«بسم الله الرحمن الرحیم»

«سیستم تهویه»

«زبان انگلیسی مهندسی»

«نام استاد: جناب آقای کریمی»

ریاضیات مهندسی:
- فوریه **
  - سری فوریه *
  - انتگرال فوریه
  - تبدیل فوریه
- توابع مختلط ***
- معادلات با مشتقات جزئی *

فرمول سری فوریه

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{L} x + b_n \sin \frac{n\pi}{L} x$$

$$\left(L = \frac{T}{2}\right)$$

خاصیت تعامد مثلثاتی

وقتی متعامد هستند ←
$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = 0$$

ضرب داخلی بردارها باید صفر باشد

$$\int_{(T)} \sin nx \sin mx \, dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{T}{2} & m = n \end{cases}$$

$$\int_{(T)} \cos nx \cos mx \, dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{T}{۲} & m = n \end{cases}$$

$$\int_{(T)} \sin nx \cos mx \, dx = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{۲} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{L} x + b_n \sin \frac{n\pi}{L} x\right) \\ a_0 &= \frac{1}{L} \int_{(T)} f(x)\, dx \\ a_n &= \frac{1}{L} \int_{(T)} f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x \, dx \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{(T)} f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx \end{aligned}}$$

نکته) تابع فرد ← b_n داریم

تابع زوج ← b_n نداریم

$y = \sin x \quad 0 \leq x \leq 2\pi$ — نازوج نافرد

متناوب نیست

$y = x \quad 0 < x < 1$ — X نازوج نافرد

$$y = \begin{cases} \cos x & 0 < x < \pi \\ -\cos x & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

فرد متناوب نیست

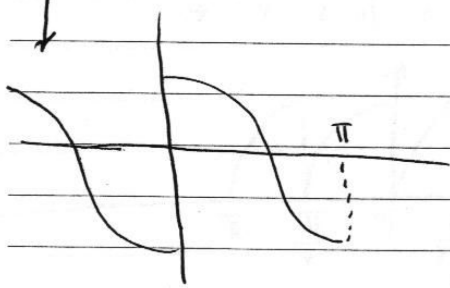
$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ -1 & -1 < x < 0 \end{cases}$$

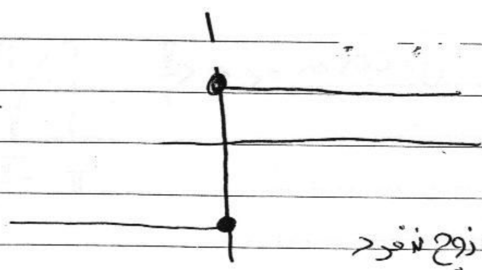
نازوج نافرد

$f(x) = x - [x]$ — $T = 1$ نازوج نافرد

دوره تناوب

$f(x) = e^{-x} \quad x > 0$ — نازوج نافرد متناوب نیست





نازوج نافرد

توابع به سه گروه کلی تقسیم می‌کنیم

۱- توابعی که ذاتاً متناوب هستند

$f(x) = \sin x$

$f(x) = \cos x$

$\quad " = \tan x$

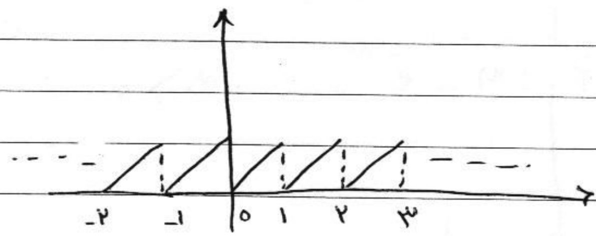
$\quad " = x - [x]$

$\vdots$

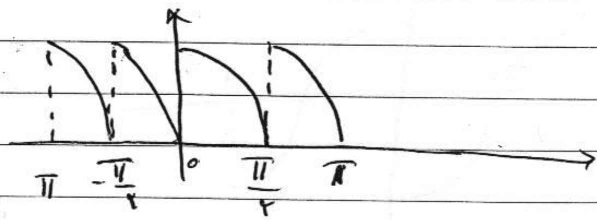
٪۹۹

۲) توابعی که ذاتاً متناوب نمی‌باشند اما می‌توان آنها را بصورت مصنوعی متناوب کرده

$y = x \qquad 0 < x < 1$



$y = \cos x \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$



هر تابعی که در بازه محدود $[a,b]$ تعریف شده باشد به صورت مصنوعی می‌توان آنرا متناوب کرد

۳) توابعی که ذاتاً متناوب نمی‌باشند و آن را بصورت مصنوعی نمی‌توان متناوب کرد. (سری فوریه ندارند)

$y = e^{-x} \quad x > 0$

$y = x$

$y = e^{x}$

$\vdots$

فرد $f(x) \Rightarrow \int_{-L}^{L} f(x)dx = 0$

زوج $f(x) \Rightarrow \int_{-L}^{L} f(x)dx = 2\int_{0}^{L} f(x)dx$

فرد $f(x) \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_n = 0 \\ b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{L}x$$

زوج $f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)dx \\ a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx \end{cases}$

$b_n = 0 \Leftarrow f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{L} x$

۱- تشخیص دوره تناوب (T)

۲- تشخیص بازه انتگرال گیری

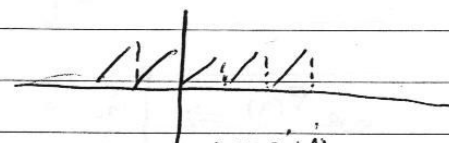
سری فوریه توابع زیر را بدست آورید.

$y = \sin x \qquad 0 < x < 1$

$y = \sin x \qquad 0 < x < \pi$

$y = \sin x \qquad 0 < x < 2\pi$

الف) $T = 1 \rightarrow L = \frac{1}{2}$



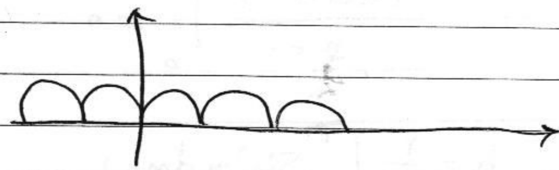
نه زوج نه فرد

$a_0 = \frac{1}{L} \int_{(T)} f(x)\,dx = 2 \int_0^1 \sin x\,dx = 2(1 - \cos 1)$

$a_n = \frac{1}{\frac{1}{2}} \int_0^1 \sin x \cos 2n\pi x\,dx = \frac{1 - \cos 1}{2n\pi + 1} + \frac{1 - \cos 1}{2n\pi - 1}$

$$b_n=\frac{1}{\frac{1}{2}}\int_0^1 \sin x \sin 2n\pi x\,dx=\frac{\sin 1}{2n\pi-1}-\frac{\sin 1}{2n\pi+1}$$

ب) $T=\pi$



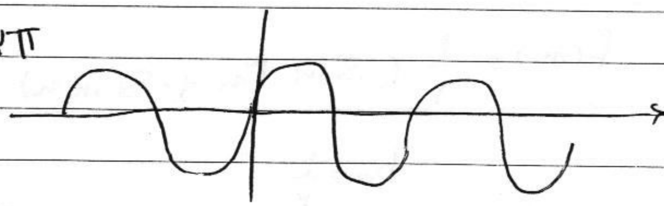
$b_n=0$ تابع زوج

$$a_0=\frac{2}{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=\frac{4}{\pi}$$

$$a_n=\frac{2}{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos 4n\pi x\,dx=\frac{2}{\pi}$$

$$\left(\frac{1}{1+2\pi}+\frac{1}{1-2\pi}\right)$$

ج) $T=2\pi$



$a_0=a_n=0$ فرد

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin(n-1)x}{n-1}\right.$$

$$\left.\frac{\sin(n+1)}{n+1}\right|_0^{\pi} = 0 \qquad n \neq 1$$

$$b_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx = 1 \qquad n = 1$$

$$\cancel{\frac{a_0}{2}} + \sum \cancel{a_n \cos nx} + b_n \sin nx$$

$$= \sin x$$

$$f(x) = \cos x \sin 2x \qquad 0 < x < 2\pi$$

$$L = \pi \qquad a_n \cos nx$$

$$b_n \quad \sin nx$$

$$f(x) = \frac{1}{2}(\sin 3x + \sin x)$$

$$b_3 = \frac{1}{2}$$

$$b_1 = \frac{1}{2}$$

سایر ضرایب $= 0$

$f(x) = \cos^2 x$

$T = 2\pi \quad f(x) = \frac{1+\cos 2x}{2} \Rightarrow \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}$

$a_2 = \frac{1}{2}$

سایر ضرایب $= 0$

$T = 4\pi \Rightarrow f(x) = \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

$\cos \frac{n\cancel{\pi}}{2\cancel{\pi}} x$

$$\begin{cases} \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2} \\ a_4 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

سایر ضرایب $= 0$

اگر قرینه نیم پریود اول را نسبت به $\frac{a_0}{2}$ بدست آوریم و به اندازه نیم
پریود به سمت راست حرکت دهیم و بر نیم پریود دوم منطبق شود سری
فوریه فقط شامل هارمونیکهای فرد است

$$\frac{a_0}{2} = \frac{\text{مجموع جبری مساحت‌ها}}{\text{دوره تناوب}}$$

تعمیم دامنه:

$y = f(x) \quad 0 < x < L$

بسط سینوسی

$$\begin{cases} a_0 = a_n = 0 \\ b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx \end{cases}$$

$$\to f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{L}x$$

بسط کسینوسی

$$\begin{cases} a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,dx \\ a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{L}x$$

$b_n = 0$

بسط سینوسی تابع $f(x) = \cos x \quad 0 < x < \pi$ را بدست آورید.

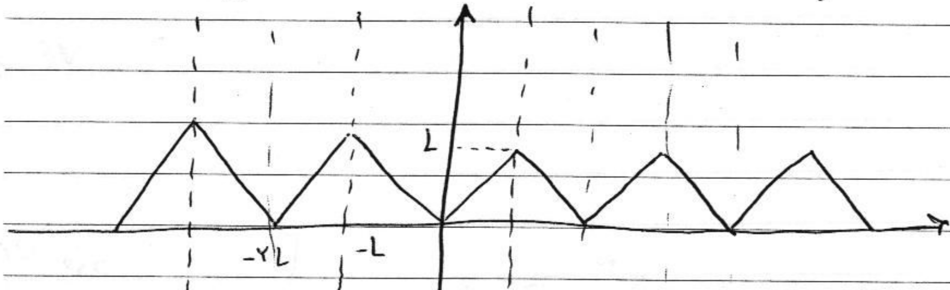
$a_0 = a_n = 0$

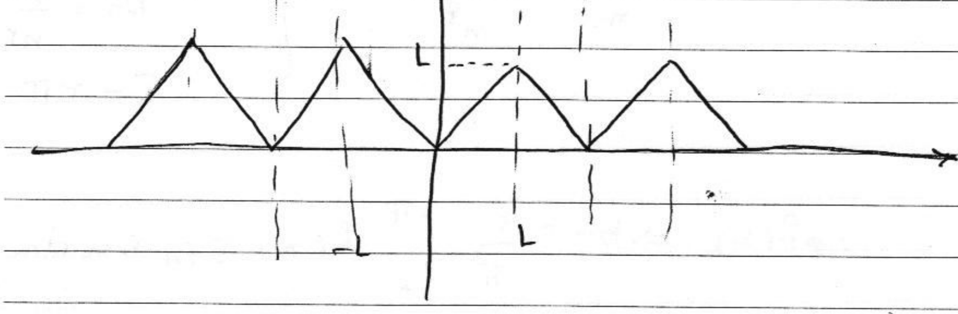
$L = \pi \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos x \sin nx\,dx$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1+\cos\pi}{n+1} + \frac{1+\cos\pi}{n-1}\right)$$

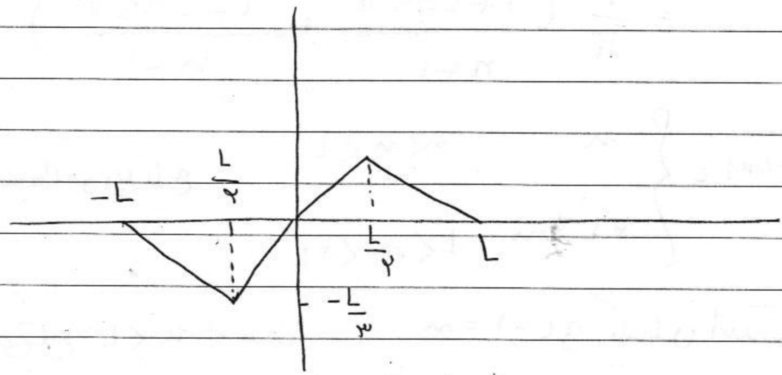
بررسی کنید بسط فوریه تابع
$$f(x) = \begin{cases} x & 0<x<L \\ 2L-x & L<x<2L \end{cases}$$
با

بسط کسینوسی تابع $0<x<L$ ، $g(x)=x$ یکسان است.





(برق ۸۴) ص ۹۸ کتاب



ص ۹۹ ← ۷۴

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n^3} \Rightarrow \begin{cases} \text{۱- } f(x) \text{ فرد} \\ \text{۲- } b_n=\frac{1}{n^2} \\ \text{۳- } T=2\pi \end{cases}$$

فرد $f(x) \Rightarrow b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$

$$\sin^3 x=\sin^2 x\sin x=\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\sin x$$

$$\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{2}\sin x\cos 2x=\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{4}(\sin 3x-\sin x)$$

$$= \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$$

$$I = \int_0^{\pi} f(x)\left(\frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x\right)dx =$$

$$\frac{3}{4}\underbrace{\int_0^{\pi} f(x)\sin x\,dx}_{\frac{\pi}{2}b_1 \to 1} - \frac{1}{4}\underbrace{\int_0^{\pi} f(x)\sin 3x\,dx}_{\frac{\pi}{2}b_3 \to \frac{1}{9}}$$

$$\frac{3\pi}{8} - \frac{\pi}{8}\times\frac{1}{9} = \frac{\pi}{8}\left(3 - \frac{1}{9}\right) = \frac{13\pi}{36}$$

$$a_n = \frac{2}{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos 2$$

ص ۹۸ تست (۷)

ص ۹۹ تست ۷۳

$$H(f(x)) = \begin{cases} 1 & f(x) > 0 \\ 0 & f(x) < 0 \end{cases}$$

$$H(2-x) = \begin{cases} 1 & 2-x > 0 \Rightarrow x < 2 \\ 0 & 2-x < 0 \Rightarrow x > 2 \end{cases}$$

$a_0 = 0$

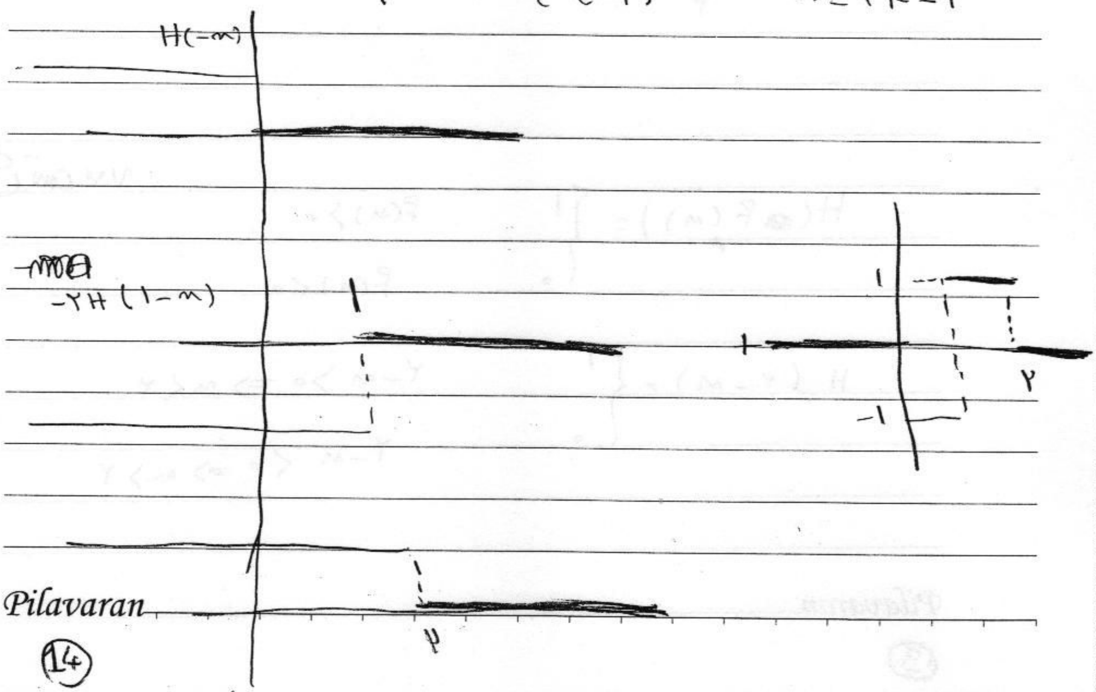
$$a_n = \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\cos\frac{n\pi}{2}x\,dx$$

$$a_n = \int_0^1 -\cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right)dx + \int_1^2 \cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right)dx$$

$$\frac{-2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}x\Big|_0^1 + \frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\Big|_1^2$$

$$= \frac{-4}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & n = 2k \\ (-1)^{k+1} & n = 2k-1 \end{cases}$$



Subject: Date: 80

ص ۱۸ مکانیک ۷۵

۶۷۳ سؤال ۴

$$\int_{(T)} |f(x)|\,dx < \underset{\uparrow}{M}$$

لزوماً توابع متناوب همیشه سری فوریه ندارد

$y = \tan x$

$$\int_0^{\pi} |\tan x|\,dx = \infty$$

ص ۸۳ ← سؤال ۱۱

برای محاسبه مقدار فوریه در یک نقطه نیازی به سری فوریه تابع نداریم بلکه مطابق زیر حالت‌ها عمل می‌کنیم:

۱) x_0 نقطه پیوستگی $f(x)$ باشد.

x_0 مقدار سری فوریه در $= f(x_0)$

۲) x_0 نقطه گسستگی $f(x)$ باشد

x_0 مقدار سری فوریه در $= \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)}{2}$

Pilavaran

مثال) مقدار سری فوریه تابع x

$T=3$، تناوب داده شده $f(x) = \begin{cases} x & 0<x<1 \\ 2 & 1<x<2 \\ -1 & 2<x<3 \end{cases}$

بسط آورید؟

$x=0$ ناپیوستگی $\Rightarrow \frac{-1+0}{2} = -\frac{1}{2}$

$x=1$ " $\Rightarrow \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$

$x=\frac{1}{2}$

$x=\frac{3}{2}$

$x=2$

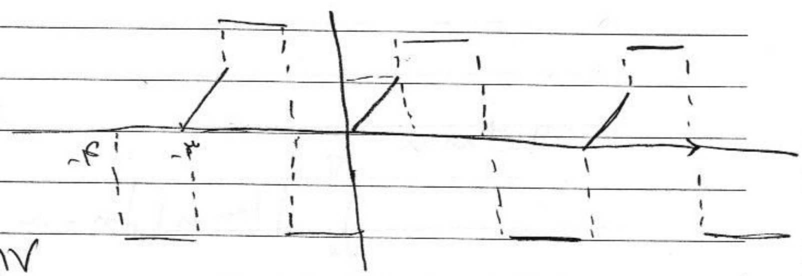
$x=3$

$x=5$

$x=117$

$x=-294,5$

$x=1397$



$x=\frac{1}{2}$ پیوستگی $\Rightarrow f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$

$x=\frac{3}{2}$ " $\Rightarrow f(\frac{3}{2}) = 2$

$x=2 \Rightarrow$ ناپیوستگی $\Rightarrow \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$

$x=3 \Rightarrow$ " $\Rightarrow \frac{-1+0}{2} = \frac{1}{2}$

$x=5 \equiv x=2$

$x=117 \equiv 0$

تصحیح (3)

$x = -۲۹۶/۵ \equiv ۴/۵$

$x = ۱۳۹۷ \equiv ۲$

$-\pi < x < \pi$ ص ۸۲ تست ۸

$\frac{\pi^۲ + \cancel{\pi} + \pi^۲ - \cancel{\pi}}{۲} = \pi^۲$ $\pi^۲$ ✓

$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

$\lim_{n \to \infty} b_n = 0$

$0 < x < \pi$

در بسط فوریه تابع | $f(x) = \sin(e^{\cos x})$ $\lim_{n \to \infty} a_n$ کدام است؟

۱) ۰ ✓ ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) $\frac{۱}{۲}$

حد سرعت همگرایی ضرایب a_n و b_n متناسب $\frac{e}{n}$ است

سری همگرا ن

$3^x + 2^{x+1} \ldots + x^{999} \ldots + \cos x + 5$

به تعداد الکترون های موجود در جهان هستی

$= \frac{1}{4}$

$\lim_{x \to \infty} 2^x + 999 \ldots + 3^{x+2} + x^{10} \ldots + \sin x + 10$

هر عددی هر چند بزرگ در مقابل بی‌نهایت اپسیلون است،

$$\frac{3^{n}}{3^{n}+2} = \frac{1}{9}$$

$n \to \infty$

$$\frac{n^2+4n}{5n^3+2n} = \frac{\frac{1}{5}}{n}$$

$$\frac{n+2}{n^4+2n+} \sim \frac{1}{n^3}$$

صفحه ۱۰۰ ← ۷۸

قضیه ص ۴۶

$f(x)$ حداقل یک نقطه ناپیوستگی در دامنه تعریف دارد $\Leftarrow$ حداقل یکی از a_n یا b_n با سرعت $\frac{c}{n}$ همگرا ~~ی~~ می‌شود

$f(x)$ پیوسته $f'(x)$ ناپیوسته $\Leftarrow$ حداقل یکی از a_n یا b_n با سرعت $\frac{c}{n^2}$ همگرا می‌شود (حداقل سرعت بین a_n و b_n $\frac{c}{n^2}$ است)

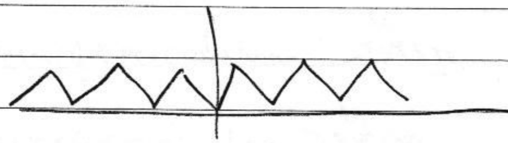
f, f' پیوسته f'' ناپیوسته

ص ۹۲ ← ۴۸

f پیوسته $\Rightarrow$ $a_n \sim \frac{c}{n^2}$

f' ناپیوسته

ص ۹۲ ← ۴۶



تابع زوج ⇐ $b_n = 0$

ص ۴۷

یعنی ۷۴

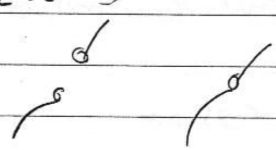
$$a_n = \frac{2(1-e^{-1})}{1+4\pi^2 n^2}, \quad n \neq 0 \qquad \frac{c}{n^2}$$

$$b_n = \frac{4n\pi(1-e^{-1})}{1+4\pi^2 n^2} \qquad \frac{c}{n}$$

انتگرال گیری از سری فوریه ص ۳۳

مشتق گیری از سری فوریه ص ۳۴

ناپیوستگی رفع شدنی



ناپیوستگی جهش دارد اینجا نمی توان از سری فوریه مشتق بگیریم

* محاسبه سری ها با استفاده از سری فوریه :

1) سری فوریه تابع مورد نظر را بدست می آوریم

2) جمله عمومی سری مورد نظر را بدست می آوریم

3) جمله عمومی سری را با ضرایب فوریه مقایسه می کنیم در صورت مشابه بودن (یکسان بودن سری های همگرا) با عددگذاری مناسب و ساده کردن مقدار سری را بدست می آوریم در غیر اینصورت سعی می کنیم با اعمال موارد زیر بر روی ضرایب فوریه آنها را شبیه جمله عمومی سری کنیم

انتگرال گیری
مشتق گیری → کاهش
پارسوال

سرعت را افزایش خواهد

پارسوال ← فقط یکبار می توانیم استفاده کنیم

$$\frac{1}{n^4}$$

$$f(x) = \sum \frac{A}{n} \cos nx \qquad \frac{1}{n^2}$$

$$f(x) = \sum \frac{A}{n^2} \sin nx$$

دوبار انتگرال یکبار پارسوال

بعد

یکبار پارسوال

یکبار انتگرال گیری $\frac{1}{n^3}$

مل ۲۶

با استفاده از بسط $f(x) = \cos x \quad 0 < x < \pi$ مقدار سری زیر را بدست آورید.

$$\frac{1}{1^2 \times 3^2} + \frac{1}{3^2 \times 5^2} + \frac{1}{5^2 \times 7^2} + \cdots = \frac{\pi^2 - 8}{16}$$

$a_0 = a_n = 0$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos x \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1+\cos n\pi}{n+1} + \frac{1+\cos n\pi}{n-1}\right)$$

$$\frac{1}{\pi} \frac{2n}{n^2-1}(1+\cos n\pi)$$

$$\cos x = \frac{1}{\pi}\sum \frac{2n}{n^2-1}(1+\cos n\pi)\sin nx$$

$$1+\cos n\pi = \begin{cases} 2 & n = 2k \\ 0 & n = 2k-1 \end{cases}$$ متناوبی

$$\cos x = \frac{8}{\pi}\sum \frac{2k}{4k^2-1}\sin 2kx$$ فرد

سمت راست انتگرال بگیر

جمله عمومی سری $= \dfrac{1}{(4n^2-1)^2}$

Subject: Date:

انتگرال می‌گیریم زوج (اگر فرد بودن $a_0=0$ می‌شد) $\frac{a_0}{2}$

انتگرال گیری: $\sin x = \frac{4}{\pi} \sum \frac{-1}{4k^2-1} \cos 2kx + c$

ثابت فوریه

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \, dx = \frac{4}{\pi}$$

$$\sin x = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum \frac{\cos 2kx}{4k^2-1} \qquad 0<x<\pi$$

پارسوال

پارسوال: $\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = \frac{8}{\pi^2} + \frac{16}{\pi^2}\sum \frac{1}{(4k^2-1)^2}$

1

$$\to \sum \frac{1}{(4k^2-1)^2} = \frac{\pi^2-8}{16}$$

ص ۹۴ تست ۵۸

$$x^2 + x = x + 4\sum (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2} + c$$

$x^2 = 4$

تذکر: اگر در بسط فوریه تابع $f(x)$، $\frac{a_0}{2}$ مخالف صفر باشد با انتگرال گیری

جمله جمله از سری فوریه تابع $f(x)$ بسط فوریه انتگرال $\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)$

$\int f(x)\,dx$

Subject: Date:

با استفاده آن ملکه سری فوریه

$\int f(x)\,dx - \frac{a_0}{2}x$ دست می آید

صفحه ۹۶ تست ۹۵

$$\frac{2\pi+1-2\pi+1}{2}=1$$

۳) $\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$ جمله عمومی

$$2\times\frac{\pi}{2}=1-4\sum(-1)^{n}\frac{\sin n\frac{\pi}{2}}{n}$$

عدد گذاری

$$\sin\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}0 & n=2k\\ (-1)^{k+1} & n=2k-1\end{cases}$$

$$\frac{\pi}{4}=\cancel{4}\sum\cancel{(-1)^{2k-1}}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$$

صفحه ۹۵ ← ۶۱

~~[illegible]~~

صفحه ۸۴ ← ۵

$\cancel{\frac{\pi^{2}}{2}\ \frac{\pi}{\pi}\ (\frac{4}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x)+\frac{1}{2\pi}\cos(\frac{2\pi}{2}x)\ \frac{1}{3}}$

~~[illegible]~~

۱۲ ← ۸۳

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi^2 - x^2)\,dx$$

$$\frac{2}{\pi}\left(\pi^3 - \frac{1}{3}\pi^3\right) = \frac{4\pi^2}{3} \rightarrow$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{2\pi^2}{3}$$

ص ۹۵ ← ۵۹

ص ۹۷ ← ۹۸

ص ۱۰۵ ← ۹۵

ص ۱۰۶ ← ۹۷

$$k^2 \frac{A_0}{2} = \frac{a_0}{2}$$

ص ۱۰۵ ← ۹۶

$$\rightarrow A_0 = \frac{a_0}{k^2}$$

روش محاسبه ضرایب فوریه ← انتگرال گیری

محاسبه ضرایب فوریه بدون انتگرال گیری:

اگر تابع $f(x)$ در نقاط $x_1, x_2, \dots, x_n$ جهش‌هایی به طول $F_1, F_2, \dots, F_n$

داشته باشد $\boxed{F_i = f(x_i^+) - f(x_i^-)}$ ص ۴۲ کتاب ۲ نقطه ضرایب فوریه بصورت

$x \to x_i^+ \quad x \to x_i^-$

(پرش در نقطه x_k است طول)

زیرا تابع محاسبه است؟

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{-L}{n\pi} b'_n - \dfrac{1}{n\pi} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} F_k \sin\left(\dfrac{n\pi}{L} x_k\right) \\ b_n = \dfrac{1}{n\pi} a'_n + \dfrac{1}{n\pi} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} F_k \cos\left(\dfrac{n\pi}{L} x_k\right) \end{cases}$$

a', b' ضرایب فوریه تابع $f'(x)$ می‌باشد — ضریب تابع F'

$$a'_n = \frac{-L}{n\pi} b''_n - \frac{1}{n\pi} \sum_{k=1}^{n} F'_k \sin\left(\frac{n\pi}{L} x'_k\right)$$

$b'_n = \dots$

ص ۱۵ ص ۴۶

ت۲ ص ۲۷

فرد $\Rightarrow a_0 = a_n = 0$

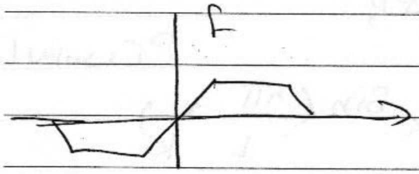
$$b_n = +\frac{3}{n\pi} a'_n + \frac{1}{n\pi}(0)$$

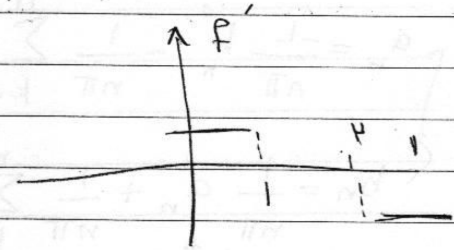
$$a'_n = \frac{-۳}{n\pi}\cancel{b''_n} - \frac{۲}{n\pi}\Big((-1)\sin\big(\frac{n\pi}{۳}(1)\big) +$$

$$(-1)\sin\big(\frac{n\pi}{۳}(۲)\big)\Big)$$

$$b_n = \frac{+۶}{n^۲\pi^۲}\left(\sin\frac{n\pi}{۳} + \sin\frac{۲n\pi}{۳}\right) =$$

$$\sin\left(n\pi - \frac{n\pi}{۳}\right)$$





$$\begin{cases} 0 & n = ۲k \\ \dfrac{۱۲}{n^۲\pi^۲}\sin\left(\dfrac{n\pi}{۳}\right) & n = ۲k-1 \end{cases}$$

ص ← ۸۸

گزینه (۲) صحیح

کاشف (۸۶)

$$a_n = \frac{-L}{n\pi} b'_n \ \frac{۲}{n\pi}\left(F(c^+) - F(c^-)\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}c\right)$$

$$b'_n = \frac{L}{n\pi}\cancel{a''_n} + \frac{۲}{n\pi}\left(F'(c^+) - F'(c^-)\right)\cos\left(\frac{n\pi}{L}c\right)$$

$F'' = 0$

نکته: تابع زوج یا فرد بود ← نصف دامنه ۲x

$$a_n = \frac{-2L}{n^2\pi^2}\left(f'(c^+) - f'(c^-)\right)\cos\left(\frac{n\pi}{L}c\right)$$

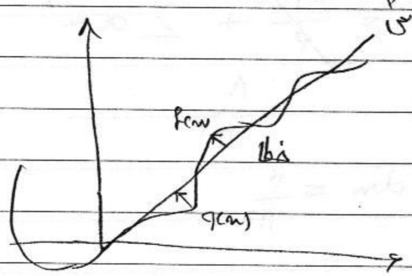
$$-\frac{2}{n\pi}\left(f(c^+) - f(c^-)\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}c\right)$$

قضیه: اگر بخواهیم تابع $f(x)$ را توسط مجموعه‌ای از توابع

sin و cos، عدد ثابت تقریب دهیم که خطای مربعات

Minimum شود کافی است ضرایب sin‌ها و cos‌ها و عدد ثابت را همان

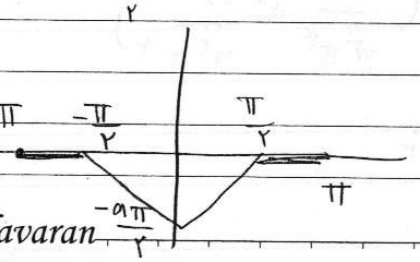
ضرایب فوریه در نظر بگیریم



تست سال ۷۹ ۹۷ ← ۴۹

$$\{\alpha + \beta\cos x + \gamma\sin x,\ \forall \alpha, \beta, \gamma \in R\}$$

$$\alpha \to \frac{a_0}{2}, \quad \beta \to a_1, \quad \gamma \to b_1$$



تابع زوج $\to b_1 = 0$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{\frac{a\pi^2}{4}}{2\pi} = -\frac{a\pi}{8}$$

گزینه (۲)

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx =$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos nx\,dx =$$ [redacted] ...

در بسط فوریه کسینوسی $f(x)=\sin x$ ، $0<x<\pi$ به صورت $\frac{a_0}{2}+\sum a_n\cos nx$ حاصل $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ کدام مورد است؟

$$\cancel{\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx = \frac{a_1^2}{2}} + \sum a_n^2$$

$$\frac{8}{\pi^2}$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x\,dx = \frac{4}{\pi}$$

$$\sum a_n^2 = \frac{\pi^2-8}{\pi^2}$$

مثـ ۸۶ سؤال (۲۳)

$$\frac{1}{1}\int_0^{2} t^4\,dt = \frac{32}{9} + \sum\left(\frac{16}{n^4\pi^4}+\frac{16}{n^2\pi^2}\right)$$

$$0 = \frac{4}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2\pi^2}$$

$f(x) = x + \cos x \qquad -\pi < x < \pi$

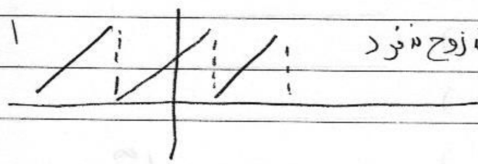
$f_1(x) = x \qquad -\pi < x < \pi \rightarrow$ فرد $\rightarrow a_0 = 0$

$a_n = 0$

$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin x \, dx$

$f_2(x) = \cos x \qquad -\pi < x < \pi = \cos x$

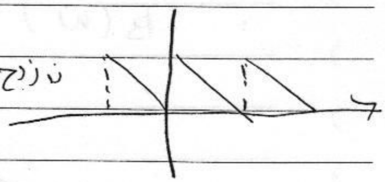
$f(x) = x + 1 \qquad -1 < x < 1$



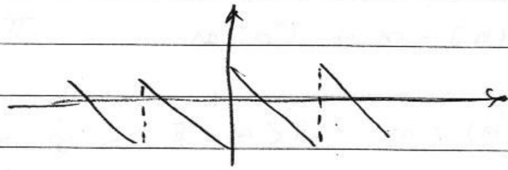
$f(x) = x \qquad -1 < x < 1 \rightarrow$ فرد $\rightarrow$

$f(x) = 1 \qquad -1 < x < 1 \Rightarrow$ برابر خودش است

$f(x) = 1 - x \qquad 0 < x < 1$



$\underbrace{f(x) - \frac{1}{2}}_{g(x)} = \frac{1}{2} - x \qquad 0 < x < 1$



فرد است

$a_0 = a_n = 0$

$$b_n = \frac{2}{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{\frac{1}{2}} x\right) dx =$$

سری فوریه مختلط حذف شده است.

انتگرال فوریه:

$$f(x) = \int_0^{\infty} \left(A(w) \cos wx + B(w) \sin wx\right) dw$$

$$A(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos wx \, dx$$

$$B(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin wx \, dx$$

[redacted]

$$\text{فرد } f(x) \Rightarrow \begin{cases} A(w) = 0 \\ B(w) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)\sin wx\,dx \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \int_0^{\infty} B(w)\sin wx\,dw$$

$$\text{زوج } f(x) = \begin{cases} A(w) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)\cos wx\,dx \Leftrightarrow \end{cases}$$

$$f(x) = \int_0^{\infty} A(w)\cos wx\,dw$$

$$B(w) = 0$$

مثال) انتگرال فوریه تابع زیر را بدست آورید؟

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < -2 \\ 2 & -2 < x < 0 \\ x & 0 < x < 1 \\ 1 & 1 < x < 2 \\ 0 & x > 2 \end{cases}$$

$$A(w) = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\infty}^{-2} 0\cos wx\,dx + \int_{-2}^{0} 2\cos wx\,dx + \right.$$

$$\left.\int_0^1 x\cos wx\,dx + \int_1^2 \cos wx\,dx + \int_2^{\infty} 0\cos wx\,dx\right) =$$

$$\frac{2}{w}\left(-\sin(2w)\right)+\frac{\sin w}{w}-\frac{1-\cos w}{w^2}+\frac{\sin 2w-\sin w}{w}\Big)$$

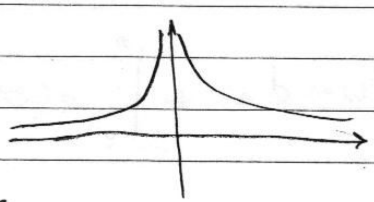
$$B(w)=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-2}^{0} 2\sin wx\,dx+\int_{0}^{1} x\sin wx\,dx+\int_{1}^{2}\sin wx\,dx\right)=\ldots$$

انتگرال فوریه را بدست آورید $f(x)=e^{-|x|}$

زوج $\Rightarrow B(w)=0$

$$A(w)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-x}\cos wx\,dx=\frac{2}{\pi}\,\frac{1}{1+w^2}$$

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\cos wx}{1+w^2}\,dw$$



شرط نیم دامنه

$y = f(x) \quad 0 < x < \infty$

انتگرال فوریه سینوسی

$$\begin{cases} A(w) = 0 \\ B(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin wx\,dx \iff f(x) = \int_0^\infty B(w)\sin wx\,dw \end{cases}$$

انتگرال فوریه کسینوسی

$$\begin{cases} A(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos wx\,dx \\ \iff f(x) = \int_0^\infty A(w)\cos wx\,dw \end{cases}$$

$B(w) = 0$

(۴) ـــ ۵ (۱۲۵)

گرایش .ت ۷۹

$A(w) = f(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 (1-x)\cos wx\,dx =$

۴ ۵ ← (۱۲۵)

تابع زوج $\to \alpha = -\beta$

$A(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^\beta C\cos wx\,dx = \frac{2C}{\pi}\frac{\sin \beta w}{w}$

$A(w) = \frac{\sin w}{w}$ باشد

$\frac{2C}{\pi} = 1 \Rightarrow C = \frac{\pi}{2}, \; \beta = 1$

Subject: **Date:**

۵ ← ۱۲۵

$$f(w) = A(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{1}{2}\cos wx\,dx = \frac{1}{\pi}\,\frac{\sin w}{w}$$

$$\int_{-4}^{5}\left([x]+[-x]\right)dx = -9 \equiv \int_{-4}^{5} -1\,dx = -9$$

$$\int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^3 x\,dx = \frac{9}{2}$$

۸ ← ۱۲۶   گرایش برق ۸۱

$$F(w) = B(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 (1-x)\sin wx\,dx$$

$$\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{w} + \frac{\sin w}{w^2}\right) = \frac{2}{\pi}\,\frac{w+\sin w}{w^2}$$

۱۵ ← ۱۲۷

$$g(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^a \cos(tx)\,dx$$ برق ۸۴

$$g(0) = \frac{2}{\pi}\int_0^a dx = \frac{2a}{\pi}$$

(9) ۱۲۴

تمر. ۸۴

فرد $f(x) \Rightarrow B(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin\omega x\,dx$

$$\frac{dB(\omega)}{d\omega} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty x f(x)\cos\omega x\,dx$$

(1) $\frac{\pi}{2}B(\omega) + \frac{\pi}{2}\frac{dB(\omega)}{d\omega} = 0 \rightarrow \frac{dB(\omega)}{B(\omega)} = -d\omega$

$$\boxed{B(\omega) = Ce^{-\omega}}$$

$$f(x) = \int_0^\infty B(\omega)\sin\omega x\,d\omega = \int_0^\infty Ce^{-\omega}\sin\omega x\,d\omega$$

$$= \frac{Cx}{1+x^2} \rightarrow f(1) = 1 \rightarrow C = 2$$

(2) $xf(x) = \dots$

۹ ← (۱۴۵)

تمر. ۷۴

$$a(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos\omega x\,dx$$

$$-\frac{da(\omega)}{d\omega} = +\frac{2}{\pi}\int_0^\infty x f(x)\sin\omega x\,dx$$

(2) $\rightarrow A(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty x f(x)\sin\omega x\,dx$

Subject: Date:

۲۸ ← ۱۳۰

تابع زوج $\Rightarrow B(w)=0$

$$A(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \cos wx\,dx = \frac{2}{\pi}\,\frac{\sin w}{w}$$

(۲۷) ← (۱۳۵)

$$f(w)=B(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos x \sin wx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1+\cos w\pi}{w+1} + \frac{1+\cos w\pi}{w-1}\right)$$

محاسبه انتگرال‌های معین با استفاده از انتگرال فوریه:

رابطه پارسوال

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} (f(x))^2\,dx = \int_0^{\infty} \left(A(w)^2 + (B(w))^2\right)dw$$

(۱) انتگرال فوریه تابع مورد نظر را بدست می‌آوریم.

(۲) عبارت مقابل انتگرال معین را با عبارت مقابل انتگرال فوریه مقایسه می‌کنیم و سپس در صورت مشابه بودن با عددگذاری و ساده کردن و در غیر اینصورت از رابطه پارسوال و ساده کردن استفاده می‌کنیم.

مثال) با استفاده از انتگرال فوریه سینوسی تابع

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < a \\ 0 & x > a \end{cases}$$

حاصل انتگرال های زیر را بدست آورید؟

الف) $\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x} \sin x \, dx$

ب) $\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$

$$B(w) = \frac{2}{\pi} \int_0^a \sin wx \, dx = \frac{2}{\pi} \frac{1-\cos aw}{w}$$

$$\boxed{f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1-\cos aw}{w} \sin wx \, dw}$$

2 طبق قضیه دیریکله در نقاط ناپیوستگی

الف) $x = a \quad \frac{0+1}{2} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1-\cos aw}{w} \sin aw \, dw$

$$\overset{a=1}{\Longrightarrow} \int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x} \sin x \, dx = \frac{\pi}{4}$$

ب) $\int_0^\infty \frac{\sin^۴ x}{x^۲}\,dx$

$$\frac{۲}{\pi}\int_0^a 1\,dx = \int_0^\infty \frac{۴}{\pi^۲}\,\frac{\overbrace{(1-\cos aw)^۲}^{۴\sin^۲\frac{aw}{۲}}}{w^۲}\,dw =$$

$$\frac{۲}{\pi}a = \frac{۴}{\pi^۲}\int_0^\infty \frac{۴\sin^۴\frac{aw}{۲}}{w^۲}\,dw$$

$a=۲$

$$\frac{۴}{\pi} = \frac{۴}{\pi^۲}\int_0^\infty ۴\,\frac{\sin^۴ w}{w^۲}\,dw \to \int_0^\infty \frac{\sin^۴ x}{x^۲}\,dx = \frac{\pi}{۴}$$

۱۶ ← ۱۲۸

$x^۲=t \to ۲x\,dx=dt$

$$I=\int_0^\infty \frac{\sin t}{x}\,\frac{dt}{۲x} = \frac{1}{۲}\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{۴}$$

$$1=\frac{۲}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin w}{w}\,dw \to \int_0^\infty \frac{\sin w}{w}\,dw = \frac{\pi}{۲}$$

تبدیل فوریه:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{+j\omega x}\,d\omega$$

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-j\omega x}\,dx$$

$F(\omega)$ را تبدیل فوریه $f(x)$ می‌نامند

مثال) تبدیل فوریه تابع زیر را بدست آورید.

$$f(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1 & 0<x<1\\ 2 & 1<x<2\\ 0 & x>2\end{cases}$$

$$F(\omega)=\int_0^1 e^{-j\omega x}\,dx+\int_1^2 2e^{-j\omega x}\,dx=\frac{1-e^{-j\omega}}{j\omega}+$$

$$\frac{2}{j\omega}\left(e^{-j\omega}-e^{-2j\omega}\right)$$

مثال) تبدیل فوریه تابع $f(x)=\begin{cases} e^{-ax} & x>0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$ را بدست آورید.

$$F(\omega)=\int_0^{\infty} e^{-ax} e^{-j\omega x} dx = \frac{1}{a+j\omega}$$

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-j\omega x} dx$$

$$F(s)=\int_0^{\infty} f(x) e^{-sx} dx$$

شرط

1) x کوچکتر از صفر ← صفر

2) قدر مطلق ← محدود   انتگرال پذیر از منفی تا بی‌نهایت   زوج

$$e^{-ax} \xrightarrow{\alpha} \frac{1}{se^{a}} \qquad F(\omega)=\frac{1}{j\omega+a}$$

مثال) تبدیل فوریه تابع $f(x)=e^{-a|x|}$ را بدست آورید.

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|x|} \underbrace{e^{-j\omega x}}_{\cos\omega x - j\sin\omega x} dx =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|x|} \cos\omega x \, dx - j\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(x)} \sin\omega x \, dx$$

$$= 2\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos\omega x \, dx = 2\frac{a}{a^2+\omega^2}$$

خواص تبدیل فوریه:

(۱) تغییر مقیاس

$$f(x) \xrightarrow{F} F(\omega)$$

$$f(ax) = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

(۲) انتقال

الف) $e^{ajx} f(x) \xrightarrow{F} F(\omega - a)$

ب) $f(x-a) \xrightarrow{F} e^{-ja\omega} F(\omega)$

(۳)

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f'(x) = \lim f''(x) = \dots = 0$$

$$f^{(n)}(x) \xrightarrow{F} (j\omega)^n F(\omega)$$

(۴)

$$x^n f(x) \xrightarrow{F} (j)^n F^{(n)}(\omega)$$

(۵) دوگان:

$$f(x) \longrightarrow F(\omega)$$

$$F(x) \longrightarrow ۲\pi f(-\omega)$$

۶) کانولوشن

$$f(x) * g(x) \xrightarrow{F} F(\omega)\,G(\omega)$$

$$f(x)\,g(x) \xrightarrow{F} \frac{1}{2\pi} F(\omega) * G(\omega)$$

$$\boxed{f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-\lambda)\,g(\lambda)\,d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\,g(\lambda - x)\,d\lambda}$$

ریاضیات مهندسی

$$f(x) * g(x) = \int_0^x f(x-\lambda)\,g(\lambda)\,d\lambda = \int_0^x f(\lambda)\,g(x-\lambda)\,d\lambda$$

معادلات دیفرانسیل

۷) رابطه پارسوال

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

۸) $f(x)$ زوج $\longrightarrow$ $F(\omega)$ زوج و حقیقی

$f(x)$ فرد $\longrightarrow$ $F(\omega)$ فرد و موهومی

مثال) با استفاده از تبدیل فوریه $f(x)=e^{-a|x|}$ تبدیل فوریه $\dfrac{1}{a^2+x^2}$ را بدست آورید.

$$e^{-a|x|} \xrightarrow{F} \frac{2a}{a^2+w^2}$$

$$\frac{2a}{a^2+x^2} \xrightarrow{\text{دوگان}} 2\pi e^{-a|-w|} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{a^2+x^2} \longrightarrow \frac{\pi}{a} e^{-a|w|}$$

با استفاده از تبدیل فوریه $e^{-a|x|}$ حاصل $\int_0^\infty \dfrac{dx}{(a^2+x^2)^2}$ را بدست آورید؟

$$e^{-a|x|} \longrightarrow \frac{2a}{a^2+w^2}$$

$$2\int_0^\infty (e^{-ax})^2 dx = \frac{2}{2\pi}\int_0^\infty \frac{4a^2}{(a^2+w^2)^2} dw \Rightarrow$$

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{4a^2}{(a^2+w^2)^2} dw$$

$$\int_0^\infty \frac{dw}{(a^2+w^2)^2} = \frac{\pi}{4a^3} \quad \text{یا} \quad \int_0^\infty \frac{dx}{(a^2+x^2)^2} = \frac{\pi}{4a^3}$$

مثال) تبدیل فوریه تابع $f(x)=e^{-x^2}$ را بدست آورید؟

$$f'(x)=-2xe^{-x^2} \Rightarrow f'(x)=-2xf(x)$$

$$(\cancel{j}w)F(w)=-2\cancel{j}F'(w)$$

$$\frac{dF(w)}{F(w)}=-\frac{w}{2}dw \longrightarrow F(w)=Ce^{-\frac{w^2}{2}}$$

$$F(0)=C$$

$$F(w)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}e^{-jwx}dx \rightarrow F(0)=C=$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$$

مثال) تبدیل فوریه $f(x)=\tan^{-1}x-\frac{\pi}{2}$ را بدست آورید؟

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

$$jwF(w)=\pi e^{-|w|} \Rightarrow F(w)=\frac{\pi}{jw}e^{-|w|}$$

Subject: Date:

تبدیل فوریه سینوسی و کسینوسی :

$$A(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(x)\cos\omega x\, dx$$

$$F_c = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(x)\cos\omega x\, dx$$

$$B(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(x)\sin\omega x\, dx$$

$$F_s(\omega) = \int_0^{\infty} f(x)\sin\omega x\, dx$$

مطابق ۸۲ (۲) ← ص ۱۵۵ (۱۴۸) حل

$$F_c(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-x}\cos\omega x\, dx = \frac{1}{1+\omega^2}$$

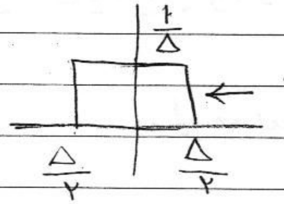
تمرین ۱۸۷) تبدیل فوریه سینوسی $f(t) = \frac{e^{-at}}{t}$ برابر کدام است (w)

$$F_s(\omega) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-at}}{t}\sin\omega t\, dt$$

$$\frac{dF_s(\omega)}{d\omega} = \int_0^{\infty} e^{-at}\cos\omega t\, dt = \frac{a}{a^2+\omega^2}$$

$$F_s(\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

شروع تابع دلتا یا ضربه



$\Delta \to 0$

خواص

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,dx = \int_{0^-}^{0^+} \delta(x)\,dx = 1$

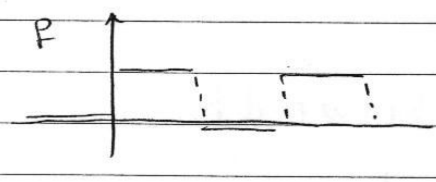
(2) $f(x)\,\delta(x-a) = f(a)\,\delta(x-a)$

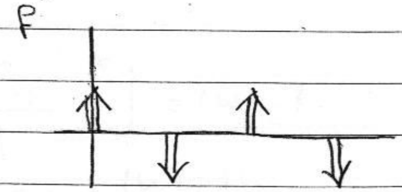
(3) $f(x) * \delta(x-a) = f(x-a)$

(4) $u'(x) = \delta(x)$

(5) $F(\delta(x)) = 1$

(6) $\delta(-x) = \delta(x)$ پرش باید فرق نکند ⇐ ضربه





مثال) سری فوریه تابع $f(x) = \delta(x)$ با دوره تناوب $T=2L$ بدست آورید.

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \delta(x)\,dx = \frac{1}{L}$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \underbrace{\delta(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}_{\delta(x)\cos(0)}dx = \frac{1}{L}$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \delta(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx = 0$$

$$f(x) = \frac{1}{2L} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L}\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

مثال) تبدیل فوریه e^{ajx} را بدست آورید.

$$\delta(x) \longrightarrow 1$$

دوگان $\Rightarrow 1 \longrightarrow 2\pi\,\delta(w)$

انتقال $= e^{ajx} \longrightarrow 2\pi\,\delta(w-a)$

مثال) تبدیل فوریه $\sin ax$ را بدست آورید؟

$$\sin ax = \frac{e^{jax} - e^{-jax}}{2j} \xrightarrow{F} \frac{2\pi}{2j}\left(\delta(w-a) - \delta(w+a)\right)$$

$\sin ax$ و $\cos ax$ تبدیل فوریه ندارند ولی تبدیل فوریه تعمیم یافته دارند.

گرایش کامپیوتر ۸۲ (۱۵۵) ← ۳

$$F(w) = \int_{-2}^{2} e^{-jwx}\,dx = 2\int_0^2 \cos wx\,dx = 2\,\frac{\sin 2w}{w}$$

گرایش کامپیوتر ۷۸ (۱۵۶) ← ۹

$$jw\,Y(w) - 4Y(w) = \frac{1}{4 + jw} \leftarrow \text{اولیه}$$

$$Y(w) = \frac{1}{(4+jw)(jw-4)} = \frac{-1}{16 + w^2}$$

مهر ۸۲ (۱۵۷) ← ۱۵

$$e^{jam} f(m) + e^{-jam} f(m)$$

$$F(w-a) + F(w+a)$$

تیر ۸۲ (۱۵۵) ← ۱

$$f(t) = \underbrace{e^{-a(t)}}_{g(t)}$$

$$\frac{1}{2j}\left(e^{jbt} g(t) - e^{-jbt} g(t)\right) \xrightarrow{F} F(w) = \frac{1}{2j}\left(G(w-b) - G(w+b)\right)$$

$$g(t) = e^{-a(t)} \longrightarrow G(w) = \frac{2a}{a^2+w^2}$$

$$F(w) = \frac{2a}{2j}\left(\frac{1}{\underbrace{a^2+(w-b)^2}_{a^2+w^2+b^2-2wb}} - \frac{1}{\underbrace{a^2+(w+b)^2}_{a^2+w^2+b^2+2wb}}\right) =$$

$$\frac{a}{j}\left(\frac{4wb}{(a^2+w^2+b^2)^2 - 4w^2b^2}\right) = \frac{-4\,jawa}{\text{مخرج}}$$

کامپیوتر ۸۳ (۱۵۵) ← (۴)

$$\pi (jw)^2 y(w) - \pi y(w) = -\pi e^{-(w)} \Rightarrow$$

$$y(w) = \frac{e^{-(w)}}{w^2+1} \qquad e^{-a|x|} \longrightarrow \frac{2a}{a^2+w^2} \longrightarrow$$

$$\frac{1}{1+x^2} \longrightarrow \pi e^{-|w|} \quad \text{دوگان}$$

گرایش برق ۷۴ (۱۵۷) ← ۱۲ (۱۶۱) ← ۳۳

$F(t)$ فرد بنابراین $F(w)$ هم باید فرد و موهومی باشد

گزینه ۳

برق ۸۶ (۱۶۰) ← ۲۶

$$F(x) = \begin{cases} a & |x|<1 \\ 0 & |x|>1 \end{cases} \longrightarrow F(w) = 2a \frac{\sin w}{w}$$

$$F(w) = \int_{-1}^{1} a e^{-jwx} dx = 2\int_0^1 a \cos wx \, dx$$

$$\frac{2a\sin x}{x} \longrightarrow 2\pi \begin{cases} a & |-w|<1 \\ 0 & |w|>1 \end{cases}$$

$$\frac{\sin x}{x} \longrightarrow \begin{cases} \pi & |w|<1 \\ 0 & |w|>1 \end{cases}$$

کامپیوتر ۷۴ (۱۵۷) ← ۱۳

$$F(w)=\int_{-\pi}^{\pi} e^{jwx}\,dx = 2\int_{0}^{\pi} \cos wx\,dx = 2\frac{\sin w\pi}{w}$$

گزینه (1)

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(w)\,e^{jwx}\,dw$$

$$F(w)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,e^{-jwx}\,dx$$

برق سال ۸۷ (۱۴۱) ← ۳۱

$$f'(x)=-2xe^{-x^2} \Rightarrow f'(x)=-2xf(x)$$

$$jwF(w)=-2jF'(w)$$

گزینه ۳

۲۱ ⇐ ۱۵۹

$$F(w)=\int_{-\pi}^{\pi} -\sin t\, e^{-jwt}\, dt \xrightarrow{u=t+\pi}$$

$$F(w)=\int_{0}^{2\pi} \sin u\, e^{-jw(u+\pi)}\, du =$$

$$e^{-jw\pi}\int_{0}^{2\pi} \sin u\, e^{-jwu}\, du =$$

$$\sin u = t$$

$$e^{-jwu}\, d = dv$$

$$F(w)=e^{-jw}\left[\sin u \times \frac{e^{-jwu}}{-jw}\Big|_{0}^{2\pi} + \int_{0}^{2\pi}\frac{\cos e^{-jwu}}{jw}\, du\right)$$

$$F(w)=\frac{e^{-jw}}{jw}\int_{0}^{2\pi} \cos u\, e^{-jwu}\, du \xrightarrow{u=\frac{t}{2}}$$

$$F(w)=\frac{e^{-jw}}{2jw}\int_{0}^{4\pi} \cos\left(\frac{t}{2}\right) e^{-jw\frac{t}{2}}\, dt$$

$$2jw\, F(w)\, e^{jw} = \int_{0}^{4\pi} \cos\left(\frac{t}{2}\right) e^{-j\frac{w}{2}t}\, dt$$

$$4j\omega F(2\omega)\, e^{2j\omega} = \underbrace{\int_0^{4\pi} \cos\left(\frac{t}{2}\right) e^{-j\omega t}\, dt}_{G(\omega)}$$

گزینه ۴

توابع مختلط :

$\arg(-1+i) = \frac{3\pi}{4}$

$\sqrt[3]{8} \neq \sqrt[5]{32}$ ✓

$Ln(-1) = ?$ $\quad i\pi$

$\sin z = 2$ ✓

$ch^2 z + sh^2 z = 0 \Rightarrow z = ?$ $\quad (2k-1)\frac{\pi}{4} j$

آیا توابع $ch\, z$, $sh\, z$ متناوب است؟ متناوب است

فرم دکارتی — فرم قطبی (مثلثاتی) — فرم نمایی

$$Z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

x قسمت حقیقی

y قسمت موهومی Z

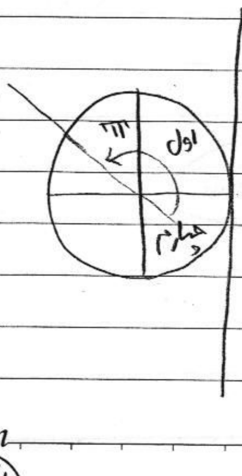
$r = |z|$ اندازه یا مدول Z

θ فاز یا آرگومان Z

$$r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\,\mathrm{cis}\,\theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$Z = x + iy \Rightarrow \theta = \begin{cases} tg^{-1}\dfrac{y}{x} & \text{فقط در ربع اول یا چهارم باشد} \\ \pi + tg^{-1}\dfrac{y}{x} & \text{" دوم یا سوم} \end{cases}$



$Z_1 = 1 + j \rightarrow r = \sqrt{2} \rightarrow \theta = tg^{-1}(1) = \frac{\pi}{4} \rightarrow (\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$

$Z_2 = -1 + j \rightarrow r = \sqrt{2} \rightarrow \theta = \pi + tg^{-1}(-1) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \rightarrow$

$(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4})$

$$f(z) = Re(f(z)) + i\,Im(f(z)) \Rightarrow \begin{cases} r = (f(z)) = \sqrt{(Re(f(z)))^2 + (Im(f(z)))^2} \\ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{Im(f(z))}{Re(f(z))}\right) \end{cases}$$

$$r, \theta \longrightarrow \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$ قضیه قبلی

تبدیل قطبی به دکارتی

قضیه موآور:

توان n رسانی و ریشه n بهترین قضیه، قضیه موآور

$Z = x + iy \xrightarrow[\text{فرم قطبی}]{\text{تبدیل به}} Z = r\,cis\theta \rightarrow Z^n = r^n\,cis(n\theta)$

$\rightarrow (Z)^{\frac{1}{n}} = (r)^{\frac{1}{n}}\,cis\left(\frac{2k\pi + \theta}{n}\right)$

$k = 0, 1, 2, \dots, n-1$

مثال) ریشه‌های چهارم ۱- را بدست آورید.

$$-1 = 1\,\text{cis}\,\pi \to (-1)^{\frac{1}{4}} = (1)^{\frac{1}{4}}\,\text{cis}\,\frac{2k\pi+\pi}{4}$$

$k=0 \quad \text{cis}\,\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$

$k=1 \quad \text{cis}\,\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$

$k=2 \quad \text{cis}\,\frac{5\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i)$

$k=3 \quad \text{cis}\,\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$

ریشه‌های پنجم عدد ۱ را بدست آورید.

$$1 = 1\,\text{cis}\,0 \Rightarrow \underset{1+0i}{(1)^{\frac{1}{5}}} = \underset{1}{(1)^{\frac{1}{5}}}\,\text{cis}\,\frac{2k\pi+0}{5}$$

$\text{cis}\,0$

$\text{cis}\,\frac{2\pi}{5}$

$\text{cis}\,\frac{4\pi}{5}$

$\text{cis}\,\frac{6\pi}{5}$

$\text{cis}\,\frac{8\pi}{5}$

$$\sqrt[3]{8} \neq \sqrt[5]{32}$$

در اعداد حقیقی برقرار است ولی در اعداد مختلط برقرار نیست.

$Z^{11} = 11 \Rightarrow Z^{11} - 11 = 0$

مجموع ریشه‌ها $= 0$

حاصل ضرب ریشه‌ها $= (-1)^{11} \times (-11) = 11$

$ax^3 + bx^2 + 2x + d = 0$

$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a}$

$x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}$

$ax^2 + bx + c = 0 \longrightarrow x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$

$x_1x_2 = \frac{c}{a}$

$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$

$a_nZ^n + a_{n-1} + Z^{n-1} + \cdots + a_1Z + a_0 = 0$

مجموع ریشه‌ها $= -\frac{a_{n-1}}{a_n}$

مجموع حاصلضرب ۲ به ۲ ریشه‌ها $= \frac{a_{n-2}}{a_n}$

$$\text{مجموع حاصلضرب ۲تایی ریشه‌ها} = -\frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$\text{حاصلضرب کل ریشه‌ها} = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

لگاریتم اعداد مختلط:

$$Z = re^{i(\theta + 2k\pi)}$$

$$\boxed{\operatorname{Ln} Z = \operatorname{Ln} r + i(\theta + 2k\pi)} \quad \text{جواب کلی}$$

$$\text{جواب اصلی} \Rightarrow \operatorname{Ln} Z = \operatorname{Ln} r + i\theta \qquad -\pi < \theta \leq \pi$$

$$\operatorname{Ln}(-1) = \cancel{\operatorname{Ln} 1} + i\pi = i\pi$$

$$\operatorname{Ln}(i) = \cancel{\operatorname{Ln} 1} + i\frac{\pi}{2} = i\frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{Ln}(1+i) = \operatorname{Ln}\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}$$

$$w = i^i \Rightarrow \operatorname{Ln} w = i \operatorname{Ln} i = i\left(\frac{i\pi}{2}\right) = \underbrace{i^2}_{-1}\frac{\pi}{2} = \frac{-\pi}{2} \Rightarrow$$

$$w = e^{-\frac{\pi}{2}}$$

$$W = (-1)^{i} \Rightarrow \operatorname{Ln} W = i\operatorname{Ln}(-1) = i(i\pi) = -\pi$$

$$W = e^{-\pi}$$

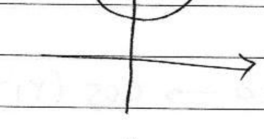
هر معادله مرتبه n دقیقاً n تا ریشه دارد.

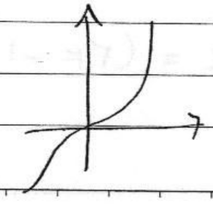
اگر ضرایب حقیقی باشند اگر z ریشه باشد $\bar{z}$ هم ریشه آن معادله می باشد $\Rightarrow$

مختلط ریشه‌ها زوج هستند.

مقایسه توابع مثلثاتی با توابع هایپربولیک

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \cos\theta + i\sin\theta \\ e^{-i\theta} &= \cos\theta - i\sin\theta \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} \end{cases}$$





$$\begin{cases} \operatorname{ch} x = \dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2} \\ \operatorname{sh} x = \dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2} \end{cases}$$

$$\cos(ix) = \frac{e^{i^2 x} + e^{-i^2 x}}{2} = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = ch\,x$$

$$(***)\begin{cases} \cos ix = ch\,x \;,\; ch(ix) = \cos x \\ \sin(ix) = i\,sh\,x \;,\; sh(ix) = i\sin x \\ tg(ix) = i\,tgh\,x \;,\; tgh(ix) = i\,tg\,x \end{cases}$$

$$\sin(z) = \sin(x+iy) = \sin x \cos(iy) + \cos x \sin(iy) = \sin x\, ch\,y + i\cos x\, sh\,y$$

$$\cos z = \cos(x+iy) = \cos x\, ch\,y - i\sin x\, sh\,y$$

$$ch\,z = ch(x+iy) = ch\,x \cos y + i\,sh\,x \sin y$$

$$ch^2 z + sh^2 z = 0$$

$$\cos^2(iz) - \sin^2(iz) = 0 \longrightarrow \cos(2iz) = 0$$

$$2iz = (2k-1)\frac{\pi}{2} \longrightarrow z = (2k-1)\frac{\pi}{4i}$$

$$\sin z = 2$$

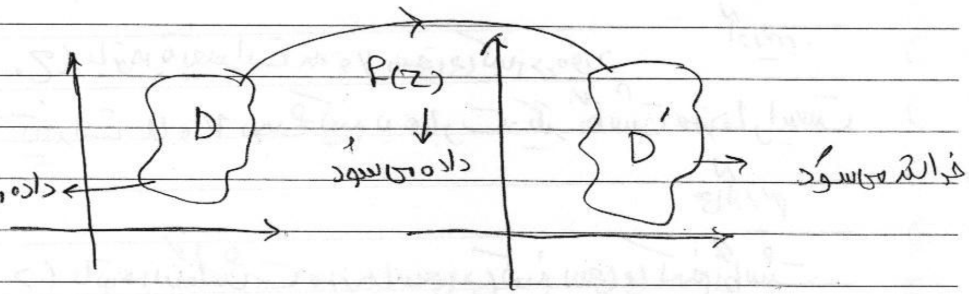
$$\sin z = 2$$

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 2 \rightarrow e^{2iz} - 4ie^{iz} - 1 = 0 \qquad e^{iz} = y$$

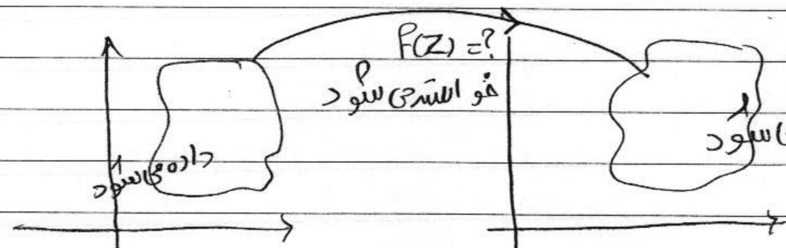
$$y^2 - 4iy - 1 = 0$$

توابع مختلط:

(1) عکس ناحیه D توسط $f(z)$ را بدست آوریم



(2) کدام تابع ناحیه D را به ناحیه D' تصویر (نگاشت) می‌کند



Subject: Date:

روش حل به نگاشت یک ناحیه توسط $w = f(z)$:

① بجای ناحیه ابتدا نگاشت مرزها را بدست می‌آوریم.

الف) معادله مرزها را می‌نویسیم

ب) از معادله $w = f(z)$ $\left(u + iv = f(x+iy)\right)$

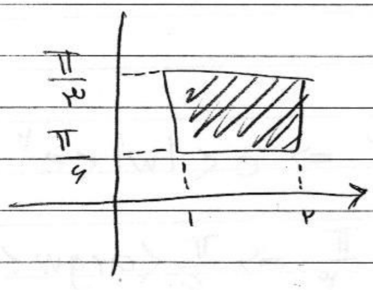
سعی می‌کنیم u, v را برحسب x و y یا x, y و x و y را برحسب u و v بدست آوریم.

* در شرایط یکسان بهتر است x و y را برحسب u, v بدست آوریم.

ج) با توجه به تغییرات x و y سعی می‌کنیم در مورد تغییرات u و v بحث کنیم به عبارت دیگر نگاشت مرزها را بدست می‌آوریم

د) با توجه به نگاشت مرزها سعی می‌کنیم نگاشت کل ناحیه را نیز بدست آوریم.

تصویر ناحیه هاشور خورده توسط $W=e^{z}$ را بدست آورید ؟



$$u+iv=e^{x+iy}=e^{x}(e^{iy})=e^{x}(\cos y+i\sin y)\Rightarrow$$

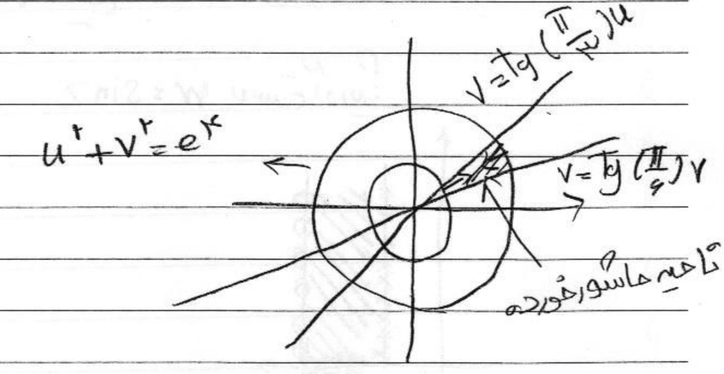
$$\begin{cases}u=e^{x}\cos y\\ v=e^{x}\sin y\end{cases}$$

$$x=1\Rightarrow\begin{cases}u=e\cos y\\ v=e\sin y\end{cases}\Rightarrow u^2+v^2=e^2$$

$$x=2\rightarrow u^2+v^2=e^4$$

$$y=\frac{\pi}{4}\Rightarrow\begin{cases}u=e^{x}\cos(\frac{\pi}{4})\\ v=e^{x}\sin(\frac{\pi}{4})\end{cases}\Rightarrow v=tg(\frac{\pi}{4})u$$

$$y=\frac{\pi}{3}\rightarrow v=tg(\frac{\pi}{3})u$$



مسئله ۲۱۷ کتاب

Subject: Date:

$re^{i\Theta}$

$|w| = e^{x}$ $e^{x} \times e^{iy}$

$\arg(w) = y$

$1 < x < 2 \Rightarrow e < |w| < e^{2}$

$\frac{\pi}{6} < y < \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{\pi}{6} < \arg w < \frac{\pi}{4}$

$|w| = e$ دایره

$|z - z_0| = r$

معادله دایره به مرکز z_0 و شعاع r

$|w - w_0| = r$

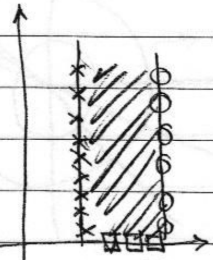
کامپیوتر ۸۲ (۲۴۸) ← ۴۴

گزینه ۲

موهومی ← Im

حقیقی ← Re

نگاشت ناحیه هاشور خورده توسط $w = \sin z$ بدست آورید.



$\frac{\pi}{2}$ π

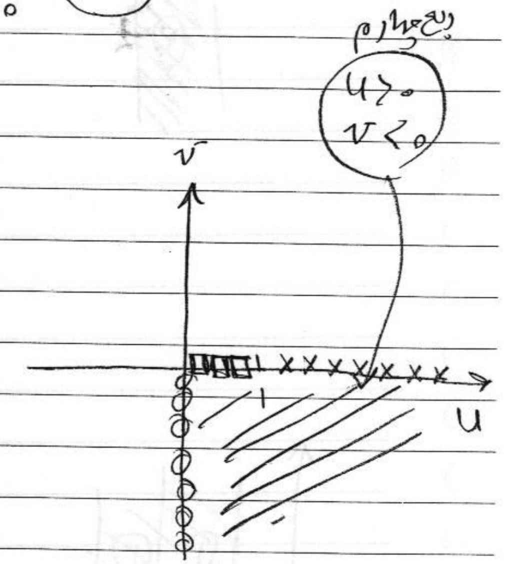
$$u + iv = \sin(x + iy) = \sin x \,\mathrm{ch}\, y + i \cos \mathrm{sh}\, y$$

$$\begin{cases} u = \sin x \underbrace{\mathrm{ch}\, y}_{>0} \\ v = \underbrace{\cos x}_{<0} \,\underbrace{\mathrm{sh}\, y}_{>0} \end{cases}$$

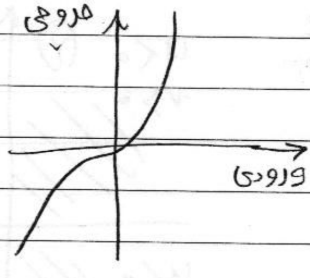
$$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} u = \mathrm{ch}\, y \\ v = 0 \end{cases}$$

$$x = \pi \Rightarrow \begin{cases} u = 0 \\ v = -\mathrm{sh}\, y \end{cases}$$

$$y = 0 \Rightarrow \begin{cases} u = \sin x \\ v = 0 \end{cases}$$



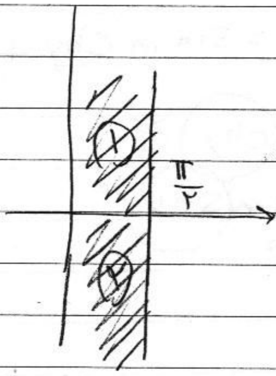
(یادآوری



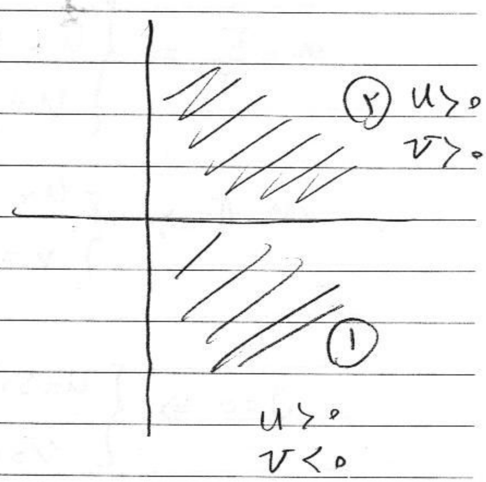
Shx

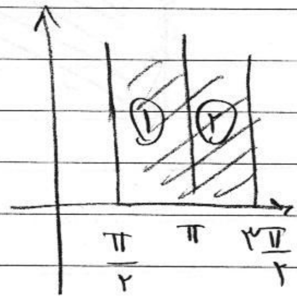
نیم نوارهای موازی محور yها که عرضشان یک ربع دایره مثلثاتی

ثابت chy همیشه مثبت، shy به y آن نگاه میکنیم.

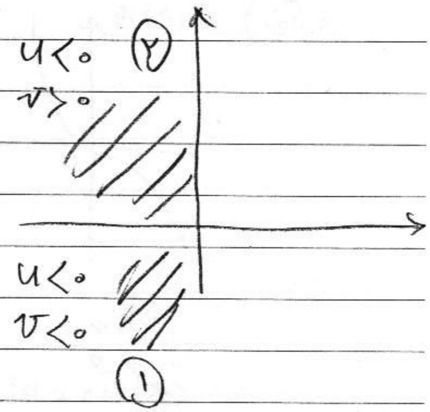


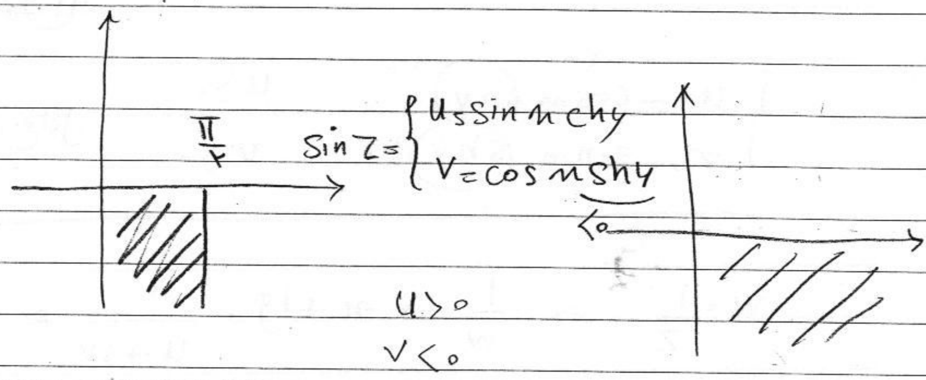
$$\cos z \nearrow \begin{cases} u = \cos x \, \underbrace{chy}_{>0} \\ v = -\sin x \, \underbrace{shy}_{<0} \end{cases}$$





$\xrightarrow{\cos z}$





«جلسه جدید»

۲۱ ← ۳۲۴

$$u + iv = ch(x+iy) = ch\,x\cos y + i\,sh\,x\sin y$$

$$\begin{cases} u = ch\,x\cos y \\ v = sh\,x\sin y \end{cases} \Rightarrow$$

$$y = \frac{\pi}{۴} \Rightarrow \begin{cases} u = ch\,x\,\frac{\sqrt{۲}}{۲} \\ v = sh\,x\,\frac{\sqrt{۲}}{۲} \end{cases}$$

تمرین ۳

$$۲u^۲ - ۲v^۲ = ۱$$

(۱۱) ← (۴۲۱)

$$\begin{cases} u = -\overset{<0}{\cos x}\, \overset{>0}{\cosh y} & u>0 \\ v = \sin x\, \sinh y > 0 & v>0 \end{cases}$$ ربع اول

$$w = \frac{1}{z} \Rightarrow \frac{1}{w} \to x+iy = \frac{1}{u+iv} = \frac{u-iv}{u-iv}$$

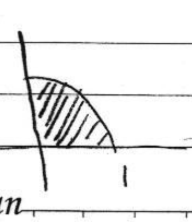
$$\begin{cases} x = \dfrac{u}{u^2+v^2} \\ y = \dfrac{-v}{u^2+v^2} \end{cases}$$

$$y = x^2 + 5x + 1 \longrightarrow \boxed{\frac{-v}{u^2+v^2} = \frac{u^2}{(u^2+v^2)^2} + \frac{5u}{u^2+v^2} + 1}$$

$$y = \sin x \Rightarrow \boxed{\frac{-v}{u^2+v^2} = \sin \frac{u}{u^2+v^2}}$$

$$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{r}\,\mathrm{cis}(-\theta)$$

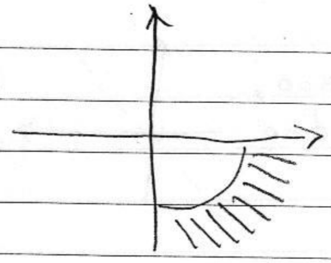
نکته: $\frac{1}{z}$ اندازه‌ها را وارون و فازها را قرینه می‌کند.



$$w = \frac{1}{z} \Rightarrow$$

$|w| > 1$

$-\frac{\pi}{2} < \arg w < 0$

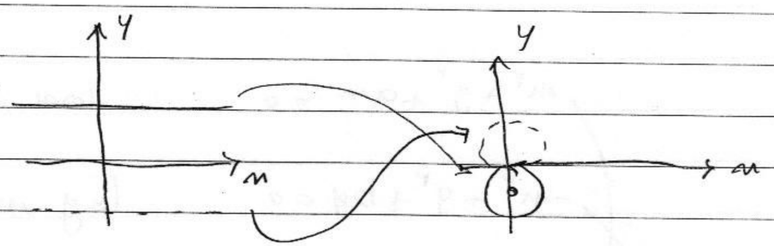


نگاشت منحنی $a(x^2+y^2)+bx+cy+d=0$ توسط $w=\frac{1}{z}$ بدست آورید؟

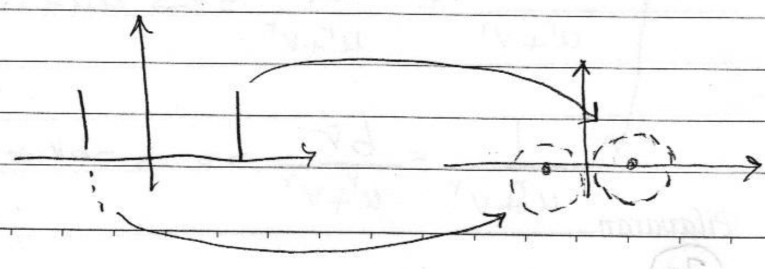
$$a\left(\frac{1}{u^2+v^2}\right) + \frac{bx}{u^2+v^2} - \frac{cv}{u^2+v^2} + d = 0$$

$$d(u^2+v^2) + bu - cv + a = 0$$

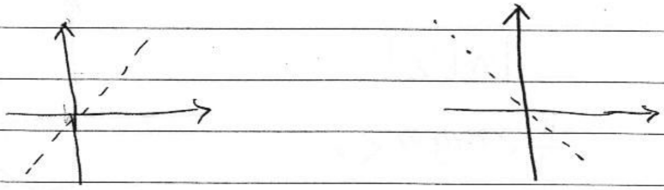
$a=0, b=0$



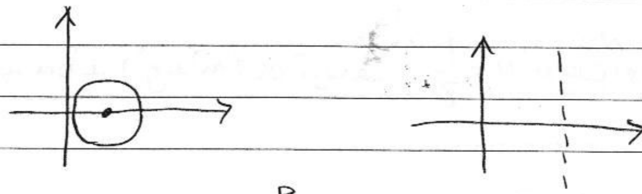
$a=0, c=0$

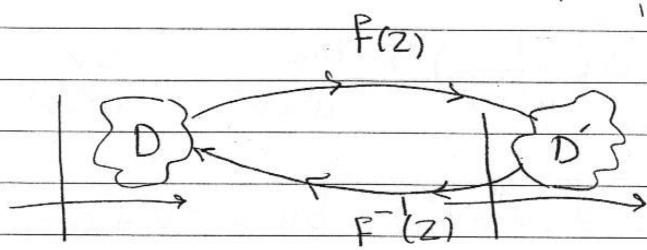


$a=0$, $d=0$



$b=0$, $d=0$





نگاشت ناحیه هاشور خورده توسط $w=\frac{1}{z}$ بدست آورید.

شکل ص ۲۱۲

$x^2+y^2+ax=0$ مرکز روی محور xها

$x^2+y^2+by=0$ مرکز روی محور yها

$$\frac{1}{u^2+v^2} = \frac{au}{u^2+v^2} = 0 \to au+1=0 \Rightarrow u = -\frac{1}{a}$$

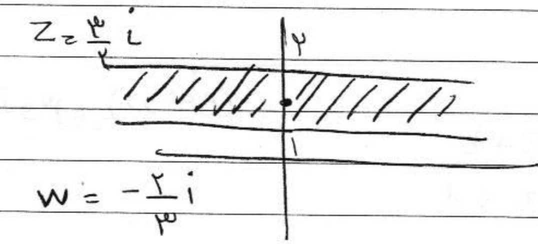
$$\frac{1}{u^2+v^2} = \frac{bv}{u^2+v^2} = 0 \to -bv+1=0 \Rightarrow v = \frac{1}{b}$$

سال مدرس ۲۱۳

$\boxed{۲۴}$ ← ۲۴۳

گزینه ۲)

روش دوم جایگذاری



روش سوم $y = 1 \rightarrow \frac{-v}{u^2+v^2} = 1$ $\quad u^2+v^2+v=0$

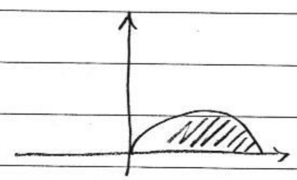
۲۲ ← ۲۴۳

$$\frac{-v}{\cancel{u^2+v^2}} = \frac{u^2}{(u^2+v^2)^{\cancel{2}}}$$

گرایش هوافضا ۸۳

۵۵ ← ۲۵۵

گزینه ۳



۲ ← ۶۷۲

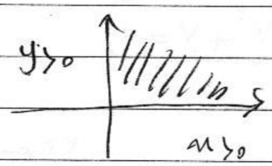
$$\frac{1}{u^2+v^2}-\frac{au}{u^2+v^2}=0 \rightarrow 1=au$$

تمرین ۲

نگاشت موبیوس (دوخطی)

$$w=\frac{az+b}{cz+d}$$

مثال: نگاشت ناحیه هاشور خورده توسط $w=\frac{z-1}{z+1}$ را بدست آورید.



$$wz+w=z-1 \rightarrow z(w-1)=-1-w$$

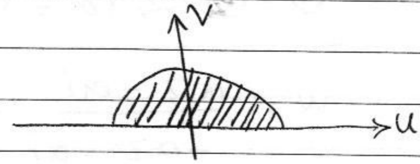
$$z=\frac{1+w}{1-w} \Rightarrow x+iy=\frac{1+u+iv}{1-u-iv}\times\frac{1-u+iv}{1-u+iv}$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{1-u^2-v^2}{(1-u)^2+v^2} \\ y=\dfrac{2v}{(1-u)^2+v^2} \end{cases}$$

کمتراست بجای معادلات مسیر شرط آن را بنویسیم.

$x>0 \Rightarrow 1-u^2-v^2>0 \rightarrow u^2+v^2<1$

$y>0 \Rightarrow v>0$



$$W=\frac{az+b}{cz+d}=\frac{z+\underbrace{\frac{b}{a}}_{A}}{\underbrace{\frac{c}{a}}_{B}z+\underbrace{\frac{d}{a}}_{C}}$$

$z_1 \longrightarrow w_1$

$z_2 \longrightarrow w_2$

$z_3 \longrightarrow w_3$

۲ ← ۲۳۹

$$w=\frac{az+b}{cz+d}$$

$$-i=\frac{-a+b}{-c+d} \Rightarrow -a+b=ic-id \quad (1)$$

$$0=\frac{ai+b}{ci+d}=ai+b=0 \Rightarrow b=-ai$$

$$i = \frac{a+b}{c+d} \longrightarrow a+b = ci + id \quad (3)$$

$$(1)+(2) \Rightarrow b = ic \Rightarrow c = -a$$

$$(2)-(1) \rightarrow 2a = 2id \rightarrow d = -ai$$

$$w = \frac{az - ai}{-az - ai} = \frac{z-i}{z+i}$$

$$w = -\frac{z-i}{z+i} \Rightarrow wz + iw = -z + i$$

$$z(w+1) = -i - iw \Rightarrow z = i\,\frac{1-w}{1+w}$$

$$|z|<1 \Rightarrow \left|i\,\frac{1-w}{1+w}\right| < 1 \Rightarrow |1-w|^2 < |1+w|^2$$

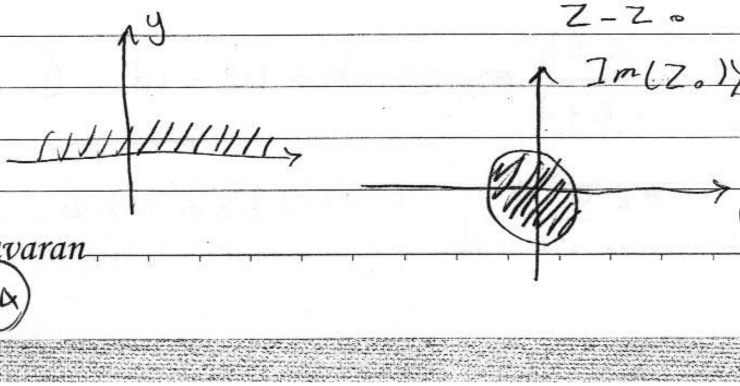
$$(1-u)^2 + v^2 < (1+u)^2 + v^2 \rightarrow -2u < 2u \rightarrow 4u > 0$$

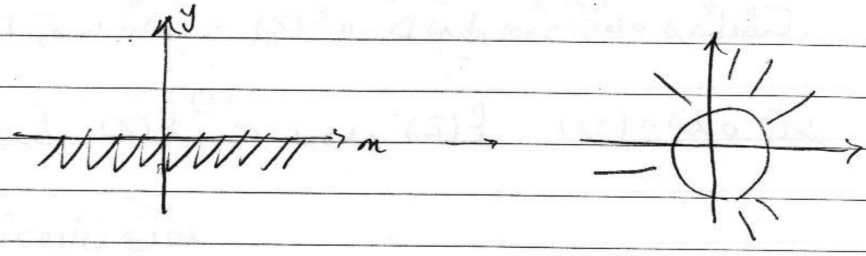
ص 223 کتاب

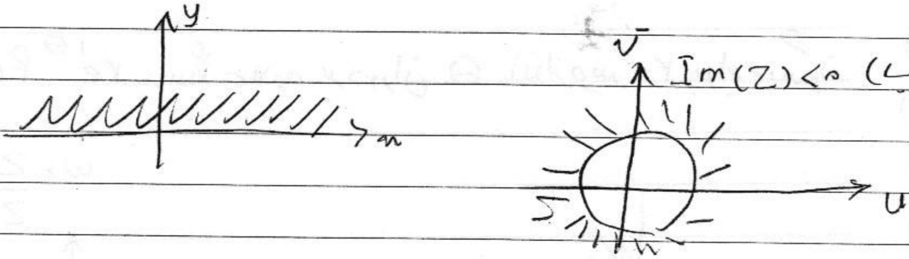
تمرین

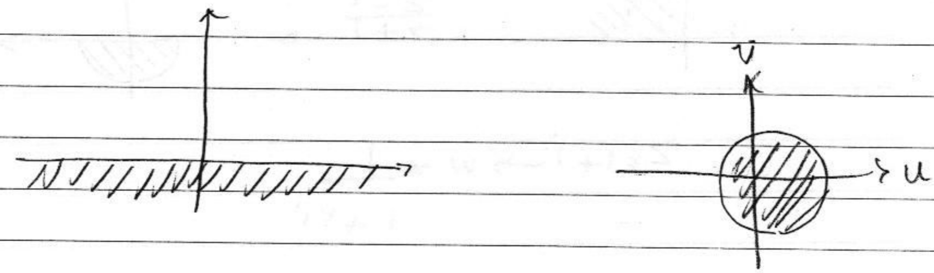
اگر $w = e^{i\theta}\,\dfrac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}$

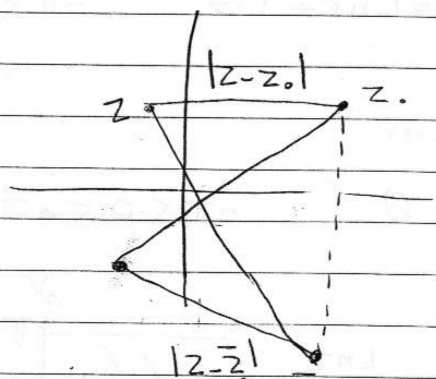
الف) $Im(z_0) > 0$











دوران

$$|w| = \cancel{|e^{i\theta}|}\,\frac{|z-z_0|}{|z-\bar{z}_0|}$$

1

$$|w|<1$$

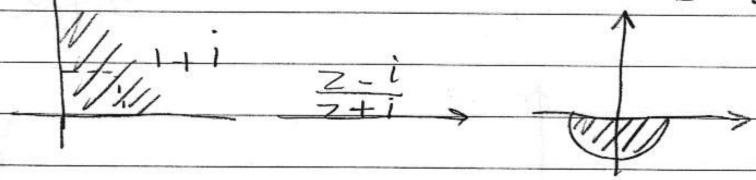
اگر ناحیه D توسط نگاشت f(z) به D' تبدیل شود آنگاه در نگاشت

ناحیه D توسط $e^{i\theta} f(z)$ خروجی f(z) (D') به اندازه θ در

جهت مثلثاتی دوران می‌کند

و اگر $re^{i\theta} f(z)$ باشد علاوه بر دوران θ اندازه‌اش r برابر می‌شود

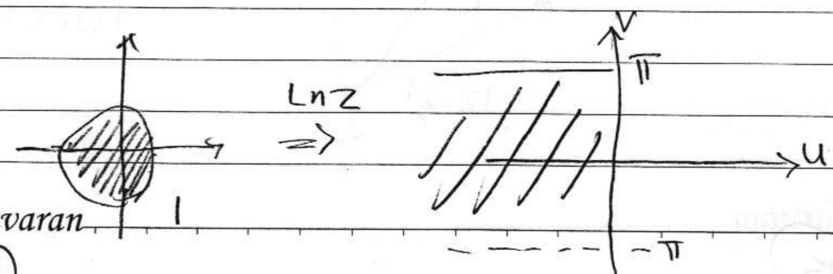
$$w = \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}$$



$$z = 1+i \to w = \frac{1}{1+2i}$$

$$w = \operatorname{Ln} z = \operatorname{Ln} r + i\theta \qquad -\pi < \theta \leq \pi$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u = \operatorname{Ln} r \\ v = \theta \qquad -\pi < \theta \leq \pi \end{cases}$$



$r < 1 \rightarrow \ln r < 0 \Rightarrow u < 0$

$-\pi < \theta \leqslant \pi \Rightarrow -\pi < v \leqslant \pi$

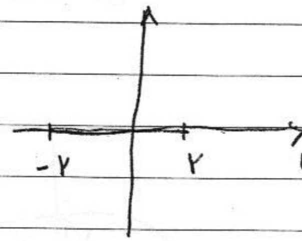
$w = z + \frac{1}{z} \Rightarrow u + iv = r\cos\theta + ir\sin\theta + \frac{1}{r}\cos\theta - \frac{1}{r} i \sin\theta$

$$\begin{cases} u = (r + \frac{1}{r})\cos\theta \\ v = (r - \frac{1}{r})\sin\theta \end{cases}$$

دایره : $r = a \,,\, a \neq 1 \rightarrow \begin{cases} u = (a + \frac{1}{a})\cos\theta \\ v = (a - \frac{1}{a})\sin\theta \end{cases} \rightarrow$

$\frac{u^2}{(a + \frac{1}{a})^2} = 1$ بیضی

$r = 1 \rightarrow \begin{cases} u = 2\cos\theta \\ v = 0 \end{cases}$



Subject: Date:

۵۸ ← ۲۵۱

$$u+iv = r^k \operatorname{cis} k\theta + \frac{1}{r^k}\operatorname{cis}(-k\theta) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} u = \left(r^k + \frac{1}{r^k}\right)\cos k\theta \\ v = \left(r^k + \frac{1}{r^k}\right)\sin k\theta \end{cases}$$

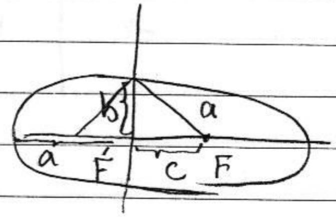
$$r = d \Rightarrow \begin{cases} u = \left(d^k + \frac{1}{d^k}\right)\cos k\theta \\ v = \left(d^k - \frac{1}{d^k}\right)\sin k\theta \end{cases}$$

$$\frac{u^2}{\left(d^k + \frac{1}{d^k}\right)^2} + \frac{v^2}{\left(d^k - \frac{1}{d^k}\right)^2} = 1$$ یعنی

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow d^{2k} + \frac{1}{d^{2k}} + 2 = d^{2k} + \frac{1}{d^{2k}} - 2 + c^2$$

$$+c^2 = 4$$

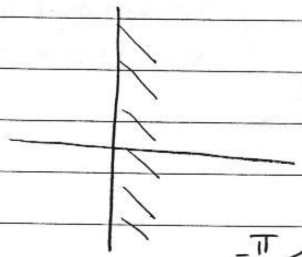
$$c = 2$$



$$a^2 = b^2 + c^2$$

۴۳ ← ۲۴۸

تمرین ۴



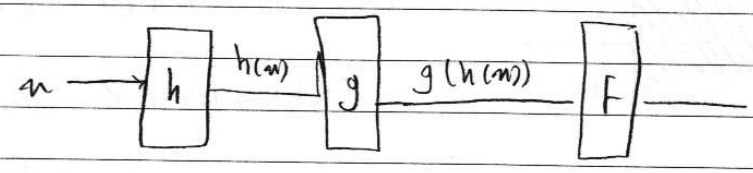
$u = Ln\, r$

$v = \Theta$

$-\frac{\pi}{2} < \Theta < \frac{\pi}{2} \qquad -\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2}$

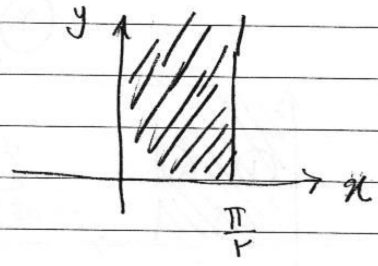
نگاشت های ترکیبی:

$f(g(h(x)))$



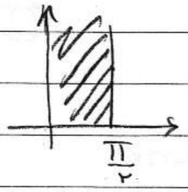
مثال

نگاشت ناحیه هاشور خورده توسط تابع $w = Ln \dfrac{\sin^2 z - i}{\sin^2 z + i}$ بدست آورید.

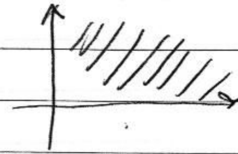


$$z \to T = \sin z \,,\; S = T^2 \,,\; M = \frac{S - i}{S + i} \,,\; W = Ln\, M$$

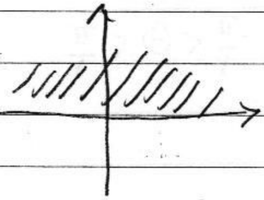
$$\begin{cases} u = \sin x \operatorname{ch} y \\ v = \cos x \operatorname{sh} y \end{cases}$$



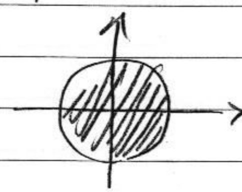
$\xrightarrow{\sin z}$



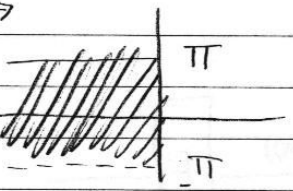
$\xrightarrow{z^2}$



$\xrightarrow{\frac{z-i}{z+i}}$



$\xrightarrow{\operatorname{Ln} M}$



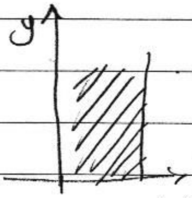
$\operatorname{Ln} z = \operatorname{Ln} r + i\theta \quad -\pi < \theta \leq \pi$

$r < 1 \rightarrow \operatorname{Ln} r < 0 \rightarrow u < 0$

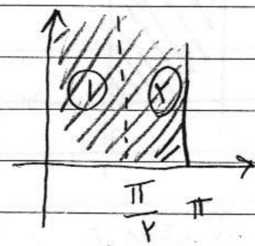
$-\pi < v \leq \pi$

$z^n = r^n \operatorname{cis} n\theta$ تکلیف

(۲۰) ← (۲۳۴)

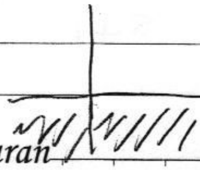


$\xrightarrow{\pi z}$

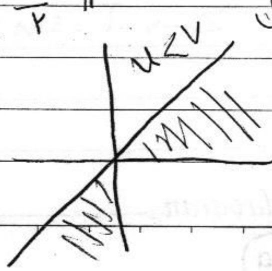


$u = \cos x \operatorname{ch} y > 0$
$v = -\sin x \operatorname{sh} y < 0$

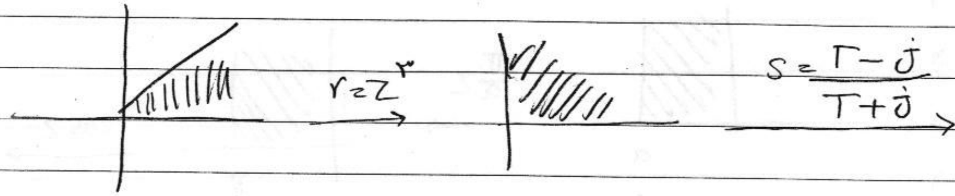
$\xrightarrow{\cos z}$

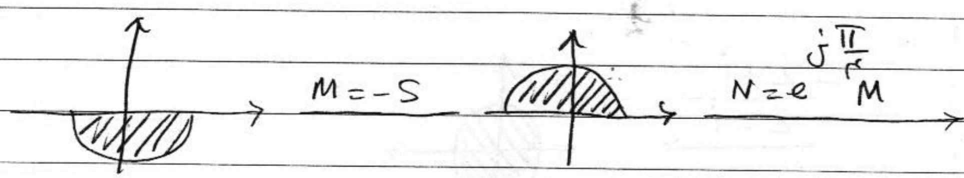


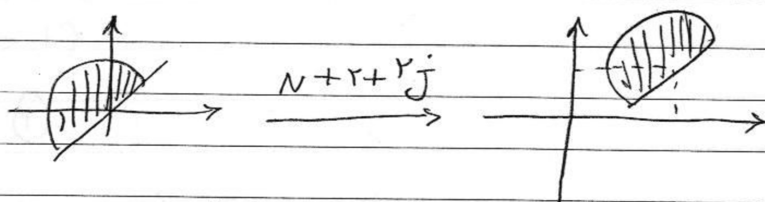
$\xrightarrow{\overbrace{(1+i)}^{\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{16}}} f(z)}$



$\boxed{۲۳۴}$ ۲۳۹







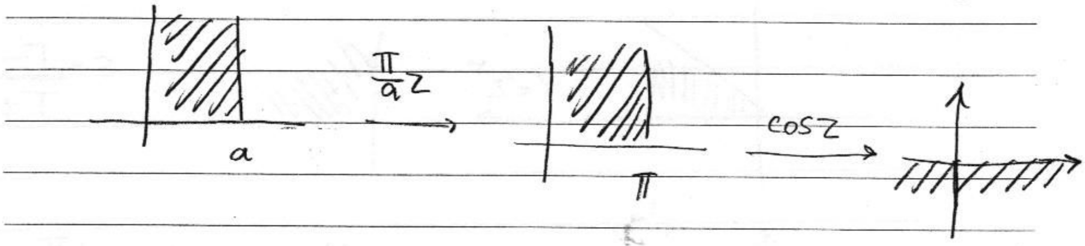
$$w = -e^{j\frac{\pi}{2}} \frac{z^3 - j}{z^3 + j} + 2 + 2j$$

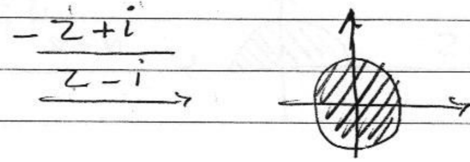
۱۰ ← ۲۴۰

$$e^{i\pi} \frac{-2-2j}{-2+2i} = e^{i\pi} \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{2} = \underbrace{e^{i\pi}}_{-1} i$$

$$f(z) = \frac{z^2 - 2i}{-2+2i}$$

۲۴۳ ۲۴۶ ← ۳۶

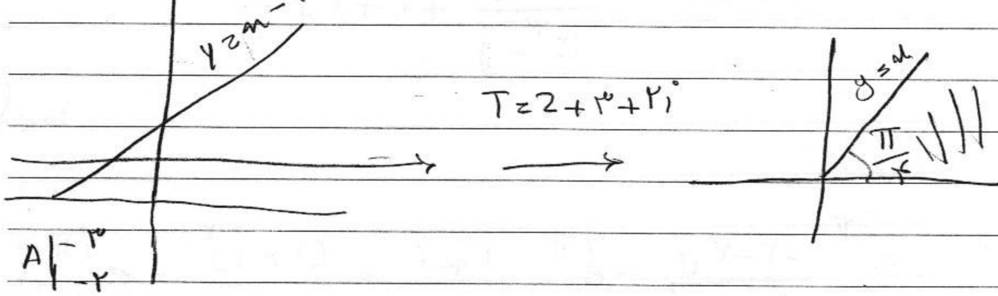


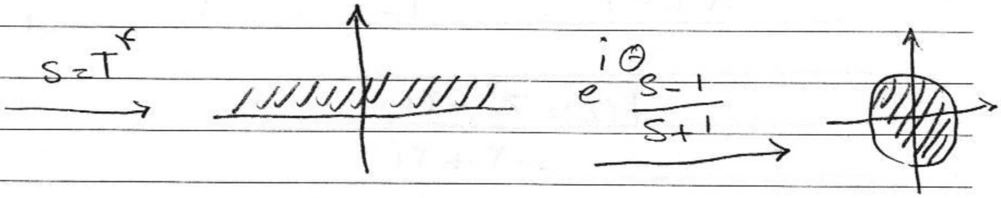


۲۴۹ ← ۴۱

گزینه ۲

۲۴۲ ← ۱۳ کراسی برق سال ۷۹





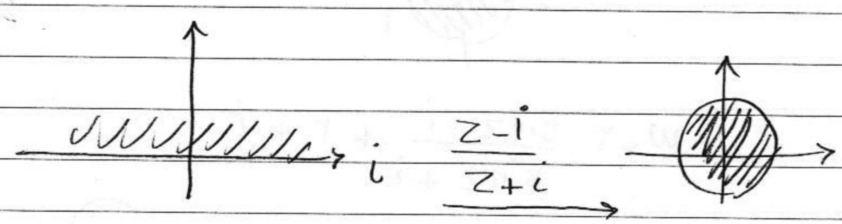
$$w = e^{i\theta}\,\frac{(z+3+2i)^4 - i}{(z+3+2i)^4 + i} = \left(\frac{1}{-i}\right)\frac{(z+3+2i)^4 - i}{-i(z+3+2i)^4 + 1}$$

$$e^{i(\cancel{\theta} + \frac{\pi}{2})} \qquad \theta = -\frac{\pi}{2}$$

گرایش معدن ۸۳) نگاشت $w = \dfrac{e^z - i}{e^z + i}$ ناحیه $A = \{z = x + iy,\ 0 < y < \pi\}$ را به کدام ناحیه از نواحی داده شده می‌نگارد؟

$$e^z \longrightarrow |w| = e^x$$

$$\arg w = y \qquad 0 < \arg w < \pi$$

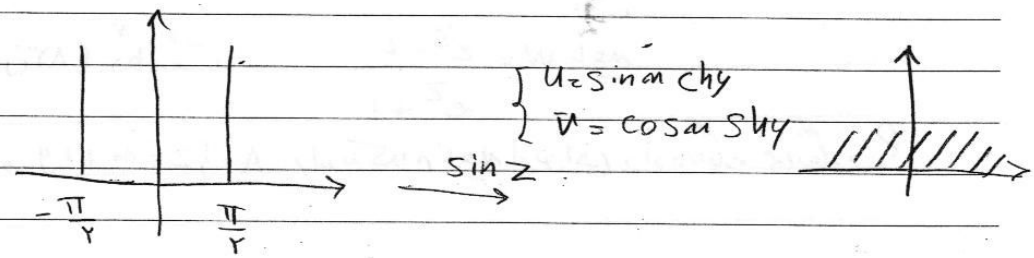


$|w| < 1$

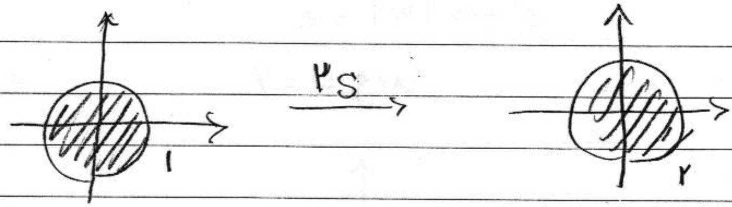
۶۶ ← ۲۵۴ ۲۳۷

برق ۸۷

$$\frac{2\sin z - 2i}{\sin z + i}$$



$$\frac{z-i}{z+i}$$



$$w = 2\,\frac{\sin z - i}{\sin z + i} + 2 + i$$

۶۷ ← ۲۵۲ مکانیک ۸۷

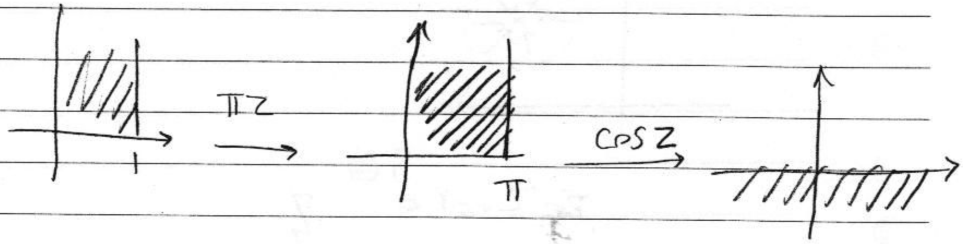
$$w = \frac{i}{z} \rightarrow z = \frac{i}{w}$$

$$\left|\frac{i}{w} - i\right| = 1 \rightarrow |1-w| = |w|$$

$$(1-u)^2 + v^2 = u^2 + v^2 \rightarrow 1 - 2u = 0$$

$$u = \frac{1}{2}$$

بق ۸۸   (۶۷۳) ← ۵



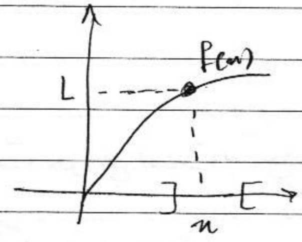
(۶۷۴) ← ۴

$$\frac{-v}{u^2+v^2} = \frac{u}{2(u^2+v^2)} \Rightarrow u + 2v = 0$$

حد توابع مختلط :

حد توابع حقیقی: $\underset{x\to x_0}{\text{حد}} f(x) = L$

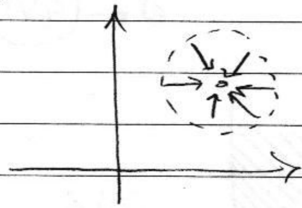
$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 \quad 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$$



در همسایگی x_0 نقاطی وجود دارند

به اندازه دلخواه می‌توانیم $f(x)$ را به L

نزدیک نماییم.



$$z - z_0 = r e^{i\theta}$$

r را به سمت صفر میل می‌دهیم

مثال)

الف) حد $\dfrac{z}{\bar{z}} = \dfrac{r\,\mathrm{cis}\,\theta}{r\,\mathrm{cis}(-\theta)} = \mathrm{cis}\,2\theta \to$ حد ندارد

$z \to 0 \quad r \to 0$

$\theta = 0 \to 1$

$\theta = \frac{\pi}{4} \to i$

$\theta = \frac{\pi}{8} \to i\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$

ب) حد $\dfrac{z^2}{\bar{z}} + 1 \qquad \dfrac{r^2\,\mathrm{cis}\,2\theta}{r\,\mathrm{cis}(-\theta)} + 1 = r\,\mathrm{cis}(3\theta) + 1$

$z \to 0 \qquad \underset{r \to 0}{=} 1$

مشتق:

نسبت تغییرات خروجی نسبت به تغییرات حد $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

وقتی که $\Delta x \to 0$ $\quad \Delta x \to 0$

جلسه جدید

قضیه ۱) اگر تابع $f(z)$ مشتق‌پذیر باشد آنگاه شرایط کشی ریمان در مورد آن برقرار است:

شرایط کشی ریمان در مختصات دکارتی $\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$

قطبی " " " $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \theta} \\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial \theta} = -r\dfrac{\partial v}{\partial r} \end{cases}$

اگر شرایط کشی ریمان برقرار نباشد $f(z)$ مشتق‌پذیر نمی‌باشد

$$w = \bar{z} = x - iy \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 1 \\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial y} = -1 \end{cases}$$

چون شرایط کشی ریمان برقرار نیست مشتق‌پذیر نیست.

ممکن است شرایط کشی ریمان در z برقرار باشد اما تابع در z مشتق نداشته باشد

$$w = x^2 + 2 + iy^3 \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = 3y^2 \end{cases}$$

مثال) بررسی کنید $f(Z) = \begin{cases} \dfrac{(\bar{Z})^2}{Z} & Z \neq 0 \\ 0 & Z = 0 \end{cases}$ در مبدأ مشتق ندارد اما در این نقطه

ص ۲۶۲

شرایط کشی ریمان برقرار است.

برا اینکه مشتق ندارد $\Rightarrow$

بررسی شرایط کشی ریمان $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{u(x,0) - u(0,0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{x} = 1 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{u(0,y) - u(0,0)}{y - 0} = \dfrac{0}{0} = 0 \end{cases}$

مشتق:

قضیه ①: اگر تابع $f(z)$ مشتق پذیر باشد آنگاه شرایط کوشی ریمان برقرار است.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial u}{\partial \theta} = -r\dfrac{\partial v}{\partial r} \end{cases}$$

* اگر شرایط کوشی ریمان برقرار نباشد $f(z)$ مشتق پذیر نمی باشد.

$: \quad \bar{z} = x - iy \qquad \dfrac{\partial u}{\partial x} = 1 \qquad \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0$

$\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad \dfrac{\partial v}{\partial y} = -1$

مشتق پذیر نیست

$w = x^2 + 2 + iy^3 \qquad \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x \qquad \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0$

$\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad \dfrac{\partial v}{\partial y} = 3y^2$

ممکن است شرایط کوشی ریمان در z_0 برقرار باشد اما تابع در z_0 مشتق نداشته باشد

بررسی کنید مشتق ندارد اما کوشی ریمان برقرار است (در مبدا مشتق ندارد)

$$f'(z) = \lim_{z \to 0} \frac{\frac{(\bar{z})^2}{z} - 0}{z - 0} = \lim_{z \to 0} \left(\frac{\bar{z}}{z}\right)^2 = \lim_{r \to 0} \left(\frac{r\,cis(-\theta)}{r\,cis(\theta)}\right)^2$$

$= cis(-4\theta)$ = وجود ندارد

بررسی شرایط کوشی ریمان

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{u(x,0) - u(0,0)}{x - 0} = \dfrac{x}{x} = 1 \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y} = \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{u(0,y) - u(0,0)}{y - 0} = \dfrac{0}{0} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \lim_{x \to 0} \frac{v(x,0) - v(0,0)}{x - 0} = \frac{0}{0} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \lim_{y \to 0} \frac{v(0,y) - v(0,0)}{y - 0} = \frac{y}{y} = 1$$

تذکر: در تابع $f(z) = u + iv$ اگر u و v پیوسته و دارای مشتقات جزئی باشند و همچنین شرایط کوشی ریمان در مورد u و v برقرار باشد آنگاه $f(z)$ مشتق پذیر است.

مثال: مشتق پذیری توابع زیر را بررسی کنید.

الف) $w = e^{z}$

ب) $w = \overline{\sin z}$

ج) $w = |z|^2$

د) $w = x^2 + iy^2$

ه) $w = \operatorname{Ln} z$

الف $\Rightarrow u = e^{x}\cos y \qquad \dfrac{\partial u}{\partial x} = e^{x}\cos y \qquad \dfrac{\partial v}{\partial x} = e^{x}\sin y$

$v = e^{x}\sin y \qquad \dfrac{\partial u}{\partial y} = -e^{x}\sin y \qquad \dfrac{\partial v}{\partial y} = e^{x}\cos y$

در تمام صفحه مشتق پذیر است.

ب $\Rightarrow \sin x\,\mathrm{ch}\,y - i\cos x\,\mathrm{sh}\,y \Rightarrow$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \cos x\,\mathrm{ch}\,y & \dfrac{\partial v}{\partial x} = \sin x\,\mathrm{sh}\,y \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \sin x\,\mathrm{sh}\,y & \dfrac{\partial v}{\partial y} = -\cos x\,\mathrm{ch}\,y \end{cases}$$

$\cos x\,\mathrm{ch}\,y = -\cos x\,\mathrm{ch}\,y \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos x\,\mathrm{ch}\,y = 0 \Rightarrow \cos x = 0$

$\Rightarrow x = (2k-1)\dfrac{\pi}{2}$

$\sin x\,\mathrm{sh}\,y = -\sin x\,\mathrm{sh}\,y \Rightarrow \sin x\,\mathrm{sh}\,y = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$

$y = 0$

فقط در نقاط $y=0$ و $x=(2k-1)\frac{\pi}{2}$ مشتق دارد.

ج) $= |z|^2 = x^2+y^2 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 2y \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases}$

فقط در مبدأ مشتق دارد.

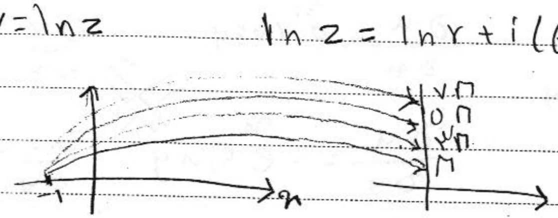
د) $w = x^2 + iy^2 \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = 2y \end{cases}$

فقط روی خط $y=x$ مشتق دارد

Subject:
Year. Month. Date. ( )

هـ) $w = \ln z$ $\qquad \ln z = \ln r + i(\theta + 2k\pi) \Rightarrow \ln(-1) =$

$= i(\pi + 2k\pi)$



$w = \ln r + i\theta$ $\qquad \mathrm{Ln}\, z = \mathrm{Ln}\, r + i\theta \qquad -\pi < \theta \leq \pi$

$-\pi < \theta \leq \pi$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{1}{r} \\ \dfrac{\partial u}{\partial \theta} = 0 \end{cases} \quad -r \quad \frac{1}{r} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial r} = 0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial \theta} = 1 \end{cases}$$

تابع $f(z)$ در z_0 تحلیلی است اگر دو شرط زیر برقرار باشد.

۱- $f(z)$ در z_0 مشتق پذیر باشد.

۲- همسایگی حول z_0 با شعاع ε وجود داشته باشد که تابع $f(z)$ در تمام نقاط آن مشتق پذیر باشد.

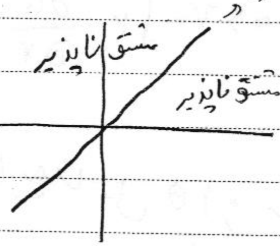
* اگر $f(z)$ مشتق پذیر نباشد، تحلیلی هم نیست

$w = \bar{z} \Rightarrow$ مشتق پذیر نیست

* ممکن است تابعی در z_0 مشتق پذیر باشد اما در z_0 تحلیلی نباشد.

$w = |z|^2 \Rightarrow$ این تابع فقط در $z = 0$

$V \leftarrow$ (۲۹۹) (۲۶۶)



* اگر $f(z)=u+iv$ تحلیلی باشد آنگاه:

۱) u و v همسازند.

۲) v را مزدوج همساز u می‌نامند.

و برعکس (اگر ۱ و ۲ برقرار باشند $f(z)$ تحلیلی ا

تعریف تابع همساز: تابع $u(x,y)$ را همساز می‌گویند اگر در معادله لاپلاس صدق کند

دکارتی $u_{xx}+u_{yy}=0$

قطبی $\begin{cases} r^2 u_{rr}+r u_r+u_{\theta\theta}=0 \\ u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0 \end{cases}$

مثال: بررسی کنید $u=e^x\cos y$ همساز است.

$u_{xx}=e^x\cos y$, $u_{yy}=-e^x\cos y \Rightarrow u_{xx}+u_{yy}=0$ همساز است

* روش محاسبه مزدوج همساز:

$$dv=\overset{\frac{\partial u}{\partial x}}{\cancel{\frac{\partial v}{\partial y}}}dy+\overset{-\frac{\partial u}{\partial y}}{\cancel{\frac{\partial v}{\partial x}}}dx \Rightarrow v=\int\frac{\partial u}{\partial x}dy-\int\left(\frac{du}{dy}\right)^{*}dx$$

با حذف توابع شامل y از $\frac{\partial u}{\partial y}$ بدست می‌آید.

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

$$dv=\frac{\partial v}{\partial \theta}d\theta+\frac{\partial v}{\partial r}dr \Rightarrow v=\int r\frac{\partial u}{\partial r}d\theta-\int\frac{1}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)$$

$$r\frac{\partial u}{\partial r}$$

با حذف توابع شامل θ از $\frac{\partial u}{\partial \theta}$

مثال: مزدوج همساز تابع $u=e^{x}\sin y+x^2-y^2$ را بدست آورید.

$$v=\int e^{x}\sin y+2x\,dy-\int(\cancel{e^{x}\cos y}-2y)\,dx=$$

$$=-e^{x}\cos y+2xy+c$$

مثال: مزدوج همساز $u=r^2\cos 2\theta$ را بدست آورید.

$$v=\int\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)d\theta-\int\frac{1}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)dr$$

$$v=\int(2r^2\cos 2\theta)\,d\theta-\int\frac{1}{r}\underbrace{(\cancel{-2\sin 2\theta\times r^2})}_{0}\,dr=r^2\sin 2\theta+c$$

★ اگر v مزدوج همساز u باشد آنگاه u نمی‌تواند مزدوج همساز v باشد مگر

آنگاه u و v ثابت باشند.

v مزدوج همساز u $\quad f(z)=u+iv\Rightarrow$ تحلیلی

u مزدوج همساز v $\rightarrow$ $g(z)=v+iu\Rightarrow$ تحلیلی

$$g(z)=i(u-iv)=i\overline{f(z)}$$

مشتق تابع تحلیلی:

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\boxed{f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}} \quad **$$

$$\boxed{f'(z)=\frac{dv}{dy}+i\frac{dv}{dx}} \quad **$$

مثال: اگر تابع $f(z)=u+iv$ تحلیلی باشد و $u=\operatorname{sh}x\cos y$ آنگاه $f'(z)$ را بدست آورید.

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\operatorname{ch}x\cos y+i\operatorname{sh}x\sin y$$

$$f'(z)=\operatorname{ch}z$$

* اگر $f(z)$ تحلیلی باشد و برحسب x و y داده شده باشد برای آنکه آن را برحسب z بنویسیم کافی است $y=0$ و $x=z$ قرار دهیم.

$$f(z)=f(x+iy)\Big|_{\substack{x=z\\ y=0}}$$

$$\cancel{f(z)=x^2-y+iy^3\Big|_{\substack{x=z\\ y=0}} \Longrightarrow f(z)=z^2}$$

$$\cancel{f(z)=(x+iy)^2=x^2-y^2+2ixy}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$f'(z) = \left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right) e^{-i\theta}$$

$$\left(-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)$$

$$\boxed{f'(z) = \left(\frac{\partial u}{\partial r} - i\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) e^{-i\theta}} \; *$$

$x+iy$
$z\cos z$

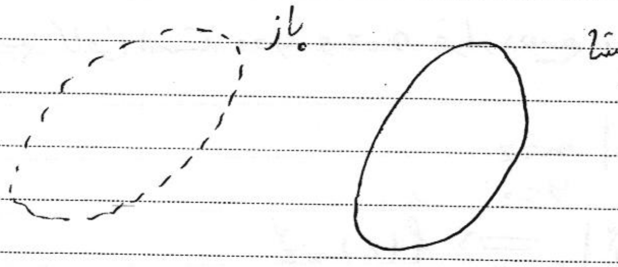
$$\boxed{f'(z) = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right) e^{-i\theta}} \; **$$

مثال: ۱) اگر $u = x\,chy\cos x + y\sin x\,shy$ آنگاه تابع تحلیلی $f(z)=u+iv$ را بیابید.

$$f(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = chy\cos x - x\,chy\sin x + y\cos x\,shy$$ آوریم

$$-i(x\,shy\cos x + \sin x\,shy + y\sin x\,chy)\Big|_{\substack{x=z\\ y=0}}$$

$$f'(z) = \cos z - z\sin z \Rightarrow f(z) = \sin z + z\cos z - \sin z = z\cos z + c$$



جمع بندی:

① اگر $f(z)$ روی ناحیهٔ باز مشتق پذیر باشد تحلیلی هم است.

② اگر تابعی در تمام صفحهٔ مختلط تحلیلی باشد می‌گوییم تابع تام است.

③ توابع $\sin z$ ، $\cos z$ ، e^z ، shz ، chz و چند جمله‌ای‌ها $(a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} \dots)$ تام هستند.

PAPCO

④ مجموع، حاصلضرب، تفریق و ترکیب چند تابع تحلیلی یک تابع تحلیلی است.

$f(z) = z^2 \sin^2(e^z) + \cos^4(\sin(z^2+1)) - \cos z$

⑤ اگر $f(z)$ و $g(z)$ تحلیلی باشند آنگاه تابع $\frac{f(z)}{g(z)}$ فقط در ریشه‌های $g(z)$ تحلیلی نمی‌باشند.

$w = \frac{z^2 \cos z + 1}{(z^2-1)\sin z}$ $\quad z^2 - 1 = 0 \rightarrow z = \mp 1$

$\sin z = 0 \rightarrow z = k\pi$

بجز $z = \pm 1$ و $z = k\pi$ در سایر نقاط تحلیلی است.

⑥ اگر $f(z)$ تحلیلی و غیر ثابت باشد آنگاه $\overline{f(z)}$ غیر تحلیلی است.

* تابع ثابت همواره تحلیلی است.

$f(z) = u + iv$

$\overline{f(z)} = u - iv$

$w = \bar{z}$

$w = \overline{\sin z}$, $w = \overline{\cos z}$

غیر تحلیلی

⑦ اگر $f(z)$ تحلیلی و $f(x)$ حقیقی باشد آنگاه

$\overline{f(z)} = f(\bar{z})$

$\overline{\sin z} = \sin \bar{z}$

$\overline{iz^2} \neq i(\bar{z})^2$ $\quad iz^2$ حقیقی نمی‌باشد.

۷) اگر $f(z)$ تحلیلی و $f(x)$ موهومی باشد آنگاه

$$\overline{f(z)} = -f(\bar{z})$$

$$\overline{iz^2} = -i(\bar{z})^2$$

$$f(z) = \cos z + iz$$

$$\overline{f(z)} = \cos \bar{z} - i\bar{z}$$

$\overline{\ln z} \neq \ln \bar{z}$ تحلیلی نیست

۸) اگر تابع حقیقی خالص یا موهومی خالص باشد تحلیلی نمی باشد (بجز تابع ثابت)

$w = |z|^2 = x^2 + y^2 \rightarrow$ تحلیلی نمی باشد

$w = ix^2y^3 \longrightarrow$ تحلیلی نمی باشد

۹) مجموع و حاصلضرب و ترکیب یک تابع تحلیلی و غیرتحلیلی همواره غیر تحلیلی است.

$w = \bar{z} + \cos z \rightarrow$ غیرتحلیلی

$w = \bar{z} \sin z + e^{z} \rightarrow$ ״

$w = \sin(e^{\bar{z}}) \rightarrow$ ״

۱۰) تابع تحلیلی نمی تواند شامل $\bar{z}$ باشد.

$$f(z) = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$z, \frac{1}{\bar{z}}$ $\qquad z \times \frac{1}{z} \neq 1$

$f(z) = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{1}{z}$ $\quad z=0$

(۱۱) مجموع و حاصل‌ضرب و ترکیب، تفاضل دو تابع غیرتحلیلی ممکن است تحلیلی باشد یا غیرتحلیلی.

$f(z) = \bar{z} - 2z + \cos z$
$g(z) = \sin z - \bar{z}$
$h(z) = 3\bar{z} - e^{z}$

تحلیلی $f(z) + g(z)$

غیرتحلیلی $f(z) + h(z)$

(۱۲) تابع $f(z)$ نمی‌تواند فقط روی یک منحنی یا در تعداد نقاط مجزا تحلیلی باشد.

$f(z) = x^2y + iy\cos x$

$2xy = \cos x \Rightarrow$ غیرتحلیلی است $\Leftarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$

(۱۳) اگر تابع $f(z) = u + iv$ تحلیلی باشد آنگاه تابع $(z) = v + iu$ حتماً غیرتحلیلی است (بجز آنکه u و v ثابت باشند)

$\theta^2 = z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$

$f(z) = 2xy + i(x^2 - y^2) \rightarrow$ غیرتحلیلی

(v مزدوج همساز u باشد آنگاه u نمی‌تواند مزدوج همساز v باشد)

PAPCO $g(z) = i(u - iv)$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

(۱۴) اگر از روشهای فوق موفق به بررسی تحلیلی بودن تابع نشدیم از شرایط کوشی ریمان و قضایای گفته شده استفاده می کنیم.

(۱۵) اگر $f(z)=u+iv$ تحلیلی باشد آنگاه دسته منحنی های $u(x,y)=c_1$ و $v(x,y)=c_2$ متقارن هستند. با عبارت دیگری برای محاسبه مسیرهای قائم دسته منحنی $u(x,y)=c_1$ کافی است مزدوج همساز آن را بدست آوریم.

(۱۶) توابع $\ln(f(z))$ و $(f(z))^{\frac{1}{n}}$ در ریشه های $f(z)$ و یک شاخه تحلیلی نمی باشند.

* برای جواب اصلی $\ln(f(z))$ ناحیه غیر تحلیلی بصورت زیر است

$$\begin{cases} Im(f(z))=0 \\ Re(f(z))<0 \end{cases}$$

گرایش برق ۸۲

(۲۹۰) (۳۰۰) ← ۱۱

$f(z)=1+z^2=1+x^2-y^2+2ixy$

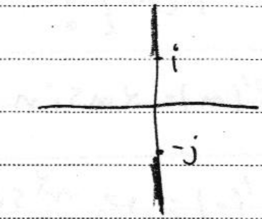
$Re(f(z))=1+x^2-y^2$

$Im(f(z))=2xy \rightarrow Im(f(z))=0 \rightarrow 2xy=0$

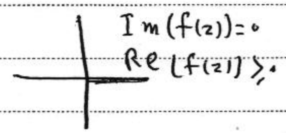
PAPCO

$$x=0 \Rightarrow 1-y^2 \le 0 \Rightarrow |y| \ge 1$$

$$y=0 \Rightarrow 1+x^2 \le 0 = \times$$



$$\mathrm{Re}(f(z)) \le 0 \Rightarrow 1+x^2-y^2 \le 0$$



$0 < \theta \le 2\pi \rightarrow$ غلط $\Rightarrow \theta = 0$

$\frac{\pi}{2} < \theta \le \frac{5\pi}{2}$ غلط $\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

برق ۷۵
(۲۸۲)

$$V = \int \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) dy - \int \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{*} dx$$

$$V = \int (2x-2)\,dy - 0 \rightarrow 2xy - 2y = c$$

(۲۸۹) برق ۷۳

(۲۹۸) ← ۵ توضیحات صفحهٔ بعد

$$\sin^2 z = 0 \rightarrow z = k\pi \quad (z=0)$$

$$\lim_{z\to 0} \frac{\frac{1-\cos z}{\sin^2 z} - \frac{1}{2}}{z} = \frac{1-\cos z - 2\sin^2 z}{2z\cancel{\sin^2 z}_{\,z^2}} = \frac{\sin z - 4\sin z\cos z}{6z^2}$$

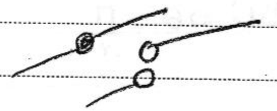
$$\overset{\text{هو}}{=} \lim_{z\to 0} \frac{1-4\cos z}{6z} = \frac{4\sin z}{6} = 0$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$f(x)\begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

✗ ① $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \Rightarrow f'(0) = -\cancel{\cos \infty} =$ وجود ندارد

✓ ② $f'(0) = \lim_{x \to 0} \dfrac{x^2 \sin \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$



$$\lim_{x \to 0} \frac{2}{\sin^2 x} - \frac{1}{1 - \cos x} \rightarrow \frac{2}{x^2} - \frac{1}{\frac{1}{2}x^2} = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{2(1 - \cos x) - \cancel{\sin^2 x}}{\sin^2 x \,(\cancel{1 - \cos x})} = \frac{2 \sin x - 2x - \frac{1}{4}x^3}{2x^3} = -\frac{1}{}$$

$\sin^2 x \sim x^2$, $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$

$$\lim_{x \to 0} \frac{2(1 - \cos x) - \sin^2 x}{\sin^2 x \,(1 - \cos x)} = \frac{2 \sin x - 2 \sin x \cos x}{2x^3} =$$

$\sin^2 x \sim x^2$, $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$

$$\lim_{x \to 0} \frac{2(1 - \cos x) - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x \,(1 - \cos x)} = \frac{(x - \sin x)(x + \sin x)}{\frac{1}{2}x^4} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

$x - \sin x \sim \frac{1}{6}x^3$, $x + \sin x \sim 2x$, $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$\lim_{x \to \infty} f(x) \sim$ بزرگترین توان

$\lim_{x \to 0} f(x)$ — $a \neq 0$ همارزی وجود ندارد

$\lim_{x \to 0} f(x)$ — $a = 0$ هم‌ارز کوچکترین توان

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$ $\qquad \lim_{x \to 0} \sin x \sim x$

$x - \sin x \sim \frac{1}{6} x^3$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$ $\qquad \cos x - 1 \sim -\frac{1}{2} x^2$

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$ $\qquad e^x - 1 \sim x$

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$ $\qquad \ln(1+x) \sim x$

$\ln(1+x) - x \sim -\frac{1}{2} x^2$

$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \cdots$ $\qquad \tan^{-1} x - x \sim -\frac{1}{3} x^3$

$\tan x = x + \frac{1}{3} x^3 + \cdots$ $\qquad \tan x \sim x$

$\tan x - x \sim \frac{1}{3} x^3$

۴۲ ← ۳۰۶
هوافضا

مکانیک ۸۲
۲۹ ← ۳۰۳ ۲۷۸

$v = \int (2x + 2)\, dy - \int_0 = 2xy + 2y$

$f(z) = x^2 - y^2 + 2x + i(2xy + 2y) \Big|_{x=z,\ y=0}$

$= z^2 + 2z$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مکانیک ۸۰

(۲۶۷) (۳۰۲) ← ۲۵

$-2x = 2y$ ← تحلیلی نیست

(۳۰۴) ← (۳۷)

برق ۸۴

(۳۰۰) ← ۱۳

$xy > 0 \Rightarrow f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy$

$xy < 0 \Rightarrow f(z) = x^2 - y^2 - 2ixy$ ×

مکانیک ۷۹

(۳۰۳) ۲۴

$$V = \int \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) dy - \int \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{*} dx$$

$$V = \int (-6xy)\, dy - \int (-3x^2)\, dx$$

$$V = -3xy^2 + x^3 + c$$

مکانیک ۷۶

(۲۷۵) (۳۰۱) ← ۲۲

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$f'(z) = 6 - 2y + i2x \Big|_{\substack{x=z \\ y=0}} = 6 + 2iz$$

$$f(z) = 6z + iz^2 + c$$

PAPCO

مکانیک ۸۰
۲۶ ← (۳۰۲) (۲۸۰)

$$V=\int\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)dy-\int\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{*}dx$$

$$V=\int\frac{2x}{x^2+y^2}\,dy-\int 0=2\,tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$u=2\ln r \implies V=2\theta \longrightarrow$$ گزینه ۳

۲۸۰
مسابقات ریاضی فرهنگستان علوم

* مزدوج همساز u را بدست آورید
* $f(z)=u+iv$ تحلیلی و $u=\text{---}$ آنگاه V را بدست آورید
$f(z)$ را بدست آورید

$$u=\frac{r\cos\theta}{r^2}=\frac{\cos\theta}{r}$$

$$V=\int\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)d\theta-\int\frac{1}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^{*}dr$$

$$V=-\int\left(r\frac{\cos\theta}{r^2}\right)d\theta-\int\frac{1}{r}\left(\cancel{\frac{-\sin\theta}{r}}\right)^{*}dr=\frac{-\sin\theta}{r}$$

$$V=\frac{-r\sin\theta}{r^2}=\frac{-y}{x^2+y^2}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

۲۷۲ ۲۹۹ → ۱۰

$V=\int \left(2^x \ln 2 \cos(y\ln 2)\right)dy - 0 = 2^x \sin(y\ln 2)+c$

$f(z)=2^x\cos(y\ln 2)+i\,2^x\sin y(\ln 2)+ic \Big|_{\substack{x=z\\y=0}}$

$f(z)=2^z+ic$

۲۷۴ ۳۰۳ → ۳۱

$u_{xx}=2\alpha y$

$u_{yy}=-4y$

$(2\alpha-4)$

برق ۸۳

۳۰۰ → ۱۲

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial \bar z}=\frac{1}{4}\left(u_{xx}+u_{yy}\right)$$

معادله لاپلاس $\dfrac{\partial^2 u}{\partial z\bar z}=0$

۲۶۹ برق ۸۵

۳۰۰ → ۱۴

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}$$

$=1+e^x\cos y+ie^x\sin y$

$$f'(1)\Big|_{\substack{x=1\\y=0}}=1+e$$

PAPCO ۱۰۶

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

۵۴ ← ۳۰۶ ۲۶۹

۸۷ برق

۴۳ ← ۳۰۸ ← ۲۶۲

$$\frac{(x-iy)^3}{(x+iy)^2} \begin{cases} x=0: \frac{iy^3}{-y^2} = -iy \\ y=0: x \end{cases}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{y=0} = 1 \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{x=0} = 0$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{y=0} = 0 \qquad \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{x=0} = -1$$

۴۴ ← ۳۰۸ ۲۸۱

مکانیک ۸۷

$$du = \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial x}dx$$

$$u = -\int\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^* dy + \int\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)dx$$

$$0 \quad + \int \frac{2y}{x^2+y^2}dx = 2\tan^{-1}\frac{x}{y} + c$$

$$u_{xx} = 6ax$$

$$6ax + 6by = 0 \rightarrow a=0,\ b=0$$

۶۷ ← ۳۰۹

ابزار دقیق ۸۷

$$u_{yy} = 6by$$

$$u = 0$$

۲ ← ۶۷۳ مکانیک ۸۱

$$v(x,y) = \int(4x(x^2-y^2+1) - 8xy^2)dy - \int 0$$

$$v(x,y) = 4x^3y - \frac{4}{3}xy^3 + 4xy - \frac{8}{3}xy^3 + c$$

$$v(0,0) = c \rightarrow c = 0$$

$$v(1,1) = 4 - \frac{4}{3} + 4 - \frac{8}{3} = 4$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

* راه حل کتاب چک شود

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = 2xe^{x^2-y^2}\sin(2xy)$$

ابزار دقیق ۸۸ +
(۶۷۷) ← ۹

$$= -2y\, e^{x^2-y^2}\cos(2xy) + i2y e^{x^2-y^2}\sin(2xy) - 2ixe^{x^2-y^2}\cos(2xy)\Big|_{\substack{x=z\\y=0}}$$

$$f'(z) = -2ize^{z^2} \Rightarrow f(z) = -ie^{z^2}$$

قضیه اصل ماکزیمم: اگر تابع $f(z)$ در ناحیه D تحلیلی باشد آنگاه ماکزیمم

خود را در مرز D انتخاب می‌کند نه در داخل آن.

* اگر $f(z)$ تام باشد حتماً بی‌کران است مگر آنکه ثابت باشد.

* اگر $f(z)$ تام و کراندار باشد آنگاه $f(z)$ ثابت است.

برق ۷۳

(۲۹۴) (۲۹۹) ← ۶

$$f''(z) = \text{مقدار ثابت} = A \Rightarrow f'(z) = Az + B$$

$$f(z) = \frac{A}{2}z^2 + Bz + c \qquad f''(z) = 2A_1$$

A_1

$$|2A_1| < c \rightarrow |A_1| < \frac{c}{2}$$

برق ۸۵

(۲۹۳) (۳۰۰) ← ۱۵

$$|\sin z|^2 = \sin^2 x + sh^2 y$$

$$|\sin z|^2 = (\sin x\, ch y)^2 + (\cos x\, sh y)^2$$

PAPCO

Subject:
Date: No:

کنکور ۸۸ (۶۷۲) ← ۳

$$z^4+1=0 \rightarrow z=(-1)^{\frac{1}{4}}=(1)^{\frac{1}{4}}\operatorname{cis}\frac{2k\pi+\pi}{4}$$

$$k=0 \rightarrow \operatorname{cis}\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1\mp i)$$

$$k=1 \rightarrow \operatorname{cis}\frac{3\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1\mp i)$$

$$|\sin z|^2=\sin^2 z+\operatorname{sh}^2 y=\sin^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\operatorname{sh}^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

نقطه تکین: نقطه z_0 را نقطه تکین تابع $f(z)$ می‌نامند اگر دو شرط زیر را دارا باشد.

۱- $f(z)$ در نقطه z_0 تحلیلی نباشد.

۲- در همسایگی z_0 با شعاع ε نقاطی وجود داشته باشند که $f(z)$ در آنها تحلیلی باشد.

تعریف نقطه تکین منفرد (تنها): نقطه z_0 را نقطه تکین منفرد تابع $f(z)$ می‌نامند اگر دو شرط زیر را دارا باشد.

۱- $f(z)$ در z_0 تحلیلی باشد.

۲- در همسایگی z_0 با شعاع ε در تمام نقاط تحلیلی باشد.

نقطه تکینی که تنها نباشد، نقطه تکین غیرتنها می‌باشد.

Subject:
Date: No:

مثال: در توابع زیر نقاط تکین را بدست آورید و نوع آنها را مشخص کنید.

الف) $f(z)=\frac{1}{z} \rightarrow z=0$ — $z=0$ نقطه تکین منفرد

ب) $f(z)=\sin z \rightarrow z=0$ — $z=0$ نقطه تکین منفرد

ج) $f(z)=\operatorname{Ln} z \rightarrow$ — $z=0$ و همه نقاط روی قسمت منفی محور حقیقی تکین غیر تنها از نوع انشعابی هستند.

د) $f(z)=\frac{1}{\sin(\frac{1}{z})}$ — $z=0$

$\sin(\frac{1}{z})=0 \quad \frac{1}{z}=k\pi \rightarrow z=\frac{1}{k\pi}$

و) $f(z)=\frac{1}{\bar{z}-1}$

$z=0$ نقطه تکین غیر تنها از نوع انباشتگی است

ه) $f(z)=|z|^2$

نقطه تکین ندارد

نقاط تکین منفرد $\frac{1}{(n+1)\pi} \quad \frac{1}{n\pi} \quad \frac{1}{(n-1)\pi}$

ز) $f(z)=\frac{z}{z}$

$z=0$ تکین منفرد

ه) $\left(\frac{1}{z-1}\right) \Rightarrow$ فقط در $z=1$ غیر تحلیلی

نقطه تکین ندارد $\left(\frac{1}{\bar{z}-1}\right) \Rightarrow$ در همه جا غیر تحلیلی

$\frac{1}{\sin z}$

جمع‌بندی ①: اگر $f(z)$ و $g(z)$ تحلیلی باشند آنگاه تابع $\frac{f(z)}{g(z)}$ در ریشه‌های $g(z)$ همواره تکین منفرد می‌باشد.

$$W=\frac{z^2 e^z}{(z^2-1)\cos z} \qquad \left.\begin{array}{l} z^2-1=0 \; , \; z=\mp 1 \\ \cos z=0 \longrightarrow z=(2k-1)\frac{\pi}{2} \end{array}\right\} = \text{تکین منفرد}$$

② در تابع $(f(z))^{\frac{1}{n}}$ و $\ln(f(z))$ نقاط غیرتحلیلی از نوع تکین غیر تنها (انشعابی) میباشد.

③ در توابع $\frac{1}{\sin f(z)}$ ، $tg(f(z))$ و $\frac{1}{\cos f(z)}$ ، $\frac{1}{sh f(z)}$ ، $\frac{1}{ch f(z)}$ و $\cot f(z)$ ، $tgh(f(z))$ ، $\coth(f(z))$ نقاط تکین منفرد $f(z)$ همگی از نوع تکین انباشته می‌باشند.

$$\frac{1}{\sin\left(\frac{1}{z^2-1}\right)} \qquad z=\mp 1$$

④ اگر $f(z)$ در یک ناحیه غیر تحلیلی باشد در آن ناحیه نقطه تکین ندارد.

بسط تیلر: اگر تابع $f(z)$ در z_0 تحلیلی باشد آنگاه می‌توان $f(z)$ را برحسب سری توانی $z-z_0$ مطابق زیر بسط داد:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \; , \; a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

تذکر: $z_0=0$ بسط فوق را مک‌لوران می‌گویند.

بسط لوران: اگر $f(z)$ در همسایگی z_0 تحلیلی باشد آنگاه $f(z)$ را می‌توان

حول z_0 با سری توانی $z-z_0$ مطابق زیر بسط داد.

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}}_{\text{جملات اصلی بسط لوران (قسمت اصلی بسط لوران)}}$$

بسط لوران را فقط حول نقاط تحلیلی و در تکین منفرد می‌توان نوشت.

بسط لوران $f(z)=\dfrac{1}{z^3 \sin(\frac{1}{z})}$ حول $z=0$ را بدست آورید! ×

بسط لوران $\operatorname{Ln} z$ حول $z=0$ بدست آورید. ×

روش محاسبهٔ بسط لوران حول z_0

۱- $z-z_0=t$ در نظر می‌گیریم تا بسط با حول $t=0$ تبدیل شود.

۲- اگر تابع شامل عبارتهای $\sin z$ و $\cos z$ و $tg^{-1} z$ و $\operatorname{Ln}(1+z)$ و ....

مثلثاتی - لگاریتمی - نمایی - هایپربولیکی باشد از بسط های لوران آنها استفاده

می‌کنیم.

۳- اگر توابع کسری چند جمله‌ای داشته باشیم سعی می‌کنیم آنها را تفکیک به

کسرهای جزئی نموده و از تصاعد هندسی استفاده می‌کنیم.

Subject:
Date: . No:

مثال: بسط لوران در ناحیه $|z-z_0|<r$ $\equiv$ بسط لوران حول z_0

مثال بسط لوران $f(z)=\dfrac{\ln(z)\sin z \, tg^{-1} z}{z^3(z-1)^2}$ در ناحیه $|z-1|<1$ بدست آورید.

$$z-1=t \Rightarrow z=t+1 \Rightarrow f_1(t)=\frac{\ln(t+1)\sin(t+1)\, tg^{-1} t}{t^3(t+1)^2} \quad |t|<1$$

$$=\frac{1}{t^3}\times\underbrace{\frac{1}{(t+1)^2}}_{f_2}\times\underbrace{\ln(t+1)}_{f_3}\times\underbrace{tg^{-1}t}_{f_4}\times\underbrace{\sin(t+1)}_{f_5}$$

$$\frac{a_0}{1-q} \overset{|q|<1}{=} a_0+a_0q+a_0q^2$$

$$\frac{1}{1-z} \overset{|z|<1}{=} 1+z+z^2+z^3+\cdots$$

$$\frac{1}{1+z^2} \overset{|z|<1}{=} 1-z^2+z^4-z^6+z^8\cdots$$

$$\frac{1}{1+z^k} \overset{|z|<1}{=} 1-z^k+z^{2k}-z^{3k}+\cdots$$

*) $$\frac{1}{1+t} \overset{|t|<1}{=} 1-t+t^2-t^3+t^4\cdots$$

مشتق از: $$\frac{-1}{(1+t)^2}=-1+2t-3t^2+4t^3\cdots \Rightarrow \overset{f_2}{\frac{1}{(1+t)^2}}=1-2t+3t^2-4t^3+\cdots$$

Subject:
Date: . . No:

☆ از انتگرال $\ln(1+t)=t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{4}+\cdots$: f_3

$y=tg^{-1}t \rightarrow y'=\frac{1}{1+t^2}=1-t^2+t^4-t^6+\cdots \xRightarrow{\text{انتگرال}}$

$\Rightarrow y=t-\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}-\frac{t^7}{7}+\cdots$

$tg^{-1}t=t-\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}-\frac{t^7}{7}+\cdots$: f_4

$\sin(t+1)=\sin t\cos 1+\cos t\sin 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(t-\frac{t^3}{3!}+\cdots\right)\cos 1+\left(1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}\cdots\right)\sin 1$

$f_t=\frac{1}{t^3}+f_2+f_3+f_4+f_5 \rightarrow \boxed{t=z-1}$

$$\boxed{\sin\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{1}{t}-\frac{1}{3!t^3}+\frac{1}{5!t^5}\cdots}$$

مثال ۲: بسط لوران تابع $f(z)=\frac{1}{z^2-3z+2}$ در نواحی داده شده بدست آورید.

الف) $|z|<1$ ب) $1<|z|<2$ ج) $|z|>2$

الف) $\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\underbrace{\frac{-1}{z-1}}_{f_1}+\underbrace{\frac{1}{z-2}}_{f_2} \Rightarrow$

Subject:

Date: No:

$$\frac{1}{1-z} \overset{|z|<1}{=} 1+z+z^2+z^3 \cdots$$

$$f_2 = \frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{z}{2}} \overset{|\frac{z}{2}|<1}{=} -\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\left(\frac{z}{2}\right)^2+\left(\frac{z}{2}\right)^3\right)$$

$$f = f_1 + f_2$$

ب) $1<|z|<2 \to f_1: \frac{1}{1-z} \overset{|z|>1 \Rightarrow |\frac{1}{z}|<1}{=} -\frac{1}{z}\,\frac{1}{1-\frac{1}{z}} =$

$$= -\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^4}+\cdots\right)$$

$f_2 = |z|<2 \to |\frac{z}{2}|<1$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{z}{2}} \overset{|\frac{z}{2}|<1}{=} -\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\left(\frac{z}{2}\right)^2+\cdots\right)$$

$f = f_1 + f_2$

ج) $|z|>2 \quad |\frac{1}{z}|<\frac{1}{2}$

$$f_1: \frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\right) \overset{|\frac{1}{z}|<1}{=} -\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\left(\frac{1}{z}\right)^2+\frac{1}{z^3}+\cdots\right)$$

$$f_2: |\frac{1}{z}|<\frac{1}{2} \to |\frac{2}{z}|<1 \to \frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-\frac{2}{z}}\right) \overset{|\frac{2}{z}|<1}{=} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{z}\left(1+\frac{2}{z}+\left(\frac{2}{z}\right)^2+\left(\frac{2}{z}\right)^3+\cdots\right)$$

1) $r<1$ az

2) $r<2$ $\frac{a}{z}$ 3) $r>2$

کامپیوتر ۸۴

۳۲۷ ۴۰ ۳۶۴ ← ۴۱

$$\overbrace{\frac{1}{z+1}}^{f_1} + \overbrace{\frac{-1}{z+3}}^{f_2} =$$

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{z}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{z}}\right) = \frac{1}{z}\left(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}+\cdots\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{n+1}}$$

$$\frac{-1}{z+3} = \frac{-1}{3}\,\frac{1}{1-\frac{z}{3}} = -\frac{1}{3}\left(1-\frac{z}{3}+\left(\frac{z}{3}\right)^2-\left(\frac{z}{3}\right)^3+\cdots\right)$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{3^{n+1}}$$

برق ۷۹

۳۲۸ ⟶ ۱۱

$$z-(1+i)=t \longrightarrow f_1(t) = \frac{1}{4-3(t+1+i)} = \frac{1}{1-3i-3t}$$

$$\frac{1}{1-3i}\,\frac{1}{1-\frac{3}{1-3i}t} =$$

$$\left|\frac{3}{1-3i}t\right|<1 \longrightarrow \frac{3}{\sqrt{10}}|t|<1 \longrightarrow |t|<\frac{\sqrt{10}}{3}$$

$$\frac{1}{1-3i}\left(1+\frac{3}{1-3i}t+\frac{3^2}{(1-3i)^2}t^2+\cdots\right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n t^n}{\ }$$

Subject:
Date: . . No:

مکانیک ۷۲

(۳۲۹) → (۲۲۳)

$$z-1=t \rightarrow z=1+t$$

$$f(t)=\frac{1}{t^2+2t}=\frac{1}{t(t+2)}$$

$$\frac{1}{t}\;\frac{1}{t}\left(\frac{1}{1+\frac{2}{t}}\right)=\frac{1}{t^2}\left(1-\frac{2}{t}+\frac{2^2}{t^2}-\cdots\right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{t^{n+2}}$$

مواد ۸۴

(۶۵) ← (۳۶۷)

$$z-1=t \Rightarrow f_1(t)=\frac{e(t+1)-e\,e^t}{t^2}$$

$$\frac{e(t+1-e^t)}{t^2}=\frac{e\left(t+1-1-t-\frac{t^2}{2!}-\frac{t^3}{3!}\right)}{t^2}$$

$$=-e\left(\frac{1}{2!}+\frac{t}{3!}+\frac{t^2}{4!}+\cdots\right)$$

$$a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=-e\frac{1}{(n+2)!}$$

$$f^{(n)}(0)=-e\frac{\cancel{n!}}{(n+2)(n+1)\cancel{n!}}=\frac{-e}{(n-1)(n+2)}$$

Subject:
Date: No:

(ت۶۶) ← (۵۲)

سوال ۸۱

$z-۲=t \Rightarrow z=t+۲ \qquad f_1(t)=\dfrac{۲t+1}{t^۲+۴t+۴-۳-۶+۲}$

$= \dfrac{۲t+1}{t^۲+t} = \dfrac{۲t+1}{t(t+1)}$

$= \dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{t+1} = \dfrac{1}{t} + \sum (-1)^n t^n$

ریاضی محض ۸۴

در بسط لوران مقدار اصلی $(1+z)^{\frac{1}{z}}$ حول ۰ ضریب $z^۲$ برابر است با

۱۰۷ ← (ت۷۵)

$w=(1+z)^{\frac{1}{z}} \Rightarrow \ln w = \dfrac{1}{z}\ln(1+z)$

$\ln w = \dfrac{1}{z}\left(z-\dfrac{z^۲}{۲}+\dfrac{z^۳}{۳}-\dfrac{z^۴}{۴}+\cdots\right)$

$\ln w = 1-\dfrac{z}{۲}+\dfrac{z^۲}{۳}-\dfrac{z^۳}{۴}+\cdots)$

$w=e^{1-\frac{z}{۲}+\frac{z^۲}{۳}-\frac{z^۳}{۴}+\cdots} = e\,e^{\overbrace{-\frac{z}{۲}+\frac{z^۲}{۳}-\frac{z^۳}{۴}+\cdots}^{u}}$

$= e\left(1+u+\dfrac{u^۲}{۲!}+\dfrac{u^۳}{۳!}+\cdots\right) =$

$= e\left(1+-\dfrac{z}{۲}+\dfrac{z^۲}{۳}-\dfrac{z^۳}{۴}+\cdots+\dfrac{1}{۲!}\left(-\dfrac{z}{۲}+\dfrac{z^۲}{۳}-\dfrac{z^۳}{۴}\cdots\right)^۲+\right.$

$e\left(\dfrac{z^۲}{۳}+\dfrac{z^۲}{۸}\right) = e\,\dfrac{11}{۲۴}$

Subject:
Date: No:

محاسبه شعاع همگرایی و ناحیه همگرایی :

① آزمون نسبت یا دالامبر $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ حد

② آزمون ریشه (کشی) $\left|\sqrt[n]{a_n}\right| < 1$ حد $n \to \infty$

مثال: برق ۸۳ (۳۳۷)

$$\left|e^{\frac{i}{z+1}}\right| < 1 \Rightarrow \left|e^{\frac{i}{x+iy+1}}\right| < 1$$

$$\left|e^{\frac{i(x-iy+1)}{(x+1)^2+y^2}}\right| < 1 \Rightarrow \left|\cancel{e^{\frac{i(x+1)}{(x+1)^2+y^2}}}\right|^{1} \left|e^{\frac{y}{(x+1)^2+y^2}}\right| < 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{\frac{y}{(x+1)^2+y^2}} < 1 \Rightarrow y < 0$$

برق ۸۲ (۳۳۷)

$$\left|e^{\frac{1}{z^2}}\right| < 1 \Rightarrow \left|e^{\frac{1}{x^2-y^2+2ixy}}\right| < 1$$

$$\left|e^{\frac{i(x^2-y^2-2ixy)}{(x^2-y^2)^2+4x^2y^2}}\right| < 1$$

$$\left|\cancel{e^{\frac{i(x^2-y^2)}{(x^2-y^2)^2+4x^2y^2}}}\right|^{1} \left|e^{\frac{2xy}{(x^2-y)^2+4x^2y^2}}\right| < 1$$

$$e^{\frac{2xy}{(x^2+y^2)+4x^2y^2}} < 1 \Rightarrow \frac{2xy}{\ldots} < 0$$

Subject:
Date: No:

مکانیک ۷۰ (۳۳۷)

$$\left|\left(1-\frac{1}{n}\right)^n z\right| < 1$$

$$\left|\frac{z}{e}\right| < 1 \Rightarrow |z| < e$$

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} \left(f(x)\right)^{g(x)} = 1^{\infty}} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} e^{\lim_{x\to x_0} g(x)(f(x)-1)} \\ e^{\lim_{n\to\infty} n(1-\frac{1}{n}-1)} = e^{-1} \end{array}}$$

$$\ln w = g(x)\underbrace{\ln(f(x)-1+1)}_{f(x)-1} \to w = e^{g(x)(f(x)-1)}$$

برق ۸۶ (۳۳۵)

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a^z}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}\right| < 1 \Rightarrow |a^z| < 1$$

$$|a^{x+iy}| < 1 \Rightarrow |a^x| < 1$$

$$x\underbrace{\ln a}_{<0} < 0 \Rightarrow x > 0$$

انواع نقاط تکین منفرد:

اگر z_0 نقطه تکین منفرد تابع $f(z)$ باشد آنگاه z_0 یکی از ۳ حالت زیر است:

۱- قطب   ۲- ویژه اساسی (تکین اساسی)   ۳- حذف شدنی (برداشتنی، رفع)

تعریف قطب: اگر در بسط لوران تابع $f(z)$ حول نقطه تکین منفرد z_0 تعداد جملات اصلی محدود باشد z_0 قطب تابع است و بالاترین درجه جمله اصلی را مرتبه قطب می نامیم

مثال: اگر بسط لوران تابع $f(z)$ حول نقطه تکین منفرد $z=2$ بصورت زیر باشد $z=2$ چگونه نقطه ای است.

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2+1}(z-2)^{2n-5}$$

$$=\frac{2}{2}(z-2)^{-3}+\frac{2^2}{2^2+1}(z-2)^{-1}+\frac{2^3}{3^2+1}(z-2)^{1}+$$

$$\Rightarrow\frac{2^4}{4^2+1}(z-2)^3+\cdots$$

$z=2$ قطب مرتبه ۳ است

$$=\frac{1}{(z-2)^3}+\frac{\frac{4}{5}}{(z-2)}+\frac{2^3}{10}(z-2)+\frac{2^4}{17}(z-2)^3$$

Subject:
Date: No:

نقطه ویژه اساسی: اگر در بسط لوران تابع $f(z)$ حول نقطه تکین منفرد z_0

تعداد جملات اصلی نامحدود باشد z_0 را نقطه تکین اساسی می‌نامند.

$$f(z)=z^3\cos\frac{1}{z}=z^3\left(1-\frac{1}{z^2\,2!}+\frac{1}{z^4\,4!}-\frac{1}{z^6\,6!}+\frac{1}{z^8\,8!}\cdots\right)$$

$$=z^3-\frac{z}{2!}+\frac{1}{z\,4!}-\frac{1}{z^3\,6!}+\frac{1}{z^5\,8!}\cdots$$ $z=0$ ویژه اساسی است.

حذف شدنی: اگر در بسط لوران تابع $f(z)$ حول نقطه تکین منفرد z_0

تعداد جملات اصلی صفر باشد z_0 را حذف شدنی می‌نامند.

$$\frac{\sin z}{z}=\frac{z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\cdots}{z}=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}\cdots$$

جمع بندی:

① اگر تابع $f(z)$ و $g(z)$ تحلیلی باشند آنگاه در تابع $\frac{f(z)}{g(z)}$ ریشه‌های $g(z)$

قطب یا حذف شدنی می‌باشند که برای تشخیص آن مطابق زیر عمل می‌کنیم.

مثال: اگر z_0 ریشه مرتبه n تابع $g(z)$ و ریشه مرتبه m تابع $f(z)$ باشد آنگاه:

الف) $n>m \Rightarrow$ z_0 قطب مرتبه $n-m$ است

ب) $n\le m \Rightarrow$ z_0 حذف شدنی است

تعریف مرتبهٔ ریشه z_0 تابع $f(z)$:

$f(z_0)=0$

$f'(z_0)=0$

$\vdots$

$f^{(m-1)}(z_0)=0$ $\iff$ z_0 ریشه مرتبهٔ n تابع $f(z)$ است.

$f^{(n)}(z_0)\neq 0$

مثال: $z=0$ ریشه مرتبه چند تابع $f(z)=2e^z-2-2z-z^2$ است.

$f(0)=0$

$f'(z)=2e^z-2-2z \rightarrow f'(0)=0$

$f''(z)=2e^z-2 \rightarrow f''(0)=0$

$f'''(z)=2e^z \rightarrow f'''(0)\neq 0$ $\Rightarrow$ $z=0$ ریشه مرتبهٔ ۳ است

مثال: در تابع $f(z)=6\sin z-6z+z^3$ ، $z=0$ ریشه مرتبه چند است

$f(z)=0$

$f'(z)=6\cos z-6+3z^2 \rightarrow f'(0)=0$

$f''(z)=-6\sin z+6z \rightarrow f''(0)=0$

$f'''(z)=-6\cos z+6 \rightarrow f'''(0)=0$

$f^{(4)}(z) = 4\sin z \longrightarrow f^{(4)}(0) = 0$ $\quad$ $z=0$ ریشه

پنجم تابع است.

$f^{(5)}(z) = 4\cos z \longrightarrow f^{(5)}(0) \neq 0$

مثال:

$$f(z) = (z-\sin z)^3 (e^{z^2}-1)^2 \underbrace{(\cos^2 z+1)^3}_{\neq 0}$$

۹ مرتبه $\quad$ ۴ مرتبه

$z=0$ ریشه مرتبه چند تابع فوق است.

$z=0$ ریشه مرتبه ۱۳ است.

$$f(z) = z^5 + 3z^4 + 2z^3 - 2z^2 - 3z - 1$$

$f(-1) = 0$

$f'(z) = 5z^4 + 12z^3 + 6z^2 - 4z - 3 \longrightarrow f'(-1) = 0$

$f''(z) = ----$ $\quad$ $f''(-1) = 0$

$f'''(z) = ----$ $\quad$ $f'''(-1) = 0$

$f^{4}(z) = ----$ $\quad$ $f^{4}(-1) \neq 0$

$z=-1$ ریشه مرتبه ۴

Subject:
Date: No:

$f(z)=\dfrac{z^2}{z-\sin z}$ $\underbrace{z=0 \text{ قطب مرتبه ۱ است}}_{\text{قطب ساده}}$

$f(z)=\dfrac{z^3}{z-\sin z} \longrightarrow$ $z=0$ حذف شدنی است

(۲) نقطه ویژه اساسی: اگر z_0 نقطه تکین منفرد تابع $f(z)$ باشد، در توابع $f(z)$، $\cos f(z)$، $sh f(z)$، $ch f(z)$ و $e^{f(z)}$ و ... $z=z_0$ نقطه ویژه اساسی است.

$f(z)=\dfrac{\cos\left(\frac{1}{z^2-1}\right)}{(z-1)^{200}(z^2+1)} \longrightarrow$ $z=\mp 1$ ویژه اساسی

$f(z)=z^{1\cdots}\, e^{\frac{1}{z}} \longrightarrow$ $z=0$ ویژه اساسی است

(۳)

$f(z)=z\sin\left(\frac{1}{z}\right)=0$
$z\to 0$

$f(z)=e^{\frac{1}{z^2}}=\infty \not\Rightarrow$ $z=0$ قطب
$z\to 0$

$e^{\frac{1}{z}}$ $\begin{cases} z\to 0^+ & +\infty \\ z\to 0^- & 0 \end{cases}$
$z\to 0$

برق ۷۲ ۳۴۲

۳۵۸ ← ۵

$$f(z)=\frac{z^{7}\,e^{\frac{-1}{z-2}}}{(z^{2}-4)^{2}}$$

مکانیک ۸۲ ۳۶۲ ← ۲۶

۳۴۳

کامپیوتر ۸۰

۳۶۴ ← ۳۸

۳۴۳

ریاضی محض ۸۴ ۳۷۵ ← ۱۰۹

کامپیوتر ۷۵ ۳۶۳ ← ۳۵

مواد ۷۸ ۳۶۲ ← ۵۰

$$\frac{2}{4}=3$$

کامپیوتر ۸۵ ۳۶۵ ← ۳۴ بیست غلط

۳۴۳

برق ۸۶ ۳۴۴ ۳۷۰ ← ۸۱ غلط است.

برق ۸۸ ۶۷۲ ← ۶

$$z-1=t \rightarrow z=t+1 \rightarrow f_1(t)=\frac{t+1}{t(t+3)}$$

POUYAN

$$\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{9}=\frac{2}{81}$$

Subject:
Date: No:

$$f_1(t) = \frac{\frac{1}{3}}{t} + \frac{\frac{2}{3}}{t+3} = \frac{\frac{1}{3}}{t} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3}\left(1 - \frac{t}{3} + \frac{t^2}{9} - \frac{t^3}{27}\right.$$

$$t^2 \text{ ضریب } = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{9}$$

مانده: در سط لوران تابع $f(z)$ حول نقطهٔ تکین منفرد z_0 ضریب $\frac{1}{z-z_0}$

را مانده می‌گویند (a_{-1})

جمع‌بندی: ① اگر z_0 نقطهٔ حذف شدنی تابع $f(z)$ باشد مانده آن همواره صفر است

② اگر z_0 نقطهٔ ویژه اساسی تابع $f(z)$ باشد تنها راه محاسبهٔ مانده محاسبهٔ بسط

لوران حول z_0 را مشخص کردن ضرایب $\frac{1}{z-z_0}$ می‌باشد.

③ اگر z_0 قطب تابع $f(z)$ باشد با دو روش زیر می‌توان مانده را در z_0 بدست آ

الف: $$a_{-1} = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(n-1)!}\left[(z-z_0)^n f(z)\right]^{(n-1)}$$

ب: محاسبهٔ بسط لوران حول z_0 و تعیین ضریب $\frac{1}{z-z_0}$

$$\frac{1}{(z-1)^3(z+1)} = \frac{\frac{1}{2}}{(z-1)^3} + \frac{-\frac{1}{4}}{(z-1)^2} + \frac{\frac{1}{8}}{z-1} + \frac{-\frac{1}{8}}{z+1}$$

$$\boxed{a_{-(n-1)} = \frac{1}{(1)!}\left((z-z_0)^n f(z)\right)^{(1)}}$$

اصلاح کتاب

ص ۲۶۳ تست ۳۲ به بعد

شماره تست ها یکی کم شود تا آخر ~~۳۵~~ ۳۴

مثال ص ۳۴۶ ۳۳

$(\sin z)^{(n)} \rightarrow \sin(z + \frac{n\pi}{2})$

$(\cos z)^{(n)} \rightarrow \cos(z + \frac{n\pi}{2})$

مثال: در تابع $\frac{\tan^{-1} z}{z^6}$ مانده را در $z=0$ بدست آورید.

① $z=0$ ۶ $\rightarrow a_{-1} = \frac{1}{5!}\left[\cancel{z^6}\frac{\tan^{-1} z}{\cancel{z^6}}\right]^{(5)}$

② $\dfrac{z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \frac{z^9}{9} - \cdots}{z^6} = \frac{1}{z^5} - \frac{1}{3z^3} + \frac{1}{5z} - \frac{z}{7}$

مانده $= \frac{1}{z}$ ضریب $= \frac{1}{5}$

برق ۸۴ ۳۴۹ ۳۶۰ ← ۱۷

مکانیک ۸۳ ۳۵۰ ۳۶۳ ← ۳۱

برق ۸۳ ۳۶۰ ← ۱۵

$z^2\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{4!z^4} \cdots\right)$

$z^2 + z + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!z} + \cdots$

مانده $= \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$

Subject
Date . No.

۳۵۳ ۳۶۵ ← ۴۷

هسته‌ای ۸۴

۳۴۹ ۳۶۰ ← ۱۶

۳۵۳ ۳۶۷ ← ۶۱

مواد ۸۱ ۳۶۶ ← ۵۱ ۳۵۳

۳۵۸ ← ۱ برق ۶۸

قطب ۰ را میجوییم مانده‌اش هم می‌شود.

$$a_{-1} = p\, z \frac{\sin z}{z^2} = 1$$

کامپیوتر ۷۹ ۳۵۱ ۳۶۴ ← ۳۷

مکانیک ۸۵ ۳۵۰ ۳۶۳ ← ۳۴

انتگرال مختلط ص ۳۸۵

برق ۷۱ ۳۸۲

برای حرکت روی مسیر مطابق زیر عمل می‌کنیم:

۱ معادلات مسیر را می‌نویسیم.

Subject:
Date: No:

۲) معادلات مسیر را در عبارت مقابل انتگرال جایگذاری می‌نماییم.

* اگر معادلات مسیر برحسب دو متغیر باشد آنها را با فرم پارامتری می‌نویسیم

تا به یک متغیر تبدیل شود.

۳) در جهت مشخص شده روی مسیر حرکت می‌کنیم و مانند توابع حقیقی

انتگرال می‌گیریم.

مکانیک ۷۹ (۳۸۳)

برق ۷۷ (۳۸۶)

$z = z_0 + re^{i\theta}$ = معادله دایره با مرکز z_0 و شعاع r

$z = re^{i\alpha}$ (α = ثابت) $\Leftarrow$ معادله خطی که با زاویه α
از مبدأ عبور می‌کند.

برق ۷۵ (۳۹۰)

$\oint_c f(z)\,dz = 2\pi i$ (مجموع مانده‌ها در نقاط تکین منفرد $f(z)$ که داخل ناحیه c قرار دارند)

۱- نقاط تکین منفرد $f(z)$ را بدست می‌آوریم

۲- نقاط تکین منفردی که داخل ناحیه قرار دارند مشخص می‌کنیم.

Subject:
Date: No:

۳- مانده را در نقاط مشخص شده در قسمت ② را بدست می آوریم.

۴- مجموع مانده های محاسبه شده در قسمت ③ را در $2\pi i$ ضرب

می کنیم که برابر با حاصل انتگرال است.

برق ۷۵ (۳ ۹۲)

۳۴۳ روش بدست آوردن بسط tgz

برق ۷۶

(۴۴۷) ← ۱۶

$$x+iy=e^{u+iv} \rightarrow \begin{cases} x=e^{u}\cos v \\ y=e^{u}\sin v \end{cases}$$

$$u=1 \rightarrow \begin{cases} x=e\cos v \\ y=e\sin v \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2=e^2 \Rightarrow |z|=e$$

$c: |z|=e$

$z=1$ ✓ $\Rightarrow$ ویژه اساسی $\Rightarrow$ بسط لوران $\Rightarrow z-1=t$

$$\sin\left(\frac{t+1}{t}\right)=\sin\left(1+\frac{1}{t}\right)=\sin 1\cos\frac{1}{t}+\cos 1\sin\frac{1}{t}$$

مانده $=$ ضریب $\frac{1}{t}=\cos 1 \Rightarrow I=2\pi i\cos 1$

۸۴ (۴۴۹) ← ۳۱

$$\frac{\sin\frac{z}{2}}{z^2\cos(\frac{z}{2})} \Rightarrow z=0$$

$$\cos\frac{z}{2}=0 \to z=(2k-1)\pi \times$$

قطب ساده $z=0$ ، $a_{-1}=\lim_{z\to 0} z\,\dfrac{\tan\frac{z}{2}}{z^2}=\dfrac{1}{2}$

$$I=2\pi i\times\frac{1}{2}=\pi i$$

مکانیک ۸۴ ، ۸۵

(۴۵۳) ← ۶۰ ، ۶۲ (۶۰ و ۶۲)

$1-\cos z=0 \to \cos z=1 \to z=2k\pi$
- $z=0$ ✓
- $z=\pm 2\pi \times$

$$a_{-1}=\left(z^2\frac{e^{z}}{(1-\cos z)}\right)'=2 \quad z\to 0$$

$$I=2\times 2\pi i=4\pi i$$

$$\left(\frac{\sin z}{z}\right)^{(4)} \quad \frac{1}{5!} \qquad \lim\left(\frac{\sin^2 z}{z}\right)''' \to 0$$

در صورت می‌توانیم از هم ارزی استفاده کنیم که کل عبارت از بین برود.

مکانیک ۸۳ (۴۵۳) ← ۵۹

$z=0 \times$

$z=z_0$ ✓ → قطب ساده $\qquad a_{-1}=\lim_{z\to z_0}\cancel{(z-z_0)}\dfrac{e^{z}}{z\cancel{(z-z_0)}}=\dfrac{e^{z_0}}{z_0}$

$$I=2\pi i\,\frac{e^{z_0}}{z_0} \Rightarrow f'(z_0)=2\pi i\,\frac{z_0e^{z_0}-e^{z_0}}{z_0^2}$$

$$f'(2)=2\pi i\,\frac{e^2}{4}$$

Subject:
Date: No:

تست ۷۸ (۴۴۷) ← ۲۰

(۳۹۴)

$$C: |z-j|=1 \Rightarrow \begin{cases} z=j \ \checkmark \\ z=-j \ \times \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2\pi i \underset{\text{مانده در } z=j}{a_{-1}} = \pi j e^{j} \, sh\pi$$

$$C: |z+j|=1 \Rightarrow \begin{cases} z=j \ \times \\ z=-j \ \checkmark \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2\pi i \underset{\text{مانده در } z=-j}{b_{-1}} = \pi j e^{-j} \, sh\pi$$

$$C: |z-j|+|z+j|=4 \begin{cases} z=j \ \checkmark \\ z=-j \ \checkmark \end{cases} \Rightarrow 2\pi i a_{-1} + 2\pi i b_{-1} =$$

$$= \pi j \, sh\pi \, \underbrace{(e^{j}+e^{-j})}_{2\cos 1}$$

تذکر: اگر در محاسبهٔ انتگرال $\oint f(z)dz$ در مسیر $C: |z|=2$ تابع $f(z)$ شامل $\bar{z}$ یا $|z|$ یا هر دو باشد مطابق زیر می‌توان جایگذاری نمود و سپس انتگرال را از قضیهٔ مانده حل کرد.

$$\bar{z} = \frac{2^2}{z}$$

$$|z| = 2$$

$$x = \frac{z+\bar{z}}{2} = \frac{z+\frac{2^2}{z}}{2}$$

$$y = \frac{z-\bar{z}}{2i} = \frac{z-\frac{2^2}{z}}{2i}$$

کامپیوتر ۷۴

۴۰۰ ۴۵۳ ← ۶۶

کامپیوتر ۸۳ ۴۵۵ ← ۷۵

۳۸۷

برق ۸۳ ۴۴۹ ← ۲۹

کامپیوتر

برق ۸۱ ۴۴۸ ← ۲۶

۴۰۱

کامپیوتر ۸۱ ۴۵۴ ← ۷۰

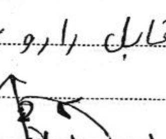
$$\int \left(z - \frac{z + \frac{4}{z}}{2} \right) dz = -4\pi j$$

تذکر: اگر نقطه تکین منفرد روی مرز c واقع شود بطوری که باوران θ خارج از ناحیه قرار گیرد مانده z را ~~روی~~ در θ ضرب می‌کنیم.

(در محاسبه انتگرال)

مثال: حاصل انتگرال مقابل را روی مسیر داده شده بدست آورید.

$$\oint_c \frac{dz}{z(z^2+1)}$$



$z=0$ ✓ → قطب ساده → $a_{-1} = \lim_{z\to 0} z \dfrac{1}{z(z^2+1)} = 1$

$z=j$ ✓ → ″ → $b_{-1} = \lim_{z \to j} (z-j) \dfrac{1}{z(z-j)(z+j)} = -\dfrac{1}{2}$

$z=-j$ ✗

$$I = \frac{\pi}{2} i a_{-1} + \pi i b_{-1}$$

$$I = \frac{\pi}{2} i - \frac{\pi i}{2} = 0$$

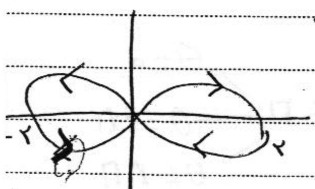
$$\int \frac{dz}{z^2-1} = ? \qquad C: |z|=1 \quad \times$$

تذکر: اگر مسیر c خلاف جهت مثلثاتی باشد در محاسبه‌ی انتگرال، مسیر c مانده‌ها را در $-2\pi i$ ضرب می‌کنیم.

مثال: برق ۷۷ (۳۸۶) (۴۴۷) ← ۱۸

$$\int \frac{1}{z} = \frac{\pi}{4} i$$

مثال: $\int_c \dfrac{dz}{z^2-1}$ روی مسیر زیر بدست آورید.



$z=1$ ✓ ⇒ قطب ساده → $a_{-1} = \lim_{z\to 1} (z-1) \dfrac{1}{(z-1)(z+1)} = \dfrac{1}{2}$

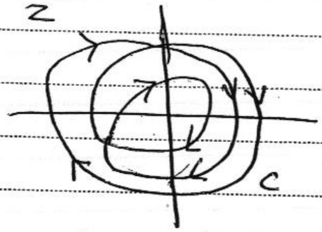
$z=-1$ ✓ ⇒ ″ → $b_{-1} = \lim (z+1) \dfrac{1}{(z-1)(z+1)} = -\dfrac{1}{2}$

$$I = -2\pi i a_{-1} + 2\pi i b_{-1} = -\pi i - \pi i = -2\pi i$$

Subject: Date: No.

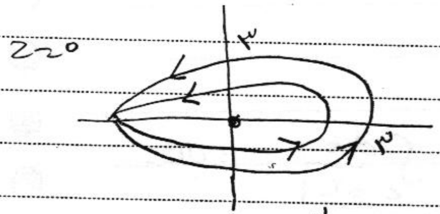
تذکر: اگر در محاسبه انتگرال $f(z)$ روی مسیری نقطه تکین منفرد درون n بار در جهت مثلثاتی توسط مسیر C دور زده شده باشد مانده را در $2n\pi i$ ضرب می‌کنیم.

مثال: حاصل انتگرال زیر روی مسیر داده شده بدست آورید $\oint \frac{e^z}{z}\,dz$



$z=0$ ✓ → ۳ بار قلب داره ← $a_{-1} = \underset{z\to 0}{\mathrm{Res}}\ \frac{e^z}{z} = 1 \to I = -3\times 2\pi i \times 1 = -6\pi i$

۸۵ برق (۴۰۳)   (۴۴۹) ← ۳۲



$r=3 \to \sin^2\frac{\theta}{4}=0 \to \frac{\theta}{4}=k\pi \to \theta=4k\pi$ → $\theta=0$, $\theta=4\pi$, $\theta=8\pi$

۸۷ مکانیک (۳۹۶)   (۴۶۱) ← ۱۲۷

بررسی تابع در بینهایت   ص۳۵

$f(z)=z \longrightarrow f(\frac{1}{z})=\frac{1}{z}$

$\cos z \longrightarrow f(\frac{1}{z})=\cos(\frac{1}{z})$

Subject: Date: No:

محاسبه مانده در بینهایت :

مانده در $\boxed{z=\infty}$ $\Leftrightarrow$ مانده در $\boxed{z=0}$ $\left(-\frac{f(\frac{1}{z})}{z^2}\right)$

مثال: مانده تابع $f(z)=z^2+1$ در $z=\infty$ بدست آورید.

$$W = -\frac{\frac{1}{z^2}+1}{z^2} = -\frac{z^2+1}{z^4}$$

$$a_{-1} = \frac{1}{3!}\lim_{z\to 0}\left(-(z^2+1)\right)''' = 0$$

$f(z)=\frac{\sin z}{z^2}$

$f(\frac{1}{z}) = z^2\sin(\frac{1}{z})$

مانده در $W = -\sin(\frac{1}{z}) \Rightarrow$ مانده $= -1$

۳۹۹

جمع مانده های تابع برابر ۰ است.

$a_{-1}+b_{-1}+c_{-1}+\dots = -($مانده در $\infty)$

برق ۷۵

۴۴۷ $\rightarrow$ ۱۲

$z=1$ ✓

$z=0$ ✓

$$\frac{-\frac{1}{\frac{1}{z}-1}\sin(z)}{z^2} = \frac{-z\sin z}{z^2(z-1)}$$

$z=0$ مانده در $=0 \rightarrow$ مانده در $\infty = 0$

$a_{-1}+b_{-1}=0 \rightarrow I = 2\pi i(a_{-1}+b_{-1}) = 0$

Subject:
Date: No:

حل کامپیوتر ۸۳

۴۵۵ ← ۷۵

$z=1 \to a_{-1} = \operatorname{Res}(z-1) \lim_{z\to 1} \dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z} = -e$

$z \to \infty$

$$\frac{-\dfrac{e^{z}}{1-\frac{1}{z}}}{z^{2}} = \frac{-ze^{z}}{z^{2}(z-1)}$$

$$a_{-1} = \lim_{z\to 0} z\,\frac{-ze^{z}}{z^{2}(z-1)} = 1$$

$z=0$ ق ، $z=1$ ق

$b_{-1} + a_{-1} = -1 \to b_{-1} = e-1$

$$I = 2\pi i(e-1)$$

محاسبه انتگرالهای معین با استفاده از انتگرالهای مختلط

① $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\sin\theta, \cos\theta)\,d\theta$

$z = e^{i\theta} \Rightarrow \sin\theta = \dfrac{z-\frac{1}{z}}{2i}$

$\cos\theta = \dfrac{z+\frac{1}{z}}{2}$

$d\theta = \dfrac{dz}{iz}$

$$\int_0^{2\pi} f(\sin\theta, \cos\theta, e^{i\theta})\,d\theta = \oint_{C:|z|=1} f\left(\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}, \frac{z+\frac{1}{z}}{2}, z\right)\frac{dz}{iz}$$

Subject: Date: No:

برق ۷۶ (۴۴۷) ← ۱۷

$$\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{a+\cos\theta}=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{a+\cos\theta}=\frac{1}{2}\oint_C\frac{\frac{dz}{iz}}{a+\frac{z+\frac{1}{z}}{2}}\qquad C: |z|=1$$

$$=\frac{1}{i}\int\frac{dz}{z^2+2az+1}$$

$$z^2+2az+1=0 \begin{cases} z=-a+\sqrt{a^2-1} \;\checkmark \rightarrow \text{قطب داخل} \\ z=-a-\sqrt{a^2-1} \;\times \end{cases}$$

$$a_{-1}=\frac{1}{i}\left(z+a-\sqrt{a^2-1}\right)\times\frac{1}{z^2+2az+1}=\frac{1}{i}\times\frac{1}{\cancel{-2a}+2\sqrt{a^2-1}+\cancel{2a}}$$

$$I=\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}$$

اگر در آن $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{q(x)}dx$ ، $P(x)$ و $q(x)$ توابع چند جمله‌ای باشند.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{q(x)}dx=2\pi i\left(\text{مجموع مانده‌ها تابع } \frac{P(z)}{q(z)} \text{ در نقاط تکین منفرد آن در بالای محور حقیقی قرار دارند}\right)$$

تذکر: اگر نقاط روی محور حقیقی واقع باشند مانده‌ها در πi ضرب می

کامپیوتر ۷۷

(۴۱۰) (۴۵۴) ← ۶۷

مقدار انتگرال $\int_0^{\infty} \frac{2x^2-1}{x^4-5x^2+4}\,dx$ برابر است با

۱) $\frac{\pi}{4}$ ✓ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{2\pi}{3}$ ۴) $\frac{3\pi}{2}$

$$f(z)=\frac{2z^2-1}{z^4+5z^2+4}$$

$$z^4+5z^2+4=0 \longrightarrow (z^2+4)(z^2+1)=0$$

$z=+2j$ ✓

$z=-2j$ ×

$z=j$ ✓

$z=-j$ ×

$z=2j$ در مانده $\longrightarrow a_{-1}=\lim (\cancel{z-2j}) \times \frac{2z^2-1}{(\cancel{z-2j})(z+2j)(z^2+1)}=$

$$=\frac{-9}{-12j}=\frac{3}{4j}$$

$z=j$ در مانده $\longrightarrow b_{-1}=\lim (z-j)\,\frac{2z^2-1}{(z^2+4)(z-j)(z+j)}=\frac{-3}{6j}=\frac{-1}{2j}$

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2x^2-1}{x^4+5x^2+4}\,dx= I=2\pi i\left(\frac{3}{4j}-\frac{2}{4j}\right)=\frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\infty}\frac{2x^2-1}{x^4+5x^2+4}=\frac{\pi}{4}$$

۳) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\begin{Bmatrix}\sin mx\\ \cos mx\end{Bmatrix}dx$

الف) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin mx\,dx = \mathrm{Im}\Big\{2\pi i\Big($ مانده‌های تابع $f(z)e^{imz}$ در نقاط تکین منفرد آن که در بالای محور حقیقی قرار دارند $\Big)$

Subject:
Date: . . No:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos mx\,dx \quad Re\left(\quad '' \quad \right)$$

تذکر: اگر نقاط تکین منفرد روی محور حقیقی واقع شوند مانند آنها

در πi ضرب می‌شود.

مکانیک ۷۰

۳۷ ← ۴۵۰

$$W = \frac{ze^{iz}}{z^2+1} \quad z^2+1=0 \quad z = j \checkmark \quad z = -j \times$$

$$z = j \rightarrow \text{ساده} \rightarrow \text{قطب} \rightarrow a_{-1} = \lim (z-j)\frac{ze^{iz}}{(z-j)(z+j)} = \frac{je^{-1}}{2j} = \frac{1}{2}e^{-1}$$

$$Im\left\{2\pi i \times \frac{1}{2}e^{-1}\right\} = \frac{\pi}{e}$$

برق ۷۸

۱۱ ← ۴۴۶

کامپیوتر ۷۱

۶۵ ← ۴۵۳

$$\frac{e^{3iz}}{z^2+4} \quad z^2+4=0 \quad z = 2j \checkmark \quad z = -2j \times$$

$$a_{-1} = \lim_{z \to 2j} (z-2j)\frac{e^{3iz}}{z\,(z-2j)(z+2j)} = \frac{e^{-6}}{4j}$$

$$I = \frac{1}{2} \times \mathrm{Re}\left\{2\pi j\,\frac{e^{-6}}{4j}\right\} = \frac{\pi}{4e^{6}}$$

برق ۸۲ ۸۱

۲۸ ← (۴۴۹) (۴۱۳)

$$\int_{0}^{\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{2}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^{2}x}{x^{2}}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-\cos 2x}{2x^{2}}$$

$$w = \frac{1}{4}\,\frac{1-e^{2iz}}{z^{2}} \qquad z=0 \checkmark$$

$$a_{-1} = \lim_{z\to 0}\frac{1}{4}\,\cancel{z}\,\frac{1-e^{2iz}}{z^{\cancel{2}}} = \frac{-2i}{4} = -\frac{i}{2}$$

$$I = \mathrm{Re}\left\{\pi i\left(-\frac{i}{2}\right)\right\} = \frac{\pi}{2}$$

گروه (۴)

برای محاسبهٔ انتگرال معین با استفاده از انتگرال مختلط مطابق زیر عمل می‌کنیم.

۱) انتخاب مسیر مناسب یعنی (C)

Subject:
Date: No:

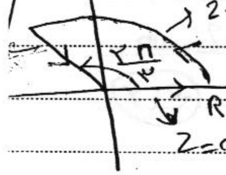
② انتخاب $f(z)$ مناسب.

③ $\oint_c f(z)\,dz$ را محاسبه می‌کنیم.

④ روی مسیر انتخاب شده حرکت می‌نماییم.

مثال: با توجه به مسیر داده شده نشان دهید $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$ $\quad z = re^{i\frac{2\pi}{3}}$

ص ۴۱۴ مثال (۱۵)



$$\oint \frac{dz}{1+z^3} \qquad z^3+1=0 \Rightarrow z=(-1)^{\frac{1}{3}} =$$

$$= \text{cis}\,\frac{2k\pi+\pi}{3} \quad \begin{cases} \text{cis}\,\frac{\pi}{3} & \checkmark \\ \text{cis}\,\pi & \times \\ \text{cis}\,\frac{5\pi}{3} & \times \end{cases}$$

باقیمانده $= \operatorname{Res}\left(z = \text{cis}\,\frac{\pi}{3}\right) \quad \frac{1}{1+z^3} = \frac{1}{3\,\text{cis}\,\frac{2\pi}{3}}$

$$\oint \frac{dz}{1+z^3} = \frac{2\pi i}{3\,\text{cis}\,\frac{2\pi}{3}}$$

حرکت روی مسیر $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{dx}{1+x^3} + \lim_{R\to\infty}\cancel{\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{Rie^{i\theta}\,d\theta}{1+R^3e^{3i\theta}}}^{\,0} + \int_R^0 \frac{e^{i\frac{2\pi}{3}}\,dr}{1+r^3\underbrace{e^{2\pi i}}_{1}} =$

$$= \frac{2\pi i}{3\,\text{cis}\,\frac{2\pi}{3}}$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3} - e^{i\frac{2\pi}{3}}\int_0^\infty \frac{dr}{1+r^3} = \frac{2\pi i}{3\,\text{cis}\,\frac{2\pi}{3}}$$

Subject:
Date: No:

$(1-e^{\frac{2i\pi}{3}})\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3} = \frac{2\pi i}{3\operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}} \Rightarrow \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3} =$

$= \frac{2\pi i}{3\operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}} \times \frac{1}{1-e^{2i\frac{\pi}{3}}} = \frac{\pi}{3}\,\frac{e^{-\pi i}}{-\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

گروه ۱ و ۲ و ۳ مهم است و گروه ۴ ا با دست آمده.

هسته ای ۸۴

۴۱۶ ۴۶۱ → ۱۲۶

لیست فرمولها

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$

$$\frac{1}{2}\sin 2x = \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$$

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$$

$$\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$$

$$\tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha}$$

$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$$

$$1+\tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} = \left(\frac{1}{\cos\alpha}\right)^2 = \sec^2\alpha$$

$$1+\cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} = \left(\frac{1}{\sin\alpha}\right)^2 = \csc^2\alpha$$

$$\tan^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x} \rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x}$$

$y = \sec U \longrightarrow y' = U' \sec U \tan U$

$y = \csc U \longrightarrow y' = U' \csc U \cot U$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \text{tang}^2 x}$$

$$\sec^2 t = \frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \text{tang}^2 t$$

$$\boxed{\sec^2 t - 1 = \text{tamg}^2 t}$$

$$\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t = 2\cos^2 t - 1$$

$$\boxed{\cos^2 t = \frac{\cos 2t + 1}{2}}$$

$$\cos 2t = 1 - 2\sin 2t$$

$$\boxed{\sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2}}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

۲_ یادآوری فرمول های مشتق ۲

① $y = \overset{\text{عدد}}{k}$ $\qquad y' = 0$

② $y = kx$ $\qquad y' = k$

③ $y = kx^n$ $\qquad y' = kn\,x^{n-1}$

④ $y = f \pm g \pm \dots$ $\qquad y' = f' \pm g' \pm \dots$

⑤ $y = kU^n$ $\qquad y' = knU^{n-1}U'$

⑥ $y = U \cdot V$ $\qquad y' = U'V - V'U$

حالت خاص

$$y = \frac{U}{V} \longrightarrow y' = \frac{U'V - V'U}{V^2}$$

$$y = \frac{1}{x} \longrightarrow y' = \frac{-1}{x^2} \xrightarrow{\text{تعمیم}} y = \frac{a}{x} \longrightarrow y' = \frac{-a}{x^2}$$

⑦ $$y = \sqrt[n]{U^m} \longrightarrow y' = \frac{mU'}{n\sqrt[n]{U^{n-m}}}$$

حالت خاص

$$y = \sqrt{U} \longrightarrow y' = \frac{U'}{2\sqrt{U}}$$

$$y = \sqrt{x} \longrightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

(8) $y = |U| \longrightarrow y' = \dfrac{U \cdot U'}{|U|}$

حالت خاص $y = |x| \longrightarrow y' = \dfrac{x}{|x|}$

(9) $y = \log_a U \longrightarrow y' = \dfrac{U'}{U \ln a} = \dfrac{U'}{U} \log_a e$

حالت خاص
$$\begin{cases} y = \ln U \Longrightarrow y' = \dfrac{U'}{U} \\ y = \ln x \Longrightarrow y' = \dfrac{1}{x} \end{cases}$$

(10) $y = a^U \longrightarrow y' = U' a^U \ln a$

حالت خاص
$$\begin{cases} y = e^U \longrightarrow y' = U' e^U \\ y = e^x \longrightarrow y' = e^x \end{cases}$$

مشتق مثلثاتی:

(11) $y = \sin U \longrightarrow y' = U' \cos U \xrightarrow{\text{حالت خاص}} \boxed{y = \sin x \longrightarrow y' = \cos x}$

$y = \cos U \longrightarrow y' = -U' \sin U \xrightarrow{\text{حالت خاص}} \boxed{y = \cos x \longrightarrow y' = -\sin x}$

$y = \operatorname{Tang} U \rightarrow y' = U'(1+\operatorname{Tang}^2 U) \xrightarrow{\text{حالت خاص}} y = \tan x \rightarrow$

$y' = 1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$

$y = \operatorname{cotg} U \rightarrow y' = -U'(1+\operatorname{cotg}^2 U) \xrightarrow{\text{حالت خاص}} y = \operatorname{cotg} x \rightarrow$

$y' = -(1+\operatorname{cotg}^2 x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$

مشتق معکوس مثلثاتی:

$y = \operatorname{Arc}\sin U \rightarrow y' = \dfrac{U'}{\sqrt{1-U^2}} \xrightarrow{\text{حالت خاص}} y = \operatorname{Arc}\sin x \rightarrow$

$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$y = \operatorname{Arc}\cos U \rightarrow y' = \dfrac{-U'}{\sqrt{1-U^2}} \xrightarrow{\text{حالت خاص}} y = \operatorname{Arc}\cos x \rightarrow$

$y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$y = \operatorname{Arc}\operatorname{tang} U \rightarrow y' = \dfrac{U'}{1+U^2} \xrightarrow{\text{حالت خاص}} y = \operatorname{Arc}\operatorname{Tang} x \rightarrow$

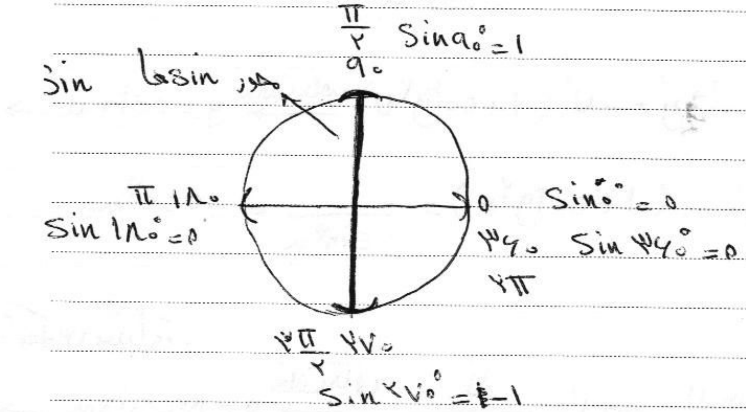
$\boxed{y' = \dfrac{1}{1+x^2}}$

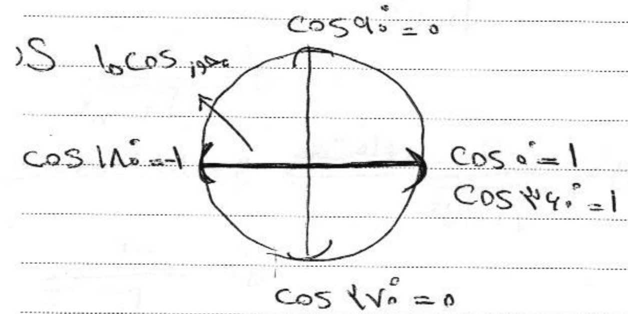
$y = \operatorname{Arc}\operatorname{cotg} U \rightarrow y' = \dfrac{-U'}{1+U^2} \xrightarrow{\text{حالت خاص}} y = \operatorname{Arc}\operatorname{cotg} x \rightarrow$

$y' = \dfrac{-1}{1+x^2}$

$y = \sec U \longrightarrow y' = U' \sec U \tan U$

$y = \csc U \longrightarrow y' = U' \csc U \cot U$





sin ۴۵°, cos ۴۵° = $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ $\qquad$ tan ۰°, 180° = ۰

tan ۴۵°, cot ۴۵° = ۱ $\qquad$ cot ۹۰°, ۲۷۰° = ۰

	$۰, ۳۶۰°, ۲\pi$	$۳۰°, \frac{\pi}{۶}$	$۴۵°, \frac{\pi}{۴}$	$۶۰°, \frac{\pi}{۳}$	$۹۰°, \frac{\pi}{۲}$	$۱۸۰°, \pi$	$۲۷۰°, \frac{۳\pi}{۲}$
sin	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱	۰	-۱
cos	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	-۱	۰
tan	۰	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$	تن	۰	تن
cot	تن	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۰	تن	۰

علامتهای نسبتهای مثلثاتی :

ربع دوم	ربع اول
sin > ۰	sin > ۰
cos < ۰	cos > ۰
tang < ۰	tag > ۰
cotg < ۰	cotg > ۰
ربع سوم	**ربع چهارم**
sin < ۰	sin < ۰
cos < ۰	cos > ۰
tang > ۰	tang < ۰
cotg > ۰	cotg < ۰

Subject:
Year. Month. Date. ( )

خواص انتگرال :

① $\int k\,dx = kx + C$

k : عدد

② $\int k\,f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx + C$

③ $\int (f(x) \pm g(x) \pm \dots)\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx \pm \dots$

④ $\int k x^n\,dx = k\,\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$

$n \neq -1$

⑤ $\int U^n\,dU = \dfrac{U^{n+1}}{n+1} + C$

$n \neq -1$

$\int U^n\,dU = \dfrac{U^{n+1}}{n+1} + C$ فرمول

U : هر عبارتی که شامل x است

dU : دیفرانسیل (مشتق)

$n \neq -1$

⑥ $\int U^{-1}\,dU = \int \dfrac{1}{U}\,dU = \int \dfrac{dU}{U} = \mathrm{Ln}\,|U| + C$

* صورت مشتق (دیفرانسیل) مخرج است.

۷) $\int a^{v}dv = \dfrac{a^{v}}{\ln a} + C$

* باید مشتق کنارش باشد.

$\int e^{v}dv = e^{v} + C$

$\int e^{x}dx = e^{x} + C$

* $\int \dfrac{dv}{\sqrt{a^2 - v^2}} = \text{Arc}\sin\dfrac{v}{a} = -\text{Arc}\cos\dfrac{v}{a}$

* $\int \dfrac{dv}{a^2 + v^2} = \dfrac{1}{a}\text{Arc}\tan\dfrac{v}{a} = -\dfrac{1}{a}\text{Arc}\cot\dfrac{v}{a}$

(مکان-زمان) $x_t \xrightarrow{\text{مشتق}} v_t \xrightarrow{\text{مشتق}} a_t$

سرعت — شتاب

$x_t \xleftarrow{\text{انتگرال}} v_t \xleftarrow{\text{انتگرال}} a_t$

مسافت زمان

فرمول های انتگرال

$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

$\int \cos x\,dx = \sin x + C$

$\int (1+\tan^2 x)\,dx = \tan x + C$

$\int (1+\cot^2 x)\,dx = -\cot x + C$

حالت خاص

$$*\int \tan g^2 x \, dx = \int ((1+\tan g^2 x) - 1)\, dx = \tan g\, x - x + C$$

$$*\int \cot^2 x \, dx = \int ((1+\cot^2 x) - 1)\, dx = -\cot g\, x - x + C$$

$$*\int \tan g\, x \, dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\, dx = -\operatorname{Ln}|\cos x| + C$$

$$*\int \cot g\, x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx = \operatorname{Ln}|\sin x| + C$$

$$\int \sin U \, dU = -\cos U + C$$

$$\int \cos U \, dU = \sin U + C$$

$$\int (1+\tan g^2 U)\, dU = \tan g\, U + C$$

$$\int (1+\cot^2 U)\, dU = -\cot g\, U + C$$

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\, dx = F(x) \Big]_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a)$$

قوانین مهم :

$$① \int_a^a f(x)\, dx = 0 \qquad \Big]_{x=a}^{x=a} F(a) - F(a) = 0$$

② $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$

③ $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

④ $\int_a^b \left(f(x) \pm g(x) \pm \dots\right) dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx \pm \dots$

⑤ $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \begin{cases} ۲\int_0^a f(x)\,dx & \leftarrow \text{تابع زوج است} \\ \text{صفر} & \leftarrow \text{تابع فرد است} \end{cases}$

⑥ $\int_0^{n\in N} [x]\,dx = \frac{n(n-1)}{۲}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

انتگرالگیری به روش جزء به جزء:

$$A = \int (\text{چندجمله‌ای بر اساس } x) \times \begin{Bmatrix} \sin ax \\ \cos ax \\ e^{ax} \end{Bmatrix} dx$$

$$B = \int e^{ax} \times \begin{Bmatrix} \sin ax \\ \cos ax \end{Bmatrix} dx$$

$$C = \int (\text{چندجمله‌ای بر اساس } x) \times \begin{Bmatrix} \ln x \\ \text{Arctang } x \end{Bmatrix} dx$$

مثال) $\int \ln x \, dx$

$U = \ln x \qquad dV = dx$

$dU = \frac{1}{x} dx \qquad V = x$

مشتق   انتگرال

$$\boxed{\int U dV = U.V - \int V du}$$

یادآوری)

$$ax^2+bx+c=0$$

$$a+b+c=0 \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=\dfrac{c}{a} \end{cases}$$

$$ax^2+bx+c=0$$

$$a+c=b \begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=\dfrac{-c}{a} \end{cases}$$

یادآوری فرمول های اتحاد:

اتحاد مربع دوجمله ای

$$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$$

$$(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$$

$$(a+b)^2-2ab=(a-b)^2+2ab=a^2+b^2$$

اتحاد مزدوج

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$$

اتحاد یک جمله مشترک

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$

مربع سه جمله ای

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$$

مجموع مکعبات

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

تفاضل مکعبات

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

مکعب دوجمله ای

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$$

مکعب دوجمله ای

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=$$

$$a^3-b^3-3ab(a-b)$$