

Semnan University, Faculty of Engineering
Mechanical Engineering Department

Engineering Mathematics

Problem Set # 7

Mohammad S. Valipour

$$u(x,0) = \begin{cases} 0 & x \geq a \\ 1 & 0 < x < a \end{cases}$$

۶- توزیع درجه حرارت را برای میله ای به طول l که در دو سر عایق شده است برای شرایط اولیه زیر به دست آورید:

$$u(x,0) = T_0 \frac{x}{l} \quad x > 0, t > 0$$

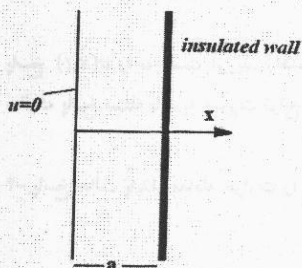
۷- در یک میله از یک طرف نامحدود، با حل معادله یک بعدی حرارت، به فرم زیر توزیع درجه حرارت را در هر نقطه میله بدست آورد:

$$u_{xx}(x,t) = \frac{1}{c^2} u_t(x,t) \quad x > 0, t > 0$$

$$u_x(0,t) = 0$$

$$u(x,t) = f(x)$$

۸- میله ای به طول l در $x=0$ عایق شده و در $x=l$ در دمای T_0 قرار دارد و دمای اولیه میله $u(x,0) = T_0 \sin \frac{\pi x}{2l}$ فرض می شود. الف- $u(x,l)$ را به دست آورید و شکل تقریبی آن را در چند زمان مختلف و نیز در حالت پایدار نشان دهید. ب- اگر دمای دو سر میله عایق می بود آیا دمای حالت پایدار میله تفاوت می کرد (دمای اولیه را به مانند حالت قبل در نظر بگیرید)؟ اگر چنین است در حالت جدید دمای حالت پایدار چقدر است؟ البته بدنه میله با بیرون تبادل گرمایی ندارد.



۹- مطابق شکل یک طرف قطعه ای از یک ماده نامحدود به ضخامت a در دجه حرارت صفر قرار دارد و طرف دیگر آن عایق می باشد. گستردگی درجه حرارت در قطعه در زمان اولیه به صورت $u(x,0) = T_0 \left(\frac{x}{a}\right)$ فرض می شود که در آن T_0 عدد ثابتی است. توزیع درجه حرارت $u(x,t)$ را در هر نقطه از قطعه محاسبه کنید.

۱۰- در مسئله ۹ شرایط مرزی و اولیه را به صورت زیر در نظر گرفته و توزیع دمای $u(x,t)$ را به دست آورید؟

$$u(0,t) = 0 \quad t > 0$$

$$u(a,t) = T_0 \quad t > 0$$

$$u(x,0) = 0 \quad 0 < x < a$$

Semnan University, Faculty of Engineering
Mechanical Engineering Department

Engineering Mathematics

Problem Set # 7

Mohammad S. Valipour

۱۱- دو سر یک میله به طول 1 عایق شده است و میله دارای حالت اولیه $u(x,0) = T_0(1 - \frac{x}{l})$ می باشد. الف- درجه حرارت میله را در حالت پایدار به دست آورید و سپس $u(x,t)$ را تعیین کنید؟ ب- یک شکل تقریبی از $u(x,t)$ را در فاصله $0 < x < l$ در چند زمان مختلف رسم کنید و مشخص کنید که آیا نقطه ای وجود دارد که درجه حرارت آن هرگز تغییر نکند؟ اگر چنین است این نقطه کدام است؟

۱۲- در طول یک میله به طول 1 شرایط مرزی و اولیه زیر داده شده است

$$u(0,t) = 0 \quad \text{and} \quad u(l,t) = T_0 \quad t > 0$$

$$u(x,0) = \beta(l-x) \quad l > x > 0$$

که β یک مقدار ثابت می باشد. الف- توزیع درجه حرارت در حالت پایدار را در طول لوله پیدا کنید؟ ب- پاسخ کامل را برای این لوله پیدا کنید؟

۱۳- یک میله از یک طرف نامحدود و در $x=0$ عایق شده است و داریم:

$$u(x,0) = f(x) = \begin{cases} T_0(1 - \frac{x}{a}) & 0 < x \leq a \\ 0 & x > a \end{cases}$$

توزیع درجه حرارت در طول میله $u(x,t)$ را به دست آورید. پاسخ حالت پایدار مسئله چه می باشد.

۱۴- عبارت پتانسیل الکتریکی $V(x,y)$ را در ربع اول و با شرایط مرزی زیر به دست آورید:

$$V(x,0) = e^{-x} \quad x \geq 0$$

$$V(0,y) = 0 \quad y \geq 0$$



۱۵- در یک ناحیه نامحدود مانند شکل پتانسیل در هر دیواره داده شده است. پتانسیل در هر نقطه در داخل ناحیه $V(x,y)$ را به دست آورید و پاسخ مسئله را برای حالت

$$f(x) = \sin^3\left(\frac{\pi x}{a}\right)$$

$$V(x,0) = f(x) \quad a > x > 0$$

$$V(0,y) = 0 \quad y \geq 0$$

$$V(a,y) = 0 \quad y \geq 0$$

Semnan University, Faculty of Engineering
Mechanical Engineering Department

Engineering Mathematics

Problem Set # 8

Mohammad S. Valipour

۱- معادله لاپلاس را در ناحیه نامحدود نشان داده شده در شکل مسئله ۱۵ (سری ۷) با شرایط مرزی زیر حل کنید:

$$u(x,0) = 0 \quad a > x \geq 0, y = 0$$

$$u(0,y) = 0 \quad y \geq 0, 0 < x < a$$

$$u(a,y) = e^{-y} \quad y > 0$$

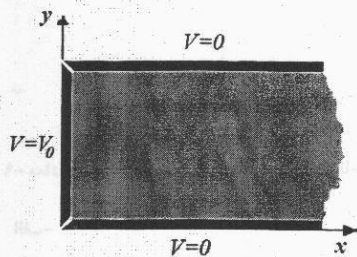
۲- عبارت پتانسیل الکتریکی $V(x,y)$ را در ناحیه مستطیلی داده شده و با شرایط مرزی زیر حل کنید.

$$V(x,0) = 0 \quad 0 < x < a, y = 0$$

$$V(x,b) = 1 \quad 0 < x < a, y = b$$

$$V_x(0,y) = 0 \quad 0 \leq y \leq b, x = 0$$

$$V_x(a,y) = 0 \quad 0 \leq y \leq b, x = a$$



۳- پتانسیل الکتریکی را در ناحیه داده شده با شرایط مرزی داده شده از نوع دریکله حل کنید.

$$V(x,0) = 0 \quad 0 < x, y = 0$$

$$V(x,b) = 0 \quad 0 < x, y = b$$

$$V(0,y) = V_0 \quad 0 \leq y \leq b, x = 0$$

۴- پتانسیل الکتریکی را در ناحیه نامحدود مستطیلی مسئله قبل با شرایط مرزی زیر به دست آورید:

$$V_x(0,y) = 0 \quad 0 \leq y \leq 1$$

$$V_y(x,0) = 0 \quad x \geq 0$$

$$V(x,1) = e^{-x} \quad x \geq 0$$

۵- عبارت پتانسیل الکتریکی $V(x,y)$ را در ربع اول با شرایط مرزی زیر به دست آورید:

$$V(0,y) = e^{-y} \quad y \geq 0$$

$$V(x,0) = e^{-x} \quad x \geq 0$$

۶- معادله لاپلاس را در ناحیه بالای محور x (نیم صفحه بالایی) با شرایط مرزی زیر حل کنید:

Semnan University, Faculty of Engineering
Mechanical Engineering Department

Engineering Mathematics

Problem Set # 8

Mohammad S. Valipour

$$u(x,0) = f(x) = \begin{cases} u_0 & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$$

۷- معادله لاپلاس را در ناحیه مستطیلی با شرایط مرزی زیر حل کنید:

$$u_x(0,y) = u_x(\alpha,y) = 0$$

$$u(x,0) = 0, \quad u(x,b) = 1$$

الف-

$$u_y(x,0) = u(x,b) = 0$$

$$u(0,y) = 1, \quad u(a,y) = 0$$

ب-

۸- معادله لاپلاس را در ناحیه مستطیلی نامحدود $x > 0, 0 < y < b$ با شرایط مرزی زیر حل کنید.

$$u(0,y) = u(x,0) = 0$$

$$u(x,b) = \begin{cases} 1 & 0 < x < a \\ 0 & x > a \end{cases}$$

۹- معادله لاپلاس را برای $u(r,\varphi)$ در داخل ناحیه دایره ای $r < a$ و با شرایط مرزی زیر حل کنید.

$$\nabla^2 u(r,\varphi) = 0 \quad r < a$$

$$u(a,\varphi) = \cos^2 \varphi \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi$$

الف-

ب- به کمک خواص توابع همساز مشخص کنید که مقدار Π در مرکز دایره چقدر است؟

۱۰- پتانسیل الکتریکی $u(r,\varphi)$ را داخل دیسک $r < 1$ با شرایط مرزی زیر در نظر بگیرید:

$$\nabla^2 u(r,\varphi) = 0 \quad r < 1$$

$$u(1,\varphi) = \begin{cases} 1 & -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

الف- معادله با شرایط مرزی فوق را حل کنید؟ ب- مقدار پتانسیل در مرکز دیسک ($r=0$) چقدر است؟

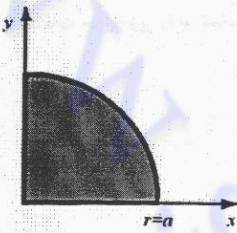
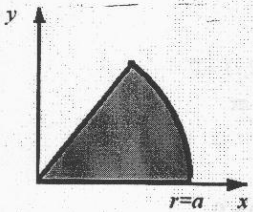
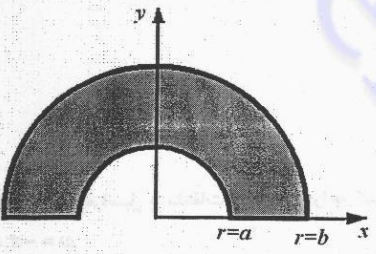
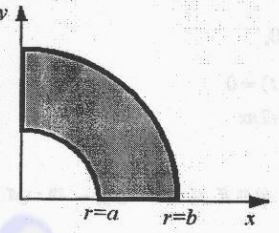
۱۱- معادله لاپلاس را در ناحیه های زیر و با شرایط مرزی مشخص شده حل کنید؟

Semnan University, Faculty of Engineering
Mechanical Engineering Department

Engineering Mathematics

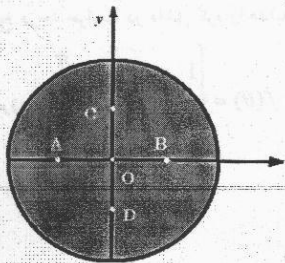
Problem Set # 8

Mohammad S. Valipour

	
$u(r, \pi/2) = u(r, 0) = 0, \quad u(a, \varphi) = 1$	$u(r, \pi/4) = u(r, 0) = 0, \quad u(a, \varphi) = u_0$
	
$u(r, 0) = u(r, \pi) = 0, \quad u(a, \varphi) = 0, \quad u(b, \varphi) = u_0$	$u(r, 0) = u(r, \pi/2) = 0, \quad u(a, \varphi) = 0, \quad u(b, \varphi) = u_0$

۱۲- معادله لاپلاس را برای داخل دایره $r < a$ و با شرایط مرزی زیر حل کنید؟ سپس مقدار پتانسیل را در مرکز دیسک $r = 0$ محاسبه کنید؟

$$u(a, \varphi) = |\varphi| \quad -\pi < \varphi \leq \pi$$



۱۳- پتانسیل الکتریکی را در ناحیه دایره ای زیر مورد نظر می باشد، شعاع دایره را a فرض کرده و الف- پتانسیل در مرکز O چقدر است؟ ب- پتانسیل در A بیشتر است یا B چرا؟ ج- پتانسیل C بیشتر است یا D چرا؟ البته دقت شود که نقاط مذکور و نصف شعاع از مرکز فاصله دارند؟ توزیع پتانسیل الکتریکی با حل لاپلاس به دست آورید؟

$$u(a, \varphi) = 0, \quad -\pi/2 < \varphi < \pi/2,$$

$$u(a, \varphi) = u_0 > 0, \quad \pi/2 < \varphi < 3\pi/2$$

Semnan University, Faculty of Engineering
Mechanical Engineering Department

Engineering Mathematics

Problem Set # 8

Mohammad S. Valipour

۱۴- معادلات با مشتقات جزئی زیر را به کمک تبدیل لاپلاس حل کنید؟

$$\begin{aligned} u_{xx} - u_t &= 0, \\ u_x(0, t) &= u_x(2, t) = 0 \\ u(x, 0) &= 4 \cos \pi x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{xx} - u_t &= 0, \\ u(0, t) &= u(4, t) = 0 \\ u(x, 0) &= 4 \sin \pi x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{xx} - \frac{1}{4}u_t &= 0, \\ u(0, t) &= u(3, t) = 0 \\ u(x, 0) &= 2 \sin 2\pi x \end{aligned}$$

۱۵- معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی زیر را به کمک تبدیل لاپلاس حل کنید: الف- برای حالتی که $\omega = \pi$ ب- برای حالتی که $\omega = -\pi$

$$\begin{aligned} u_{xx} - u_{tt} &= -\sin(\pi x) \sin(\omega t) \quad t > 0, \quad 0 < x < 1 \\ u(0, t) &= u(1, t) = 0 \\ u(x, 0) &= 0, \quad u_t(x, 0) = 0 \end{aligned}$$

به کمک تبدیل لاپلاس معادله حرارت را برای شرایط مرزی و اولیه زیر در یک میله از یک طرف نامحدود حل کنید:

$$\begin{aligned} u_{xx} - u_t &= 0 \quad t > 0, \quad 0 < x < \infty \\ u(0, t) &= f(t) \\ u(x, 0) &= 0 \end{aligned}$$

۱۶- توزیع درجه حرارت در داخل کره واحد (به شعاع یک) در حالت پایدار را به صورت $u(r, \theta)$ نشان می دهیم. نشان دهید که

$$u(1, \theta) = f(\theta) = \begin{cases} 1 & 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \end{cases} \quad \text{با شرط مرزی}$$

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} [P_{2n}(0) - P_{2n+2}(0)] r^{2n+1} P_{2n+1}(\cos \theta)$$

Semnan University, Faculty of Engineering
Mechanical Engineering Department

Engineering Mathematics

Problem Set # 9

Mohammad S. Valipour

۱- نشان دهید که تابع $u(x, y) = x + e^x \cos y$ همساز است؟ سپس تابع همساز مزدوج آن، $v(x, y)$ را پیدا کنید؟ پتانسیل مختلط $F(z)$ که u و v جزء های حقیقی و موهومی آن هستند کدام است؟

۲- نشان دهید که تابع $u(x, y) = xe^x \cos y - ye^x \sin y$ همساز است؟ سپس تابع همساز مزدوج آن، $v(x, y)$ را پیدا کنید؟ پتانسیل مختلط $F(z)$ که u و v جزء های حقیقی و موهومی آن هستند کدام است؟

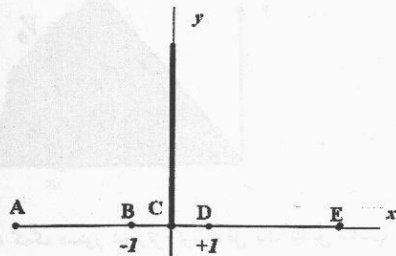
۳- نشان دهید که تابع $u(x, y) = e^{-x} \sin y$ هارمونیک است؟ و تابع هارمونیک مزدوج آن را پیدا کنید و تابع تحلیلی $F(z)$ را طوری پیدا کنید که u جزء حقیقی آن باشد؟

۴- نشان دهید که تابع $u(x, y) = A \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$ هارمونیک است؟ سپس تابع هارمونیک مزدوج آن، $v(x, y)$ را پیدا کنید؟ پتانسیل مختلط $F(z)$ که u جزء حقیقی آن باشد را بیابید؟

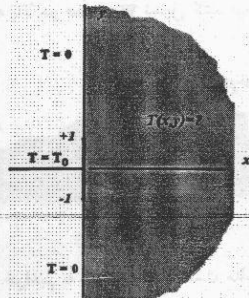
۵- نشان دهید که تابع $u(x, y) = e^x(x \sin y + y \cos y)$ هارمونیک است؟ سپس تابع هارمونیک مزدوج آن، $v(x, y)$ را پیدا کنید؟ پتانسیل مختلط $F(z)$ که u جزء حقیقی آن باشد را بیابید؟

۶- نشان دهید که تابع تبدیل $w = \ln\left(\frac{z-1}{z+1}\right)$ نیم صفحه

بالایی در صفحه z را به نوار $0 \leq \text{Im } w \leq \pi$ در صفحه w می نگارد و نگاشت نقاط نشان داده شده و محور $(x=0, y \geq 0)$ را در صفحه w پیدا کنید؟



۷- دمای حالت پایدار در نیم صفحه راست محور y را با توجه به شرایط مرزی داده شده در روی محور y بدست آورید؟



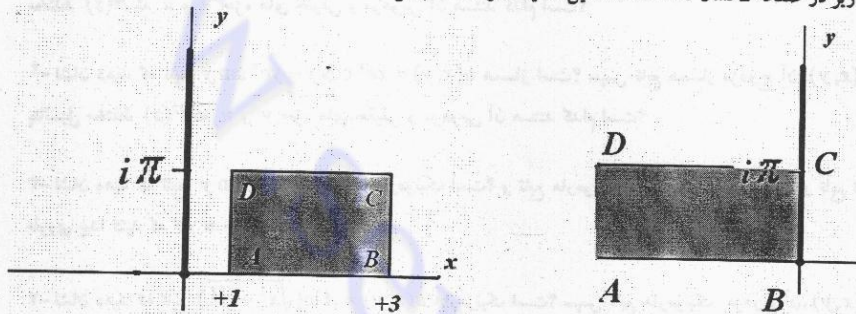
Semnan University, Faculty of Engineering
Mechanical Engineering Department

Engineering Mathematics

Problem Set # 9

Mohammad S. Valipour

۸- ناحیه های زیر در صفحه Z نشان داده شده اند. این ناحیه ها را تحت تبدیل $w = e^z$ در صفحه w به دست آورید؟

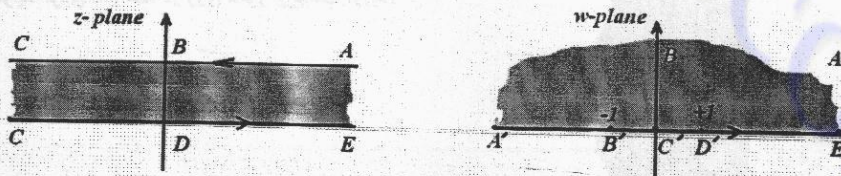


۹- به کمک یک نگاشت مناسب عبارت پتانسیل الکتریکی را در ناحیه زیر با شرایط مرزی داده شده به دست آورید؟

۱۰- به کمک یک نگاشت مناسب عبارت درجه حرارت در حالت پایدار، $T(x, y)$ را در ناحیه روبه رو با شرایط مرزی داده شده بدست آورید؟



۱۱- به کمک دستور شوارتز-کریستوفل یک تبدیل مناسب $w = f(z)$ پیدا کنید که ناحیه نواری نشان داده شده در شکل را به نیم صفحه بالا در صفحه w تبدیل کند. ب- تعیین کنید که نگاشت $w = e^z$ نیم نوار ABCD را در صفحه w به چه تبدیل می کند؟



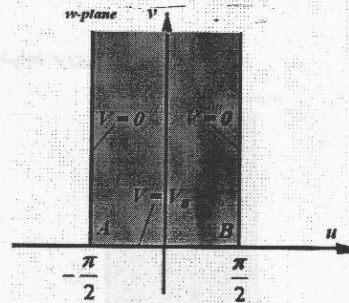
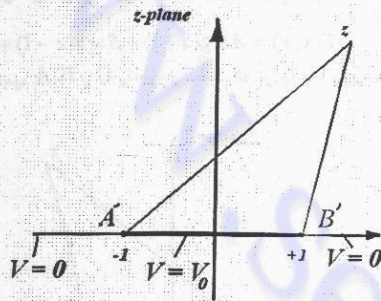
۱۲- می خواهیم به کمک یک نگاشت مناسب پتانسیل الکتریکی در ناحیه داده شده با شرایط مرزی در روی دیوارها را به دست آوریم. یک نگاشت مناسب تعیین کنید که ناحیه مزبور را در صفحه w به نیم صفحه فوقانی ($y > 0$) در صفحه Z تبدیل کند.

Semnan University, Faculty of Engineering
Mechanical Engineering Department

Engineering Mathematics

Problem Set # 9

Mohammad S. Valipour



۱۳- الف- یک تبدیل خطی کسری بیابید که سه نقطه $w_1 = -1, w_2 = 0, w_3 = +1$ را به ترتیب به سه نقطه نظیر آن در صفحه z

یعنی $z_1 = -1, z_2 = -i, z_3 = +1$ تبدیل کند و آنرا به صورت $z = f(w)$ می نامیم.

ب- تابع زیر که در ناحیه بالای محور $u = 0$ هارمونیک می باشد را در نظر می گیریم:

$$H(u, v) = 1 + \frac{2}{\pi} \operatorname{Im} \left[\ln \left(\frac{w+1}{w-1} \right) \right]$$

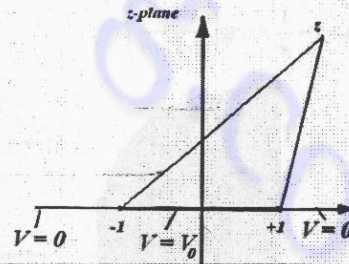
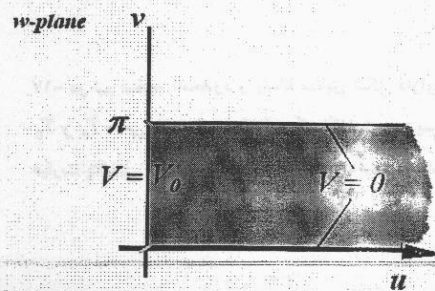
نشان دهید که با تبدیل قسمت الف تابع $H(u, v)$ از صفحه w در صفحه z به صورت زیر در می آید؟

$$H^*(u, v) = \frac{2}{\pi} [\arg(1+z) - \arg(1-z)]$$

۱۴- برای پیدا کردن توزیع دما در حالت پایدار در ناحیه داده شده با شرایط مرزی دریکله آنرا به یک نیم صفحه تبدیل کرده ایم.

الف- نگاشت مناسبی را محاسبه کنید که نیم نوار داده شده در صفحه w را به ناحیه $\operatorname{Im}(z) > 0$ در صفحه z تبدیل کند. ب-

تابع هارمونیک $T^*(x, y)$ در صفحه z را چگونه انتخاب کنیم تا در شرایط مرزی نشان داده شده در این صفحه صدق کنند.



۱۵- می خواهیم به کمک یک نگاشت مناسب توزیع درجه حرارت در ناحیه داده شده را با شرایط مرزی مشخص شده در روی

دیوارها به دست آوریم. الف- یک نگاشت مناسب بیابید که ناحیه مذکور را در صفحه w به ناحیه بالای محور x یعنی $y > 0$ در

Semnan University, Faculty of Engineering
Mechanical Engineering Department

Engineering Mathematics

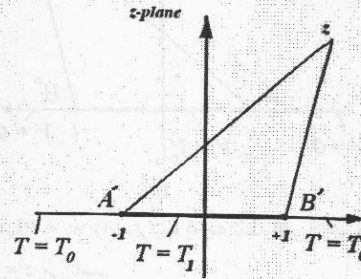
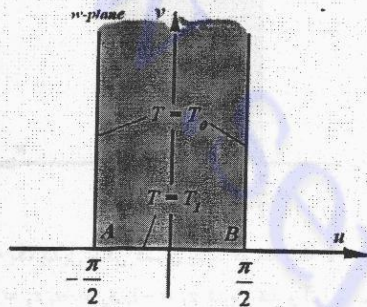
Problem Set # 9

Mohammad S. Valipour

صفحه Z تبدیل کند. ب- صفحه Z را در نظر می گیریم، اگر فرض کنیم که عبارت توزیع دما به فرم زیر باشد:

$$T(x, y) = A \arg(z+1) + B \arg(z-1) + C$$

ضرایب A و B و C را طوری بیابید که توزیع دما روی محور حقیقی در شرایط مرزی داده شده صدق کند.



۱۶- الف- یک تبدیل خطی کسری پیدا کنید که سه نقطه از دایره واحد را در صفحه Z ($z_1 = -1, z_2 = 0, z_3 = 1$) را به ترتیب به $(w_1 = \infty, w_2 = j, w_3 = 0)$ تبدیل کند. ب- می خواهیم پاسخ معادله لاپلاس را در داخل دایره واحد، $u(r, \theta)$ را با شرایط مرزی زیر بدست آوریم.

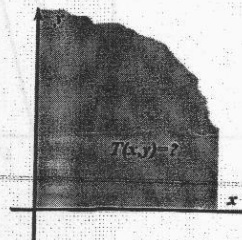
$$\begin{cases} u(1, \theta) = 1, & 0 < \theta < \pi \\ u(1, \theta) = 0, & \pi < \theta < 2\pi \end{cases}$$

نشان دهید که این مساله منجر به حل معادله لاپلاس در نیم صفحه بالای محور u می گردد که پاسخ آن به صورت:

$$\varphi(u, v) = 1 - \frac{1}{\pi} \operatorname{Arctg}\left(\frac{v}{u}\right)$$

که به کمک تبدیل فوق $u(r, \theta)$ به صورت زیر در می آید.

$$u(r, \theta) = 1 - \frac{1}{\pi} \operatorname{Arctg}\left(\frac{1-r^2}{2r \sin \theta}\right)$$



۱۷- دو نیم صفحه نامحدود و رسانا مطابق شکل دارای دماهای T_0 و $-T_0$ می باشند که به کمک یک نگاشت همبند مناسب عبارت پتانسیل $T(x, y)$ را در ربع اول به دست آورید؟

Semnan University, Faculty of Engineering
Mechanical Engineering Department

Engineering Mathematics

Problem Set # 10

Mohammad S. Valipour

۱- کلیه بسطهای لوران تابع $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ را به مرکز $z=1$ بدست آورید و ناحیه یا نواحی همگرایی را مشخص نمایید؟

۲- تابع $f(z) = \frac{1}{(z+4)(z+2)}$ را به صورت یک سری لوران در هر یک از ناحیه های زیر بسط دهید

$$0 < |z+2| < 2$$

$$2 < |z| < 4$$

۳- کلیه بسطهای لوران تابع $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)}$ را به مرکز $z=1$ بدست آورید و ناحیه یا نواحی همگرایی را مشخص نمایید؟

۴- کلیه بسطهای لوران تابع $f(z) = \frac{1}{(z^2-9)}$ را به مرکز $z=3$ بدست آورید و ناحیه یا نواحی همگرایی را مشخص نمایید؟

۵- هر یک از توابع زیر را حول نقاط مشخص شده بسط لوران دهید و ناحیه یا نواحی همگرایی هر کدام را مشخص کنید؟

$$z=2 \text{ در اطراف } f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-2)^2}$$

$$z=-1 \text{ در اطراف } f(z) = \frac{z+2}{z(z+1)}$$

$$z=-1 \text{ در اطراف } f(z) = \frac{z}{(z+2)(z+1)}$$

$$z=1 \text{ در اطراف } f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^3}$$

۶- عبارت $f(z) = \frac{z}{(z-1)(2-z)}$ را به صورت یک سری لوران در هر یک از نواحی زیر گسترش دهید

الف- $1 < |z| < 2$

ب- $|z| > 2$

۷- عبارت $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+4)}$ را به صورت یک سری لوران در هر یک از نواحی زیر گسترش دهید

الف- $1 < |z| < 4$

ب- $0 < |z+1| < 3$

۸- مقدار انتگرال معین زیر را با انتخاب یک مسیر مناسب در صفحه Z محاسبه کنید:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$$

Semnan University, Faculty of Engineering
Mechanical Engineering Department

Engineering Mathematics

Problem Set # 10

Mohammad S. Valipour

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{\cosh x} dx$$

۹- نشان دهید که:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{w^3 \sin wx}{w^4 + 4} dw = \frac{\pi}{2} e^{-x} \cos x$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos wx}{w^2 + 1} dw = \frac{\pi}{2} e^{-x}$$

۱۰- با انتخاب مسیر مناسبی مقدار اصلی کوشی انتگرال زیر را محاسبه کنید:

$$I = \text{Pr.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x(a^2 + x^2)} dx$$

$$I = \text{Pr.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x+2)(x^2+4)}$$

$$I = \text{Pr.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$$

$$I = \text{Pr.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x(x^2 - 4x + 5)}$$

۱۱- با انتخاب مسیر مناسب مقدار انتگرال زیر را محاسبه کنید؟

$$I = \text{Pr.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(a^2 - x^2)} dx, \quad a > 0$$

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln x}{(1+x^2)} dx$$

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^5)} dx$$

۱۲- به کمک قضیه مانده ها و با استفاده از رابطه $\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ انتگرال زیر را محاسبه کنید؟

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos 2\alpha x dx$$

۱۳- به کمک قضیه مانده ها و با انتخاب مسیر مناسب انتگرال زیر را محاسبه کنید؟

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{(1+x)} dx, \quad 0 < a < 1$$