

ریاضیات مهندسی

ریاضیات مهندسی

ریاضیات مهندسی

ریاضیات مهندسی

ریاضیات مهندسی

ریاضیات مهندسی

ریاضیات مهندسی

جلسه سوم

گسترش زوج

گسترش فرد

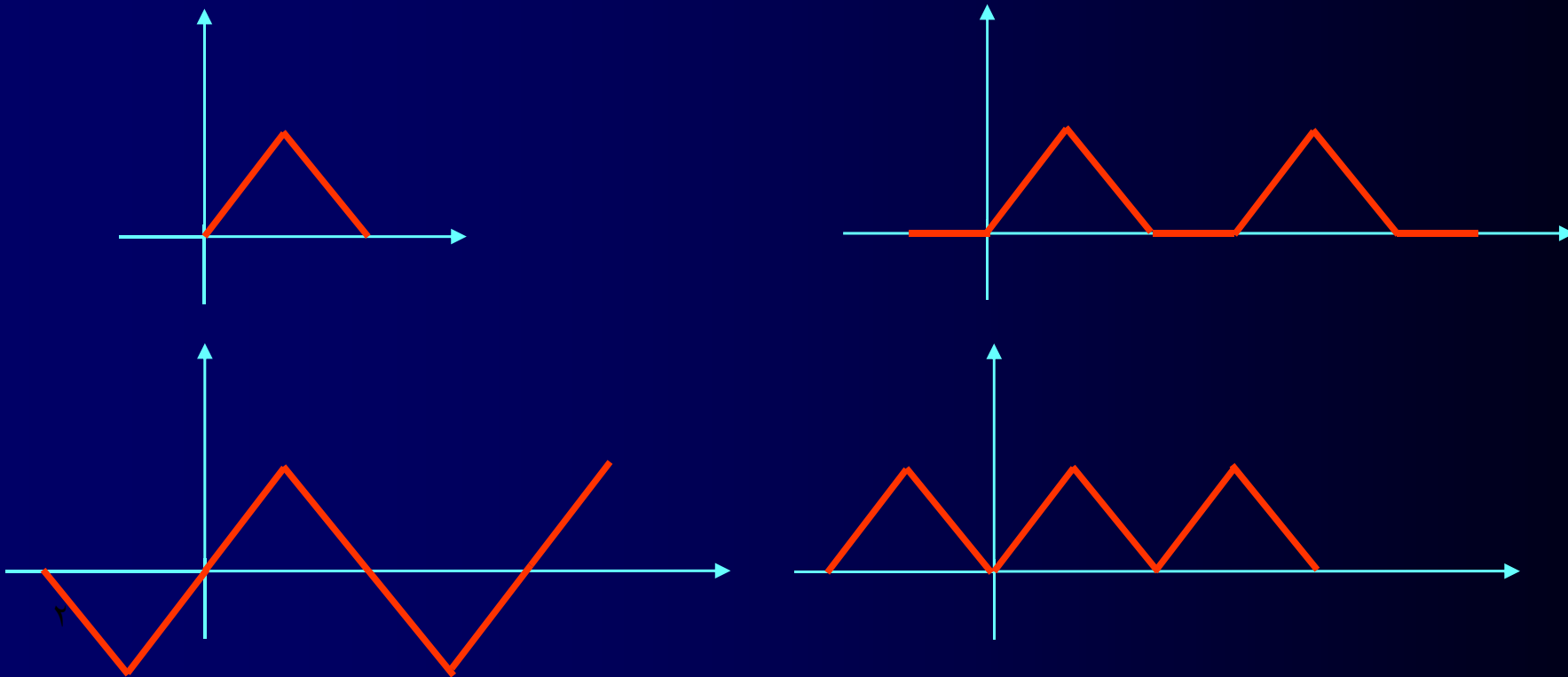
بسط نیم دامنه ای

مباحث این جلسه :

مشتق گیری و انتگرال گیری جمله به جمله از سری فوریه

• بسط نیم دامنه ای

اگر تابعی بصورت $y=f(x) ; 0 < x < l$ باشد و بخواهیم بصورت سری فوریه نمایش دهیم ، به دلیل این که تابع متناوب نیست دارای سری فوریه نمی باشد؛ ولی توابعی هستند که سری فوریه آن ها در فاصله $0 \leq x \leq l$ بر $f(x)$ منطبق است و تعداد آن ها بسیار زیاد است.



دو تابع از این بینهایت تابع ، اهمیت بیشتری دارند که یکی از آن ها گسترش زوج $f(x)$ و دیگری گسترش فرد $f(x)$ می باشد .

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(x) = f(x) \quad ; \quad 0 < x < \ell \\ f_1(x) = f(-x) \quad ; \quad -\ell < x < 0 \end{array} \right. \quad T=2\ell \quad \text{گسترش زوج}$$

که دارای سری فوریه کسینوسی زیر است:

$$f_1(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \left(\frac{n\pi x}{\ell} \right) \quad a_0=0$$

$$a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \cos \left(\frac{n\pi x}{\ell} \right) dx$$

$$\begin{cases} f_2(x) = f(x) & ; \quad 0 < x < \ell \\ f_2(x) = -f(-x) & ; \quad -\ell < x < 0 \end{cases} \quad \text{گسترش فرد}$$

که دارای سری فوریه سینوسی زیر است:

$$f_2(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \left(\frac{n\pi x}{\ell} \right)$$

$$b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin \left(\frac{n\pi x}{\ell} \right) dx$$

(مثال) سری های فوریه سینوسی و کسینوسی متناظر با $f(x)$ را بیابید .

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2k}{l}x & ; 0 < x < \frac{l}{2} \\ \frac{2k}{l}(l-x) & ; \frac{l}{2} < x < l \end{cases}$$

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx = \quad \text{حل :}$$

$$\frac{2k}{l^2} \left[\int_0^{l/2} x \sin \frac{n\pi}{l} x dx + \int_{l/2}^l (l-x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx \right]$$

$$b_n = \frac{2k}{l^2} \left[-\frac{lx}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{l} x \Big|_0^{l/2} + \frac{l^2}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{l} x \Big|_0^{l/2} - \frac{l(l-x)}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{l} x \Big|_{l/2}^l - \frac{l^2}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{l} x \Big|_{l/2}^l \right]$$

$$b_n = \frac{2k}{ln\pi} \left[-\frac{l}{2} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{l}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{l}{2} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{l}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \right] = \frac{4k}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2}$$

سری فوریه سینوسی متناظر با $f(x)$:

$$f(x) = \frac{4k}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{l} x ; 0 < x < l$$

سری فوریه کسینوسی متناظر با $f(x)$:

$$a_n = \frac{4k}{l^2} \left[\int_0^{l/2} x \cos \frac{n\pi}{l} x dx + \int_{l/2}^l (l-x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx \right]$$

$$a_n = \frac{4k}{n^2 \pi^2} \left(2 \cos \frac{n\pi}{2} - \cos n\pi - 1 \right) \quad a_0 = \frac{k}{2}$$

$$\longrightarrow f(x) = \frac{k}{2} + \frac{4k}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(2 \cos \frac{n\pi}{2} - \cos n\pi - 1 \right) \cos \frac{n\pi}{l} x$$

• مشتق گیری و انتگرال گیری جمله به جمله از سری فوریه

قضیه (۱) اگر سری فوریه تابع پیوسته قطعه ای $f(x)$ در فاصله تناوب $-l < x < l$ به صورت زیر بیان شده باشد:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x \right)$$

آن گاه:

$$\int_0^x f'(x) dx = a_0 x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l}{n\pi} \left(\sin \frac{n\pi}{l} x - b_n \cos \frac{n\pi}{l} x \right)$$

قضیه ۲) فرض کنید $f(x)$ تابعی پیوسته در فاصله $[-l, l]$ باشد و $f(-l) = f(l)$ و همچنین $f'(x)$ در این فاصله پیوسته قطعه ای باشد؛ آن گاه سری فوریه تابع $f'(x)$ را می توان با مشتق گیری جمله به جمله از سری فوریه $f(x)$ بدست آورد و سری حاصل از این مشتق گیری در هر نقطه x به سمت $\frac{1}{2} [f'(x+) + f'(x-)]$ همگراست.

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x \right)$$

$$f'(x) = F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{n\pi}{l} a_n \sin \frac{n\pi}{l} x + \frac{n\pi}{l} b_n \cos \frac{n\pi}{l} x \right)$$

در نقاطی که $f'(x)$ پیوسته نیست:

$$F(x) = \frac{1}{2} [f'(x+) + f'(x-)]$$

مثال سری فوریه $f(x) = x^2$; $-\pi < x < \pi$ را بیابید و با انتگرال گیری از سری حاصل، سری فوریه تابع x^2 را بیابید .

$$x = 2 \left[\sin x - \frac{\sin 2x}{3} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots \right]$$

با انتگرال گیری داریم :

$$\frac{x^2}{2} = 2 \left[-\cos x + \frac{\cos 2x}{2^2} - \frac{\cos 3x}{3^2} + \dots \right] + C$$

برای به دست آوردن C از طرفین تساوی در فاصله $-\pi$ تا π انتگرال می گیریم و می دانیم انتگرال \cos با توجه به مساحت زیر نمودار 0 می باشد .

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^2}{2} dx = C \int_{-\pi}^{\pi} dx$$

$$\longrightarrow C = \frac{\pi^2}{6} \longrightarrow x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx$$

انتگرال فوریه

مشاهده می شود که هر تابع متناوب دارای سری فوریه و هر تابع با حوزه ی تعریف متناهی دارای سریهای فوریه متناظر است. اما تابع $y=f(x)$; $-\infty < x < \infty$ دارای سری فوریه نیست ولی می توان به صورت حد سری فوریه تابع دیگری آنرا نمایش داد .

چنین سری فوریه را می توان بصورت انتگرال نمایش داد که به همین علت آنرا انتگرال فوریه می نامند و به صورت زیر محاسبه می شود :

$$f(x) = \int_0^{\infty} [a(w) \cos wx + b(w) \sin wx] dw$$

$$a(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos wx dx$$

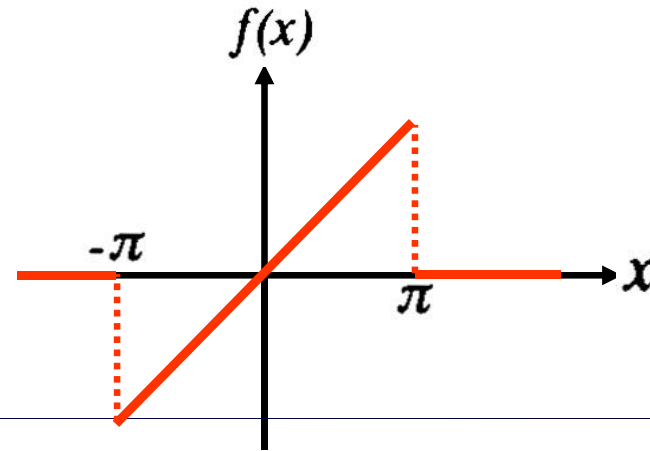
$$b(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin wx dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = M < \infty$$

شرط جواب :

مثال انتگرال فوریه تابع زیر را به دست آورید .

$$f(x) = \begin{cases} x & |x| < \pi \\ 0 & |x| > \pi \end{cases}$$



حل :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = 2 \int_0^{\pi} x dx = \pi^2$$

زوج

بنابراین انتگرال فوریه تابع موجود است؛

فرد

$$a(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos wx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos wx dx = 0$$

$$b(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin wx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin wx dx = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{x}{w} \cos wx + \frac{1}{w^2} \sin wx \right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{w\pi} \left(\frac{1}{w} \sin w\pi - \pi \cos w\pi \right)$$



$$\longrightarrow f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{w} \left(\frac{1}{w} \sin w\pi - \pi \cos w\pi \right) \sin wx \, dw$$

قضیه هرگاه $y = f(x)$; $-\infty < x < \infty$ مطلقا انتگرال پذیر باشد و همواره تکه ای باشد، آن گاه انتگرال فوریه تابع $f(x)$ در نقطه ی x (گسسته) به سمت میانگین حدود چپ و راست تابع در این نقطه همگراست ؛ یعنی :

$$f(x) = \int_0^{\infty} [a(w) \cos wx + b(w) \sin wx] dw = \frac{1}{2} [f(x^+) + f(x^-)]$$

مثال سری فوریه تابع $f(x) = x + x^2$ در فاصله $-\pi < x < \pi$ یافته و با توجه به آن مقدار عددی $1 + 1/2^2 + 1/3^2 + \dots$ را بیابید.

$$x^2 + x \approx \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{4}{n^2} (-1)^n \cos nx - \frac{2}{n} (-1)^n \sin nx \right]$$

اگر $x = \pi$ قرار دهیم ، آن گاه $f(\pi^-) = \pi + \pi^2$ و $f(\pi^+) = \pi + \pi^2$:

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} (-1)^n \cos nx = \frac{1}{2} [(\pi + \pi^2) + (-\pi + \pi^2)] = \pi^2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

مثال با انتگرال گیری از سری فوریه زیر به سری فوریه تابع $|x|$ برسید.

$$\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} = f(x) = \begin{cases} -1 & ; -\pi < x < 0 \\ 1 & ; 0 < x < \pi \end{cases}$$

حل :

ابتدا از طرفین انتگرال نا معین می گیریم :

$$\int \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} = \int f(x) dx = \begin{cases} -x & ; -\pi < x < 0 \\ x & ; 0 < x < \pi \end{cases}$$

$$\rightarrow c - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} = \begin{cases} -x & ; -\pi < x < 0 \\ x & ; 0 < x < \pi \end{cases}$$

با انتگرال گیری از طرفین تساوی فوق در فاصله $-\pi < x < \pi$ ؛ c را می یابیم .

$$c = \frac{\pi}{2}$$

$$\rightarrow \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} = \begin{cases} -x & ; -\pi < x < 0 \\ x & ; 0 < x < \pi \end{cases}$$

نکته) هر گاه $f(x)$ تابعی زوج باشد، آن گاه :

$$B(\omega)=0 \quad A(\omega)=2 \int_0^{\infty} f(x) \cos \omega x dx$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} A(\omega) \cos \omega x d\omega$$

و هر گاه $f(x)$ تابعی فرد باشد، آن گاه :

$$A(\omega)=0 \quad B(\omega)=2 \int_0^{\infty} f(x) \sin \omega x dx$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} B(\omega) \sin \omega x d\omega$$

$$u = x$$

تکلیف سری اول:

۲۵-۱۷-۱۶(۱-۱۰

۱۶-۱۵(۲-۱۰

۱۴-۹(۳-۱۰

۱۶-۹-۳۵-۳۲-۳۳(۴-۱۰

مثال ص ۱۳۴ و مساله ۱۰-۲ ص ۶۸۲

تکلیف سری دوم:

۲۰-۱۷-۱۵-۷(۵-۱۰

۵-۱۴-۱۰-۴-۲(۹-۱۰

ریاضیات مهندسی

جلسه چهارم

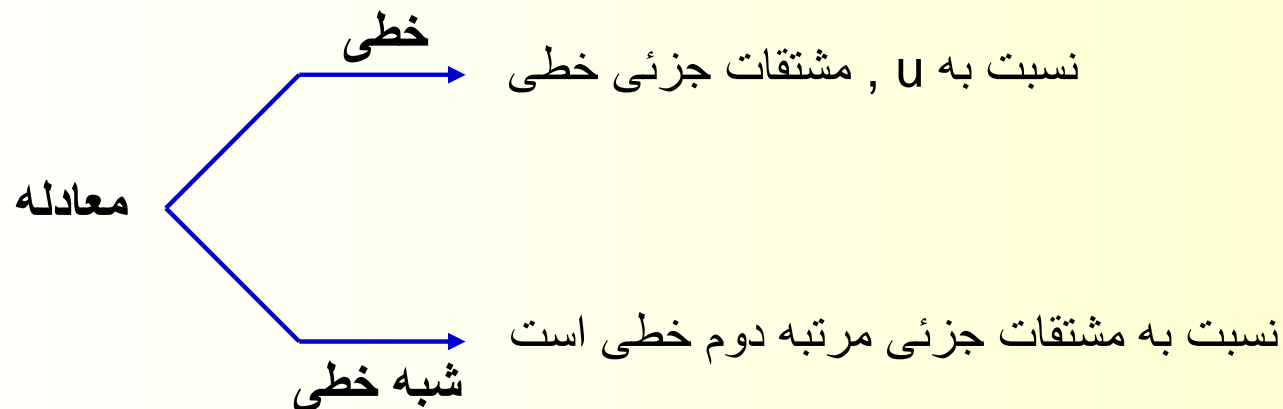
مبحث این جلسه : معادله با مشتقات جزئی

معادلات با مشتقات جزئی

تعریف: هر معادله از u, x, y و مشتقات جزئی u نسبت به x, y یک معادله با مشتق جزئی نامیده می شود. در این مبحث فقط دسته ای از معادلات که به معادلات ریاضی - فیزیک موسوم هستند پرداخته می شود.

معادلات ریاضی فیزیک نوعی معادلات خطی یا شبه خطی از مرتبه ی دوم هستند.

مرتبه معادله: مرتبه بالاترین مشتق موجود در معادله ، مرتبه معادله است .



یک معادله شبه خطی در فضای دو بعدی را می توان چنین تعریف کرد :

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} = F(x, y, u, u_x, u_y)$$

C, B, A توابعی از y, x هستند. (دسته های خاصی از معادلات خطی که در مسائل کاربردی از اهمیت ویژه ای برخوردار بوده و به معادلات ریاضی فیزیک موسوم اند و عبارتند از :)

معادلات با مشتقات جزئی خطی مهم مرتبه دو :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \longrightarrow \text{معادله موج یک بعدی}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \longrightarrow \text{معادله گرمای یک بعدی}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \longrightarrow \text{معادله لاپلاس دو بعدی}$$

$$\frac{\partial \dot{u}}{\partial x'} + \frac{\partial \dot{u}}{\partial y'} = f(x, y) \longrightarrow \text{معادله پواسن دو بعدی}$$

$$\frac{\partial \dot{u}}{\partial x'} + \frac{\partial \dot{u}}{\partial y'} + \frac{\partial \dot{u}}{\partial z'} = 0 \longrightarrow \text{معادله لاپلاس سه بعدی}$$

در این معادلات: **c ثابت**، **t زمان** و **x,y,z مختصات دکارتی** هستند.

تعریف: یک معادله با مشتق جزئی را خطی گویند هرگاه نسبت به متغیر وابسته (U) و مشتقات جزئی آن از درجه اول (یعنی توان هر کدام بیش از یک نباشد) باشد.

تعریف: اگر هر جمله ی چنین معادله ای شامل متغیر وابسته (U) یا یکی از مشتقات آن باشد، معادله را **همگن** می نامیم، در غیر اینصورت معادله **غیر همگن** نامیده می شود.

با توجه به مطالب فوق همه ی معادلات قبلی خطی هستند و همه ی آن ها به جز معادله پواسن، همگن می باشند و معادله پواسن غیر همگن است.

با توجه به مباحث معادلات، برای یک معادله ی با مشتق جزئی ممکن است بی نهایت جواب بدست آید. اما از بین آن ها می توان جواب خاصی را با استفاده از شرایط اولیه (که t یکی از متغیر ها است و در لحظه ی $t=0$ مقادیر جواب داده شده است) و نیز شرایط کرانه ای (که در x یا y خاصی مقدار جواب مشخص باشد) مشخص نمود.

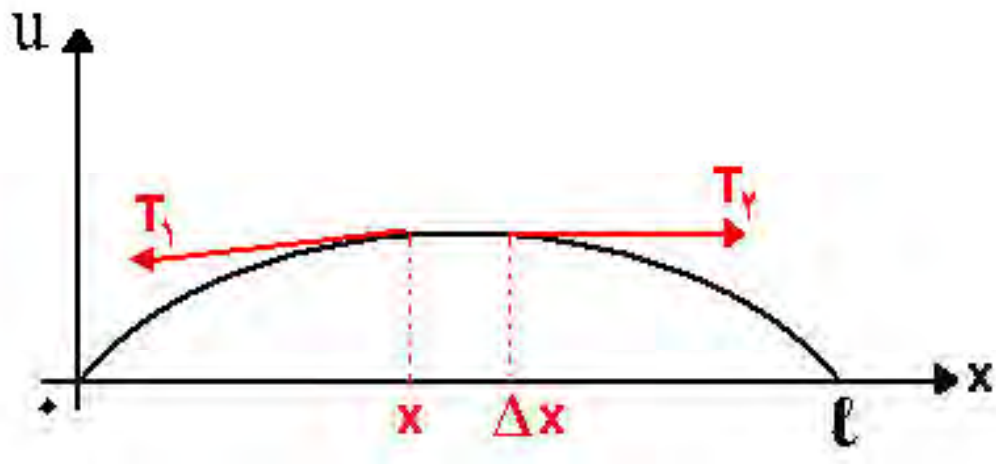
قضیه بنیادی : هر گاه u_1, u_2 جواب هایی از یک معادله با مشتق جزئی همگن خطی در ناحیه معینی باشند، آن گاه :

$$u = C_1 u_1 + C_2 u_2$$

که در آن C_1, C_2 ثابت های دلخواهی هستند، نیز جوابی از معادله در آن ناحیه هستند .

● نخ مرتعش، معادله موج یک بعدی

با توجه به شرایط و حرکت نخ مرتعش تنها در یک جهت، آن گاه معادله ی آن بصورت یک معادله ی موج یک بعدی بدست می آید.



$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

علت اینکه c^2 انتخاب شده این است که مشخص شود که حتما مثبت است.

با توجه به این که نخ در $x=0$ و $x=l$ ثابت است پس برای همه ی زمان ها در شرط کرانه ای داریم :

$$u(0, t) = 0 \quad , \quad u(l, t) = 0$$

همچنین شکل حرکت نخ، به سرعت اولیه (سرعت در لحظه ی $t=0$) و انحراف اولیه (انحراف در لحظه ی $t=0$) بستگی دارد لذا دو شرط اولیه برای مساله ایجاد میشود :

$$u(x, 0) = f(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = g(x)$$

بنابراین برای معادله موج باید جوابی بدست آید که در شرایط کرانه ای و همچنین شرایط اولیه صدق کند.

برای حل مساله مراحل زیر صورت می گیرد :

◀ **مرحله ی اول :** با به کار بردن روش ضربی، یا روش جدا کردن متغیرها ، دو معادله دیفرانسیل معمولی بدست می آورید:

$$u(x, t) = F(x) G(x)$$

◀ **مرحله ی دوم :** جواب هایی از این معادلات که در شرایط کرانه ای صدق می کنند به دست آورید.

◀ **مرحله ی سوم :** جوابی که در شرایط اولیه صدق کند را محاسبه می کنیم .

نتیجه ای که از مراحل فوق بدست می آید بصورت زیر است:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (B_n \cos \lambda_n t + B_n^* \sin \lambda_n t) \sin \frac{n\pi}{l} x$$

$$\lambda_n = \frac{cn\pi}{l}$$

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{l} x = f(x)$$

طبق سری فوریه داریم :

$$B_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx$$

و با مشتق گیری $\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x)$ داریم :

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n^* \lambda_n \sin \frac{n\pi}{l} x = g(x) \quad \longrightarrow$$

$$B_n^* \lambda_n = \frac{1}{l} \int_0^l g(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx \quad \text{و} \quad \lambda_n = \frac{cn\pi}{l} \quad \longrightarrow$$

$$B_n^* = \frac{1}{cn\pi} \int_0^l g(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx$$

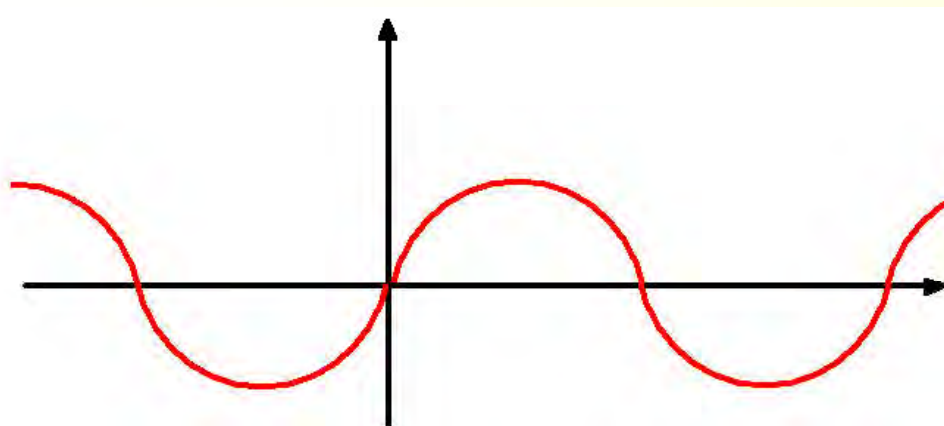
نکته: چنانچه سرعت اولیه $g(x) = 0$ باشد آن گاه $B_n^* = 0$ می شود و داریم:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos \lambda_n t \sin \frac{n\pi}{l} x \quad \lambda_n = \frac{cn\pi}{l}$$

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \left(\frac{n\pi}{l} (x - ct) \right) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \left(\frac{n\pi}{l} (x + ct) \right)$$

ويا؛

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f^*(x - ct) + f^*(x + ct)]$$



مثال مطلوبست است جواب متناظر با انحراف اولیه مثلثی معادله موج ، و سرعت اولیه صفر $g(x) = 0$.

$$u(x, 0) = f(x) = \begin{cases} \frac{2k}{l}x & ; 0 < x < \frac{l}{2} \\ \frac{2k}{l}(l-x) & ; \frac{l}{2} < x < l \end{cases} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = c^r \frac{\partial u}{\partial x^r}$$

حل :

با توجه به اینکه $B_n^* = 0$ و

$$B_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\frac{2k}{l^2} \left[\int_0^{l/2} x \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx + \int_{l/2}^l (l-x) \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx \right]$$

طبق مثال اول جلسه ی قبل داریم :

$$B_n = \frac{\Lambda k}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi}{2}$$

بنابراین ؛

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos \lambda_n t \sin \frac{n\pi}{l} x$$

$$\frac{\Lambda k}{\pi^2} \left[\frac{1}{1^2} \sin \frac{\pi x}{l} \cos \frac{\pi c}{l} t - \frac{1}{3^2} \sin \frac{3\pi}{l} x \cos \frac{3\pi c}{l} t + \dots \right]$$

ریاضیات مهندسی

جلسه پنجم

مباحث این جلسه :
جواب دالامبر معادله موج
انواع معادلات با مشتق جزئی خطی

جواب دالامبر معادله موج

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

با تغییر متغیر $v = x+ct$, $z = x-ct$ داریم:

$$\begin{aligned} v_x &= 1 \\ z_x &= 1 \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad u_x = u_v v_x + u_z z_x = u_v + u_z$$

حال از u_x یک بار دیگر نسبت به x مشتق می گیریم:

$$\begin{aligned} u_{xx} &= (u_v + u_z)_x \\ &= (u_v + u_z)_v v_x + (u_v + u_z)_z z_x \\ &= (u_{vv} + u_{zv}) + (u_{vz} + u_{zz}) = u_{vv} + 2u_{vz} + u_{zz} \end{aligned}$$

با جایگذاری در معادله موج مربوطه داریم:

$$u_{zv} = \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial z} = 0$$

این معادله با دوبار انتگرال‌گیری محاسبه می‌شود:

$$\frac{\partial v}{\partial z} = h(v)$$

(الف) نسبت به z

$h(v)$ تابع دلخواه از v است .

(ب) نسبت به v

$$u = \int h(v) dv + \psi(z)$$



این انتگرال نیز تابعی از v با اسم $\varphi(v)$ می‌باشد

$\psi(z)$ تابعی دلخواه از z است .



$$u(x,t) = \varphi(v) + \psi(z) = \varphi(x+ct) + \psi(x-ct)$$

این جواب به جواب دالامبر معادله موج معروف است .

$$u(x,t) = \frac{1}{2} [f^*(x+ct) + f^*(x-ct)]$$

مثلا اگر این مساله را برای $u(x,0) = f(x)$ و $g(x) = v$ حل کنید به پاسخ روبرو خواهیم رسید که مانند قبل است :

انواع معادلات با مشتق جزئی خطی

اگر این گونه معادلات را در حالت کلی بصورت

$$A u_{xx} + 2B u_{xy} + C u_{yy} = F(x, y, u, u_x, u_y)$$

در نظر بگیریم؛ آن گاه :

$$AC - B^2 > 0$$

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=0 \\ C=1 \end{cases} \Rightarrow AC - B^2 = 1 > 0$$

(الف) معادله را بیضی گون گویند هرگاه

مانند معادله لاپلاس

$$AC - B^2 = 0$$

$$u_t = C^2 u_{xx} = \begin{cases} A=C^2 \\ B=0 \\ C=0 \end{cases} \Rightarrow AC - B^2 = 0$$

(ب) معادله را سهمی گون گویند هرگاه

مانند معادله گرما

$$AC - B^2 < 0$$

ج) معادله را هذلولی گون گویند هرگاه

مانند معادله موج

$$u_{tt} = C^2 u_{xx} \Rightarrow \begin{cases} A = C^2 \\ B = 0 \\ C = -1 \end{cases} \Rightarrow AC - B^2 = -C^2 < 0$$

به عنوان مثال معادله **تریگومی** $y u_{xx} + u_{yy} = 0$ از نوع آمیخته است:

$$\begin{cases} A = y \\ B = 0 \\ C = 1 \end{cases}, \quad B^2 - AC = y \quad \begin{cases} y > 0 & \text{بیضی گون} \\ y = 0 & \text{سه می گون} \\ y < 0 & \text{هذلولی گون} \end{cases}$$

مثال) معادله زیر را با استفاده از تبدیل داده شده حل نمایید.

$$u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0$$

$$(v = x, \quad z = x + y)$$

حل:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial v} \times \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \times \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$u_{xx} = (u_v + u_z)_x = (u_{vv} + u_{zv})v_x + (u_{vz} + u_{zz})z_x$$

$$= u_{vv} + 2u_{zv} + u_{zz} = u_{xx}$$

$$u_{xy} = -u_{vz} - u_{zz}$$

$$u_{yy} = u_{zz}$$

با جایگذاری داریم:

$$u_{yy} = 0 \quad \Rightarrow \quad u_v = h(z) \quad \Longrightarrow \quad u = \int h(z) dv + \psi(z) = v h(z) + \psi(z)$$
$$u(x, y) = x h(x - y) + \psi(x - y)$$

مثال) با جدا کردن متغیرها جوابهای $u(x,y)$ معادلات را به دست آورید.

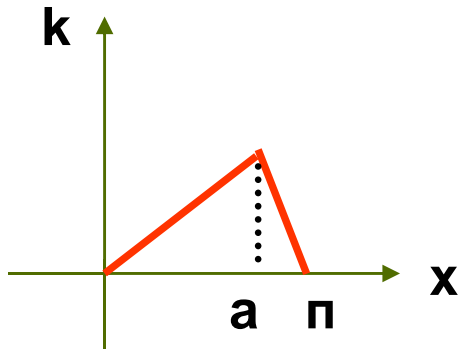
$$\left. \begin{array}{l} u_x = u_y \\ u(x,y) = F(x) G(y) \end{array} \right\} \Rightarrow F'(x) G(y) = F(x) G'(y)$$

$$\Rightarrow \frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{G'(y)}{G(y)} = k$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F' - kF = 0 & \Rightarrow F(x) = e^{kx} \\ G' - kG = 0 & \Rightarrow G(y) = e^{ky} \end{cases}$$

$$\Rightarrow u(x,y) = e^{kx} e^{ky} = e^{k(x+y)}$$

مثال مطلوبست انحراف $u(x,t)$ نخ مرتعش به طول $l=\pi$ با انتهای ثابت $C2=1$ متناظر با سرعت اولیه صفر و انحراف اولیه



$$f(x) = \begin{cases} \frac{k}{a}x & 0 < x < a \\ \frac{k}{a-\pi}(x-\pi) & a < x < \pi \end{cases}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(nt) \sin(nx)$$

$$B_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \stackrel{2}{=} \frac{2}{\pi} \left[\int_0^a \frac{k}{a} x \sin(nx) dx + \int_a^{\pi} \frac{k}{a-\pi} (x-\pi) \sin(nx) dx \right] =$$

$$\frac{2k}{an^2(\pi-a)} \sin(na)$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2k}{an^2(\pi-a)} \sin(na) \cos(nt) \sin(nx) =$$

$$\frac{2k}{a(\pi-a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(na)}{n^2} \cos(nt) \sin(nx)$$

جریان گرمای یک بعدی

جریان گرما درجه همگن به طور کلی:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \nabla^2 u$$

$$c = \frac{k}{\sigma\rho}$$

رسانایی گرمایی
چگالی ماده
گرمای ویژه

$$\begin{cases} \nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} & \text{سه بعدی} \\ \nabla^2 u = u_{xx} & \text{تک بعدی} \end{cases}$$

$$u_t = c^2 u_{xx}$$

این گونه معادلات می توانند مانند معادله موج دارای شرایط اولیه و شرایط کرانه ای باشند .
شرایطی را در نظر بگیرید که دمای نقاط $x=0$ و $x=l$ مربوط به مفتول صفر باشد .

$$u(0,t) = u(l,t) = 0 \quad \forall t$$

اگر دمای اولیه مفتول $f(x)$ باشد داریم :

$$u(x,0) = f(x)$$

برای حل مساله از روش جدا سازی استفاده می شود:

مرحله اول: روش تفکیک متغیرها

$$u(x,t) = F(x) \cdot G(t)$$

$$\Rightarrow FG' = c^2 F''(x) \cdot G(t)$$

$$\frac{G'}{c^2 G} = \frac{F''}{F} = k \Rightarrow \begin{cases} k > 0 & \rightarrow u \equiv 0 \\ k = -\rho^2 & \rightarrow \end{cases}$$

مرحله دوم:

$$F'' + \rho^2 F = 0 \Rightarrow F(x) = A \cos(\rho x) + B \sin(\rho x)$$

$$\Rightarrow G' + c^2 \rho^2 G = 0$$

$$\rho = \frac{n\pi}{l} \begin{cases} F_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) & n = 1, 2, \dots \\ G_n(t) = B_n e^{-\lambda n^2 t} & n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

مرحله سوم:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) e^{-\lambda n^2 t}$$

$$\lambda_n = \frac{cn\pi}{\ell}$$

شرایط اولیه

$$\Rightarrow u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) = f(x)$$

$$\Rightarrow B_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx \quad n = 1, 2, \dots$$

$u(x, 0)$ بسط نیم دامنه ای برای $f(x)$

با توجه به وجود جمله $e^{-\lambda n^2 t}$ مشاهده می شود با گذشت زمان $u(x, t)$ به سمت صفر میل می کند.

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < \ell/2 \\ 1-x & \ell/2 < x < \ell \end{cases} \quad \text{مثال) اگر دمای اولیه برابر}$$

با فرض $c=1$ و $\ell=\pi$ طول میله $u(0,t)=u(\ell,t)=0$

$$B_n = \frac{2}{\ell} \left[\int_0^{\ell/2} x \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) dx + \int_{\ell/2}^{\ell} (\ell - x) \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) dx \right]$$

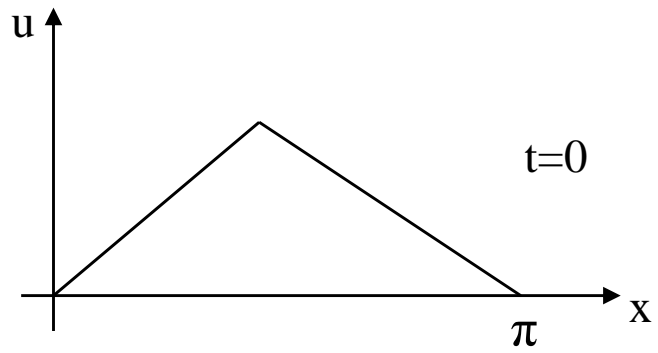
اگر n زوج باشد B_n برابر صفر می شود

$$B_n = \frac{4\ell}{n^2 \pi^2} \quad (n = 1, 5, 9, \dots)$$

$$B_n = -\frac{4\ell}{n^2 \pi^2} \quad (n = 3, 7, 11, \dots)$$

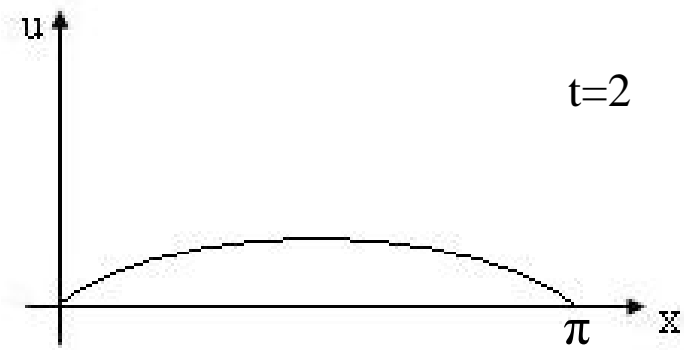
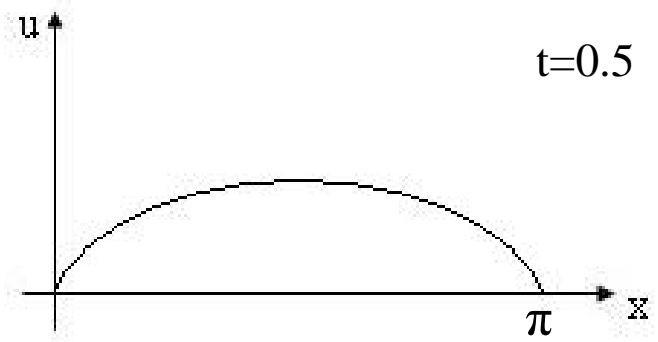
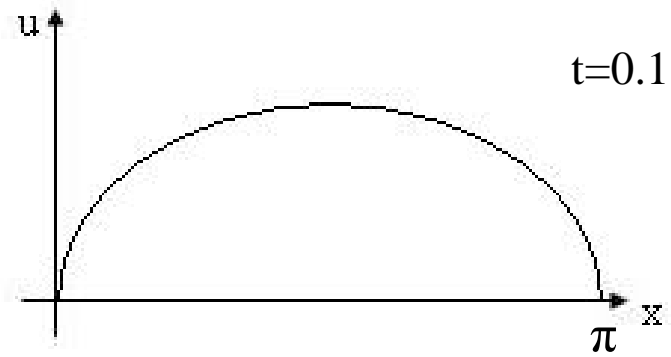
بنابراین :

$$u(x, t) = \frac{4\ell}{\pi^2} \left[\sin\left(\frac{x\pi}{\ell}\right) e^{-(c\pi/\ell)^2 t} - \frac{1}{9} \sin\left(\frac{3\pi x}{\ell}\right) e^{-(3c\pi/\ell)^2 t} + \dots \right]$$



$$t \rightarrow \infty$$

$$u(x,t) \rightarrow \infty$$



جریان گرما در یک میله نامتناهی

در این حالت شرایط کرانه ای حذف می شود .

با توجه به معادله گرمای یک بعدی

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

و $u(x,0) = f(x)$ - $\infty < x < \infty$ آن گاه :

$$u(x,t) = \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{-\frac{(x-v)^2}{4c^2 t}} dv$$

و با تغییر متغیر

$$z = (v - x)/2c\sqrt{t}$$

داریم :

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x + 2cz\sqrt{t}) e^{-z^2} dz$$

$$f(x) = \begin{cases} u_0 = 100^\circ c & |x| < 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

مثال) دما در میله نامتناهی

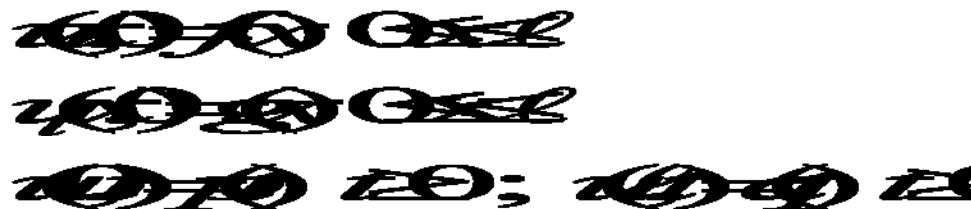
$$u(x, t) = \frac{u_0}{2c\sqrt{t}} \int_{-1}^1 \exp\left[-\frac{(x-v)^2}{4c^2 t}\right] dv$$

و یا

$$u(x, t) = \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \int_{-(1+x)/2c\sqrt{t}}^{(1-x)/2c\sqrt{t}} e^{-z^2} dz \quad z = (v-x)/2c\sqrt{t}$$

حل مسأله موج در فضای یک بعدی (به طور کلی)

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} = F(x,t) \quad 0 < x < \ell \quad t > 0$$



برای حل مسأله به دنبال جوابی بصورت (1) $u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$ می پردازیم .

و $w(x,t)$ را طوری انتخاب می کنیم، که $v(0,t)=0$, $v(\ell,t)=0$. در این صورت باید :

$$w(0,t) = p(t) \quad , \quad w(\ell,t) = q(t)$$

بدیهی است که برای w جواب یکتا وجود ندارد. ولی برای سادگی دنبال جوابی بصورت زیر می گردیم :

$$w(x,t) = ax + b$$

$$w(0,t) = p(x) \Rightarrow b = p(t)$$

$$w(\ell,t) = q(t) \Rightarrow a = \frac{1}{\ell}(q(t) - p(t))$$

$$\Rightarrow w(x,t) = \frac{1}{\ell}(q(t) - p(t))x + p(t) \quad u(x,t) = v(x,t) + \frac{1}{\ell}(q(t) - p(t))x + p(t) \quad (2)$$

حال مسأله مربوط به v را می یابیم :

از رابطه ۲

$$u_{tt} = v_{tt} + \frac{x}{l}[\ddot{q}(t) - \ddot{p}(t)] + \ddot{p}(t)$$

$$u_{xx} = v_{xx}$$

بنا بر این در مساله اصلی

$$v_{tt} + \frac{x}{l}(\ddot{q} - \ddot{p}) + \ddot{p} - c^2 v_{xx} = F(x, t)$$

و از آن جا $-c^2 v_{xx} = F_1(x, t)$ بدست می آید :

$$F_1(x, t) = F(x, t) - \frac{x}{l}[\ddot{q} - \ddot{p}] - \ddot{p}$$

با توجه به شرط مساله

$$u(x, 0) = v(x, 0) + \frac{1}{l}[q(0) - p(0)]x + p(0) = f(x)$$

$$\Rightarrow v(x, 0) = f_1(x) = f(x) - \frac{1}{l}[q(0) - p(0)]x - p(0)$$

همچنین :

$$u_t(x, 0) = v_t(x, 0) + \frac{1}{l}[\dot{q}(0) - \dot{p}(0)]x + \dot{p}(0) = g(x)$$

$$\Rightarrow v_t(x, 0) = g(x) - \frac{1}{l}[\dot{q}(0) - \dot{p}(0)]x - \dot{p}(0) = g_1(x)$$

بنابراین به مساله زیر برای $v(t)$ میرسیم :

$$(1) \quad v_{tt} - c^2 v_{xx} = F_1(x, t) \quad 0 < x < l, \quad t > 0$$

$$\begin{cases} v(x, 0) = f_1(x) & 0 < x < l \\ v_t(x, 0) = g_1(x) & 0 < x < l \end{cases} \quad \begin{cases} v(0, t) = 0 & t \geq 0 \\ v(l, t) = 0 & t \geq 0 \end{cases}$$

اگر $F_1(x, t) = 0$ باشد، که مانند قبل مساله حل می شود. اما اگر $F_1(x, t)$ مخالف صفر باشد، جواب بصورت زیر است :

$$V(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$

طبق مطالب گذشته داریم ؛

$$F_1(x, t) = 0 \Rightarrow G_n(t) = a_n \cos(\lambda_n t) + b_n \sin(\lambda_n t)$$

در معادله اصلی (۱) داریم :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\ddot{G}_n + \lambda_n^2 G_n) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) = F_1(x, t) \quad : \quad \lambda_n = c \frac{n\pi}{l}$$

$$\overset{\text{ضرایب سینوسی}}{\text{سری فوریه}} \Rightarrow \ddot{G}_n + \lambda_n^2 G_n = \frac{2}{l} \int_0^l F_1(x, t) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) dx \quad (2)$$

و با حل آن به جواب عمومی زیر می رسیم :

$$G_n(t) = a_n \cos(\lambda_n t) + b_n \sin(\lambda_n t) + G_n^*(t)$$

که در آن $G_n^*(t)$ جواب خصوصی رابطه (۲) می باشد، بنابراین :

$$V(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(\lambda_n t) + b_n \sin(\lambda_n t) + G_n^*(t)] \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$

$$V(x,0) = f_1(x) \Rightarrow a_n = -G_n^*(0) + \frac{2}{l} \int_0^l f_1(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) dx$$

$$V_t(x,0) = g_1(x) \Rightarrow b_n = \frac{1}{\lambda_n} \left[-\dot{G}_n^*(0) + \frac{2}{l} \int_0^l g_1(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) dx \right]$$

مثال) مطلوبست حل مساله زیر

$$u_{tt} - u_{xx} = t \quad 0 < x < 1 \quad , \quad t > 0$$

$$\begin{cases} u(x,0) = x & 0 \leq x \leq 1 \\ u_t(x,0) = 2 & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(0,t) = 2t & t \geq 0 \\ u(1,t) = t & t \geq 0 \end{cases}$$

حل

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$$

$$w(x,t) = ax + b \Rightarrow \begin{cases} b = 2t \\ a = \frac{(t - 2t)}{1} = -t \end{cases}$$

$$w(x,t) = -tx + 2t$$

$$u(x,t) = v(x,t) - tx + 2t$$

$$v(x,0) = u(x,0) = x$$

$$v_t(x,0) = u_t(x,0) + x - 2 = 2 + x - 2 = x$$

$$v_{xx} = u_{xx} \quad , \quad u_{tt} = v_{tt}$$

بنابراین مساله v بصورت زیر در می آید :

$$v_{tt} = v_{xx} = t \quad , \quad v(x,0) = x \quad , \quad v_t(x,0) = x \quad , \quad v(0,t) = 0 \quad , \quad v(1,t) = 0$$

برای حل مساله به جستجوی جوابی بصورت زیر می پردازیم :

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) \sin(n\pi x)$$

و با قرار دادن آن در معادله می یابیم :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\ddot{G}_n + n^2 \pi^2 G_n) \sin(n\pi x) = t$$

$$\ddot{G}_n + n^2 \pi^2 G_n = 2t \int_0^1 \sin(n\pi x) dx = \frac{-2t}{n\pi} \cos(n\pi x) \Big|_0^1 = \frac{2t}{n\pi} [1 + (-1)^{n+1}]$$

و

$$G_n = a_n \cos(n\pi t) + b_n \sin(n\pi t) + \frac{2t}{n^3 \pi^3} [1 + (-1)^{n+1}]$$

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(n\pi t) + b_n \sin(n\pi t) + \frac{2t}{n^3 \pi^3} [1 + (-1)^{n+1}] \sin(n\pi x) \right]$$

بنابراین ؛

با توجه به این که $v(x,0)=x$ می یابیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\pi x) = x \Rightarrow a_n = 2 \int_0^1 x \sin(n\pi x) dx = \frac{2}{n\pi} (-1)^{n+1}$$

از روی $v_t(x,0)=x$ می یابیم:

$$v_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} [n\pi b_n + \frac{2}{n^3\pi^3} (1 + (-1)^{n+1})] \sin(n\pi x) = x$$

بنابراین:

$$n\pi b_n + \frac{2}{n^3\pi^3} [1 + (-1)^{n+1}] = 2 \int_0^1 x \sin(n\pi x) dx = \frac{2}{n\pi} (-1)^{n+1}$$

و یا:

$$b_n = \frac{2}{n^4\pi^4} [(-1)^n - 1] + \frac{2}{n^2\pi^2} (-1)^{n+1}$$

بنابراین:

$$u(x,t) = tx + 2t + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{2}{n\pi} (-1)^{n+1} \cos(n\pi t) + \left[\frac{2}{n^4\pi^4} ((-1)^n - 1) + \frac{2}{n^2\pi^2} (-1)^{n+1} \right] \sin(n\pi t) + \frac{2t}{n^3\pi^3} (1 + (-1)^{n+1}) \right\} \sin(n\pi x)$$

تمرین (یا کوئیز) :

$$u_{tt} - 25u_{xx} = x + \frac{25}{2}\pi \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$u(x,0) = \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\right)x^2 \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$u_t(x,0) = 1 + x \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$u_x(0,t) = \frac{\pi}{2}, \quad u_x(1,t) = 1$$

حل:

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$$

$$\Leftrightarrow v_x(0,t) = v_x(1,t) = 0 \quad \text{w(x,t) را طوری باید انتخاب کنیم که}$$

$$w = ax^2 + bx \Rightarrow w_x = 2ax + b$$

$$\left. \begin{array}{l} w_x(0,t) = \frac{\pi}{2} = b \\ w_x(1,t) = 1 = 2a + b \end{array} \right\} \Rightarrow a = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$$

$$u(x,t) = v(x,t) + \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\right)x^2 + \frac{\pi}{2}x$$

بنابراین با جایگزینی داریم:

$$v_{tt} - 25v_{xx} = 25 + x$$

$$v(x,0) = -\frac{\pi}{2}x, \quad v_t(x,0) = 1 + x$$

$$v_x(0,t) = 0, \quad v_x(1,t) = 0$$

ابتدا مساله زیر را حل می نماییم :

$$v_{tt} = 25v_{xx}, \quad v_x(0,t) = 0, \quad v_x(1,t) = 0$$

با تفکیک متغیر $v(x,t) = F(x) \cdot G(t)$ ادامه می دهیم؛

چون یکی نسبت به t و دیگری نسبت به x است؛ پس k عدد ثابت است.

از رابطه
اول داریم $\Rightarrow \frac{F'}{F} = \frac{\ddot{G}}{25G} = k$

برای F \Rightarrow شرایط اولیه

$$\begin{cases} F'' - kF = 0 \\ v_x(0,t) = 0 \Rightarrow F'(0) = 0, \quad v_x(1,t) = 0 \Rightarrow F'(1) = 0 \end{cases}$$

(1) اگر $k=0$ باشد :

$$\Rightarrow F = ax + b \Rightarrow F' = a = 0 \Rightarrow F = b \rightarrow \text{یک جواب مساله}$$

(2) اگر $k = p^2$ باشد : غ ق ق

(3) اگر $k = -p^2 \Rightarrow F'' + p^2 F = 0 \quad F'(0) = 0 \quad F'(1) = 0$

$$F(x) = A \cos(px) + B \sin(px)$$

$$F'(x) = -Ap \sin(px) + Bp \cos(px)$$

$$F'(0) = 0 \Rightarrow Bp = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$F'(1) = 0 \Rightarrow F'(1) = -Ap \sin(p) \xrightarrow{p=n\pi} F_n(x) = A \cos(n\pi x)$$

جواب عمومی :

بنابراین :

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(t) \cos(n\pi x)$$

با درج در مساله اصلی :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\ddot{G}_n + 25n^2 \pi^2 G_n) \cos(n\pi x) = 25 + x$$

و از آن جا :

بسط زوج
سری فوريه

$$\ddot{G}_n + 25n^2 \pi^2 G_n = 2 \int_0^1 (25 + x) \cos(n\pi x) dx = 2 \int_0^1 x \cos(n\pi x) dx$$

$$= \frac{2}{n^2 \pi^2} [(-1) - 1] , \quad n \neq 0$$

جواب
عمومی

$$\Rightarrow G_n(t) = a_n \cos(5\pi t) + b_n \sin(5\pi t) + \frac{2}{25n^4 \pi^4} [(-1)^n - 1] , \quad n \neq 0$$

به ازای $n=0$ داریم :

$$\ddot{G}_n = \int_0^1 (25 + x) dx = \frac{51}{2} \Rightarrow G_0 = \frac{51}{2} t^2 + a_0 t + b_0$$

بنابراین :

$$v(x, t) = \frac{51}{2} t^2 + a_0 t + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(5n\pi t) + b_n \sin(5n\pi t) + \frac{2}{25n^4 \pi^4} ((-1)^n - 1) \right] \cos(n\pi x)$$

$$v(x, 0) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n + \frac{2}{25n^4 \pi^4} ((-1)^n - 1) \right] \cos(n\pi x) = -\frac{\pi}{2} x$$

$$b_0 = \int_0^1 \left(-\frac{\pi}{2} x\right) dx = -\frac{\pi}{4}$$

$$a_n = \frac{2}{25n^4 \pi^4} [(-1)^{n+1} + 1] - \pi \int_0^1 x \cos(n\pi x) dx = \frac{2}{n^2 \pi^2} [(-1)^{n+1} + 1] \left(\frac{1}{25n^2 \pi^2} + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$v_t(x, 0) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 5n\pi b_n \cos(n\pi x) = 1 + x$$

$$a_0 = \int_0^1 (1 + x) dx = \frac{3}{2}$$

$$5n\pi b_n = 2 \int_0^1 (1 + x) \cos(n\pi x) dx = \frac{2}{n^2 \pi^2} [(-1)^{n+1} - 1]$$

$$b_n = \frac{2}{5n^3\pi^3} [(-1)^n - 1]$$

$$u(x,t) = \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\right)x^2 + \frac{\pi}{2}x + \frac{1}{2}\left(\frac{51}{t^2} + 3t - \frac{\pi}{2}\right) +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{2}{n^2\pi^2} [(-1)^{n+1} + 1] \left(\frac{1}{25n^2\pi^2} + \frac{\pi}{2} \right) \cos(5n\pi t) + \right.$$

$$\left. \frac{2}{5n^3\pi^3} [(-1)^n - 1] \sin(5n\pi t) + \frac{2}{25n^4\pi^4} [(-1)^n - 1] \right\} \cos(n\pi x)$$

مسأله گرما در حالت کلی

$$u_t - c^2 u_{xx} = F(x, t) \quad 0 < x < l$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad 0 \leq x \leq l$$

$$u(0, t) = p(t)$$

$$u(l, t) = q(t)$$

حل

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$$

$$w \longrightarrow v(0, t) = v(l, t) = 0$$

$$w(x, t) = ax + b$$

$$\Rightarrow u(x, t) = v(x, t) + \frac{q(t) - p(t)}{l} x + p(t)$$

بنابراین :

$$v_t - c^2 v_{xx} = F_1(x, t) \quad 0 < x < l$$

$$v(x, 0) = f_1(x) \quad 0 \leq x \leq l$$

$$v(0, t) = v(l, t) = 0$$

که داریم :

$$F_1(x, t) = F(x, t) - \frac{q(t) - p(t)}{l} x - p(t)$$

$$f_1(x) = f(x) - \frac{q(0) - p(0)}{l} x - p(0)$$

برای تعیین v با توجه به شرایط کرانه ای مانند مساله موج کافی است که به جستجوی جوابی به صورت

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right)$$

باشیم و سایر موارد، مشابه موج حل می شود.

تکلیف-مثال

$$u(t) - 9u_{xx} = n \quad 0 < x < 1 \quad t > 0$$

$$u(x,0) = 1 - \cos(\pi x) \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$u(0,t) = 0 \quad t > 0, \quad u(1,t) = 2 \quad t \geq 0$$

حل

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$$

$$v(0,t) = v(1,t) = 0 \Rightarrow w(x,t) = 2x$$

$$u(x,t) = v(x,t) + 2x$$

حال به بررسی مساله برای v می پردازیم :

$$v_t - 9v_{xx} = x$$

$$v(x,0) = 1 - \cos(\pi x) - 2x, \quad v(0,t) = 0 = v(1,t)$$

با جایگزینی داریم :

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) \sin(n\pi x)$$

در معادله مساله فوق داریم :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\dot{G}_n + 9n^2\pi^2 G_n) \sin(n\pi x) = x$$

$$\dot{G}_n + 9n^2\pi^2 G_n = 2 \int_0^1 x \sin(n\pi x) dx$$

ضرایب فرد
فوریه

و از آن جا :

$$\dot{G}_n + 9n^2\pi^2 G_n = \frac{2}{n\pi} (-1)^{n+1}, \quad n \neq 0$$

که دارای جواب عمومی زیر است :

$$G_n = a_n e^{-9n^2\pi^2 t} + \frac{2}{9n^3\pi^3} (-1)^{n+1}$$

بنابراین :

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n e^{-9n^2\pi^2 t} + \frac{2}{9n^3\pi^3} (-1)^{n+1} \right\} \sin(\pi x)$$

با توجه به شرط $v(x,0) = 1 - \cos(\pi x) - 2x$ داریم :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n + \frac{2}{9n^3\pi^3} (-1)^{n+1} \right) \sin(n\pi x) = 1 - \cos(\pi x) - 2x$$

و از آن جا :

$$a_n = \frac{2}{9n^3\pi^3} (-1)^n + \frac{2}{\pi} \left[\frac{3(-1)^n}{n} - \frac{1}{n} + \frac{n((-1)^{n+1} - 1)}{n^2 - 1} \right]$$

برای $n=1$ جدا می کنیم

$$a_1 = \frac{-2}{9\pi^3} + 2 \int_0^1 (1 - \cos(\pi x) - 2x) \sin(\pi x) dx = \frac{-2}{9\pi^3}$$

بنابراین :

$$u(x,t) = 2x - \frac{2}{9\pi^3} e^{-9\pi^2 t} + \frac{2}{9\pi^3} \sin(\pi x) +$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \frac{2}{9n} (-1)^n + \frac{2}{\pi} \left[\frac{3(-1)^n}{n} - \frac{1}{n} + \frac{n[(-1)^{n+1} - 1]}{n^2 - 1} \right] e^{-9n^2\pi^2 t} + \frac{2}{9n^3\pi^3} (-1)^{n+1} \right\} \sin(n\pi x)$$

$$u_t - 4u_{xx} = xt \quad 0 < x < 1$$

$$u(x,0) = \sin(\pi x) \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$u(0,t) = t \quad u(1,t) = t^2 \quad t \geq 0$$

حل مساله موج در فضای دو بعدی

$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy}) \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \quad t > 0$$

$$u(x, y, 0) = f(x, y) \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b$$

$$u_t(x, y, 0) = g(x, y) \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b$$

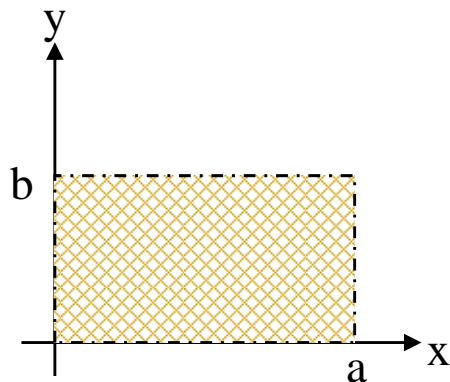
$$u(x, 0, t) = 0 \quad 0 \leq x \leq a, \quad t \geq 0$$

$$u(x, b, t) = 0 \quad 0 \leq x \leq a, \quad t \geq 0$$

$$u(0, y, t) = 0 \quad 0 \leq y \leq b, \quad t \geq 0$$

$$u(a, y, t) = 0 \quad 0 \leq y \leq b, \quad t \geq 0$$

مانند غشا مستطیلی با ضلعهای a, b



از روش ضربی $u(x, y, t) = F(x, y) \cdot G(t)$ استفاده می کنیم و در نهایت داریم :

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} [a_{mn} \cos(\lambda_{mn} t) + b_{mn} \sin(\lambda_{mn} t)] \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

$$u(x, y, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) = f(x, y)$$

$$\lambda_{mn} = c\pi \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}$$

بنابراین :

$$a_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) dy dx$$

و نیز؛

$$u_t(x, y, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_{mn} \lambda_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) = g(x, y)$$

$$b_{mn} = \frac{4}{ab\lambda_{mn}} \int_0^a \int_0^b g(x, y) \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) dy dx$$

و از آن جا :

مثال (مساله موج دو بعدی به ازای $a = b = \pi$, $c=1$ و سرعت اولیه صفر و ارتعاش اولیه $f(x, y) = xy \sin(x) \sin(y)$)

$$g(x, y) = 0 \Rightarrow b_{mn} = 0$$

$$a_{mn} = \frac{4}{\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi f \sin(mx) \sin(ny) dx dy =$$

$$\frac{4}{\pi^2} \int_0^\pi x \sin(x) \sin(mx) dx \int_0^\pi y \sin(y) \sin(ny) dy$$

$$\int_0^\pi x \sin(x) \sin(mx) dx = \begin{cases} \frac{2m[(-1)^{m+1} - 1]}{[m^2 - 1]^2} & ; m \neq 1 \\ \frac{\pi^2}{4} & ; m = 1 \end{cases}$$

می یابیم :

$$a_{mn} = \begin{cases} \frac{16 mn [(-1)^{m+1} - 1] [(-1)^{n+1} - 1]}{\pi^2 [m^2 - 1]^2 [n^2 - 1]^2} & ; m \neq 1, n \neq 1 \\ \frac{\pi m [(-1)^{m+1} - 1]}{[m^2 - 1]} & ; m \neq 1, n = 1, \lambda_{mn} = \sqrt{(m^2 + n^2)} \\ \frac{\pi n [(-1)^{m+1} - 1]}{[n^2 - 1]} & ; m = 1, n \neq 1 \\ \frac{\pi^2}{4} & ; m = 1, n = 1 \end{cases}$$

معادلات لاپلاس و پواسن

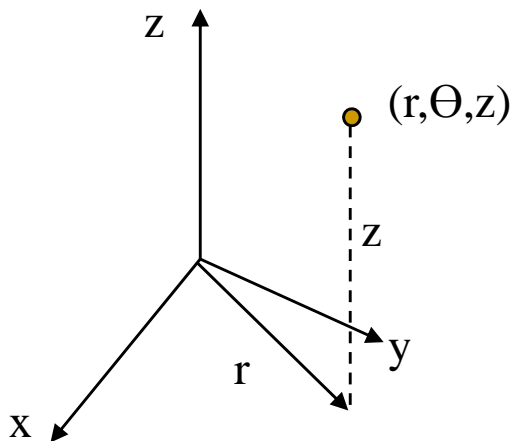
معادله لاپلاس

یکی از مهمترین معادلات با مشتق جزئی در فیزیک معادله لاپلاس می باشد :

$$\nabla^2 u = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 & \longrightarrow \text{سه بعدی} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & \longrightarrow \text{دو بعدی} \end{cases}$$

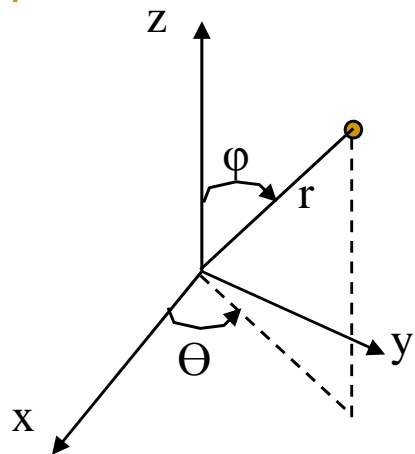
(۱) در مختصات دکارتی

(۲) در مختصات استوانه ای



$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta &= \text{Arc tan}\left(\frac{y}{x}\right) \\ z &= z \end{aligned}$$

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$



$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \sin(\varphi) \\ y = r \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ z = r \cos(\varphi) \end{cases}$$

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\cos(\varphi) \partial u}{r^2 \partial \varphi} + \frac{1}{r^2 \sin^2(\varphi)} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

در حل مسائل مربوط لاپلاس باید دقت نمود کدامیک از مختصات ها مفید می باشد و سپس مساله را حل نمود.

نکته نیروهای جاذبه و دافعه بین بارهای الکتریکی و اجسام که به ترتیب از قوانین کولن و نیوتن پیروی می کنند، دارای تابع پتانسل هستند و آن تابع پتانسیل خود نیز جواب معادله لاپلاس می باشد.

مثال ۱ پتانسیل میدان بین دو صفحه هادی موازی که عمود بر محور x در نقاطی با طول های ۵-۵ هستند را بیابید ، در صورتی که اختلاف پتانسیل موجود روی این صفحات به ترتیب ۱۲۰ و ۱۱۰ ولت باشند .

حل

با توجه به این که پتانسیل فقط به محور x ها وابسته می شود، آن گاه معادله لاپلاس بصور $u_{xx} = 0$ در می آید که آن گاه داریم :

$$\left. \begin{array}{l} u(x) = ax + b \\ u(5) = 220 \text{ volt} \\ u(-5) = 110 \text{ volt} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} a = 11 \\ b = 165 \end{cases} \Rightarrow u(x) = 11x + 165$$

مثال ۲ پتانسیل موجود بین دو استوانه هم محور به شعاع ۵ و ۱۰ را بیابید، در صورتی که اختلاف پتانسیل های موجود بر این استوانه ها به ترتیب ۲۲۰ و ۱۱۰ ولت باشند .

حل

با استفاده از مختصات استوانه ای ، معادله لاپلاس به صورت $u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + u_{zz} = 0$ می باشد. که چون اشکال به صورت استوانه ای هستند، تغییر پتانسیل در اثر تغییر شعاع r می باشد؛ پس داریم :

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r = 0 \quad , \quad u(5) = 110 \quad , \quad u(10) = 220$$

$$\frac{du}{dr} = v = u_r \rightarrow \nabla^2 u = \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} = \frac{dv}{dr} + \frac{1}{r} v = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dr} = -\frac{1}{r} v$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{v} + \frac{1}{r} dr = 0 \Rightarrow \ln(v) + \ln(r) = \ln(c)$$

$$\Rightarrow v_r = c \Rightarrow v = \frac{c}{r} \Rightarrow \frac{dv}{dr} = \frac{c}{r} \Rightarrow u = c \ln(r) + k$$

$$\Rightarrow u = \frac{110}{\ln(2)} \ln(r) + 110 \left(1 - \frac{\ln(5)}{\ln(2)}\right)$$

مثال ۳ چنانچه توزیع حرارت در فضای بین دو کره به شعاع های ۵ و ۱۰ در حالت پایا (ماندگار) بوده و کره ها به ترتیب در درجه حرارت ثابت ۱۰ و ۵ باشد، تابع درجه حرارت را در داخل دو کره بیابید .

حل

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du}{dr} \right) = 0$$

تغییرات دما نسبت به θ و ρ صفر است. (مشتقات آن ها حذف می شود)

$$r^2 \frac{du}{dr} = a \Rightarrow \left. \begin{array}{l} u = \frac{-a}{r} + b \\ u(10) = 5 \\ u(5) = 10 \end{array} \right\} \Rightarrow u = \frac{50}{r}$$

معادلات پواسن

$$\nabla^2 u = f(x, y, z)$$

مثال مطلوبست حل معادله زیر :

$$u_{xx} + u_{yy} = x + 2y \quad 0 < x < \pi \quad 0 < y < \pi$$

$$u(x, 0) = x \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad u(x, \pi) = 2 \quad 0 \leq x \leq \pi$$

$$u(0, y) = y \quad 0 \leq y \leq \pi, \quad u(\pi, y) = \cos(y) \quad 0 \leq y \leq \pi$$

حل

قرار می دهیم $u(x, y) = v(x, y) + w(x, y)$ و w را چنان می یابیم که $v(x, \pi) = v(x, 0) = 0$ (در یک جهت شرایط کرانه ای را صفر می کنیم (y)) بنابراین : $w(x, y) = ay + b$ و با توجه به شرایط مساله :

$$\begin{cases} b = x \\ a = \frac{2-x}{\pi} \end{cases} \Rightarrow u(x, y) = v(x, y) + \frac{2-x}{\pi} y + x$$

با توجه به این که $u(0, y) = y$, $\cos(y) = u(\pi, y)$ بنابراین :

$$v(\pi, y) = \cos(y) - \frac{2-\pi}{\pi} y - \pi, \quad v(0, y) = \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) y$$

بنابراین مساله را برای v داریم :

$$u_{xx} + v_{yy} = x + 2y, \quad v(x, 0) = v(x, \pi) = 0$$

$$v(0, y) = \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)y, \quad v(\pi, y) = \cos(y) - \frac{2 - \pi}{\pi}y - \pi$$

با فرض $v(x, y) = F(x) \cdot G(y)$ و درج آن در معادله $v_{xx} + v_{yy} = 0$ می یابیم :

$$\frac{F''}{F} = -\frac{G''}{G} = k$$

بنابراین به دو معادله دیفرانسیل زیر می رسیم :

$$G'' + kG = 0 \quad \leftarrow \text{بر حسب } y$$
$$F'' - kF = 0 \quad \leftarrow \text{بر حسب } x$$

با توجه به شرایط اول و دوم مساله، $G(0) = 0$ ، $G(\pi) = 0$ و از آن جا مانند قبل داریم :

$$G_n(y) = \sin(ny) \quad , \quad k = n^2 \quad \leftarrow \text{عدد مثبت}$$

حال به حل مساله مربوط به v بصورت $v(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(x) \sin(ny)$ می پردازیم .

با درج آن در مساله داریم :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (F_n'' - n^2 F_n) \sin(xy) = x + 2y \Rightarrow F_n'' - n^2 F_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (x + 2y) \sin(xy) dy = a_n \pi + b_n$$

$$a_n = \frac{-2}{n\pi} [(-1)^n - 1]$$

که در آن :

$$b_n = \frac{4}{-n} (-1)^{n+1}$$

و جواب عمومی عبارتست از :

$$F_n(x) = \underbrace{\frac{-a_n}{n^2} x - \frac{b_n}{n^2}}_{\text{جواب خصوصی}} + A_n e^{nx} + B_n e^{-nx} \quad [s^2 - n^2 = 0 \Rightarrow s^2 = k = n^2 \Rightarrow s = \pm n]$$

و از آن جا :

$$v(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\underbrace{-\frac{a_n}{n^2} x - \frac{b_n}{n^2} + A_n e^{nx} + B_n e^{-nx}}_{\text{جواب عمومی مربوط به F}} \right) \sin(ny)$$

این قسمت عمومی را می توان بصورت هایپربولیک نمایش داد :

$$\cosh(z) = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) \quad , \quad \sinh(z) = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$$

$$F(x) = \underbrace{M \cosh(nx) + N \sinh(nx)}_{\text{جواب عمومی}}$$

با توجه به شرایط سوم و چهارم مربوط به مساله v به ترتیب می یابیم:

$$v(0, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{b_n}{n^2} + A_n + B_n \right] \sin(ny) = \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) y$$

$$v(\pi, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{b_n}{n^2} - \frac{a_n}{n^2} \pi + A_n e^{n\pi} + B_n e^{-n\pi} \right] \sin(ny) = \cos(y) - \frac{2-\pi}{\pi} y - \pi$$

و از آن جا :

$$v(0, y) \longrightarrow A_n + B_n = \frac{b_n}{n^2} + \frac{2}{\pi} \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \int_0^{\pi} y \sin(ny) dy$$

$$v(\pi, y) \longrightarrow A_n e^{n\pi} + B_n e^{-n\pi} = \frac{b_n}{n^2} + \frac{a_n}{n^2} \pi + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\cos(y) - \frac{2-\pi}{\pi} y - \pi \right) \sin(ny) dy$$

با حل دو معادله دو مجهول مساله حل می شود :

$$u(x, y) = v(x, y) + w(x, y)$$

توابع مختلط

$$z = x + iy \Rightarrow \begin{cases} x = R_e[z] & \text{قسمت حقیقی} \\ y = I_m[z] & \text{قسمت موهومی} \end{cases}$$

$$z^2 + 4 = 0 \Rightarrow z = \pm 2i \quad i^2 = -1 \Rightarrow i = \sqrt{-1}$$

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2) \quad \text{(1) جمع :}$$

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \quad \text{(2) ضرب :}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \quad z_2 \neq 0 \quad \text{(3) تقسیم :}$$

به عنوان مثال :

$$\begin{cases} z_1 = 2 - 3i \\ z_2 = -5 + i \end{cases} \Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$$

خواص اعمال حسابی

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \\ z_1 z_2 = z_2 z_1 \end{cases}$$

(1) قوانین جابجایی:

$$\begin{cases} (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \\ (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3) \end{cases}$$

(2) قوانین انجمنی:

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$$

(3) قوانین بخش پذیری:

$$0 + z = z + 0 = 0$$

$$z + (-z) = 0$$

$$z \times 1 = z$$

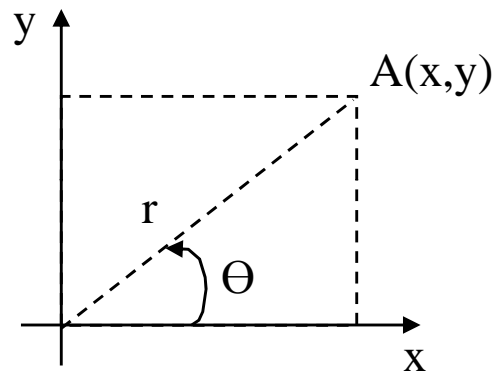
اعداد مختلط مزدوج

$$z = x + iy \Rightarrow \bar{z} = x - iy$$

$$z + \bar{z} = 2x \quad , \quad z - \bar{z} = 2iy$$

$$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \quad , \quad y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

شكل قطبي اعداد مختلط



$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases}$$

$$r = |z|^n = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

آرگومان

$$z = r \cos(\theta) + ri \sin(\theta) = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

فرمول اویلر

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad , \quad z = re^{i\theta}$$

$$e^{i\theta} \Rightarrow T = 2k\pi i$$

$$e^{i\theta + (2k\pi i)} = e^{i\theta} \longrightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \quad , \quad z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

خواص

$$|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$$

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$$\frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$$

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

فرمول موآور

اثبات :

نواحی در صفحه مختلط

ϵ همسایگی نقطه z_0 مجموعه نقاطی از صفحه مختلط است که در نامساوی $|z - z_0| < \epsilon$ صدق کند.

$$N \in (z_0) = \{z | z \in \mathbb{C}, |z - z_0| < \epsilon\}$$

فرض کنید D زیر مجموعه ای از صفحه مختلط باشد، نقطه $z_0 \in D$ را یک نقطه داخلی D نامند هرگاه یک همسایگی از z_0 وجود داشته باشد که $N \in (z_0) \subset D$

$$N \in (z_0)$$

و نیز نقطه z_0 را یک نقطه خارجی D نامند هرگاه یک همسایگی مانند $N \in (z_0)$ موجود باشد که:

$$N \in (z_0) \cap D = \emptyset$$

نقطه z_0 را یک نقطه کرانه ای D نامند هرگاه به ازای هر همسایگی $N \in (z_0)$

$$\begin{cases} N \in (z_0) \cap (\mathbb{C} - D) \neq \emptyset \\ N \in (z_0) \cap D \neq \emptyset \end{cases}$$

مجموعه D را یک مجموعه **باز** گویند هرگاه؛ تمام نقاط آن نقاط داخلی باشند.

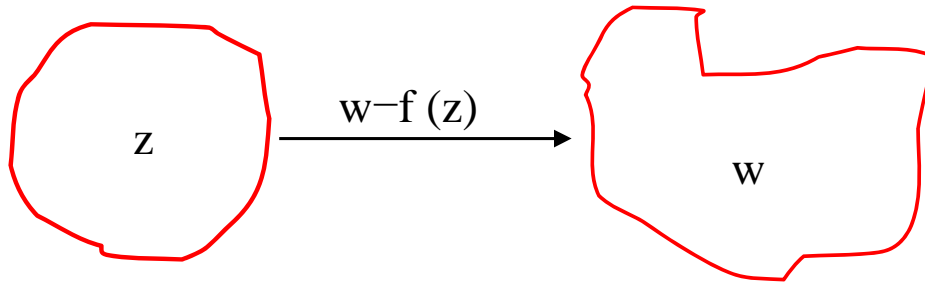
یک مجموعه را **بسته** گویند هرگاه شامل نقاط مرزی خود نیز باشد.

مجموعه D را **ساده** گویند هرگاه منحنی مرز آن خود را قطع نکند.

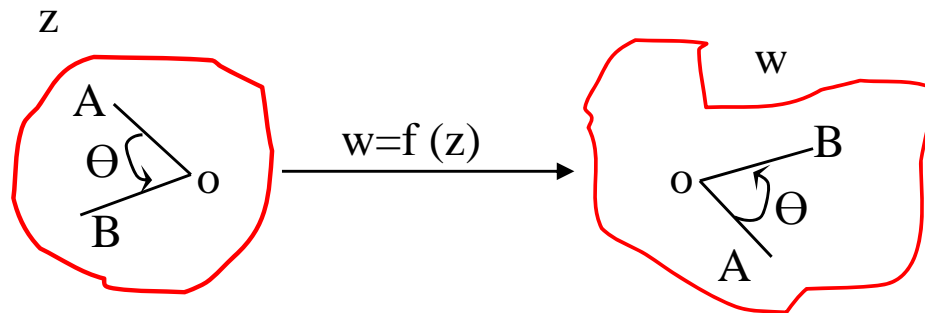
مجموعه D را **همبند** گویند هرگاه؛ بتوان هر دو نقطه از آن را با یک خط شکسته طوری به یکدیگر وصل نمود که کلیه این نقاط شکسته داخل D باشد .

توابع مختلط

توسط تابعی مانند $w=f(z)$ می توان ناحیه ای از صفحه z را به داخل ناحیه ای در صفحه w منتقل نمود که در اینصورت به تابع $w=f(z)$ یک نگاشت یا یک تبدیل می گویند .



نگاشتی که زاویه را چه از نظر اندازه و چه از نظر جهت بدون تغییر منتقل کند به **نگاشت همدیس** موجود است .



اندازه زاویه ها برابر و جهت در هر دو از A به B است.

حد تابع مختلط

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$$

$w = f(z)$ در نقطه z_0 دارای حد

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0, |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - w_0| < \varepsilon$$

هرگاه

تابع $f(z)$ را در نقطه z_0 پیوسته گویند هر گاه این تابع در z_0 دارای حدی برابر مقدار تابع در این نقطه باشد، یعنی :

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

هر گاه $f(z)$ و $g(z)$ در z_0 دارای حد باشند، آن گاه :

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) \pm g(z)) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \pm \lim_{z \rightarrow z_0} g(z)$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) \cdot g(z)) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} g(z)$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left(\frac{f(z)}{g(z)} \right) = \frac{\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)}{\lim_{z \rightarrow z_0} g(z)}, \quad \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) \neq 0$$

مشتق یک تابع مختلط

$w=f(z)$ دارای مشتق است اگر $\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$ دارای حد باشد یعنی :

$$f'(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

تابع $w=f(z)$ را در نقطه z_0 **تحلیلی** گویند هرگاه یک همسایگی از z_0 موجود باشد که این تابع در تمام نقاط این همسایگی دارای مشتق باشد.

تابع $w=f(z)$ را یک تابع **تمام** نامند هرگاه در کلیه نقاط صفحه z تحلیلی باشد. به عنوان مثال $w = z^2$ یا هر تابع به صورت یک چند جمله ای تابعی تمام است.

در رابطه با مشتق دو قضیه بسیار مهم وجود دارد.

هرگاه تابع $f(z) = u + iv$ در نقطه $z = x + iy$ دارای مشتق باشد آن گاه :

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{i} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

همچنین

$$u_y = -v_x \quad , \quad u_x = v_y$$

این معادلات به شرایط یا معادلات کوشی ریمان موسومند.

اثبات به عنوان تمرین (از طریق مسیرهای مختلف برای $\Delta z \rightarrow 0$)

قضیه دوم کوشی - ریمان

هر گاه u و v در تابع $f(z) = u + iv$ در نقطه $z = x + iy$ در معادلات کوشی ریمان صدق کرده و در یک همسایگی از (x,y) پیوسته و با مشتقات جزئی پیوسته باشد، آن گاه $f'(z)$ موجود و برابر است با:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{i} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

معادلات کوشی - ریمان در مختصات قطبی

اگر قرار دهیم $x = r \cos \theta$ ، $y = r \sin \theta$ آن گاه؛

$$u_r = \frac{1}{r} v_\theta \quad , \quad v_r = -\frac{1}{r} u_\theta$$

و مشتق تابع در صورت وجود برابر است با:

$$f'(z) = (u_r + i v_r) e^{-i\theta}$$

مثال (۱) مشتق $f(z) = z^2$ را در صورت وجود بیابید.

$$f(z) = u + iv = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy$$

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy \Rightarrow \begin{cases} u_y = -v_x = -2y \\ u_x = v_y = 2x \end{cases}$$

همه پیوسته و در کوشی
ریمان صدق می کنند

$$f'(z) = u_x + iv_x = 2x + i2y = 2z$$

مثال (۲) مشتق $f(z) = \bar{z}$ را در صورت وجود بیابید.

$$f(z) = \bar{z} = x - iy \Rightarrow \begin{cases} u = x \\ v = -y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_x = 1, u_y = 0 \\ v_y = -1, v_x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} u_x \neq v_y \\ u_y = -v_x = 0 \end{matrix} \longrightarrow$$

در هیچ نقطه ای معادلات کوشی ریمان صدق نمی کنند؛ در هیچ نقطه ای مشتقپذیر نیست.

مثال (۳) مشتق $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$ را در صورت وجود بیابید.

$$u = x^2 + y^2, \quad v = 0 \Rightarrow \begin{cases} u_x = 2x \\ v_y = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} u_y = 2y \\ v_x = 0 \end{cases}$$

شرط برقراری شرایط $x=y=0$ ، بنابراین فقط در نقطه $(0,0)$ مشتقپذیر است.

$$f(z) = (R_e z)^2 + i(I_m z)^2 \text{ (مثال ۴)}$$

$$f(z) = x^2 + iy^2$$

$$u = x^2, v = y^2 \Rightarrow u_x = 2x, v_y = 2y, v_x = u_y = 0$$

u, v تنها وقتی در کوشی - ریمان صدق می کند که $y=x$ باشد و در اینصورت

$$f'(x+iy) = 2x$$

قسمت حقیقی و قسمت موهومی تابع مختلط

که در حوزه D تحلیلی است جواب های معادله لاپلاس

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad , \quad \nabla^2 v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

در D هستند و مشتقات جزئی مرتبه دوم پیوسته در D دارند .

جوابی از معادله لاپلاس را که مشتقات جزئی مرتبه دوم پیوسته داشته باشند تابع **همساز** می نامیم . بنابراین قسمت های حقیقی و موهومی یک تابع تحلیلی توابع همسازند .

تعریف) هر گاه دو تابع همساز $u(x,y)$, $v(x,y)$ در یک حوزه D در معادلات کوشی – ریمان صدق کنند، یعنی هرگاه v , قسمت های حقیقی و موهومی یک تابع تحلیلی $f(z)$ در D باشند در این صورت $v(x,y)$ را تابع **همساز مزدوج** $u(x,y)$ در D نامند .

مزدوج یک تابع همساز را می توان از معادلات کوشی – ریمان بدست آورد .

مثال مزدوج همساز $u = x^2 - y^2$ را بدست آورید .

u در معادله لاپلاس صدق می کند

$$u_{xx} + u_{yy} = 2 - 2 = 0$$

$$v_x = -u_y = 2y \Rightarrow v = 2xy + h(y) \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} u_x = v_y = 2x \\ (1) \Rightarrow v_y = 2x + h'(y) \end{array} \right\} \Rightarrow h'(y) = 0 \Rightarrow v(x, y) = 2xy$$

و در نتیجه $f(z) = (x^2 - y^2) + i2xy$ تابعی تحلیلی است .

تمرین تابع تحلیلی $w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ را به دست آورید، وقتی که $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$ ، $w(0) = 0$ باشد . (صفحه ۱۶ کتاب دکتر نیکوکار)

$$w(z) = \underbrace{x^3 - 3xy^2}_u + i \underbrace{(3x^2y - y^3)}_v$$

توابع مقدماتي

۱- تابع نمایی

تابع نمایی به ازای هر z بصورت زیر است :

$$e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y) \Rightarrow \begin{cases} |e^z| = e^x \\ \arg e^z = y \end{cases}$$

تابع e^z به ازای تمام مقادیر z ؛ تحلیلی و مخالف صفر است و

$$(e^z)' = e^z$$

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$$

با توجه به این که :

$$e^{2\pi i} = \cos(2\pi) + i \sin(2\pi) = 1$$

$$\Rightarrow e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z$$

بنابراین :

یعنی e^z تابعی متناوب با دوره تناوب $2\pi i$ می باشد . لذا $f(z) = e^z$ تمام مقادیر خود را در نوار $-\pi < y < \pi$ اختیار می کند، که به این نوار نامتناهی، ناحیه بنیادی e^z می گویند. بعضی از خواص آن عبارتند از :

$$e^0 = 1 , e^{z_1} \div e^{z_2} = e^{z_1-z_2} , (e^z)^n = e^{nz}$$

توجه) دامنه تابع نمایی ، کل صفحه مختلط و برد تابع تمام صفحه مختلط به استثنای مبدأ می باشد.

مثال) اگر z يك عدد مختلط باشد ، مدول و آرگومان عدد e^{z+i} کدام است؟

$$e^{z+i} = e^{x+i(y+1)} = e^x e^{i(y+1)} \longrightarrow \begin{cases} |e^{z+i}| = e^x \\ \arg e^{z+i} = y+1 \end{cases}$$

توجه) به ازای هر z ، $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$ و نیز $e^{\bar{z}}$ هیچ جا تحلیلی نمی باشد .

۲- توابع مثلثاتی و هذلولوی

توابع $\sin z$ ، $\cos z$ را بصورت زیر تعریف می کنیم.

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$$

$$\cos z = \frac{1}{2i}(e^{iz} + e^{-iz})$$

این دو تابع متناوب با دوره تناوب 2π می باشند. همچنین توابع زیر را نیز داریم :

$$\left(\frac{1}{\cos z}\right) \sec z , \left(\frac{1}{\sin z}\right) \csc z , \tan z , \cot z$$

به دلیل این که e^z تحلیلی است توابع $\sin z$ ، $\cos z$ تحلیلی هستند (به ازای تمام مقادیر). همچنین $\tan z$ ، $\sec z$ بجز در نقاطی که $\cos z$ مساوی صفر است تحلیلی هستند. و توابع $\cot z$ ، $\csc z$ بجز در نقاطی که $\sin z = 0$ است تحلیلی هستند.

توابع $\cos z$ ، $\sec z$ زوج و بقیه فرد می باشد.

توجه) تمام فرمول های توابع مثلثاتی حقیقی برای مقادیر مختلط نیز برقرارند .

$$(\cos z)' = -\sin z$$

$$(\sin z)' = \cos z$$

$$(\tan z)' = \sec^2 z$$

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

$$\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2$$

سینوس و کسینوس هذلولوي متغير z :

$$\sinh z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}) \quad , \quad \cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$$

توابع فوق به ازاي کلیه مقادير z تحلیلي مي باشند و دوره تناوب هر دو برابر $2\pi i$ مي باشد و دامنه و برد آن ها تمام صفحه اعداد مختلط است.

با توجه به فرمول هاي داده شده داریم :

$$\cosh z = \cos(iz) \quad , \quad \sinh z = -i \sin(iz)$$

$$\cosh(iz) = \cos(z) \quad , \quad \sinh(iz) = i \sin(z)$$

به راحتی مي توان بدست آورد که :

$$(\sinh z)' = \cosh z \quad , \quad (\cosh z)' = \sinh z$$

$$(\tanh z)' = \operatorname{sech} z \quad , \quad (\coth z)' = -\operatorname{csc} h^2 z$$

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$$

$$\sinh(z_1 \pm z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 \pm \cosh z_1 \sinh z_2$$

$$\sinh(-z) = -\sinh z, \cosh(-z) = \cosh z$$

$$\left(\tan z = \frac{\sinh z}{\cosh z} \quad , \quad \operatorname{sech} z = \frac{1}{\cosh z}, \dots \right)$$

توجه ($\tanh z$ تابعي متناوب با دوره تناوب πi مي باشد.

۴- توابع معکوس مثلثاتی

معکوس سینوس $w = \sin^{-1} z$ تابعی است که در رابطه $\sin w = z$ صدق می کند.

معکوس کسینوس $w = \cos^{-1} z$ تابعی است که در رابطه $\cos w = z$ صدق می کند.

سایر معکوس های توابع مثلثاتی و هذلولوی به طریق مشابه تعریف می شوند.

معکوس تابع هذلولوی و مثلثاتی را می توان بر حسب تابع لگاریتم بیان نمود.

$$\sin^{-1} z = -i \ln(iz + \sqrt{1 - z^2})$$

$$\cos^{-1} z = -i \ln(z + i\sqrt{1 - z^2})$$

$$\tan^{-1} z = \frac{i}{2} \ln\left(\frac{i+z}{i-z}\right)$$

$$\sinh^{-1} z = \ln(z + \sqrt{z^2 + 1}) \quad , \quad \cosh^{-1} z = \ln(z + \sqrt{z^2 - 1})$$

$$\tanh^{-1} z = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

همچنین داریم :

$$\frac{d}{dz} \sin^{-1} z = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$$

$$\frac{d}{dz} \cos^{-1} z = \frac{-1}{\sqrt{1-z^2}}$$

$$\frac{d}{dz} \tan^{-1} z = \frac{1}{1+z^2}$$

۵- توابع توانی $w = z^c$

$w = z^c = e^{c \ln z}$ بنابراین به علت چند مقداری بودن $\ln z$ دیگر به صورت تابع نیست، برای همین تعریف می کنیم:

$$w = e^{c \ln z}$$

به عنوان مثال:

$$i^i = e^{i \ln i} = e^{i(\frac{\pi}{2} + 2\pi n)} = e^{-\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$$

$$e^{-\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e^\pi}} \quad \text{مقدار اصلی}$$

با توجه به فرمول $z^c = e^{c \ln z}$ ، برای هر عدد مختلط a می توان نوشت:

$$a^z = e^{z \ln a}$$

به سادگی می توان نشان داد:

$$\frac{d}{dz} z^c = cz^{c-1} \quad (|z| > 0), \quad \alpha < \arg z < \alpha + 2\pi$$

$$\frac{d}{dz} a^z = a^z \ln a \quad a \neq 0$$

$$w = \sqrt[n]{z} \quad \text{۶- توابع}$$

هرگاه $z = re^{i\theta}$ ، $-\pi < \theta \leq \pi$ باشد، آن گاه:

$$w = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{(\theta+2k\pi)}{n}} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

جواب های قابل قبول برابر n عدد می باشد که با یکدیگر متفاوت هستند. به عنوان مثال :

$$w = (i+1)^{\frac{1}{4}} \Rightarrow z = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \Rightarrow w = \sqrt[8]{2} e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}\right)}$$

$$w = \begin{cases} \sqrt[8]{2} e^{i\frac{\pi}{16}} & k = 0 \\ \sqrt[8]{2} e^{i\frac{9\pi}{16}} & k = 1 \\ \sqrt[8]{2} e^{i\frac{-7\pi}{16}} & k = -1 \\ \sqrt[8]{2} e^{i\frac{-15\pi}{16}} & k = -2 \end{cases}$$

$$W = z^n \text{ - توابع ۷}$$

در این مورد جواب یکتا است، فقط در صورت نیاز باید اصلاحی در آن صورت گیرد تا $-\pi < \varphi < \pi$ باشد.

۱- تابع همانی

این تابع تام و همدیس می باشد. $f(z) = z \longrightarrow$

۲- تابع $w = z + b$

تابعی است تام که هر شکل را بدون تغییر به اندازه b منتقل می کند. (b می تواند عدد مختلط باشد)

۳- توابع خطی $w = az + b$ (a, b می تواند عدد مختلط و ثابت باشد)

مثال $w = iz + 1 + i = (-y + 1) + i(x + 1)$

حال اگر رابطه بین x, y در صفحه z به صورت یک سهمی باشد، یعنی $y = x^2$ آنگاه در صفحه w رابطه بین u, v چنین می شود:

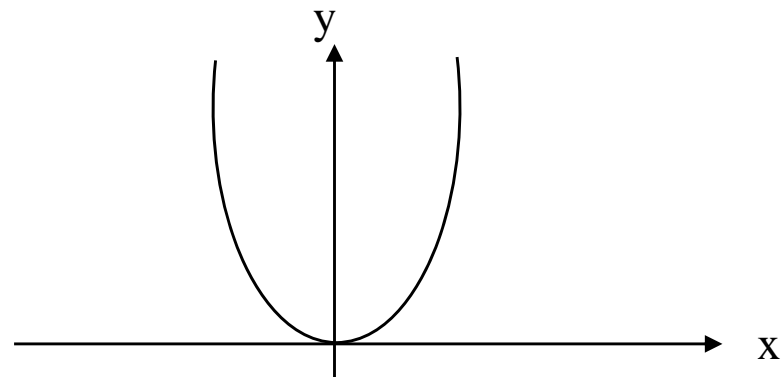
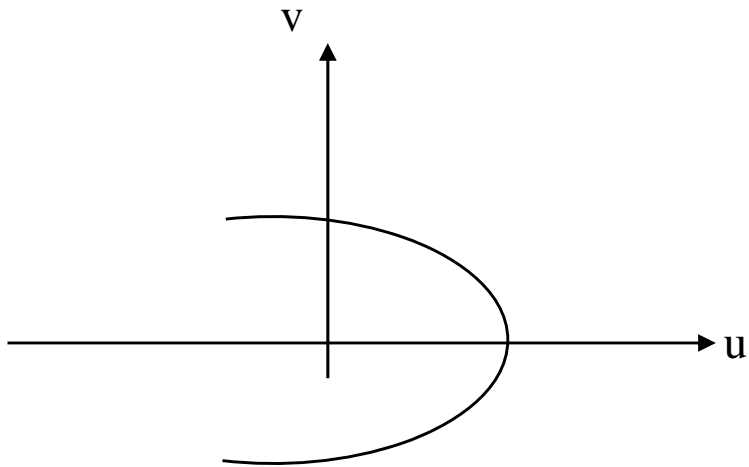
$$\begin{cases} u = -y + 1 = -x^2 + 1 \\ v = x + 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{حذف } x} u - 1 = -(v - 1)^2$$

تبدیل منحنی ها یا نواحی از یک صفحه به صفحه دیگر به روش هندسی نیز امکان پذیر است.

مثلا

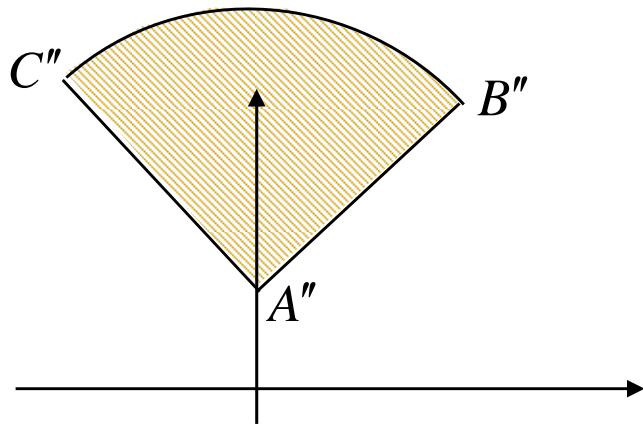
$$\begin{cases} w = az \Rightarrow w = rr_0 e^{i(\theta+\theta_0)} = \rho e^{i\varphi} \\ w = \rho e^{i\varphi} \\ z = re^{i\theta} \\ a = r_0 e^{i\theta_0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi = \theta + \theta_0 \\ \rho = rr_0 \end{cases}$$

یعنی برای رسیدن از z به w در تبدیل $w = az + b$ ابتدا انبساط یا انقباض به اندازه $|a|$ و دورانی به اندازه $\arg(a)$ و انتقالی به اندازه b می دهیم. مشاهده می شود که هیچگاه اندازه و یا جهت زاویه تغییر نمی کند.

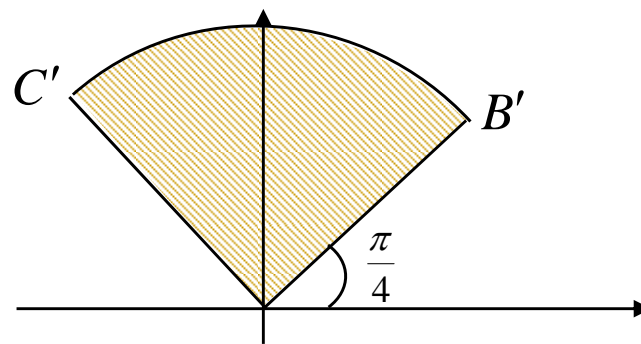


قضیه هرگاه $w = f(z) = u + iv$ در نقطه z تحلیلی بوده و $f'(z) \neq 0$ باشد آنگاه $w = f(z)$ در z تابعی همدیس است. یعنی هر زاویه با راس z را بدون آنکه اندازه و جهت آن را عوض کند به صفحه w منتقل می کند.

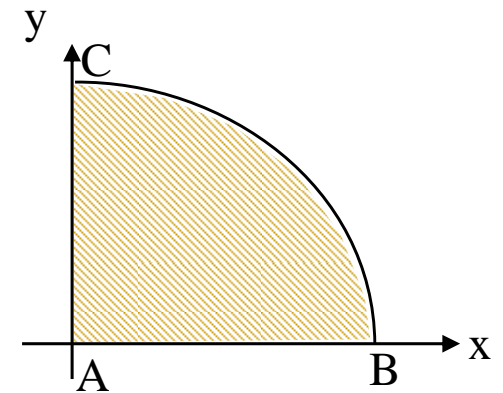
مثال شکل زیر $w = (1+i)z + 2i$ را نشان می دهد که متشکل از دورانی به اندازه $\frac{\pi}{4}$ در جهت مثلثاتی و انبساطی به اندازه $|1+i| = \sqrt{2}$ و انتقالی قائم به اندازه ۲ به طرف بالا می باشد.



$$w = u + iv$$



$$w_1 = u_1 + iv_1$$



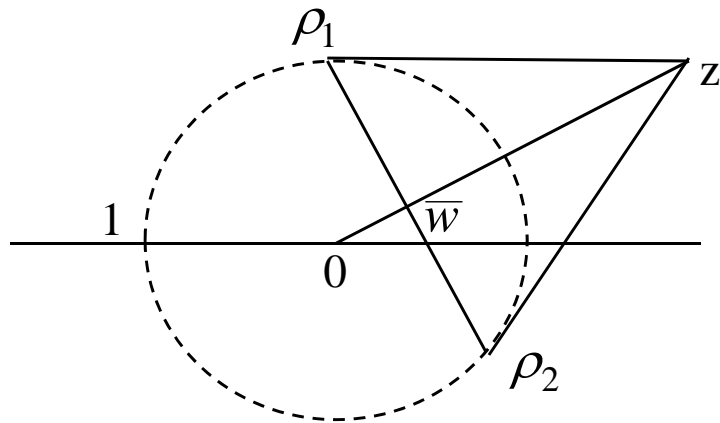
$$z = x + iy$$

$$w = \frac{1}{z} \quad \text{۴- تابع}$$

نگاشت $w = \frac{1}{z}$ تناظر یک به یک بین نقاط مخالف صفر، w, z برقرار می کند.

$$\left. \begin{array}{l} z = re^{i\theta} \\ w = \rho e^{i\varphi} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \rho = \frac{1}{r} \\ \varphi = -\theta \end{cases} \quad \bar{w} = \rho e^{-i\varphi}$$

بنابراین $\bar{w}, z \neq 0$ بر روی شعاعی که مبدا را به z وصل می کند قرار می گیرند.

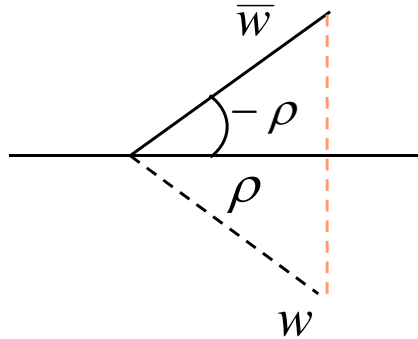


دایره $R=1$ را در نظر بگیرید

$$|\bar{w}| = \frac{1}{|z|}$$

محل برخورد $\rho_1 \rho_2$ و OZ همان نقطه \bar{w} می باشد. سپس باید برای به دست آوردن w ، مزدوج \bar{w} را به دست آوریم.

این نگاشت نقاط خارج دایره $|z|=1$ را به روی نقاط ناصفر داخل دایره واحد و نیم دایره بالایی $|z|=1$ را به نیم دایره پائینی تبدیل می کند.



$w = \frac{1}{z}$ هر خط راست یا دایره را به روی یک دایره یا خط راست می نگارد.
معادله کلی دایره یا خط راست در صفحه z را می توان بصورت زیر نوشت:

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$$

اگر $A = 0$ باشد معادله فوق یک خط راست است و اگر $A \neq 0$ باشد، نمایش دایره می باشد.
تصویر آن در صفحه $w = u + iv$ نیز با تبدیل $w = \frac{1}{z}$ بصورت زیر است:

$$A + Bu - Cv + D(u^2 + v^2) = 0$$

که حالت های زیر بوجود می آید:

(الف) اگر $A \neq 0$ و $D \neq 0$ ، یعنی دایره از مبدا مختصات عبور نکند، تبدیل $w = \frac{1}{z}$ دایره را به دایره ای که از مبدا نمی گذرد تبدیل می کند.

(ب) اگر $A \neq 0$ و $D = 0$ ، (دایره از مبدا عبور کند) ← خط راستی که از مبدا نمی گذرد.

(ج) اگر $A = 0$ و $D \neq 0$ ، (خط راست که از مبدا نگذرد) ← دایره ای که از مبدا می گذرد.

(د) اگر $A = 0$ و $D = 0$ ، (خط راست که از مبدا می گذرد) ← خط راست که از مبدا می گذرد.

$$w = z^2 \text{ تبدیل ۵}$$

۶- تبدیل $w = e^z$

نگاشتی را تعریف می کند که همه جا همدیسی است، زیرا :

$$w \neq 0$$

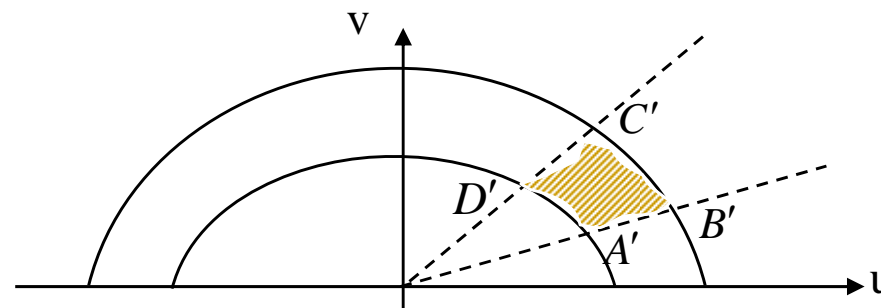
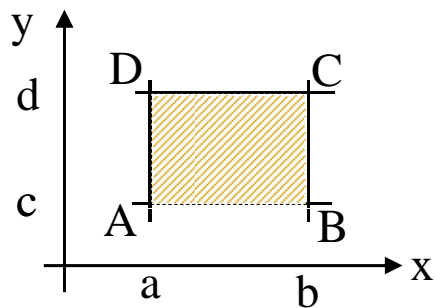
$$\begin{aligned} z = x + iy \\ w = \rho e^{i\varphi} \Rightarrow w = e^x e^{iy} \Rightarrow \begin{cases} \rho = e^x \\ \varphi = y \end{cases} \end{aligned}$$

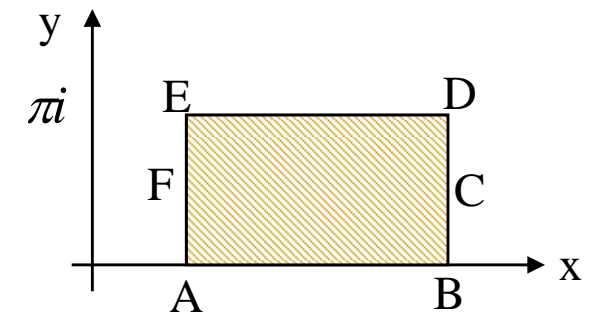
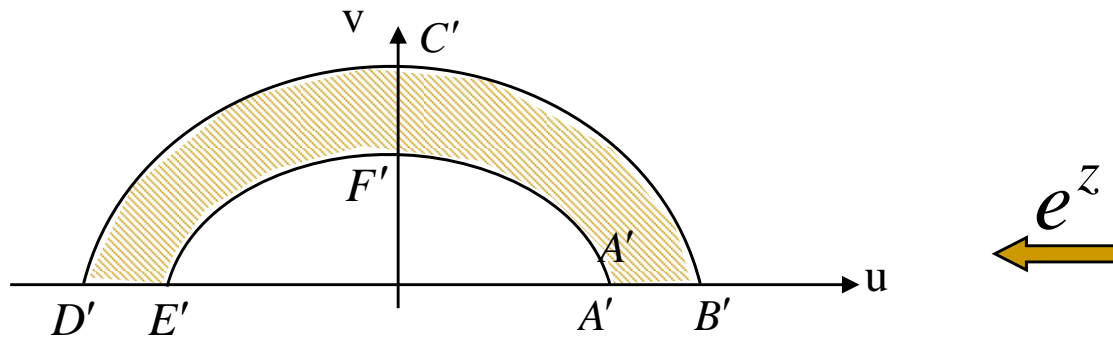
بنابراین اگر $x = a = etc$ ← نگاهت آن دایره ای به شعاع $\rho = e^a$ می باشد.

اگر $y = b = cte$ ← خط $\varphi = b$

$$e^a \leq \rho \leq e^b, \quad c \leq \varphi \leq d$$

ناحیه مستطیلی $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$ بر روی ناحیه

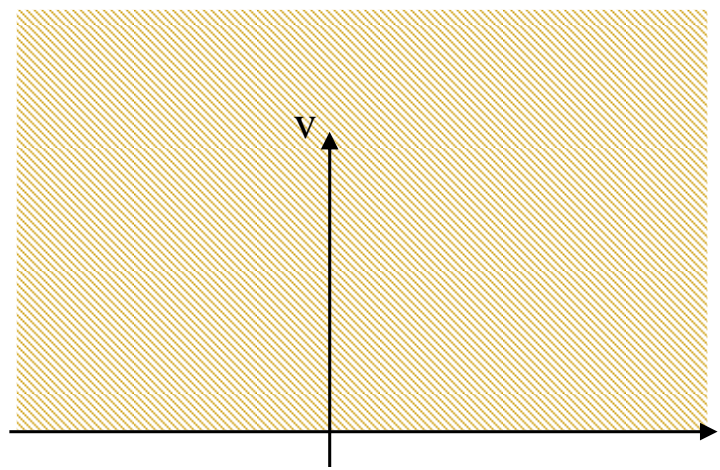




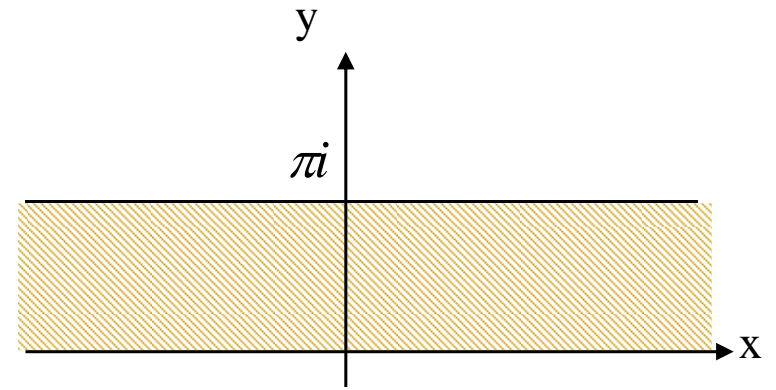
$\left\{ \begin{array}{l} A', B' \text{ هم فاز} \\ E', D' \text{ هم فاز} \\ C', F' \text{ هم فاز} \end{array} \right.$

روی یک دایره A', F', E'
 روی یک دایره B', C', D'

نوار نامتناهی $0 < y < \pi i$



e^z



$$0 < \rho < \infty$$

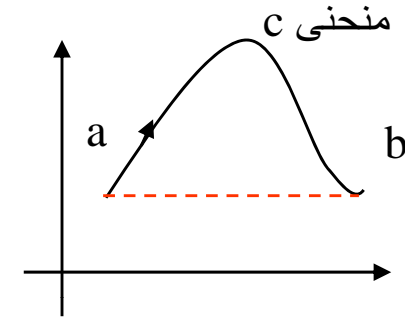
$$0 < \varphi < \pi$$

انتگرال گیری از توابع مختلط

در توابع مختلط تنها به تعریف انتگرال روی منحنی می پردازیم، برای این منظور منحنی c و معادله زیر در نظر گرفته می شود:

$$z(t) = x(t) + iy(t)$$

$$a \leq t \leq b$$

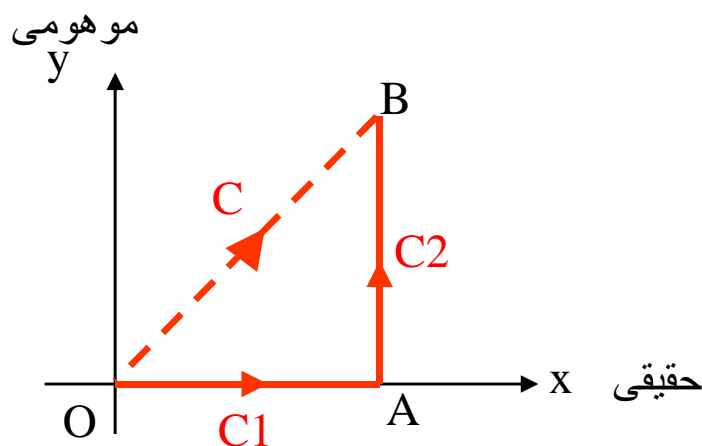


الف)
$$\int_c f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) dz(t)$$

ب)
$$\int_c f(z) dz = \int_{c_1} f(z) dz + \int_{c_2} f(z) dz$$

$$c = c_1 + c_2$$

(مثال) از تابع $w = z^2$ الف - در طول OB ب - در طول OAB انتگرال بگیرید .



$$OB = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ y = x \end{cases}$$

$$OB = \begin{cases} x = x & 0 \leq x \leq 1 \\ y = x \end{cases}$$

$$dz = (1+i)dx \quad , \quad z^2 = (1+i)^2 x^2 \quad , \quad z = x + ix = x(1+i)$$

$$\int_{OB} z^2 dz = \int_0^1 (1+i)^3 x^2 dx = \frac{(1+i)^3}{3}$$

انتگرال بر OAB چنین

$$\int_{OAB} z^2 dz = \int_{OA} z^2 dz + \int_{AB} z^2 dz$$

معادلات پارامتری OA و AB به ترتیب عبارتند از :

$$OA : \begin{cases} x = x \\ y = 0 \end{cases} \quad 0 \leq x \leq 1 \quad ; \quad AB : \begin{cases} x = 1 \\ y = y \end{cases} \quad 0 \leq y \leq 1 ;$$

و بر OA داریم :

$$dz = dx \quad , \quad z^2 = x^2 \quad , \quad z = x$$

و بر AB داریم :

$$dz = idy \quad , \quad z^2 = (1+iy)^2 \quad , \quad z = 1+iy$$

پس :

$$\int_{OAB} z^2 dz = \int_0^1 x^2 dx + i \int_0^1 (1+iy)^2 dy = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} (1+iy)^3 \Big|_0^1 = \frac{(1+i)^3}{3}$$

مثال از تابع $w = \frac{1}{z}$ در طول دایره یکه و در جهت مثلثاتی انتگرال بگیرید.

$$z = e^{i\theta}; 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$dz = ie^{i\theta} d\theta$$

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{i\theta} d\theta}{e^{i\theta}} = 2\pi i$$

مثال از تابع $w = \frac{1}{z^2}$ در طول دایره یکه و در جهت مثلثاتی انتگرال بگیرید.

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{i\theta} d\theta}{e^{2i\theta}} = i \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} d\theta = 0$$

و به طور کلی می توان ثابت کرد ؛

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{(z - z_0)^n} = \begin{cases} 0 & ; \quad n \neq 1 \\ 2\pi i & ; \quad n = 1 \end{cases}$$