اعداد حقیقی (۱)

اعداد اولین بار در رابطه با امر شمارش ظاهر شدند. اعداد طبیعی:

$$۱, ۲, ۳, \ldots$$

وسیلهٔ سنجش تعداد اشیاء در یک مجموعهٔ مشخص‌اند. از آنجا که کمیت‌های مورد اندازه‌گیری همیشه به صورت گسسته و مجزا ظاهر نمی‌شوند، انسان از دیرباز دریافت که برای سنجش میزان کمیت، شمارش و اعداد طبیعی کفایت نمی‌کنند، بلکه باید نسبت دو کمیت از یک جنس را نیز نوعی تعریف کرد. مقایسهٔ وزن اجسام و طول پاره‌خط‌ها از این جمله‌اند. برای انجام مقایسهٔ دو کمیت، شیئی هم‌جنس با دو شیء مورد مقایسه ولی کوچکتر از آنها در نظر گرفته می‌شود که اندازهٔ هر شیء مضرب صحیحی از اندازهٔ آن باشد. در شکل ۱ دو پاره‌خط L_0 و L_1 نشان داده شده‌اند و پاره‌خطی L که ۵ بار در L_0 و ۳ بار در L_1 می‌گنجد. در این صورت نسبت طول L_0 به طول L_1 را به $\frac{۳}{۵}$ نمایش می‌دهند. نسبت‌های $\frac{n}{m}$ که در آن m و n اعداد طبیعی باشند امروزه اعداد گویا یا کسرهای متعارف می‌نامیم. ریاضیدان یونانی یودوکسوس[1] حدود ۴ قرن قبل از میلاد کسرها را به طور جامع بررسی کرد و نظریهٔ او در فصل پنجم کتاب اصول اقلیدس (قرن سوم قبل از میلاد) نقل شده است. هرگاه پاره‌خطی L به عنوان مرجع یا واحد در نظر گرفته شود، n یک عدد طبیعی باشد، و L_1 پاره‌خطی که L دقیقاً n بار در آن می‌گنجد، نسبت طول L_1 به طول L برابر $\frac{1}{n}$ است. از آنجا که طول L_1 را می‌توان نتیجهٔ n بار شمارش طول L در نظر گرفت، تمایزی میان $\frac{1}{n}$ و n قایل نمی‌شویم و از این رو مجموعهٔ اعداد گویا را گسترشی از مجموعهٔ اعداد طبیعی تلقی می‌کنیم.

[1] Eudoxus

به طور کلی دو کمیت از یک جنس را همسنگ می‌نامیم در صورتی که کمیتی از همان جنس (به عنوان "واحد" یا "سنگه") وجود داشته باشد که اندازهٔ هر یک از کمیت‌های داده شده مضرب صحیحی از اندازهٔ سنگه باشد. در شکل ۱، طول پاره‌خط‌های L° و L^{1} همسنگ هستند و می‌توان از طول L به عنوان سنگه استفاده کرد. در عمل به نظر می‌آید باید بتوان برای مقایسهٔ هر دو کمیت همجنس، واحدی به اندازهٔ کافی کوچک انتخاب کرد که هر دو کمیت مضرب صحیحی از آن واحد باشند، یا به عبارتی دیگر، به‌نظر می‌آید که هر دو کمیت همجنس، همسنگ باشند. برای تأکید بر اهمیت مسأله، موضوع را به‌صورت یک سؤال مطرح می‌کنیم:

سؤال. آیا هر دو کمیت همجنس، همسنگ نیز هستند؟

اینکه جواب این سؤال منفی است ظاهراً در قرن پنجم پیش از میلاد توسط هیپاسوس[۲] کشف شد و بحرانی در فلسفه و علم باستان پدید آورد. فیثاغورسیان اعتقاد داشتند که اعداد (صحیح) به نوعی منشاء و عنصر ساخت همهٔ هستی‌اند و این کشف هیپاسوس که دو پاره‌خط وجود دارد که نمی‌توان هر دو را با یک واحد مشترک شمرد بنیاد تفکر آنها را متزلزل ساخت. استدلال هیپاسوس را بعداً خواهیم آورد ولی استدلال ساده زیر که دو قرن بعد در جزوهٔ دهم کتاب اصول اقلیدس ظاهر می‌شود اندکی بعد کشف شد. در اینجا نشان داده می‌شود که طول ضلع مربع و طول قطر آن همسنگ نیستند، یا به زبان امروزی نسبت این دو طول یک عدد گویا نیست. اگر طول ضلع مربع را l بگیریم، طول قطر آن طبق قضیهٔ فیثاغورس برابر $\sqrt{2}\,l$ است و نسبت طول قطر به طول ضلع برابر $\sqrt{2}$ می‌شود. روش ارائه شده در کتاب اقلیدس برای اثبات ناگویا بودن $\sqrt{2}$، برهان خلف است. فرض می‌کنیم $\sqrt{2} = \frac{N}{M}$ که در آن M و N عدد صحیح هستند. کسر $\frac{N}{M}$ را تا حد ممکن با حذف مقسوم‌علیه‌های مشترک ساده می‌کنیم تا به صورت $\frac{n}{m}$ در آید، پس $\sqrt{2} = \frac{n}{m}$ در وضعیتی است که m و n مقسوم‌علیه مشترک ندارند. با مجذور کردن دو طرف داریم $m^{2} = 2n^{2}$، پس m^{2} زوج است پس $m = 2k$ و نتیجه می‌گیریم که $n^{2} = 2k^{2}$. بازبه‌ترتیب بالا n باید خود زوج باشد، $n = 2l$. حال m و n هر دو زوج هستند، یعنی هر دو بر ۲ قابل قسمت‌اند در حالی که فرض شده بود m و n مقسوم‌علیه مشترک ندارند. این تناقض نشان می‌دهد که

---

[۲] Hippasus

بیان $\sqrt{2}$ به صورت $\frac{m}{n}$ ممکن نیست ، یعنی $\sqrt{2}$ گویا نیست ، و به بیان دیگر طول ضلع و طول قطر مربع همسنگ نیستند.

درواقع می‌توان به سادگی ثابت کرد که اگر n خود مجذور کامل نباشد $\sqrt{n}$ گویا نیست. در قطعهٔ ۱۴۷ کتاب تئه‌تتوس افلاطون[۳] (قرن چهارم پیش از میلاد) اشاره می‌شود که ریاضیدان یونانی تئودروس این مطلب را تا $n = 17$ به اثبات رسانده است. درجای دیگری از آثار افلاطون یکی از مناظره کنندگان از جهل آتنی‌ها نسبت به اعداد ابراز شرمساری کند و بالاخص اینکه اکثر مردم به وجود کمیت‌های ناهمسنگ آگاهی نداشتند.

در اینجا آنچه به ظن قوی کشف هیپاسوس از نسبت‌های ناگویا بوده است نقل می‌کنیم. علامت ویژهٔ فیثاغورسیان موسوم به پنتاگرام یک پنج ضلعی منتظم بود. در یک چنین پنج ضلعی با رسم قطرها پنج ضلعی منتظم دیگری درداخل ساخته می‌شود و می‌توان این کار را همواره ادامه داد (شکل ۲). نشان می‌دهیم چگونه مقایسهٔ نسبت طول قطر پنج ضلعی منتظم به طول ضلع آن یک کمیت ناگویا به‌دست می‌دهد. به طور کلی فرض کنید a^0 و a^1 دو کمیت همجنس باشند (مثلاً طول‌های دو پاره‌خط) و $a^1 < a^0$. اگر a^1 دقیقاً n^1 بار در a^0 بگنجد، n^1: عدد طبیعی، آنگاه a^0 و a^1 همسنگ هستند و داریم $a^0 = n^1 a^1$. در هر صورت n^1 را بزرگترین عدد طبیعی می‌گیریم که $n^1 a^1$ از a^0 تجاوز نکند و داریم

$$a^0 = n^1 a^1 + a^2 \quad , \quad 0 \leq a^2 < a^1 \qquad (1)$$

ملاحظه کردیم که اگر $a^2 = 0$، a^1 خود سنگهٔ مناسب برای مقایسه a^0 و a^1 است. حال فرض کنید $a^2 \neq 0$. در اینجا a^2 را به حداکثر دفعات ممکن در a^1 می‌گنجانیم یعنی بزرگترین عدد طبیعی n^2 را انتخاب می‌کنیم که $n^2 a^2 \leq a^1$. پس:

$$a^1 = n^2 a^2 + a^3 \quad , \quad 0 \leq a^3 < a^2 \qquad (2)$$

اگر $a^3 = 0$، آنگاه a^1 مضرب صحیحی از a^2 است. از (۱) می‌بینیم که در این صورت a^0 نیز مضرب صحیحی از a^2 خواهد شد و بدین ترتیب a^2 سنگهٔ مناسب برای سنجش a^0 و a^1 است. اگر $a^3 \neq 0$،

[۳] دوره آثار افلاطون (جلد پنجم و هفتم)، ترجمه محمدحسن لطفی، انتشارات خوارزمی (۱۳۵۷).

این فرایند را ادامه داده می‌نویسیم:

$$a^{2} = n^{3}a^{3} + a^{4} \quad , \quad 0 \le a^{4} < a^{3} \qquad (3)$$

که در آن n^{3} یک عدد طبیعی است. مجدداً اگر $a^{4} = 0$ با کنار (۳) ، (۲) و (۱) می‌بینیم که a^{3} سنگه‌ای برای سنجش a^{1} و a^{0} است وگرنه ادامه می‌دهیم. ادعا می‌کنیم:

(۱ــ۱) گزاره. a^{0} و a^{1} همسنگ هستند اگر و تنها اگر فرایند بالا در تعدادی متناهی گام به باقیمانده صفر برسد، یعنی عدد طبیعی k وجود داشته باشد که $a^{k-1} = n^{k}a^{k}$، n^{k} :عدد طبیعی. در این صورت a^{k} سنگه‌ای برای سنجش a^{0} و a^{1} است.

اثبات. اگر فرایند فوق در k گام به صفر برسد داریم:

$$a^{1} = n^{2}a^{2} + a^{3}, \quad 0 < a^{3} < a^{2} \quad \text{عدد طبیعی } n^{2}$$
$$\cdots \qquad \cdots \qquad \qquad (4)$$
$$a^{k-2} = n^{k-1}a^{k-1} + a^{k}, \quad 0 < a^{k} < a^{k-1} \quad \text{عدد طبیعی}$$
$$a^{k-1} = n^{k}a^{k}$$

رابطهٔ آخر نشان می‌دهد a^{k-1} مضرب صحیحی از a^{k} است، پس از رابطه یکی به آخر a^{k-2} مضربی از a^{k} است، و به همین ترتیب با صعود به دو رابطهٔ اول نتیجه می‌شود که a^{0} و a^{1} هر دو مضرب صحیحی از a^{k} هستند، یعنی a^{k} سنگه‌ای برای سنجش a^{0} و a^{1} است. بالعکس فرض کنید a^{0} و a^{1} همسنگ باشند، در این صورت عددی $u > 0$ به عنوان سنگه وجود دارد که a^{0} و a^{1} هر دو مضرب صحیحی از u هستند. از رابطهٔ اول بالا نتیجه می‌شود که a^{2} نیز مضربی صحیح از u است، سپس از رابطه بعد a^{3} مضربی صحیح از u است، و به همین ترتیب اگر ثابت شده باشد که $a^{0}, a^{1}, \ldots, a^{p}$ مضرب صحیح u هستند و رابطهٔ بعدی به شکل

$$a^{p-1} = n^{p}a^{p} + a^{p+1}$$

باشد ، نتیجه می‌گیریم که $a_{p+1} = a_{p-1} - n_p a_p$ مضرب صحیحی از u است . حال اگر این فرایند به باقیمانده صفر نرسد، دنباله باقیمانده‌ها به صورت نزولی زیر است:

$$a_1 > a_2 > a_3 > \cdots$$

که در اینجا همهٔ a_j ها مضرب صحیحی از عدد مثبت u می‌باشند. چنین وضعیتی غیرممکن است زیرا که بین دو عدد u و a_1 فقط تعدادی متناهی مضرب صحیح u می‌گنجد. این امر نشان می‌دهد که اگر a_0 و a_1 همسنگ باشد ، فرایند بالا بالاخره به باقیمانده صفر می‌رسد و آخرین مقسوم‌علیه به‌دست آمده سنگه لازم است. $\square$

با اتکاء به مطلب بالا و استدلالی هندسی ،هیپاسوس نشان داد نسبتهای قطر و ضلع پنج‌ضلعی منتظم همسنگ نیستند بدین ترتیب که اگر فرایند فوق برای آنها پیاده شود هیچگاه به باقیمانده صفر نمی‌رسیم. به شکل (۲) توجه کنید. از تساوی زوایای داخلی و اضلاع پنج ضلعی منتظم مشاهده می‌کنیم که هر قطر موازی ضلعی است که ازهیچ یک از دو انتهای آن نمی‌گذرد: $AC \| ED$، $BE \| CD$، . . . . بنابراین مثلث‌های ABC و EB_1D به اضلاع دو به دو موازی متشابه‌اند و داریم:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{EB_1}{ED}$$

طول قطر پنج‌ضلعی را a_0 و طول ضلع آن را a_1 می‌نامیم. از آنجا که زوایای داخلی پنج ضلعی باز هستند ($= 108^\circ$) داریم $a_0 > a_1$. چون چهارضلعی $ABCB_1$ متوازی‌الاضلاع است داریم $EB_1 = a_0 - a_1$. پس

$$\frac{a_0}{a_1} = \frac{a_0 - a_1}{a_1}$$

$a_0 - a_1$ را به a_2 نمایش می‌دهیم. داریم $a_2 < a_1$ زیرا که در مثلث EB_1D هر ضلع از تفاضل دو ضلع دیگر بزرگتر است. پس:

$$a_0 = 1 \cdot a_1 + a_2 \quad , \quad 0 < a_2 < a_1$$

حال $a_1 - a_2$ را به a_3 نمایش می‌دهیم و ملاحظه می‌کنیم که a_3 برابر طول پنج‌ضلعی منتظم کوچک $A_1B_1C_1D_1E_1$ است زیرا که طول AB_1 برابر a_1 و طول AC_1 برابر a_2 است. از طرفی دیگر طول قطر

$A'B'C'D'E'$ برابر a_2 است زیرا که اگر از A' به D' و C' وصل کنیم متوازی‌الاضلاع ایجاد می‌شود (A_1D_1 و AD هردوموازی BC هستند؛ A_1C_1 و AC هردوموازی DE)بنابراین $a^3 < a^2$ وداریم:

$$a^1 = 1 \cdot a^2 + a^3 \quad , \quad 0 < a^3 < a^2$$

حال اگر پنج‌ضلعی منتظم $A_1B_1C_1D_1E_1$ به ضلع a^3 وقطر a^2 را در نظر بگیریم، مجدداً وضعیت پنج‌ضلعی متشابه $ABCDE$ با طول ضلع و طول‌قطربه ترتیب a^1 و a^0 تکرار می‌شود، یعنی خواهیم داشت

$$a^2 = 1 \cdot a^3 + a^4 \quad , \quad 0 < a^4 < a^3$$

به طور کلی اگر a^i ها تا a^n تعریف شده باشند، با تعریف $a^{n+1} = a^{n-1} - a^n$، و با توجه به اینکه همواره بارسم کردن‌قطرهای پنج‌ضلعی منتظم‌یک پنج‌ضلعی منتظم دیگر در درون‌پنج‌ضلعی پدید می‌آیدخواهیم‌داشت:

$$a^{n-1} = 1 \cdot a^n + a^{n+1} \quad , \quad 0 < a^{n+1} < a^n$$

بدین ترتیب در وضعیت گزاره ۱—۱هستیم و در شقی که هرگز باقیمانده به صفر نمی‌رسد، پس a^0 و a^1 همسنگ‌نیستند،یابه‌عبارت‌دیگر $\frac{a^1}{a^0}$ ناگویااست!

تمرین ۱. نشان‌دهید $\frac{a^1}{a^2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. این نسبت به نسبت طلایی معروف است و خواص ریاضی جالب توجهی دارد که بعضی از دوران باستان شناخته شده بودند. بالاخص یونانیان "زیباترین" مستطیل از نظر تناسب اضلاع را، مستطیلی می‌دانستند که نسبت طول به‌عرض آن برابر نسبت طلایی باشد. نشان‌دهیداین‌مستطیل‌ها،وفقط‌این‌مستطیل‌ها،این‌ویژگی‌رادارند که اگر ازآنها یک‌مربع‌به‌ضلع عرض‌مستطیل داده شده‌برداشته شود،مستطیل‌باقیمانده‌متشابه‌بامستطیل‌اولیه‌است.

تمرین ۲. نشان دهید اگرعدد طبیعی n مجذور کامل نباشد، $\sqrt{n}$ ناگویا است. (راهنمایی: از تجزیه اعدادطبیعی‌به‌عوامل‌اول‌استفاده‌کنید.)

دراینجا باید ب ه‌این مطل ب‌اش اره‌شو د که نظ م عددنویسی مت داول‌او و ز به صد ورت‌اعش اری (یا هر مبنای دیگر) درزمان یونان‌باستان‌وجودنداشت. یک نسبت‌گویاکه‌مطابق (۱ — ۱) در k گام‌به‌سنگه می‌رسد به صورت‌زیرنمایش‌داده‌می‌شد:

$$n^{1} + \cfrac{1}{n^{2} + \cfrac{1}{n^{3} + \cfrac{1}{\ddots \, \cfrac{1}{n^{k-1} + \cfrac{1}{n^{k}}}}}} \qquad (۵)$$

چنین‌عبارتی‌رایک‌کسرمسلسل‌متناهی (یا مختومه) می‌نامند. توجه‌کنیدکه‌طبق (۴) داریم:

$$\begin{aligned} \frac{a^{0}}{a^{1}} &= n^{1} + \frac{a^{1}}{a^{2}} = n^{1} + \frac{1}{\frac{a^{1}}{a^{2}}} \\ &= n^{1} + \frac{a^{2}}{n^{2} + \frac{1}{a^{3}}} = n^{1} + \frac{1}{n^{2} + \frac{1}{\frac{a^{2}}{a^{3}}}} \end{aligned}$$

وبا ادامهٔ استفاده از (۴) به (۵) می‌رسیم. در مورد نسبت‌های ناگویاکسر مسلسل مختومه نمی‌شود. مثلاً در مورد نسبت‌طلایی نمایش زیربه‌دست‌می‌آید:

$$\cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots \, \cfrac{1}{1 + \cdots}}}} \qquad (٦)$$

کسرهای مسلسل ام روزه‌نیز در ریاضیات کاربردهای مهم دارند، ن ه برای نم ایش‌روزمرهٔ اعداد، بلکه به من ظورمحاسبات‌تقریبی‌دقیق‌ونیزدرپاره‌ای‌مقولات‌نظری.

با روش امروزی عددنویسی (به پایهٔ ۱۰ یاهر پایهٔ دیگر)، می‌توان رهیافت ساده‌ای برای اثبات وجود نسبت‌های ناگویا مشاهده کرد. فرض کنید می‌خواهیم نسبت $\frac{n}{m}$، m و n دو عدد طبیعی، را به صورت‌اعشاری بنویسیم. .به‌روش معمولی تقسیم اگر m بر n بخش‌پذیر باشد که به یک عدد طبیعی می‌رسیم. و گرنه، پس از استفاده از همهٔ ارقام m، .باقیمانده‌ای حاصل می‌شود که از n کوچکتر و از صفر بزرگتر است. در این صورت با افزودن یک صفر به طرف راست باقیمانده به عمل تقسیم ادامه می‌دهیم. هر بار عددی کوچکتر از به عنوان باقیمانده به‌دست می‌آید. اگر این باقیمانده زمانی صفر شود به‌عددی‌به‌شکل $c^{0}/c^{1}c^{2}\ldots c^{k}$ رسیده‌ایم‌به‌معنای

$$c^{0} + \frac{10}{c^{1}} + \cdots + \frac{1}{10^{k} c_{k}}$$

است. اگر باقیمانده هیچگاه صفر نشود، هر باقیمانده باید یکی از اعداد $۱, ۲, \ldots, n - ۱$ باشد، بنابراین قطعاً با n بار تکرار، باقیمانده‌ای برای بار دوم ظاهر خواهد شد. از آن پس ارقام اعشاری به صورت اولین ظهور این باقیمانده تکرار خواهند شد. بنابراین اگر نمایش اعشاری $\frac{n}{m}$ مختومه نشود، ارقام پس از اعشار مآلاً به صورت تناوبی تکرار خواهند شد. بنابراین هر کسر اعشاری که مآلاً تناوبی نباشد نمی‌تواند نمایشگر یک عدد گویا باشد. بدین ترتیب، مثلاً:

$$۰/۱۰۱۰۰۱۰۰۰۱۰۰۰۰۱\ldots$$

که در آن طول بلوک‌های صفر هر بار یکی نسبت به قبلی افزایش می‌یابد و امکان تناوب در آن وجود ندارد برابر هیچ کسر $\frac{n}{m}$ نیست. تنها سؤالی که می‌ماند این است که آیا عبارت بالا واقعاً یک "عدد" است؟ یا به طور کلی، آیا می‌توان هر عبارت به شکل

$$c^{۰}/c^{۱}c^{۲}c^{۳}\ldots$$

که در آن $c^{۰}$ یک عدد صحیح نامنفی و بقیهٔ c^{i} ها رقم (یعنی اعداد ۰ تا ۹) هستند یک "عدد" تلقی کرد؟ برای پاسخ به این سؤال لازم است که مفهوم "عدد" به طور دقیق‌تر بررسی شود و این در جلسه آینده انجام خواهد شد.