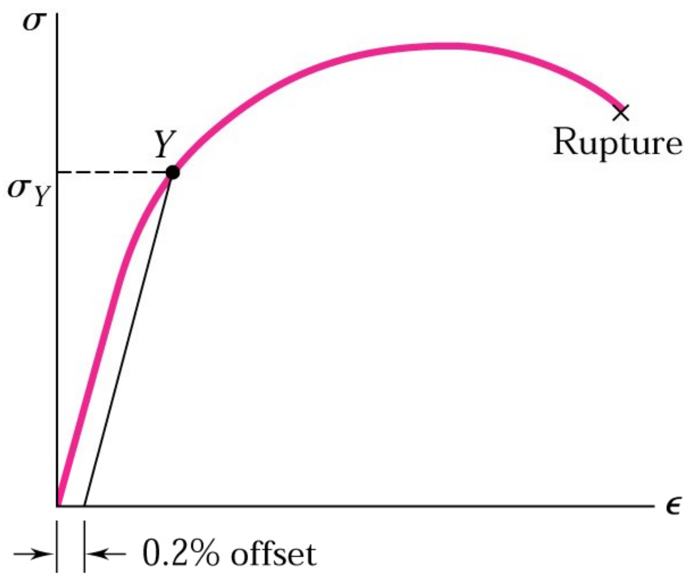


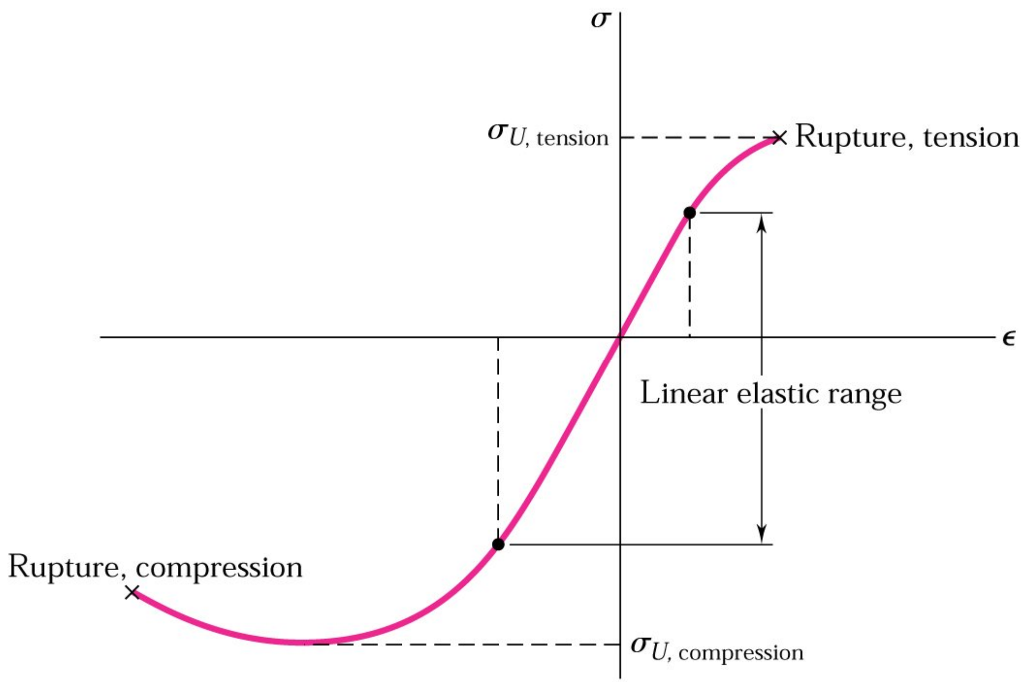
Fig. 2.11 Stress-strain diagram for a typical brittle material.



- در مورد آلومینیم و بسیاری مصالح دیگر، رسیدن به حد تسلیم با بوجود آمدن قسمتی افقی در منحنی تنش-کرنش همراه نیست و تنش بطور غیر خطی تا رسیدن به تنش نهایی مرتبا افزایش میابد.
- سپس کاهش مقطع عرضی در اثر تغییر مکانهای جانبی پدید آمده و در نتیجه گسیختگی اتفاق می افتد.
- جهت تعیین تنش تسلیم باید از روش افست استفاده نمود.
- مثلا افست 0.2% با جدا کردن کرنش 0.002 ε روی محور افقی و رسم خطی موازی قسمت خطی، منحنی را در نقطه Y قطع میکند. حال از این نقطه خطی افقی موازی محور کرنش رسم نموده تا محور تنشها را در σ_Y یا تنش تسلیم قطع کند.
- یک کمیت استاندارد شده برای تشخیص میزان تغییر شکل پذیری، درصد افزایش طول برابر: $100\dfrac{L_B - L_0}{L_0}$

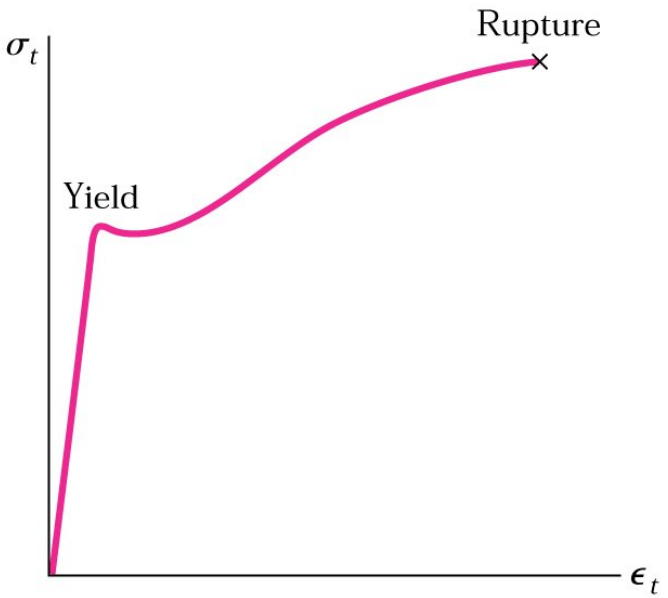
L_0 و L_B بترتیب قبل از آزمایش و در پایان (لحظه گسیختگی) آزمایش میباشند.

کمیتی دیگر برای تخمین میزان تغییر شکل پذیری، درصد کاهش مقطع است که برابر: $100\dfrac{A_0 - A_B}{A_0}$



- در اغلب مصالح ترد، تنش نهایی در فشار خیلی بالاتر از تنش نهایی در کشش است و این پدیده به علت وجود نقاط ضعف نظیر ترک یا شیارهای میکروسکوپی در مصالح است که مقاومت قطعه را در کشش کاهش میدهد ولی تاثیر چندانی بر مقاومت فشاری ندارد.

تنش و کرنش واقعی



$$\varepsilon_t = \sum \Delta\varepsilon = \sum (\frac{\Delta L}{L})$$

$$\varepsilon_t = \int_{L_0}^{L} \frac{dL}{L} = Ln \frac{L}{L_0}$$

- تنش از تقسیم بار بر سطح مقطع اولیه بدست می آید اما با افزایش بار سطح مقطع نمونه کاهش می یابد، در نتیجه تنش محاسبه شده مقدار واقعی نخواهد بود.
- تفاوت میان تنش مهندسی σ با تنش واقعی σ_t در مصالح تغییر شکل پذیر پس از حد تسلیم قابل مشاهده است.
- زمانیکه σ که متناسب با بار است با ایجاد تغییر مکانهای جانبی کاهش می یابد، σ_t که متناسب با بار و نسبت عکس با A دارد، تا لحظه گسیختگی نمونه افزایش می یابد.
- برای تعیین کرنش واقعی، کرنش لحظه ایی را از تقسیم جزء تغییر طول ΔL بر طول متناظر با آن L بدست آورده و از جمع جزء کرنشهای بدست آمده، کرنش واقعی حاصل خواهد شد.

قانون هوک – مدول الاستیسیته (ضریب کششانی یا ارتجاعی)

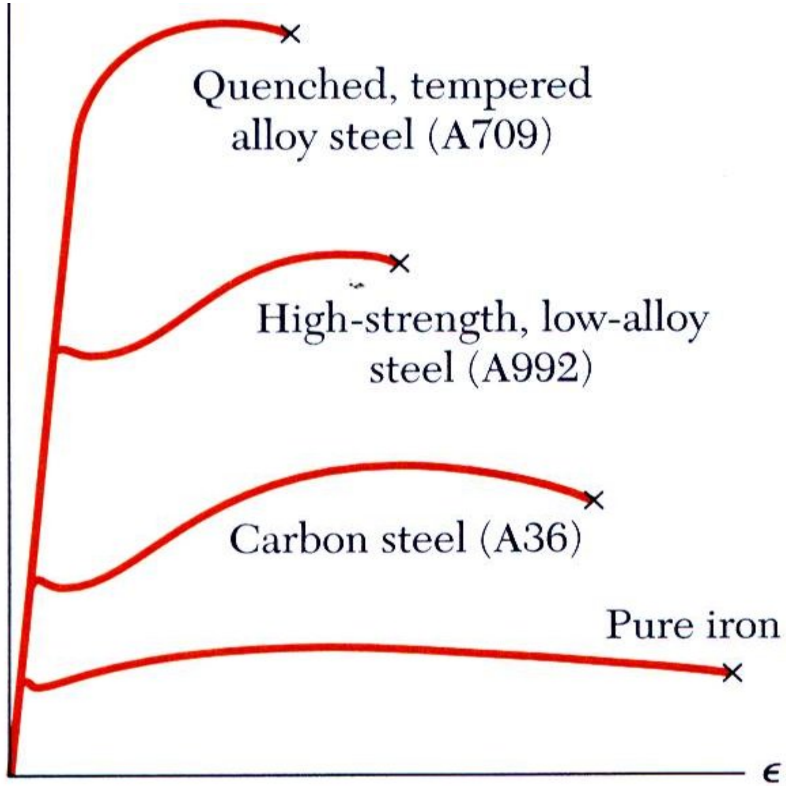


Fig. 2.16 Stress-strain diagrams for iron and different grades of steel.

- قبل رسیدن به نقطه تسلیم رابطه خطی بین تنش و کرنش برقرار است:

$$\sigma = E\varepsilon$$

$$E = \text{Youngs Modulus or Modulus of Elasticity}$$

- بسیاری از ویژگیهای فلزات ساختمانی نظیر مقاومت **(Strength)**، تغییر شکل پذیری و تحمل در برابر خوردگی را میتوان با روشهایی مانند عملیات حرارتی، آلیاژسازی و فرآیندهای ساخت بهبود بخشید. اما سفتی **(Stiffness)** (مدول الاستیسیته) اینگونه نیست.

رفتار الاستیک و پلاستیک مواد

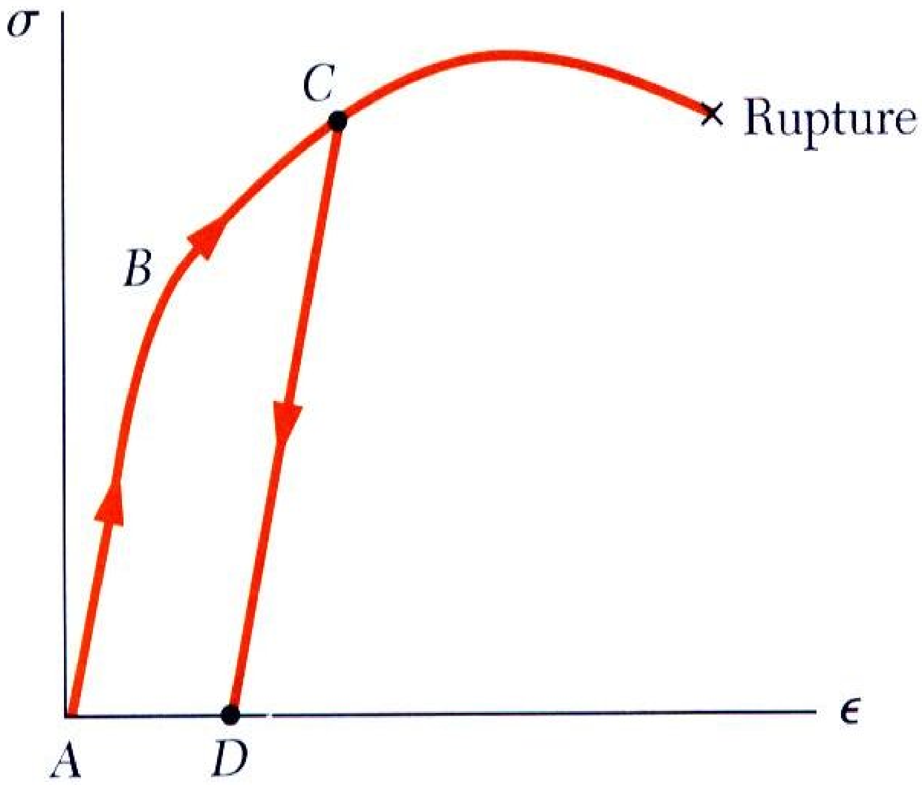


Fig. 2.18

- اگر کرنش با برداشتن بار یا بعبارتی حذف تنش از بین رود گویند ماده رفتار الاستیک دارد.
- بزرگترین تنش در این حالت حد الاستیک نامیده می شود.
- اما وقتی کرنش با برداشتن بار یا حذف تنش از بین نرود یا به صفر بر نگردد ، ماده رفتار پلاستیک دارد.

خستگی

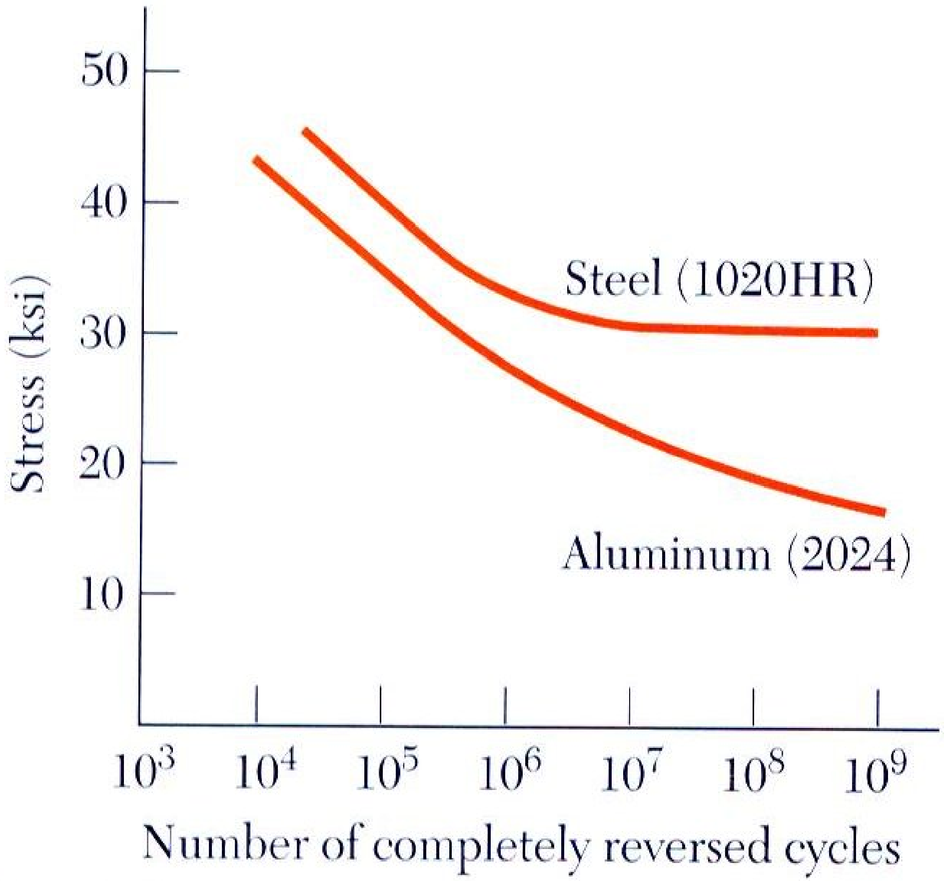


Fig. 2.21

- خصوصیات خستگی روی نمودار S-N نشان داده شده است.
- هر عضو با بارگذاری متناوب ممکن است به علت خستگی در سطوح تحت تنش، قبل از رسیدن به مقاومت نهایی گسیخته شود.
- زمانی که تنش کاهش یابد و به حد دوام برسد، برای هر تعداد تناوب واماندگی خستگی اتفاق نمی افتد.

تغییر طول تحت بارگذاری محوری

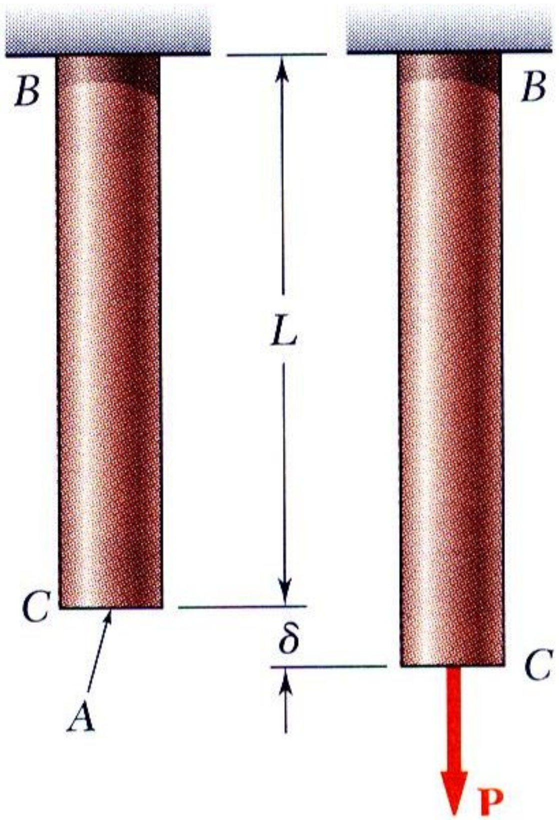


Fig. 2.22

• از قانون هوک داریم:

$$\sigma = E\varepsilon \qquad \varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{P}{AE}$$

• طبق تعریف کرنش :

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L}$$

• با برابر قرار دادن و حل معادلات بالا، تغییر طول برابر:

$$\delta = \frac{PL}{AE}$$

• با تغییراتی در بارگذاری ، مساحت سطح مقطع و یا خصوصیات ماده میتوان معادله بالا را بصورت زیر نوشت:

$$\delta = \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_i}$$

• اگر مقطع میله متغییر باشد:

$$\delta = \int_0^L \frac{P dx}{AE}$$

رابطه فوق برای حالتی که P تابعی از x بوده مانند یک تیر آویزان تحت تاثیر وزن کاربرد دارد.

مسئله ۱-۲

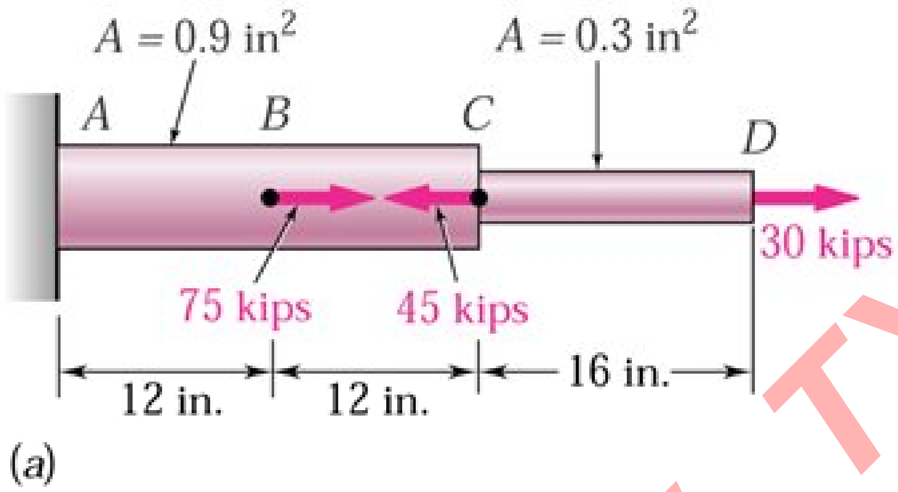
❖ تغییر طول میله فولادی را تحت بارگذاری نشان داده در شکل مشخص کنید.

راه حل :

❑ میله را به اجزایی که نقاط اعمال نیرو را مشخص میکند تقسیم میکنیم.

❑ دیاگرام آزاد روی هر عضو را برای تعیین نیروی داخلی رسم میکنیم.

❑ کل تغییر طولهای جسم را مشخص میکنیم.

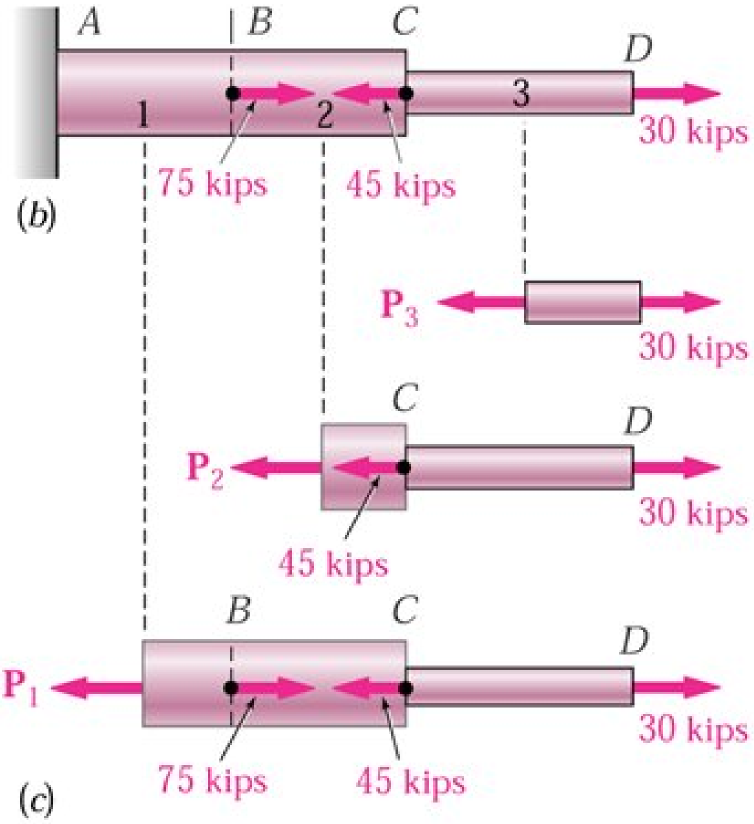


$$E = 300\text{GPa}$$

$$L_{AB} = L_{BC} = 300\,\text{mm} \quad L_{CD} = 400\,\text{mm}$$

$$A_{AB} = A_{BC} = 600\,\text{mm}^2 \quad A_{CD} = 200\,\text{mm}^2$$

$$P_B = 500kN \ , \ P_C = 300kN \ , \ P_D = 200kN$$



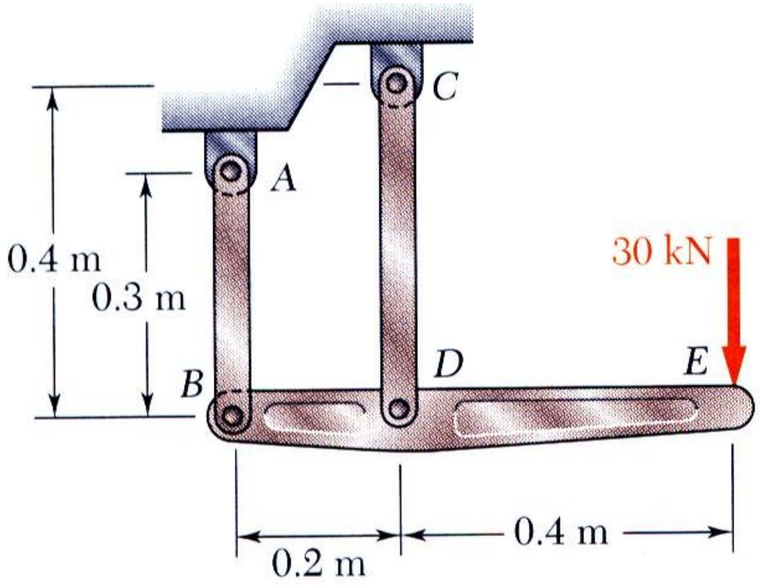
- ❑ میله را به سه قسمت تقسیم میکنیم.
- ❑ با رسم دیاگرام هرآزاد هر عضو نیروهای داخلی را مشخص میکنیم.

$$P_1 = 400 \times 10^3\ N$$
$$P_2 = -100 \times 10^3\ \mathrm{N}$$
$$P_3 = 200 \times 10^3\ \mathrm{N}$$

- ❑ حال تغییر طول کل جسم را بدست می آوریم.

$$\delta = \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_i} = \frac{1}{E}\left(\frac{P_1 L_1}{A_1} + \frac{P_2 L_2}{A_2} + \frac{P_3 L_3}{A_3}\right) = \frac{1}{200\times 10^9}\left[\frac{\left(400\times 10^3\right)(0.3)}{600\times 10^{-6}} + \frac{\left(-100\times 10^3\right)(0.3)}{600\times 10^{-6}} + \frac{\left(200\times 10^3\right)(0.4)}{200\times 10^{-6}}\right]$$
$$= 2.75\times 10^{-3}\,\mathrm{m} = 2.75\,\mathrm{mm}$$

مسئله ۲-۲



❖ میله صلب BDE با دو رابط AB و CD نگهداری می شود

رابط AB از آلومینیوم (E=70GPa) با سطح مقطع

$500mm^2$ و رابط CD از فولاد (E=200GPa)

با سطح مقطع $600mm^2$ است . بازای نیروی 30kN

نشان داده شده، مطلوب است تغییر مکان در نقطه B، D و E

راه حل :

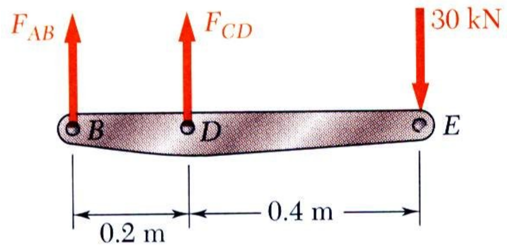
❑ ابتدا نمودار جسم آزاد میله BDE با نیروهای وارد شده توسط رابط های AB و DC را رسم میکنیم.

❑ تغییر طول رابط های ABو DC یا تغییر مکان B و D را مشخص میکنیم.

❑ با توجه به هندسه مسئله برای تغییر مکان درE ، تغییر مکان Bو D مشخص میشود.

راه حل:

جسم آزاد : میله BDE



$$\sum M_B = 0$$

$$-(30\,\text{kN} \times 0.6\,\text{m}) + F_{CD} \times 0.2\,\text{m} = 0$$

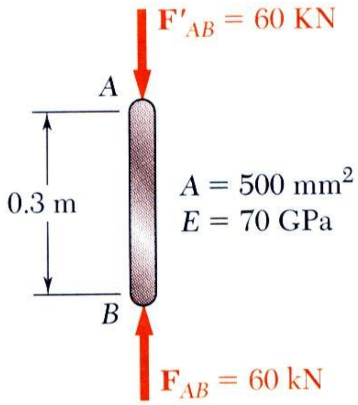
$$F_{CD} = +90\,\text{kN} \quad \textit{tension}$$

$$\sum \mathrm{M_D} = 0$$

$$-(30\,\text{kN} \times 0.4\,\text{m}) - F_{AB} \times 0.2\,\text{m} = 0$$

$$F_{AB} = -60\,\text{kN} \quad \textit{compression}$$

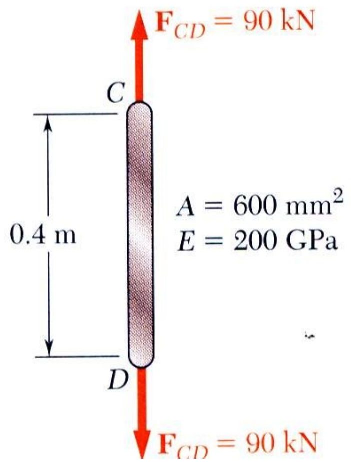
• تغییر مکان B:



$$\delta_B = \frac{PL}{AE} = \frac{(-60 \times 10^3\,\text{N})(0.3\,\text{m})}{(500 \times 10^{-6}\,\text{m}^2)(70 \times 10^9\,\text{Pa})} = -514 \times 10^{-6}\,\text{m}$$

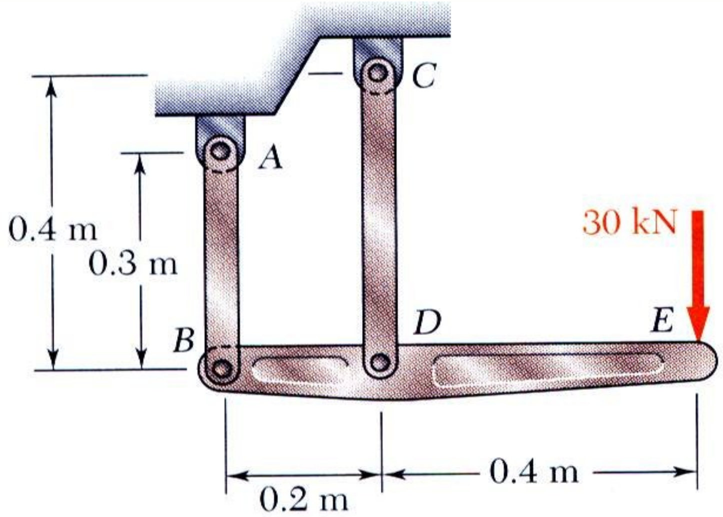
$$\boxed{\delta_B = 0.514\,\text{mm} \uparrow}$$

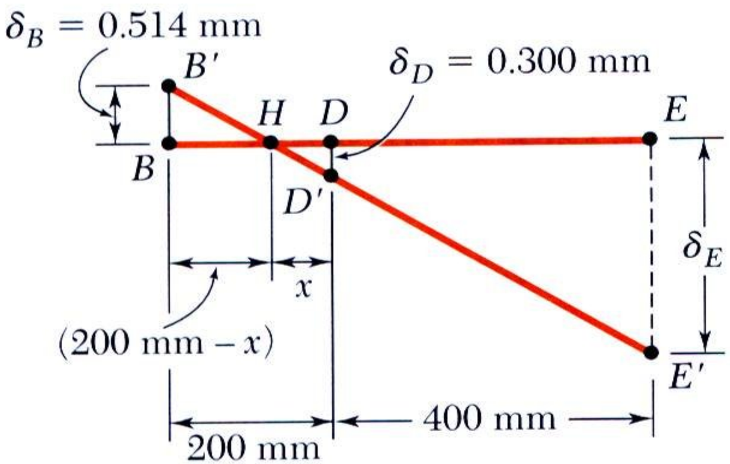
• تغییر مکان D:



$$\delta_D = \frac{PL}{AE} = \frac{(90 \times 10^3\,\text{N})(0.4\,\text{m})}{(600 \times 10^{-6}\,\text{m}^2)(200 \times 10^9\,\text{Pa})} = 300 \times 10^{-6}\,\text{m}$$

$$\boxed{\delta_D = 0.300\,\text{mm} \downarrow}$$





• تغییر مکان D:

$$\frac{BB'}{DD'} = \frac{BH}{HD}$$

$$\frac{0.514\ \mathrm{mm}}{0.300\ \mathrm{mm}} = \frac{(200\ \mathrm{mm}) - x}{x}$$

$$x = 73.7\ \mathrm{mm}$$

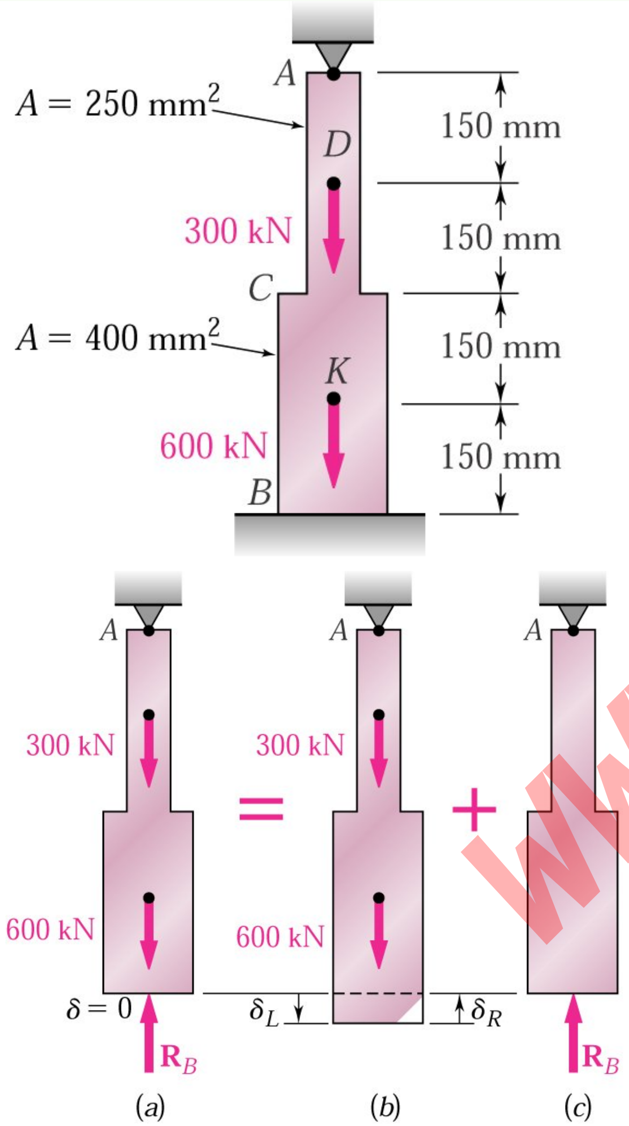
$$\frac{EE'}{DD'} = \frac{HE}{HD}$$

$$\frac{\delta_E}{0.300\ \mathrm{mm}} = \frac{(400 + 73.7)\mathrm{mm}}{73.7\ \mathrm{mm}}$$

$$\delta_E = 1.928\ \mathrm{mm}$$

$$\boxed{\delta_E = 1.928\ \mathrm{mm} \downarrow}$$

مسائل نامعین استاتیکی

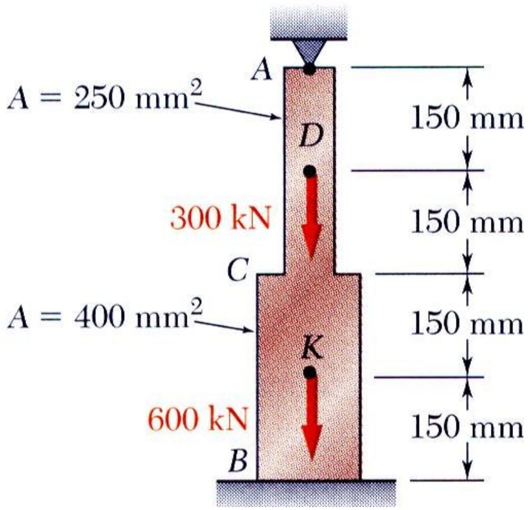


- به مسائلی که برای تعیین عکس العمل ها و نیروهای داخلی سازه روشهای معمول استاتیک به تنهایی کافی نباشد مسائل نامعین استاتیکی گفته می شود.
- هرگاه تعداد تکیه گاههای سازه ای بیشتر از تعداد لازم برای حفظ تعادلش باشد ، سازه از نظر استاتیکی نامعین است.
- عکس العمل های زاید با بارهای مجهول تعویض شده و این بارها باید تغییر مکانی مساوی و مخالف جهت بارهای دیگر ایجاد کنند.
- تغییر مکانهای ناشی از بارها و عکس العملهای زاید به طور جداگانه تعیین شده و سپس به تغییر مکان نیروهای دیگر اضافه میشود.

$$\delta = \delta_L + \delta_R = 0$$

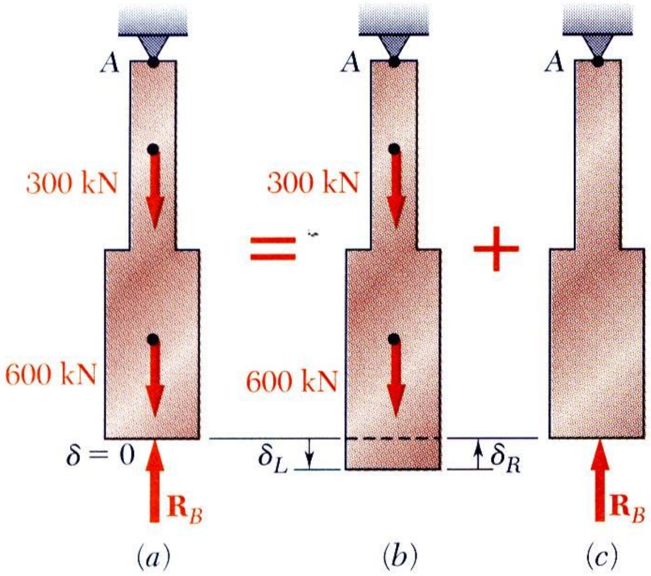
مسئله ۲-۳

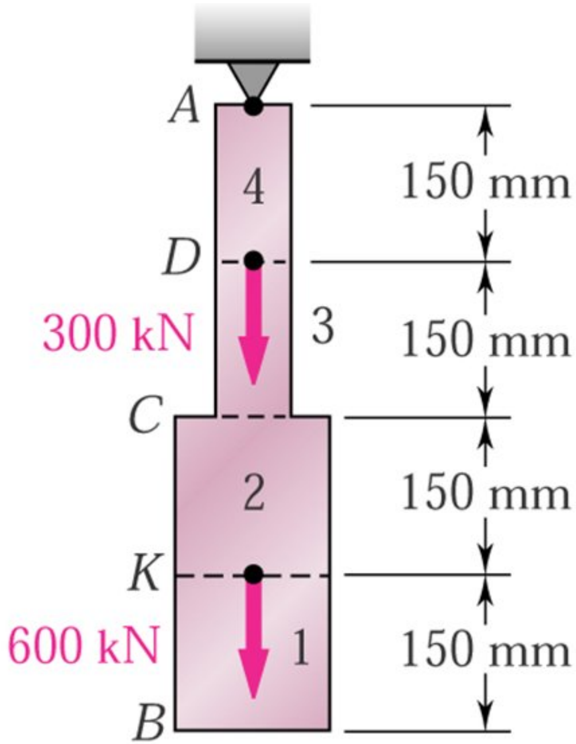
❖ عکس العمل نقاط A و B را در میله فولادی با بارگذاری نشان داده شده بدست آورید. فرض کنید که قبل از بارگذاری، هر دو تکیه گاه کاملا بر میله منطبق باشند.



راه حل :

- ❑ عکس العمل در نقطه B را زائد فرض کرده و میله را از تکیه گاه آزاد میکنیم سپس تغییر مکان در B را با توجه به بارهای اعمال شده حل می کنیم.
- ❑ تغییر مکان در B را با توجه به عکس العمل زائد در آن محاسبه میکنیم.
- ❑ تغییر مکان میله در اثر بارها و عکس العمل زائد باید مساوی باشد . به عبارت دیگر مجموع آنها باید صفر شود.
- ❑ عکس العمل در A را با توجه به بارهای اعمال شده و عکس العمل بدست آمده در B محاسبه میکنیم.





- تغییر مکان نقطه B را با در توجه به بارهای اعمالی و بدون در نظر گرفتن بار زاید بدست می آوریم.

$$P_1 = 0 \quad P_2 = P_3 = 600 \times 10^3\,\mathrm{N} \quad P_4 = 900 \times 10^3\,\mathrm{N}$$

$$A_1 = A_2 = 400 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}^2 \quad A_3 = A_4 = 250 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}^2$$

$$L_1 = L_2 = L_3 = L_4 = 0.150\,\mathrm{m}$$

$$\delta_L = \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_i} = \frac{1.125 \times 10^9}{E}$$

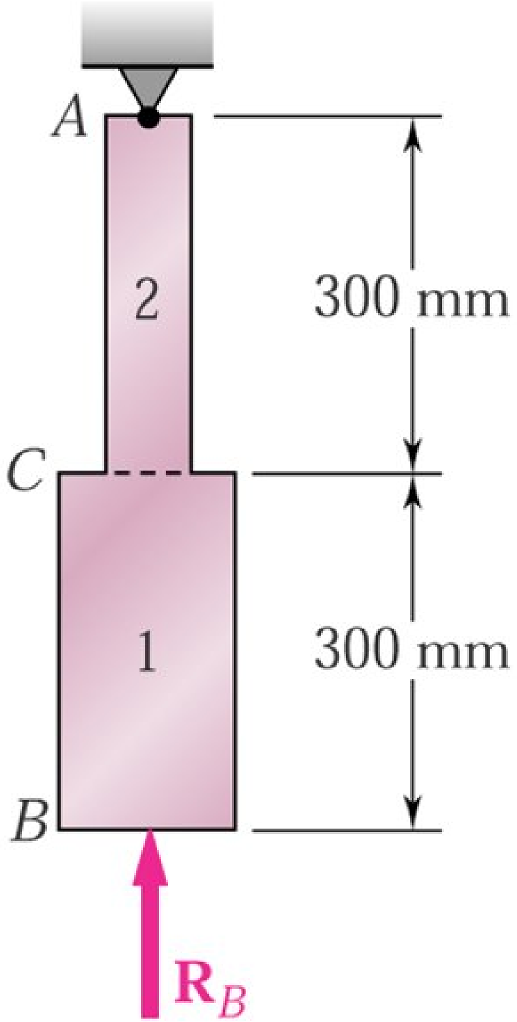
- تغییر مکان در B را با توجه به بار زائد محاسبه میکنیم.

$$P_1 = P_2 = -R_B$$

$$A_1 = 400 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}^2 \quad A_2 = 250 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}^2$$

$$L_1 = L_2 = 0.300\,\mathrm{m}$$

$$\delta_R = \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_i} = -\frac{\left(1.95 \times 10^3\right) R_B}{E}$$



- تغییر مکان در اثر اعمال بارها و نیز عکس العمل زاید بایستی سازگار و یکسان باشد بنابراین:

$$\delta = \delta_L + \delta_R = 0$$

$$\delta = \frac{1.125\times10^9}{E} - \frac{\left(1.95\times10^3\right)R_B}{E} = 0$$

$$R_B = 577\times10^3\,\mathrm{N} = 577\,\mathrm{kN}$$

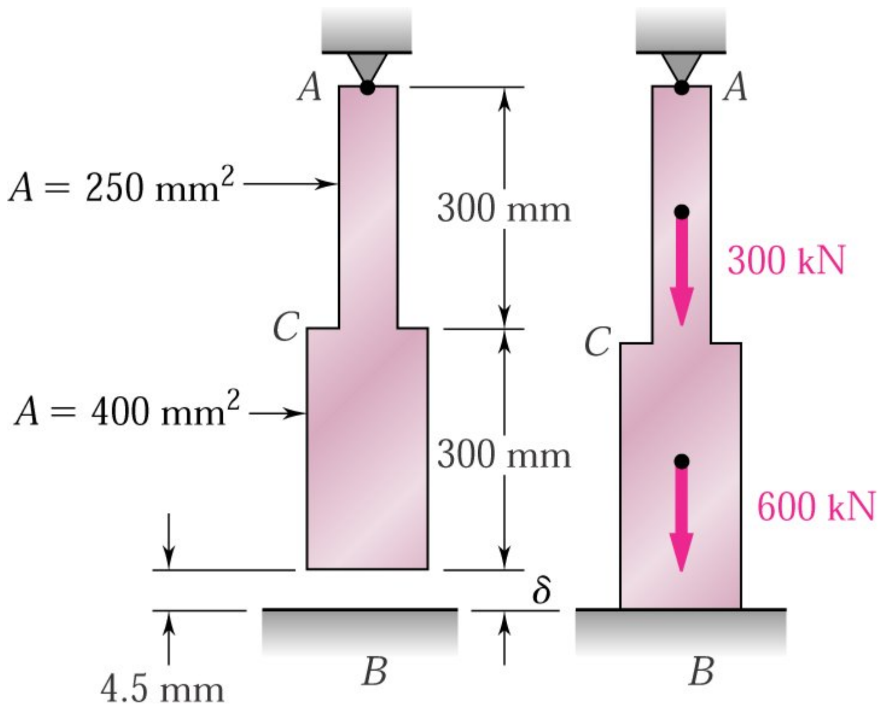
- اکنون عکس العمل در **A** را با توجه به بارها و عکس العمل در **B** بدست می آوریم.

$$\sum F_y = 0 = R_A - 300\,\mathrm{kN} - 600\,\mathrm{kN} + 577\,\mathrm{kN}$$

$$R_A = 323\,\mathrm{kN}$$

$$\boxed{\begin{aligned} R_A &= 323\,\mathrm{kN} \\ R_B &= 577\,\mathrm{kN} \end{aligned}}$$

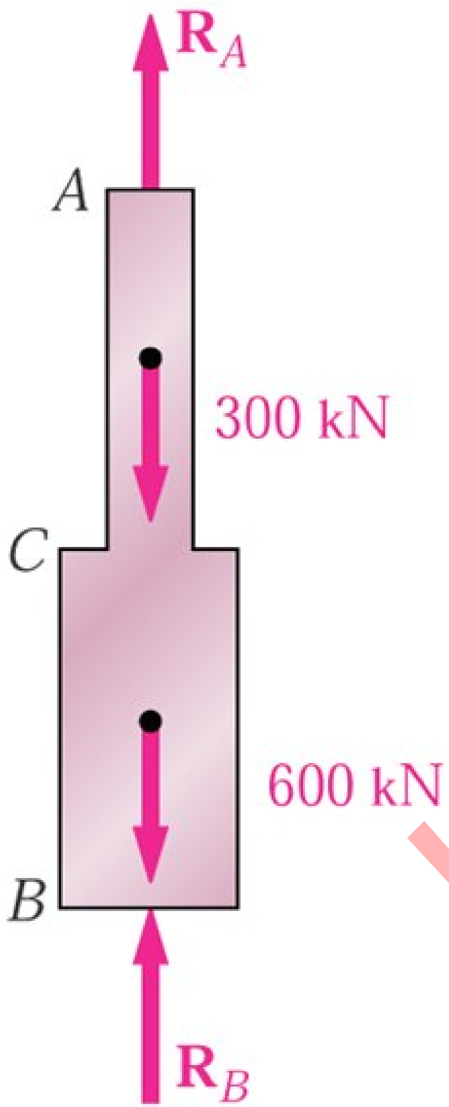
مسئله ۴-۲



❖ مطابق شکل قبل از اعمال هرگونه بار به میله فاصله 4.5mm بین انتهای B و تکیه گاه وجود دارد. با فرض E=200GPa عکس العملهای ایجاد شده در تکیه گاهها را پس از اعمال بار حساب کنید.

راه حل :

❑ روش حل مانند مسئله قبلی میباشد.



راه حل :

- تغییر طول کلی میله صفر نیست بلکه برابر 4.5mm است.

$$\delta = \delta_L + \delta_R = 45 \times 10^{-3}\, m$$

$$\delta_L = \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_i} = \frac{1.125 \times 10^9}{E}$$

$$\delta_R = \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_i} = -\frac{\left(1.95 \times 10^3\right) R_B}{E}$$

$$\Rightarrow \frac{1.125 \times 10^9}{E} - \frac{\left(1.95 \times 10^3\right) R_B}{E} = 4.5 \times 10^{-3}$$

از حل رابطه بالا داریم:

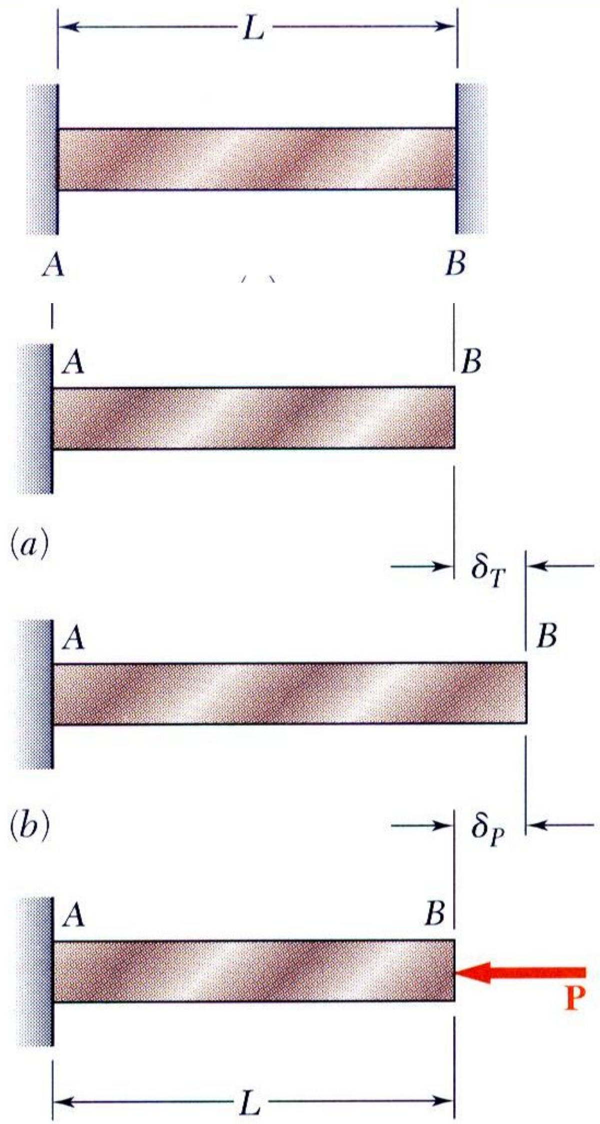
$$R_B = 115.4 \times 10^3\, N = 115.4 kN$$

عکس العمل در A با در نظر گرفتن دیاگرام آزاد بدست می آید:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_B - 300 kN - 600 kN + R_B = 0$$

$$R_A = 900 kN - R_B = 900 kN - 115.4 kN = 785 kN$$

تنشهای حرارتی



- تغییر درجه حرارت باعث تغییر طول یا کرنش حرارتی میشود. هیچ تنش در نتیجه کرنش حرارتی بوجود نمی آید مگر اینکه از افزایش طول توسط تکیه گاهها جلوگیری شود.

- تکیه گاه اضافی را زاید در نظر گرفته و بنابر اصل جمع آثار داریم:

$$\delta_T = \alpha(\Delta T)L \qquad \delta_P = \frac{PL}{AE}$$

$$\alpha = \text{Thermal Expansion Coefficient}$$

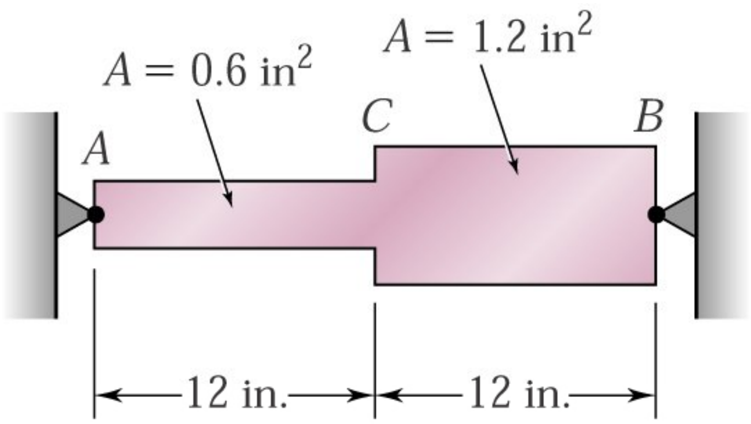
- تغییر طول نهایی میله باید صفر باشد به عبارتی تغییر شکل حرارتی با تغییر شکل حاصل از تکیه گاه باید سازگار باشد.

$$\delta = \delta_T + \delta_P = 0 \Rightarrow \alpha(\Delta T)L + \frac{PL}{AE} = 0$$

$$P = -AE\alpha(\Delta T) \Rightarrow \sigma = \frac{P}{A} = -E\alpha(\Delta T)$$

مسئله ۵-۲

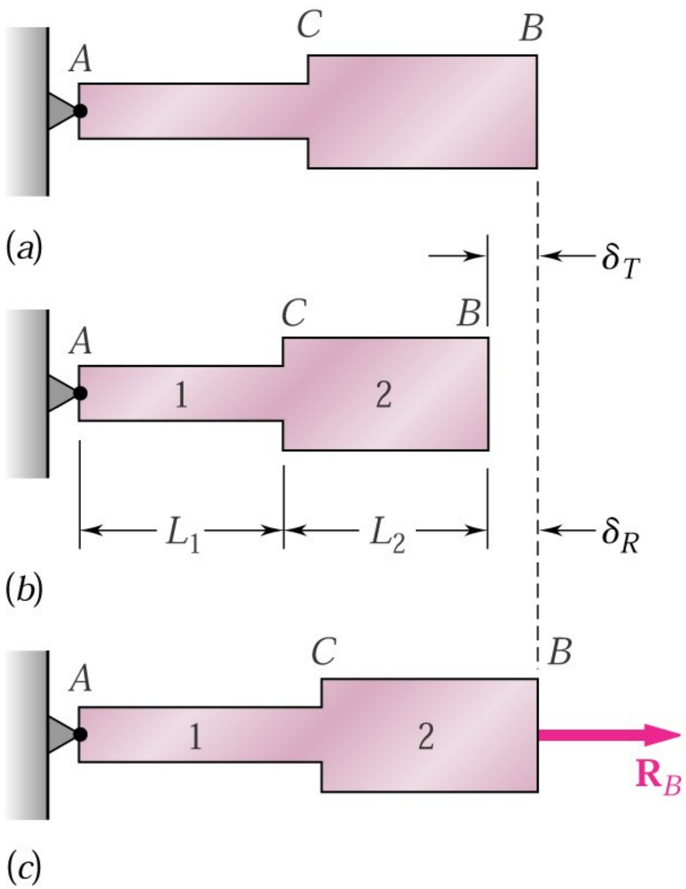
❖ تنشهای ایجاد شده در قسمتهای AC , CB میله فولادی را در صورتی که دما به -50°C کاهش یابد بدست آورید. در دمای +25°C میله براحتی بین دو تکیه گاه قرار دارد.



$$E = 200\,\mathrm{GPa}$$
$$\alpha = 12\times10^{-6}/^{\circ}C$$
$$L_{AC} = L_{CB} = 300\,\mathrm{mm}$$
$$A_{AC} = 400\,\mathrm{mm}^2$$
$$A_{CB} = 800\,\mathrm{mm}^2$$

راه حل :

- ❑ عکس العمل تکیه گاهها را تعیین میکنیم. مسئله نامعین استاتیکی است.
- ❑ انتهای B میله را از تکیه گاهش جدا میکنیم و به این صورت اجازه تغییر طول در اثر تغییر دما را میدهیم.
- ❑ نیروی نامعلوم R_B را به انتهای B وارد میکنیم.



$$\Delta T = (-50^\circ C) - (25^\circ C) = -75^\circ C$$

$$\delta_T = \alpha(\Delta T)L = (12\times10^{-6}/^\circ C)(-75^\circ C)(0.6m)$$
$$= -540\times10^{-6}\,m$$

$$\delta_B = \frac{P_1L_1}{A_1E} + \frac{P_2L_2}{A_2E} \qquad P_1 = P_2 = R_B$$

$$= \frac{R_B}{200\times10^6\,Pa}\left(\frac{0.3m}{400\times10^{-6}\,m^2} + \frac{0.3m}{800\times10^{-6}\,m^2}\right)$$

$$= \left(5.625\times10^{-9}\,{}^{m}\!/_{N}\right)R_B$$

$$\delta = \delta_T + \delta_R = 0$$

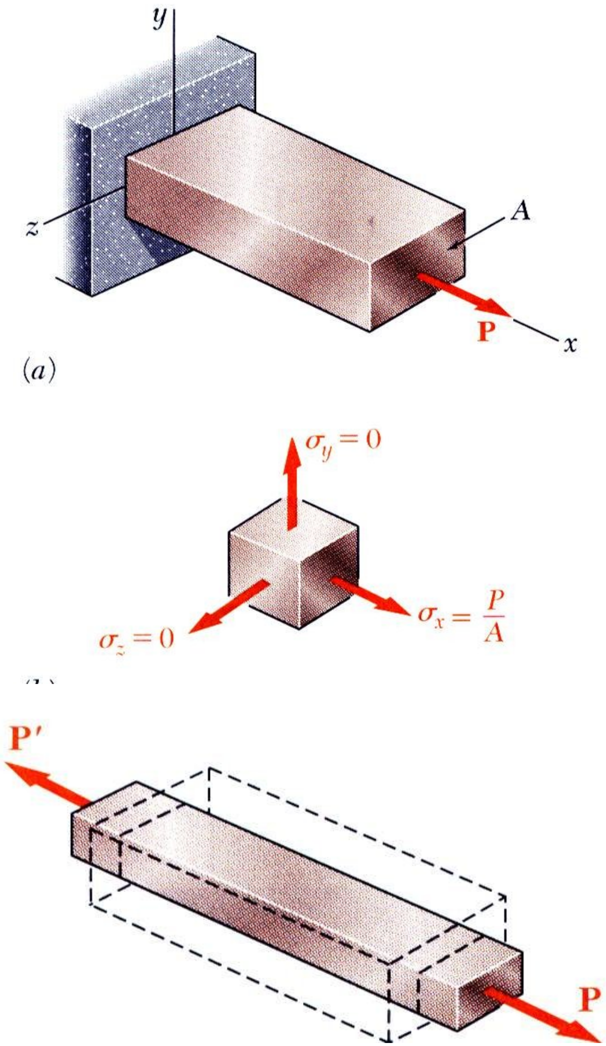
$$= -540\times10^{-6}\,m + \left(5.625\times10^{-9}\,{}^{m}\!/_{N}\right)R_B = 0$$

$$\Rightarrow R_B = 96\times10^3\,N = 96kN$$

$$\sigma_1 = \frac{P_1}{A_1} = \frac{96\times10^3\,N}{400\times10^{-6}\,m^2} = 240MPa$$

$$\sigma_2 = \frac{P_2}{A_2} = \frac{96\times10^3\,N}{800\times10^{-6}\,m^2} = 120MPa$$

نسبت پواسون (Poisson’s Ratio)



- اگر میله باریکی تحت بارگذاری محوری قرارگیرد:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad , \sigma_y = \sigma_z = 0$$

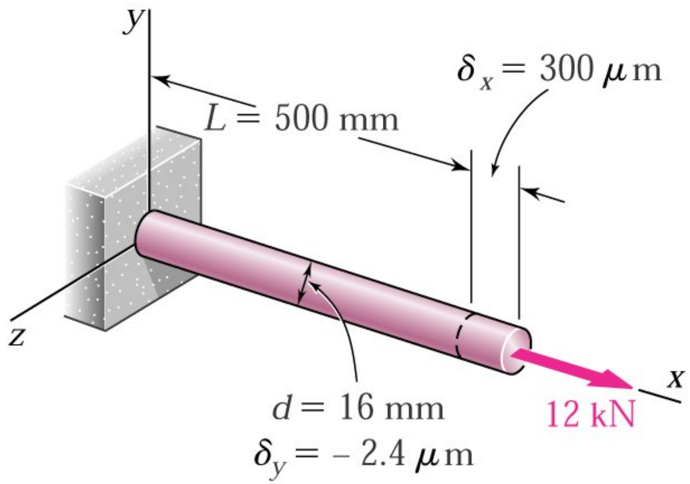
- با فرض ایزوتوپیک بودن ماده، (خواص در هر امتداد یکسان) کشیدگی و انبساط در امتداد X همراه با کوچک شدن و انقباض در جهات دیگر است یعنی:

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z \neq 0$$

- نسبت پواسون با حرف یونانی (نوو) بصورت زیر تعریف میشود:

$$\nu = \left| \frac{\text{lateral strain}}{\text{axial strain}} \right| = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x}$$

مسئله ۶-۲



❖ طول میله همسان و همگن در اثر اعمال نیروی **12kN** به اندازه **300µm** افزوده شده و **2.4µm** از قطر آن کاسته میشود. مطلوب است تعیین ضریب ارتجاعی و نیز ضریب پواسون مصالح بکار رفته شده در این میله.

راه حل :

$$A = \pi r^2 = \pi(8\times10^{-3}m)^2 = 201\times10^{-6}m^2$$

$$\sigma_x = \frac{P}{A} = \frac{12\times10^3 N}{201\times10^{-6}m^2} = 59.7\,MPa$$

$$\varepsilon_x = \frac{\delta_x}{L} = \frac{300\,\mu m}{500\,mm} = 600\times10^{-6}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\delta_y}{L} = \frac{-2.4\,\mu m}{16\,mm} = -150\times10^{-6}$$

$$E = \frac{\sigma_x}{\varepsilon_x} = \frac{59.7\,MPa}{600\times10^{-6}} = 99.5GPa$$

$$\nu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = -\frac{-150\times10^{-6}}{600\times10^{-6}} = 0.25$$

بارگذاری چند محوری - تعمیم قانون هوک

- برای المانی با اضلاع مساوی و بارگذاری چند محوری (که هر ضلع از مقدار واحد به مقدار ε+1 افزایش می یابد و مکعب به منشور مستطیلی تبدیل میشود)، مولفه های کرنش از مولفه های تنش به روش جمع آثار و به شرط برقراری دو ویژگی زیر نتیجه میشوند.

۱- کرنش رابطه خطی با تنش دارد.

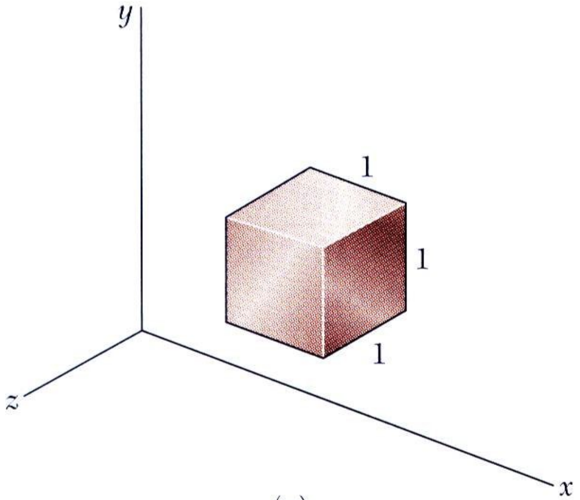
۲- تغییر شکل ها کوچک هستند.

- با این شرایط :

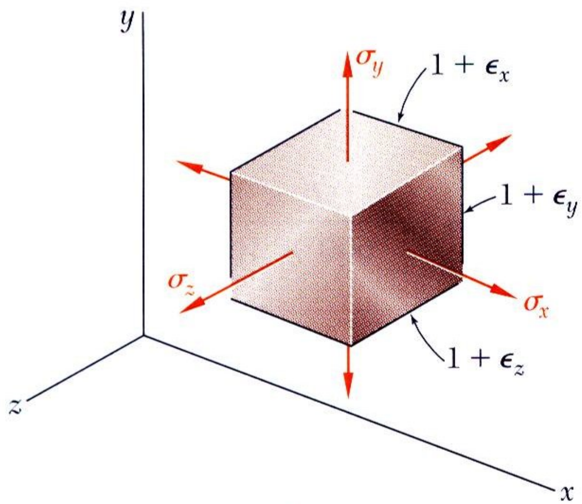
$$\varepsilon_x = +\frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E}$$

$$\varepsilon_y = -\frac{\nu\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E}$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}$$



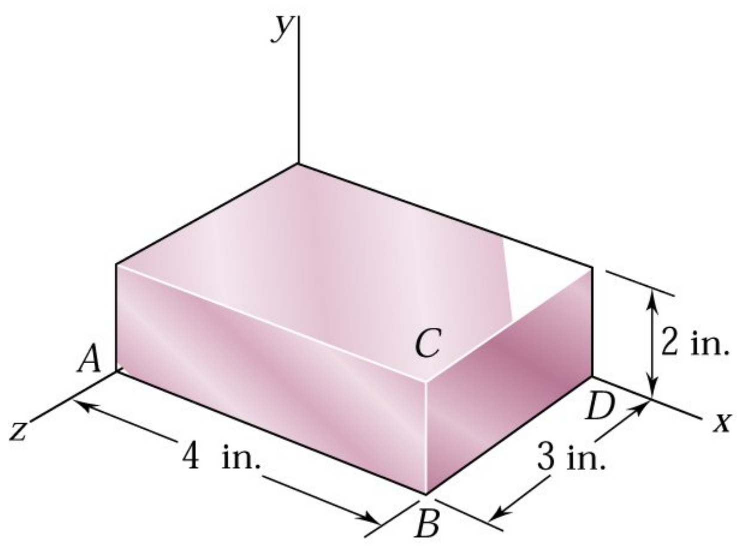
(a)



(b)

مسئله ۷-۲

❖ مکعب مستطیل فولادی تحت فشار یکنواخت در تمامی وجوه قرار گرفته است. چنانچه تغییر طول ضلع AB برابر -24µm باشد. مطلوب است تغییر طول پدید آمده در دو ضلع دیگر و نیز فشار اعمال شده بر وجوه مکعب.



$E = 200\text{GPa} \quad \& \quad \nu = 0.29$

$L_{AB} = 80\,\text{mm}$

$L_{DB} = 60\,\text{mm}$

$L_{CB} = 40\,\text{mm}$

راه حل :

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -P \Rightarrow$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\frac{P}{E}(1-2\nu)$$

$$\varepsilon_x = \frac{\delta_x}{AB} = \frac{-24\,\mu m}{80\,mm} = -300\,\mu$$

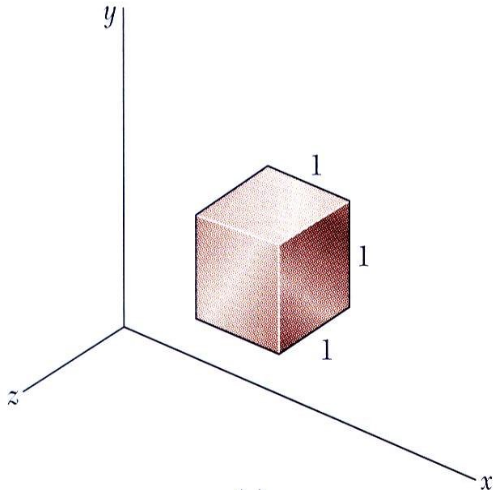
$$\Rightarrow \varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = -300\,\mu$$

$$\delta_y = \varepsilon_y(BC) = (-300\,\mu)(40\,mm) = -12\,\mu m$$

$$\delta_z = \varepsilon_z(BD) = (-300\,\mu)(60\,mm) = -18\,\mu m$$

$$P = -\frac{E\varepsilon_x}{1-2\nu} = -\frac{(200\,GPa)(-300\,\mu)}{1-0.58} = 142.9\,MPa$$

انبساط حجمی – ضریب ارتجاعی حجمی



(a)

- در حالت بدون تنش یک مکعب به ضلع واحد و پس از اعمال تنشها به یک منشور مستطیلی تغییر شکل خواهد داد و حجم منشور برابر:

$$V = (1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y)(1+\varepsilon_z)$$

حاصلضرب εها بسیار کوچک است بنابراین

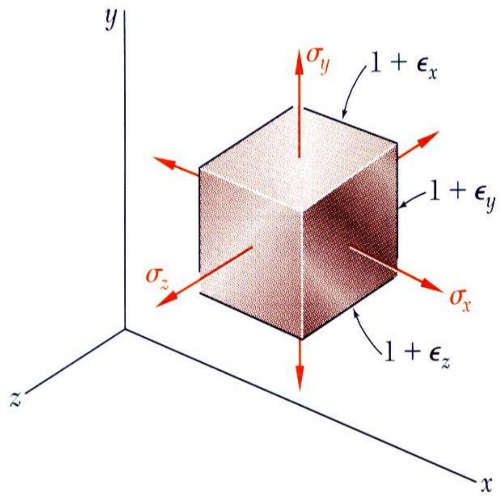
$$= 1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon$$

$$e = 1 - [(1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y)(1+\varepsilon_z)] = 1 - [1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z]$$

$$= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

$$= \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

$= \textbf{dilatation (change in volume per unit volume)}$ انبساط حجمی



(b)

- جسمی است که تحت فشار هیدرو ستاتیکی یکنواخت قرار دارد:

$$e = -\frac{3(1-2\nu)}{E}p = -\frac{p}{k}$$

$$k = \frac{E}{3(1-2\nu)} = \textbf{bulk modulus} =$$ (ضریب ارتجاعی حجمی)

- در فشار هیدرواستاتیکی جسم دچار کاهش حجم میشود و انبساط حجمی باید منفی باشد، بنابراین :

$$0 < \nu < \frac{1}{2}$$

کرنش برشی

- المان مکعبی تحت تاثیر تنش برشی به لوزی تغییر شکل میدهد. بنابراین کرنش برشی بصورت زاویه ایی اندازه گیری میشود در اینصورت تنش تابعی از کرنش است.

$$\tau_{xy} = f(\gamma_{xy})$$

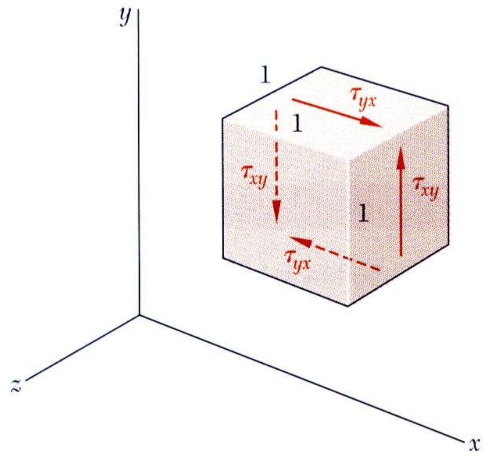


Fig. 2.46

- روابط تنش وکرنش برشی مشابه تنش و کرنش عمودی است. بجز مقادیر بدست آمده برای استحکام مربوط به هر ماده معین در حالت برش، که در حدود نصف این مقادیر در حالت کشش است. برای مقادیر کوچک کرنش داریم:

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \qquad \tau_{yz} = G\gamma_{yz} \qquad \tau_{zx} = G\gamma_{zx}$$

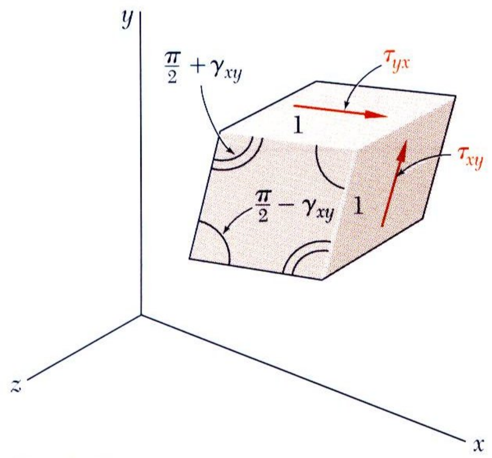


Fig. 2.47

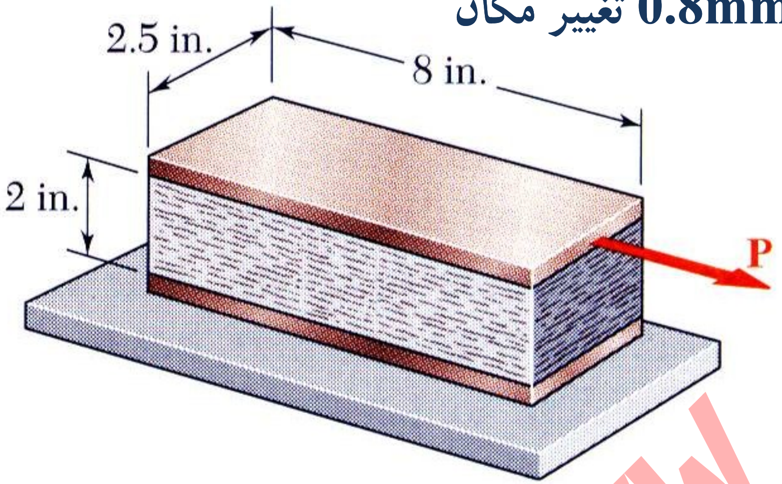
- ثابت G را ضریب ارتجاعی پیچشی یا مدول برشی می گویند .

مسئله ۸-۲

❖ یک بلوک مکعب مستطیلی از ماده ای با G= 600MPa به دو صفحه افقی متصل شده است. صفحه پایینی ثابت، درحالی که صفحه بالایی تحت نیروی افقی P قرار دارد. با فرض اینکه صفحه بالایی با اعمال این نیرو با اندازه 0.8mm تغییر مکان دهد مشخص کنید:

الف) کرنش برشی متوسط در ماده

ب) نیروی P وارده به صفحه



$$L_{AB} = 8in = 160mm$$
$$L_{DB} = 2.5in = 50\,mm$$
$$L_{CB} = 2in = 40\,mm$$

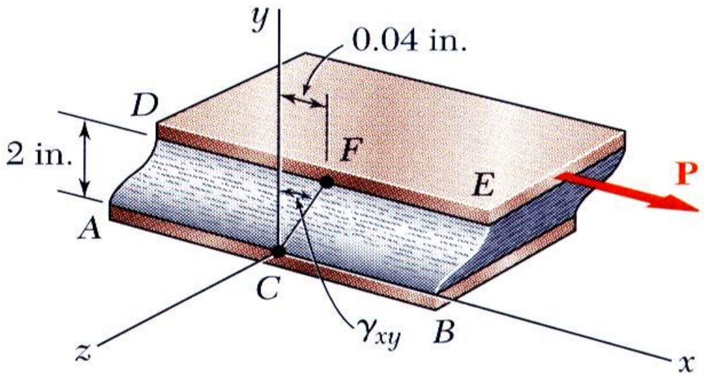
راه حل :

❑ متوسط تغییر شکل زاویه ای یا کرنش برشی بلوک را بدست می آوریم .

❑ از قانون هوک مربوط به تنش و کرنش برشی، تنش برشی را محاسبه میکنیم.

❑ برای پیدا کردن نیروی P از تعریف تنش برشی استفاده میکنیم.

❑ متوسط تغییر شکل زاویه یا کرنش برشی بلوک برابر:



$$\gamma_{xy} \approx \tan \gamma_{xy} = \frac{0.8\text{mm}}{40\text{mm}} \qquad \gamma_{xy} = 0.020 \text{ rad}$$

❑ با استفاده از قانون هوک تنش برشی داریم:

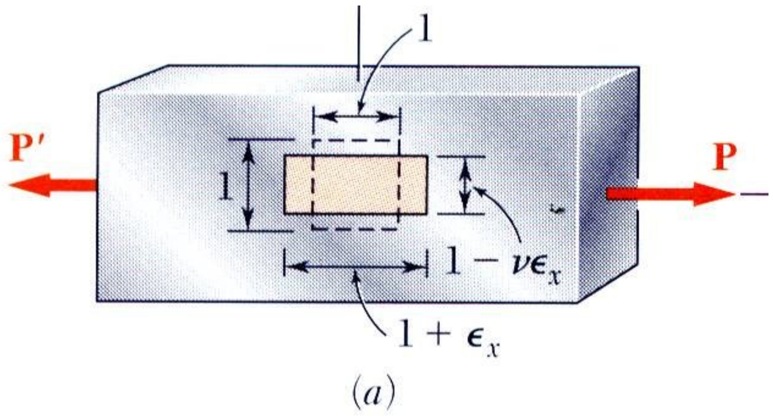
$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = (600\,MPa)(0.020) = 12\text{MPa}$$

❑ برای یافتن نیروی P از تعریف تنش برشی استفاده میکنیم.

$$P = \tau_{xy} A = (12 \times 10^{6}\, Pa)(0.160\ m \times 0.050\ m) = 96 \times 10^{3}\ N$$

$$\boxed{P = 96\text{kN}}$$

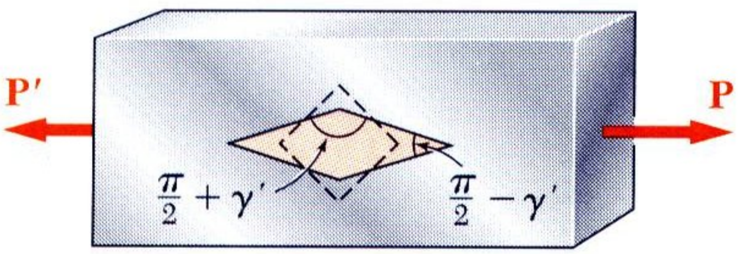
رابطه بین E ,ν, G



(a)

- بار محوری در جهت x در یک میله نازک باعث افزایش طول در آن جهت و کاهش در جهت y و z میگردد. برای کرنش محوری ε_x کرنشهای جانبی برابر: $\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x$

- در ابتدا، المان مکعبی جهتدار چنانچه در شکل بالایی نشان داده شده به یک قائم الزاویه متوازی السطوح تغییر شکل خواهد یافت، بارگذاری یک کرنش عمودی تولید میکند .

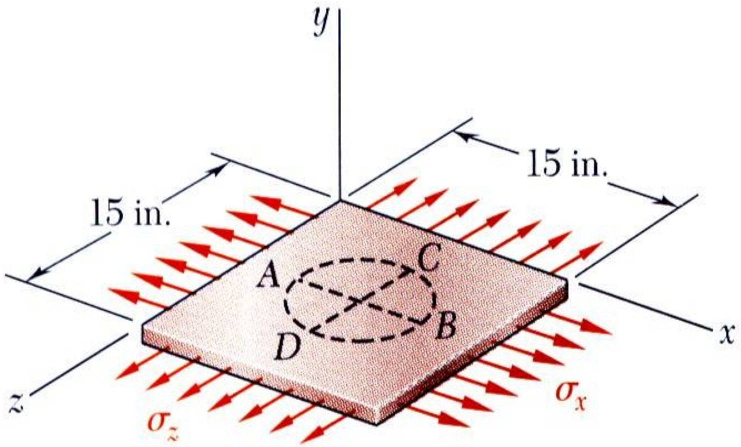


- المان مکعبی جهتدار چنانچه در شکل پایینی نشان داده شده به یک لوزی تغییر شکل خواهد یافت . همچنین بارگذاری محوری منجر به کرنش برشی میشود.

- مولفه عمودی و برشی کرنش منجر به رابطه روبرو میشوند: $$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

مسئله ۹-۲

❖ دایره ای به قطر $d = 9in.$ روی ورق آلومینیوم بدون تنش به ضخامت $t = 3/4in.$ حک شده است. نیروهایی که بر صفحه ورق وارد می شوند باعث ایجاد تنش های عمودی σ_x 20 ksi و $\sigma_z = 20ksi$ میشوند. به ازای $E = 10 \times 10^6$ psi و $V = 1/3$، مطلوب است:



الف) تغییر طول قطر AB

ب) تغییر طول قطر CD

ج) ضخامت صفحه

د) حجم ورق

راه حل :

❑ قانون هوک را برای بررسی سه مولفه کرنش عمودی بکار می بریم.

$$\varepsilon_x = +\frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E}$$

$$= \frac{1}{10\times10^6\,\text{psi}}\left[(12\,\text{ksi}) - 0 - \frac{1}{3}(20\,\text{ksi})\right]$$

$$= +0.533\times10^{-3}\,\text{in./in.}$$

$$\varepsilon_y = -\frac{\nu\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E}$$

$$= -1.067\times10^{-3}\,\text{in./in.}$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}$$

$$= +1.600\times10^{-3}\,\text{in./in.}$$

❑ تغییر شکل مولفه ها را محاسبه میکنیم:

$$\delta_{B/A} = \varepsilon_x d = (+0.533\times10^{-3}\,\text{in./in.})(9\,\text{in.})$$

$$\boxed{\delta_{B/A} = +4.8\times10^{-3}\,\text{in.}}$$

$$\delta_{C/D} = \varepsilon_z d = (+1.600\times10^{-3}\,\text{in./in.})(9\,\text{in.})$$

$$\boxed{\delta_{C/D} = +14.4\times10^{-3}\,\text{in.}}$$

$$\delta_t = \varepsilon_y t = (-1.067\times10^{-3}\,\text{in./in.})(0.75\,\text{in.})$$

$$\boxed{\delta_t = -0.800\times10^{-3}\,\text{in.}}$$

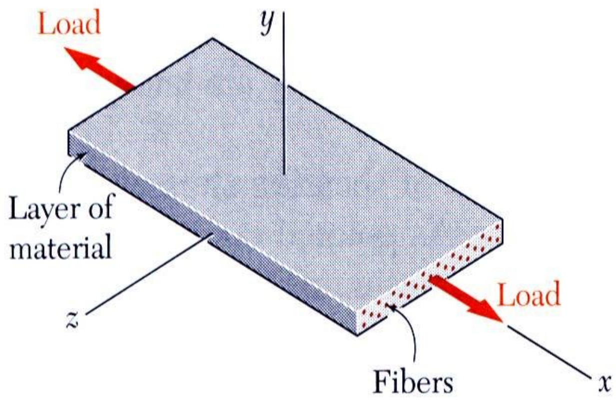
❑ تغییر در حجم :

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 1.067\times10^{-3}\,\text{in}^3/\text{in}^3$$

$$\Delta V = eV = 1.067\times10^{-3}(15\times15\times0.75)\text{in}^3$$

$$\boxed{\Delta V = +0.187\,\text{in}^3}$$

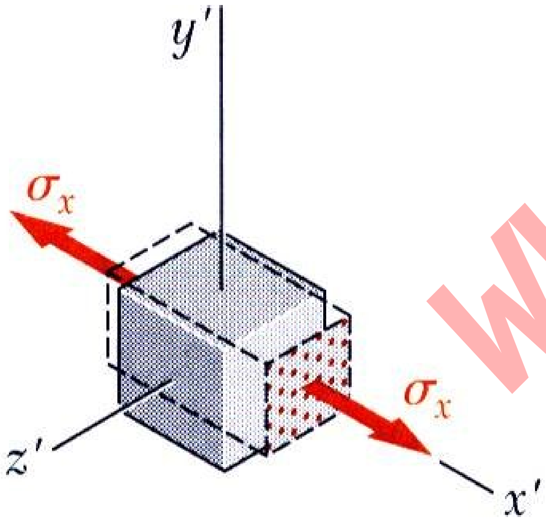
مواد مرکب



- مواد مرکب تقویت شده با فیبر، از لایه نازک فیبر گرافیت، شیشه یا پلیمرهای ادغام شده در مایع رزین ساخته می شوند.

- کرنشها و تنشهای عمودی براساس قانون هوک رابطه مستقیم با مدول الاسیسیته دارند:

$$E_x = \frac{\sigma_x}{\varepsilon_x} \quad ,E_y = \frac{\sigma_y}{\varepsilon_y} \quad ,E_z = \frac{\sigma_z}{\varepsilon_z}$$

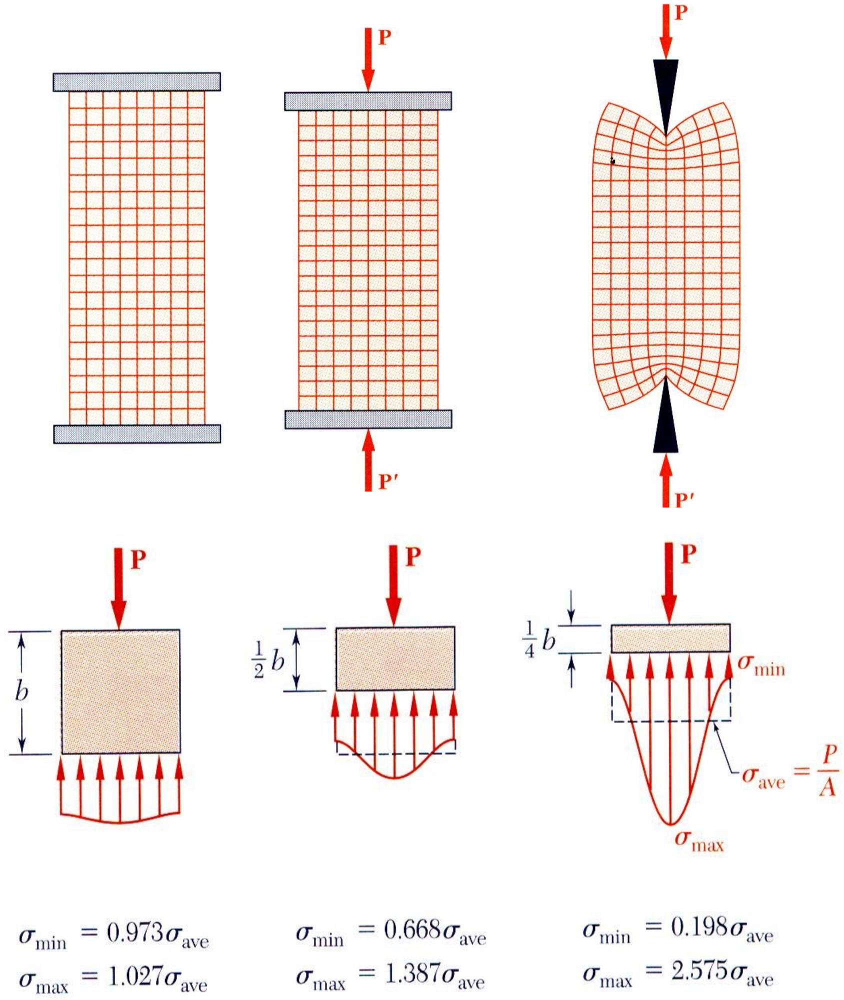


- انقباضهای جانبی رابطه مستقیم با ضریب پواسون دارند مانند:

$$\nu_{xy} = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} \qquad \nu_{xz} = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x}$$

- موادی که وابستگی خواص مکانیکی جهتدار دارند غیرایزوتروپیک هستند .

اصل سنت - ونانت



- بارهای منتقله به صفحات صلب بالایی و پایینی منجر به توزیع یکنواخت تنش و کرنش در عضو میشوند.
- بارهای متمرکز منجر به تنشهای بزرگ در مجاورت نقطه اعمال بار میشوند.
- توزیع تنش و کرنش در فاصله نسبتا کوتاه از نقطه اعمال بار یکنواخت است.
- اصل سنت – ونانت:

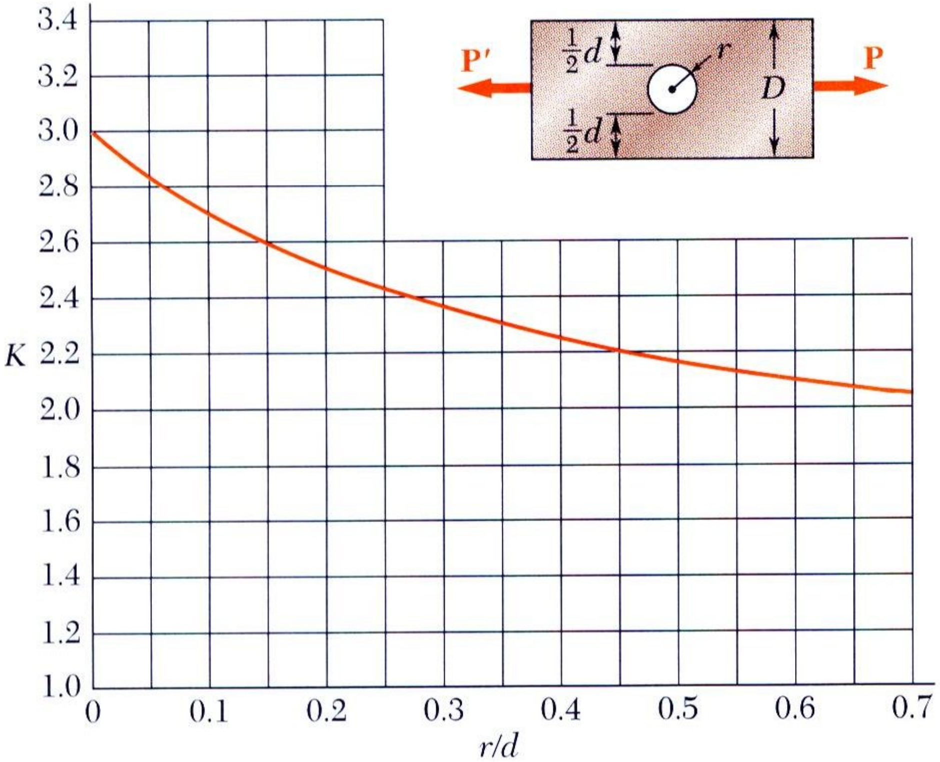
توزیع تنش را بجز بلافاصله در مجاورت نقطه اعمال بار، میتوان مستقل از نحوه بارگذاری فرض کرد.

تمرکز تنش

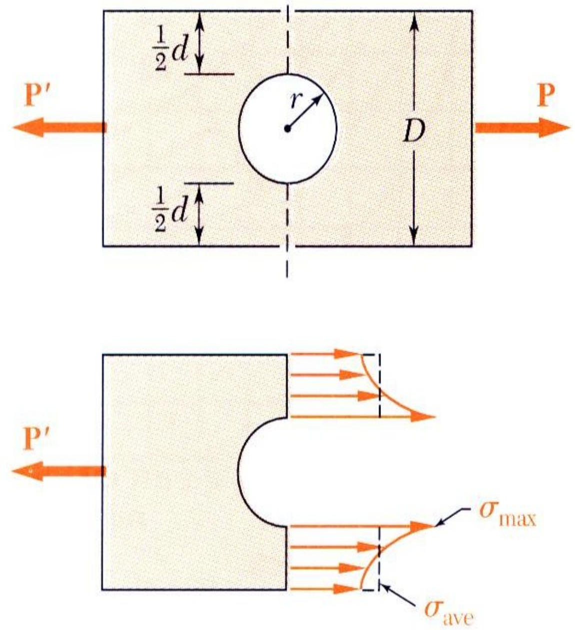
• چنانچه در عضوی نوعی ناپیوستگی از قبیل وجود سوراخ یا تغییر ناگهانی مقطع وجود داشته باشد، تنش در نقاطی بطور ناگهانی و محدود افزایش می یابد.

• توزیع تنش نزدیک سوراخ گرد در میله مسطح تحت بارگذاری محوری:

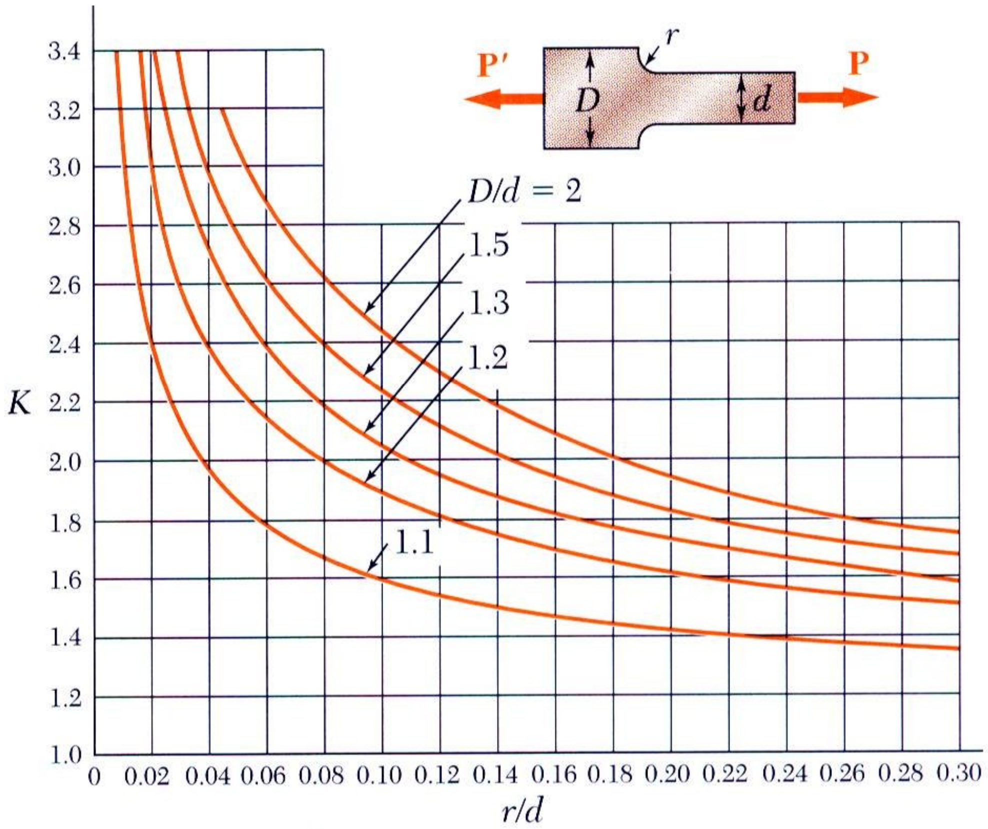
$$K = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\text{ave}}}$$



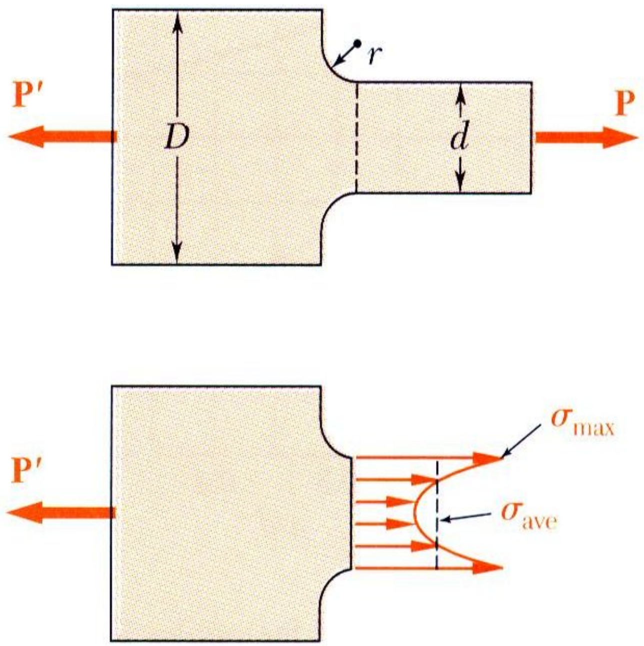
(a) Flat bars with holes



• توزیع تنش در سطح تغییر یافته مقطع در میله مسطح (مغزی یا ماهیچه) تحت بارگذاری محوری:

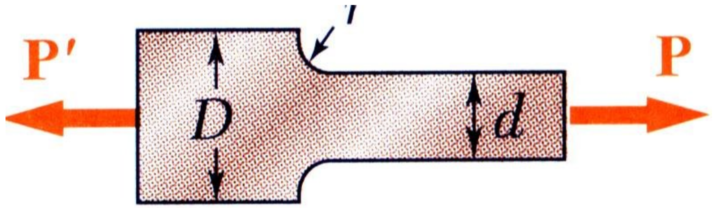


(*b*) Flat bars with fillets



مسئله ۱۰-۲

❖ مطلوب است حداکثر بار محوری P که یک میله فولادی مسطح متشکل از دو قسمت می تواند تحمل کند. ضخامت هر دو قسمت 10mm و عرض آنها به ترتیب d=40mm و D=60mm است. این دو قسمت توسط ماهیچه ای به شعاع $r = 8mm$ بهم متصل شده اند . فرض میشود $\sigma_{all} = 165 MPa$

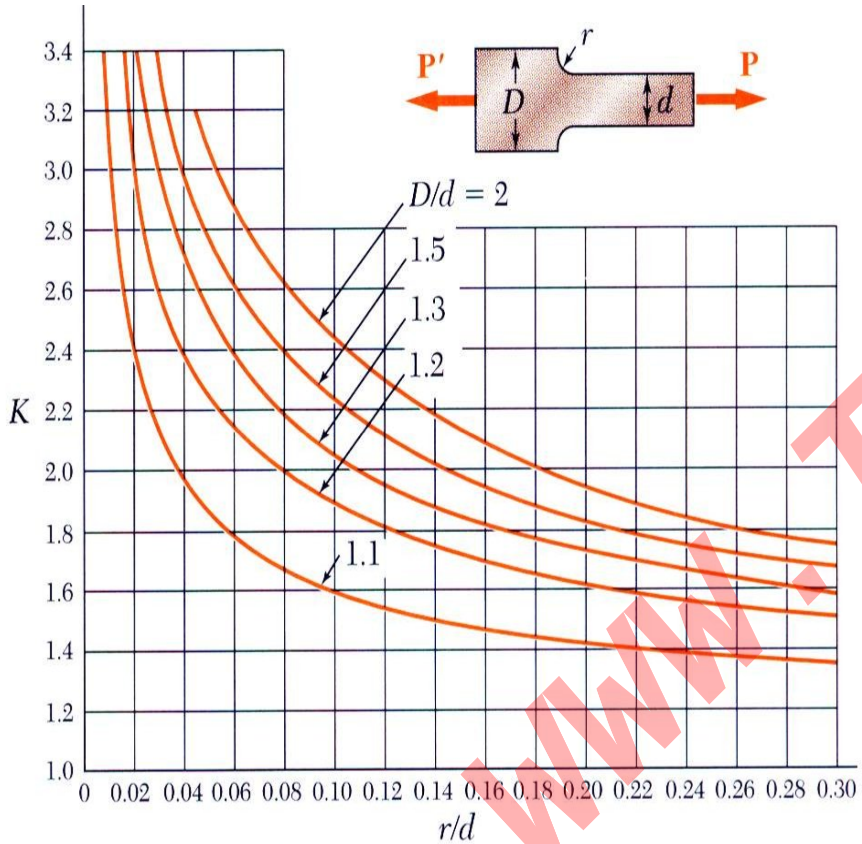


راه حل :

❑ نسبتهای هندسی و فاکتور تمرکز تنش را از شکل b صفحه قبل مشخص میکنیم .

❑ تنش عمودی متوسط مجاز را با استفاده از فاکتور تمرکز تنش و تنش عمودی مجاز ماده بدست می آوریم.

❑ با استفاده از تنش عمودی بدست آمده، بار مجاز مشخص میشود.



(b) Flat bars with fillets

❑ فاکتور تمرکز تنش از نمودار برابر:

$$\frac{D}{d} = \frac{60\text{ mm}}{40\text{ mm}} = 1.50 \qquad \frac{r}{d} = \frac{8\text{ mm}}{40\text{ mm}} = 0.20$$

$$K = 1.82$$

❑ تنش عمودی متوسط مجاز با استفاده از تنش عمودی و ضریب تمرکز تنش محاسبه میشود:

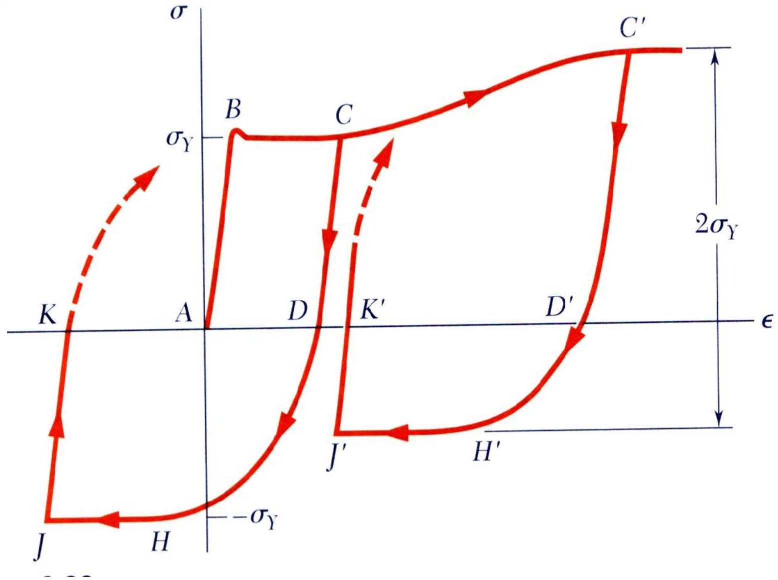
$$\sigma_{ave} = \frac{\sigma_{max}}{K} = \frac{165\,\text{MPa}}{1.82} = 90.7\,\text{MPa}$$

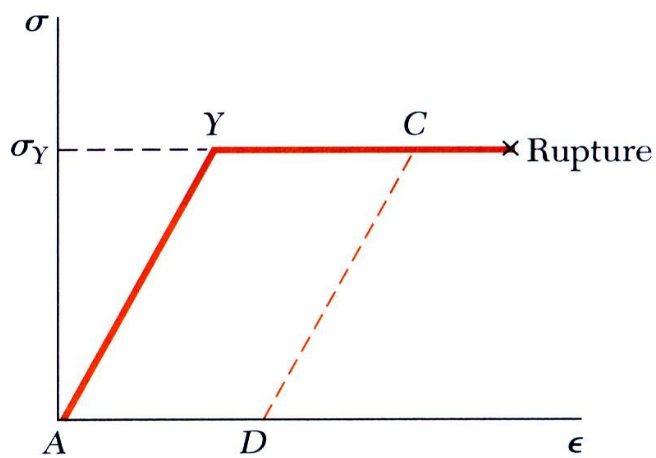
❑ با استفاده از تنش عمودی بدست آمده، بار مجاز مشخص میشود.

$$P = A\sigma_{ave} = (40\,\text{mm})(10\,\text{mm})(90.7\,\text{MPa})$$
$$= 36.3\times10^{3}\,\text{N}$$

$$\boxed{P = 36.3\,\text{kN}}$$

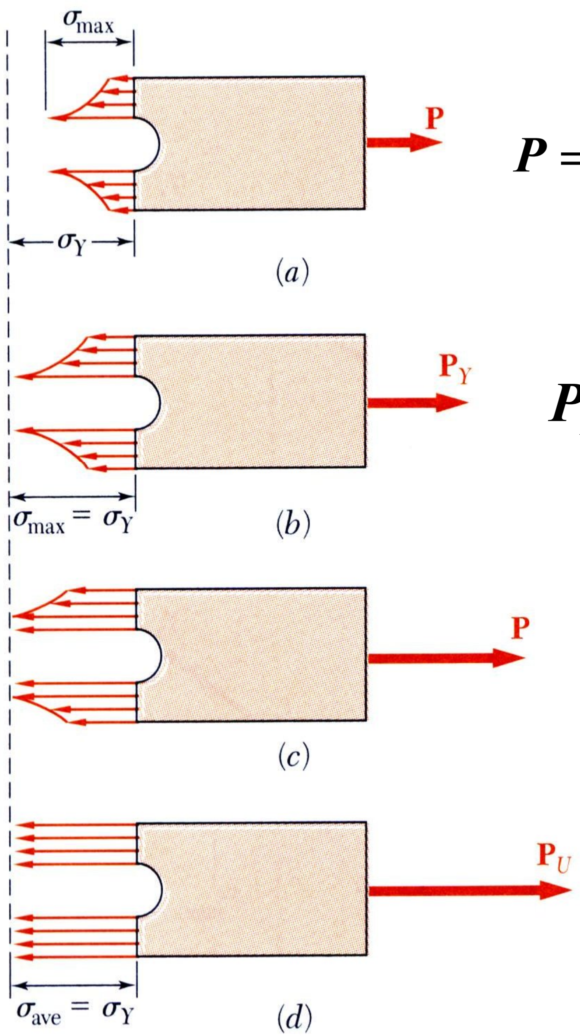
مواد الاستوپلاستیک





- بررسیهای قبل با فرض خطی بودن رابطه تنش- کرنش بوده است یعنی تنشها زیر تنش تسلیم هستند.
- اینکه ماده ترد بدون رسیدن به نقطه تسلیم، گسیخته شود یک فرضیه درست است.
- اگر تنش در نقاطی از حد تسلیم تجاوز نماید، تغییر شکل پلاستیک اتفاق می افتد .
- برای بررسی تغییر شکل پلاستیک از نوعی رفتار ایده آل تحت عنوان رفتار الاستوپلاستیک استفاده میشود.
- تغییرشکلهای ماده الاستوپلاستیک به محدودهای الاستیک و پلاستیک تقسیم شده است .
- تغییرشکلهای دائمی در بارگذاری بیش از تنش تسلیم حاصل میشوند.

تغییر شکل پلاستیک



- تغییرشکل الاستیک زمانی اتفاق می افتد که بیشترین تنش از تنش تسلیم کمتر باشد.

$$P = \sigma_{ave} A = \frac{\sigma_{max} A}{K}$$

- بیشترین تنش با تنش تسلیم در ماکزیمم بارگذاری الاستیک برابر است.

$$P_Y = \frac{\sigma_Y A}{K}$$

- در بارگذاریهای بالاتر از حد الاستیک، ناحیه ای از تغییر شکل پلاستیک نزدیک سوراخ گسترش می یابد.

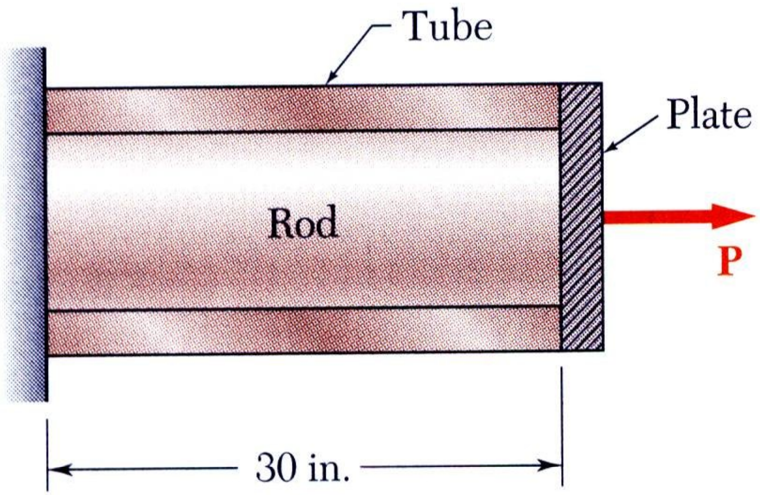
- با افزایش بارگذاری، ناحیه پلاستیک گسترش می یابد تااینکه مقطع به یک تنش یکنواخت برابر با تنش تسلیم برسد.

$$P_U = \sigma_Y A = K P_Y$$

تنشهای پسماند

- زمانی که یک عضو سازه ای ساده بطور یکنواخت بیش از تنش تسلیم بارگذاری شده سپس بار برداشته شود، بطور دائمی تغییر ایجاد شده اما تمامی تنشها ظاهر نمیشوند که البته این یک نتیجه کلی نیست.
- تنشهای پسماند در سازه بعد از بارگذاری و حذف بار باقی می مانند اگر :
  - تنها بخشی از سازه دستخوش تغییر شکل پلاستیک شود .
  - بخشهای مختلفی از سازه دستخوش تغییر شکلهای پلاستیکی متفاوت شوند .
- تنشهای پسماند همچنین باعث گرمایش یا سرمایش متغییر در ساختارها یا عناصر سازه ای میشوند.

مسئله ۱۱-۲



$$A_r = 45mm^2$$
$$E_r = 200GPa$$
$$\sigma_{Y,r} = 200\text{MPa}$$
$$A_t = 60mm^2$$
$$E_t = 100\text{GPa}$$
$$\sigma_{Y,t} = 250\text{MPa}$$

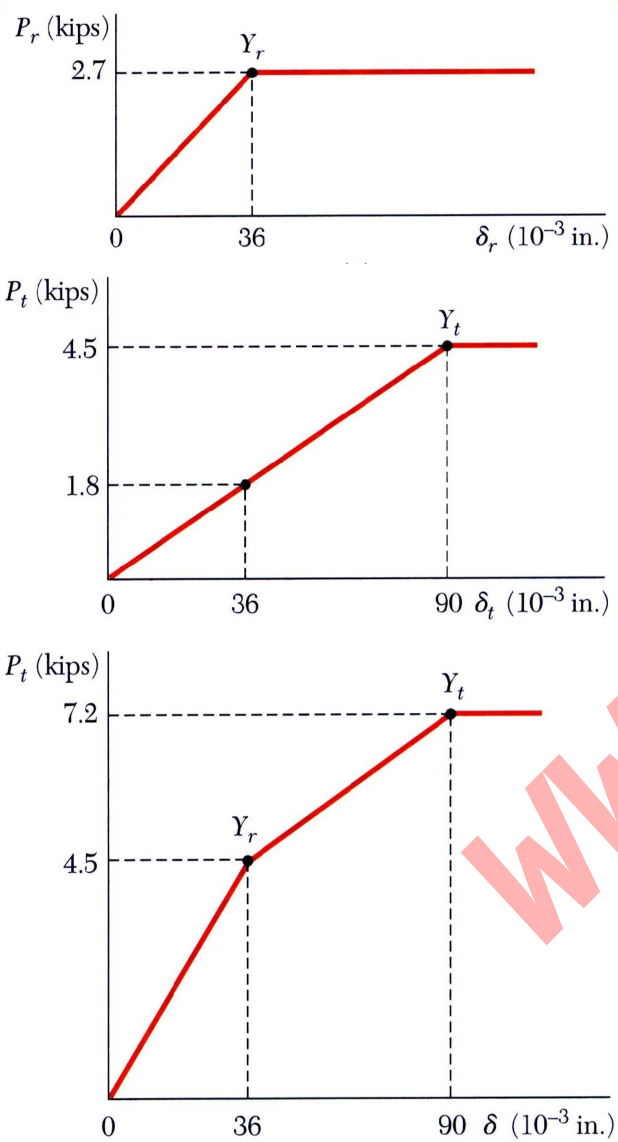
❖ یک میله استوانه ای بطول **800mm** در داخل لوله ای با همان طول قرار داده شده است. دو انتهای میله و لوله از یک طرف به تکیه گاهی صلب ، و از طرف دیگر به صفحه صلب متصل شده اند . بار اعمالی روی مجموعه میله – لوله از صفر تا **19.5kN** افزایش و سپس برعکس تا صفر کاهش می یابد . با فرض اینکه هر دو عضو مذکور از جنس ارتجاعی – خمیری (الاستوپلاستیک) باشند، مطلوب است:

الف) نمودار بار – تغییر مکان را برای مجموعه لوله – میله

ب) بیشترین افزایش طول مجموعه

ج) حالت نهایی پس از حذف بار.

د) تنشهای پسماند در میله و لوله



- ❑ نمودار بار – تغییر مکان را برای مجموعه لوله – میله رسم میکنیم.

$$P_{Y,r} = \sigma_{Y,r} A_r = (200\,MPa)(45\,mm^2) = 9\text{kN}$$

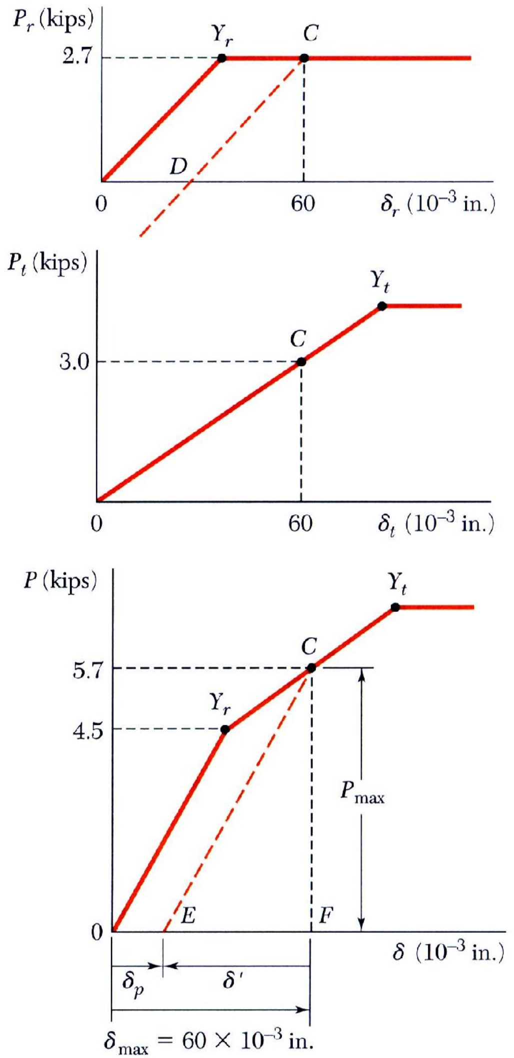
$$\delta_{Y,r} = \varepsilon_{Y,r} L = \frac{\sigma_{Y,r}}{E_{Y,r}} L = \frac{200\,MPa}{200\,GPa}(800\text{ mm}) = 0.8\text{mm}$$

$$P_{Y,t} = \sigma_{Y,t} A_t = (250\,MPa)(60\,mm^2) = 15\text{kN}$$

$$\delta_{Y,t} = \varepsilon_{Y,t} L = \frac{\sigma_{Y,t}}{E_{Y,t}} L = \frac{250\,MPa}{100\,GPa}(800\text{mm}) = 2\text{mm}$$

$$P = P_r + P_t$$

$$\delta = \delta_r = \delta_t$$



❑ در بار P_{max} =19.5kN، میله به ناحیه پلاستیک رسیده است در حالیکه لوله هنوز در محدوده الاستیک قرار دارد.

$$P_r = P_{Y,r} = 9\text{kN and } \sigma_r = (\sigma_r)_Y = 200\ MPa$$

$$P_t = P - P_r = (19.5 - 9)\text{kN} = 10.5\text{kN}$$

$$\sigma_t = \frac{P_t}{A_t} = \frac{10.5\text{kN}}{60\,mm^2} = 175\text{MPa}$$

$$\delta_t = \varepsilon_t L = \frac{\sigma_t}{E_t} L = \frac{175\ MPa}{100\ GPa}(800\text{mm}) = 1.04\text{mm}$$

$$\boxed{\delta_{max} = \delta_t = 1.40mm}$$

❑ مجموعه میله – لوله در طول یک خط موازی $0Y_r$ بی بار میشوند.

$$m = \frac{15}{0.8} = 18.75 \quad slope$$

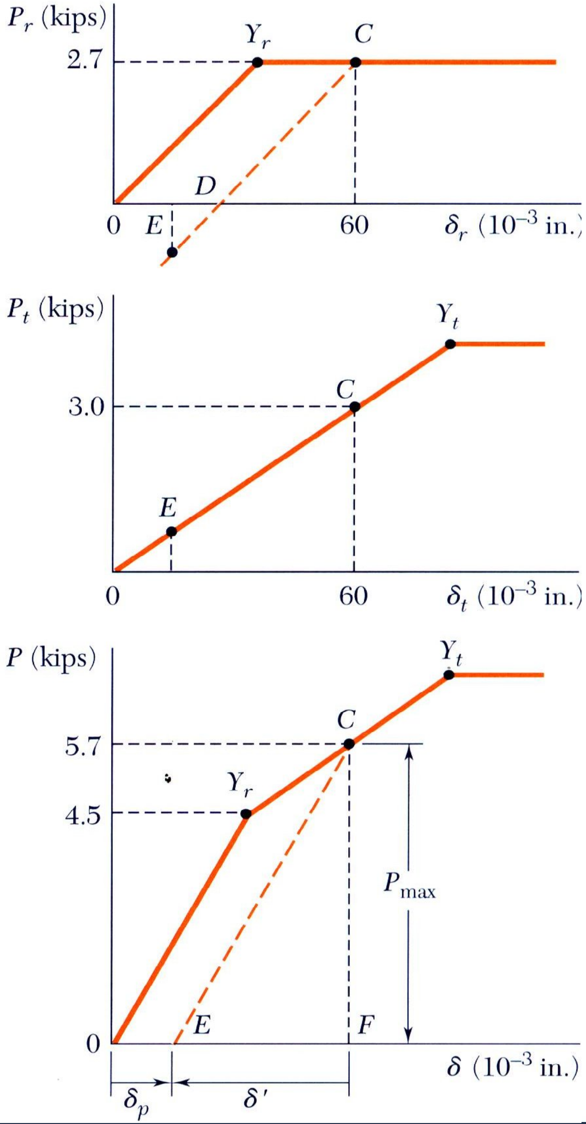
$$\delta' = -\frac{P_{max}}{m} = -\frac{19.5}{18.75} = -1.04mm$$

$$\delta_p = \delta_{max} + \delta' = (1.40 - 1.04) = 0.36mm$$

$$\boxed{\delta_p = 0.36mm}$$

❑ حال تنشهای پسماند در میله و لوله را محاسبه میکنیم.

پس از حذف بار برای تعیین تنشهای پسماند می بایست تنشهای معکوس که پس از باربرداری حاصل شده اند را تعیین و آنها را با تنشهای ماکزیمم جمع کنیم .



$$\varepsilon' = \frac{\delta'}{L} = \frac{-1.04\,mm}{800\,mm} = -1.30 \times 10^{-3}$$

$$\sigma'_r = \varepsilon' E_r = (-1.03 \times 10^{-3})(200\,GPa) = -260\text{MPa}$$

$$\sigma'_t = \varepsilon' E_t = (-1.03 \times 10^{-3})(100\,GPa) = -130\text{MPa}$$

$$\sigma_{residual,r} = \sigma_r + \sigma'_r = 200\,MPa - 260\,MPa = -60\,MPa$$

$$\sigma_{residual,t} = \sigma_t + \sigma'_t = 175\,MPa - 130\,MPa = +45\,MPa$$