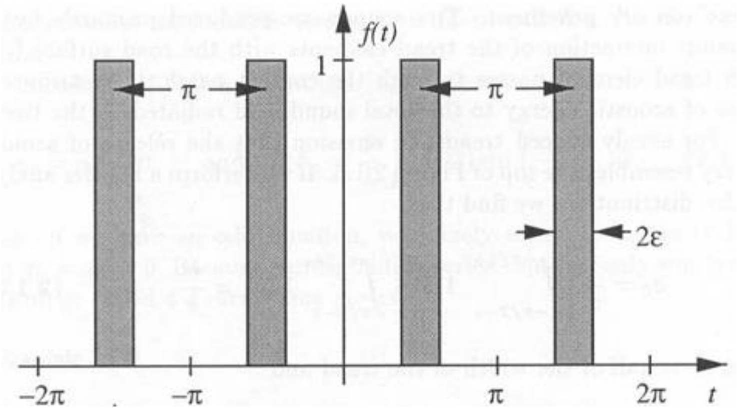
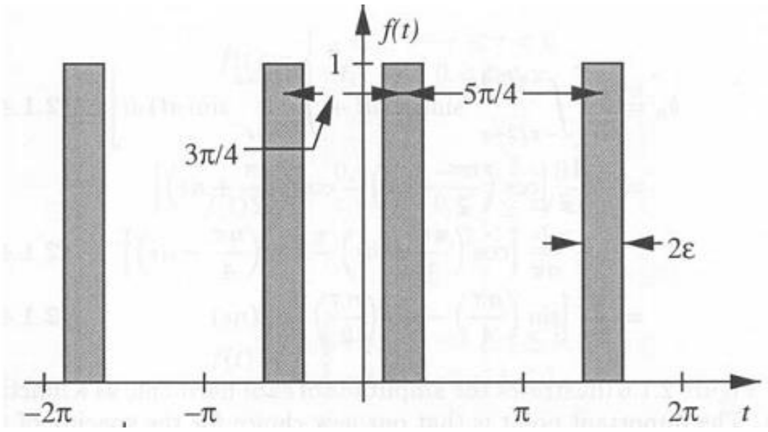
۱) یکی از کاربردهای سری فوریه مساله ای در صنعت است که سال ها پیش اتفاق افتاد. این مساله این بود که رانندگان متوجه شدند که تایرهای یخ شکن در جاده های مرطوب صداهایی را ایجاد می کنند که این صداهای تولید شده ناشی از اثر دینامیکی متقابل سطح جاده با عاج لاستیک می باشد. در اثر برخورد این عاج ها با سطح جاده پالسی از انرژی آکوستیک (acoustic energy) ایجاد می شود که این انرژی صداهای ناهنجار را ایجاد می کند. اگر فضای بین عاج ها مساوی باشد پالس ایجاد شده به صورت زیر می باشد:



در صورتی که فاصله بین عاج ها مساوی نباشد، پالس ایجاد شده به صورت زیر می باشد:



اگر فرکانس ایجاد شده بوسیله ی عاج ها را با $A_n = \frac{1}{2}\sqrt{{a_n}^2 + {b_n}^2}$ نمایش دهیم (a_n و b_n ضرایب سری فوریه پالس ایجاد شده هستند). A_n را برای هر پالس محاسبه کرده و بحث کنید که تغییر فاصله ی بین عاج ها چه تاثیری در صدای ایجاد شده بوسیله تایر دارد. (ε را به طور اختیاری $\frac{\pi}{12}$ در نظر بگیرید).

حل:

اگر فاصله بین عاج ها مساوی باشد داریم:

$$T = 2L = 2\pi \rightarrow L = \pi$$

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{+L} f(t)dt = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{-\frac{\pi}{2}+\varepsilon} 1dt + \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}+\varepsilon} 1dt\right] = \frac{4\varepsilon}{\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{+L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}\,dt = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{-\frac{\pi}{2}+\varepsilon}\cos nt\,dt + \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}+\varepsilon}\cos nt\,dt\right]$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left[\sin(nt)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{-\frac{\pi}{2}+\varepsilon} + \sin(nt)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}+\varepsilon}\right] = \frac{1}{n\pi}\left[\sin\left(-\frac{n\pi}{2}+n\varepsilon\right) - \sin\left(-\frac{n\pi}{2}-n\varepsilon\right)\right]$$

$$+\frac{1}{n\pi}\left[\sin\left(\frac{n\pi}{2}+n\varepsilon\right) - \sin\left(\frac{n\pi}{2}-n\varepsilon\right)\right]$$

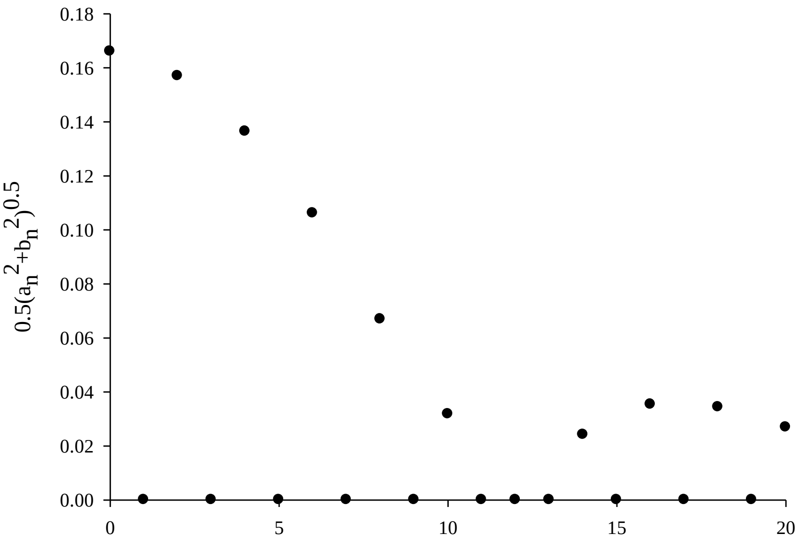
$$= \frac{1}{n\pi}\left[2\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + 2\cos\left(-\frac{n\pi}{2}\right)\right]\sin(n\varepsilon) = \frac{4}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\sin(n\varepsilon)$$

چون تابع f(t) تابعی زوج است پس ضریب b_n در سری فوریه آن برابر صفراست. اگر $\varepsilon = \frac{\pi}{12}$ قرار دهیم داریم:

$$a_0 = \frac{4}{\pi}\times\frac{\pi}{12} = \frac{1}{3}$$

$$a_n = \frac{4}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{12}\right)$$

حالا اگر نمودار $A_n = \frac{1}{2}\sqrt{{a_n}^2 + {b_n}^2}$ را در nهای مختلف رسم کنیم داریم:



اگر فاصله بین عاج ها مساوی نباشد داریم:

$$T = 2L = 2\pi \rightarrow L = \pi$$

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{+L} f(t)dt = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{-\frac{\pi}{2}+\varepsilon} 1dt + \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}+\varepsilon} 1dt\right] = \frac{4\varepsilon}{\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{+L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}dt = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{-\frac{\pi}{2}+\varepsilon} \cos ntdt + \int_{\frac{\pi}{4}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{4}+\varepsilon} \cos ntdt\right]$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left[\sin(nt)\Big|_{-\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{-\frac{\pi}{2}+\varepsilon} + \sin(nt)\Big|_{\frac{\pi}{4}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{4}+\varepsilon}\right] = \frac{1}{n\pi}\left[\sin\left(-\frac{n\pi}{2}+n\varepsilon\right) - \sin\left(-\frac{n\pi}{2}-n\varepsilon\right)\right]$$

$$+\frac{1}{n\pi}\left[\sin\left(\frac{n\pi}{4}+n\varepsilon\right) - \sin\left(\frac{n\pi}{4}-n\varepsilon\right)\right]$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left[\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right]\sin(n\varepsilon)$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{+L} f(t)\sin\frac{n\pi t}{L}dt = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{-\frac{\pi}{2}+\varepsilon} \sin ntdt + \int_{\frac{\pi}{4}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{4}+\varepsilon} \sin ntdt\right]$$

$$= -\frac{1}{n\pi}\left[\cos(nt)\Big|_{-\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{-\frac{\pi}{2}+\varepsilon} + \cos(nt)\Big|_{\frac{\pi}{4}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{4}+\varepsilon}\right] = -\frac{1}{n\pi}\left[\cos\left(\frac{n\pi}{2}-n\varepsilon\right) - \cos\left(\frac{n\pi}{2}+n\varepsilon\right)\right]$$

$$\frac{1}{n\pi}\left[\cos\left(\frac{n\pi}{4}+n\varepsilon\right) - \cos\left(\frac{n\pi}{4}-n\varepsilon\right)\right]$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left[\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right]\sin(n\varepsilon)$$

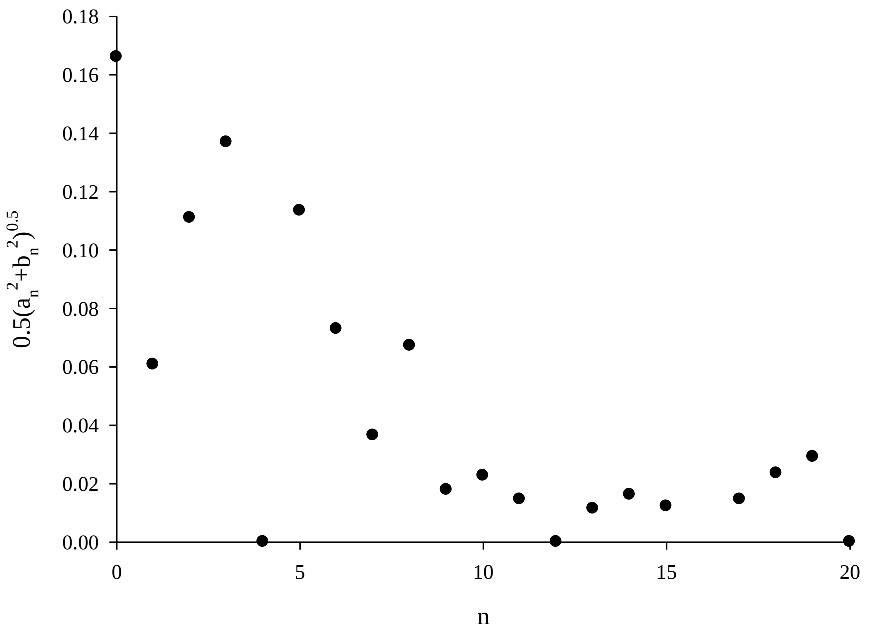
اگر $\varepsilon = \frac{\pi}{12}$ قرار دهیم داریم:

$$a_0 = \frac{4}{\pi}\times\frac{\pi}{12} = \frac{1}{3}$$

$$a_n = \frac{2}{n\pi}\left[\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right]\sin(\frac{n\pi}{12})$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi}\left[\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right]\sin(\frac{n\pi}{12})$$

حالا اگر نمودار $A_n = \frac{1}{2}\sqrt{a_n^{\ 2} + b_n^{\ 2}}$ را در nهای مختلف رسم کنیم داریم:



نکته ای که از مقایسه دو نمودار رسم شده برای فواصل مساوی و نامساوی عاج ها به آن پی میبریم این است که اگر فواصل بین عاج ها نامساوی باشند بعضی از هارمونیک ها کاهش می یابند و یا حتی حذف می شوند نسبت به حالتی که فواصل بین عاج ها مساوی باشند. پس نتیجه مفیدی که از تغییر فواصل بین عاج ها حاصل می شود این است که در حالتی که فواصل بین عاج ها نامساوی باشند سر و صدای کمتری در فرکانس های بیشتر تولید می شود نسبت به حالتی که فواصل بین عاج ها مساوی باشند که در این حالت سر و صدای بیشتری در فرکانس های کمتر تولید می شود.

۲) در طراحی سفینه، تعیین توزیع دمای روی سطح سفینه اهمیت زیادی دارد. معمولا نوسانات دما در سطح سفینه به علت چرخش آن می باشد. در صورت نازک بودن جداره ی سفینه از تغییرات در راستای شعاعی می توان صرفنظر نمود. Hrycak توانست تقریب میدان دمای بدون بعد در خط استوای یک سفینه در حال چرخش را بدست آورد که این رابطه به صورت زیر می باشد:

$$\frac{d^2T}{d\eta^2} + b\frac{dT}{d\eta} - c(T - \frac{3}{4}) = -\frac{\pi c}{4}\frac{F(\eta) + \beta/4}{1 + \pi\beta/4}$$

که:

$$b = \frac{4\pi^2 r^2 f}{a}$$

$$c = \frac{16\pi S}{\gamma T_\infty}(1 + \frac{\pi\beta}{4})$$

$$F(\eta)=\begin{cases}\cos(2\pi\eta), & 0<\eta<0.25\\ 0, & 0.25<\eta<0.75\\ \cos(2\pi\eta), & 0.75<\eta<1\end{cases}$$

$$T_\infty=(\frac{S}{\pi\sigma\varepsilon})^{0.25}\left(\frac{1+\pi\beta/4}{1+\beta}\right)^{0.25}$$

که در این معادله a پخش حرارتی پوسته سفینه، f نسبت چرخش، r شعاع سفینه، S گرمای خالص خورشید، β نسبت تشعشع دیواره داخلی سفینه به تشعشع دیواره خارجی آن ، εتشعشع دیواره خارجی، γ هدایت حرارتی دیواره و σ ثابت استیفان بولتزمن است. متغیر مستقل η فاصله نصف النهار از خط استوا با در نظر گرفتن اثرات چرخشی سفینه می باشد که از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$2\pi\eta=\varphi-2\pi ft$$

دمای مرجع T_∞ برابر دمای سفینه است اگر که سفینه با سرعت زاویه ای بینهایت چرخش کند در این صورت توزیع دمای خورشید اطراف سفینه را می توان یکنواخت در نظر گرفت. مطلوب است پیدا کردن دمای سفینه؟

راهنمایی:

برای ساده سازی مساله از تغییر متغیر های زیر استفاده کنید:

$$y=T-\frac{3}{4}-\frac{\pi\beta}{16+4\pi\beta},\quad v_0=\frac{2\pi^2r^2f}{a\rho_0},\quad A_0=-\frac{\pi\rho_0^{\,2}}{4+\pi\beta},\quad \rho_0^{\,2}=c$$

$F(\eta)$ را هم پریودیک در نظر بگیرید.

حل:

با استفاده از مشتقات زنجیره ای می توان نوشت:

$$T=y+\frac{3}{4}+\frac{\pi\beta}{16+4\pi\beta}\rightarrow\frac{dT}{dy}=1$$

$$\frac{dT}{d\eta}=\frac{dT}{dy}\frac{dy}{d\eta}=\frac{dy}{d\eta}$$

$$\frac{d^2T}{d\eta^2}=\frac{d}{d\eta}(\frac{dT}{d\eta})=\frac{d}{d\eta}(\frac{dy}{d\eta})=\frac{d^2y}{d\eta^2}$$

با قرار دادن در معادله داریم:

$$\frac{d^2y}{d\eta^2}+b\frac{dy}{d\eta}-c(y+\frac{\pi\beta}{16+4\pi\beta})=-\frac{F(\eta)\pi c}{4+\pi\beta}-\frac{\pi c\beta}{16+4\pi\beta}$$

$$b=\frac{4\pi^2 r^2 f}{a}=\frac{\rho_0 v_0}{2},\quad c=\rho_0{}^2,\quad A_0=-\frac{\pi\rho_0{}^2}{4+\pi\beta}$$

پس:

$$\frac{d^2y}{d\eta^2}+2\rho_0 v_0\frac{dy}{d\eta}-\rho_0{}^2 y+=A_0F(\eta)$$

حالا سری فوریه تابع $F(\eta)$ را می نویسیم چون این تابع، تابعی متناوب با دوره تناوب ۱ می باشد پس:

$$T=2L=1\rightarrow L=\frac{1}{2}$$

$$a_0=\frac{1}{L}\int_{-L}^{+L}F(\eta)d\eta=\frac{1}{\frac{1}{2}}\left[\int_0^{\frac{1}{4}}\cos(2\pi\eta)d\eta+\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}0dt+\int_{\frac{3}{4}}^{1}\cos(2\pi\eta)d\eta\right]=\frac{2}{\pi}$$

$$a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{+L}F(\eta)\cos\frac{n\pi\eta}{L}d\eta=\frac{1}{\frac{1}{2}}\left[\int_0^{\frac{1}{4}}\cos^2(2\pi n\eta)d\eta+\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}0\cos\frac{n\pi\eta}{L}dt+\int_{\frac{3}{4}}^{1}\cos^2(2\pi n\eta)d\eta\right]$$

$$=-\frac{2(-1)^n}{\pi(n^2-1)}\cos(\frac{n\pi}{2})$$

دقت شود عبارت فوق برای $n\neq\pm1$ یا $n\geq 2$ درست است. از آنجایی که $n=+1$ جزء دامنه حل مساله است پس a_1 را جداگانه بدست می آوریم.

$$a_1=\frac{1}{L}\int_{-L}^{+L}F(\eta)\cos\frac{\pi\eta}{L}d\eta=\frac{1}{\frac{1}{2}}\left[\int_0^{\frac{1}{4}}\cos^2(2\pi\eta)d\eta+\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}0\cos\frac{n\pi\eta}{L}dt+\int_{\frac{3}{4}}^{1}\cos^2(2\pi\eta)d\eta\right]=\frac{1}{2}$$

چون تابع $F(\eta)$ تابعی زوج است پس ضریب b_n در سری فوریه آن برابر صفراست. بنابراین:

$$F(\eta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(\frac{n\pi\eta}{L})+b_n\sin(\frac{n\pi\eta}{L})=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\cos(2\pi\eta)-\frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2-1}\cos(4n\pi\eta)$$

حالا باید معادله را حل کنیم. فرض کنید فرم جواب معادله به صورت زیر باشد:

$$y_p(\eta)=\frac{a_0}{2}+a_1\cos(2\pi\eta)+b_1\sin(2\pi\eta)+\sum_{n=2}^{\infty}a_{2n}\cos(4n\pi\eta)+b_{2n}\sin(4n\pi\eta)$$

$$y'_p(\eta) = -2\pi a_1 \sin(2\pi\eta) + 2\pi b_1 \cos(2\pi\eta) + \sum_{n=2}^{\infty} -4n\pi a_{2n} \sin(4n\pi\eta) + 4n\pi b_{2n} \cos(4n\pi\eta)$$

$$y''_p(\eta) = -4\pi^2 a_1 \cos(2\pi\eta) - 4\pi^2 b_1 \sin(2\pi\eta)$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty} -16n^2\pi^2 a_{2n} \cos(4n\pi\eta) - 16n^2\pi^2 b_{2n} \sin(4n\pi\eta)$$

با جای گذاری مقادیر بدست آمده در معادله اصلی داریم:

$$-\frac{1}{2}a_0\rho^2{}_0 - \frac{A_0}{\pi} + \left(-4\pi^2 a_1 + 4\pi\rho_0 v_0 b_1 - \rho_0{}^2 a_1 - \frac{A_0}{2}\right)\cos(2\pi\eta)$$

$$+\left(-4\pi^2 b_1 - 4\pi\rho_0 v_0 a_1 - \rho_0{}^2 b_1\right)\sin(2\pi\eta)$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\left[-16n^2\pi^2 a_{2n} + 8n\pi\rho_0 v_0 b_{2n} - \rho_0{}^2 a_{2n} + \frac{2A_0(-1)^n}{\pi(4n^2-1)}\right]\cos(4n\pi\eta)$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\left[-16n^2\pi^2 b_{2n} - 8n\pi\rho_0 v_0 a_{2n} - \rho_0{}^2 b_{2n}\right]\sin(4n\pi\eta) = 0$$

با مقایسه طرفین معادله داریم:

$$a_0 = -\frac{2A_0}{\pi\rho_0{}^2}$$

$$-(4\pi^2 + \rho_0{}^2)a_1 + 4\pi\rho_0 v_0 b_1 = \frac{A_0}{2}$$

$$(4\pi^2 + \rho_0{}^2)b_1 + 4\pi\rho_0 v_0 a_1 = 0$$

$$(16n^2\pi^2 + \rho_0{}^2)a_{2n} - 8n\pi\rho_0 v_0 b_{2n} = \frac{2A_0(-1)^n}{\pi(4n^2-1)}$$

$$(16n^2\pi^2 + \rho_0{}^2)b_{2n} + 8n\pi\rho_0 v_0 a_{2n} = 0$$

یا:

$$\left[16\pi^2\rho_0{}^2 v_0{}^2 + (4\pi^2 + \rho_0{}^2)\right]a_1 = -\frac{(4\pi^2 + \rho_0{}^2)A_0}{2}$$

$$\left[16\pi^2\rho_0{}^2 v_0{}^2 + (4\pi^2 + \rho_0{}^2)\right]b_1 = 2\pi\rho_0 v_0 A_0$$

$$\left[64n^2\pi^2\rho_0{}^2 v_0{}^2 + (16n^2\pi^2 + \rho_0{}^2)\right]a_{2n} = \frac{2(-1)^n(16n^2\pi^2 + \rho_0{}^2)A_0}{\pi(4n^2-1)}$$

$$\left[64n^2\pi^2\rho_0{}^2v_0{}^2 + (16n^2\pi^2 + \rho_0{}^2)\right]b_{2n} = -\frac{16(-1)^n \rho_0 v_0 n A_0}{(4n^2-1)}$$

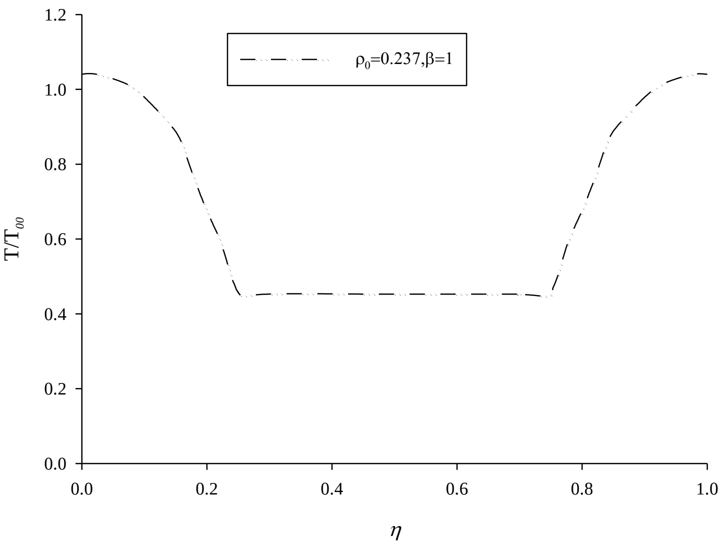
پس جواب نهایی به فرم زیر است:

$$\therefore\ y(\eta) = -\frac{A_0}{\pi\rho_0{}^2} - \frac{(4\pi^2+\rho_0{}^2)A_0\cos(2\pi\eta)}{2\left[(4\pi^2+\rho_0{}^2)^2+16\pi^2\rho_0{}^2v_0{}^2\right]} + \frac{2\pi\rho_0 v_0 A_0\sin(2\pi\eta)}{(4\pi^2+\rho_0{}^2)^2+16\pi^2\rho_0{}^2v_0{}^2}$$

$$+2\frac{A_0}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n(16n^2\pi^2+\rho_0{}^2)\cos(2n\pi\eta)}{(4n^2-1)\left[64n^2\pi^2\rho_0{}^2v_0{}^2+(16n^2\pi^2+\rho_0{}^2)^2\right]}$$

$$-16\rho_0 v_0 A_0\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n n\sin(2n\pi\eta)}{(4n^2-1)\left[64n^2\pi^2\rho_0{}^2v_0{}^2+(16n^2\pi^2+\rho_0{}^2)^2\right]}$$

در شکل زیر نمودار توزیع دما برای سفینه غیر چرخشی در η های مختلف رسم شده است:



۳) سری فوریه تابع $f(\theta)=|\cos\theta|$ را تعیین کنید. با استفاده از این سری ، سری فوریه تابع $g(\theta)$ را نیز تعیین کنید.

$$g(\theta)=\begin{cases}\cos\theta & if\ |\theta|<\dfrac{\pi}{2}\\[2mm] 0 & if\ \dfrac{\pi}{2}<|\theta|<\pi\end{cases}$$

حل:

ابتدا سری فوریه تابع $f(\theta)=|\cos\theta|$ را پیدا می کنیم:

$$T=2L=\pi \rightarrow L=\frac{\pi}{2}$$

$$a_0=\frac{1}{L}\int_{-L}^{+L} f(\theta)d\theta=\frac{2}{L}\int_{0}^{+L} f(\theta)d\theta=\frac{4}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta\right]=\frac{4}{\pi}\sin\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{\pi}$$

$$a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{+L} f(\theta)\cos\frac{n\pi\theta}{L}d\theta=\frac{2}{L}\int_{0}^{+L} f(\theta)\cos\frac{n\pi\theta}{L}d\theta=\frac{4}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\cos 2n\theta d\theta\right]$$

$$\frac{4}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\left(\cos(2n+1)\theta+\cos(2n-1)\theta\right)d\theta\right]=\frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(2n+1)\theta}{2n+1}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{\sin(2n-1)\theta}{2n-1}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right]$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(2n+1)\frac{\pi}{2}}{2n+1}+\frac{\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}}{2n-1}\right]=\frac{2}{\pi}\left[\frac{(-1)^n}{2n+1}+\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\right]=\frac{2}{\pi}\left[\frac{(-1)^n}{2n+1}-\frac{(-1)^n}{2n-1}\right]$$

$$=\frac{2(-1)^n}{\pi}\left[\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n-1}\right]=\frac{2(-1)^n}{\pi}\left[\frac{-2}{4n^2-1}\right]=\frac{4}{\pi}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\right]$$

چون تابع $f(\theta)$ تابعی زوج است پس ضریب b_n در سری فوریه آن برابر صفراست. پس سری فوریه تابع مورد نظر به صورت زیر است:

$$\therefore\ f(\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(\frac{n\pi\theta}{L})+b_n\sin(\frac{n\pi\theta}{L})=\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\cos(2n\pi\theta)$$

قسمت دوم:

با توجه به شکل فوق داریم:

$$g(\theta)=\frac{f(\theta)+\cos\theta}{2}$$

پس سری فوریه تابع $g(\theta)$ به صورت زیر است:

$$\therefore g(\theta)=\frac{1}{\pi}+\frac{2}{\pi}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\cos(2n\pi\theta)\right]+\frac{\cos\theta}{2}$$

۴) مطلوب است حل معادله زیر:

$$y''+9y=\frac{\pi}{2}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{i(2n-1)t}}{(2n-1)^2}$$

حل:

$y = y_h + y_p$

جواب عمومی معادله فوق به صورت زیر است:

$s^2 + 9 = 0 \rightarrow s = \pm 3i$

$y_h = A\cos 3t + B\sin 3t$

از طرفی فرم جواب خصوصی به صورت زیر است:

$$y_p(t) = c_0 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i(2n-1)t}$$

با دو بار مشتق گیری از عبارت فوق داریم:

$$y'_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (2n-1) i c_n e^{i(2n-1)t}$$

$$y''_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -(2n-1)^2 c_n e^{i(2n-1)t}$$

با قرار دادن مقادیر بدست آمده در معادله اصلی داریم:

$$9c_0 + \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \left[9 - (2n-1)^2\right] c_n e^{i(2n-1)t} = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(2n-1)t}}{(2n-1)^2}$$

از مقایسه طرفین معادله داریم:

$$c_0 = \frac{\pi}{18}$$

$$c_n = \frac{2}{\pi(2n-1)^2\left[(2n-1)^2 - 9\right]}$$

پس جواب خصوصی به صورت زیر است:

$$y_p(t) = \frac{\pi}{18} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(2n-1)t}}{(2n-1)^2\left[(2n-1)^2 - 9\right]}$$

عبارت بالا وقتی صحیح است که $n \neq -1,2$. برای $n = -1,2$ داریم:

$$y_p(t) = \frac{\pi}{18} + c_2 t e^{3it} + c_{-1} t e^{-3it} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(2n-1)t}}{(2n-1)^2\left[(2n-1)^2 - 9\right]}$$

حالا c_{-1} و c_2 را محاسبه می کنیم. برای $n = 2$ داریم:

$$y_p(t)=c_2te^{i3t}\rightarrow y'_p=c_2(e^{3it}+3ite^{3it})\rightarrow y''_p=c_2(6ie^{3it}-9te^{3it})$$

با قرار دادن در معادله داریم:

$$c_2(6ie^{3it}-9te^{3it}+9te^{3it})=-\frac{2}{9\pi}e^{3it}\rightarrow c_2=-\frac{1}{27\pi i}$$

برای $n=-1$ داریم:

$$y_p(t)=c_{-1}te^{-i3t}\rightarrow y'_p=c_{-1}(e^{-3it}-3ite^{-3it})$$

$$\rightarrow y''_p=c_{-1}(-6ie^{-3it}+9te^{-3it})$$

با قرار دادن در معادله داریم:

$$c_{-1}(-6ie^{-3it}-9te^{-3it}+9te^{-3it})=-\frac{2}{9\pi}e^{-3it}\rightarrow c_{-1}=\frac{1}{27\pi i}$$

پس جواب خصوصی به فرم زیر است:

$$y_p(t)=\frac{\pi}{18}-\frac{1}{27\pi i}te^{3it}+\frac{1}{27\pi i}te^{-3it}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{i(2n-1)t}}{(2n-1)^2\left[(2n-1)^2-9\right]}$$

جواب کلی معادله هم به فرم زیر است:

$$\therefore y=y_p+y_h=A\cos 3it+B\sin 3it+\frac{\pi}{18}-\frac{1}{27\pi i}te^{3it}+\frac{1}{27\pi i}te^{-3it}$$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{i(2n-1)t}}{(2n-1)^2\left[(2n-1)^2-9\right]}$$

۵) سری فوریه تابع زیر را محاسبه نموده و مشخص کنید برای چه محدوده ای از t سری فوریه به مقدار تابع همگرا می شود؟

$$f(t)=\begin{cases}0\rightarrow -\pi<t<0\\ \cos t\rightarrow 0<t<\pi\end{cases}$$

حل:

ابتدا ضرایب سری فوریه را بدست می آوریم:

$$T=2L=2\pi\rightarrow L=\pi$$

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{+L}\cos t dt = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0 dt + \int_{0}^{\pi}\cos t dt\right] = \frac{1}{\pi}\sin t\Big|_0^\pi = 0$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{+L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}dt = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0\cos nt dt + \int_{0}^{\pi}\cos t\cos nt dt\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\left[\cos(n+1)t + \cos(n-1)t\right]dt = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin(n+1)t}{n+1}\Big|_0^\pi + \frac{1}{2\pi}\frac{\sin(n-1)t}{n-1}\Big|_0^\pi = 0$$

عبارت فوق برای همه ی مقادیر n برقرار است به جز در ریشه های مخرج یعنی $n = \pm 1$. از طرفی فقط n=1 در دامنه سری فوریه موجود است یعنی در n=1 ضریب a_n را جداگانه محاسبه می کنیم:

$$a_1 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{+L} f(t)\cos\frac{1\pi t}{L}dt = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0\cos t dt + \int_{0}^{\pi}\cos t\cos t dt\right] = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos^2 t dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}(1+\cos 2t)dt = \frac{1}{2\pi}\left[t\Big|_0^\pi + \frac{\sin 2t}{2}\Big|_0^\pi\right] = \frac{1}{2\pi}\pi = \frac{1}{2}$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{+L} f(t)\sin\frac{n\pi t}{L}dt = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0\sin nt dt + \int_{0}^{\pi}\cos t\sin nt dt\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\left[\sin(n+1)t + \sin(n-1)t\right]dt = \frac{-1}{2\pi}\frac{\cos(n+1)t}{n+1}\Big|_0^\pi - \frac{1}{2\pi}\frac{\cos(n-1)t}{n-1}\Big|_0^\pi$$

$$= \frac{-1}{2\pi}\left[\frac{\cos(n+1)\pi}{n+1} + \frac{\cos(n-1)\pi}{n-1} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1}\right] = -\frac{\left[(-1)^{n+1}-1\right]}{2\pi}\frac{2n}{n^2-1}$$

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{2n}{\pi\left(n^2-1\right)} \to n \ is \ even \\ 0 \to n \ is \ odd \end{cases}$$

$$\therefore\ f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n\cos(\frac{n\pi x}{L}) + b_n\sin(\frac{n\pi x}{L}) = \frac{1}{2}\cos x + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4n^2-1}\sin(2nx)$$

سری فوریه در همه جا به f(x) همگرا می شود به جز درx=0 که به $\frac{1}{2}$ و در $x = \pm\pi$ که به $-\frac{1}{2}$ همگرا می شود. دقت شود تابع در همه جا پیوسته است به جز در $x = 0, \pm\frac{1}{2}$.

طبق قضیه همگرایی سری فوریه در نقاط پیوستگی سری فوریه به خود تابع و در نقاط گسستگی به میانگین حد چپ و راست همگرا می شود. برای نقاط ناپیوستگی در این مساله داریم:

$$x = 0 \to \ forier\ \ series\ = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$x = \pm\frac{1}{2} \to \ forier\ \ series\ = \frac{0-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

۶) معادله روبرو را حل کنید به طوریکه $F(t) = F(t+\pi)$ بوده و سری فوریه آن به فرم زیر باشد:

$$y'' + 9y = F(t)$$

$$y(0) = 0$$

$$y'(0) = 0$$

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\cos(nt)}{n^2} + (-1)^n\frac{\sin(nt)}{n}\right]$$

حل:

معادله خطی مرتبه ۲ با ضرایب ثابت است که دارای جواب خصوصی و عمومی به صورت زیر است:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

حل عمومی:

$$y'' + 9y = 0 \to \lambda^2 + 9 = 0 \to \lambda = \pm 3i$$

$$y_h(t) = c_1\cos 3t + c_2\sin 3t$$

حل خصوصی:

با توجه به سمت راست معادله فرم جواب خصوصی به صورت زیر است:

$$y_{p,n}(t) = A_n\cos nt + B_n\sin nt$$

با مشتق گیری از عبارت فوق داریم:

$$y'_{p,n}(t) = -nA_n\sin nt + nB_n\cos nt$$

$$y''_{p,n}(t) = -n^2A_n\cos nt - n^2B_n\sin nt$$

با جای گذاری در معادله داریم:

$$-n^2A_n\cos nt - n^2B_n\sin nt + A_n\cos nt + B_n\sin nt = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\cos(nt)}{n^2} + (-1)^n\frac{\sin(nt)}{n}\right]$$

$$A_n = \frac{1}{n^2(9-n^2)},\ \ B_n = \frac{(-1)^n}{n(9-n^2)}$$

عبارت فوق برای همه ی مقادیر n برقرار است به جز در ریشه های مخرج یعنی $n=0,\pm 3$. از طرفی فقط n=3 در دامنه سری فوریه موجود است یعنی در n=3 جواب باید جداگانه محاسبه شود:

$$y_3''(t)+9y_3(t)=a_3\cos 3t+b_3\sin 3t$$

در این حالت جواب خصوصی به صورت زیر است:

$$y_{p,3}(t)=\left(A_3\cos 3t+B_3\sin 3t\right)t$$

با مشتق گیری از عبارت فوق داریم:

$$y'_{p,3}(t)=\left(A_3\cos 3t+B_3\sin 3t\right)+t(-3A_3\sin 3t+3B_3\cos 3t)$$

$$y''_{p,3}(t)=\left(-9A_3\cos 3t-9B_3\sin 3t\right)+t(-6A_3\sin 3t+6B_3\cos 3t)$$

با جای گذاری مقادیر فوق در معادله داریم:

$$A_3=-\frac{b_3}{6}=-\frac{1}{18}$$

$$B_3=\frac{a_3}{6}=\frac{1}{54}$$

پس جواب خصوصی به فرم زیر است:

$$y_p(t)=\sum_{n=1,\neq 3}^{\infty}\left[\frac{1}{n^2(9-n^2)}\cos nt+\frac{(-1)^n}{n(9-n^2)}\sin nt\right]+\frac{t}{6}\left[\frac{-\cos 3t}{3}+\frac{\sin 3t}{9}\right]$$

جواب نهایی هم به فرم زیر است:

$$y(t)=c_1\cos 3t+c_2\sin 3t\sum_{n=1,\neq 3}^{\infty}\left[\frac{1}{n^2(9-n^2)}\cos nt+\frac{(-1)^n}{n(9-n^2)}\sin nt\right]$$

$$+\frac{t}{6}(-\frac{\cos 3t}{3}+\frac{\sin 3t}{9})$$

که c_1 و c_2 ثابت های دلخواه هستند که از شرایط مرزی محاسبه می شوند:

$$y(0)=0\rightarrow c_1=-\sum_{n=1,\neq 3}^{\infty}\frac{1}{n^2(9-n^2)}$$

$$y'(0)=0\rightarrow c_2=\frac{1}{54}-\frac{1}{3}\sum_{n=1,\neq 3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{9-n^2}$$

۷) انتگرال فوریه تابع زیر را محاسبه کرده و مشخص کنید این انتگرال چه موقع به مقدار تابع همگرا می شود؟

$$f(t)=\begin{cases}1-\cos x \to |x|<\dfrac{\pi}{2}\\ 0 \to |x|>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

حل:

$$f(x)=\int_0^{\infty}\left(A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x\right)d\omega$$

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(f(x)\cos\omega x\right)dx$$

$$B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(f(x)\sin\omega x\right)dx$$

چون f(x) یک تابع زوج است بنابراین $B(\omega)=0$.

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos x)\cos\omega x dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\omega x-\cos x\cos\omega x)dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\omega x dx-\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cos\omega x dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\omega t dt-\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{[\cos(1-\omega)t+\cos(1+\omega)t]}{2}dt$$

$$=\frac{2}{\pi}\frac{\sin(\frac{\omega\pi}{2})}{\omega}-\frac{1}{\pi}\frac{\sin\frac{(1-\omega)\pi}{2}}{1-\omega}-\frac{1}{\pi}\frac{\sin\frac{(1+\omega)\pi}{2}}{1+\omega}=\frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin\frac{\omega\pi}{2}}{\omega}-\frac{\cos\frac{\omega\pi}{2}}{1-\omega^2}\right]$$

$$A(\omega)=\frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin\frac{\omega\pi}{2}}{\omega}-\frac{\cos\frac{\omega\pi}{2}}{1-\omega^2}\right]$$

رابطه فوق به ازای $\omega\neq 0,\pm1$ بر قرار است.

$$if\ \omega=0\to A(0)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos x)dx=1-\frac{2}{\pi}$$

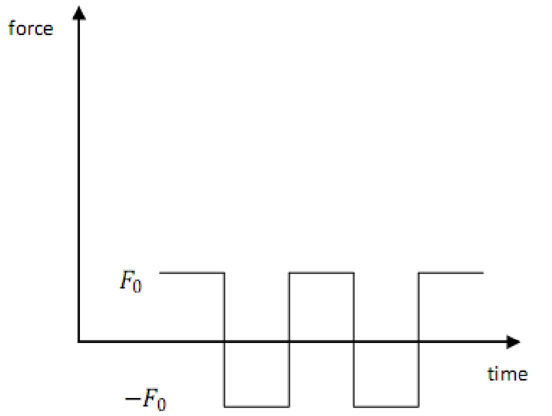
$$if\ \omega=\pm1\to A(\pm1)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x(1-\cos x)dx=\frac{2}{\pi}\frac{\sin(\pm\frac{\pi}{2})}{\pm1}-\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t dt=\frac{2}{\pi}-\frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left[\frac{\sin\frac{\omega\pi}{2}}{\omega}-\frac{\cos\frac{\omega\pi}{2}}{1-\omega^2}\right]\cos\omega x d\omega=\begin{cases}1-\cos x\to|x|<\frac{\pi}{2}\\0\to|x|>\frac{\pi}{2}\\\frac{1}{2}\to x=\pm\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

طبق قضیه همگرایی انتگرال فوریه در نقاط پیوستگی انتگرال فوریه به خود تابع و در نقاط گسستگی به میانگین حد چپ و راست همگرا می شود. برای نقاط ناپیوستگی در این مساله داریم:

$$x=\pm\frac{\pi}{2}\to forier\ \ \text{int}\,egral=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}$$

۸) یک سیستم جرم-فنر یک درجه آزادی بدون استهلاک تحت اثر نیروی پریودیک مربعی شکل نشان داده شده در شکل می باشد،چنانچه با استفاده از روش تبدیل فوریه این نیرو تبدیل به نیروهای هارمونیکی ساده گرددودر این تبدیل فقط از سه ترم اول بسط استفاده شود،در محاسبات چنددرصدخطا در تابع نیرواعمال خواهدشد؟ (تابع فرد است)



حل:

دوره تناوب تابع را به طور دلخواه $T=2\pi$ در نظر میگیریم.

چون تابع فوق فرد است پس:

$$a_0=a_n=0$$

$$T=2L=2\pi\to L=\pi$$

$$b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{+L}f(t)\sin\frac{n\pi t}{L}dt=\frac{2}{L}\int_0^{+L}f(t)\sin\frac{n\pi t}{L}dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}F_0\sin ntdt=-\frac{2F0}{\pi n}\cos nt\Big|_0^{\pi}$$

$$=\frac{2F_0}{n\pi}(1-\cos n\pi)=\frac{4F_0}{(2n-1)\pi}(n=1,2,3,....)$$

پس سری فوریه تابع به صورت زیر است:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(\frac{(2n-1)\pi x}{L})+b_n\sin(\frac{(2n-1)\pi x}{L})=\frac{4F_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin\left((2n-1)t\right)$$

اگر سه جمله اول این سری را در نظر بگیریم داریم:

$$f(x)=\frac{4F0}{\pi}(\sin t+\frac{\sin 3t}{3}+\frac{\sin 5t}{5})$$

در نقطه $t=\frac{\pi}{2}$ مقدار سری فوریه برابر است با:

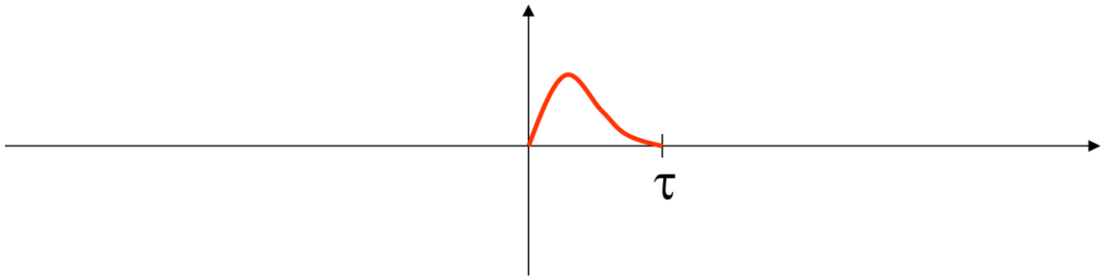
$$f(\frac{\pi}{2})=\frac{4F0}{\pi}(\sin\frac{\pi}{2}+\frac{\sin\frac{3\pi}{2}}{3}+\frac{\sin\frac{5\pi}{2}}{5})=\frac{4F0}{\pi}(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5})=\frac{52F_0}{15\pi}\approx 1.1F_0$$

از طرفی مقدار واقعی تابع در نقطه $t=\frac{\pi}{2}$ برابر F_0 است.

پس درصد خطا برابراست با:

$$\therefore error=\frac{1.1F_0-F_0}{F_0}\times 100\approx 10\%$$

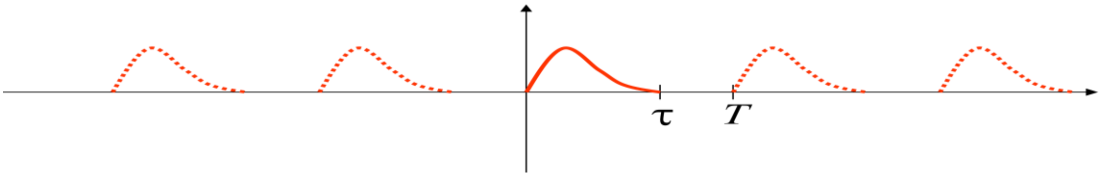
۹) تابع غیر پریودیک f(t) که در بازه ی $(0,\tau)$ تعریف شده است را در نظر بگیرید. مطلوبست نمایش بسط نیم قلمرو و یک چهارم قلمرو این تابع به صورت زوج، فرد و نه زوج ونه فرد.



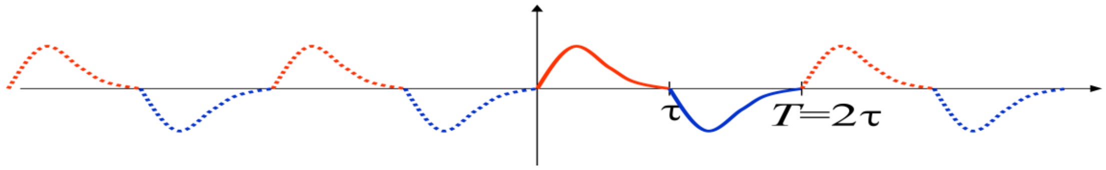
حل:

با دانستن این مطلب که تابع زوج تقارن نسبت به محور عمودی و تابع فرد تقارن نسبت به مبدا مختصات دارد، داریم:

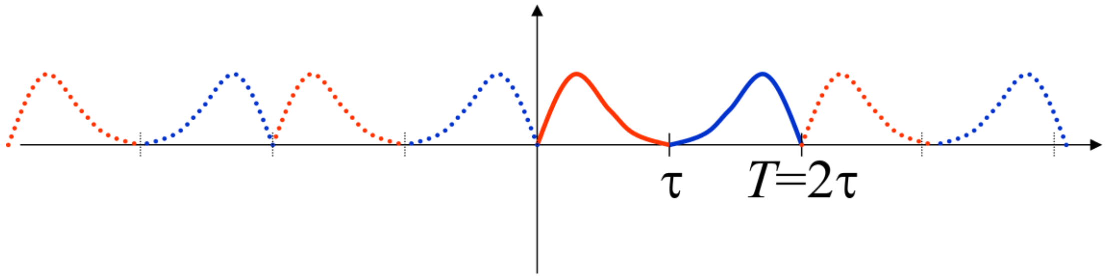
بسط نه زوج و نه فرد به صورت غیر متقارن:



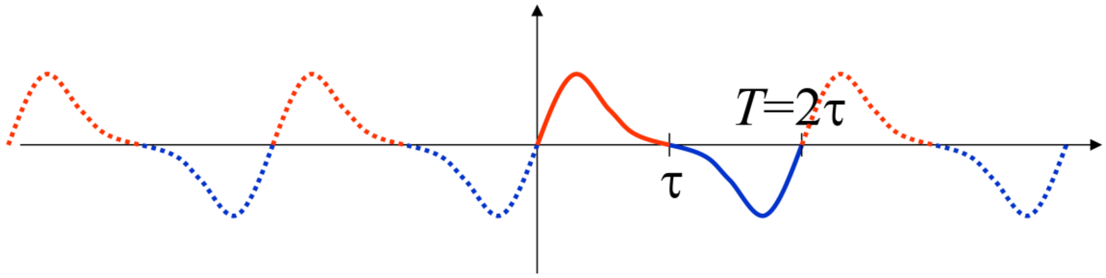
بسط نه زوج و نه فرد به صورت متقارن:



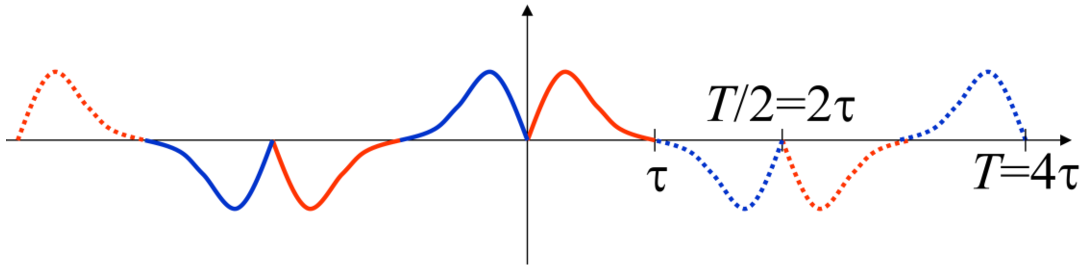
بسط نیم قلمرو به صورت زوج و متقارن:



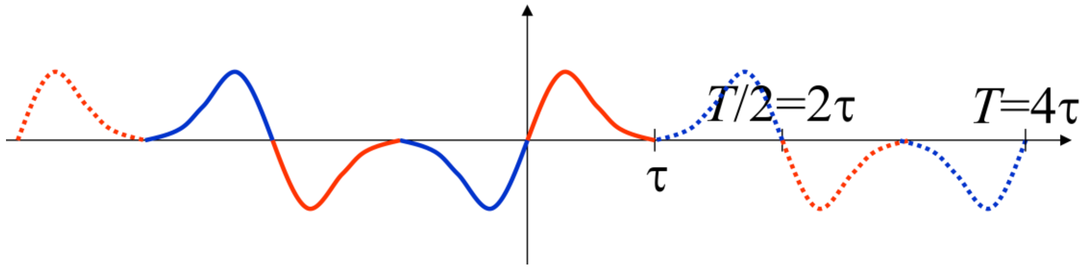
بسط نیم قلمرو به صورت فرد و متقارن:



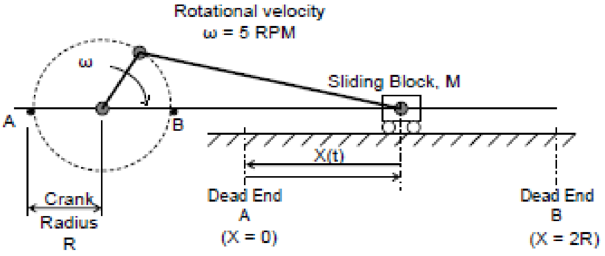
بسط یک چهارم قلمرو به صورت زوج و متقارن:



بسط یک چهارم قلمرو به صورت فرد و متقارن:



۱۰) مطلوب است پیدا کردن سری فوریه ای که موقعیت لغزنده ((x(t)) را در زمان های متفاوت توصیف کند. دقت شود که زمان t بر حسب دقیقه می باشد. همچنین بازوی چرخنده با سرعت ثابت 5rpm حرکت می کند.



حل:

معادله ای که موقعیت لغزنده را در زوایای مختلف توصیف می کند به صورت زیر است:

$$x = R - R\cos\theta$$

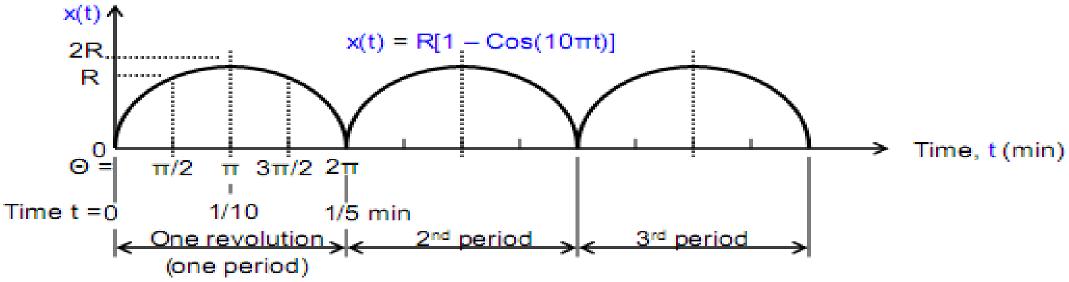
از طرفی برای $N = 5rpm$ داریم:

$$\frac{\theta}{2\pi} = \frac{t}{\frac{1}{5}} = 5t \rightarrow \theta = 10\pi t$$

پس:

$$x = R - R\cos 10\pi t \rightarrow x(t) = R(1 - \cos 10\pi t) \quad 0 < t < \frac{1}{5}\min$$

با رسم تابع فوق در زمان های مختلف داریم:



$$T = 2L = \frac{1}{5} \rightarrow L = \frac{1}{10}$$

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{+L} x(t)dt = \frac{2}{L}\int_0^L x(t)dt = \frac{2}{\frac{1}{10}}\left[\int_0^{\frac{1}{10}} R(1-\cos(10\pi t))dt\right] = 20R\left(t - \frac{\sin(10\pi t)}{10\pi}\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{10}}$$

$$= 2R$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{+L} x(t)\cos\frac{n\pi t}{L}dt = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} x(t)\cos\frac{n\pi t}{L}dt = \frac{1}{\frac{1}{10}}\left[\int_{0}^{\frac{1}{10}} R(1-\cos(10\pi t))\cos(10\pi n t)dt\right]$$

$$= 20R\left[\int_{0}^{\frac{1}{10}} \cos 10n\pi t - \cos(10\pi t)\cos(10\pi n t)dt\right]$$

$$= 20R\left[\frac{\sin 10n\pi t}{10n\pi}\Bigg|_{0}^{\frac{1}{10}} - \int_{0}^{\frac{1}{10}} \cos(10\pi t)\cos(10n\pi t)dt\right]$$

$$= 20R\left[0 - \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{1}{10}}\left(\cos(n+1)10\pi t + \cos(n-1)10\pi t\right)dt\right]$$

$$= \frac{2R}{\pi}\left[\frac{\sin(n+1)10\pi t}{(n+1)}\Bigg|_{0}^{\frac{1}{10}} + \frac{\sin(n-1)10\pi t}{n-1}\Bigg|_{0}^{\frac{1}{10}}\right] = 0$$

دقت شود عبارت فوق برای $n \neq \pm 1$ یا $n \geq 2$ درست است. از آنجایی که $n = +1$ جزء دامنه حل مساله است پس a_1 را جداگانه بدست می آوریم.

$$a_1 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{+L} x(t)\cos\frac{\pi t}{L}dt = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} x(t)\cos\frac{\pi t}{L}dt = \frac{1}{\frac{1}{10}}\left[\int_{0}^{\frac{1}{10}} R(1-\cos(10\pi t))\cos(10\pi t)dt\right]$$

$$= 20R\left[\int_{0}^{\frac{1}{10}} \cos 10\pi t - \cos^2(10\pi t)dt\right] = 20R\left[\frac{\sin 10\pi t}{10\pi}\Bigg|_{0}^{\frac{1}{10}} - \int_{0}^{\frac{1}{10}}\frac{\left(1+\cos(20\pi t)\right)}{2}\right]$$

$$= 20R\left[0 - \frac{1}{2}\left(t + \frac{\sin(20\pi t)}{20\pi}\right)\Bigg|_{0}^{\frac{1}{10}}\right] = -R$$

چون تابع $f(t)$ تابعی زوج است پس ضریب b_n در سری فوریه آن برابر صفراست. بنابراین:

$$\therefore\ x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(\frac{n\pi t}{L}) + b_n \sin(\frac{n\pi t}{L}) = R - R\cos(10\pi t) = R(1-\cos(10\pi t))$$

۱۱) سری فوریه تابع زیر را تعیین وبه کمک آن حاصل سری S را بیابید.

$$f(x)=\begin{cases}1+2x & -1\le x<0\\ 1-2x & 0\le x<1\end{cases}$$

$$S=\frac{1}{1^3}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-......$$

حل:

$$T=2L=2\to L=1$$

$$a_0=\frac{1}{L}\int_{-L}^{+L}f(x)dx=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)dx=2\left[\int_0^1(1-2x)dx\right]=2\left(x-x^2\right)\Big|_0^1=0$$

$$a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{+L}f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx=2\left[\int_0^1(1-2x)\cos(\pi nx)dx\right]$$

$$=2\left[\int_0^1\cos n\pi x-2x\cos(\pi nx)dx\right]=2\left[\frac{\sin(n\pi x)}{n\pi}\Big|_0^1-2\int_0^1 x\cos(n\pi x)dx\right]$$

$$x=u\to du=dx$$

$$dv=\cos(n\pi x)dx\to v=\frac{\sin(n\pi x)}{n\pi}$$

$$a_n=2\left[0+\frac{2x\sin(n\pi x)}{n\pi}\Big|_0^1+\int_0^1\frac{\sin(n\pi x)}{n\pi}\right]=-4\frac{\cos(n\pi x)}{n^2\pi^2}\Big|_0^1=-\frac{4}{n^2\pi^2}(\cos n\pi-1)$$

$$an=\begin{cases}0\to n\ is\ even\\ \dfrac{8}{n^2\pi^2}\to n\ is\ odd\end{cases}$$

چون تابع $f(x)$ تابعی زوج است پس ضریب b_n در سری فوریه آن برابر صفراست. بنابراین:

$$\therefore\ f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1,3,5,...}^{\infty}a_n\cos(\frac{n\pi x}{L})+b_n\sin(\frac{n\pi x}{L})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{(2n-1)^2\pi^2}\cos((2n-1)\pi x)$$

برای حل قسمت دوم از طرفین رابطه بالا انتگرال می گیریم:

$$\int f(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{(2n-1)^3\pi^3}\sin((2n-1)\pi x)$$

$$\int f(x)dx=\begin{cases}x+x^2 & -1\le x<0\\ x-x^2 & 0\le x<1\end{cases}+c=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{(2n-1)3\pi^3}\sin((2n-1)\pi x)$$

از طرفی چون در x=0 مقدار انتگرال تابع f(x) برابر صفر است. پس c=0 است.

$$\begin{cases} x+x^2 & -1\le x<0 \\ x-x^2 & 0\le x<1 \end{cases} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{(2n-1)3\pi^3}\sin((2n-1)\pi x)$$

از طرفی چون تابع فوق در $x=\frac{1}{2}$ پیوسته است، طبق قضیه همگرایی سری فوریه باید مقدار سری فوریه در این نقطه به مقدار تابع همگرا شود پس:

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{(2n-1)^3\pi^3}\sin((2n-1)\frac{\pi}{2}) \to \frac{1}{4}=8(\frac{1}{1^3}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-....)$$

پس جواب نهایی برابر است با:

$$\therefore S=\frac{1}{1^3}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-......=\frac{\pi^3}{32}$$

۱۲) مطلوب است حل مساله مقدار مرزی زیر به کمک تبدیل فوریه:

$$-\frac{d^2u}{dx^2}++k^2u=e^{-|x|} \quad -\infty<x<\infty$$

که در معادله فوق k ثابت مثبت است. همچنین به عنوان شرط مرزی $u(x)\to 0$ وقتی که $|x|\to\infty$.

حل:

ابتدا از تک تک جملات معادله بالا تبدیل فوریه می گیریم:

$$F\left\{\frac{d^2u}{dx^2}\right\}=\omega^2U(\omega)$$

$$F\{u\}=U(\omega)$$

$$F\{e^{-|x|}\}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+\omega^2}$$

با قرار دادن در معادله داریم:

$$\omega^2U(\omega)+k^2U(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+\omega^2} \to U(\omega)\left[\omega^2+k^2\right]=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+\omega 2}$$

$$U(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+\omega^2}\frac{1}{\omega^2+k^2}$$

حالا برای یافتن جواب از معادله فوق تبدیل معکوس فوریه می گیریم:

$$u(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}U(\omega)e^{i\omega x}d\omega \rightarrow u(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+\omega^2}\frac{1}{k^2+\omega^2}e^{i\omega x}d\omega$$

$$U(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+\omega^2}\frac{1}{\omega^2+k^2}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{k^2-1}\left[\frac{1}{1+\omega^2}-\frac{1}{k^2+\omega^2}\right],\ k^2\neq 1$$

از طرفی می دانیم:

$$F\left\{e^{-|x|}\right\}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+\omega^2}$$

پس جواب نهایی به فرم زیر است:

$$\therefore u(x)=\frac{1}{k^2-1}\left[e^{-|x|}-\frac{1}{k}e^{-k|x|}\right],\ k^2\neq 1$$

همچنین واضح است که عبارت فوق به طور اتوماتیک شرط مرزی $u(x)\rightarrow 0$ وقتی که $|x|\rightarrow\infty$ باشد را ارضاء می کند.

۱۳) معادله تغییر مکان یک ستون با سطح مقطع متغیر، در صورتی که شعاع متناسب با $\sqrt{x}$ باشد از رابطه:

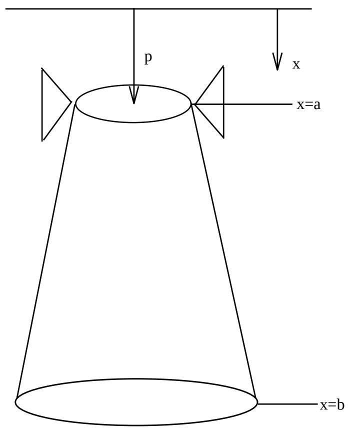
$$\begin{cases} x^2y''+\lambda y=0 \quad ,a<x<b \\ y(a)=0 \\ y(b)=0 \end{cases}$$

داده شده است که $\lambda=\frac{b^2P}{EI_0}$ ، P بار وارده ، E مدول الاسیسیته و I_0 ممان اینرسی مقطع در $x=b$ است.

اولا-جواب کلی تغییر مکان ستون را وقتی $\lambda>\frac{1}{4}$ است بیابید.

ثانیا- نشان دهید که بار بحرانی برابر است با:

$$P_{cr}=\frac{EI_0}{b^2}\left[\frac{1}{4}+\frac{\pi^2}{\left(\ln(\frac{b}{a})\right)^2}\right]$$



حل:

ابتدا معادله زیر را که یک معادله کشی اویلر است را حل می کنیم:

$$\begin{cases} x^2 y'' + \lambda y = 0 \qquad , a < x < b \\ y(a) = 0 \\ y(b) = 0 \end{cases}$$

برای حل از تغییر متغیر زیر استفاده می کنیم:

$$x = e^z \rightarrow z = \ln x \rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dz}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dz}\right) = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dz} + \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dz^2}$$

با قرار دادن در معادله اصلی داریم:

$$\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz} + \lambda y = 0$$

با فرض $\lambda > \frac{1}{4}$ معادله فوق دارای جوابی به فرم زیر است:

$$y(z) = e^{\frac{z}{2}}\left[A\cos\left((\sqrt{\lambda - \frac{1}{4}})z\right) + B\sin\left((\sqrt{\lambda - \frac{1}{4}})z\right)\right]$$

$$y(x) = x^{\frac{1}{2}}\left[C\cos\left((\sqrt{\lambda - \frac{1}{4}})\ln x\right) + D\sin\left((\sqrt{\lambda - \frac{1}{4}})\ln x\right)\right]$$

که ضرایب C,D از شرایط مرزی قابل محاسبه اند.

حل قسمت دوم:

با استفاده از شرایط مرزی داریم:

$$y(a)=a^{\frac{1}{2}}\left[C\cos\left((\sqrt{\lambda-\frac{1}{4}})\ln a\right)+D\sin\left((\sqrt{\lambda-\frac{1}{4}})\ln a\right)\right]=0$$

$$y(b)=b^{\frac{1}{2}}\left[C\cos\left((\sqrt{\lambda-\frac{1}{4}})\ln b\right)+D\sin\left((\sqrt{\lambda-\frac{1}{4}})\ln b\right)\right]=0$$

پس به دستگاه دو معادله دو مجهول زیر می رسیم:

$$\left[C\cos\left((\sqrt{\lambda-\frac{1}{4}})\ln a\right)+D\sin\left((\sqrt{\lambda-\frac{1}{4}})\ln a\right)\right]=0$$

$$\left[C\cos\left((\sqrt{\lambda-\frac{1}{4}})\ln b\right)+D\sin\left((\sqrt{\lambda-\frac{1}{4}})\ln b\right)\right]=0$$

می دانیم برای آنکه دستگاه دو معادله دو مجهول فوق دارای جواب غیر بدیهی داشته باشد باید دترمینان ضرایب آن مساوی صفر باشد. پس:

$$\begin{vmatrix}\cos\left((\sqrt{\lambda-\frac{1}{4}})\ln a\right) & \sin\left((\sqrt{\lambda-\frac{1}{4}})\ln a\right)\\ \cos\left((\sqrt{\lambda-\frac{1}{4}})\ln b\right) & \sin\left((\sqrt{\lambda-\frac{1}{4}})\ln b\right)\end{vmatrix}=0\rightarrow\sin\left((\sqrt{\lambda-\frac{1}{4}})[\ln b-\ln a]\right)=0$$

پس:

$$\sin\left((\sqrt{\lambda-\frac{1}{4}})\left[\ln\frac{b}{a}\right]\right)=0\rightarrow\sqrt{\lambda-\frac{1}{4}}\left(\ln\frac{b}{a}\right)=n\pi\rightarrow\lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{\left(\ln\frac{b}{a}\right)^2}+\frac{1}{4}$$

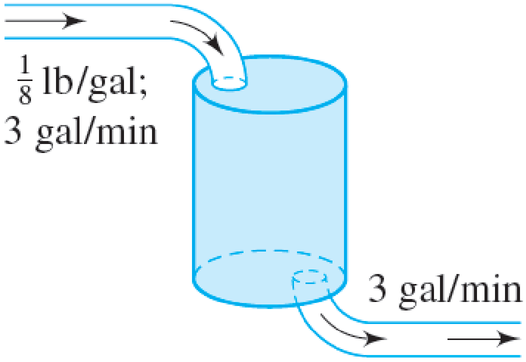
از طرفی با توجه به صورت مساله داریم:

$$\lambda=\frac{b^2P}{EI_0}$$

همچنین می دانیم بار بحرانی کمترین باری است که به ازای آن کمانش روی می دهد. پس این بار به ازای n=1 روی می دهد. پس داریم:

$$\lambda=\frac{b^2 p}{EI_0}=\frac{n^2\pi^2}{\left(\ln\frac{b}{a}\right)^2}+\frac{1}{4}\rightarrow\therefore P_{cr}=\frac{EI_0}{b^2}\left[\frac{\pi^2}{\left(\ln\frac{b}{a}\right)^2}+\frac{1}{4}\right]$$

۱۴) مخزنی حاوی ۲۰۰ گالون مخلوط آب نمک که حاوی ۱۰۰ پوند نمک به صورت محلول است را در نظر بگیرید. مخلوطی که شامل یک هشتم پوند بر واحد گالون نمک است با دبی ۳ گالون بر دقیقه وارد مخزن می شود. محتویات مخزن به طور پیوسته در حال به هم خوردن است. همچنین این مخلوط با دبی ۳ گالون بر دقیقه از مخزن خارج می شود. میزان نمک موجود در مخزن در هر لحظه را محاسبه کنید.



حل:

می دانیم که نرخ تغییرات دبی درون مخزن برابر است با تفاضل دبی ورودی و خروجی از مخزن. پس:

$$\frac{dQ}{dt}=(rate\ in)-(rate\ out)=(\frac{1}{8}\frac{pounds}{gallon})(3\frac{gallons}{\min ute})-(\frac{Q(t)}{200}\frac{pounds}{gallon})(3\frac{gallons}{\min ute})$$

$$=\frac{3}{8}-\frac{3}{200}Q(t)$$

پس:

$$Q'(t)+\frac{3}{200}Q(t)=\frac{3}{8}$$

که معادله فوق یک معادله خطی مرتبه اول و غیر همگن می باشد.

یادآوری:

اگر معادله مرتبه اول و غیر همگن به صورت زیر داشته باشیم:

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)$$

این معادله دارای جوابی به فرم زیر است:

$$y(x)=e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}+c\right]$$

پس جواب مساله فوق به صورت زیر است:

$$Q(t)=e^{-\int\frac{3}{200}dt}\left[\int\frac{3}{8}e^{\int\frac{3}{200}dt}dt+c\right]=e^{-\frac{3}{200}t}\left[\int\frac{3}{8}e^{\frac{3}{200}t}dt+c\right]=e^{-\frac{3}{200}t}\left[25e^{\frac{3}{200}t}+c\right]$$

$$=25+ce^{-\frac{3}{200}t}$$

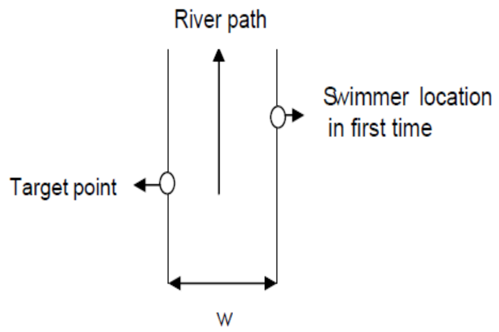
حالا ثابت c را به کمک شرط اولیه محاسبه می کنیم:

$$Q(0)=100=25+c\rightarrow c=75$$

پس جواب نهایی به فرم زیر است:

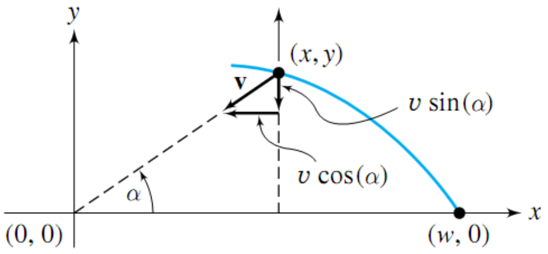
$$Q(t)=25+75e^{-\frac{3}{200}t}$$

۱۵) شناگری را در نظر بگیرید که قصد عبوراز یک رودخانه با پهنای ثابت w را دارد. سرعت شناگر را v و سرعت جریان آب رودخانه را s در نظر بگیرید. فرض کنید شناگر طوری حرکت کند که همواره در جهت رسیدن به نقطه ی هدف باشد. معادله ی مسیر حرکت شناگر را پیدا کنید.



حل:

با توجه به توضیحات صورت مساله می توان مسیر حرکت شناگر را به صورت زیر رسم کرد:



با توجه به این شکل داریم:

$$x'(t)=-v\cos(\alpha),\quad y'(t)=s-v\sin(\alpha)$$

پس داریم:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{s-v\sin(\alpha)}{-v\cos(\alpha)}=\tan(\alpha)-\frac{s}{v}\sec(\alpha)$$

از طرفی از شکل داریم:

$$\tan(\alpha)=\frac{y}{x},\ \ \sec(\alpha)=\frac{1}{x}\sqrt{x^2+y^2}$$

بنابراین:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}-\frac{s}{v}\frac{1}{x}\sqrt{x^2+y^2}=\frac{y}{x}-\frac{s}{v}\sqrt{1+(\frac{y}{x})^2}$$

که یک معادله تفکیک پذیر مرتبه اول می باشد. با استفاده از تغییر متغیر $y=ux$ داریم:

$$\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}du=-\frac{s}{v}\frac{1}{x}dx$$

این معادله دارای جوابی به فرم زیر است:

$$\ln\left|u+\sqrt{1+u^2}\right|=-\frac{s}{v}\ln|x|+c\rightarrow\left|u+\sqrt{1+u^2}\right|=e^ce^{-\frac{s}{v}\ln|x|}\rightarrow u+\sqrt{1+u^2}=kx^{-\frac{s}{v}}$$

$$\sqrt{1+u^2}=kx^{-\frac{s}{v}}-u\rightarrow 1+u^2=k^2x^{-2\frac{s}{v}}+u^2-2ukx^{-\frac{s}{v}}\rightarrow u(x)=\frac{1}{2}kx^{-\frac{s}{v}}-\frac{1}{2}\frac{1}{k}x^{\frac{s}{v}}$$

از طرفی $y=ux$ بود. پس:

$$y(x)=\frac{1}{2}kx^{1-\frac{s}{v}}-\frac{1}{2}\frac{1}{k}x^{1+\frac{s}{v}}$$

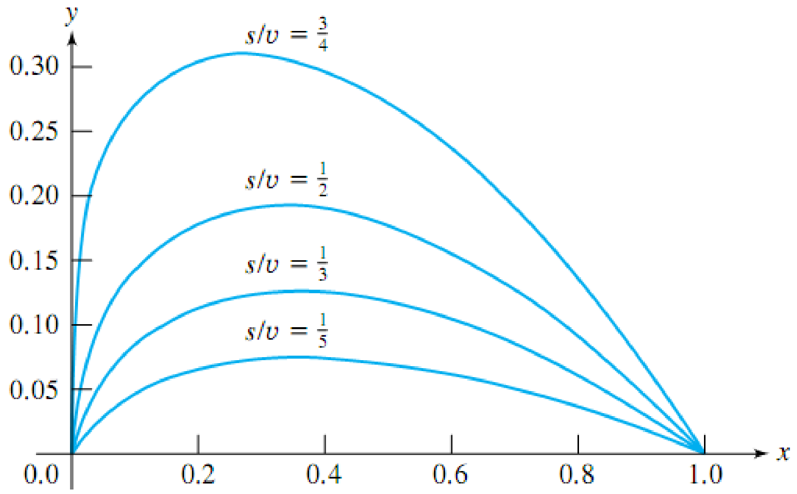
که ثابت k از شرط مرزی تعیین می شود. از روی شکل داریم:

$$y(w)=\frac{1}{2}kw^{1-\frac{s}{v}}-\frac{1}{2}\frac{1}{k}w^{1+\frac{s}{v}}=0\rightarrow k=w^{\frac{s}{v}}$$

پس جواب نهایی به فرم زیر است:

$$\therefore\ y(x)=\frac{w}{2}\left[\left(\frac{x}{w}\right)^{1-\frac{s}{v}}-\left(\frac{x}{w}\right)^{1+\frac{s}{v}}\right]$$

در شکل زیر نمودار موقعیت شناگر در $\frac{s}{v}$ های مختلف رسم شده است:



۱۶) مطلوب است حل معادله زیر:

$$y'' + \frac{1-2a}{x}y' + (b^2c^2x^{2c-2} + \frac{a^2 - n^2c^2}{x^2})y = 0$$

که a,n,c,b ثابتند.

راهنمایی:

با استفاده از تغییر متغیرهای $\xi = bx^c$ و $\eta = \frac{y(x)}{x^a}$ معادله فوق را ساده کنید.

حل:

با استفاده از تغییر متغیرهای فوق و استفاده از مشتقات زنجیره ای داریم:

$$\frac{d}{d\xi} = \frac{dx}{d\xi}\frac{d}{dx} = \frac{x^{1-c}}{bc}\frac{d}{dx}$$

$$\frac{d^2}{d\xi^2} = \frac{x^{2c-2}}{b^2c^2}\frac{d^2}{dx^2} - \frac{(c-1)x^{1-2c}}{b^2c^2}\frac{d}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{x^a}\right) = \frac{1}{x^a}\frac{dy}{dx} - \frac{a}{x^{a+1}}y$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{y}{x^a}\right) = \frac{1}{x^a}\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{2a}{x^{a+1}}\frac{dy}{dx} + \frac{a(a+1)}{x^{a+2}}y$$

با قرار دادن عبارت های فوق در معادله اصلی به معادله زیر می رسیم:

$$\xi^2\frac{d^2\eta}{d\xi^2} + \xi\frac{d\eta}{d\xi} + (\xi^2 - n^2)\eta = 0$$

که معادله فوق یک معادله بسل با پایه های جواب زیر است:

$$\eta = AJ_n(\xi) + BY_n(\xi)$$

با قرار دادن $\xi = bx^c$ و $\eta = \dfrac{y(x)}{x^a}$ داریم:

$$\therefore\ y(x) = Ax^a J_n(bx^c) + Bx^a Y_n(bx^c)$$

۱۷) مطلوب است حل معادله ی زیر با کمک سری های توانی:

$$(x^2+1)y'' - xy' + y = 0$$

همچنین محدوده ی x که جواب معادله در آن موجود است را تعیین کنید.

حل:

با توجه به این که نقطه x=0 نقطه منفرد منظم برای معادله فوق است پس می توانیم جواب معادله را به صورت زیر فرض کنیم:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

با مشتق گیری از غبارت فوق داریم:

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$$

دقت شود در رابطه دوم بالا از تغییر $n \to n+2$ استفاده شده است.

از طرفی داریم:

$$xy' = x\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n$$

$$x^2 y'' = x^2 \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^n$$

حالا مقادیر بدست آمده را در معادله جایگذاری می کنیم:

$$(x^2+1)y'' - xy' + y = \sum_{n=0}^{\infty} x^n\left[n(n-1)a_n - na_n + a_n + (n+2)(n+1)a_{n+2}\right] = 0$$

بنابراین داریم:

$$a_{n+2} = -\frac{(n-1)^2}{(n+2)(n+1)} a_n \quad n = 0,1,2,3,....$$

برای n=1 داریم:

$$a_3 = -0a_1 = 0$$

برای n=3 داریم:

$$a_5 = -\frac{a_3}{5} = 0$$

بنابراین نتیجه می گیریم همه ضرایب فرد به جزء a_1 برابر صفرند. پس:

$$a_{2k+1} = 0, \quad k = 1,2,3,....$$

از طرفی ضرایب زوج هم به صورت زیر نوشته می شوند:

$$a_2 = -\frac{(-1)^2}{1.2} a_0$$

$$a_4 = -\frac{(1)^2}{3.4} a_2 = \frac{(-1)^2.(1)^2}{1.2.3.4} a_0$$

$$a_6 = -\frac{(3)^2}{5.6} a_4 = \frac{(-1)^2.(1)^2.(3)^2}{1.2.3.4.5.6} a_0$$

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{(-1)^2.(1)^2.(3)^2......(2k-3)^2}{(2k)!} a_0$$

از طرفی جواب عمومی به فرم زیر است:

$$\therefore y(x) = a_1 y_1(x) + a_0 y_2(x)$$

که در این معادله:

$$y_1(x) = x, \quad y_2(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(-1)^2.(1)^2.(3)^2......(2k-3)^2}{(2k)!} x^{2k}$$

قسمت دوم:

$y_1(x) = x$ به ازای همه مقادیر x موجود است و $y_2(x)$ به ازای مقادیری از x موجود است که سری فوق همگرا باشد. پس:

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{2k+2}x^{2k+2}}{a_{2k}x^{2k}}\right| = x^2 \lim_{k\to\infty}\frac{(2k-1)^2}{(2k+1)(2k+2)} = x^2 \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(1-\frac{1}{2k})}{(1+\frac{1}{2k})(1+\frac{2}{2k})}\right| = x^2 < 1$$

بنابراین سری فوق در بازه $-1 < x < 1$ همگرا است. که در این محدوده جواب معادله نیز موجود می باشد.

۱۸) روش variation of parameters را به کار برده و جواب معادله زیر را بیابید:

$$x^2 y'' + xy' + 9y = \tan(3\ln x)$$

حل:

یادآوری:

معادله زیر را در نظر بگیرید:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

اگر $y_2(x), y_1(x)$ دو پایه جواب عمومی از معادله فوق باشند. جواب خصوصی معادله به فرم زیر است:

$$y_p = v_1 y_1 + v_2 y_2$$

که در این معادله:

$$v_1(x) = -\int \frac{f y_2}{W} dx$$

$$v_2(x) = \int \frac{f y_1}{W} dx$$

که W رونسکین پایه های جواب نام دارد و از رابطه ی زیر قابل محاسبه است:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

حالا مساله را حل می کنیم:

حل معادله همگن:

$$x^2 y'' + xy' + 9y = 0$$

معادله فوق یک معادله کشی اویر است که دارای پایه های جواب به فرم زیر است:

$$y_1(x) = \cos(3\ln(x))$$

$$y_2(x) = \sin(3\ln(x))$$

پس:

$$W = \frac{3}{x}\left[\cos^2(3\ln(x)) + \sin^2(3\ln(x))\right] = \frac{3}{x}$$

$$v_1(x) = -\int \frac{fy_2}{W}dx = -\frac{1}{3}\int \sin(3\ln(x))\tan(3\ln(x))\frac{dx}{x} = -\frac{1}{9}\int \sin(u)\tan(u)du$$

$$= -\frac{1}{9}\int \frac{1-\cos^2 u}{\cos u}du = -\frac{1}{9}\int\left[\sec(u) - \cos(u)\right]du = -\frac{1}{9}\left[\ln\left|\sec(u) + \tan(u)\right| - \sin(u)\right]$$

$$v_2(x) = \int \frac{fy_1}{W}dx = \frac{1}{3}\int \cos(3\ln(x))\tan(3\ln(x))\frac{dx}{x} = \frac{1}{9}\int \cos(u)\tan(u)du = \frac{1}{9}\int \sin(u)du$$

$$= -\frac{1}{9}\cos(u)$$

که در معادله های فوق $u = 3\ln(x)$ می باشد.

پس جواب خصوصی به فرم زیر است:

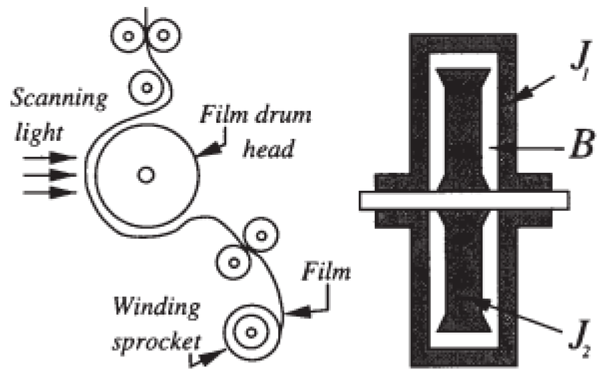
$$y_p = v_1 y_1 + v_2 y_2 = v_1\cos(u) + v_2\sin(u) = -(\frac{1}{9})\ln\left|\sec(u) + \tan(u)\right|$$

جواب کل هم به صورت زیر است:

$$\therefore\ y = y_h + y_p = c_1\cos(u) + c_2\sin(u) + (\frac{1}{9})\ln\left|\sec(u) + \tan(u)\right|,\ \ u = 3\ln(x)$$

۱۹) در این تمرین کاربرد تبدیل لاپلاس در حل یک معادله معمولی بیان می شود. در این مثال طراحی یک پراژکتور برای حرکت عکس ها و تصاویر بررسی می شود. برای شروع باید اطمینان داشته باشیم که سرعت فیلم عبوری از چشم الکتریکی به صورت ذاتی ثابت باقی می ماند. می خواهیم وسیله ای طراحی کنیم که نوسانات یا سر و صدای حرکت عکس در پراژکتور را دمپ کند.

شکل زیر یک دیاگرامی از یک پراژکتور را نمایش می دهد:



که تصویر سمت چپ شماتیک اسکن نور در یک تصویر متحرک پراژکتور را نشان می دهد و تصویر سمت راست درون هد یک فیلم گردان را نشان می دهد. هد از یک هالو درام (hallow dram) با جابجایی کوچک اینرسی J_1 تشکیل شده است که درون آن یک فلای ویل داخلی هم مرکز با جابجایی اینرسی J_2 وجود دارد.

که همیشه $J_2 \geq J_1$ می باشد. فضای درون فیلم گردان از روغن پر شده است. فلایویل داخلی روی توپی چرخدنده های گردان می چرخد. کوپل بین فلایویا و چرخدنده های گردان اصطکاکی را در سیال و همچنین توپی ها ایجاد می کند. گردش حلقه های فیلم بین هد و قرقره ها نیروی ذخیره شده ای را برای سیستم زمانی که فیلم با سرعت از سیستم عبور می کند، فراهم می کند.

از شکل فوق معادله دینامیکی حاکم بر هد فیلم و فلایویل داخلی به صورت زیر است:

۱) میزان جابجایی هد فیلم برابر است با پیچش اصطکاکی که بدنه خارجی فیلم از فلایویل دریافت می کند.
۲) میزان جابجایی فلایویل برابر است با منفی پیچش اصطکاکی که بدنه خارجی فیلم از فلایویل دریافت می کند.

با فرض اینکه پیچش اصطکاکی در دو فلایویل به علت تفاوت در سرعت زاویه ای آنها باشد. یعنی برابراست با:

$$frictional\ torque = B(\omega_2 - \omega_1)$$

که در این معادله B مقاومت اصطکاکی و ω_1 و ω_2 به ترتیب انحراف های هد گردان و فلایویل از سرعت های زاویه ای عمودی متناظرشان می باشند. اگر r نسبت قطر دندانه های پیچاپیچ به قطر هد گردان باشد، پیچش به علت حرکت فیلم از رابطه ی زیر قابل محاسبه است:

$$torque = K\int_0^t (r\omega_0 - \omega_1)d\tau$$

که در این معادله K سختی چرخشی (Rotational Stiffness) و ω_0 انحراف دندانه های پیچاپیچ از سرعت زاویه ای عمودی متناظر می باشند. همچنین عبارت $r\omega_0$ مربوط به سرعت زاویه ای است که فیلن با آن از پراژکتور عبور می کند زیرا دندانه های پیچاپیچ دارای مکانیسمی هستند که فیلم را می کشند. معادله های حاکم بر این سیستم مکانیکی به صورت زیر است:

$$J_1 \frac{d\omega_1}{dt} = K\int_0^t (r\omega_0 - \omega_1)d\tau + B(\omega_2 - \omega_1)$$

$$J_2 \frac{d\omega_2}{dt} = -B(\omega_2 - \omega_1)$$

فرض شود که ω_0 (انحراف دندانه های پیچاپیچ از سرعت زاویه ای عمودی متناظر)، پالسی ازیک دامنه نوسان واحد با مد ت زمان ۰/۱۵ ثانیه باشد و فیلم در برخورد با هد هیچ گونه لغزشی نداشته باشد و همچنین شرایط اولیه نیز به فرم زیر باشد:

$$\omega_1(0) = \omega_2(0) = 0$$

همچنین:

$$J_1 = 1.84 \times 10^4\ \ dyne\ cm\ \ \sec^2\ \ per\ radian$$

$J_2 = 8.43 \times 10^4 \; dyne \; cm \; \sec^2 \;\; per \; radian$

$B = 12.4 \times 10^4 \; dyne \; cm \; \sec \;\; per \; radian$

$K = 2.89 \times 10^6 \; dyne \; cm \; \sec^2 \;\; per \; radian$

$r = 0.578$

معادلات کوپل شده فوق را به کمک تبدیل لاپلاس حل کنید؟

حل:

با تبدیل لاپلاس گیری از دو معادله داریم:

$$(J_1 s + B + \frac{K}{s})\Omega_1(s) - B\Omega_2(s) = \frac{rK}{s}\Omega_0(s) = rKL\left\{\int_0^t \omega_0(\tau)d\tau\right\}$$

$$-B\Omega_1(s) + (J_2 s + B)\Omega_2(s) = 0$$

با حل معادله های فوق داریم:

$$\Omega_1(s) = \frac{rK}{J_1}\frac{(s+a_0)\Omega_0(s)}{s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}$$

که در معادله فوق:

$$\frac{rK}{J_1} = 90.8, \;\; a_0 = \frac{B}{J_2} = 1.47, \;\; b_0 = \frac{BK}{J_1 J_2} = 231, \;\; b_1 = \frac{K}{J_1} = 157, \;\; b_2 = \frac{B(J_1 + J_2)}{J_1 J_2} = 8.20$$

$\Omega_1(s)$ دارای سه قطب ساده $s_1 = -1.58$ ، $s_2 = -3.32 + 11.6i$ و $s_2 = -3.32 - 11.6i$ است.

چون ω_0 ،پالسی ازیک دامنه نوسان واحد با مد ت زمان ۰/۱۵ ثانیه است پس می توانیم آن را به صورت تفاوت دو تابع پله ای هویساید به صورت زیر در نظر بگیریم:

$$\omega_0(t) = H(t) - H(t - 0.15)$$

با تبدیل لاپلاس گیری از عبارت فوق داریم:

$$\Omega_0(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-0.15s}$$

بنابراین:

$$\Omega_1(s) = \frac{rK}{J_1}\frac{(s+a_0)}{s(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)}(1 - e^{-0.15s})$$

با تبدیل لاپلاس گیری معکوس از رابطه فوق داریم:

$$\omega_1(t) = K_0 + K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t} + K_3 e^{s_3 t}$$

$$-\left[K_0 + K_1 e^{s_1(t-0.15)} + K_2 e^{s_2(t-0.15)} + K_3 e^{s_3(t-0.15)}\right] H(t-0.15)$$

که در این معادله:

$$K_1 = \frac{rK}{J_1} \frac{(s+a_0)}{s(s-s_2)(s-s_3)}\Big|_{s=s_1} = 0.046$$

$$K_2 = \frac{rK}{J_1} \frac{(s+a_0)}{s(s-s_1)(s-s_3)}\Big|_{s=s_2} = 0.326 e^{165^0 i}$$

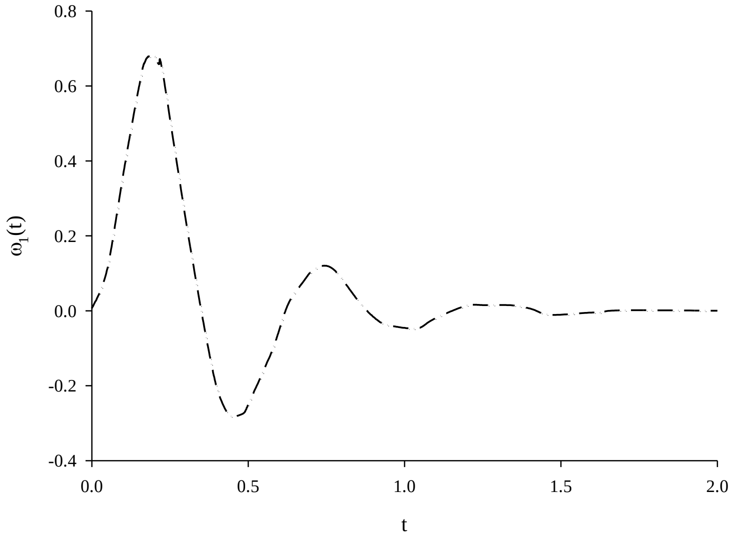
$$K_3 = \frac{rK}{J_1} \frac{(s+a_0)}{s(s-s_1)(s-s_2)}\Big|_{s=s_3} = 0.326 e^{-165^0 i}$$

با فرض $\cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$ ، جواب نهایی به صورت زیر است:

$$\therefore \omega_1(t) = 0.578 + 0.046 e^{-1.58t} + 0.652 e^{-3.32t} \cos(11.6t + 165^0)$$

$$-\left\{0.578 + 0.046 e^{-1.58(t-0.15)} + 0.652 e^{-3.32(t-0.15)} \times \cos(11.6(t-0.15) + 165^0)\right\} H(t-0.15)$$

شکل زیر نمودار $\omega_1(t)$ در زمان های مختلف را نشان می دهد که از این نمودار نتیجه می شود که در این پراژکتور نوسانات یا سر و صدای حرکت عکس در پراژکتور با گذشت زمان دمپ می شود.



۲۰) جرم m را در نظر بگیرید که به انتهای یک فنر با سختی k متصل شده است وبه آن نیروی زیر وارد می شود:

$$F(t) = mA(1-\frac{t}{\tau})e^{-\frac{t}{\tau}}$$

معادله دینامیکی حاکم بر این سیستم به صورت زیر است:

$$y'' + \omega^2 y = mA(1-\frac{t}{\tau})e^{-\frac{t}{\tau}}$$

که در این معادله $\omega^2 = \frac{k}{m}$ می باشد. فرض کنید در لحظه آغاز سیستم در حالت سکون قرار داشته باشد. مطلوب است یافتن جابجایی سیستم (برای حل معادله از تبدیل لاپلاس استفاده کنید).

حل:

ابتدا از طرفین معادله تبدیل لاپلاس می گیریم:

$$(s^2+\omega^2)Y(s) = \frac{A}{s+\frac{1}{T}} - \frac{A}{T(s+\frac{1}{T})^2}$$

$$Y(s) = \frac{A}{(S^2+\omega^2)(s+\frac{1}{T})} - \frac{A}{T(s^2+\omega^2)(s+\frac{1}{T})^2}$$

$$Y(s) = \frac{A}{(\frac{1}{T^2}+\omega^2)}\left(\frac{1}{s+\frac{1}{T}} - \frac{s-\frac{1}{T}}{s^2+\omega^2}\right) - \frac{A}{T(\frac{1}{T^2}+\omega^2)^2}$$

$$\times\left[\frac{\frac{1}{T^2}-\omega^2}{S^2+\omega^2} - \frac{\frac{2s}{T}}{s^2+\omega^2} + \frac{\omega^2+\frac{1}{T^2}}{(s+\frac{1}{T})^2} + \frac{\frac{2}{T}}{s+\frac{1}{T}}\right]$$

با تبدیل معکوس لاپلاس گرفتن از عبارت فوق داریم:

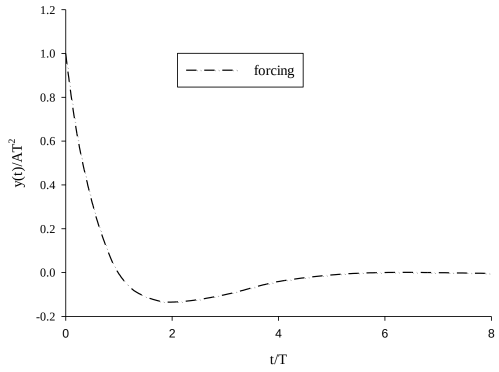
$$\therefore\ y(t) = \frac{AT^2}{(1+\omega^2T^2)}\left(e^{-\frac{t}{T}} - \cos(\omega t) + \frac{\sin(\omega t)}{\omega T}\right) - \frac{AT^2}{(1+\omega^2T^2)^2}$$

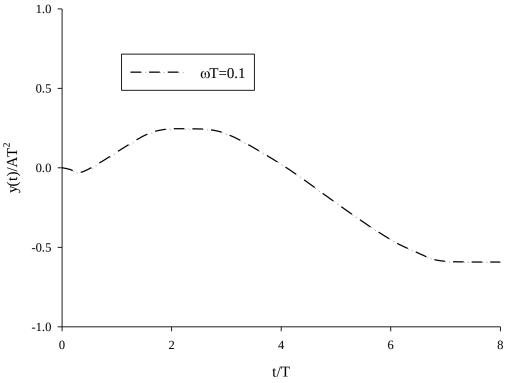
$$\times\left[(1-\omega^2T^2)\frac{\sin(\omega t)}{\omega T} + 2\left(e^{-\frac{t}{T}} - \cos(\omega t)\right) + (1+\omega^2T^2)(\frac{t}{T})e^{-\frac{t}{T}}\right]$$

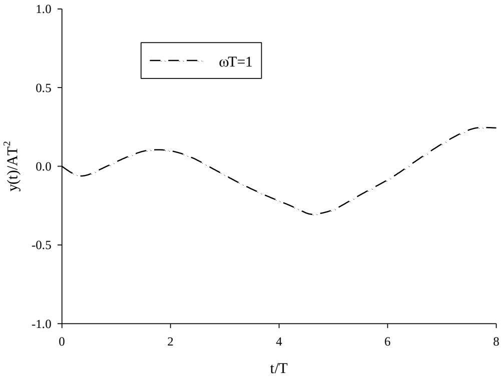
جواب فوق شامل دو بخش است:

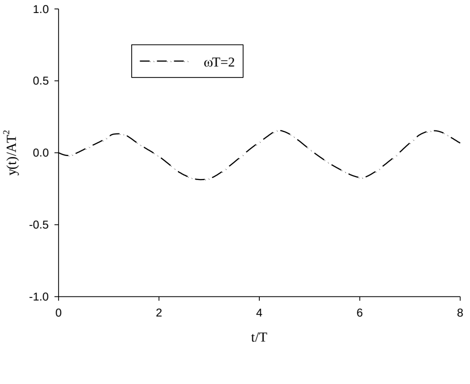
۱) قسمت اکسپتانسیلی که قسمت گذرای جواب است.
۲) قسمت سینوسی که قسمت غیر گذرای جواب است.

در شکل های زیر جابجایی سیستم در $\omega T = 0.1,1,2$ رسم شده است همانطور که از شکل واضح است با افزایش فرکانس جابجایی کاهش می یابد:









۲۱) مطلوب است محاسبه انتگرال زیر:

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{2+\cos\theta}$$

حل:

- The first type of integral we will consider is a trigonometric integral on an interval of length 2π; that is, an integral of the form

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(\cos\theta, \sin\theta)\ d\theta$$

where $f(\cos\theta, \sin\theta)$ is some combination of $\cos(\theta)$ and $\sin(\theta)$.

- To illustrate the method, we take as an example

$$\int_{0}^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\cos(\theta)}\ d\theta.$$

- To compute this integral using residue calculus techniques, the first step is to replace the sines and cosines with complex exponentials using the formulae (see Week 3)

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}.$$

The above integral then becomes

$$\int_{0}^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\frac{1}{2}e^{i\theta}+\frac{1}{2}e^{-i\theta}}.$$

- Now we make the complex substitution $z = e^{i\theta}$, so $dz = ie^{i\theta}d\theta$. Since θ ranges from 0 to 2π, the variable z clearly traverses the curve $z = e^{i\theta}, 0 \le \theta \le 2\pi$, which is the unit circle $|z| = 1$ traversed once anti-clockwise. The integral then becomes

$$\oint_{|z|=1} \frac{dz/(ie^{i\theta})}{2+\frac{1}{2}e^{i\theta}+\frac{1}{2}e^{-i\theta}}$$

which we can write in terms of $z = e^{i\theta}$ as

$$\oint_{|z|=1} \frac{dz/(iz)}{2+\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}\frac{1}{z}}.$$

This simplifies to

$$\oint_{|z|=1} \frac{2dz}{4iz + iz^2 + i},$$

or

$$\frac{2}{i}\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 4z + 1}.$$

- To summarize so far, we have converted a definite integral of a real trigonometric expression into a contour integral of a rational expression on a closed contour. Now we use residue calculus to compute this integral.

- The first step is to factorize the denominator

  $$z^2 + 4z + 1 = (z + 2 - \sqrt{3})(z + 2 + \sqrt{3})$$

  so our integral becomes

  $$\frac{2}{i}\oint_{|z|=1} f(z)\ dz$$

  where

  $$f(z) = \frac{1}{(z + 2 - \sqrt{3})(z + 2 + \sqrt{3})}.$$

- At this point we could use partial fractions if desired, but we'll use residue calculus instead. The function $f(z)$ has singularities at $-2 + \sqrt{3}$ and $-2 - \sqrt{3}$, but the contour $|z| = 1$ only goes around the first singularity. Since our contour is simple and anti-clockwise, we can compute the integral using the residue theorem as

  $$\frac{2}{i}2\pi i Res(f; -2 + \sqrt{3}).$$

- To compute the residue we have to see what kind of singularity f has at $-2 + \sqrt{3}$. The denominator of f clearly has a simple zero at $-2 + \sqrt{3}$ (one can only divide out one power of $z + 2 - \sqrt{3}$ before becoming discontinuous), so f itself has a simple pole. Thus we can use the formula

  $$Res(f; z_0) = \lim_{z \to z_0} f(z)(z - z_0)$$

so that our integral is equal to

$$\frac{2}{i}2\pi i \lim_{z\to -2+\sqrt{3}} f(z)(z+2-\sqrt{3})$$

$$= 4\pi \lim_{z\to -2+\sqrt{3}} \frac{1}{z+2+\sqrt{3}}$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

Thus we have computed

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\cos\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

- Note that even though complex numbers made an appearance during the middle of our computation, they disappeared at the end. This has to happen, of course, since if one integrates a real function on a real interval one can only get a real number! If our computation of this integral ended up with an i somewhere then we know that we've made a mistake.

- This technique only works when you integrate on an interval of length 2π, or of some multiple of 2π. For instance, it cannot directly handle the integral

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{2+\cos\theta}$$

because when one makes the change of variables $z = e^{i\theta}$ one only ends up with a semi-circle instead of a circle - not a closed contour! (One can try the change of variables $z = e^{2i\theta}$ instead, but that has its own problems because one starts encountering expressions like $p.v.z^{1/2}$, which have non-isolated singularities).

- However, sometimes one can handle these expressions by a symmetry argument. For instance, the function $\cos\theta$ is symmetric around $\theta = \pi$, so the above integral is equal to half of the integral from 0 to 2π. Thus

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{2+\cos\theta} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

22)انتگرال مختلط $\int_{|z|=2} \frac{e^z}{\bar{z}-3i}dz$ را محاسبه نمایید؟

(۳)

$$I=\int_{|z|=2}\frac{e^z}{\bar{z}-3i}dz$$

بدیهی است به علت وجود ترم $\bar{z}$ استفاده مستقیم از روش مانده‌ها مجاز نیست اما می‌توانیم بنویسیم:

$$I=\int_{|z|=2}\frac{e^z}{\bar{z}-3i}dz=\int_{|z|=2}\frac{ze^z}{z\bar{z}-3iz}dz \Rightarrow$$

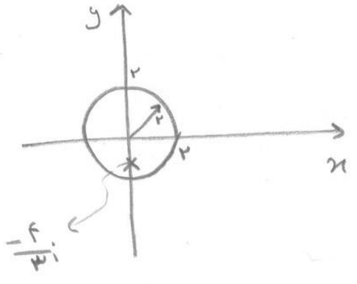
$$z\bar{z}=|z|^2 \text{ و } |z|=2 \Longrightarrow z\bar{z}=4$$

$$I=\int\frac{ze^z}{4-3iz}dz$$

حالا می‌توانیم از قضیه‌ی مانده‌ها استفاده کنیم:

$$f(z)=\frac{ze^z}{4-3iz}$$

$$4-3iz=0 \longrightarrow z=\frac{4}{3i}=\frac{-4}{3}i \Longrightarrow$$ قطب مرتبه‌ی اول است



$\Longrightarrow$ داخل ناحیه مذکور می‌باشد

$$\text{Res } f(z)\Big|_{z=\frac{-4}{3}i}=\frac{ze^z}{-3i}\Big|_{z=-\frac{4}{3}i}=\frac{-\frac{4i}{3}e^{-\frac{4i}{3}}}{-3i}=\frac{4}{9}e^{-\frac{4}{3}i}$$

$$I=2\pi i\left(\frac{4}{9}e^{-\frac{4}{3}i}\right)=\frac{8\pi i}{9}e^{-\frac{4}{3}i}$$

۲۳) نشان دهید:

$$\int_{\gamma} \cosh z \cot z dz = 2\pi i \frac{\sinh\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{\sinh\frac{\pi}{2}}, \qquad n=0,1,2,.....$$

که در آن γ دایره مثبت جهت دار $\left\{z \middle| |z| = \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right\}$ است.

۲۴) انتگرال زیر را محاسبه کنید:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x\left(x^2+1\right)} dx$$

(3

ابتدا نقاط تکین انتگرال را محاسبه می‌کنیم:

$$f(z) = \cosh z \,\frac{\cos z}{\sin z}$$

بنابراین قطبهای $f(z)$ ریشه‌های معادله $\sin z = 0$ هستند

$$z = k\pi \;,\; k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

که قطبهای $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n$ در داخل مسیر انتگرال‌گیری قرار دارند. مانده تابع در $z = k\pi$

$$\operatorname{Res} f(z)\Big|_{z = k\pi} = \lim (z - k\pi)\frac{\cosh z \cos z}{\sin z} =$$

$$\lim \left[\frac{z - k\pi}{\sin(z - k\pi)} \times (-1)^k \cosh z \cos z\right] = 1 \times (-1)^k \times \cosh(k\pi) \times (-1)^k =$$

$$\cosh k\pi$$

مقدار انتگرال:

$$\int_\gamma \cosh z \cot z \, dz = 2\pi i \sum_{k=-n}^{n} \cosh k\pi = 2\pi i \left(1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cosh k\pi\right)$$

$$\cosh k\pi = A = \cosh \pi + \cosh 2\pi + \cdots \cosh n\pi$$

$$A \sinh \pi/2 = \sinh \pi/2 \cosh \pi + \sinh \pi/2 \cosh 2\pi + \cdots \sinh \pi/2 \cosh n\pi$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sinh \frac{3\pi}{2} - \sinh \pi/2\right) + \frac{1}{2}\left(\sinh \frac{5\pi}{2} - \sinh \frac{3\pi}{2}\right) + \cdots$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\sinh\left(n + \tfrac{1}{2}\right)\pi - \sinh(n - 1/2)\pi\right) = \frac{1}{2}\left(\sinh(n + 1/2)\pi - \sinh \pi/2\right)$$

$$A = \frac{1}{2}\left[\frac{\sinh(n+\frac{1}{2})\pi}{\sinh \pi/2} - 1\right]$$

$$\int_\gamma \cosh z \cot z \, dz = 2\pi i \left(1 + \frac{\sinh(n+1/2)\pi}{\sinh \pi/2} - 1\right) =$$

$$2\pi i \, \frac{\sinh(n+\frac{1}{2})\pi}{\sinh \pi/2}$$

(4

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+1)} dx$$

برای تابع $\frac{e^{iz}}{z(z^2+1)}$ نقاط تکین عبارتند از: $z=\pm i$ و $z=0$

$$Res \left.\frac{e^{iz}}{z(z^2+1)}\right|_{z=i} = \lim \frac{(z-i)e^{iz}}{z(z-i)(z+i)} = \frac{e^{-1}}{i(2i)} = \frac{-e^{-1}}{2}$$

$$Res \left.\frac{e^{iz}}{z(z^2+1)}\right|_{z=0} = \lim z \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)} = \frac{1}{1} = 1$$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x(x^2+1)} dx = 2\pi i \left(\frac{e^{-1}}{-2} + \frac{1}{2}(1)\right) = \pi i \left(1 - \frac{1}{e}\right) \longrightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+1)} dx = Im(I) = \pi\left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x(x^2+1)} dx = Re(I) = 0$$