# کل تمرینات ریاضیات مهندسی پیشرفته
## استاد محترم : جناب آقای دکتر نجفی زاده

نام:فرید نام خانوادگی:ذاکری شماره دانشجویی:۸۷۰۰۰۴۶۳۰

---

تمرین ۱: رابطه زیر را اثبات کنید ؟

$$\delta_{(t^۲-a^۲)} = \frac{۱}{۲\,|a|}[\delta_{(t+a)} + \delta_{(t-a)}]$$

برای اثبات این رابطه ابتدا ترم سمت چپ را اثبات می کنیم :

$$\int_{-b}^{+b} \delta_{(t^۲-a^۲)}dx, \quad t^۲ - a^۲ = u, \quad ۲tdt = du, \quad dt = \frac{du}{۲t}$$

$$t = \sqrt{u+a^۲}, \quad dt = \frac{du}{۲\sqrt{u+a^۲}}$$

اکنون با توجه به قضیه sifting properties داریم :

$$\int_{-b}^{b} \frac{\delta_{(u)}}{۲\sqrt{u+a^۲}}du = \int_{-b}^{b} f_{(u)}\delta_{(u)} = f_{(۰)} = \frac{۱}{۲\mid a\mid}$$

حالا ترم سمت راست را اثبات می کنیم :

$$\int_{-b}^{+b} \frac{۱}{۲\mid a\mid}\delta_{(t+a)}dt, \quad t+a = u, \quad dt = du$$

اگر $a > ۰$ :

$$\frac{۱}{۲\mid a\mid}\int_{-b+a}^{+b+a} \delta_{(u)}du = \frac{۱}{۲\mid a\mid}$$

$$\int_{-b}^{+b} \frac{۱}{۲ \mid a \mid} \delta_{(t-a)} dt, \quad t-a=u, \quad dt=du$$

اگر $a < ۰$ :

$$\frac{۱}{۲ \mid a \mid} \int_{-b-a}^{+b-a} \delta_{(u)} du = ۰$$

با توجه به برابر شدن هر دو ترم چپ و راست رابطه اثبات می شود.

*******************************************************

تمرین ۲:جواب انتگرال زیر را بدست آورید ؟

$$\int_{\frac{-\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}} sin(x) \delta'_{(x)} dx$$

$$\sin(x) = u \quad cos(x) = du$$

$$\delta'_{(x)} dx = dv \quad \delta_{(x)} = v$$

$$\int_{\frac{-\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}} sin(x) \delta'_{(x)} dx = \delta_{(x)} sin(X) - \int_{\frac{-\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}} \delta_{(x)} cosx dx$$

برای $x$ های کوچک داریم :

$$\delta_{(x)} sin(X) = ۰$$

همچنین با تو جه به قضیه sifting properties داریم :

$$\int_{\frac{-\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}} \delta_{(x)} cosx dx = cos(۰) = ۱$$

در نهایت خوایم داشت :

$$\int_{\frac{-\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}} sin(x)\delta'_{(x)}dx = -۱$$

مطلوب است $L^*$ adjoint differentional operator :

$L : (L := \frac{d^۲}{dx^۲}\ ,\ \circ < x < ۱\ ,\ u(\circ) = \circ\ ,\ u'(۱) = \circ$

$\int_\circ^۱ v\frac{d^۲u}{dx^۲}dx = [u'v - uv']_\circ^۱ + \int uv''dx$

$= [-u(۱)v'(۱) - u'(\circ)v(\circ)] = (u, L^*v)$

$L^* := \frac{d^۲}{dx^۲}\ ,\ B_۱^*(v) : v(\circ) = \circ\ ,\ B_۲^*(v) : v'(۱) = \circ$

$L(y) = x^۲y'' + xy' - x^۲y$

داریم :

$\int_a^b v\ Ly\ dx = [\ ]_a^b + \int_a^b y\ L^*v\ dx$

به کمک انتگرالگیری جزبه‌جزانتگرال سمت راست را محاسبه میکنیم.

$\int v(x^۲y'' + xy' - x^۲y)dx = \int vx^۲\frac{d^۲y}{dx^۲}dx + \int vx\frac{dy}{dx}dx - \int vx^۲ydx$

$\int vx^۲\frac{d^۲y}{dx^۲}dx =$

$u_۱ = vx^۲ \to du_۱ = (v'x^۲ + ۲xv)dx$

$$dv_۱ = \frac{d^۲y}{dx^۲}dx \to v_۱ = fracdydx$$

$$= vx^۲\frac{dy}{dx} - \int(v'x^۲ + ۲xv)\frac{dy}{dx}dx = vx^۲\frac{dy}{dx} - [\int v'x^۲\frac{dy}{dx}dx + \int ۲xv\frac{dy}{dx}dx]$$

$$\int v'x^۲\frac{dy}{dx}dx =$$

$$u_۲ = v'x^۲ \to du_۲ = (v''x^۲ + ۲xv')dx$$

$$dv_۲ = \frac{dy}{dx}dx \to v_۲ = y$$

$$\int v'x^۲\frac{dy}{dx}dx = v'x^۲y - \int y(v''x^۲ + ۲xv')dx$$

$$\int ۲xv\frac{dy}{dx}dx =$$

$$u_۳ = ۲xv \to du_۳ = (۲v + ۲xv')dx \ dv_۳ = \frac{dy}{dx}dx \to v_۳ = y$$

$$= ۲xyv - \int y(۲v + ۲xv')dx$$

$$[vx^۲\frac{dy}{dx} - v'x^۲y - vxy] + \int y[x^۲\frac{d^۲v}{dx^۲} + ۳x\frac{dv}{dx} + (۱ - x^۲)v]dx$$

$$L^*v = x^۲\frac{d^۲v}{dx^۲} + ۳x\frac{dv}{dx} + (۱ - x^۲)v$$

$$L^* := x^۲\frac{d^۲}{dx^۲} + ۳x\frac{d}{dx} + (۱ - x^۲)$$

تمرین۱: اپراتور ADJOINT $L^*$ را برای رابطه زیر بدست آورید.

$$Ly = x^{۲}y'' + xy' - n^{۲}y$$

با استفاده از تغییر متغیر زیر داریم :

$\int v[x^{۲}y'' + xy' - n^{۲}y]dx$

$vx^{۲} = u \to du = v'x^{۲} + ۲xvdx$

$y''dx = dz \to z = y'$

باستفاده از انتگرال گیری به روش جز به جز داریم :

$vx^{۲}y' - v'x^{۲}y + \int y[v''x^{۲} + ۲xv']dx - ۲xyv + \int y[۲v + ۲xv']dx + vxy -$
$\int y[v'x + v]dx - \int vn^{۲}ydx = vx^{۲}y' - v'x^{۲}y - ۲xyv + vxy + \int y[v''x^{۲} + ۲xv' +$
$۲v + ۲xv' - v'x + v - vn^{۲}]dx$

در نهایت خواهیم داشت :

$$L^{*} := x^{۲}\frac{d^{۲}v}{dx^{۲}} + ۳x\frac{dv}{dx} + (۱ - n^{۲})v$$

---

تمرین ۲ : معادله زیر را به روش گرین حل کنید.

$xy'' - y' = h(x)$

$Y(۰) = Y(۱) = ۰$

ابتدا معادله همگن را حل می کنیم که جواب بدیهی دارد در نتیجه می توانیم از حل تابع گرین استفاده کنیم

برای حل ابتد ا $L^{*}$ را بدست می آوریم :

$$\int_{۰}^{۱} G(\xi, x)(xy'' - y')d\xi = \int_{۰}^{۱} xG(\xi, x)y''d\xi - \int_{۰}^{۱} G(\xi, x)y'd\xi$$

با استفاده از انتگرال جز به جز داریم :

$$\int_0^1 xG(\xi,x)y''d\xi = xy'(1)G(1,x) - xy'(0)G(0,x) - y(1)G(1,x) - y(0)G(0,x)$$

$$-G_\xi(1,x)y(1) + G_\xi(0,x)y(0) + \int_0^1 yG_\xi(\xi,x)d\xi + \int_0^1 y(G_{\xi\xi}(\xi,x)x + G_\xi(\xi,x))d\xi$$

$$\int_0^1 -G(\xi,x)y'd\xi = y(0)G(0,x) - y(1)G(1,x) + \int_0^1 yG_\xi(\xi,x)d\xi$$

اگر $y(0) = 0$ باشد نمی توان شرط مرزی دوم را بدست آورد بنابراین با در نظر گرفتن $y(0) = finite$ برای $L^*$ داریم :

$$L^* := \frac{\xi d^2 G}{d\xi^2} + 3\frac{dG}{d\xi} = \delta(\xi - x)$$

$$G(0,x) = finite, G(1,x) = 0$$

با توجه به اینکه $\delta(\xi - x)$ در $\xi \neq x$ صفر می باشد معادله را برای دو بازه $0 < \xi < x$ و $x < \xi < 1$ می یابیم :

$$\xi\frac{d^G}{d\xi^2} + 3\frac{dG}{d\xi} = 0 \qquad 0 < \xi < x$$

$$\xi\frac{d^2 G}{d\xi^2} + 3\frac{dG}{d\xi} = 0 \qquad x < \xi < 1$$

برای حل این معادله از تغییر متغییر $\frac{dG}{d\xi} = p$ و $\frac{d^2G}{d\xi^2} = p'$ استفاده می کنیم :

$$p' + \frac{3}{\xi}p = 0 \Rightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{3}{\xi}d\xi \Rightarrow Lnp = -c_1 3Ln\xi$$

$$p = c_۱ e^{-۳ Ln\xi} \Rightarrow p = -c_۱ \frac{۱}{\xi^۳} \Rightarrow \frac{dG}{d\xi} = -c_۱ \frac{۱}{\xi^۳} \Rightarrow G = -\frac{c_۱}{۲\xi^۲} + c_۲$$

$$G(\xi, x) = \frac{-۱}{۲\xi^۲} A + B \qquad ۰ < \xi < x$$

$$G(\xi, x) = \frac{-۱}{۲\xi^۲} C + D \qquad x < \xi < ۱$$

با استفاده از شرایط مرزی ضرایب مجهول را می یابیم :

$$G(۰, x) = finite \to \frac{-۱}{۰} A + B = finite \Rightarrow A = ۰$$

$$G(۱, x) = ۰ \Rightarrow \frac{-c}{۲} + D = ۰ \to D = \frac{c}{۲}$$

$$\int_{x^-}^{x^+} (\xi \frac{dG}{d\xi^۲} + ۳\frac{dG}{d\xi}) d\xi = \int_{x^-}^{x^+} \delta(\xi - x) d\xi = H(\xi - x)]_{x^-}^{x^+} = ۱ - ۰ = ۱$$

$$\frac{dG}{d\xi}]_{x^-}^{x^+} = ۱ \Rightarrow \frac{c}{x^۳} - ۰ = ۱ \Rightarrow c = x^۳, D = \frac{۱}{۲} x^۳$$

با استفاده از شرط پیوستگی داریم :

$$G(x^-, x) = G(x^+, x) \Rightarrow B = \frac{x^۳}{-۲x^۲} + \frac{۱}{۲} x^۳ \Rightarrow B = \frac{۱}{۲}(x^۳ - x)$$

$$G(\xi, x) = \frac{۱}{۲}(x^۳ - x) \qquad ۰ < \xi < x$$

$$G(\xi, x) = \frac{-۱}{۲\xi^۲} x^۳ + \frac{۱}{۲} x^۳ \qquad x < \xi < ۱$$

$$u(x) = \int_۰^۱ G(\xi, x) \phi(\xi) d\xi = \int_۰^۱ G(\xi, x)(\xi h(\xi)) d\xi$$

در نهایت جواب نهایی برابر است با :

$$u(x) = \frac{۱}{۲}(x^{۳} - x)\int_{۰}^{x} \xi h(\xi)d\xi - \frac{۱}{۲}x^{۳}\int_{x}^{۱}(\frac{۱}{\xi^{۲}} - ۱)\xi h(\xi)d\xi$$

---

تمرین ۳ : معادله زیر را به روش تابع گرین حل کنید.

$$\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}} - w^{۲}y = e^{iwt}\delta(x-\beta)$$

$$y(۰) = y(۱) = ۰ \qquad ۰ < \beta < ۱$$

$$\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}} - w^{۲}y = e^{iwt}\delta(x-\beta) = \phi(x)$$

$$y(۰) = y(۱) = ۰ \qquad ۰ < \beta < ۱$$

ابتدا باید $L^*$ را حساب کنیم :

$$\int_{۰}^{۱} G(\xi,x)(\frac{d^{۲}y}{d\xi^{۲}} - w^{۲}y)d\xi = \int_{۰}^{۱} G(\xi,x)\frac{d^{۲}y}{d\xi^{۲}}d\xi - \int_{۰}^{۱} w^{۲}yd\xi$$

با استفاده از انتگرال جز به جز داریم :

$$G(۱,x)y'(۱) - G(۰,x)y'(۰) - g_{\xi\xi}(۱,x)y(۱) + G_{\xi\xi}y(۰) + \int_{۰}^{۱} y(G_{\xi\xi}(\xi,x) - w^{۲}G(\xi,x))d\xi$$

درنهایت خواهیم داشت :

$L^* := \frac{d^{۲}G}{d\xi} - w^{۲}G = \phi(x)$

$g(۱,x) = g(۰,x) = ۰$

معا دله مشخصه را می نویسیم :

$m^۲ - w^۲ = ۰ \qquad m = \pm w$

$G(\xi) = Ae^{w\xi} + Be^{-w\xi} \qquad ۰ < \xi < x$

$G(\xi) = Ce^{w\xi} + De^{-w\xi} \qquad x < \xi < ۱$

اکنون باید ضرایب $A, B, C, D$ را بدست آوریم با استفاده از ۴ شرط برای تابع گرین داریم :

$۰ = A + B$

$۰ = Ce^{w} + De^{-w}$

$$\int_{۰}^{۱} (\frac{d^۲G}{d\xi} - w^۲G)d\xi = \int_{x^-}^{x^+} \delta(\xi - x)d\xi = H(\xi - x)]_{x^-}^{x^+} = ۱ - ۰ = ۱$$

$$\frac{dG}{d\xi}]_{x^-}^{x^+} = ۱ \Rightarrow \frac{c}{x^۳} - ۰ = ۱ \Rightarrow c = x^۳, D = \frac{۱}{۲}x^۳$$

با استفاده از شرط پیوستگی داریم :

$$G(x^-, x) = G(x^+, x) \Rightarrow B = \frac{x^۳}{-۲x^۲} + \frac{۱}{۲}x^۳ \Rightarrow B = \frac{۱}{۲}(x^۳ - x)$$

معادلات زیررا بااستفاده از تابع گرین حل کنید.
تمرین ۱ —

$$\frac{d^۲y}{dx^۲} - \frac{۱}{x} = h(x)$$

$$y(۰) = y(۱) = ۰$$

به روش زیر عمل میکنیم : ابتدا trivial کردن مسئله

$$h(x)=0, y(0)=y(1)=0$$

$$\int_0^1 Glyd\zeta=\int_0^1 G(y''-\frac{1}{x}y')d\zeta=\int_0^1 Gy''d\zeta-\int_0^1 \frac{1}{x}Gy'd\zeta=$$

$$Gy'-\int G'y'd\zeta-(\frac{1}{x}Gy-\int(\frac{-1}{x^2}G+\frac{1}{x}G')yd\zeta)=$$

$$Gy'-(G'y-\int G''yd\zeta)-\frac{1}{x}Gy+\int\frac{-1}{x^2}Gyd\zeta+\int\frac{1}{x}G'yd\zeta=$$

$$Gy'-G'y+\int G''yd\zeta-\frac{1}{x}Gy-\int\frac{1}{x^2}Gyd\zeta+\int\frac{1}{x}G'yd\zeta=$$

$$\int_0^1 Gly=(Gy'-G'y-\frac{1}{x}Gy)+\int_0^1 y(G''+\frac{1}{x}G'-\frac{1}{x^2}G)d\zeta$$

$$\int_0^1 Glyd\zeta=(G(1,x)y'(1)-G'(1,x)y(1)-\frac{1}{x}y(1)G(1,x)-G(0,x)y'(0)+G'(0,x)y(0)+$$

$$\frac{1}{x}y(0)G(0,x))+\int_0^1 y(G''+\frac{1}{x}G'-\frac{1}{x^2}G)d\zeta$$

$$L*G=\delta(\zeta-x)=G''+\frac{1}{x}G'-\frac{1}{x^2}G$$

ازشرایط مرزی مسئله داریم :

$$\int_0^1 Glyd\zeta=(G(1,x)y'(1)-G(0,x)y'(0))+\int_0^1 y(G''+\frac{1}{x}G'-\frac{1}{x^2}G)d\zeta$$

چون y'(0) وy'(1) مجهول می باشند بنابراین داریم :

$$G(1,x)=G(0,x)=0$$

در نتیجه داریم :

$$\int_{\circ}^{1} Glyd\zeta = \int_{\circ}^{1} y(G'' + \frac{1}{x}G' - \frac{1}{x^{2}}G)d\zeta$$

$$y(x) = \int_{\circ}^{1} yL * Gd\zeta$$

از حل معادله‌ی مشخصه داریم :

$$G'' + \frac{1}{x}G' - \frac{1}{x^{2}}G = \circ \Longrightarrow x^{2}G'' + xG' - G = \circ$$

ازحل معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی دوم ازنوع کوشی اویلر:

$$a\lambda(\lambda - 1) + b\lambda + c = \circ \Longrightarrow a = 1, b = 1, c = -1$$

$$\lambda(\lambda - 1) + \lambda - 1 = \circ \Longrightarrow \lambda^{2} = 1 \Longrightarrow \lambda = \pm 1$$

$$G(\zeta, x) = (\circ x \prec \zeta \prec 1, ax + \frac{b}{x} \circ \prec \zeta \prec x)$$

$$G(\zeta, x)|_{+o} = G(\zeta, x)|_{-\circ} \Longrightarrow a\zeta + \frac{b}{\zeta} = \circ$$

از شرط مشتق داریم :

$$\frac{dG}{d\zeta}|_{-\circ}^{+\circ} = 1 \Longrightarrow a - \frac{b}{\zeta^{2}} = 1$$

$$a\zeta^{2} + b = \circ, a\zeta^{2} - b = \zeta^{2} \Longrightarrow 2a\zeta^{2} = \zeta^{2} \Longrightarrow a = \frac{1}{2}, b = \frac{-\zeta^{2}}{2}$$

بنابراین داریم :

$$G(\zeta,x)=(\circ x\prec\zeta\prec ۱, \frac{x}{۲}-\frac{\zeta^{۲}}{۲x}\circ\prec\zeta\prec x)$$

تمرین ۲–

$$\frac{d^{۴}u}{dx^{۴}}=\phi(x)$$

$$u(۱)=a, u(\circ)=\circ, u''(\circ)=\circ, u'(\circ)-۲u'(۱)=\circ$$

$$\int_{\circ}^{۱} Glud\zeta=\int_{\circ}^{۱} Gu^{۴}d\zeta=Gu'''-\int G'u'''d\zeta=$$

$$Gu'''-(G'u''-\int G''u''d\zeta)=Gu'''-G'u''+\int G''u''d\zeta=Gu'''-G'u''+$$

$$(G''u'-\int G'''u'd\zeta)=Gu'''-G'u''+G''u'-\int G'''u'd\zeta=Gu'''-G'u''+$$

$$G''u'-(G'''u-\int G^{۴}ud\zeta)=Gu'''-G'u''+G''u'-G'''u+\int G^{۴}ud\zeta\Longrightarrow$$

$$\int_{\circ}^{۱} Glud\zeta=(Gu'''-G'u''+G''u'-G'''u)+\int_{\circ}^{۱} G^{۴}ud\zeta$$

$$\delta(\zeta-x)=L*G=G^{۴}$$

$$u(x)=\int_{\circ}^{۱} G^{۴}ud\zeta$$

$$\int_{\circ}^{۱} Glud\zeta=(G(۱,x)u'''(۱)-G'(۱,x)u''(۱)+G''(۱,x)u'(۱)-G'''(۱,x)u(۱)-$$

$$G(0,x)u'''(0)+G'(0,x)u''(0)-G''(0,x)u'(0)+G'''(0,x)u(0))+\int_0^1 G^4 ud\zeta$$

$$\int_0^1 Glud\zeta=[G(1,x)u''(1)-G'(1,x)u''(1)+G''(1,x)u'(1)-aG''(1,x)-G(0,x)u'''(0)-$$

$$2u'(1)G''(0,x)]+\int_0^1 G^4 ud\zeta$$

چون u"'(1) و u'(1) و u"(1) و u"'(0) مجهول هستند بنابراین G(1,x),G'(1,x),G"(1,x),G(0,x) صفر هستند.

$$\int_0^1 Glud\zeta=[G''(1,x)u'(1)+aG''(1,x)-2u'(1)G''(0,x)]+\int_0^1 G^4 ud\zeta \Longrightarrow$$

$$\int_0^1 Glud\zeta=[u'(1)(G''(1,x)-2G''(0,x))]-aG''(1,x)+\int_0^1 G^4 ud\zeta$$

$$G''(1,x)-2G''(0,x)=0$$

$$\int_0^1 G(\zeta,x)\phi(\zeta)d\zeta=-aG''(1,x)+\int_0^1 uL*Gd\zeta$$

$$L*G=G^4=\delta(\zeta-x)$$

$$G^4=0\Longrightarrow G(\zeta,x)=(0x\prec\zeta\prec 1, a+bx+cx^2+dx^3 0\prec\zeta\prec x)$$

$$G'(\zeta,x)=b+2cx+3dx^2\longrightarrow G''(\zeta,x)=2c+6dx$$

$$G''(۱,x)-۲G''(۰,x)=۰\Longrightarrow ۲c+۶d-۲(۲c)=۶d-۲c=۰\Longrightarrow c=۳d$$

$$G(۰,x)=G(۱,x)=۰\Longrightarrow a=۰, b+c+d=۰\Longrightarrow b+۴d=۰\Longrightarrow b=-۴d$$

$$\frac{dG}{d\zeta}|_{-۰}^{+۰}=۱\Longrightarrow ۰-b-۲c\zeta-۳d\zeta^{۲}=۱$$

$$G(\zeta,x)|_{x=+۰}=G(\zeta,x)|_{x=-۰}\Longrightarrow a+b\zeta+c\zeta^{۲}+d\zeta^{۳}=۰$$

از حل معادلات بالا ثابتهای a,b,c,d بصورت زیر بدست آمد:

$$a=۰, b=\frac{۱}{۳+۲\zeta}, c=\frac{-۳}{۴(۳+۲\zeta)}, d=\frac{-۱}{۴(۳+۲\zeta)}$$

تمرین ۳—

$$\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}-\omega^{۲}y=e^{i\omega t}\delta(x-\beta)$$

$$y(۰)=y(۱)=۰, ۰\prec\beta\prec ۱$$

ابتدا trivial کردن مسئله :

$$\phi(x)=e^{i\omega t}\delta(x-\beta)=۰$$

$$y(۰)=y(۱)=۰, ۰\prec\beta\prec ۱$$

$$\int_{۰}^{۱}Glyd\beta=\int_{۰}^{۱}G(y''-\omega^{۲}y)d\beta=\int_{۰}^{۱}Gy''d\beta-\int_{۰}^{۱}G\omega^{۲}yd\beta=$$

$$Gy'-\int_{۰}^{۱}G'y'd\beta-\int_{۰}^{۱}G\omega^{۲}yd\beta=Gy'-(G'y-\int G''yd\beta)-\int_{۰}^{۱}G\omega^{۲}yd\beta=$$

$$Gy' - G'y + \int G''yd\beta - \int_{۰}^{۱} G\omega^{۲}yd\beta = (Gy' - G'y)|_{۰}^{۱} + \int_{۰}^{۱} y(G'' - \omega^{۲}G)d\beta$$

$$\Longrightarrow \int_{۰}^{۱} Glyd\beta = (G(۱,x)y'(۱) - G'(۱,x)y(۱) - G(۰,x)y'(۰) + G'(۰,x)y(۰)) + \int_{۰}^{۱} yL{*}Gd\beta$$

چون y'(0) وy'(1) مجهول هستند بنابراین :

$$G(۱,x) = G(۰,x) = ۰$$

$$\int_{۰}^{۱} G(\beta,x)\phi(x)d\beta = \int_{۰}^{۱} yL * Gd\beta = y(x)$$

$$L * G = \delta(\beta - x) = G'' - \omega^{۲}G = ۰$$

از حل معادله‌ی مشخصه داریم :

$$\lambda^{۲} - \omega^{۲} = ۰ \Longrightarrow \lambda = \pm\omega$$

$$G(\beta,x) = (۰x \prec \beta \prec ۱, ae^{\omega x} + be^{-\omega x}۰ \prec \beta \prec x)$$

$$G(۱,x) = G(۰,x) = ۰ \Longrightarrow a + b = ۰$$

$$\frac{dG}{d\beta}|_{x=-۰}^{x=+۰} = ۱ \Longrightarrow a\omega e^{\omega\beta} - \beta\omega e^{-\omega\beta} - ۰ = ۱$$

$$G(\beta,x)|_{x=+۰} = G(\beta,x)|_{x=-۰} \Longrightarrow ae^{\omega\beta} + \beta e^{-\omega\beta} = ۰$$

تمرین ۴—

$$\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}} + \frac{۳}{x}\frac{dy}{dx} + (۱ - \frac{۳}{x^{۲}})y = \phi(x)$$

$$y(0) = finite, y(1) = \pi$$

ابتدا trivial کردن مسئله :

$$\int_0^1 Glyd\zeta = \int_0^1 G(y'' + \frac{3}{x}y' + (1 - \frac{3}{x^2})y)d\zeta =$$

$$\int_0^1 Gy''d\zeta + \int_0^1 G\frac{3}{x}y'd\zeta + \int_0^1 Gyd\zeta - \int_0^1 G\frac{3}{x^2}yd\zeta =$$

$$(Gy' - \int G'y'd\zeta) + (\frac{3}{x}Gy - \int (G'\frac{3}{x} - \frac{3}{x^2}G)yd\zeta) + \int Gyd\zeta - \int \frac{3}{x^2}Gyd\zeta =$$

$$Gy' - (G'y - \int G''yd\zeta) + \frac{3}{x}Gy - \int \frac{3}{x}yG'd\zeta + \int \frac{3}{x^2}Gyd\zeta + \int Gyd\zeta - \int \frac{3}{x^2}Gyd\zeta =$$

$$Gy' - G'y + \int G''yd\zeta + \frac{3}{x}Gy - \int \frac{3}{x}yG'd\zeta + \int \frac{3}{x^2}Gyd\zeta + \int Gyd\zeta - \int \frac{3}{x^2}Gyd\zeta =$$

$$\int Glyd\zeta = Gy' - G'y + \frac{3}{x}Gy + \int_0^1 y(G'' - \frac{3}{x}G' + G)d\zeta$$

$$L * G = \delta(\zeta - x) = G'' - \frac{3}{x}G' + G$$

حل معادله مشخصه به روش فروبینیوس (نقطه X=0 غیر عادی منظم است .)

$$r^2 + (a - 1)r + b = 0, p(x) = \frac{-3}{x}, Q(x) = 1$$

$$a = lim[x(\frac{-3}{x})] = -3$$

$$b = lim[x^2(1)] = 0$$

$$r^{۲} - ۴r = ۰ \longrightarrow r(r-۴) = ۰ \Longrightarrow r_{۱} = ۰, r_{۲} = ۴$$

تفاضل دو ریشه عددی صحیح است :

$$G_{۱}(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} a_n (x-۰)^{n+۴}$$

$$G_{۲}(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} b_n (x-۰)^{n} + k y_{۱} Ln(x-۰)$$

تمرین ۵−

$$y'' = f(x), y(-\infty) = y'(-\infty) = ۰$$

حل :

$$G = f(x), G(-\infty|\zeta) = G'(-\infty|\zeta) = ۰$$

ازجواب عمومی داریم :

$$y = c_{۱} + c_{۲}x$$

باتوجه به شرط مرزی y=0 تابع گرین عبارت است از:

$$G(x|\zeta) = (ox \prec \zeta, c_{۱} + c_{۲}x, \zeta \prec x)$$

بر اساس شرط مشتق داریم :

$$G(\zeta^{+}|\zeta) = ۰, G'(\zeta^{+}|\zeta) = ۱$$

در نتیجه تابع گرین به صورت زیر خواهد بود:

$$G(x|\zeta) = (۰, x \prec \zeta, x-\zeta, \zeta \prec x) = (x-\zeta)H(x-\zeta)$$

$$y'' = f(x), y(-\infty) = y'(-\infty) = ۰$$

و داریم :

$$y=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\zeta)G(x|\zeta)d\zeta$$

$$y=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\zeta)(x-\zeta)H(x-\zeta)$$

$$y=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\zeta)(x-\zeta)d\zeta$$

$$y'=[f(\zeta)(x-\zeta)]_{\zeta=x}+\int_{-\infty}^{x}(f(x)(x-\zeta))d\zeta=\int_{-\infty}^{x} f(\zeta)d\zeta$$

$$y''=[f(\zeta)]_{\zeta=x}=f(x)$$

تمرین ٦—

$$y''+\frac{1}{x}y'-\frac{1}{x}y=x^2, y(0)=0, y'(0)=1$$

حل : از حل معادله اویلر($y=x^\lambda$)داریم :

$$\lambda(\lambda-1)+\lambda-1=0$$

$$(\lambda-1)(\lambda+1)=0$$

$$\Longrightarrow y_1=x, y_2=\frac{1}{x}$$

رونسکین رابدست می آوریم :

$$w(x)=-\frac{1}{x}-\frac{1}{x}=-\frac{2}{x}$$

و جواب عمومی زیرحاصل می شود:

$$y_p = -x\int \frac{x^2(1/x)}{-2/x}dx + \frac{1}{x}\int \frac{x^2 x}{-2/x}dx$$

$$= -x\int -\frac{x^2}{2}dx + \int -\frac{x^4}{2}dx$$

$$= \frac{x^4}{6} - \frac{x^4}{10}$$

$$= \frac{x^4}{15}$$

$$\Longrightarrow y = \frac{x^4}{15} + c_1 x + c_2 \frac{1}{x}$$

با در نظر گرفتن شرایط مرزی $c_1, c_2$ بدست می آیند:

$$y(0) = 0 \Longrightarrow c_2 = 0$$

$$y'(0) = 0 \Longrightarrow c_1 = 1$$

$$\Longrightarrow y = \frac{x^4}{15} + x$$

برای حل با تابع گرین لازم است دو معادله جداگانه را در ابتدا در نظر بگیریم :

$$u'' + \frac{1}{x}u' - \frac{1}{x^2}u = x^2, u(0) = u'(0) = 0$$

$$v'' + \frac{1}{x}v' - \frac{1}{x^2}v = 0, v(0) = 0, v'(0) = 1$$

در نتیجه خواهیم داشت :

$$L[G(x|\zeta)] = \delta(x-\zeta), G(۰|\zeta) = G'(۰|\zeta) = ۰$$

$$G(x|\zeta) = (۰, x \prec \zeta, cx = d/x, \zeta \prec x$$

با استفاده از شرایط مرزی داریم :

$$۰ = c\zeta + d/\zeta$$

و با استفاده از شرط پرش :

$$c - d/\zeta^{۲} = ۱$$

باحل دو معادله بدست می آوریم :

$$G(x|\zeta) = (۰, x \prec \zeta, \frac{۱}{۲}x - \frac{\zeta^{۲}}{۲x}, \zeta \prec x)$$

$$u(x) = \int_{۰}^{\infty} G(x|\zeta)\zeta^{۲} d\zeta$$

$$= \int_{۰}^{x} (\frac{۱}{۲}x - \frac{\zeta^{۲}}{۲x})\zeta^{۲} d\zeta$$

$$= \frac{۱}{۶}x^{۴} - \frac{۱}{۱۰}x^{۴}$$

$$= \frac{x^{۴}}{۱۵}$$

$$\Longrightarrow v = cx + d/x$$

بر اساس دو شرط مرزی خواهیم داشت:

$$v = x$$

$$\Longrightarrow y = x + \frac{x^۴}{۱۵}$$

۱) سریه فوریه هر یک از توابع زیر را بدست آورید.

$f(x) = x + x^۲ \ , \ -\pi < x < \pi \ , \ p = ۲\pi$ (۱)

$$a_\circ = \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x + x^۲)dx = \frac{۱}{\pi}[\frac{x^۲}{۲} + \frac{x^۳}{۳}]_{\pi}^{-\pi} = \frac{۲\pi^۳}{۳}$$

$$a_n = \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+x^۲)\cos\frac{n\pi x}{\pi}dx = \frac{۱}{\pi}[(x+x^۲)(\frac{۱}{n}\sin nx)-(۱+۲x)(-\frac{۱}{n^۲}\cos nx)-(\frac{۲}{n^۳}\sin nx)]_{\pi}^{-\pi}$$

$$\Longrightarrow a_n = \frac{۲}{n\pi}$$

$$b_n = \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+x^۲)\sin\frac{n\pi x}{\pi}dx = \frac{۱}{\pi}[(x+x^۲)(-\frac{۱}{n}\cos nx)-(۱+۲x)(-\frac{۱}{n^۲}\sin nx)+۲(\frac{۲}{n^۳}\cos nx)]_{\pi}^{-\pi}$$

$$\Longrightarrow b_n = \frac{\pi}{n} + \frac{۴}{n^۳\pi}$$

$$f(x) = \frac{a_\circ}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{\pi} + \sum_{n=۱}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{\pi}$$

$$\Longrightarrow f(x) = (\frac{۲\pi^۳}{٦}) + \sum_{n=۱}^{\infty}(\frac{۲}{n\pi})\cos nx + \sum_{n=۱}^{\infty}(\frac{n^۲\pi^۲ + ۴}{n^۳\pi})\sin nx$$

---

$$f(x) = \begin{cases} -\pi & -\pi < x < ۰ \\ x & ۰ < x < \pi \end{cases} \ , \ p = ۲\pi \quad (۲)$$

$$a_۰ = \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{۰}(-\pi)dx + \frac{۱}{\pi}\int_{۰}^{\pi}(x)dx = -\frac{\pi^۲}{\pi} + \frac{\pi^۲}{۲\pi} = -\frac{\pi}{۲}$$

$$a_n = \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{۰}(-\pi)\cos nxdx + \frac{۱}{\pi}\int_{۰}^{\pi}(x)\cos nxdx = -[\frac{۱}{n}\sin nx]_{-\pi}^{۰} + \frac{۱}{\pi}[(x)\frac{۱}{n}\sin nx + \frac{۱}{n^۲}\cos nx]_{۰}^{\pi}$$

$$\Longrightarrow a_n = -\frac{۲}{n^۲\pi}$$

$$b_n = \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{۰}(-\pi)\sin nxdx + \frac{۱}{\pi}\int_{۰}^{\pi}(x)\sin nxdx = [\frac{۱}{n}\cos nx]_{-\pi}^{۰} + \frac{۱}{\pi}[-(x)\frac{۱}{n}\cos nx + \frac{۱}{n^۲}\sin nx]_{۰}^{\pi}$$

$$\Longrightarrow b_n = \frac{۴}{n}$$

$$f(x) = \frac{a_۰}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{\pi} + \sum_{n=۱}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{\pi}$$

$$\Longrightarrow f(x) = -\frac{\pi}{۴} + \sum_{n=۱}^{\infty}(-\frac{۲}{n^۲\pi})\cos nx + \sum_{n=۱}^{\infty}(\frac{۴}{n})\sin nx$$

---

$$f(x) = x \ , \ -۲ < x < ۲ \ , \ p = ۴ \quad (۳)$$

تابع $f(x) = x$ فرد می باشد پس داریم $a_۰ = ۰$ و $a_n = ۰$

$$b_n = \frac{۲}{۲}\int_{۰}^{\pi}(x)\sin\frac{n\pi x}{۲}dx = [(-x\frac{۲}{n}\cos\frac{n\pi x}{۲}) + (\frac{۴}{n^۲}\sin\frac{n\pi x}{۲})]_{۰}^{۲}$$

$$\Longrightarrow b_n = \frac{۴}{n}$$

$$f(x) = \frac{a_۰}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{۲} \Longrightarrow f(x) = \sum_{n=۱}^{\infty}(\frac{۴}{n})\sin\frac{n\pi x}{۲}$$

$$f(x) = x + \mid x \mid \ , \ -\pi < x < \pi \ , \ p = ۲\pi \quad (۴)$$

$$a_۰ = \frac{۱}{\pi}\int_۰^{\pi}(۲x)dx = \frac{۲}{\pi}\frac{x^۲}{۲}]_۰^{\pi} = \pi$$

$$a_n = \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(۲x)\cos nx dx = \frac{۱}{\pi}[۲x\frac{۱}{n}\sin nx + \frac{۲}{n^۲}\cos nx]_۰^{\pi} = \frac{۴}{n^۲\pi}$$

$$b_n = \frac{۱}{\pi}\int_۰^{\pi}(۲x)\sin\frac{n\pi x}{\pi}dx = \frac{۱}{\pi}[۲x\frac{-۱}{n}\cos nx + \frac{۲}{n^۲}\sin nx]_۰^{\pi} = \frac{۲}{n}$$

$$f(x) = \frac{a_۰}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{\pi} + \sum_{n=۱}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{\pi}$$

$$\Longrightarrow f(x) = \frac{\pi}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty}(\frac{۴}{n^۲\pi})\cos nx + \sum_{n=۱}^{\infty}(\frac{۲}{n})\sin nx$$

$$f(x) = \begin{cases} x & -\frac{\pi}{۲} < x < \frac{\pi}{۲} \\ \pi - x & \frac{\pi}{۲} < x < ۳\frac{\pi}{۲} \end{cases} \ , \ p = ۲\pi \quad (۵)$$

$$a_۰ = ۰ \qquad a_n = ۰$$

$$b_n = \frac{۲}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}}(x)\sin nx dx = \frac{۲}{\pi}[-x\frac{۱}{n}\cos nx + \frac{۱}{n^۲}\sin nx]_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}} = \frac{۴}{n^۲\pi}$$

$$f(x) = \frac{a_۰}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{\pi} + \sum_{n=۱}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{\pi} \Longrightarrow f(x) = \sum_{n=۱}^{\infty}(\frac{۴}{n^۲\pi})\sin n\pi x$$

---

$$f(x) = ۱ - x^۲ \ , \ -۱ < x < ۱ \ , \ p = ۲ \quad (٦)$$

تابع $۱ - x^۲$ زوج است پس $b_n = ۰$

$$a_۰ = ۲\int_۰^{۱}(۱ - x^۲)dx = ۲[x - \frac{x^۲}{۲}]_۰^۱ = ۱$$

$$a_n = \int_0^1 (1-x^2)\cos nx dx = 2[(1-x^2)\frac{1}{n}\sin n\pi x - \frac{2x}{n^2}\cos n\pi x + \frac{2}{n^3}\sin n\pi x]_0^1 = \frac{4}{n^2}$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x \Longrightarrow f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{4}{n^2}) \cos n\pi x$$

---

$$f(x) = \pi \sin(\pi x) \quad , \quad 0 < x < 1 \quad , \quad p = 1 \quad (7)$$

$$a_0 = 2\int_0^1 (\pi \sin(\pi x))dx = 2\pi \frac{-1}{\pi} \cos \pi x]_0^1 = 4$$

$$a_n = 2\int_0^1 (\pi \sin(\pi x)) \cos(2n\pi x)dx = \pi \int_0^1 \sin(1+2n)(\pi x) + \sin((1-2n)\pi x)dx$$

$$= \pi[\frac{-1}{(1+2n)\pi} \cos(1+2n)\pi x + \frac{-1}{(1-2n)\pi} \cos(1-2n)\pi x]_0^1$$

$$\Longrightarrow a_n = \pi(\frac{2}{(1+2n)\pi} + \frac{2}{(1-2n)\pi})$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{\pi} \Longrightarrow f(x) = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (\pi(\frac{2}{(1+2n)\pi} + \frac{2}{(1-2n)\pi})) \sin 2n\pi x$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ \sin x & 0 \leq x < \pi \end{cases} \quad , \quad p = 2\pi \quad (8)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (\sin x)dx = \frac{1}{\pi}[-\cos x]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (\sin x)\cos n\pi x dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \sin((1+n)x) + \sin((1-n)x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi}[\frac{-1}{(1+n)}\cos(1+n)x - \frac{1}{(1-n)}\cos(1-n)x]_0^{\pi} = \frac{(-1)^n}{\pi(1-n^2)}$$

$$b_n = \frac{١}{\pi}\int_{٠}^{\pi}(\sin x)\sin nx dx = -\frac{١}{٢\pi}\int_{٠}^{\pi}\cos((١+n)x) - \cos((١-n)x)dx$$

$$b_n = -\frac{١}{٢\pi}[\frac{١}{(١+n)}\sin(١+n)x - \frac{١}{(١-n)}\sin(١-n)x]_{٠}^{\pi} = ٠$$

$$f(x) = \frac{a_٠}{٢} + \sum_{n=١}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{\pi} \Longrightarrow f(x) = \frac{١}{\pi} + \sum_{n=١}^{\infty}\frac{(-١)^n}{\pi(١-n^٢)}\cos n\pi x$$

---

$$f(x) = \begin{cases} ٠ & -\pi < x < ٠ \\ e^x - ١ & ٠ \le x < \pi \end{cases} \quad , \quad p = ٢\pi \quad (٩)$$

$$a_٠ = \frac{١}{\pi}\int_{٠}^{\pi}(e^x - ١)dx = \frac{١}{\pi}[e^x - x]_{٠}^{\pi} = \frac{e^{\pi} - \pi - ١}{\pi}$$

$$a_n = \frac{١}{\pi}\int_{٠}^{\pi}(e^x - ١)\cos nx dx = \frac{١}{\pi}\int_{٠}^{\pi}(e^x)\cos nx dx - \frac{١}{\pi}\int_{٠}^{\pi}\cos nx dx$$

$$= \frac{١}{\pi}[\frac{\frac{e^x}{n}\sin nx + \frac{e^x}{n^٢}\cos nx}{١ + \frac{١}{n^٢}} - \frac{١}{n}\sin nx]_{٠}^{\pi}$$

$$b_n = \frac{١}{\pi}\int_{٠}^{\pi}(e^x - ١)\sin nx dx = \frac{١}{\pi}\int_{٠}^{\pi}(e^x)\sin nx dx - \frac{١}{\pi}\int_{٠}^{\pi}\sin nx dx$$

$$= \frac{١}{\pi}[\frac{-\frac{e^x}{n}\cos nx + \frac{e^x}{n^٢}\sin nx}{١ + \frac{١}{n^٢}} + \frac{١}{n}\cos nx]_{٠}^{\pi}$$

---

$$f(x) = ١ + x + x^٢ \quad , \quad -\pi < x < \pi \quad , \quad p = ٢\pi \quad (١٠)$$

$$a_٠ = \frac{١}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(١ + x + x^٢)dx = \frac{١}{\pi}[x + \frac{x^٢}{٢} + \frac{x^٣}{٣}]_{-\pi}^{\pi} = \pi$$

$$a_n = \frac{١}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(١+x+x^٢)\cos nx dx = \frac{١}{\pi}[(١+x+x^٢)(\frac{١}{n}\sin nx) + (١+٢x)(\frac{١}{n^٢}\cos nx) - (\frac{٢}{n^٣}\sin nx)]_{\pi}^{-\pi}$$

$$\Longrightarrow a_n = (2+4\pi)\frac{(-1)^n}{n\pi}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1+x+x^2)\sin\frac{n\pi x}{\pi}dx = \frac{1}{\pi}[(1+x+x^2)(-\frac{1}{n}\cos nx)-(1+2x)(-\frac{1}{n^2}\sin nx)+2(\frac{2}{n^3}\cos$$

$$\Longrightarrow b_n = \frac{1}{\pi}[\frac{(2+2\pi^2)(-1)^n}{n} - \frac{4(-1)^n}{n^3}]$$

$$f(x) = \frac{a_\circ}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{\pi}$$

$$\Longrightarrow f(x) = (\frac{\pi}{2}) + \sum_{n=1}^{\infty}((2+4\pi)\frac{(-1)^n}{n\pi})\cos nx + \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{\pi}[\frac{(2+2\pi^2)(-1)^n}{n} - \frac{4(-1)^n}{n^3})\sin nx$$

---

$f(x) = \sinh x \;\;,\;\; -1 < x < 1 \;\;,\;\; p = 2 \quad (11)$

تابع $f(x) = \sinh x$ فرد است پس داریم $a_\circ = 0$ و $a_n = 0$

$$b_n = \frac{2}{1}\int_\circ^1 (\sinh x)\sin n\pi x dx = \int_\circ^1 (e^x - e^{-x})\sin n\pi x dx = \int_\circ^1 (e^x)\sin n\pi x dx - \int_\circ^1 (e^{-x})\sin n\pi x d$$

$$\Longrightarrow b_n = [\frac{-\frac{e^x}{n\pi}\cos n\pi x + \frac{e^x}{n^2\pi^2}\sin n\pi x}{1+\frac{1}{n^2\pi^2}} - \frac{-\frac{e^{-x}}{n\pi}\cos n\pi x - \frac{e^{-x}}{n^2\pi^2}\sin n\pi x}{1-\frac{1}{n^2\pi^2}}]_\circ^1$$

---

۲) سری فوریه توابع زیر را بدست آورید.

$f(x) = x \mid x \mid \;\;,\;\; -1 < x < 1 \;\;,\;\; p = 2 \quad (1)$

تابع $f(x) = x \mid x \mid$ فرد است پس داریم $a_\circ = 0$ و $a_n = 0$

$$b_n = 2\int_\circ^1 (x^2)\sin n\pi x dx = 2[x^2\frac{-1}{n\pi}\cos n\pi x + 2x(\frac{1}{n^2\pi^2}\sin n\pi) + \frac{2}{n^3\pi^3}\cos n\pi]_\circ^1$$

$$\Longrightarrow b_n = 2[\frac{(-1)^n}{n\pi} - \frac{4(-1)^n}{n^3\pi^3}]$$

$$f(x)=\sum_{n=۱}^{\infty} b_n \sin n\pi x \Longrightarrow f(x)=\sum_{n=۱}^{\infty}(۲[\frac{(-۱)^n}{n\pi}-\frac{۴(-۱)^n}{n^۳\pi^۳}])\sin n\pi x$$

---

$f(x)=\cos x \ , \ -\frac{\pi}{۲}<x<\frac{\pi}{۲} \ , \ p=\pi$ (۲)

تابع $f(x)=\cos x$ زوج است پس داریم $b_n=۰$

$$a_۰=\frac{۴}{\pi}\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}(\cos x)dx=\frac{۴}{\pi}$$

$$a_n=\frac{۴}{\pi}\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}(\cos x)\cos ۲nx dx=\frac{۲}{\pi}\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\cos((۱+۲n)x)+\cos((۱-۲n)x)dx$$

$$\Longrightarrow a_n=\frac{۲}{\pi}[\frac{(-۱)^n}{۱+۲n}+\frac{(-۱)^n}{۱-۲n}]$$

$$f(x)=\frac{a_۰}{۲}+\sum_{n=۱}^{\infty}a_n\cos ۲nx \Longrightarrow f(x)=(\frac{۲}{\pi})+\sum_{n=۱}^{\infty}(\frac{۲}{\pi}[\frac{(-۱)^n}{۱+۲n}+\frac{(-۱)^n}{۱-۲n}])\cos ۲nx$$

---

$f(x)=|\sin x| \ , \ -\pi<x<\pi \ , \ p=۲\pi$ (۳)

تابع $f(x)=|\sin x|$ زوج است پس داریم $b_n=۰$

$$a_۰=\frac{۲}{\pi}\int_۰^{\pi}(\sin x)dx=\frac{۴}{\pi}$$

$$a_n=\frac{۲}{\pi}\int_۰^{\pi}(\sin x)\cos nx dx=\frac{۱}{\pi}\int_۰^{\pi}\sin((۱+n)x)+\sin((۱-n)x)dx$$

$$\Longrightarrow a_n=\frac{۱}{\pi}[\frac{-۱}{۱+n}\cos(۱+n)x+\frac{-۱}{۱-n}\cos(۱-n)x]_۰^{\pi}=\frac{۱}{\pi}[\frac{-۱}{۱+n}+\frac{-۱}{۱-n}]$$

$$\Longrightarrow a_n=\frac{۱}{\pi}[-\frac{(-۱)^n}{۱+n}-\frac{(-۱)^n}{۱-n}]$$

$$f(x)=\frac{a_۰}{۲}+\sum_{n=۱}^{\infty}a_n\cos ۲nx \Longrightarrow f(x)=(\frac{۲}{\pi})+\sum_{n=۱}^{\infty}(\frac{۱}{\pi}[-\frac{(-۱)^n}{۱+n}-\frac{(-۱)^n}{۱-n}])\cos ۲nx$$

---

$$f(x)=x(\pi^۲-x^۲)\ \ ,\ \ -\pi<x<\pi\ \ ,\ \ p=۲\pi \qquad (۵)$$

تابع $f(x)=x(\pi^۲-x^۲)$ فرد است پس داریم $a_۰=۰$ و $a_n=۰$

$$b_n=\frac{۲}{\pi}\int_۰^{\pi}(x(\pi^۲-x^۲))\sin nx dx=[(\pi^۲x-x^۲)\frac{-۱}{n}+(\pi^۲-۲x)\frac{۱}{n^۲}\sin nx-\frac{۲}{n^۳}\cos nx]_۰^{\pi}$$

$$\Longrightarrow b_n=\frac{۸(-۱)^n}{n^۳\pi}$$

$$f(x)=\sum_{n=۱}^{\infty}b_n\sin nx \Longrightarrow f(x)=\sum_{n=۱}^{\infty}(\frac{۸(-۱)^n}{n^۳\pi})\sin nx$$

---

$$f(x)=x\sin ۲x\ \ ,\ \ -\pi<x<\pi\ \ ,\ \ p=۲\pi \qquad (٦)$$

تابع $f(x)=x\sin ۲x$ زوج است پس داریم $b_n=۰$

$$a_۰=\frac{۲}{\pi}\int_۰^{\pi}(x\sin ۲x)dx=۱$$

$$a_n=\frac{۲}{\pi}\int_۰^{\pi}(x\sin ۲x\cos nx)dx$$

$$=\frac{۱}{\pi}[-\frac{x}{۲+n}\cos(۲+n)x+\frac{۱}{(۲+n)^۲}\sin(۲+n)x-\frac{x}{۲-n}\cos(۲-n)x+\frac{۱}{(۲-n)^۲}\sin(۲+n)x]_۰^{\pi}$$

$$\Longrightarrow a_n=(-۱)^n[\frac{۱}{۲+n}-\frac{۱}{۲-n}]$$

$$f(x)=\frac{a_۰}{۲}+\sum_{n=۱}^{\infty}a_n\cos nx \Longrightarrow f(x)=(\frac{۱}{۲})+\sum_{n=۱}^{\infty}((-۱)^n[\frac{۱}{۲+n}-\frac{۱}{۲-n}])\cos ۲nx$$

۴)یک ولتاژ سینوسی $E\sin wt$ که در ان t به معنی زمان است از یکسو کننده نیم موجی که قسمت منفی را حذف می کند می گذرد.سری فوریه تابع متناوب حاصل را که به صورت زیر می باشد بیابید.

$$f(t)=\begin{cases}0 & -L<t<0\\ E\sin wt & 0<t<L\end{cases} \quad , \quad p=2L=\frac{2\pi}{w} \quad , \quad L=\frac{\pi}{w}$$

$$a_0=\frac{w}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{w}} E\sin wt dt = 2\frac{E}{\pi}$$

$$a_n=\frac{w}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{w}} E\sin wt\cos wt dx=\frac{wE}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{w}}[\sin(1+n)wt+\sin(1-n)wt]dt$$

$$a_n=\frac{wE}{2\pi}[-\frac{\cos(1+n)wt}{(1+n)w}-\frac{\cos(1-n)wt}{(1-n)w}]_0^{\frac{\pi}{w}}$$

$$=\frac{E}{2\pi}[-\frac{\cos(1+n)\pi+1}{(1+n)}+\frac{\cos(1-n)\pi+1}{(1-n)}]$$

$$a_n=\frac{E}{2\pi}[\frac{2}{1+n}+\frac{2}{1-n}]=-\frac{2E}{(n-1)(n+1)\pi}$$

$$f(t)=\frac{E}{\pi}+\frac{E}{2}\sin wt-\frac{2E}{\pi}(\frac{1}{1\times 3}\cos 2wt+\frac{1}{3\times 5}\cos 4wt+\cdots)$$

۶)نشان دهید که :

2)

$$\frac{۳}{۲}+\frac{۱}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱+(-۱)^{n+۱}}{n}\sin nx=\begin{cases}۱ & -\pi<x<۰\\ ۲ & ۰<x<\pi\end{cases}\quad , \quad p=۲\pi$$

$$a_{۰}=\frac{۱}{\pi}[\int_{-\pi} ۰\,۱dx+\int_{۰}\pi ۲dx]=\frac{۱}{\pi}[\pi+۲\pi]=۳$$

$$a_n=\frac{۱}{\pi}[\int_{-\pi} ۰\cos nxdxdx+\int_{۰}\pi ۲\cos nxdxdx]=۰$$

$$b_n=\frac{۱}{\pi}[\int_{-\pi} ۰\sin nxdxdx+\int_{۰}\pi ۲\sin nxdxdx]$$

$$=\frac{۱}{n\pi}[-\cos nx]_{-\pi}^{۰}+\frac{۱}{\pi}[-۲\cos nx]_{۰}^{\pi}=\frac{۱+(-۱)^{n+۱}}{n\pi}$$

$$\frac{a_{۰}}{۲}+\sum_{n=۱}^{\infty}[a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}]=f(x)$$

$$\frac{۳}{۲}+\frac{۱}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱+(-۱)^{n+۱}}{n}\sin nx=\begin{cases}۱ & -\pi<x<۰\\ ۲ & ۰<x<\pi\end{cases}\quad , \quad p=۲\pi$$

۷) سریه فوریه تابع زیر را بیابید.

$$f(x)=\delta(x-۱)\ ,\ ۰<x<۲\ ,\ p=۲ \qquad (۱)$$

$$f(x)=\delta(x-۱)=\begin{cases}۰ & x\neq ۱\\ \infty & x=۱\end{cases}$$

$$a_۰ = \int_۰^۲ (\delta(x-۱))dx = ۱$$

$$a_n = \int_۰^۲ (\delta(x-۱)) \cos n\pi x dx = \cos n\pi$$

$$b_n = \int_۰^۲ (\delta(x-۱)) \sin n\pi x dx = \sin n\pi$$

$$f(x) = \frac{a_۰}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{\pi} + \sum_{n=۱}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{\pi}$$

$$\Longrightarrow f(x) = (\frac{۱}{۲}) + \sum_{n=۱}^{\infty} (\cos n\pi) \cos nx + \sum_{n=۱}^{\infty} (\sin n\pi) \sin nx$$

۷) سریه فوریه تابع زیر را بیابید.

$$f(x) = \delta(x-۱) \quad , \quad ۰ < x < ۲ \quad , \quad p = ۲ \qquad (۱)$$

$$f(x) = \delta(x-۱) = \begin{cases} ۰ & x \neq ۱ \\ \infty & x = ۱ \end{cases}$$

$$a_۰ = \int_۰^۲ (\delta(x-۱))dx = ۱$$

$$a_n = \int_۰^۲ (\delta(x-۱)) \cos n\pi x dx = \cos n\pi$$

$$b_n = \int_۰^۲ (\delta(x-۱)) \sin n\pi x dx = \sin n\pi$$

$$f(x) = \frac{a_۰}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{\pi} + \sum_{n=۱}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{\pi}$$

$$\Longrightarrow f(x) = (\frac{۱}{۲}) + \sum_{n=۱}^{\infty} (\cos n\pi) \cos nx + \sum_{n=۱}^{\infty} (\sin n\pi) \sin nx$$

---

۸) هر یک از توابع زیر را به صورت سینوسی و کسینوسی فوریه نمایش دهید.

(۱) $f(x) = ۱ - ۲x \quad , \quad ۰ < x < ۱$

$$f(x) = \begin{cases} ۱ - ۲x & ۰ < x < ۱ \\ ۱ + ۲x & -۱ < x < ۰ \end{cases}$$

$$a_۰ = ۰$$

$$a_n = ۲ \int_۰^۱ (۱ - ۲x) \cos n\pi x dx = \frac{۸(-۱)^n}{n^۲ \pi^۲}$$

$$f(x) = \sum_{n=۱}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{\pi} \Longrightarrow f(x) = \sum_{n=۱}^{\infty} (\frac{۸(-۱)^n}{n^۲ \pi^۲}) \cos n\pi x$$

$$b_n = \int_۰^۱ (۱ - ۲x) \sin n\pi x dx = -\frac{(-۱)^n}{n\pi} - \frac{۴(-۱)^n}{n^۲ \pi^۲}$$

$$f(x) = \sum_{n=۱}^{\infty} b_n \sin n\pi x \Longrightarrow f(x) = \sum_{n=۱}^{\infty} (-\frac{(-۱)^n}{n\pi} - \frac{۴(-۱)^n}{n^۲ \pi^۲}) \sin n\pi x$$

---

(۲) $f(x) = \cos ۲x \quad , \quad ۰ < x < \pi$

$$a_۰ = \frac{۲}{\pi} \int_۰^{\pi} (\cos ۲x) dx = ۰$$

$$a_n = \frac{۲}{\pi} \int_۰^{\pi} (\cos ۲x) \cos nx dx = ۰$$

$$b_n = \frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\pi}(\cos ۲x)\sin nx dx = \frac{۱}{\pi}[\frac{-۱}{n+۲}\cos(n+۲)x - \frac{-۱}{n-۲}\cos(n-۲)x]_{۰}^{\pi}$$

$$\Longrightarrow b_n = \frac{۱}{\pi}[-\frac{(-۱)^n}{n+۲} - \frac{(-۱)^n}{n-۲} - (\frac{-۱}{n+۲} - \frac{-۱}{n-۲})]$$

$$f(x) = \sum_{n=۱}^{\infty} b_n \sin nx \Longrightarrow f(x) = \sum_{n=۱}^{\infty}(\frac{۱}{\pi}[-\frac{(-۱)^n}{n+۲} - \frac{(-۱)^n}{n-۲} - (\frac{-۱}{n+۲} - \frac{-۱}{n-۲})]) \sin n\pi x$$

---

$$f(x) = \pi + x \quad , \quad ۰ < x < ۲ \qquad (۳)$$

$$a_{۰} = \int_{۰}^{۲}(\pi + x)dx = ۲\pi + ۲$$

$$a_n = \int_{۰}^{۲}(\pi + x)\cos\frac{n\pi x}{۲}dx = [\frac{۲}{n}\sin\frac{n\pi x}{۲} + \frac{۲x}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{۲} + \frac{۴}{n^۲\pi^۲}\cos\frac{n\pi x}{۲}]_{۰}^{۲}$$

$$a_n = \frac{۴(-۱)^n}{n^۲\pi^۲} - \frac{۴}{n^۲\pi^۲}$$

$$f(x) = \frac{a_{۰}}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{\pi} \Longrightarrow f(x) = (\pi + ۱) + \sum_{n=۱}^{\infty}(\frac{۴(-۱)^n}{n^۲\pi^۲} - \frac{۴}{n^۲\pi^۲})\cos nx$$

---

$$f(x) = \begin{cases} ۰ & ۰ < x < \pi \\ x - \pi & \pi \leq x < ۲\pi \end{cases} \quad , \quad p = ۲\pi \qquad (۴)$$

$$a_{۰} = \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x + x^۲)dx =$$

$$a_n = \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x + x^۲)\cos\frac{n\pi x}{\pi}dx =$$

$$b_n = \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+x^{۲})\sin\frac{n\pi x}{\pi}dx =$$

$$f(x) = \begin{cases} x & ۰ < x < ۱ \\ ۱ & ۱ \leq x \leq ۲ \end{cases} \quad , \quad p = ۲\pi \qquad (۵)$$

$$a_{۰} = \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+x^{۲})dx =$$

$$a_n = \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+x^{۲})\cos\frac{n\pi x}{\pi}dx =$$

$$b_n = \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+x^{۲})\sin\frac{n\pi x}{\pi}dx =$$

$$f(x) = \sin ۳x \quad , \quad ۰ < x < \pi \qquad (٦)$$

$$a_{۰} = \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+x^{۲})dx =$$

$$a_n = \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+x^{۲})\cos\frac{n\pi x}{\pi}dx =$$

$$b_n = \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+x^۲)\sin\frac{n\pi x}{\pi}dx =$$

$f(x) = \sin\frac{n\pi}{L}x \quad , \quad ۰ < x < L$ (۷)

$$a_۰ = \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+x^۲)dx =$$

$$a_n = \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+x^۲)\cos\frac{n\pi x}{\pi}dx =$$

$$b_n = \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+x^۲)\sin\frac{n\pi x}{\pi}dx =$$

---

$f(x) = \cosh x \quad , \quad ۰ < x < \pi$ (۸)

$-\pi < x < \pi$

تابع $f(x) = \cosh x$ زوج است پس داریم $b_n = ۰$

$$a_۰ = \frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\pi}(\cosh x)dx = \sinh x]_{۰}^{\pi} = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi}$$

$$a_n = \frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\pi}(\cosh x)\cos nx dx = \frac{۱}{\pi}\int_{۰}^{\pi}(e^{x} + e^{-x})\cos nx dx$$

$$f(x) = x\delta(x-۱) \quad , \quad ۰ < x < ۲ \qquad ; \ (۹)$$

$$a_۰ = \int_۰^۲ (x\delta(x-۱))dx = ۱$$

$$a_n = \int_۰^۲ (x\delta(x-۱)) \cos\frac{n\pi x}{۲} dx = \cos\frac{n\pi}{۲}$$

$$b_n = \int_۰^۲ (x\delta(x-۱)) \sin\frac{n\pi x}{۲} dx = \sin\frac{n\pi}{۲}$$

$$f(x) = \frac{a_۰}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{۲}$$

$$\Longrightarrow f(x) = (\frac{۱}{۲}) + \sum_{n=۱}^{\infty} (\cos\frac{n\pi}{۲}) \cos nx + \sum_{n=۱}^{\infty} (\sin\frac{n\pi}{۲}) \sin nx$$

۱۰ ) انتگرال فوریه هر یک از توابع زیر را بدست آورید.

(۱

$$f(x) = \begin{cases} x & ۰ < x < a \\ ۰ & x > a \end{cases} \ , \ f(-x) = f(x)$$

تابع زوج است پس داریم $b(w) = ۰$

$$a(w) = \frac{۲}{\pi} \int_۰^{\infty} f(x) \cos wx dx$$

$$\Longrightarrow a(w) = \frac{۲}{\pi} \int_۰^a x \cos wx dx = \frac{۲}{\pi}[x\frac{۱}{w}\sin wx + \frac{۱}{w^۲}\cos wx]_۰^a = \frac{۲}{\pi}(\frac{a\sin wa}{w} + \frac{a\cos wa}{w^۲} - \frac{۱}{w^۲})$$

$$f(x) = \int_{\circ}^{\infty} [a(w)\cos wx + b(w)\sin wx]dx$$

$$\Longrightarrow f(x) = \frac{۲}{\pi}\int_{\circ}^{\infty} [(\frac{aw\sin wa + a\cos wa - ۱}{w^{۲}})\cos wx]dx$$

---

۲)

$$f(x) = \begin{cases} \sinh x & |\ x\ | < ۱ \\ \circ & |\ x\ | > ۱ \end{cases}$$

تابع فرد است پس داریم $a(w) = \circ$

$$b(w) = \frac{۲}{\pi}\int_{\circ}^{\infty} f(x)\sin wx dx$$

$$\Longrightarrow b(w) = \frac{۲}{\pi}\int_{\circ}^{۱} (\sinh x)\sin wx dx = \frac{۱}{\pi}\int_{\circ}^{۱} (e^{x})\sin wx dx - \frac{۱}{\pi}\int_{\circ}^{۱} (e^{-x})\sin wx dx$$

$$\Longrightarrow b(w) = \frac{۱}{\pi}[\frac{e^{x}}{۱ + w^{۲}}(\sin wx + w\cos wx) - \frac{e^{-x}}{۱ + w^{۲}}(-\sin wx + w\cos wx)]_{\circ}^{۱}$$

$$\Longrightarrow b(w) = \frac{۱}{\pi(۱ + w^{۲})}[e(\sin w + w\cos w) - e^{-۱}(-\sin w + w\cos w)]$$

$$f(x)=\int_0^\infty [a(w)\cos wx+b(w)\sin wx]dx$$

$$\Longrightarrow f(x)=\frac{2}{\pi^2(1+w^2)}\int_0^\infty [(e(\sin w+w\cos w)-e^{-1}(-\sin w+w\cos w))\cos wx]dx$$

---

(۳

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & |x|<\pi \\ 0 & |x|>\pi \end{cases}$$

تابع زوج است پس داریم $b(w)=0$

$$a(w)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos wxdx$$

$$\Longrightarrow a(w)=\frac{2}{\pi}\int_0^a (x^2-1)\cos wxdx=\frac{2}{\pi}[x^2\frac{1}{w}\sin wx+2x\frac{1}{w^2}\cos wx-\frac{2}{w^3}\sin wx-\frac{\sin wx}{w}]_0^\pi$$

$$\Longrightarrow a(w)=\frac{2}{\pi}(\frac{\pi^2\sin w\pi}{w}+\frac{2\pi\cos w\pi}{w^2}-\frac{2\sin w\pi}{w^3}-\frac{\sin w\pi}{w})$$

$$f(x)=\int_0^\infty [a(w)\cos wx+b(w)\sin wx]dx$$

$$\Longrightarrow f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty [(\frac{\pi^2\sin w\pi}{w}+\frac{2\pi\cos w\pi}{w^2}-\frac{2\sin w\pi}{w^3}-\frac{\sin w\pi}{w})\cos wx]dx$$

---

(۴

$$f(x)=\frac{\sin x}{x}\quad,\quad f(-x)=-f(x)$$

تابع فرد است پس داریم $a(w) = ۰$

$$b(w) = \frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\infty} f(x)\sin wx dx$$

$$\Longrightarrow b(w) = \frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\pi}(\frac{\sin x}{x})\sin wx dx = -\frac{۱}{\pi}\int_{۰}^{\pi}\frac{\cos(۱+w)x}{x}dx + \frac{۱}{\pi}\int_{۰}^{\pi}\frac{\cos(۱-w)x}{x}dx$$

---

۵)

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & ۰ < x \leq \pi \\ ۰ & x > \pi \end{cases}$$

تابع فرد است پس داریم $a(w) = ۰$

$$b(w) = \frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\infty} f(x)\sin wx dx$$

$$\Longrightarrow b(w) = \frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\pi}(\sin x)\sin wx dx = -\frac{۱}{\pi}\int_{۰}^{\pi}(\cos(۱+w)x - \cos(۱-w)x)dx$$

$$\Longrightarrow b(w) = -\frac{۱}{\pi}[\frac{۱}{۱+w}\sin(۱+w)x - \frac{۱}{۱-w}\sin(۱-w)x]_{۰}^{\pi} = -\frac{۱}{\pi}[\frac{\sin(۱+w)\pi}{۱+w} - \frac{\sin(۱-w)\pi}{۱-w}]$$

$$f(x) = \int_{۰}^{\infty}[a(w)\cos wx + b(w)\sin wx]dx$$

$$\Longrightarrow f(x) = \int_{۰}^{\infty}[(-\frac{۱}{\pi}[\frac{\sin(۱+w)\pi}{۱+w} - \frac{\sin(۱-w)\pi}{۱-w}])\sin wx]dx$$

---

٦)

$$f(x) = \begin{cases} ۱ & -\pi < x < ۰ \\ \sin x & ۰ < x < \pi \\ ۰ & |x| > \pi \end{cases}$$

$$a(w) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos wx dx$$

$$\Longrightarrow a(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^0 (1)\cos wx dx + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\sin x)\cos wx dx$$

$$\Longrightarrow a(w) = \frac{1}{\pi}[\frac{\sin wx}{w}]_{-\pi}^0 + \frac{1}{2\pi}[-\frac{\cos(1+w)x}{(1+w)} - \frac{\cos(1-w)x}{(1-w)}]_0^\pi$$

$$\Longrightarrow a(w) = \frac{1}{\pi}[\frac{\sin w\pi}{w}] + \frac{1}{2\pi}[-\frac{\cos(1+w)\pi}{(1+w)} - \frac{\cos(1-w)\pi}{(1-w)} + \frac{1}{(1+w)} + \frac{1}{(1-w)}]$$

$$\Longrightarrow a(w) = \frac{1}{\pi}[\frac{\sin w\pi}{w}] + \frac{1}{2\pi}[\frac{1-\cos(1+w)\pi}{(1+w)} + \frac{1-\cos(1-w)\pi}{(1-w)}]$$

$$b(w) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin wx dx$$

$$\Longrightarrow b(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^0 (1)\sin wx dx + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\sin x)\sin wx dx$$

$$\Longrightarrow b(w) = \frac{1}{\pi}[-\frac{\cos w\pi}{w}] + \frac{1}{2\pi}[\frac{\sin(1+w)\pi}{1+w} - \frac{\sin(1-w)\pi}{1-w}]$$

$$f(x) = \int_0^\infty [a(w)\cos wx + b(w)\sin wx]dx$$

$$f(x) = \int_0^\infty ([\frac{\sin w\pi}{w}] + \frac{1}{2}[\frac{1-\cos(1+w)\pi}{(1+w)} + \frac{1-\cos(1-w)\pi}{(1-w)}])\cos wx$$

$$+([-\frac{\cos w\pi}{w}] + \frac{1}{2}[\frac{\sin(1+w)\pi}{1+w} - \frac{\sin(1-w)\pi}{1-w}])\sin wx]dx$$

---

<u>۷</u>)

$$f(x)=e^{-x}+e^{-2x}\ ,\ ,\ x\geq 0\ ,\ f(-x)=f(x)$$

تابع زوج است پس داریم $b(w)=0$

$$a(w)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos wx dx$$

$$a(w)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty (e^{-x}+e^{-2x})\cos wx dx=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty (e^{-x})\cos wx dx+\frac{2}{\pi}\int_0^\infty (e^{-2x})\cos wx dx$$

$$a(w)=[\frac{e^{-x}}{1+w^2}(-\cos wx+w\sin wx)+\frac{e^{-2x}}{4+w^2}(-2\cos wx+w\sin wx)]_0^\infty$$

$$\Longrightarrow a(w)=\frac{2}{\pi}(\frac{1}{1+w^2}+\frac{2}{4+w^2})=\frac{6(2+w^2)}{\pi(1+w^2)(4+w^2)}$$

$$f(x)=\int_0^\infty [a(w)\cos wx+b(w)\sin wx]dx$$

$$f(x)=\frac{6}{\pi}\int_0^\infty [(\frac{(2+w^2)}{(1+w^2)(4+w^2)})\cos wx]dx$$

---

۱۲)انتگرال فوریه تابع $f(x)=\begin{cases}\cos x & \mid x\mid<\frac{\pi}{2}\\ 0 & \mid x\mid>\frac{\pi}{2}\end{cases}$ را یافته و به کمک آن مقدار انتگرال $\int_0^\infty \frac{\cos\frac{\pi}{2}x}{1-x^2}dx$ را محاسبه کنید.

تابع زوج است پس داریم $b(w)=0$

$$a(w)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos wx dx$$

$$\Longrightarrow a(w)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)\cos wx dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\cos(1+w)x+\cos(1-w)x]dx$$

$$\Longrightarrow a(w)=\frac{۱}{\pi}[\frac{\sin(۱+w)\frac{\pi}{۲}}{۱+w}+\frac{\sin(۱-w)\frac{\pi}{۲}}{۱-w}]$$

$$f(x)=\int_{۰}^{\infty}[a(w)\cos wx+b(w)\sin wx]dx$$

$$\Longrightarrow f(x)=\int_{۰}^{\infty}[(\frac{۱}{\pi}[\frac{\sin(۱+w)\frac{\pi}{۲}}{۱+w}+\frac{\sin(۱-w)\frac{\pi}{۲}}{۱-w}])\cos wx]dx$$

---

۱۳) ثابت کنید که تابع $f(x)=\begin{cases}\sin x & ۰\leq x\leq \pi\\ ۰ & x>۰ \; or \; x<۰\end{cases}$ دارای انتگرال فوریه است و انتگرال فوریه آن را بدست آورید.

تابع فرد است پس داریم $a(w)=۰$

$$b(w)=\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\infty}f(x)\sin wx dx$$

$$\Longrightarrow b(w)=\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\pi}(\sin x)\sin wx dx=-\frac{۱}{\pi}\int_{۰}^{\pi}(\cos(۱+w)x-\cos(۱-w)x)dx$$

$$\Longrightarrow b(w)=-\frac{۱}{\pi}[\frac{\sin(۱+w)x}{۱+w}-\frac{\sin(۱-w)x}{۱-w}]_{۰}^{\pi}=-\frac{۱}{\pi}[\frac{\sin(۱+w)\pi}{۱+w}-\frac{\sin(۱-w)\pi}{۱-w}]$$

$$f(x)=\int_{۰}^{\infty}[a(w)\cos wx+b(w)\sin wx]dx$$

$$\Longrightarrow f(x)=-\frac{۱}{\pi}\int_{۰}^{\infty}[(\frac{\sin(۱+w)\pi}{۱+w}-\frac{\sin(۱-w)\pi}{۱-w})\sin wx]dx$$

---

۱۵) درستی یا عدم درستی تساوی های زیر را بررسی کنید.

۱)

$$\int_{۰}^{\infty}\frac{w^{۳}\sin wx}{w^{۴}+۴}dw=\frac{\pi}{۲}e^{-x}\cos x \quad x>۰ \qquad f(-x)=-f(x)$$

تابع را چنین اختیار می کنیم:

$$f(x) = \frac{\pi}{۲} e^{-x} \cos x$$

$$b(w) = \frac{۲}{\pi} \int_{۰}^{\infty} f(x) \sin wx dx$$

$$\Longrightarrow b(w) = \frac{۲}{\pi} \int_{۰}^{\infty} (\frac{\pi}{۲} e^{-x} \cos x) \sin wx dx = \frac{۱}{۲} \int_{۰}^{\infty} (\sin (۱ + w)x - \sin (۱ - w)x) e^{-x} dx$$

$$b(w) = \frac{۱}{۲} [\frac{۱ + w}{۱ + (۱ + w)^{۲}} - \frac{۱ - w}{۱ + (۱ - w)^{۲}}] = \frac{w^{۳}}{w^{۴} + ۱}$$

$$f(x) = \frac{\pi}{۲} e^{-x} \cos x = \int_{۰}^{\infty} (\frac{w^{۳}}{w^{۴} + ۴} \sin wx) dw$$

---

۲)

$$\int_{۰}^{\infty} \frac{\cos wx}{۱ + w^{۲}} dx = \frac{\pi}{۲}\ e^{-x} \quad x > ۰ \qquad f(-x) = f(x)$$

تابع را چنین اختیار می کنیم:

$$f(x) = \frac{\pi}{۲}\ e^{-x}$$

با توجه به شرایط مساله تابع را زوج درنظر می گیریم پس داریم $b(w) = ۰$ .

$$a(w) = \frac{۲}{\pi} \int_{۰}^{\infty} f(x) \cos wx dx$$

$$a(w) = \int_{۰}^{\infty} (e^{-x}) \cos wx dx = [\frac{e^{-x}}{۱ + w^{۲}} (-\cos wx + w \sin wx)]_{۰}^{\infty} = \frac{۱}{۱ + w^{۲}}$$

$$f(x) = \int_{0}^{\infty} [a(w) \cos wx + b(w) \sin wx] dx$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} e^{-x} = \int_{0}^{\infty} \frac{\cos wx}{1 + w^{2}} dx$$

---

(۳

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin \pi w \sin wx}{1 - w^{2}} dw = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \sin x & 0 \leq x < \pi \\ 0 & x > \pi \end{cases} \qquad f(-x) = -f(x)$$

با توجه به شرایط مساله تابع را فرد درنظر می گیریم پس داریم $a(w) = 0$ .

$$b(w) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} f(x) \sin wx dx$$

$$\Longrightarrow b(w) = \int_{0}^{\pi} (\sin x) \sin wx dx = -\frac{1}{2} \int_{0}^{\pi} (\cos (1 + w)x - \cos (1 - w)x) dx$$

$$\Longrightarrow b(w) = -\frac{1}{2} [\frac{(\sin (1 + w)x}{1 + w} - \frac{\sin (1 - w)x}{1 - w})]_{0}^{\pi} = -\frac{1}{2} [\frac{(\sin (1 + w)\pi}{1 + w} - \frac{\sin (1 - w)\pi}{1 - w})]$$

$$f(x) = \int_{0}^{\infty} [a(w) \cos wx + b(w) \sin wx] dx$$

$$f(x) = \int_{0}^{\infty} [(-\frac{1}{2} [\frac{(\sin (1 + w)\pi}{1 + w} - \frac{\sin (1 - w)\pi}{1 - w})]) \sin wx] dx$$

---

(۴

$$\int_{0}^{\infty} \frac{w \sin wx}{1 + w^{2}} \, dw = \frac{\pi}{2} e^{-x} \quad x > 0$$

$$b(w)=\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\infty}f(x)\sin wx dx$$

$$b(w)=\int_{۰}^{\infty}(e^{-x})\sin wx dx=[\frac{e^{-x}}{۱+w^{۲}}(-\sin wx+w\cos wx)]_{۰}^{\infty}=\frac{w}{۱+w^{۲}}$$

$$f(x)=\int_{۰}^{\infty}[a(w)\cos wx+b(w)\sin wx]dx$$

$$f(x)=\int_{۰}^{\infty}[(\frac{w}{۱+w^{۲}})\sin wx]dx=\frac{\pi}{۲}e^{-x}$$

---

۵)

$$\int_{۰}^{\infty}\frac{\sin \pi w\cos wx}{w^{۲}}dw=\begin{cases} x & ۰\leq x<۱ \\ ۰ & x>۱\end{cases}$$

$$b(w)=\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\infty}f(x)\sin wx dx$$

$$b(w)=\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{۱}(x)\sin wx dx=[\frac{-x}{w}\cos wx+\frac{۱}{w^{۲}}\sin wx]_{۰}^{۱}=\frac{-w\cos w+\sin w}{w^{۲}}$$

$$f(x)=\int_{۰}^{\infty}[(\frac{-w\cos w+\sin w}{w^{۲}})\sin wx]dx$$

---

۱۷)مقدار $A$ را طوری بیابید که تساوی روبرو برقرار باشد.

$$\int_{۰}^{\infty}\frac{w\sin wx}{۱+w^{۲}}\,dw=Ae^{-x}$$

$$b(w)=\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\infty}f(x)\sin wx dx$$

$$\Longrightarrow b(w)=\frac{۲A}{\pi}\int_{\circ}^{\infty}(e^{-x})\sin wx dx=[\frac{e^{-x}}{۱+w^{۲}}(-\sin wx+w\cos wx)]_{\circ}^{\infty}=\frac{۲A}{\pi}(\frac{w}{۱+w^{۲}})$$

$$f(x)=\int_{\circ}^{\infty}[a(w)\cos wx+b(w)\sin wx]dx$$

$$\Longrightarrow f(x)=\frac{۲A}{\pi}\int_{\circ}^{\infty}[(\frac{w}{۱+w^{۲}})\sin wx]dx=\int_{\circ}^{\infty}\frac{w\sin wx}{۱+w^{۲}}\,dw$$

$$\Longrightarrow \frac{۲A}{\pi}=۱\Longrightarrow A=\frac{\pi}{۲}$$

---

تمرین ۱۹:انتگرال فوریه سینوسی و کسینوسی تابع $e^{-x}$ را پیدا کنید

$$a(w)=\frac{۱}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)coswxdx=\frac{۱}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x}coswxdx$$

با دو بار جز به جز داریم

$$(\frac{w}{\pi w^{۲}+۱}e^{-x}(sinwx-\frac{۱}{w}coswx)|_{\circ}^{\infty})=\frac{۱}{\pi w^{۲}+۱}\rightarrow a(w)=\frac{۱}{\pi w^{۲}+۱}$$

$$f(x)=\int_{\circ}^{\infty}\frac{۱}{\pi w^{۲}+۱}coswxdw$$

$$b(w)=\frac{۱}{\pi}\int_{\circ}^{\infty}e^{x}sinwxdx=$$

با دو بار جز به جز داریم

$$\frac{-e^{-x}}{\pi w}(coswx+\frac{۱}{w}sinwx)|_{\circ}^{\infty}=\frac{۱}{\pi w}\rightarrow b(w)=\frac{۱}{\pi w}$$

$$f(x)=\int_{\circ}^{\infty}\frac{۱}{\pi w}sinwxdx$$

---

تمرین ۲۰: هیچ کدام از توابع سری فوریه ندارند زیرا متناوب نیستند

$f_2, f_3, f_5$دارای بسط نیم دامنه کسینوسی

$f_1$بسط نیم دامنه‌سینوسی

$f_3, f_5$دارای انتگرال فوریه و انتگرال فوریه کسینوسی هستند

---

۲۱) تبدیل فوریه سینوسی و کسینوسی تابع $f(x) = e^{-2x}$ را بیابید.

$$f(x) = e^{-2x} \Longrightarrow F_s[f(x)] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-2x} \sin wx dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} [\frac{e^{-2x}}{4 + w^2}(-2 \sin wx - w \cos wx)]_0^{\infty}$$

$$\Longrightarrow F_s[f(x)] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\frac{w}{4 + w^2})$$

$$f(x) = e^{-2x} \Longrightarrow F_c[f(x)] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-2x} \cos wx dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} [\frac{e^{-2x}}{4 + w^2}(-2 \cos wx + w \sin wx)]_0^{\infty}$$

$$\Longrightarrow F_c[f(x)] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\frac{2}{4 + w^2})$$

---

۲۲) تبدیل فوریه سینوسی تابع $f(x) = e^{-|x|}$ و $0 \leq x < \infty$ را بدست آورید و به کمک آن انتگرال $\int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{1+x^2} dx$ را محاسبه کنید.

در بازه $0 \leq x < \infty$ تابع $f(x)$ به صورت $f(x)=e^{-x}$ می باشد پس داریم:

$$f(x)=e^{-x} \Longrightarrow F_s[f(x)]=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-x}\sin wx dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}[\frac{e^{-x}}{1+w^2}(-\sin wx - w\sin wx)]_0^{\infty}$$

$$\Longrightarrow F_s[f(x)]=\bar{f}_s(w)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}(\frac{w}{1+w^2})$$

$$f(x)=F_s^{-1}[\bar{f}_s(w)]=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{w}{1+w^2}\sin wx)dw=\int_0^{\infty}(\frac{w}{1+w^2}\sin wx)dw=\frac{\pi}{2}e^{-x}$$

$$x=1 \Longrightarrow \int_0^{\infty}(\frac{w}{1+w^2}\sin w)dw=\frac{\pi}{2e}$$

---

۲۳) تبدیل فوریه تابع $f(x)=\begin{cases} e^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$ را بیابید.

با توجه به معادله باید از تبدیل فوریه نامتناهی استفاده کرد پس داریم :

$$F[f(x)]=\bar{f}(w)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}(e^{-x}e^{-iwx})dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} e^{-(1+iw)x}dx$$

$$\Longrightarrow F[f(x)]=\bar{f}(w)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}[-\frac{e^{-(1+iw)x}}{1+iw}]_0^{\infty}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}(1+iw)}=\frac{1-iw}{\sqrt{2\pi}(1+w^2)}$$

---

تمرین ۲۴:

$$f_s=\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\int_{۰}^{\infty}(\frac{۱}{x}-\frac{cos\pi x}{x})sinwxdx), f_c=\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\int_{۰}^{\infty}(\frac{۱}{۱+x^{۲}})coswxdx$$

$$f_s=\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\int_{۰}^{\infty}(\frac{sinwx}{x}-\frac{cos\pi xsinwx}{x})dx)=$$

با توجه به اینکه داریم $\int_{۰}^{\infty}\frac{sinx}{x}dx=\frac{\pi}{۲}$ نتیجه می گیریم :

$$\int_{۰}^{\infty}\frac{sinwx}{x}dx=w^{۲}\frac{\pi}{۲},\int_{۰}^{\infty}\frac{cos\pi xsinwx}{x}dx=$$

$$\frac{۱}{۲}\int_{۰}^{\infty}\frac{sin(\pi-w)x+sin(\pi-wx)}{x}dx=\frac{\pi}{۴}((\pi+w^{۲})^{۲}+(\pi+w^{۲})^{۲})=\frac{\pi}{۲}(\pi^{۲}+w^{۲})$$

$$f_s=\sqrt{\frac{\pi}{۲}}(\pi^{۲}+۲w^{۲})$$

$$F_c(\frac{۱}{۱+x^{۲}})=\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\int_{۰}^{\infty}\frac{۱}{۱+x^{۲}}coswxdx=$$

می دانیم $۰<x<\infty$ $\int_{۰}^{\infty}\frac{۱}{۱+x^{۲}}coswxdx=\frac{\pi}{۲}e^{-w}$ درنتیجه داریم :

$$F_c=\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\int_{۰}^{\infty}\frac{۱}{۱+x^{۲}}coswxdx=\sqrt{\frac{۲}{\pi}}(\frac{\pi}{۲}e^{-w})=\sqrt{\frac{\pi}{۲}}e^{-w}$$

تمرین ۲۵:

۱) $u_{yy}+۱۶u=۰$

$$m^{۲}+۱۶=۰\rightarrow m=\pm۴\rightarrow u=c_{۱}cos۴y+c_{۲}sin۴y$$

۳) $u_x+u_y=۲(x+y)u$

$$F'G+FG'=۲(x+y)FG\rightarrow\frac{F'}{F}-۲x=۲y-\frac{G'}{G}=k\rightarrow|^{F'-(۲x+k)F=۰}_{G'+(k-۲y)G=۰}$$

$$\frac{dF}{F}=(۲x+k)dx\rightarrow F=e^{(x^۲+kx)},\frac{dG}{G}=(۲y_k)dy\rightarrow G=e^{(y^۲-ky)}$$

$$u=e^{x^۲+y^۲+k(x+y)}$$

۴) $u_{xx}+u_{yy}=۰$

$$F''G+G''f=۰\rightarrow F''-Fk=۰,G''+Gk=۰\rightarrow F=c_۱e^{kx}+c_۲e^{-kx},G=c_۳cosky+c_۴sinky$$

$$u=(c_۱e^{kx}+c_۲e^{-kx})(c_۳cosky+c_۴sinky)$$

۵) $u_{xx}+u_y+۴u=۰$

$$F''G+G'F+۴F'G=۰\quad G(F''+۴F')+G'F=۰\quad \frac{F''+۴F'}{F}=-\frac{G'}{G}=k$$

$$\rightarrow F''+۴F'-Fk=۰,G'+kG=۰$$

اگر برای تابع F جواب های مختلط در نظر بگیریم داریم

$$m=\frac{-۴\pm\sqrt{۱٦-۴k}}{۲}\quad F=c_۱cosmx+c_۲sinmx,G=e^{-ky}$$

$$u=(c_۱cosmx+c_۲sinmx)e^{-ky}$$

تمرین ۲٦)

$$yu_{xy}=xu_{xx}+u_x\ ,\ v=y\ ,\ z=xy$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=y\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} = y[\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z \partial v}\frac{\partial v}{\partial x}] = y^۲ \frac{\partial^۲ u}{\partial^۲ z}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} + y[\frac{\partial u}{\partial^۲ z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z \partial v}\frac{\partial v}{\partial y}] =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial z} + xy\frac{\partial^۲ u}{\partial z^۲} + y\frac{\partial u}{\partial z \partial v}$$

$$y[\frac{\partial u}{\partial z} + xy\frac{\partial^۲ u}{\partial z^۲} + y\frac{\partial u}{\partial z \partial v} = x[y^۲ \frac{\partial^۲ u}{\partial z^۲}] + y\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$y^۲ \frac{\partial u}{\partial z \partial v} = ۰ \rightarrow \frac{\partial u}{\partial z \partial v} = ۰ \rightarrow \frac{\partial u}{\partial z} = h(z)$$

$$\rightarrow u = \int h(z) dz + \psi(v) = \varphi(z) + \psi(z)$$

$$u(x,t) = \varphi(xy) + \psi(y)$$

۲۷) هر یک از مسایل زیر را حل کنید

$$(a)\begin{cases} u_{tt}-c^{۲}u_{xx}=\circ & \circ<x<۱, t>\circ \\ \\ u(x,\circ)=k\sin^{۲}\pi x \\ u_t(x,\circ)=\circ \\ u(\circ,t)=\circ \\ u(۱,t)=\circ \end{cases}$$

فرض می کنیم $u(x,t)$ ترکیبی از ضرب دو تابع به صورت زیر باشد:

$$u(x,t)=F(x)G(t)\Longrightarrow \frac{F\ddot{G}}{FG}=c^{۲}\frac{F''G}{FG}\Longrightarrow \frac{\ddot{G}}{c^{۲}G}=\frac{F''}{F}=k$$

برای حل معادله دیفرانسیل $F''-kF=\circ$ داریم : فرض می کنیم $k>\circ$ پس $k=\mu^{۲}$

$$F=a\cosh\mu x+b\sinh\mu x$$

$$u(\circ,t)=F(\circ)G(t)=\circ\Longrightarrow F(\circ)=\circ\Longrightarrow a=\circ$$

$$u(۱,t)=F(۱)G(t)=\circ\Longrightarrow F(۱)=\circ\Longrightarrow b=\circ$$

پس

$$u(x,t)=\circ$$

که غیر قابل قبول است .

حال فرض می کنیم $k=\circ$ پس داریم :

$$k=\circ\Longrightarrow F''=\circ\Longrightarrow F=ax+b$$

$$u(۰,t)=F(۰)G(t)=۰\Longrightarrow F(۰)=۰\Longrightarrow a=۰$$

$$u(۱,t)=F(۱)G(t)=۰\Longrightarrow F(۱)=۰\Longrightarrow b=۰$$

پس

$$u(x,t)=۰$$

که غیر قابل قبول است .
حال فرض می کنیم $k<۰$ پس $k=-p^{۲}$

$$F=a\cos px+b\sin px$$

$$u(۰,t)=F(۰)G(t)=۰\Longrightarrow F(۰)=۰\Longrightarrow a=۰$$

$$u(۱,t)=F(۱)G(t)=۰\Longrightarrow F(۱)=۰\Longrightarrow b\sin p=۰\Longrightarrow p=n\pi$$

پس

$$F(x)=b\sin n\pi x$$

$$\ddot{G}-kc^{۲}G=۰\Longrightarrow \ddot{G}+p^{۲}c^{۲}G=۰\Longrightarrow \ddot{G}+\underbrace{p^{۲}n^{۲}\pi^{۲}}_{\lambda_n^{۲}}G=۰\Longrightarrow G(t)=\grave{a}\cos\lambda_n t+\grave{b}\sin\lambda_n t$$

$$u(x,t)=F(x)G(t)=b\sin n\pi x(\grave{a}\cos\lambda_n t+\grave{b}\sin\lambda_n t)=\sum_{n=۱}^{\infty}\sin n\pi x(a_n\cos\lambda_n t+b_n\sin\lambda_n t)$$

$$u(x,۰)=k\sin^{۲}\pi x\Longrightarrow\sum_{n=۱}^{\infty}a_n\sin n\pi x\Longrightarrow a_n=۲k\int_{۰}^{۱}\sin^{۲}\pi x\sin n\pi x\ dx$$

$$\Longrightarrow a_n=-\frac{k}{۲}\int_{۰}^{۱}(\sin(n+۲)\pi x+\sin(n-۲)\pi x)\,dx=\frac{k}{۲}[\frac{\cos(n+۲)\pi x}{(n+۲)\pi}+\frac{\cos(n-۲)\pi x}{(n-۲)\pi})]_{۰}^{۱}$$

$$\Longrightarrow a_n=-\frac{k}{۲}[\frac{(-۱)^n-۱}{(n+۲)\pi}+\frac{(-۱)^n-۱}{(n-۲)\pi}]$$

$$u_t(x,۰)=\sum_{n=۱}^{\infty}(-a_n\lambda_n\sin\lambda_n t+b_n\lambda_n\cos\lambda_n t)\sin n\pi x=۰\Longrightarrow b_n=۰$$

$$u(x,t)=-\frac{k}{۲}\sum_{n=۱}^{\infty}\sin n\pi x([\frac{(-۱)^n-۱}{(n+۲)\pi}+\frac{(-۱)^n-۱}{(n-۲)\pi}]\cos\lambda_n t)$$

۲۷ . هر یک از مسائل زیر را حل کنید .

$$۱)\ u_{tt}-c^{۲}u_{xx}=۰\qquad ۰\ \le\ x\ \le ۱\qquad t\ge ۰$$

$$u(x,۰)=Ksin^{۲}(\pi x)\qquad u_t(x,۰)=۰$$

$$u(۰,t)=۰\qquad ,\qquad u(۱,t)=۰$$

حل :

$$u(x,t)=F(x)G(t)\qquad\Rightarrow FG``=C^{۲}GF``\qquad\Rightarrow\frac{G``}{C^{۲}G}\frac{F``}{F}=K$$

چون شرایط مرزی صفر است بایستی $K \leq \circ$

$$F" - KF = \circ \qquad G" - KC^{۲}G = \circ$$

$$F" + P^{۲}F = \circ \Rightarrow F(x) = acos(Px) + bsin(Px)$$

$$u(\circ, t) = F(\circ)G(t) = \circ \Rightarrow F(\circ) = \circ \Rightarrow a = \circ$$

$$u(۱, t) = F(۱)G(t) = \circ \Rightarrow F(۱) = \circ \Rightarrow bsin(P) = \circ \Rightarrow P = n\pi \Rightarrow F(x) = bsin(n\pi x)$$

$$G"+P^{۲}C^{۲}G = \circ \Rightarrow G"+n^{۲}\pi^{۲}C^{۲}G = \circ \Rightarrow G(t) = a^{*}cos(\lambda_n t)+b^{*}sin(\lambda_n t)$$

که در آن $\lambda_n^{۲} = n^{۲}\pi^{۲}C^{۲}$

$$u(x, t) = F(x)G(t) = b(a^{*}cos(\lambda_n t) + b^{*}sin(\lambda_n t))sin(n\pi x)$$

$$u(x, t) = \sum_{۱}^{\infty}(a_n cos(\lambda_n t) + b_n sin(\lambda_n t))sin(n\pi x)$$

$$u(x, \circ) = Ksin^{۲}(\pi x) \Rightarrow \sum_{۱}^{\infty} a_n sin(n\pi x) = Ksin^{۲}(\pi x)$$

$$\Rightarrow a_n = ۲\int_{\circ}^{۱} Ksin^{۲}(\pi x)sin(n\pi x)dx$$

$$u_t(x, \circ) = \circ \Rightarrow \sum_{۱}^{\infty}(-a_n\lambda_n sin(\lambda_n t) + b_n\lambda_n cos(\lambda_n t))sin(n\pi x) = \circ$$

$$\sum_{۱}^{\infty} b_n\lambda_n sin(n\pi x) = \circ \Rightarrow b_n = \circ$$

$$(۲)\begin{cases} u_t = c^۲ u_{xx} & ۰ < x < ۱ \quad , \quad t > ۰ \\ \\ u(x,۰) = ۵- \mid x - ۵ \mid \\ u(۰,t) = ۰ \\ u(۱,t) = ۰ \end{cases}$$

فرض می کنیم $u(x,t)$ ترکیبی از ضرب دو تابع به صورت زیر باشد:

$$u(x,t) = F(x)G(t) \Longrightarrow \frac{F\dot{G}}{FG} = c^۲ \frac{F''G}{FG} \Longrightarrow \frac{\dot{G}}{c^۲ G} = \frac{F''}{F} = k$$

برای حل معادله دیفرانسیل $F''-kF = ۰$ داریم : فرض می کنیم $k > ۰$ پس $k = \mu^۲$

$$F = a\cosh\mu x + b\sinh\mu x$$

$$u(۰,t) = F(۰)G(t) = ۰ \Longrightarrow F(۰) = ۰ \Longrightarrow a = ۰$$

$$u(۱,t) = F(۱)G(t) = ۰ \Longrightarrow F(۱) = ۰ \Longrightarrow b = ۰$$

پس

$$u(x,t) = ۰$$

که غیر قابل قبول است .

حال فرض می کنیم $k = ۰$ پس داریم :

$$k = 0 \Longrightarrow F'' = 0 \Longrightarrow F = ax + b$$

$$u(0, t) = F(0)G(t) = 0 \Longrightarrow F(0) = 0 \Longrightarrow a = 0$$

$$u(1, t) = F(1)G(t) = 0 \Longrightarrow F(1) = 0 \Longrightarrow b = 0$$

پس

$$u(x, t) = 0$$

که غیر قابل قبول است .
حال فرض می کنیم $k < 0$ پس $k = -p^2$

$$F = a \cos px + b \sin px$$

$$u(0, t) = F(0)G(t) = 0 \Longrightarrow F(0) = 0 \Longrightarrow a = 0$$

$$u(1, t) = F(1)G(t) = 0 \Longrightarrow F(1) = 0 \Longrightarrow b \sin p = 0 \Longrightarrow p = n\pi$$

پس

$$F(x) = b \sin n\pi x$$

$$\dot{G}-kc^{۲}G=\circ \Longrightarrow \dot{G}-p^{۲}c^{۲}G=\circ \Longrightarrow \dot{G}-\underbrace{p^{۲}n^{۲}\pi^{۲}}_{\lambda_n^{۲}}G=\circ \Longrightarrow G_n(t)=e^{-\lambda_n^{۲}t}$$

$$u(x,t)=F(x)G(t)=b\sin n\pi x(e^{-\lambda_n^{۲}t})=\sum_{n=۱}^{\infty} b_n \sin n\pi x(e^{-\lambda_n^{۲}t})$$

$$u(x,\circ)=۵-\mid x-۵\mid \Longrightarrow \sum_{n=۱}^{\infty} b_n \sin n\pi x = x$$

$$\Longrightarrow b_n=۲\int_{\circ}^{۱} x\sin n\pi x dx=۲[-x\frac{۱}{n\pi}\cos n\pi x+\frac{۱}{n^{۲}\pi^{۲}}\sin n\pi x]_{\circ}^{\infty}=۲\frac{(-۱)^{n+۱}}{n\pi}$$

$$u(x,t)=۲\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n+۱}}{n\pi}\sin n\pi x(e^{-\lambda_n^{۲}t})$$

### تمرین ۵—۲۷

$$\begin{cases} u_t=c^{۲}u_{xx} & \circ<x<\infty \quad t>\circ \\ u(x,\circ)=\begin{cases} x & \circ<x<\pi \\ \circ & x>\pi \end{cases} & u(\circ,t)=\circ \end{cases}$$

$$u(x,t)=\int_{\circ}^{\infty} G(w,t)sinwxdw$$

$$G'+c^{۲}w^{۲}G=\circ \rightarrow G=a_ne^{-c^{۲}w^{۲}t} \rightarrow u(x,t)=\int_{\circ}^{\infty}(a_ne^{-c^{۲}w^{۲}t})sinwxdw$$

$$u(x,\circ)=\int_{\circ}^{\pi} asinwxdw=\begin{cases} x & \circ<x<\pi \\ \circ & x>\pi \end{cases}$$

$$a_n=\frac{۲}{\pi}\int_{\circ}\pi\frac{۱}{w}(-\pi cosw\pi+\frac{۱}{w}sinw\pi)dw$$

۳۱)معادلات دیفرانسیل جزیی زیر را حل کنید.

۱)

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=x+\sin y & 0<x<\pi\ ,\ 0<y<\pi \\ u(x,0)=x^2-1 & u(x,\pi)=1\ ,\ 0\leq x\leq\pi \\ u(0,y)=y & u_x(\pi,y)=1-y,\ 0\leq y\leq\pi \end{cases}$$

معادله فوق ناهمگن با شرایط مرزی غیر صفر می باشد.پس ابتدا باید با اعمال تغییر متغیر $u(x,y)=v(x,y)+ax+b$ شرایط مرزی را صفر نماییم .

$$u(0,y)=y \Longrightarrow b=y \quad \text{and} \quad u_x(\pi,y)=1-y \Longrightarrow a=1-y$$
$$\Longrightarrow u(x,y)=v(x,y)+(1-y)x+y$$

حال با جایگذاری این معادله در معادله اصلی داریم :

$$\begin{cases} v_{xx}+v_{yy}=x+\sin y & 0<x<\pi\ ,\ 0<y<\pi \\ v(x,0)=x^2-x-1 & v(x,\pi)=\pi(x-1)\ ,\ 0\leq x\leq\pi \\ v(0,y)=0 & v_x(\pi,y)=0,\ 0\leq y\leq\pi \end{cases}$$

با توجه به شرایط مرزی و $\lambda_n=\frac{2n-1}{2}$ داریم :

$$v(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}G_n(y)\sin\lambda_n x$$

$$v_{xx}+v_{yy}=\sum_{n=1}^{\infty}-\lambda_n^2G_n(y)\sin\lambda_n x+G_n''(y)\sin\lambda_n x=x+\sin y$$

$$G_n''(y)-\lambda_n^2G_n(y)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+\sin y)\sin\lambda_n x dx$$

$$G_n(y) = a_n e^{\lambda_n x} + b_n e^{-\lambda_n x} + Ax$$

با توجه به شرایط مرزی ومقدار دهی داریم $a_n = \frac{(-1)^n}{4n^2-1}$ و $b_n = \frac{(-1)^n+1}{(n^2-1)}$ و $A = \frac{2\sin t}{\pi}$

*******************************************************

۲)

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 1 & 0 < x < 1 \ , \ t > 0 \\ u(x,0) = x(1-x) & u_t(x,0) = 1 \ , \ 0 \le x \le \pi \\ u(0,t) = t & u(1,t) = \sin t, \quad t \ge 0 \end{cases}$$

معادله فوق ناهمگن با شرایط مرزی غیر صفر می باشد.پس ابتدا باید با اعمال تغییر متغیر $u(x,t) = v(x,t) + (\sin t - t)x + t$ شرایط مرزی را صفر نماییم بعد از جایگذاری معادله دیفرانسیل جزیی جدید با شرایط مرزی صفر به صورت زیر است :

$$\begin{cases} v_{tt} - v_{xx} = 1 + (\sin t)x & 0 < x < 1 \ , \ t > 0 \\ v(x,0) = x(1-x) & u_t(x,0) = (\cos t - 1)x \ , \ 0 \le x \le \pi \\ v(0,t) = 0 & v(1,t) = 0, \quad t \ge 0 \end{cases}$$

با توجه به شرایط مرزی داریم :

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) \sin nx$$

$$v_{tt} - v_{xx} = \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{G}_n(t) \sin nx + n^2 G_n(t) \sin nx = 1 + (\sin t)x$$

$$\Longrightarrow \ddot{G}_n(t)+n^2 G_n(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (1+(\sin t)x) \sin nx = \frac{2}{\pi}[\frac{(-1)^{(n+1)}(1+\pi \sin t)+1}{n}]$$

$$\Longrightarrow G_n(t) = a_n \cos nt + b_n \sin nt + \frac{2}{\pi n^2}[\frac{(-1)^{(n+1)}(1+\pi \sin t)+1}{n}]$$

با توجه به شرایط مرزی ومقدار دهی داریم $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n-1}$ و $b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{3(n^2-1)}$

*******************************************************

۳)

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & 0 < x < \pi \ , \ 0 < y < \pi \\ u_y(x,0) = x & u_y(x,\pi) = 0 \ , \ 0 \le x \le \pi \\ u_x(0,y) = 0 & u_x(\pi,y) = y, \ 0 \le y \le \pi \end{cases}$$

معادله فوق ناهمگن با شرایط مرزی غیر صفر می باشد.پس ابتدا باید با اعمال تغییر متغیر $u(x,y) = v(x,y) - (\frac{y}{2\pi})x^2 + y$ شرایط مرزی را صفر نماییم بعد از جایگذاری معادله دیفرانسیل جزیی جدید با شرایط مرزی صفر به صورت زیر است :

$$\begin{cases} v_{xx} + v_{yy} = \frac{y}{\pi} & 0 < x < \pi \ , \ 0 < y < \pi \\ u_y(x,0) = x + \frac{x^2}{2\pi} - 1 & u_y(x,\pi) = \frac{x^2}{2\pi} - 1 \ , \ 0 \le x \le \pi \\ u_x(0,y) = 0 & u_x(\pi,y) = 0, \ 0 \le y \le \pi \end{cases}$$

با توجه به شرایط مرزی داریم :

$$v(x,y)=\sum_{n=۱}^{\infty}G_n(y)\cos nx \Longrightarrow v_{xx}+v_{yy}=\sum_{n=۱}^{\infty}G''_n(y)\cos nx-n^۲G_n(y)\cos nx=\frac{y}{\pi}$$

$$G''_n(y)-n^۲G_n(y)=\frac{۲}{\pi}\int_{\circ}^{\pi}\frac{y}{\pi}\cos nx dx=\circ \Longrightarrow G_n(y)=a_ne^{ny}+b_ne^{-ny}$$

$$v(x,y)=\sum_{n=۱}^{\infty}(a_ne^{ny}+b_ne^{-ny})\cos nx$$

با توجه به شرایط مرزی ومقدار دهی داریم $a_n=\frac{۴(-۱)^n}{۲\pi n-۱}$ و $b_n=\frac{۲}{\pi}[\frac{(-۱)^{n+۱}}{(n^۲-۱)}]$

۴)

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=x-y & \circ<x<\pi\ ,\ \circ<y<\pi \\ u_y(x,\circ)=\cos x & u(x,\pi)=\sin x\ ,\ \circ\le x\le\pi \\ u_x(\circ,y)=\circ & u_x(\pi,y)=\circ,\ \circ\le y\le\pi \end{cases}$$

معادله فوق ناهمگن با شرایط مرزی صفر می باشد پس با فرض :

$$u(x,y)=\sum_{n=۱}^{\infty}G_n(y)\cos nx$$

و جایگذاری در معادله اصلی داریم :

$$u_{xx}+u_{yy}=\sum_{n=۱}^{\infty}G''_n(y)\cos nx-n^۲G_n(y)\cos nx=x-y$$

$$\Longrightarrow G''_n(y) - n^2 G_n(y) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x-y)\cos nx dx = \frac{2}{n^2\pi}((-1)^n - 1)$$

$$G_n(y) = (a_n e^{ny} + b_n e^{-ny}) + \frac{2}{n^4\pi}((-1)^n - 1)$$

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}((a_n e^{ny} + b_n e^{-ny}) + \frac{2}{n^4\pi}((-1)^n - 1))\cos nx$$

با توجه به شرایط مرزی ومقدار دهی داریم $a_n = \frac{2}{n^2\pi}((-1)^{n+1}) + \frac{(-1)^n}{2\pi n^2 - 1}$ و $b_n = \frac{2}{n^2\pi}((-1)^n - 1) + [\frac{(-1)^{n+1}}{(n^2-1)}]$

********************************************************

۵)

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & 0 < x < 1\ ,\ 0 < y < 1 \\ u(x,0) = \sin x & u(x,1) = \cos x\ ,\ 0 \le x \le 1 \\ u(0,y) = 0 & u(1,y) = y + 2,\ 1 \le y \le 2 \end{cases}$$

معادله فوق همگن با شرایط مرزی غیر صفر می باشد.پس ابتدا باید با اعمال تغییر متغیر $u(x,y) = v(x,y) + (y+2)x$ شرایط مرزی را صفر نماییم بعد از جایگذاری معادله دیفرانسیل جزیی جدید با شرایط مرزی صفر به صورت زیر است :

$$\begin{cases} v_{xx}+v_{yy}=۰ & ۰<x<۱\ ,\ ۰<y<۱ \\ v(x,۰)=\sin x-۲x & u(x,۱)=\cos x-\frac{۳}{۲}x\ ,\ ۰\leq x\leq ۱ \\ v(۰,y)=۰ & v(۱,y)=۰,\ ۱\leq y\leq ۲ \end{cases}$$

با توجه به شرایط مرزی داریم :

$$v(x,y)=\sum_{n=۱}^{\infty}G_n(y)\sin n\pi x \Longrightarrow v_{xx}+v_{yy}=\sum_{n=۱}^{\infty}G''_n(y)\sin n\pi x-(n\pi)^۲G_n(y)\sin n\pi x=۰$$

$$\Longrightarrow G''_n(y)-(n\pi)^۲G_n(y)=۰ \Longrightarrow G_n(y)=a_ne^{ny}+b_ne^{-ny}$$

$$v(x,y)=\sum_{n=۱}^{\infty}(a_ne^{n\pi y}+b_ne^{-n\pi y})\sin n\pi x$$

با توجه به شرایط مرزی ومقدار دهی داریم $a_n=\frac{۱}{n^۲\pi}((-۱)^{n+۱})+\frac{۲}{۲\pi n^۲-۱}$ و $b_n=\frac{۲((-۱)^n-۱)}{n^۲\pi}+[\frac{(-۱)^n}{n^۲\pi}]$

*******************************************************

۶)

$$\begin{cases} u_t-u_{xx}=۱ & ۰<x<\pi\ ,\ t>۰ \\ u_t(x,۰)=۰ & u(۰,t)=t\ ,\ ,u_x(\pi,t)=۱-۲t\ \ ۰\leq x\leq\pi\ \ ,\ \ t\geq ۰ \end{cases}$$

معادله فوق ناهمگن با شرایط مرزی غیر صفر می باشد.پس ابتدا باید با اعمال تغییر متغیر $u(x,t) = v(x,t) + (1 - 2t)x + t$ شرایط مرزی را صفر نماییم بعد از جایگذاری معادله دیفرانسیل جزیی جدید با شرایط مرزی صفر به صورت زیر است :

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} = 2x & 0 < x < \pi \ , \ t > 0 \\ u_t(x,0) = 2x - 1 \quad u(0,t) = 0 \ , \ , u_x(\pi,t) = 0 & 0 \le x \le \pi \ \ , \ \ t \ge 0 \end{cases}$$

با توجه به شرایط مرزی و $\lambda_n = \frac{2n-1}{2}$ داریم :

$$v(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) \sin \lambda_n x \Longrightarrow v_t - v_{xx} = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{G}_n(t) \sin \lambda_n x + \lambda_n^2 G_n(t) \sin \lambda_n x = 2x$$

$$\dot{G}_n(t) + \lambda_n^2 G_n(t) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin \lambda_n x dx = 4[-\frac{1}{\lambda_n} \sin \frac{2n-1}{2}\pi] = 4[-\frac{1}{\lambda_n}(-1)^{(n+1)}]$$

$$\Longrightarrow G_n(t) = a_n \cos \lambda_n x + b_n \sin \lambda_n x + \frac{4}{\lambda_n^2}[-\frac{1}{\lambda_n}(-1)^{(n+1)}]$$

با توجه به شرایط مرزی ومقدار دهی داریم$a_n = \frac{4}{n^2\pi}((-1)^{n+1}) + \frac{2}{2\pi}$ و $b_n = \frac{((-1)^n)}{n^2\pi} + [\frac{(-1)^n}{n^2\pi}]$

*******************************************************

(۷

$$\begin{cases} u_{tt}+u_{xx}=0 & 0<x<1\ ,\ t>0 \\ u(x,0)=x & u_t(x,0)=0\ ,\ 0\leq x\leq 1 \\ u_{xx}(0,t)=0 & u_x(1,t)=1\ \ ,\ \ t\geq 0 \end{cases}$$

معادله فوق همگن با شرایط مرزی غیر صفر می باشد.پس ابتدا باید با اعمال تغییر متغیر $u(x,t)=v(x,y)+x$ شرایط مرزی را صفر نماییم بعد از جایگذاری معادله دیفرانسیل جزیی جدید با شرایط مرزی صفر به صورت زیر است :

$$\begin{cases} v_{tt}+v_{xx}=0 & 0<x<1\ ,\ t>0 \\ v(x,0)=0 & v_t(x,0)=0\ ,\ 0\leq x\leq 1 \\ v_{xx}(0,t)=0 & v_x(1,t)=0\ \ ,\ \ t\geq 0 \end{cases}$$

با توجه به شرایط مرزی داریم :

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}G_n(t)\cos n\pi x \Longrightarrow v_{tt}+v_{xx}=\sum_{n=1}^{\infty}\ddot{G}_n(t)\cos n\pi x-(n\pi)^2G_n(t)\cos n\pi x=0$$

$$\Longrightarrow \ddot{G}_n(t)-(n\pi)^2G_n(t)=0 \Longrightarrow G_n(t)=a_ne^{n\pi t}+b_ne^{-n\pi t}$$

$$\Longrightarrow v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n e^{n\pi t} + b_n e^{-n\pi t}) \cos n\pi x$$

بعد از اعمال شرایط مرزی داریم $a_n = 0$ و $b_n = \frac{(-1)^n}{n^2\pi}$

*********************************************************

۸)

$$\begin{cases} u_t + u_{xx} = x + t & 0 < x < \pi \ , \ t > 0 \\ u(x,0) = 0 & 0 \leq x \leq \pi \\ u_x(0,t) = 0 & u_x(\pi,t) = 0 \quad , \quad t \geq 0 \end{cases}$$

معادله فوق ناهمگن با شرایط مرزی صفر می باشد پس با فرض :

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) \cos nx$$

و جایگذاری در معادله اصلی داریم :

$$\Longrightarrow u_t + u_{xx} = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{G}_n(t) \cos nx - n^2 G_n''(t) \cos nx = x + t$$

$$\Longrightarrow \dot{G}_n(t) - n^2 G_n''(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (x+t) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} [\frac{(-1)^n - 1}{n^2}]$$

$$\Longrightarrow v(x,t) = a_n e^{nt}$$

*******************************************************

۹)

$$\begin{cases} u_{tt} + ۴u_{xx} = x - ۲t & ۰ < x < \pi \ , \ t > ۰ \\ u(x,۰) = ۰ & u_t(x,۰) = ۰ \ , \ ۰ \leq x \leq \pi \\ u(۰,t) = t & u(\pi,t) = ۲t \ , \ t \geq ۰ \end{cases}$$

معادله فوق ناهمگن با شرایط مرزی غیر صفر می باشد.پس ابتدا باید با اعمال تغییر متغیر $u(x,t) = v(x,t) + (\frac{t}{\pi})x + t$ شرایط مرزی را صفر نماییم بعد از جایگذاری معادله دیفرانسیل جزیی جدید با شرایط مرزی صفر به صورت زیر است :

$$\begin{cases} v_{tt} + ۴v_{xx} = x - ۲t & ۰ < x < \pi \ , \ t > ۰ \\ v(x,۰) = ۰ & v_t(x,۰) = -\frac{x}{\pi} \ , \ ۰ \leq x \leq \pi \\ u(۰,t) = ۰ & u(\pi,t) = ۰ \ , \ t \geq ۰ \end{cases}$$

با توجه به شرایط مرزی داریم :

$$v(x,t) = \sum_{n=۱}^{\infty} G_n(t) \sin nx \Longrightarrow v_{tt} + ۴v_{xx} = \sum_{n=۱}^{\infty} \ddot{G}_n(t) \sin nx - ۴n^۲ G_n(t) \sin nx = x - ۲t$$

$$\ddot{G}_n(t) - ۴n^۲ G_n(t) = \frac{۲}{\pi}\int_۰^{\pi}(x-۲t)\sin nx dx = \frac{۲}{n\pi}[(-۱)^n(\pi+۲t)-۲t]$$

$$G_n(t) = a_n e^{۲nt} + b_n e^{-۲nt} + \frac{۲}{۴n^۳\pi}[(-۱)^n(\pi+۲t)-۲t]$$

$$v(x,t) = \sum_{n=۱}^{\infty}(a_n e^{۲nt} + b_n e^{-۲nt} + \frac{۲}{۴n^۳\pi}[(-۱)^n(\pi+۲t)-۲t])\sin n\pi x$$

بعد از اعمال شرایط مرزی داریم $a_n = \frac{۲(-۱)^{n+۱}}{۴n^۳\pi} - \frac{(-۱)^{n+۱}}{\pi}$ و $b_n = \frac{(-۱)^n}{n^۲\pi} + \frac{۲}{\pi}$

۳۲) مسایل زیر را به کمک تبدیلات فوریه حل کنید.

۱)

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = \begin{cases} ۱+x & ۰<x<\pi \\ ۰ & x>\pi \end{cases} \\ u(x,۰) = \begin{cases} e^x & ۰<x<\pi \\ ۰ & x>\pi \end{cases} , \quad u_x(۰,t)=۰ \quad , \quad t\geq ۰ \end{cases}$$

هرگاه $v(w,t)$ تبدیل کسینوسی نیمه نامتناهی برای $u(x,t)$ باشد داریم :

$$v(w,t) = \sqrt{\frac{۲}{\pi}}\int_۰^{\pi} u(x,t)\cos wx dx$$

با توجه به تبدیل بالا داریم :

$$v_t(w,t)+w^{۲}v(w,t)=\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\int_{\circ}^{\pi}(۱+x)\cos wx dx=\sqrt{\frac{۲}{\pi}}[\frac{۱}{۲}\cos(wx)\pi^{۲}+\cos(wx)\pi]$$

$$v(w,\circ)=\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\int_{\circ}^{\pi}(e^{x})\cos wx dx=\sqrt{\frac{۲}{\pi}}[-\cos(wx)+e^{\pi}\cos(wx)]$$

$$v(w,t)=a(w)e^{-w^{۲}t}+\frac{۲}{\pi w^{۳}}(۱-\cos w\pi)$$

$$a(w)=\frac{۲}{\pi w^{۳}}(\cos w\pi-۱)+۲\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\frac{۱}{w}(-\cos x+\frac{۱}{w}\sin w)$$

*****************************************************

۲)

$$\begin{cases} u_t-u_{xx}=\begin{cases} x-t & |x|<\pi \\ \circ & |x|>\pi \end{cases} \\ u(x,\circ)=\begin{cases} x & |x|<۱ \\ \circ & x>\pi \end{cases} \end{cases}$$

هرگاه $v(w,t)$ تبدیل کسینوسی نامتناهی برای $u(x,t)$ باشد داریم :

$$v(w,t)=\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}u(x,t)e^{-iwx}dx$$

با توجه به تبدیل بالا داریم :

$$v_t(w,t)+w^۲v(w,t)=\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}(x-t)e^{-iwx}dx=\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}[\frac{e^{-iw\pi}(\pi-iw)}{iw}]$$

$$v_t(w,t)+w^۲v(w,t)=\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}[\frac{e^{-iw\pi}(\pi-iw)}{iw}]$$

$$v(w,t)=a(w)e^{wit}+\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}[\frac{e^{-iw\pi}(\pi-iw)}{iw}]w$$

$$a(w)=\frac{۲}{\pi w^۳}(e^{-iw\pi}-۱)+\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\frac{۱}{w}(e^{-iw\pi})$$

### تمرین ۳۳ صفحه ۹۴

$$u_t-u_{xx}=\begin{cases}x+t^۲ & ۰<x<\pi\\ ۰ & x>\pi\end{cases}\qquad u(x,۰)=\begin{cases}x & ۰<x<۱\\ ۰ & x>۱\end{cases},u_x(۰,t)=t$$

$$v(x,t)=\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\int_{۰}^{\infty}u(x,t)coswxdx$$

$$v'+w^۲v(x,t)=\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\int_{۰}^{\pi}(x+t^۲)coswxdx=\sqrt{\frac{۲}{\pi}}(\frac{۱}{w^۲}(-۱)^{n+۱})$$

$$v(x,t)=a_ne^{-w^2t}+\sqrt{\frac{2}{\pi}}(\frac{1}{w^2}(-1)^{n+1})$$

$$v(x,0)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^1 xcoswxdx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}(\frac{sinw}{w}+\frac{cosw}{w^2}-\frac{1}{w^2})$$

$$a_n+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{w^4(-1)^{n+1}}=(\frac{sinw}{w}+\frac{cosw}{w^2}-\frac{1}{w^2})$$

$$a_n=(\frac{sinw}{w}+\frac{cosw}{w^2}-\frac{1}{w^2})-\sqrt{\frac{2}{\pi}}(\frac{1}{w^4(-1)^{n+1}})$$

$$v(x,t)=((\frac{sinw}{w}+\frac{cosw}{w^2}-\frac{1}{w^2})-\sqrt{\frac{2}{\pi}}(\frac{1}{w^4(-1)^{n+1}}))e^{-w^2t}+\sqrt{\frac{2}{\pi}}(\frac{1}{w^2}(-1)^{n+1})$$

$$u(x,t)=f^{-}(v(x,t))$$

## تمرین ۳۴ صفحه ۹۴

## تمرین ۱

$$\begin{cases} u_{tt}-9(u_{xx}-u_{yy})=x+y+t & 0<x<\pi, \quad 0<y<\pi \quad t>0 \\ u_t(x,y,0)=0, \quad u_{tt}(x,y,0)=x+y+1 & 0<x<\pi \quad 0<y<\pi \\ u(x,0,t)=u(x,\pi,t)=0 \quad u(0,y,t)=u(\pi,y,t)=0 \end{cases}$$

$$u(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}G_{mn}(t)sinmxsinny$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(G''_{mn}(t)+9(m^2+n^2)G_{mn}(t))sinmxsinny=x+y+t$$

$$G''_{mn}(t)+9(m^2+n^2)G_{mn}(t)=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}(x+y+t)sinmxsinnydydx=\frac{4}{\pi n}(t+\pi+\frac{\pi(-1)^{n+1}}{n})$$

$$G=a_n sinkt+b_n coskt+\frac{4}{n}(\frac{t}{9\pi(m^2+n^2)}+\frac{(n+(-1)^n)}{n}) \quad ,k^2=9(m^2+n^2)$$

$$u(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n sinkt+b_n coskt+\frac{4}{n}(\frac{t}{9\pi(m^2+n^2)}+\frac{(n+(-1)^n)}{n}))sinmxsinny$$

$$u_t(x,y,0)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n k+\frac{4(n+(-1)^n)}{n})sinmxsinny=0\to a_n=-\frac{4(n+(-1)^n)}{n}$$

$$u_{tt}(x,y,0)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(-b_n k^2)sinmxsinny=x+y+1 \quad -b_n k^2=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}(x+y+1)sinmxsinny$$

$$b_n=\frac{4(-1)^n}{\pi k^2}(\frac{(-2\pi+1)(-1)^n}{mn}-\frac{1}{m}(1-\frac{\pi}{n}))$$

$$u(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}((-\frac{4(n+(-1)^n)}{n})sinkt+(\frac{4(-1)^n}{\pi k^2}(\frac{(-2\pi+1)(-1)^n}{mn}-\frac{1}{m}(1-\frac{\pi}{n}))coskt+$$

$$+\frac{4}{n}(\frac{t}{9\pi(m^2+n^2)}+\frac{(n+(-1)^n)}{n}))sinmxsinny$$

**تمرین ۲**

$$\begin{cases} u_t-4(u_{xx}+u_{yy})=x-y-t \quad 0<x<\pi, \quad 0<y<\pi \quad t>0 \\ u(x,y,0)=0, \\ u(x,0,t)=u(x,\pi,t)=0 \quad u(0,y,t)=u(\pi,y,t)=0 \end{cases}$$

$$u(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}G_{mn}(t)sinmxsinny$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(G'+4(m^2+n^2)G)sinmxsinny=x-y-t$$

$$G'+4(m^2+n^2)G=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi}(x-y-t)sinmxsinnydydx=\frac{4(-1)^n}{n\pi}(\frac{(\pi-t)(-1)^n}{m}+\frac{t}{m}+\frac{\pi(-1)^{n+1}}{m})$$

$$G = a_n e^{-kt} + \frac{4(-1)^n}{nm\pi}((-1)^{m+1}+1)(t+\frac{1}{k})$$

$$u(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n e^{-kt} + \frac{4(-1)^n}{nm\pi}((-1)^{m+1}+1)(t+\frac{1}{k}))sinmxsinny$$

$$u(x,y,0) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + \frac{4(-1)^n}{nkm\pi}((-1)^{m+1}+1))sinmxsinny = x-y$$

$$a_n+\frac{4(-1)^n}{nkm\pi}((-1)^{m+1}+1) = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}(x-y)sinmxsinnydydx \rightarrow a_n = \frac{4\pi(-1)^n}{mn\pi}(2(-1)^m+1)$$

$$u(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}((\frac{4\pi(-1)^n}{mn\pi}(2(-1)^m+1))e^{-kt}+\frac{4(-1)^n}{nm\pi}((-1)^{m+1}+1)(t+\frac{1}{k}))sinmxsinny$$

تمرین۳

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} - u_{yy} = x - t^2 \quad 0<x<1, \quad 0<y<2 \quad t>0 \\ u(0,y,t)=0, \quad u(1,y,t)=0 \quad u(x,y,0)=y \\ u(x,0,t)=0 \quad u(x,2,t)=0 \end{cases}$$

حل:

$$u(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} G_{mn}(t)\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y \rightarrow u_t(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\dot{G}\sin m\pi x\sin\frac{n\pi}{2}y$$

$$u_{xx}(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} -m^2\pi^2 G_{mn}(t)\sin m\pi x\sin\frac{n\pi}{2}y$$

$$u_{yy}(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} -\frac{n^2\pi^2}{4}G_{mn}(t)\sin m\pi x\sin\frac{n\pi}{2}y$$

$$u_t-u_{xx}-u_{yy} = x-t^2 \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(\dot{G}+(m^2\pi^2+\frac{n^2\pi^2}{4})G_{mn}(t))\sin m\pi x\sin\frac{n\pi}{2}y$$

$$(\dot{G}+(m^2\pi^2+\frac{n^2\pi^2}{4})G_{mn}(t)) = \frac{4}{nm\pi^2}[(1-t^2)((-1)^{n+m}-1)+(-1)^m(t^2-1)+t^2((-1)^n-1)]$$

جواب عمومی معادله دیفرانسیل:

$$G_{mn}(t) = a_{mn}e^{-\pi^2(m^2+\frac{n^2}{4})t}$$

$$a_{mn} = \frac{4}{mn\pi^2}[(-1)^{m+n} - 2(-1)^n + (-1)^m + 1]$$

$$G_{mn}(t) = \frac{4}{mn\pi^2}[(-1)^{m+n} - 2(-1)^n + (-1)^m + 1]e^{-\pi^2(m^2+\frac{n^2}{4})t}$$

$$u(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}e^{-\pi^2(m^2+\frac{n^2}{4})t}+\frac{4}{nm\pi^2}[(1-t^2)((-1)^{m+n}-(-1)^m)+t^2(-1)^n-1]\sin\frac{m\pi}{x}\sin$$

$$u(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{4}{nm\pi^2}[a_{mn}e^{-\pi^2(m^2+\frac{n^2}{4})t}+((1-t^2)((-1)^{m+n}-(-1)^m)+t^2(-1)^n-1)]\sin\frac{m\pi}{x}$$

تمرین ۴

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + \cos x + \sin y \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi \quad t > 0 \\ u(x,y,0) = xy, \qquad u_t(x,y,0) = 0 \\ u(x,0,t) = u(x,\pi,t) = 0 \quad u(0,y,t) = u(\pi,y,t) = 0 \end{cases}$$

حل:

$$u(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} G_{mn}(t)\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y \rightarrow u_tt(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\ddot{G}\sin mx\sin ny$$

$$u_{xx}(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} -m^2\pi^2G_{mn}(t)\sin mx\sin ny$$

$$u_{yy}(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} -n^2G_{mn}(t)\sin mx\sin ny$$

$$u_{tt}-u_{xx}-u_{yy}=\cos x+\sin y\rightarrow\sum_{n=۱}^{\infty}\sum_{m=۱}^{\infty}[\ddot{G}+(m^۲+n^۲)G_{mn}(t)]\sin m\pi x\sin ny=\cos x+\sin y$$

$$[\ddot{G}+(m^۲+n^۲)G_{mn}(t)]=\frac{۲(۱-\cos n\pi)}{n\pi^۲}[\frac{۱}{۱+m}(۱-\cos(۱+m)\pi)+\frac{۱}{۱-m}(\cos(۱-m)\pi-۱)]$$

جواب عمومی معادله دیفرانسیل:

$$G_{mn}(t)=a_{mn}\cos\sqrt{m^۲+n^۲}(t)+b_{mn}\sin\sqrt{m^۲+n^۲}(t)+$$

$$\frac{۲(۱-\cos n\pi)}{n\pi^۲}[\frac{۱}{۱+m}(۱-\cos(۱+m)\pi)+\frac{۱}{۱-m}(\cos(۱-m)\pi-۱)]$$

$$+(\frac{۱}{۱-m})[\cos(۱-m)\pi-۱])],u_t(x,y,۰)=۰\rightarrow b_mn=۰$$

$$a_{mn}=\frac{۲}{n}[\frac{۲}{m}(-۱)^{m+n}-\frac{(۱-\cos n\pi)}{\pi^۲}(\frac{۱}{۱+m}[۱-\cos(۱+m)\pi]$$

$$u(x,y,t)=\sum_{n=۱}^{\infty}\sum_{m=۱}^{\infty}[\frac{۲}{n}[\frac{۲}{m}(-۱)^{m+n}-\frac{(۱-\cos n\pi)}{\pi^۲}(\frac{۱}{۱+m})[۱-\cos(۱+m)\pi]+(\frac{۱}{۱-m})[\cos(۱-m)$$

$$\cos\sqrt{m^۲+n^۲}(t)+\frac{۲(۱-\cos n\pi)}{n\pi^۲}[\frac{۱}{۱+m}(۱-\cos(۱+m)\pi)+\frac{۱}{۱-m}(\cos(۱-m)\pi-۱)]]\sin mx\sin$$

تمرین ۱) $\int_{x_۱}^{x_۲}G(x)\eta(x)dx=۰$

$\eta(x)=\sum_{n=۱}^{\infty}b_n\sin(\frac{n\pi}{L}x)$ $\qquad$ $b_n=\frac{۲}{L}\int_۰^L\eta(x)\sin(\frac{n\pi}{L}x)dx$

$\eta(x_۱)=\eta(x_۲)=۰$

$G(x) = a \to \int_{x_1}^{x_2} G(x)\eta(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} a\eta(x)dx$

درنظرمی گیریم:$a\eta(x) = \gamma(x)$ که $\gamma(x)$ نیزیک تابع فرد است.

$\int_{x_1}^{x_2} a\eta(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} \gamma(x)dx \qquad \gamma(x) = \sum ab_n \sin(\frac{n\pi}{L}x) = \sum B_n \sin(\frac{n\pi}{L}x)$

$B_n = a(\frac{2}{L}) \int_0^L \eta(x)\sin(\frac{n\pi}{L}x)dx = \frac{2}{L}\int_0^L a\eta(x)\sin(\frac{n\pi}{L}x)dx =$

$\frac{2}{L}\int_0^L \gamma(x)\sin(\frac{n\pi}{L}x)dx$

که نشان می دهد$\gamma(x)$ تابعی فرد است و می دانیم در حالت کلی $\int_{x_1}^{x_2} \gamma(x)dx$ برابر صفر نیست مگر آنکه $a = G(x) = 0$ باشد.

2 - we are required to find the extermal y(x) which minimizes the functional

$$I(y) = \int_0^1 (1 + y'^2)dx \qquad (5)$$

and satisfies

$$y(0) = 0 \qquad and \qquad y(1) = 1 \qquad (6)$$

a)show that the extermal function is y=x
b)with y=x and the special choice $\eta(x)$=x(1-x), find $\tilde{I}(y)$ and verify directly

that $\frac{d\tilde{I}}{d\epsilon}$ when $\epsilon$ =0.

c)by letting $\tilde{y}(x) = x + u(x)$ ,show that

$$I(\tilde{y}) = ۲ + \int_{۰}^{۱} (u'(x))^{۲} \, dx \qquad (۷)$$

and deduce that y(x)=x is indeed the required minimizing function .

حل )

a)با توجه به روش لاگرانژ داریم:

$$F = ۱ + y'^{۲}$$

$$\frac{dF}{dy} = ۰$$

$$\frac{dF}{dy'} = ۲y'$$

$$\frac{d}{dx}(\frac{dF}{dy'}) = ۰$$

$$\frac{dF}{dy} - \frac{d}{dx}(\frac{dF}{dy'}) = ۰$$

$\Longrightarrow y'' = ۰ \Longrightarrow y' = A \Longrightarrow y = Ax + B$

حال شرایط مرزی رادر y اعمال می کنیم: B=0,A=1 پس:

$$y = x$$

(b

$$y(x) = x + \epsilon\eta(x) = x + \epsilon x(۱ - x)$$

$$y'(x) = ۱ + \epsilon(۱ - ۲x)$$

$$y'^{۲}(x) = ۱ + \epsilon^{۲}(۱ - ۴x + ۴x^{۲}) + ۲\epsilon(۱ - ۲x)$$

$$\tilde{I}(\epsilon) = \int_{۰}^{۱} ۲ + \epsilon^{۲}\left(۱ - ۴x + ۴x^{۲}\right) + ۲\epsilon(۱ - ۲x)\, dx$$

$$\frac{d\tilde{I}(\epsilon)}{d\epsilon} = \int_{۰}^{1} ۲\epsilon\left(۱ - ۴x + ۴x^{۲}\right) + ۲(۱ - ۲x)dx$$

$$۲\epsilon(x - ۲x - ۲x^{۲} + \frac{۴}{۳}x^{۳}) + ۲(x - x^{۲})]_{۰}^{۱}$$

$$۲\epsilon(-\frac{۱}{۳}) = ۰ \Longrightarrow \epsilon = ۰$$

(c

$$\tilde{y}(x) = x + u(x) \Longrightarrow \tilde{y}'(x) = ۱ + u'(x)$$

حال مقدار $\tilde{y}(x)$ رادر $I(\tilde{y})$ قرار می دهیم :

$$I(\tilde{y}) = \int_{۰}^{۱} ۱ + (۱ + u'(x))^{۲}\, dx = \int_{۰}^{۱} ۲ + ۲u'(x) + (u'(x))^{۲}\, dx$$

$$y(۰) = ۰ \Longrightarrow u(۰) = ۰, y(۱) = ۱ + u(x) = ۱ \Longrightarrow u(۱) = ۰$$

$$\Longrightarrow ۲x]_{۰}^{۲} + ۲u(x)]_{۰}^{۱} + \int_{۰}^{۱} (u'(x))^{۲}\, dx$$

$$\Longrightarrow I(\tilde{y}) = ۲ + \int_{۰}^{۱} (u'(x))^{۲}\, dx$$

*********************************************************

3)Test for an extermals of the functional.

$$\int_{x1}^{x2}(xy+y^{۲}+۲y^{۲}y')dx$$

حل) به وسیله معادله لاگرانژداریم:

$$F=(xy+y^{۲}+۲y^{۲}y')$$

$$\frac{dF}{dy}=x+۲y+۴yy'$$

$$\frac{d}{dx}(\frac{dF}{dy'})=-۴yy'$$

$$\frac{dF}{dy}-\frac{d}{dx}(\frac{dF}{dy'})=۰\Longrightarrow x+۲y-۴yy'+۴yy'=۰\Longrightarrow x+۲y=۰\Longrightarrow y=-\frac{x}{۲}$$

*********************************************************

section ۴.۴

8) part a)simply suported at x=0 and x=L

$$c^{۴}\frac{\partial^{۴}W}{\partial x^{۴}}+\frac{\partial^{۲}W}{\partial t^{۲}}=۰$$

$$W(x,t)=F(x)*g(t)$$

$$f(x)=C_{۱}\sin(\beta x)+c_{۲}\cos(\beta x)+c_{۳}\sin h(\beta x)+c_{۴}\cos h(\beta x)$$

داریم :

$$W(0,t)=0, W_{xx}(0,t)=0, W(l,t)=0, W_{xx}(l,t)=0$$

$c_2+c_4=0$

$-c_2+c_4=0 \Rightarrow c_2=c_4=0$

$$\sin(\beta L)\sin h(\beta x)+\sin h(\beta L)\sin(\beta L) \Rightarrow \sin(\beta L)=0 \Rightarrow \beta=\frac{n\pi}{L}$$

$$w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(A\cos(w_n t)+B\sin(w_n t))\sin(\frac{n\pi}{L}x)$$

b)fixed at $x=0$ and free at x=L

---

شرایط مرزی

$$W(0,t)=0, W_x(0,t)=0, W_{xx}(l,t)=0, W_{xxx}(0,t)=0$$

$$c_2=c_4, c_1=-c_3$$

$$c_4(\cos h(\beta L)+\cos(\beta L))+c_3(\sin h(\beta L)+\sin(\beta L)=0$$

$$c_4((\sin h(\beta L)-\sin(\beta L)+c_3(\cos h(\beta L)+\cos(\beta L))=0$$

$$\Rightarrow \cos h(\beta L)\cos(\beta L)=-1$$

$$\beta_i L=1.875,\ 4.694,\ 7.885,\ 10.996,\ 14.137$$

$$\eta_i = -c_۴ = \frac{(\sin h(\beta L) + \sin(\beta L)}{(\cos h(\beta L) + \cos(\beta L))}$$

حل عمومی برای ریشه ها :

$$W(x) = \sin h(\beta x) - \sin(\beta x) - \eta_i(\cos h(\beta x) + \cos(\beta x)$$

---

c)free at x=0 and x=l

$$y(x) = C_۱ \sin(\beta x) + c_۲ \cos(\beta x) + c_۳ \sin h(\beta x) + c_۴ \cos h(\beta x)$$

شرایط مرزی

$$y_{xx}(۰, t) = ۰, y_{xxx}(۰, t) = ۰, y_{xx}(l, t) = ۰, y_{xxx}(l, t) = ۰$$

$$c_۱ = c_۳, c_۲ = c_۴$$

$$c_۱((\sin h(\beta L) - \sin(\beta L)) + c_۲(\cos h(\beta L) - \cos(\beta L)) = ۰$$

$$c_۱(\cos h(\beta L) - \cos(\beta L)) + c_۲(\sin h(\beta L) + \sin(\beta L)) = ۰$$

$$(\sin h(\beta L) - \sin(\beta L))(\sin h(\beta L) + \sin(\beta L))$$

$$-(\cos h(\beta L) - \cos(\beta L))(\cos h(\beta L) - \cos(\beta L)) = ۰$$

$$\cos(\beta L) \cos h(\beta L) = ۱$$

$$\beta_i L = ۴.۷۳, ۷.۸۵۳, ۱۰.۹۹۵, ۱۴.۱۳۷, ۱۷.۲۷۸$$

---

d)free -fixed at x=0 and x=L

$$c^{۴}\frac{\partial^{۴} W}{\partial x^{۴}} + \frac{\partial^{۲} W}{\partial t^{۲}} = ۰$$

$$W(x,t) = F(x) * g(t)$$

$$W_x(۰) = ۰, W_{xxx}(۰) = W_x(L) = W_{xxx}(L) = ۰$$

$$f(x) = C_{۱}\sin(\beta x) + c_{۲}\cos(\beta x) + c_{۳}\sin h(\beta x) + c_{۴}\cos h(\beta x)$$

$$c_{۱} + c_{۳} = ۰, -c_{۱} + c_{۳} = ۰$$

$$\Rightarrow c_{۱} = c_{۳} = ۰$$

$$\Rightarrow \sin(\beta L) = ۰ \Rightarrow \beta = \frac{n\pi}{L}$$

$$w(x,t) = \sum_{n=۱}^{\infty}(A\cos(w_n t) + B\sin(w_n t))\sin(\frac{n\pi}{L}x)$$

$$\beta_i l = ۳.۱۴, ٦.۲۸, ...(n - ۱)\pi$$

---

e)simply supported at x=0 and fixed at x=L

$$c^4 \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0$$

$$W(x,t) = F(x) * g(t)$$

$$W(0) = 0, W_{xx}(0) = W(L) = W_x(L) = 0$$

$$f(x) = C_1 \sin(\beta x) + c_2 \cos(\beta x) + c_3 \sin h(\beta x) + c_4 \cos h(\beta x)$$

$$\Rightarrow c_2 = c_4 = 0$$

$$c_1 \sin(\beta L) + c_3 \sin h(\beta L) = 0$$

$$c_1 \cos(\beta L) + c_3 \cos h(\beta L) = 0$$

$$\Rightarrow \sin(\beta L) \cos h(\beta L) - \sin h(\beta L) \cos(\beta L) = 0$$

$$\tan(\beta L) = \tan h(\beta L)$$

$$\alpha = (\beta L)$$

$$\alpha_i = ۳.۹۲۶۶, ۷.۰۶۸$$

---

f)simply supported at x=0 and free at x=L

$$c^{۴}\frac{\partial^{۴} W}{\partial x^{۴}} + \frac{\partial^{۲} W}{\partial t^{۲}} = ۰$$

$$W(x,t) = F(x) * g(t)$$

$$W(۰) = ۰, W_{xx}(۰) = W_{xx}(L) = W_{xxx}(L) = ۰$$

$$f(x) = C_{۱}\sin(\beta x) + c_{۲}\cos(\beta x) + c_{۳}\sin h(\beta x) + c_{۴}\cos h(\beta x)$$

با اعمال شرایط داریم :

$$c_{۲} = c_{۴} = ۰$$

$$-c_{۱}\sin(\beta L) + c_{۳}\sin h(\beta L) = ۰$$

$$-c_{۱}\cos(\beta L) + c_{۳}\cos h(\beta L) = ۰$$

$$\Rightarrow -\sin(\beta L)\cos h(\beta L) + \sin h(\beta L)\cos(\beta L) = ۰$$

$$\tan(\beta L) = \tan h(\beta L)$$

$$\alpha = (\beta L)$$

$$\alpha_i = ٣.٩٢٦٦, ٧.٠٦٨$$

---

g) simply supported at x=0and elastically supported at free end x=L by a linear spring of stiffness $\gamma$

$EIy_{xxx}(l,t) + \gamma y(l,t) = ٠, y_{xx}(l,t) = y_{xx}(٠,t) = y_{xxx}(٠,t) = ٠$

$$y(x,t) = F(x) * g(t)$$

$$f(x) = C_۱ \sin(\beta x) + c_۲ \cos(\beta x) + c_۳ \sin h(\beta x) + c_۴ \cos h(\beta x)$$

اعمال شرایط مرزی :

$$c_۲ = c_۴,\ c_۱ = c_۳$$

$$-c_۱ \sin(\beta l) - c_۲ \cos(\beta l) + c_۳ \sin h(\beta l) + c_۴ \cos h(\beta l) = ٠$$

$$\beta^۳(-c_۱ \cos(\beta l) + c_۲ \sin(\beta l) + c_۳ \cos h(\beta L) + c_۴ \sin h(\beta L) +$$

$$\frac{\gamma}{EI}(C_۱ \sin(\beta x) + c_۲ \cos(\beta x) + c_۳ \sin h(\beta x) + c_۴ \cos h(\beta x)$$

$$a = \frac{\gamma}{EI\beta^{3}}$$

$$c_1(-\cos(\beta l) + a\sin(\beta l) + \cos h(\beta l) + a\sin h(\beta l))+$$

$$c_2(\sin(\beta l) + a\cos(\beta l) + \sin h(\beta l) + a\cos h(\beta l))$$

با محاسبه دترمینان ضرایب $c_1, c_2$ ضرایب بدست می آید

---

h) simply supported at x=0and elastically supported at free end x=L by a helical spring of stiffness $\eta$

شرایط مرزی :

$$y(0,t) = 0, y_{xx}(0,t) = 0, EI\frac{d^2y}{dx^2} - \eta\frac{dy}{dx} = 0, \frac{d}{dx}(EI\frac{d^2y}{dx^2}) = 0$$

$$y(x,t) = f(x)G(t)$$

$$f(x) = C_1\sin(\beta x) + c_2\cos(\beta x) + c_3\sin h(\beta x) + c_4\cos h(\beta x)$$

اعمال شرایط مرزی :

$$c_2 = c_4 = 0$$

$$EI(\beta^2(-c_1\sin(\beta L) + c_3\sin h(\beta l))) - \eta\beta(c_1\cos(\beta l) + c_3\cos h(\beta l)) = 0$$

$$EI\beta^2(-c_1\sin(\beta L) + c_3\sin h(\beta l)) = c_5$$

$$a = \frac{\eta}{EI\beta}$$

$$c_1(\sin(\beta L) - a\cos(\beta l)) + c_2(-a\cos h(\beta l) + \sin h(\beta l)) = 0$$

$$c_2(\sin(\beta L)\frac{(\sin(\beta L) - a\cos h(\beta l))}{-\sin(\beta L) - a\cos(\beta L)}) = \frac{c_5}{EI\beta^4}$$

ضرایب بدست می آید

---

$$i) fixed at x = 0 and elastic spring supported at x = L (stiffness \gamma)$$

شرایط مرزی :

$$y(0) = y_x(0) = y_{xx}(L) = 0, EIy'''(l,t) + \gamma y(l,t) = 0$$

$$c_2 = -c_4, c_1 = -c_3$$

$$c_3[\sin(\beta L) + \sin h(\beta L)] + c_4[\cos(\beta L) + \cos h(\beta L)] = 0$$

$$c_3[EI(\cos(\beta L) + \cos h(\beta L)) - k(\sin(\beta L) - \sin h(\beta L))]$$

$$+c_4[EI(-\sin(\beta L) + \sin h(\beta L)) + k((\cos(\beta L) + \cos h(\beta L))] = 0$$

$$\Rightarrow \tan(\beta L) * \cos h(\beta L) + \sin(\beta l) = \frac{EI}{\cos(\beta l)}$$

---

j) :

$$f(x) = C_1 \sin(\beta x) + c_2 \cos(\beta x) + c_3 \sin h(\beta x) + c_4 \cos h(\beta x)$$

$$y(0,t) = 0, y_x(0,t) = 0, EI\frac{d^2y}{dx^2} - \eta\frac{dy}{dx} = 0, \frac{d}{dx}(EI\frac{d^2y}{dx^2}) = 0$$

شرایط مرزی را اعمال میکنیم :

$$c_2 = c_4, c_1 = -c_3$$

$$c_3(\sin(\beta L) + \sin h(\beta L)) + c_4(\cos(\beta l) + \cos h(\beta L)) = \frac{c_5}{EI\beta^2}$$

$$c_3(\sin(\beta L) + \sin h(\beta L) + a(\cos(\beta l) - \cos h(\beta L))+$$

$$c_4(\cos(\beta l) + \cos h(\beta L) - a(\sin(\beta L) + \sin h(\beta L)) = 0$$

---

۹) $massMattachedtoitsendthebeamisfixedatx = 0 andfreeatx = L$

$$Hint : y''' + K\beta^4 Ly(l) = 0, y''(L) = 0, K = \frac{M}{\rho AL}$$

$$f(x) = C_1 \sin(\beta x) + c_2 \cos(\beta x) + c_3 \sin h(\beta x) + c_4 \cos h(\beta x)$$

$$c_2 = -c_4, c_1 = -c_3$$

$$c_3(\cos(\beta l) + \cos h(\beta L)) + k\beta L(-\sin(\beta L) + \sin h(\beta L)+$$

$$c_۴(-\sin(\beta L) + \sin h(\beta L) + kL(\cos(\beta l) + \cos h(\beta L)) = ۰$$

دیگر نتیجه:

$$c_۳(\sin(\beta L) + \sin h(\beta L)(c_۴(\cos(\beta l) + \cos h(\beta L))$$