

نمونه سؤالات دروس دانشگاهی

ریاضی مهندسی

ناشر: انتشارات گنج معرفت
(ناشر کتابهای گروه آموزشی آمد)

گردآوری و تألیف: امید سرباخته

بهار ۱۳۹۰

سرشناسه: سرباخته، امید.

عنوان و نام پدیدآور: نمونه سؤالات دروس دانشگاهی؛ ریاضی مهندسی / مؤلف: امید سرباخته؛ [برای] گروه آموزشی آمد.

مشخصات نشر: قم: گنج معرفت، ۱۳۹۰.

مشخصات ظاهری: ۸۰ ص.: جدول، نمودار.

فروست: مجموعه کتاب‌های سرآمد.

شابک: ۹۷۸-۹۶۴-۷۳۶۰-۹۴-۴

وضعیت فهرست نویسی: فیپا

موضوع: دانشگاهها و مدارس عالی- ایران- آزمون‌ها

موضوع: ریاضیات مهندسی-- آزمون‌ها و تمرین‌ها(عالی).

شناسه افزوده: گروه آموزشی آمد.

رده‌بندی کنگره: ۱۳۹۰ ان ۴س/ TA۳۳۳

رده‌بندی دیویی: ۶۲۰/۰۰۱۵۱

شماره کتابشناسی ملی: ۱۲۹۸۱۰۲

گروه آموزشی



پل ارتباطی شما

تلفن:

۰۲۱-۳۳۳۶۴۳۳۹

۰۹۱۹۶۳۰۸۵۶۱

۰۹۳۷۱۴۹۷۹۳۲

وب سایت:

www.Amad-Group.ir

ایمیل:

info@Amad-Group.ir

پیامک:

۳۰۰۰۷۲۲۷۰۰۳۳۳۶

تهران، صندوق پستی ۳۱۶-۱۷۷۷۵

کد کتاب: ۰۸۱

نام کتاب: نمونه سؤالات دروس دانشگاهی؛ ریاضی مهندسی

گردآوری و تألیف: امید سرباخته

ناشر: گنج معرفت (ناشر کتابهای گروه آموزشی آمد)

چاپ: بهار ۱۳۹۰

قیمت: ۲۰۰۰۰ ریال

شابک: ۹۷۸-۹۶۴-۷۳۶۰-۹۴-۴

ISBN: 978-964-7360-94-4

کلیه حقوق برای گروه آموزشی آمد محفوظ است. تکثیر
تمامی یا قسمتی از این اثر به صورت حروفچینی و چاپ
مجدد، چاپ افست، پلی کپی، فتوکپی و انواع دیگر چاپ
ممنوع است و پیگرد قانونی دارد.

چند نکته در مورد این کتاب

۱- مبحث‌بندی بر اساس سرفصل مصوب دروس دانشگاهی و برآیند تجربه‌های همکاران دانشگاهی تعیین گردیده است.

۲- ترتیب درج سؤالات از سال تحصیلی جدید به قدیم و نیز بر اساس کد دانشگاهها می‌باشد.

۳- سعی شده است با ذکر برجسب و نوشته، از درج سؤالات تکراری پرهیز شود.

۴- با توجه به رسم الخطهای متفاوت طراحان، سعی بر نگارش به صورت واحد بوده است که به‌همین دلیل در مواردی در متن سؤالات تغییر مختصری انجام شده است.

۵- با توجه به برگزاری چندین امتحان میان ترم در یک ترم تحصیلی در برخی دانشگاهها، از برجسب واحد استفاده شده است.

۶- با توجه به برگزاری امتحانهای متعدد در یک ترم تحصیلی برای رشته‌های مختلف در برخی دانشگاهها، از عنوان واحد استفاده شده است.

۷- گروه آموزشی آمد، آمادگی خود را برای پذیرش و بررسی پیشنهادات و انتقادات مخاطبان گرامی بالاخص طراحان سؤالات دانشگاهها، استادان بزرگوار و دانشجویان گرامی اعلام می‌دارد.

۸- علاقمندان جهت تهیه نمونه سؤالات می‌توانند از طریق مراکز توزیع و یا وب سایت گروه به آدرس www.Amad-Group.ir اقدام نمایند.



فهرست مطالب

فصل	عنوان	صفحه
اول	سری فوریه	۵
دوم	انتگرال فوریه و تبدیل آن	۱۱
سوم	معادلات با مشتقات جزئی	۱۷
چهارم	توابع مختلط	۳۹
پنجم	انتگرال‌های مختلط	۴۹
ششم	نگاشت	۶۷
هفتم	سایر مباحث	۷۷

گروه آموزشی



- گروهی متشکل از دانشجویان و فارغ‌التحصیلان مقاطع مختلف دانشگاهی می‌باشد.
- هیچگونه وابستگی مادی و غیرمادی به مجموعه‌های دولتی و غیر دولتی ندارد.
- با هزینه شخصی مؤسس و اعضای گروه و به صورت خصوصی اداره می‌گردد.
- مراکز توزیع از بین مراکز دانشگاهی فراگیر و معتبر انتخاب می‌شوند و سایر مراکز دانشگاهی نیز می‌توانند در امر توزیع همکاری نمایند.
- هزینه کتابهای "سرآمد" به صورت آزاد و بدون یارانه پرداخت شده است و سعی می‌شود قیمت فروش به صورت دانشجویی محاسبه گردد.
- علاقمندان جهت همکاری در بخشهای مختلف گروه، می‌توانند با شماره تلفن ۳۳۳۶۴۳۳۹ تماس بگیرند.

مقدمه

به نام خداوند بخشنده بخشایشگر

نظام آموزش عالی در کشورمان قصد جهش عظیم در راستای گسترش تحصیلات دانشگاهی برای عموم هموطنان دارد و به همین جهت توسعه روزافزون خود را در افزایش تعداد دانشجو و استاد قرار داده است. اما همانطور که مستحضرید عدم تناسب بین تعداد استاد و دانشجو که از قبل نیز وجود داشته است، هم اکنون نمود بیشتری پیدا کرده است و باعث شده دانشگاهیان بتوانند کشورمان تنها قسمتی از توانایی‌های خود را ارائه نمایند.

قصد ما در گروه آموزشی "آمد" که متشکل از دانشجویان، فارغ‌التحصیلان و مدرسان دانشگاهی از مقاطع مختلف تحصیلی است، بر آن می‌باشد تا کمکی هرچند اندک به نظام آموزش عالی کشور عزیزمان ایران نمایم تا بازگشت به دوران شکوفایی علمی میهن تسریع یابد.

تجربه چندین ساله حضور در دانشگاههای معتبر کشور و توجه دانشجویان و استادان محترم به محصولات این گروه آموزشی، باعث تقویت روحیه اعضای گروه و گسترش فعالیتهای آن می‌شود که قطعاً همکاری شما عزیزان این روند را تسریع می‌نماید. مجموعه کتابهای "سرآمد" به عنوان بخشی از فعالیتهای این گروه آموزشی با نیت در اختیار قرار دادن نمونه سؤالات دانشگاه‌های مختلف برای استادان، دانشجویان و سایر علاقمندان منتشر می‌گردد تا هم باعث آشنایی بیشتر با سطح علمی و درسی دانشگاه‌های گوناگون باشد و هم به طراحان سؤالات در دانشگاه‌ها کمک نماید که پرسش‌های متنوع‌تر و مناسب‌تری ارائه کنند. همانطور که در دوران تحصیل خویش افتخار شاگردی استادان گرانقدری را داشته‌ام و راهنمایی‌های آنان باعث قوت قلب این حقیر و همکارانم بوده است، خوشحال خواهیم شد که همچنان مورد لطف بزرگان و مخاطبان عزیز قرار گیریم. از خداوند متعال، توفیق روزافزون همه خدمتگزاران ایران اسلامی را خواستارم.

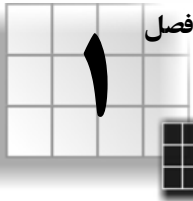
امید سرباخته

مؤسس و مدیر گروه آموزشی آمد

آگهی وجدان

مخاطب گرامی!

در صورتی که این فایل را از طریق وب سایت www.Amad-group.ir دریافت نموده‌اید، علاوه بر اعمال خسارات مادی و معنوی به همکاران این مجموعه، از نظر اخلاقی و شرعی مسئولیت دارید!



سری فوریه

۱ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم دوم ۸۸-۱۳۸۷

سری فوریه تابع $-\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2}$; $f(x) = x^2 + 3\sin(2x)$ را بنویسید و مقدار سری فوریه به‌دست

آمده را در نقاط $x_0 = 0$ و $x_1 = \frac{\pi}{2}$ تعیین کنید.

۲ دانشگاه علم و صنعت ایران / میان‌ترم اول ۸۸-۱۳۸۷

سری فوریه تابع $|x|$, $|x| \leq 1$, $f(x) = |x|$, $f(x+2) = f(x)$ را بنویسید و از آنجا سری فوریه تابع

$f'(x)$ را نتیجه بگیرید.

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & -1 < x < 0 \\ 1 & 0 < x < 1 \end{cases}$$

۳ دانشگاه صنعتی شریف / شهریور ماه ۱۳۸۷

الف) سری فوریه تابع متناوب $f(x)$ که با ضابطه $f(x) = |x|$ روی بازه $[-\pi, \pi]$ تعریف می‌شود را بیابید.

ب) به کمک قسمت الف)، حد سری زیر را محاسبه کنید.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} = 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots$$



ریاضی مهندسی

۴) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / شهریور ماه ۱۳۸۷

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / شهریور ماه ۱۳۸۲

سری فوریه $f(x) = 3x^2 - 2x$ که $-\pi < x < \pi$ ، $f(x + 2\pi) = f(x)$ را یافته و سپس به کمک آن مقدار سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ را به دست آورید.

۵) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / شهریور ماه ۱۳۸۷

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان ترم دوم ۸۳-۱۳۸۲

ابتدا سری فوریه تابع $f(x) = \begin{cases} 1 & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & -\pi < x < -\frac{\pi}{2} \text{ یا } \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$ را بیابید. سپس به کمک آن حاصل سری $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$ را به دست آورید.

۶) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / شهریور ماه ۱۳۸۷

سری فوریه تابع $f(x) = x^2$ را در فاصله $-1 < x < 1$ تعیین کنید و با استفاده از آن نشان دهید:

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{12}$$

۷) دانشگاه تهران / پایان ترم دوم ۸۷-۱۳۸۶

تبدیل فوریه تابع $f(x) = \frac{1}{1+x^4}$ ، $-\infty < x < \infty$ را به دقت در تمام دامنه تعریفش محاسبه کنید.

۸) دانشگاه علم و صنعت ایران / میان ترم اول ۸۷-۱۳۸۶

سری فوریه تابع $f(x) = x$ ، $0 < x < 2$ ، $f(-x) = -f(x)$ و $f(x+4) = f(x)$ را بنویسید. سپس با انتگرال گیری از سری حاصل، سری فوریه تابع $f(x) = x^2$ و $0 < x < 2$ را بیابید و نشان دهید:

$$\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

۹) دانشگاه علم و صنعت ایران / میان ترم دوم ۸۶-۱۳۸۵

سری فوریه تابع $f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 2 \\ 2-x & 2 < x \leq 3 \end{cases}$ را با شرط $f(-x) = -f(x)$ و $f(x+6) = f(x)$ بنویسید و سپس مقدار سری را در نقطه $x = 2$ محاسبه کنید.

۱۰) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان ترم اول ۸۶-۱۳۸۵

الف) سری فوریه $f(x) = |x|$ و $-\pi < x < \pi$ ، $f(x + 2\pi) = f(x)$ را به دست آورید.

ب) به کمک اتحاد پارسوال، $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$ را محاسبه کنید.



دانشگاه صنعتی شریف / میان‌ترم اول ۸۶-۱۳۸۵

سری فوریه کسینوسی تابع مقابل را بیابید.

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases}$$

دانشگاه صنعتی امیرکبیر / میان‌ترم اول ۸۶-۱۳۸۵

اگر فرم مختلط سری فوریه تابع $f(t) = e^{-t}$ با بازه تناوب $-1 < t < 1$ به صورت زیر باشد، فرم را به

صورت حقیقی مثلثاتی تبدیل کنید.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n (1 - in\pi)}{1 + n^2 \pi^2} \sinh \pi e^{in\pi t}$$

دانشگاه علم و صنعت ایران / میان‌ترم اول ۸۶-۱۳۸۵

سری فوریه تابع $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{x}{2} & 0 \leq x \leq \pi \\ -\sin \frac{x}{2} & \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$ را بنویسید و نشان دهید:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{4n^2 - 1}, \quad 0 < x \leq 2\pi$$

و نتیجه بگیرید:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n - \frac{1}{2}}{n^2 - n + \frac{3}{16}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / شهریور ماه ۱۳۸۵

سری فوریه کسینوسی $f(x) = \sin x$ و $0 \leq x \leq \pi$ را بیابید و از آنجا نتیجه بگیرید:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2}$$

دانشگاه صنعتی شریف / پایان‌ترم دوم ۸۵-۱۳۸۴

فرض کنید $0 < a < \pi$ یک عدد حقیقی ثابت باشد. تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را که متناوب با دوره تناوب 2π

است به صورت روبرو تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & -a \leq x \leq a \\ 0 & a < |x| \leq \pi \end{cases}$$

الف) سری فوریه f را به دست آورید و سپس با استفاده از قضیه فوریه مقدار سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin na}{n}$ را محاسبه کنید.

ب) با استفاده از اتحاد پارسوال، مقدار سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 na}{n^2}$ را محاسبه کنید.

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم دوم ۸۵-۱۳۸۴

سری فوریه سینوسی $f(x) = \cos 2x$ ، $0 < x < \pi$ را بیابید.



ریاضی مهندسی

دانشگاه علم و صنعت ایران / میان‌ترم دوم ۸۵-۱۳۸۴ (۱۷)

سری فوریه تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & -1 < x < 0 \\ -x^2 & 0 < x < 1 \end{cases}$, $f(x+2) = f(x)$ را به دست آورید و با کمک آن، حاصل سری عددی $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} - \frac{1}{6^2} + \dots$ را محاسبه کنید.

دانشگاه صنعتی شریف / پایان‌ترم اول ۸۵-۱۳۸۴ (۱۸)

اگر $a \neq 0$ عددی غیرصحيح باشد، سری فوریه تابع $f(x) = \cos ax$ را در بازه $0 < x < 2\pi$ محاسبه کرده و با استفاده از آن مقدار سری روبرو را به دست آورید.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 - a^2}$$

دانشگاه صنعتی امیرکبیر / میان‌ترم اول ۸۵-۱۳۸۴ (۱۹)

الف) سری فوریه تابع $f(x) = x - [x] + 3$ را در دوره تناوبش به دست آورید.
ب) با استفاده از قسمت (الف) حد سری روبرو را به دست آورید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

دانشگاه علم و صنعت ایران / میان‌ترم اول ۸۵-۱۳۸۴ (۲۰)

تابع $0 < x < 2$ ، $f(x) = x$ با شرط $f(-x) = f(x)$ و $f(x+4) = f(x)$ داده شده است. سری فوریه تابع $f(x)$ را بنویسید و از آنجا نتیجه بگیرید:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}$$

همچنین با استفاده از فرمول پارسوال، مجموع $\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots$ را محاسبه کنید.

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / شهریور ماه ۱۳۸۳ (۲۱)

سری فوریه تابع متناوب f با ضابطه روبرو را بنویسید.

$$f(x) = \begin{cases} x & -\pi < x < 0 \\ 1 & 0 < x < \pi \end{cases}$$

$f(x+2\pi) = f(x)$

دانشگاه تهران / پایان‌ترم دوم ۸۳-۱۳۸۲ (۲۲)

دانشگاه تهران / میان‌ترم اول ۸۳-۱۳۸۲

سری فوریه مثلثاتی تابع مقابل را به دست آورید. سپس سری فوریه سینوسی نیم‌دامنه این تابع را بیابید. دو نتیجه حاصل را با هم مقایسه کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq \frac{L}{4} \\ \frac{L}{2} - x & \frac{L}{4} < x < \frac{3L}{4} \\ x - L & \frac{3L}{4} \leq x \leq L \end{cases}$$



نشان دهید که سری فوریه زوج $\cos \alpha x$ برای اعداد ناصحیح α به صورت زیر است.

$$\cos \alpha x = \frac{2\alpha \sin \alpha x}{\pi} \left[\frac{1}{2\alpha^2} - \frac{\cos x}{\alpha^2 - 1} + \frac{\cos 2x}{\alpha^2 - 4} - \frac{\cos 3x}{\alpha^2 - 9} + \dots \right]$$

سپس مقدار $\cot \alpha \pi$ را به دست آورید.

به کمک بسط فوریه یک موج مربعی به صورت

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < \pi \\ -1 & -\pi < t < 0 \end{cases}$$

نشان دهید:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

(الف)

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$$

(ب)

سری فوریه تابع $f(x) = \frac{x^2}{4} - x$ ، $f(x + 2\pi) = f(x)$ را یافته و به کمک آن

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \dots$$

مجموع سری عددی روبرو را محاسبه کنید.

گروه آموزشی



گروه آموزشی آماد

www.Amad-Group.ir

گروه آموزشی



فصل ۲

انتگرال فوریه و تبدیل آن

۱ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم دوم ۸۸-۱۳۸۷

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۸۳-۱۳۸۲

با استفاده از انتگرال فوریه تابع $f(x) = e^{-|x|}$; $x \in \mathbb{R}$ ، حاصل انتگرال $\int_0^{\infty} \frac{\cos(\alpha \ln 3)}{1 + \alpha^2} d\alpha$ را بیابید.

۲ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۸۸-۱۳۸۷

به کمک انتگرال فوریه تابع $\begin{cases} f(x) = \pi e^{-x} & x > 0 \\ f(x) = f(-x) & x < 0 \end{cases}$ حاصل $\int_0^{\infty} \frac{\cos \omega}{1 + \omega^2} d\omega$ را بیابید.

۳ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم اول ۸۸-۱۳۸۷

انتگرال فوریه کسینوسی $f(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)^2}$ را به دست آورید.

۴ دانشگاه علم و صنعت ایران / میان‌ترم اول ۸۸-۱۳۸۷

انتگرال فوریه تابع $f(x) = e^{-|x|}$ ، $-\infty < x < \infty$ را بیابید.

۵ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / شهریور ماه ۱۳۸۷

انتگرال فوریه تابع $f(x) = \begin{cases} x + \sin x & |x| < \pi \\ 0 & |x| > \pi \end{cases}$ را بیابید.



ریاضی مهندسی

۶ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان ترم دوم ۸۷-۱۳۸۶

انتگرال فوریه کسینوسی تابع $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & x \geq 1 \end{cases}$ را یافته و سپس حاصل انتگرال $\int_0^{\infty} \frac{\sin x \cos(ax)}{x} dx$ را برای $0 \leq a \leq 1$ به دست آورید.

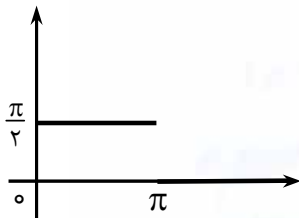
۷ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان ترم دوم ۸۷-۱۳۸۶

انتگرال فوریه تابع $f(x) = \begin{cases} \cos x & |x| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & |x| > \frac{\pi}{2} \end{cases}$ را یافته و سپس به کمک آن، مقدار انتگرال $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(\frac{\pi}{2}x)}{1-x^2} dx$ را بیابید.

۸ دانشگاه تهران / پایان ترم اول ۸۷-۱۳۸۶

با انتگرال گیری از تابع تام e^{-z^2} روی مرز پیرامون مستطیل $|x| \leq a, 0 \leq y \leq b$ و میل دادن a به بی نهایت و با استفاده از $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ، تبدیل فوریه تابع e^{-x^2} را حساب کنید.

۹ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان ترم اول ۸۷-۱۳۸۶



با استفاده از نمایش انتگرال فوریه، نشان دهید: $\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos \pi \omega}{\omega} \sin x \omega d\omega = \varphi(x)$ که در آن تابع $\varphi(x)$ دارای نمودار به فرم روبرو است. ($x \neq \pi$)

۱۰ دانشگاه علم و صنعت ایران / میان ترم اول ۸۷-۱۳۸۶

انتگرال فوریه تابع $x > 0$ و $f(x) = e^{-x} \sin x$ و $f(-x) = f(x)$ را بیابید.

۱۱ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان ترم دوم ۸۶-۱۳۸۵

الف) انتگرال فوریه مختلط تابع $f(x) = e^{-|x|}$ را بدست آورید.
توجه این قسمت، تکراری با سؤال (۴) همین فصل می باشد.

ب) با کمک الف)، مقدار انتگرال $\int_0^{\infty} \frac{\cos \pi \omega}{1 + \omega^2} d\omega$ را حساب کنید.

۱۲ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان ترم دوم ۸۶-۱۳۸۵

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / شهریور ماه ۱۳۸۵

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / شهریور ماه ۱۳۸۵

به کمک انتگرال فوریه مناسب، نشان دهید: $\int_0^{\infty} \frac{\sin(\pi \omega) \sin(\omega x)}{1 - \omega^2} d\omega = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \sin x & 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & x > \pi \end{cases}$



۱۳ دانشگاه علم و صنعت ایران / میان‌ترم دوم ۸۶-۱۳۸۵

انتگرال فوریه تابع $f(x) = \begin{cases} |x| & -1 < x < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$ را بیابید و با استفاده از آن انتگرال فوریه تابع $x^2 f(x)$ را نتیجه بگیرید.

۱۴ دانشگاه تهران / پایان‌ترم اول ۸۶-۱۳۸۵

تبدیل فوریه تابع $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$; $\forall x \in \mathbb{R}$ را حساب کنید.

۱۵ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۸۶-۱۳۸۵

تابع $f(x) = \begin{cases} x + \cos x & |x| < \pi \\ 0 & |x| > \pi \end{cases}$ را در نظر بگیرید. نشان دهید $f(x)$ دارای انتگرال فوریه است و سپس انتگرال فوریه آن را به دست آورید.

۱۶ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم اول ۸۶-۱۳۸۵

با استفاده از نمایش به انتگرال فوریه سینوسی، نشان دهید:

$$\int_0^{\infty} \frac{\omega^4 \sin x\omega}{\omega^4 + 4} d\omega = \frac{\pi}{2} e^{-x} \cos x, \quad x > 0$$

۱۷ دانشگاه صنعتی شریف / میان‌ترم اول ۸۶-۱۳۸۵

اگر $f(x)$ به صورت $f(x) = \int_0^{\infty} \frac{\sin \lambda}{\lambda} \cos(\lambda x) d\lambda$ باشد، $f(x)$ را محاسبه کنید.

۱۸ دانشگاه صنعتی امیرکبیر / میان‌ترم اول ۸۶-۱۳۸۵

تبدیل فوریه تابع روبرو را به دست آورید.

$$f(t) = \begin{cases} 0 & -\infty < t \leq -1 \\ 1+t & -1 \leq t \leq 0 \\ 1-t & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & 1 \leq t < \infty \end{cases}$$

۱۹ دانشگاه علم و صنعت ایران / میان‌ترم اول ۸۶-۱۳۸۵

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۸۲-۱۳۸۱

انتگرال فوریه تابع $f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & |x| < 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$ را بیابید و سپس به کمک آن، مقدار انتگرال زیر را بیابید.

$$\int_0^{\infty} \frac{\omega \cos \omega - \sin \omega}{\omega^3} \cos\left(\frac{\omega}{3}\right) d\omega$$



ریاضی مهندسی

دانشگاه صنعتی شریف / پایان‌ترم دوم ۸۵-۱۳۸۴ ۲۰

فرض کنید تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ به صورت روبرو تعریف شده است:

$$f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

انتگرال فوریه f را به دست آورید و سپس با استفاده از قضیه انتگرال فوریه، مقدار انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{\sin x - x \cos x}{x^3} \right) \cos \frac{x}{2} dx$$

دانشگاه تهران / پایان‌ترم دوم ۸۵-۱۳۸۴ ۲۱

تبدیل فوریه تابع $f(x) = \frac{x^2}{x^4 + 4}$ را حساب کنید.

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم دوم ۸۵-۱۳۸۴ ۲۲

صورت مختلط انتگرال فوریه تابع $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < \pi \\ 0 & |x| > \pi \end{cases}$ را بیابید. سپس به کمک آن حاصل

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(\omega\pi)}{\omega} d\omega$$

را بیابید.

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم دوم ۸۵-۱۳۸۴ ۲۳

انتگرال فوریه تابع مقابل را بیابید.

$$f(x) = \left(\frac{1}{x^2 + 4} \right)^2$$

دانشگاه علم و صنعت ایران / میان‌ترم دوم ۸۵-۱۳۸۴ ۲۴

به کمک انتگرال فوریه نشان دهید:

$$e^{-kx} = \frac{2k}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \omega x}{\omega^2 + k^2} d\omega, \quad k > 0, x \geq 0$$

سپس از رابطه فوق استفاده کرده و نشان دهید:

$$(1+x)e^{-x} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{(\alpha^2 + 1)^2} d\alpha, \quad x \geq 0$$

دانشگاه صنعتی شریف / پایان‌ترم اول ۸۵-۱۳۸۴ ۲۵

تابع $f(x)$ را از معادله انتگرالی مقابل به دست آورید.

$$\int_0^{\infty} f(x) \cos(xt) dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \cos t & |t| \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & |t| > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

دانشگاه صنعتی امیرکبیر / میان‌ترم اول ۸۵-۱۳۸۴ ۲۶

تبدیل فوریه سینوسی تابع $f(x) = e^{-x}$ و $x \geq 0$ را بیابید.



دانشگاه علم و صنعت ایران / میان‌ترم اول ۸۵-۱۳۸۴

تبدیل فوریه (نامتناهی) تابع $f(t) = \frac{1}{a^2 + t^2}$ را به دست آورید. سپس با استفاده از آن، انتگرال

$$\int_0^{\infty} \frac{dt}{(t^2 + a^2)^2}$$

را محاسبه کنید.

دانشگاه علم و صنعت ایران / میان‌ترم اول ۸۵-۱۳۸۴

تبدیل فوریه معکوس تابع $\frac{10(4 + i\omega)}{9 - \omega^2 + 8i\omega}$ را محاسبه کنید.

دانشگاه علم و صنعت ایران / میان‌ترم اول ۸۵-۱۳۸۴

با استفاده از انتگرال فوریه نشان دهید:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \omega x + \omega \sin \omega x}{1 + \omega^2} d\omega = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & x = 0 \\ \pi e^{-x} & x > 0 \end{cases}$$

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم دوم ۸۴-۱۳۸۳

انتگرال سینوسی فوریه $f(x) = \frac{\pi}{2} e^{-x} \cos x$, $(x > 0)$ را بیابید.

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۸۴-۱۳۸۳

به کمک انتگرال فوریه کسینوسی تابع $f(x) = \frac{\pi}{2} e^{-x}$, $x > 0$ ثابت کنید:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{1 + x^2} dx = \frac{\pi}{2e}$$

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم دوم ۸۳-۱۳۸۲

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۸۲-۱۳۸۱

با استفاده از انتگرال فوریه ثابت کنید:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(\frac{\omega\pi}{2})}{1 - \omega^2} \cos \omega x d\omega = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \cos x & |x| < \frac{\pi}{2} \text{ اگر} \\ 0 & |x| > \frac{\pi}{2} \text{ اگر} \end{cases}$$

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۸۳-۱۳۸۲

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / شهریور ماه ۱۳۸۱

الف) نشان دهید تابع ثابت $f(x) = c$ (ثابت) دارای انتگرال فوریه نمی‌باشد.

ب) با استفاده از انتگرال فوریه نشان دهید:

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos \omega}{\omega} \sin \omega x d\omega = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{\pi}{4} & x = 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

گروه آموزشی



گروه آموزشی آماد

www.Amad-Group.ir

گروه آموزشی



معادلات با مشتقات جزئی

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان ترم دوم ۸۸-۱۳۸۷

مسائل دیفرانسیل جزئی زیر را حل کنید.

$$u_{tt} = u_{xx} \quad 0 < x < \pi, t > 0 \quad (\text{الف})$$

$$u(x, 0) = x, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi$$

$$u_x(0, t) = 2 \sin t, \quad u_x(\pi, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u_t = u_{xx} \quad ; \quad 0 < x < \infty, t > 0 \quad (\text{ب})$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} x & ; \quad 0 < x < \pi \\ 0 & ; \quad x \geq \pi \end{cases}$$

$$u_t(0, t) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x, t) = \lim_{x \rightarrow +\infty} u_x(x, t) = 0, \quad t > 0$$

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان ترم اول ۸۸-۱۳۸۷

هریک از مسائل زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + xt & (\text{الف}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = x + 2, \quad u(0, t) = 1, \quad u(1, t) = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < +\infty & (\text{ب}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = 1, \quad u(0, y) = e^{-y}, \quad u(1, y) = 0 \end{cases}$$



ریاضی مهندسی

۳) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان ترم اول ۸۸-۱۳۸۷

مسئله‌های زیر را با استفاده از تبدیل مناسب حل کنید.

الف)
$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (x > 0, y > 0)$$

$$u_x(0, y) = 0, \quad u(x, 0) = \frac{1}{(x^2 + 1)^2}, \quad |u(x, y)| < M$$

ب)
$$u_{xx} = u_{tt} \quad (0 < x < 1, t > 0)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad u(x, 0) = \sin \pi x, \quad u_t(x, 0) = -\sin \pi x$$

۴) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان ترم اول ۸۸-۱۳۸۷

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / شهریور ماه ۱۳۸۷

معادله ناهمگن زیر را فقط به معادله همگن تبدیل کنید.

$$u_{xx} = u_t + x \quad (0 < x < 1, t > 0), \quad u(0, t) = u(1, t) = 2, \quad u(x, 0) = x$$

۵) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان ترم اول ۸۸-۱۳۸۷

جواب معادله پتانسیل را روی حلقه داده شده به روش ضربی (جداسازی) به دست آورید.

$$u(r, 0) = u(r, \pi) = u(r, \theta) = 0, \quad u(1, \theta) = \sin \theta, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 1 < r < 2$$

۶) دانشگاه علم و صنعت ایران / میان ترم اول ۸۸-۱۳۸۷

مطلوبست حل مسئله مقابل.
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x + t \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi, \quad t > 0$$

$$u(x, y, 0) = xy, \quad u(x, 0, t) = u(x, 1, t) = u(0, y, t) = u(1, y, t) = 0$$

۷) دانشگاه علم و صنعت ایران / میان ترم اول ۸۸-۱۳۸۷

مطلوبست حل مسئله روبرو.
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi$$

$$u_y(x, 0) = u(x, \pi) = x, \quad u(0, y) = y - \frac{\pi}{2}, \quad u_x(\pi, y) = 0$$

۸) دانشگاه علم و صنعت ایران / میان ترم اول ۸۸-۱۳۸۷

مطلوبست حل مسئله روبرو.
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \begin{cases} x & |x| < \pi \\ 0 & |x| > \pi \end{cases}, \quad u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0$$

۹) دانشگاه علم و صنعت ایران / میان ترم اول ۸۸-۱۳۸۷

معادله موج با شرایط ذیل داده شده است. تابع u را به دست آورید.
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2x \quad 0 < x < 1$$

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0 \quad 0 < x < 1, \quad u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad t \geq 0$$



معادله زیر را با استفاده از تبدیل فوریه حل کنید و تا حد امکان جواب را ساده کنید.

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & -\infty < x \leq \infty, y > 0 \\ u(x, 0) = f(x) \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x, t) = 0, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} u_x(x, t) = 0 \\ \text{وقتی که } u, y \rightarrow \infty \text{ کراندار است} \end{cases}$$

معادله زیر را با استفاده از روش جداسازی حل کنید.

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = -2x, \quad 0 \leq x \leq 1, t > 0 \\ u(x, 0) = x^2, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 1 \end{cases}$$

معادلات دیفرانسیل جزئی زیر را حل کنید.

$$u_t = -u_{xx} \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0 \quad (\text{الف})$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} x & |x| < 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x, t) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} u_x(x, t) = 0$$

$$u_{tt} - u_{xx} = x + t \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \quad (\text{ب})$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = x - 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ u_t(x, 0) = 2, \quad u(0, t) = 2t, \quad u(1, t) = t \end{cases}$$

هر یک از مسائل زیر را حل کنید.

$$u_{tt} - 4u_{xx} = x + t \quad (\text{الف})$$

$$u(x, 0) = \sin x, \quad u_t(x, 0) = 1, \quad u(0, t) = t, \quad u(\pi, t) = t - 1$$

$$u_t - 9u_{xx} = \begin{cases} xt + x & 0 < x < 1 \\ x & x > 1 \end{cases} \quad (\text{ب})$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = \begin{cases} x^2 & 0 < x < 1 \\ x & x > 1 \end{cases} \\ u_x(0, t) = t + 1 \end{cases}$$



ریاضی مهندسی

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / شهریور ماه ۱۳۸۷

مسئله‌های زیر را با استفاده از تبدیل لاپلاس یا فوریه حل کنید.

$$\begin{cases} u_{xx} = u_{tt} - \sin \pi x \sin \alpha t, & 0 < x < 1, t > 0 \\ u(0, t) = u(1, t) = u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0 \end{cases} \quad \text{(الف)}$$

$$u_t - u_{xx} = \begin{cases} 2t - 1 & 0 < x < \pi \\ 0 & x > \pi \end{cases}; \quad u(x, 0) = \begin{cases} 2x & 0 < x < 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}; \quad u_x(0, t) = 0 \quad \text{(ب)}$$

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / شهریور ماه ۱۳۸۷

معادله $4u_{xx} = u_{tt}$ ($0 < x < 2, t > 0$) را با شرایط مرزی زیر حل کنید.

$$u(0, t) = u(2, t) = 0; \quad u(x, 0) = 6 \sin \pi x - 3 \sin 4\pi x; \quad u_t(x, 0) = 0$$

دانشگاه تهران / پایان‌ترم دوم ۸۷-۱۳۸۶

مسئله مقدار اولیه-مرزی زیر را حل کنید (A و B و L ثابت می‌باشند).

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = t \cos^3\left(\frac{\pi x}{2L}\right) & 0 < x < L, t > 0 \\ u(x, 0) = A(x - L) + B & 0 \leq x \leq L \\ u_x(0, t) = A, u(L, t) = B & t > 0 \end{cases}$$

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم دوم ۸۷-۱۳۸۶

الف) معادله $x^2 u_{xx} + x u_x + u_{yy} = 0$ را به روش جداپذیر حل کنید.

$$\text{ب) هرگاه } u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} G_n(t) \sin nx \quad \text{که } 0 \leq x \leq \pi \text{ و } t > 0 \text{ در معادله } \frac{1}{2} x t u_t - u_{xx} = \text{صدق کند. مطلوبست محاسبه } G_n(t) \text{ با شرط } u(x, 0) = \sin 3x.$$

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم دوم ۸۷-۱۳۸۶

الف) با روش دلخواه مسئله زیر را حل کنید.

$$u_t = 4u_{xx} \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t > 0, \quad u(x, 0) = -\sin x \cos x, \quad 0 \leq x \leq \pi$$

ب) با روش تبدیل لاپلاس مسئله زیر را حل کنید.

$$u_t = 1 + u_{xx} \quad u(0, t) = u(\pi, t) = t, \quad t > 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1$$

ج) با روش تبدیل فوریه کسینوسی مسئله زیر را حل کنید.

$$u_{tt} = u_{xx} \quad u_t(x, 0) = u_x(0, t) = 0, \quad x \geq 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$



مسئله زیر را با روش جداسازی متغیرها حل کنید و جواب را به طور صریح بنویسید.

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b \\ u(0, y) = u(a, y) = u(x, 0) = 0, u(x, b) = 1 \end{cases}$$

مسئله زیر را به کمک تبدیل فوریه کسینوسی حل و جواب را تا حد امکان ساده کنید.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & x \geq 0, t > 0 \\ u(x, 0) = 0, u_x(0, t) = g(t) \\ \lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) = \lim_{x \rightarrow \infty} u_x(x, t) = 0 \end{cases}$$

ابتدا معادله زیر را همگن کرده، سپس با روش جداسازی آن را حل کنید و جواب را به صورت صریح بنویسید.

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + \sin x & 0 \leq x \leq \pi, t > 0 \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \end{cases}$$

در مسئله مقدار اولیه - کرانه‌ای (یا مرزی) زیر، مقدار $u\left(\frac{L}{2}, \frac{23L}{3}\right)$ (یعنی مقدار u در $x = \frac{L}{2}$ در

لحظه $t = \frac{23}{3}L$) را حساب کنید.

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, 0 < x < L, t > 0 \\ u(x, 0) = g(x) = x^2(L-x), u_t(x, 0) = \begin{cases} h, & \frac{L}{3} \leq x \leq \frac{2L}{3} \\ 0, & 0 < x < \frac{L}{3} \text{ یا } \frac{2L}{3} < x < L \end{cases} \\ u(0, t) = 0 = u(L, t), t > 0 \end{cases}$$

موضع اولیه یک تار از دو سو نامتناهی به صورت $u(0, c, 0) = e^{-x^2}$ بوده است. با چه سرعتی تار باید حرکت را آغاز کند تا حرکت بعدی آن فقط موجی راست رونده باشد؟

اگر مدت طولانی از لحظه اولیه گذشته باشد آنگاه جواب کراندار حالت مانا (پایا) مسئله دمایی داده شده

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = xe^{-x} & x > 0, t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x), u(0, t) = A & 0 < x < \infty \end{cases}$$



ریاضی مهندسی

دانشگاه تهران / پایان‌ترم اول ۸۷-۱۳۸۶ (۲۵)

مسئله مقدار اولیه- مرزی زیر را بطور مناسبی به تمام خط $-\infty < X < \infty$ توسعه دهید و سپس به کمک تبدیل فوریه آن را حل کنید. توابع f و φ مفروض نسبت به متغیرها پیوسته و دارای مشتق اول تکه‌ای پیوسته‌اند. تبدیل فوریه u را یافته و سپس طریقه محاسبه $u(x, t)$ را فقط توضیح دهید.

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x, t) & \forall x > 0, \forall t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) & \text{شرط اولیه} \\ u_x(0, t) = 0 & \text{شرط مرزی} \end{cases}$$

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم اول ۸۷-۱۳۸۶ (۲۶)

به کمک تبدیل مناسب فوریه یا لاپلاس معادلات زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} xu_x + u_t = xt & x > 0 \\ u(x, 0) = u(0, t) = 0 & t > 0 \end{cases} \quad \text{الف) لاپلاس}$$

$$\begin{cases} u_{xx} = u_t & x > 0 \\ u(x, 0) = f(x), u(0, t) = 0 & t > 0 \end{cases} \quad \text{ب) فوریه}$$

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم اول ۸۷-۱۳۸۶ (۲۷)

معادله زیر را به روش جداسازی متغیرها حل کنید.

$$u_t = u_{xx}, \quad u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad u(x, 0) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \frac{1}{4} \\ x & \frac{1}{4} \leq x < 1 \end{cases}, \quad t > 0, 0 < x < 1$$

دانشگاه صنعتی شریف / میان‌ترم اول ۸۷-۱۳۸۶ (۲۸)

دانشگاه صنعتی شریف / پایان‌ترم دوم ۸۵-۱۳۸۴

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & -\infty \leq x \leq \infty, y > 0 \\ u(x, 0) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases} \end{cases}$$

وقتی که $y \rightarrow \infty$ ، تابع u کراندار است.

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x, t) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} u_x(x, t) = 0$$

دانشگاه صنعتی شریف / میان‌ترم اول ۸۷-۱۳۸۶ (۲۹)

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0, \quad u(x, 0) = 1 - \frac{x^2}{\pi^2} \end{cases}$$

مسئله مقابل را با روش جداسازی متغیرها حل کنید.



دانشگاه صنعتی شریف / میان‌ترم اول ۸۷-۱۳۸۶ (۳۰)

مسئله روبرو را با استفاده از تبدیل لاپلاس حل کنید. $x > 0, t > 0$

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + \cos t \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = u(0, t) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} u_x(x, t) = 0 \end{cases}$$

دانشگاه علم و صنعت ایران / میان‌ترم اول ۸۷-۱۳۸۶ (۳۱)

مسئله زیر را به کمک تبدیل فوریه سینوسی حل کنید.

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= x + t, \quad 0 < x < \pi \\ u(x, 0) &= 0, \quad u_t(x, 0) = x, \quad u(0, t) = t, \quad u(\pi, t) = 0 \end{aligned}$$

دانشگاه علم و صنعت ایران / میان‌ترم اول ۸۷-۱۳۸۶ (۳۲)

مطلوبست حل مسئله زیر.

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= y + 1, \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi \\ u(x, 0) &= 0, \quad u_y(x, \pi) = x, \quad u_x(0, y) = 2y, \quad u(\pi, y) = 0 \end{aligned}$$

دانشگاه علم و صنعت ایران / میان‌ترم اول ۸۷-۱۳۸۶ (۳۳)

مسئله زیر را حل کنید.

$$\begin{aligned} u_t &= \varphi(u_{xx} + y_{yy}) + x, \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi, \quad t > 0 \\ u(x, y, 0) &= xy, \quad u(0, y, t) = u(\pi, y, t) = 0, \quad u(x, 0, t) = u(x, \pi, t) = 0 \end{aligned}$$

دانشگاه علم و صنعت ایران / میان‌ترم اول ۸۷-۱۳۸۶ (۳۴)

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم دوم ۸۶-۱۳۸۵

مسئله زیر را حل کنید.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varphi} u_{tt} + u_t &= u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= x, \quad u_t(x, 0) = e^{-x}, \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t > 0 \end{aligned}$$

دانشگاه علم و صنعت ایران / میان‌ترم اول ۸۷-۱۳۸۶ (۳۵)

معادله موج با شرایط زیر را به روش دالامبر حل کنید.

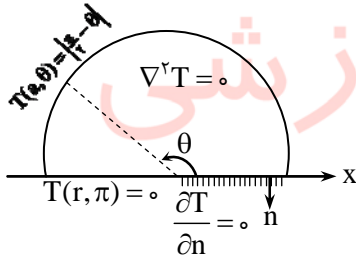
$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \varphi \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x > 0, \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= \begin{cases} \sin x & 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & x > \pi \end{cases} \quad u_t(x, 0) = \begin{cases} e^{-x} & 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & x > \pi \end{cases} \end{aligned}$$



ریاضی مهندسی

دانشگاه تهران / میان‌ترم اول ۸۷-۱۳۸۶ (۳۶)

دانشگاه تهران / پایان‌ترم دوم ۸۳-۱۳۸۲



مسئله مقدار مرزی (یا کرانه‌ای) در داخل یک نیم‌دایره به شعاع a با شرایط کرانه‌ای داده شده را حل کنید. Π بردار قائم یکه (برونسو) بر نیمه راست لبه قطری نیم‌دایره است. نیمه راست لبه قطری عایق و نیمه چپ در دمای صفر نگهداری شده است.

دانشگاه تهران / میان‌ترم اول ۸۷-۱۳۸۶ (۳۷)

در مسئله مقدار اولیه کرانه‌ای (یا مرزی) روبرو، مقدار $u(\frac{L}{3}, \frac{23L}{4})$ را $u(x, 0) = x^2(L-x)$ و $u_t(x, 0) = |x - \frac{L}{2}|$ ، $0 \leq x \leq L$ و $u_x(0, t) = 0$ ، $u(L, t) = 0$ ، $t > 0$ بیابید.

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم دوم ۸۶-۱۳۸۵ (۳۸)

مسئله مقابل را به روش تبدیل فوریه حل کنید. $u_t - \kappa u_{xx} = te^{-t}$ ، $0 < x < \infty$ ، $t > 0$.
 $u(x, 0) = e^{-x}$ ، $x \geq 0$ ، $u(0, t) = 0$ ، $t > 0$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x, t) = \lim_{x \rightarrow +\infty} u_x(x, t) = 0$

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم دوم ۸۶-۱۳۸۵ (۳۹)

معادلات دیفرانسیل زیر را به کمک تبدیل فوریه یا لاپلاس حل کنید.

(الف)
$$\begin{cases} u_t = \kappa u_{xx} & x > 0, t > 0 \\ u_x(0, t) = 0, u(x, 0) = e^{-\delta x} \end{cases}$$

 (ب)
$$\begin{cases} u_x + \gamma x u_t = \gamma x & x > 0, t > 0 \\ u(x, 0) = u(0, t) = 1 \end{cases}$$

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم دوم ۸۶-۱۳۸۵ (۴۰)

جواب عمومی معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی $u_{yx} + \gamma x u_y = \gamma x$ را بیابید.

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم دوم ۸۶-۱۳۸۵ (۴۱)

معادله دیفرانسیل زیر را به روش جداسازی متغیرها حل نمایید.

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq 1 \\ u(x, 0) = u(x, 1) = u(0, y) = 0, u(\pi, y) = 3 \sin(\delta \pi y) \end{cases}$$



۴۲) دانشگاه علم و صنعت ایران / میان‌ترم دوم ۸۶-۱۳۸۵

معادله روبرو را حل کنید. $xu_x - yu_y = 0$, $u(1,1) = 1$

۴۳) دانشگاه علم و صنعت ایران / میان‌ترم دوم ۸۶-۱۳۸۵

مسئله روبرو را به روش تبدیل فوریه حل کنید. $\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & -\infty < x < \infty, 0 < y < 1 \\ u(x,0) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ e^{-ax} & x > 0 \end{cases}, u(x,1) = 0 \end{cases}$

۴۴) دانشگاه علم و صنعت ایران / میان‌ترم دوم ۸۶-۱۳۸۵

مسئله مقابل را با ذکر جزئیات به روش دالامبر حل کنید. $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x,0) = x, \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = x^2 \end{cases}$

۴۵) دانشگاه تهران / پایان‌ترم اول ۸۶-۱۳۸۵

مسئله مقدار اولیه- مرزی مقابل را حل کنید. $\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0 & 0 < x < L, \forall t > 0 \\ u(x,0) = 0, u(0,t) = \sin t, u(L,t) = \sin 2t \end{cases}$

۴۶) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۸۶-۱۳۸۵

مسئله روبرو را به روش تبدیل فوریه حل کنید. $u_t = u_{xx} + u$, $-\infty < x < \infty$, $t > 0$
 $u(x,0) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ -1 & -1 < x < 0 \\ 0 & \text{در بقیه جاها} \end{cases}$, $\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x,t) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} u_x(x,t) = 0$

۴۷) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۸۶-۱۳۸۵

مسئله دیفرانسیل جزئی زیر را به روش تفکیک پذیری متغیرها با جزئیات کامل حل کنید.

$u_{tt} = u_{xx}$, $0 < x < \pi$, $t > 0$
 $u(0,t) = u(\pi,t) = 2$, $t \geq 0$
 $u(x,0) = x$, $u_t(x,0) = 0$, $0 < x < \pi$

۴۸) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم اول ۸۶-۱۳۸۵

جواب معادله مقابل را بیابید. $u_{tt} = 4u_{xx}$, $u(0,t) = 0$, $u(\pi,t) = 0$
 $u(x,0) = \sin 5x + \sin 4x$, $u_t(x,0) = 0$

۴۹) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم اول ۸۶-۱۳۸۵

معادله زیر را به یک معادله همگن تبدیل کرده و سپس جواب آن را بیابید.

$u_{xx} = u_t - x$, $u(0,t) = 0$, $u(1,t) = \frac{5}{6}$, $u(x,0) = -\frac{x^3}{6}$



ریاضی مهندسی

۵۰) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم اول ۸۶-۱۳۸۵

جواب عمومی $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} = 0$ را بیابید.

۵۱) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم اول ۸۶-۱۳۸۵

معادله مقابل را به کمک تبدیل لاپلاس حل کنید. $0 < x < 1$, $t > 0$

$$\begin{cases} u_{xx} = u_t \\ u(0, t) = u(x, 0) = 0, \quad u(1, t) = 1 - e^{-t} \end{cases}$$

۵۲) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم اول ۸۶-۱۳۸۵

معادله گرمای روبرو را با شرایط داده شده حل کنید. $0 < x < 3$, $t > 0$

$$u_t = 9u_{xx}, \quad u(0, t) = u(3, t) = 0, \quad u(x, 0) = \sin 4\pi x$$

۵۳) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم اول ۸۶-۱۳۸۵

معادله اویلر زیر را با شرایط داده شده حل کنید.

$$2u_{xx} + 3u_{xy} + u_{yy} = 0, \quad u(x, 0) = x^2, \quad u_y(x, 0) = \frac{1}{1+x^2}$$

۵۴) دانشگاه صنعتی شریف / میان‌ترم اول ۸۶-۱۳۸۵

با فرض اینکه حد u و u_x در $X \rightarrow \infty$ ، برابر صفر باشد، جواب معادله زیر را بیابید که $-\infty < X < +\infty$ و $t > 0$ و $k > 0$ است (k ثابت). همچنین جواب صریح مسئله را برای حالت $\varphi = e^{-x^2}$ بیابید.

$$\begin{cases} u_t - ku_{xx} + bt^2 u = 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{cases}$$

۵۵) دانشگاه صنعتی شریف / میان‌ترم اول ۸۶-۱۳۸۵

همه جواب‌های مسئله مقدار مرزی زیر را به دست آورید که $-\infty < x < \infty$ و $0 < k$, c , a و $a > c$ می‌باشد.

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = h(x, t) \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = k \\ u_t(0, t) + au_x(0, t) = 0 \end{cases}$$

۵۶) دانشگاه صنعتی شریف / میان‌ترم اول ۸۶-۱۳۸۵

الف) معادله روبرو را حل کنید که u بر خط $y = x + 1$ ، برابر $x - 1$ است.

$$xu_x + yu_y = xy + u$$

 ب) جواب عمومی معادله روبرو را بیابید.

$$(x^2 - yz)z_x + (y^2 - zx)z_y = z^2 - xy$$

۵۷) دانشگاه صنعتی شریف / میان‌ترم اول ۸۶-۱۳۸۵

همه جواب‌های مسئله مقدار مرزی روبرو را بیابید که $0 < x < 1$ و $t > 0$ می‌باشد.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 2(t+1) + x(1-x) \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad u(x, 0) = x(1-x) \end{cases}$$



۵۸) دانشگاه صنعتی شریف / میان‌ترم اول ۸۶-۱۳۸۵

الف) همه جواب‌های معادله روبرو را برای مقادیر مختلف λ و ثابت‌های a و b بیابید.

$$\begin{cases} u''(x) + \lambda u(x) = 0 & 0 < x < 1 \\ u(0) + au'(0) = 0 \\ u(1) + bu'(1) = 0 \end{cases}$$

ب) معادله روبرو را حل کنید (a و $k > 0$). b و k ثابت‌های دلخواهند.

$$\begin{cases} u_t - ku_{xx} = 0 & 0 < x < 1, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) \\ u(0, t) + au'(0, t) = 0 \\ u(1, t) + bu'(1, t) = 0 \end{cases}$$

۵۹) دانشگاه صنعتی شریف / میان‌ترم اول ۸۶-۱۳۸۵

مسئله زیر را حل کنید که در آن $-\infty < x < \infty$ و $t > 0$ است.

$$\begin{cases} 3u_{tt} + u_{xx} - 4u_{xt} = 0 \\ u(x, 0) = f(x), u_t(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

۶۰) دانشگاه صنعتی امیرکبیر / میان‌ترم اول ۸۶-۱۳۸۵

معادله پواسن زیر را درون دیسک $0 \leq r < a$ در نظر بگیرید.

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = r^\nu + r^\nu \sin 2\theta, \quad u(a, \theta) = 0$$

با معرفی جواب به صورت $u(r, \theta) = a_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n(r) \cos n\theta + b_n(r) \sin n\theta]$ و تعیین ضرایب، ثابت کنید که

$$u(r, \theta) = \frac{1}{25}(r^5 - a^5) + \frac{r^2}{12}(r^2 - a^2) \sin 2\theta$$

(راهنمایی: جواب خصوصی معادله $y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{n^2}{x^2}y = x^k$ به صورت $y_p = cx^m$ تعیین می‌شود).

۶۱) دانشگاه صنعتی امیرکبیر / میان‌ترم اول ۸۶-۱۳۸۵

با استفاده از تبدیلات فوریه F_x یا F_y معادله زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + x, & 0 < x < 1, t > 0 \\ u(0, t) = u(1, t) = u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0 \end{cases}$$

۶۲) دانشگاه صنعتی امیرکبیر / میان‌ترم اول ۸۶-۱۳۸۵

ابتدا معادله زیر را به فرم کانونی تبدیل کرده و سپس آن را حل کنید.

$$(\sin^2 x)u_{xx} + (\sin 2x)u_{xy} + (\cos^2 x)u_{yy} + (\tan x)u_x = 0$$



ریاضی مهندسی

دانشگاه صنعتی امیرکبیر / میان‌ترم اول ۸۶-۱۳۸۵ (۶۳)

الف) معادله $2y(2-x)z_x + (x^2 - y^2 + z^2 - 4x)z_y + 2yz = 0$ را حل کنید.
 ب) در بین رویه‌های جواب، رویه‌ای را بیابید که بر خم $x - z = 3$ و $x^2 + y^2 + z^2 - z + 1 = 0$ بگذرد.

دانشگاه علم و صنعت ایران / میان‌ترم اول ۸۶-۱۳۸۵ (۶۴)

مسئله زیر را به روش ضربی با جزئیات کامل حل کنید.

$$u_{tt} - 4u_t = 9u_{xx} + x - t \quad 0 < x < \pi, t > 0$$

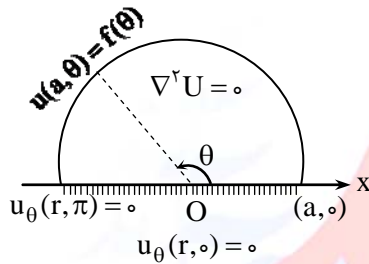
$$u(x, 0) = 1, \quad u_t(x, 0) = x, \quad u(0, t) = t$$

دانشگاه علم و صنعت ایران / میان‌ترم اول ۸۶-۱۳۸۵ (۶۵)

با تبدیل فوری، معادله روبرو را حل کنید. $-\infty < x < \infty, t > 0$
 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 9 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$
 $u(x, 0) = 4e^{-\Delta|x|}, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad -\infty < x < \infty$

دانشگاه تهران / میان‌ترم اول ۸۶-۱۳۸۵ (۶۶)

مسئله مقدار کرانه‌ای (مرزی) در داخل نیم‌دایره با شرایط کرانه‌ای داده شده را حل کنید.



بر روی کمان نیم‌دایره (به شعاع a) شرط کرانه‌ای $u(a, \theta) = f(\theta)$ تکه‌ای هموار است و قطر با عایق پوشانیده شده است. در حالت خاص $f(\theta) = \left| \theta - \frac{\pi}{2} \right|$, $0 \leq \theta \leq \pi$
 جواب مسئله را کاملاً مشخص نمایید. ($0 \leq r \leq a$)

دانشگاه تهران / میان‌ترم اول ۸۶-۱۳۸۵ (۶۷)

معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی $u_{xx} + u_{xy} - 6u_{yy} = \cos x \cos y$ را حل کنید. این معادله مرتبه دوم خطی از چه نوع می‌باشد؟

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / شهریور ماه ۱۳۸۵ (۶۸)

مسئله مقابل را به روش تبدیل فوری حل کنید.
 $u_t - 9u_{xx} = \begin{cases} 1 & ; |x| < 1 \\ 0 & ; \text{سایر نقاط} \end{cases} \quad t > 0$
 $u(x, 0) = e^{-|x|}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x, t) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} u_x(x, t) = 0$

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / شهریور ماه ۱۳۸۵ (۶۹)

مسئله روبرو را حل کنید.
 $u_{tt} - u_{xx} = 2(t^2 - x^2) + 2x; \quad 0 < x < 0.5, t > 0$
 $u(x, 0) = x^2, \quad u_t(x, 0) = 0; \quad 0 \leq x \leq 0.5, \quad u_x(0.5, t) = -1, \quad u_x(0, t) = -1; \quad t > 0$



۷۰) دانشگاه صنعتی شریف / پایان‌ترم دوم ۸۵-۱۳۸۴

جواب صوری مسئله مقدار مرزی زیر را به دست آورید و سپس نشان دهید که جواب صوری به دست آمده،

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - 6x & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(x, 0) = x^2 + 3x + 3 \sin x, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi \\ u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = \pi^2 + 3\pi, \quad t \geq 0 \end{cases}$$

جواب واقعی مسئله است.

۷۱) دانشگاه صنعتی شریف / پایان‌ترم دوم ۸۵-۱۳۸۴

$$\begin{cases} u_t = 4u_{xx} & 0 < x < 2, t > 0 \\ u(0, t) = u(2, t) = 0 & t \geq 0 \\ u(x, 0) = \sin \frac{\pi x}{2} & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

جواب صوری مسئله مقدار مرزی روبرو را به دست آورید و سپس نشان دهید که جواب صوری به دست آمده، جواب واقعی مسئله است.

۷۲) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم دوم ۸۵-۱۳۸۴

مسئله زیر را با جزئیات کامل حل کنید.

$$\begin{cases} u_t - 4u_{xx} = 0, \quad 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(x, 0) = 0, \quad u_x(0, t) = t, \quad u_x(\pi, t) = t^2, \quad 0 \leq x \leq \pi, t \geq 0 \end{cases}$$

۷۳) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم دوم ۸۵-۱۳۸۴

معادله‌های زیر را به کمک تبدیل لاپلاس یا فوریه مناسب حل کنید.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & (x > 0, t > 0) & \text{(الف)} \\ u_x(0, t) = 0, \quad u(x, 0) = xe^{-x} \\ u_{xx} = u_t & 0 \leq x \leq 1, t > 0 & \text{(ب)} \\ u(0, t) = u(1, t) = 1, \quad u(x, 0) = 1 + \sin \pi x \end{cases}$$

۷۴) دانشگاه علم و صنعت ایران / میان‌ترم دوم ۸۵-۱۳۸۴

مطلوبست حل معادله زیر.

$$\begin{cases} \nabla^2 u = x + 2y, \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi \\ u(x, 0) = x, \quad u(x, \pi) = 2, \quad u(0, y) = y, \quad u(\pi, y) = \cos y \end{cases}$$

۷۵) دانشگاه علم و صنعت ایران / میان‌ترم دوم ۸۵-۱۳۸۴

معادله گرما در یک میله نامتناهی به صورت زیر داده شده است:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0$$

تابع درجه حرارت را بیابید (از تبدیل فوریه استفاده کنید).

$$u(x, 0) = e^{-|x|}$$



ریاضی مهندسی

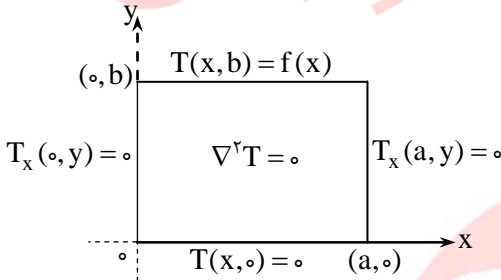
دانشگاه علم و صنعت ایران / میان‌ترم دوم ۸۵-۱۳۸۴ (۷۶)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad x > 0, \quad t > 0.$$

با استفاده از تبدیل لاپلاس مسئله مقابل را حل کنید.

$$u(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = \sin t, \quad u_t(x, 0) = e^{-x} \quad x > 0, \quad t > 0.$$

دانشگاه تهران / میان‌ترم دوم ۸۵-۱۳۸۴ (۷۷)



مسئله مقدار کرانه‌ای روبرو را در داخل مستطیل به اضلاع a و b حل کنید. تابع داده شده $f(x)$ ، تکه‌ای هموار فرض می‌شود.

دانشگاه تهران / میان‌ترم دوم ۸۵-۱۳۸۴ (۷۸)

در مسئله مقدار اولیه - کرانه‌ای زیر، مقدار عددی $u(\frac{L}{4}, \frac{13}{3}L)$ (یعنی مقدار $u(x, t)$ را در نقطه $x = \frac{L}{4}$ و در لحظه $t = \frac{13}{3}L$ را بیابید.

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 < x < L, t > 0 \\ \text{شرایط کرانه‌ای } u(0, t) = 0 = u(L, t), & t \geq 0 \\ u(x, 0) = x(L-x), & u_t(x, 0) = \begin{cases} x & , 0 \leq x \leq \frac{L}{3} \\ \frac{1}{3}(L-x) & , \frac{L}{3} < x \leq L \end{cases} \end{cases}$$

شرایط اولیه

دانشگاه صنعتی شریف / پایان‌ترم اول ۸۵-۱۳۸۴ (۷۹)

$$u_{xx} + y^2 u_{yy} + y u_y = 0.$$

فرم کانونی معادله روبرو را به دست آورید.

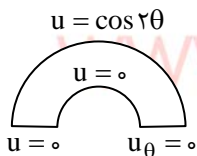
دانشگاه صنعتی شریف / پایان‌ترم اول ۸۵-۱۳۸۴ (۸۰)

$$u_t - u_{xx} = e^{-2x^2 + 2t}$$

جوابی برای معادله حرارت روبرو پیدا کنید.

$$u(x, 0) = e^{-2x^2} \quad (-\infty < x < \infty, 0 < t)$$

دانشگاه صنعتی شریف / پایان‌ترم اول ۸۵-۱۳۸۴ (۸۱)



معادله $\Delta u = 0$ را در ناحیه $1 < r < 2$ و $0 < \theta < \pi$ با شرایط مرزی روبرو

$$\text{حل کنید. (راهنمایی: } \Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} \text{)}$$



۸۲) دانشگاه صنعتی شریف / پایان‌ترم اول ۸۵-۱۳۸۴

معادله یک تار مرتعش به طول یک به صورت زیر است. مقدار دقیق $u(\frac{1}{2}, 2)$ را به دست آورید.

$$u_{tt} - 4u_{xx} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = x(x-2), \quad u_t(x, 0) = \sin^2 x, \quad u(0, t) = u_x(1, t) = 0$$

۸۳) دانشگاه صنعتی امیرکبیر / میان‌ترم اول ۸۵-۱۳۸۴

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, & 0 < r \leq 1, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{3} \\ u(1, \theta) = u(r, \frac{\pi}{3}) = 0, & u(r, \theta) = 1 \end{cases}$$

معادله لاپلاس روبرو را حل کنید.
(راهنمایی: قرار دهید $u(r, \theta) = v(r, \theta) + w(\theta)$)

۸۴) دانشگاه صنعتی امیرکبیر / میان‌ترم اول ۸۵-۱۳۸۴

$$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx}, & x > 0, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = \cos(\pi x) \\ u_t(0, t) = u_x(0, t) = |u(\infty, t)| = 0 \end{cases}$$

معادله روبرو را حل کنید.

۸۵) دانشگاه صنعتی امیرکبیر / میان‌ترم اول ۸۵-۱۳۸۴

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = t \sin \pi x \\ u(x, 0) = -\frac{1}{\pi^4} \sin \pi x \\ u(0, t) = u(\ell, t) = 0 \end{cases}$$

معادله روبرو را در نظر بگیرید.
الف) معادله مذکور مبین چه پدیده‌ای می‌باشد. یک توصیف فیزیکی برای آن ارائه کنید.
ب) معادله مذکور را حل کنید.

۸۶) دانشگاه صنعتی امیرکبیر / میان‌ترم اول ۸۵-۱۳۸۴

$$u_{xx} - y^4 u_{yy} - 2y^3 u_y = 0$$

معادله مقابل را به فرم کانونی تبدیل کرده و آن را حل کنید.

۸۷) دانشگاه علم و صنعت ایران / میان‌ترم اول ۸۵-۱۳۸۴

مسئله زیر را با استفاده از تبدیلات لاپلاس حل کنید.

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + t, \quad x > 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \quad x \geq 0, \quad u(0, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty$$

۸۸) دانشگاه علم و صنعت ایران / میان‌ترم اول ۸۵-۱۳۸۴

مسئله زیر را با روش جداپذیری (تفکیک متغیرها) با ذکر جزئیات حل کنید.

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - 4 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + 4u(x, t) = 0, \quad 0 < x < 9, \quad t > 0$$

$$u(0, t) = u(9, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 9$$



معادلات دیفرانسیل جزئی زیر را حل کنید.

الف) $u_{xx} + u_{yy} = 0$, $0 < x, y < \pi$

$$\begin{cases} u_y(x, 0) = 2x - 1 \\ u_y(x, \pi) = 0 \end{cases} , \quad 0 \leq x \leq \pi , \quad \begin{cases} u_x(0, y) = y + 1 \\ u_x(\pi, y) = 2 \end{cases} , \quad 0 \leq y \leq \pi$$

و انتگرال u کراندار است هرگاه $x \rightarrow +\infty$.

ب) $u_t - qu_{xx} = te^{-x}$, $0 < x < \infty$, $t > 0$

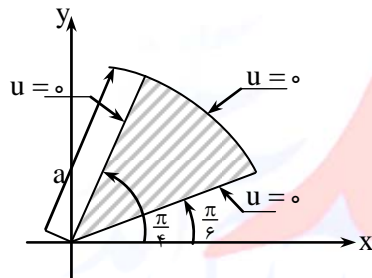
$u(x, 0) = e^{-x}$, $u(0, t) = 1$, $0 \leq x < \infty$

معادله انتشار موج ناهمگن زیر را با شرایط داده شده حل نمایید.

$u_{tt} - c^2 u_{xx} = P(x, t)$, $0 < x < 1$, $t > 0$

$u(1, t) = 0$, $u(0, t) + u_x(0, t) = 0$, $u(x, 0) = f(x)$, $u_t(x, 0) = g(x)$

معادله انتقال حرارت گذرا را در ناحیه نشان داده شده در شکل زیر حل نمایید. مرز در دمای صفر نگاه داشته شده است و دمای اولیه ناحیه نیز T_0 است.



$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \nabla^2 u , \quad 0 < r < a , \quad \frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{4}$$

$$u(r, \frac{\pi}{6}, t) = u(r, \frac{\pi}{4}, t) = u(a, \theta, t) = 0$$

$$u(r, \theta, 0) = T_0$$

معادلات زیر را حل نمایید.

الف)

$0 < x, 0 \leq y \leq 1$, $u_{xx} + u_y = yu$

$u(x, 1) = e^{-x}$, $u(0, y) = 0$

$\lim_{x \rightarrow \infty} u(x, y) = \lim_{x \rightarrow \infty} u_x(x, y) = 0$

ب)

$\rho u_{xx} - u_{xy} + u_x = y^2$

$u_x(x, 0) = 0$, $u(0, y) = 1$



با استفاده از تبدیل لاپلاس جواب معادله زیر را بر حسب توابع u_0 ، $f(t)$ ، $I^{-1}[e^{-\frac{1}{s}}] = f(t)$ بیان نمایید.

$$u_{tt} + au_t + bu + c^2 u_{xt} = 0, \quad x, t > 0$$

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = u_0(t) \quad (a, b, c \text{ ضرایب ثابت و مثبت می‌باشند}).$$

$$u_{tt} = u_{xx} - 2u_t + xt$$

معادله مقابل را با روش جداسازی حل کنید.

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = x, \quad u(0, t) = t, \quad u_x(1, t) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t$$

مسائل دیفرانسیل جزئی زیر را حل کنید.

$$u_t = u_{xx} + 2u, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0$$

(الف)

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad \begin{cases} u_x(0, t) = 2 \sin t, & t \geq 0 \\ u_x(\pi, t) = 2 \cos t, & t \geq 0 \end{cases}$$

$|u|$ وقتی که $t \rightarrow +\infty$ کراندار است.

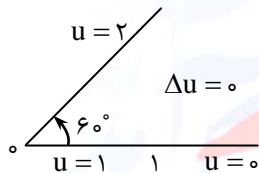
$$u_{tt} = -u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0$$

(ب)

$$u_t(x, 0) = x, \quad -\infty < x < \infty$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x, y) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} u_x(x, t) = 0$$

معادله $\Delta u = 0$ را در ناحیه روبرو با شرایط مرزی داده شده حل کنید.



معادله دیفرانسیل زیر را به یک معادله همگن تبدیل نمایید.

$$u_t = u_{xx} + x; \quad u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad u(x, 0) = \frac{-1}{6} x^3, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

مطلوبست حل مسئله زیر روی $0 < x < 1, 0 < y < t, 0 < t$.

$$u_t = u_{xx} + u_{yy}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < t, \quad 0 < t$$

$$u(x, y, 0) = xe^{-y}, \quad u(x, 0, t) = xt, \quad u(0, y, t) = u(1, y, t) = u(x, \infty, t) = 0$$

مطلوبست حل مسئله با شرایط مرزی زیر روی $0 < x < 1, -\pi < y < \pi, 0 < x < 1$.

$$\nabla^2 y = y, \quad -\pi < y < \pi, \quad 0 < x < 1$$

$$u_x(0, y) = y, \quad u(1, y) = 1, \quad u(x, -\pi) = u(x, \pi) + x, \quad u_y(x, -\pi) = u_y(x, \pi)$$



ریاضی مهندسی

دانشگاه صنعتی شریف / پایان‌ترم دوم ۸۳-۱۳۸۲ (۱۰۰)

جواب مسئله با شرایط اولیه روبرو را تعیین کنید.

$$u_{tt} - u_{xx} = xt, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = \sin x, \quad u_t(x, 0) = x$$

دانشگاه تهران / میان‌ترم دوم ۸۳-۱۳۸۲ (۱۰۱)

مسئله مقدار کرانه‌ای (مرزی) در داخل یک مستطیل را حل کنید.

$$\begin{cases} T_{xx} + T_{yy} = 0, & 0 < x < a, \quad 0 < y < b \\ T(0, y) = T(a, y), \quad T_x(0, y) = T_x(a, y) \\ T(x, 0) = 0, \quad T(x, b) = h(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{a}{2} \\ a-x, & \frac{a}{2} < x \leq a \end{cases} \end{cases}$$

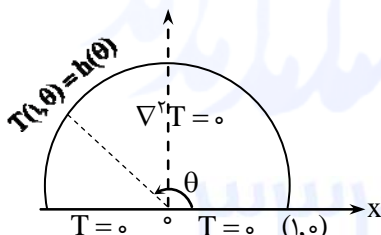
دانشگاه تهران / میان‌ترم دوم ۸۳-۱۳۸۲ (۱۰۲)

مسئله مقدار اولیه - کرانه‌ای موج یک‌بعدی

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x > 0, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = xe^{-ax} \quad (a > 0 \text{ ثابت}), \quad u_t(x, 0) = 0, & x > 0 \\ u(0, t) = 0, & t > 0 \end{cases}$$

بر یک نیم‌خط داده شده است. جواب این مسئله را پیدا کنید و مقدار جواب را در هر نقطه x در لحظه $t = 2x$ تعیین نمایید.

دانشگاه تهران / میان‌ترم اول ۸۳-۱۳۸۲ (۱۰۳)



مسئله مقدار کرانه‌ای (مرزی) دیریشله در داخله نیم قرص

با شرایط مرزی داده شده را حل

کنید و دمای مانای $T(r, \theta)$ را به دست آورید. در اینجا

$$h(\theta) = \begin{cases} \theta & 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ \pi - \theta & \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi \end{cases}$$

دانشگاه تهران / میان‌ترم اول ۸۳-۱۳۸۲ (۱۰۴)

جواب عمومی معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی $u_{xy} - u_x = xe^y$ را بیابید.



معادلات زیر را حل کنید.

$$u_t - 4u_{xx} = x + t^2 \quad (\text{الف})$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = x & , x, y \rightarrow 0 \text{ هرگاه } u(x, y) \rightarrow 0 \\ u_x(0, t) = \cos t & , u_x(\pi, t) = \sin t \quad 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

$$\nabla^2 u = e^{-x} \quad (\text{ب})$$

$$u_x(0, y) = e^{-y} \quad , \quad u_y(x, 0) = 0 \quad x > 0, y > 0$$

$$x, y \rightarrow 0 \text{ هرگاه } u(x, y) \rightarrow 0$$

معادلات زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & (\text{الف}) \\ u_y(x, 0) = 2x - 1, u_y(x, \pi) = 0 & 0 < x < \pi, 0 < y < \pi \\ u_x(0, y) = y + 1, u_x(\pi, y) = 2 \end{cases}$$

→ این قسمت، تکراری با قسمت (الف) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان ترم دوم ۸۴-۱۳۸۳ می باشد.

$$\begin{cases} u_t - 4u_{xx} = \begin{cases} 2t & \text{اگر } |x| < \pi \\ 0 & \text{اگر } |x| > \pi \end{cases} & (\text{ب}) \\ u(x, 0) = \begin{cases} |x| & \text{اگر } |x| < 1 \\ 0 & \text{اگر } |x| > 1 \end{cases} \end{cases} \quad (-\infty < x < +\infty, t > 0)$$

با استفاده از جداسازی متغیرها نشان دهید که جواب معادله

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 \\ u(x, y) = 0 & , \quad x = y = 0, y = b \\ u(x, y) = u_0 & , \quad 0 < y < b \end{cases}$$

$$\frac{4u_0}{\pi} \sum_{\substack{k=0 \\ n=2k+1}}^{\infty} \frac{\sinh\left(\frac{n\pi x}{b}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi d}{b}\right)} \sinh\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad \text{به صورت مقابل می باشد:}$$

ابتدا معادله مقابل را به صورت کانونی درآوردید و سپس آن را حل کنید.

$$u_{xx} + 10u_{xy} + 9u_{yy} = y$$



مسئله مقدار کرانه‌ای (مرزی) زیر در داخل یک نیم دایره به مرکز 0 و به شعاع $a > 0$ مفروض است.

$$\begin{cases} \nabla^2 u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0 & \text{در نقاط درون نیم‌دایره} \\ u(a, \theta) = \theta(\pi - \theta), \quad u = 0 & \text{بر روی قطر} \end{cases}$$

این مسئله را حل کنید.

مسئله مقدار اولیه - کرانه‌ای (مرزی) زیر مفروض است.

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad \forall x > 0, \quad \forall t > 0 \\ u(0, t) = 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = g(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < x_1 \\ g_0 & x_1 \leq x \leq x_2 \\ 0 & x > x_2 \end{cases} \end{cases}$$

که در آن x_1, x_2 ثابت مثبت و g_0 نیز ثابت است. نمودار تابع $u(x, t)$ را در چند لحظه t بعد از لحظه اولیه رسم کنید تا رفتار موجی جواب مسئله مشخص شود.

مسئله روبرو را حل کنید.

$$\nabla^2 u = e^{-x} \quad x > 0, y > 0$$

$$u_x(0, y) = e^{-y}, \quad u_y(x, 0) = 0 \quad x, y > 0$$

$u(x, y)$ کراندار است هرگاه: $x, y \rightarrow \infty$

→ این سوال، تکراری با قسمت (ب) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / شهریورماه ۱۳۸۲ می باشد.

مسئله زیر را با تبدیل فوریه حل کنید.

$$u_t - \epsilon u_{xx} = \begin{cases} \gamma t & |x| < \pi \\ 0 & |x| > \pi \end{cases}, \quad u(x, 0) = \begin{cases} |x| & |x| < 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

→ این سوال، تکراری با قسمت (ب) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان ترم دوم ۸۲-۱۳۸۱ می باشد.

مسئله زیر را به روش تفکیک متغیرها (ضربی) حل کنید.

$$\begin{cases} u_{tt} - 9u_{xx} = -9 - 9t; \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = 1 \\ u_t(x, 0) = x \end{cases}, \quad \begin{cases} u_{xx}(0, t) = 1 + t \\ u_x(\pi, t) = t \end{cases}, \quad t \geq 0$$



۱۱۴) دانشگاه علم و صنعت ایران / میان‌ترم اول ۸۲-۱۳۸۱

مسئله زیر را با ذکر جزئیات با روش جداپذیری حل کنید.

$$\frac{1}{4}u_{tt} + u_t + u - u_{xx} = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = x, \quad u_t(x, 0) = e^{-x}, \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad t \geq 0$$

۱۱۵) دانشگاه علم و صنعت ایران / میان‌ترم اول ۸۲-۱۳۸۱

مسئله زیر را با استفاده از تبدیلات فوریه حل کنید.

$$u_{xx} + u_{yy} = ye^{-|x|} \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < y < \pi$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} x & |x| < \pi \\ 0 & \text{سایر حالات} \end{cases}$$

$$u(x, \pi) = e^{-|x|}, \quad |x| < \infty$$

$$u, u_x, u_y \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow \infty$$

۱۱۶) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / شهریور ماه ۱۳۸۱

با توجه به تغییر متغیر $v = x + y$ و $z = 2x - y$ معادله $u_{xx} + u_{xy} = 2u_{yy}$ را حل کنید.

۱۱۷) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / شهریور ماه ۱۳۸۱

$$u_t - u_{xx} = \begin{cases} 2t & 0 < x < \pi \\ 1 & x > \pi \end{cases} \quad t > 0$$

مسئله مقابل را حل کنید.

$$u(x, 0) = \begin{cases} 2x & 0 < x < 1 \\ -1 & x > 1 \end{cases}$$

$$u(0, t) = t - 1, \quad u(x, t) \rightarrow 0 \text{ if } x \rightarrow +\infty$$

۱۱۸) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۸۱-۱۳۸۰

مسئله زیر را به روش تبدیل فوریه حل کنید.

$$u_t - u_{xx} = \begin{cases} 2t - 1 & 0 < x < \pi \\ 0 & x > \pi \end{cases}, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} 2x + 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}, \quad u(0, t) = 0, \quad t \geq 0$$

☞ این سوال، تکراری با قسمت (ب) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / شهریورماه ۱۳۸۷ می باشد.



مسئله زیر را حل نموده و مشخص کنید آیا این مسئله به جواب یکتا منجر می‌شود؟

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi$$

$$u_y(x, 0) = 2x - 1, \quad u_y(x, \pi) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi$$

$$u_x(0, y) = 1 + y, \quad u_x(\pi, y) = 2, \quad 0 \leq y \leq \pi$$

این سوال، تکراری با قسمت (الف) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان ترم دوم ۸۴-۱۳۸۳ می‌باشد.

گروه آموزشی



توابع مختلط

۱) دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم دوم ۸۸-۱۳۸۷

اگر تابع $f(z) = u + iv$ تحلیلی باشد، به کمک مختصات قطبی نشان دهید:

$$f'(z) = (\cos \theta - i \sin \theta) \frac{\partial f}{\partial r} = -\frac{\sin \theta + i \cos \theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}$$

۲) دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم دوم ۸۸-۱۳۸۷

تابع $v(x, y)$ مزدوج همساز تابع $u(x, y) = 2xy + \frac{1}{4} \ln(x^2 + y^2) + x$ را بیابید و $f(z) = u + iv$ را بر حسب z بنویسید و ناحیه تحلیلی بودن و نبودن $f(z)$ را مشخص کنید.

۳) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم دوم ۸۸-۱۳۸۷

نقاط مشتق‌پذیری و تحلیلی بودن تابع $f(z) = \ln(z + i)$ را تعیین کنید.

۴) دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم اول ۸۸-۱۳۸۷

نشان دهید که به ازای هر z ، $\sin^2 z + \cos^2 z$ عددی است حقیقی و مقدار آن را بیابید و معادله $\cos z = \delta i$ را حل کنید.

۵) دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم اول ۸۸-۱۳۸۷

نواحی تحلیلی تابع روبرو را بیابید.

$$f(z) = \frac{\bar{z}}{|z|^2} + |x| - i|y|$$



ریاضی مهندسی

۶ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۸۸-۱۳۸۷

هرگاه $f(z) = u + iv$ در ناحیه D تحلیلی باشد، آن‌گاه به ازای چه عدد حقیقی k ، تساوی زیر به ازای

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|f(z)|^2 = k|f'(z)|^2$$

هر Z واقع در D برقرار است؟

۷ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۸۸-۱۳۸۷

در تحلیلی بودن $f(z) = \cos(x+y) + i\cos(x-y)$ در صفحه مختلط بحث کنید.

۸ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / شهریور ماه ۱۳۸۷

ابتدا همساز بودن تابع $u(x, y) = \ln|z|$ را بررسی کرده و سپس v ، مزدوج همساز آن را یافته و تابع $f(z) = u + iv$ را برحسب z بیان کنید.

۹ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / شهریور ماه ۱۳۸۷

a و b را طوری بیابید که تابع $u(x, y) = x^2 - ay^2 + e^{2x} \cos(by)$ همساز شود. v مزدوج همساز آن را بیابید و تابع تحلیلی $w = f(z) = u + iv$ را برحسب z بنویسید.

۱۰ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / شهریور ماه ۱۳۸۷

اگر $f(z) = u + iv$ تابعی تحلیلی باشد و $u = 3x^2y - y^3$ ، ضابطه $f(z)$ را تعیین کنید و $f'(i-1)$ را بیابید.

۱۱ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم دوم ۸۷-۱۳۸۶

معادله $\sin z = 2i$ را حل کنید.

۱۲ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم دوم ۸۷-۱۳۸۶

نواحی تحلیلی بودن و تحلیلی نبودن $f(z) = |y| - i|x|$ را مشخص کنید و مشتق این تابع را در $z = 0$ در صورت وجود بیابید.

۱۳ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم دوم ۸۷-۱۳۸۶

نواحی که در آن شرایط معادلات کشی - ریمان برای تابع $f(z) = \operatorname{Re}\left(\frac{2z}{z+1}\right)$ برقرار است را بیابید و مشتق تابع را به شرط وجود محاسبه کنید.

۱۴ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم دوم ۸۷-۱۳۸۶

نشان دهید که هرگاه تابع $f(z) = u + iv$ تحلیلی باشد و $\operatorname{Arg}(f(z))$ (آرگومان $f(z)$) ثابت باشد، آنگاه $f(z)$ یک تابع ثابت است.

۱۵ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم دوم ۸۷-۱۳۸۶

نشان دهید که تابع $u(x, y) = xe^{-y} \cos x - ye^{-y} \sin x$ همساز است و سپس مزدوج همساز آن را به دست آورید.



۱۶ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم دوم ۸۷-۱۳۸۶

$$g(z) = \begin{cases} \frac{(\bar{z})^2}{z} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases} \text{ و } f(z) = \begin{cases} \frac{\operatorname{Re}(z^2)}{|z|} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$$

توابع (الف) پیوستگی تابع f را در $z = 0$ بررسی کنید.

(ب) نشان دهید معادلات کشی - ریمن برای تابع g در $z = 0$ برقرار هستند.

(ج) نشان دهید تابع g در $z = 0$ مشتق ندارد.

۱۷ دانشگاه تهران / میان‌ترم دوم ۸۷-۱۳۸۶

نشان دهید که تابع حقیقی $u(x, y) = \sinh x \cos y$ همساز است. سپس یک تابع مختلط تحلیلی $f(z)$ بیابید به قسمی که $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$. آنگاه بزرگترین ناحیه‌ای را مشخص کنید که تابع f مذکور در آن تحلیلی است. سرانجام تابع $f(z)$ را بر حسب متغیر z بیان نمایید.

۱۸ دانشگاه تهران / میان‌ترم دوم ۸۷-۱۳۸۶

فرض کنیم تابع f در حوزه D از صفحه z تحلیلی باشد. اگر تابع $|f(z)|$ در D ثابت باشد، آنگاه نشان دهید که تابع f یک تابع ثابت است. (بر روی حوزه D)

۱۹ دانشگاه صنعتی شریف / پایان‌ترم اول ۸۷-۱۳۸۶

به کمک صورت قطبی معادلات کشی - ریمن نشان دهید که تابع $g(z) = \sqrt{r} e^{i\theta}$, $r > 0$, $-\pi < \theta < \pi$ در هر نقطه از دامنه خود مشتق‌پذیر است و داریم $g'(z) = \frac{1}{2g(z)}$. سپس با ذکر دلیل، تبدیلی معرفی کنید که ناحیه $\{r > 0, -\pi < \theta < \pi\}$ را به طور همدیس، یک‌به‌یک و پوشا به داخل دایره واحد بفرستد.

۲۰ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم اول ۸۷-۱۳۸۶

دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم اول ۸۶-۱۳۸۵

اگر u و v در ناحیه R همساز باشند، ثابت کنید $(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}) + i(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x})$ در R تحلیلی است.

۲۱ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم اول ۸۷-۱۳۸۶

ثابت کنید $f(z) = |z|^4 + \ln(z+i)$ در نقطه $z = 0$ مشتق‌پذیر است. نواحی تحلیلی بودن و تحلیلی نبودن آن را مشخص کنید.

۲۲ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم اول ۸۷-۱۳۸۶

مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که تابع $u(x, y) = x^3 + ax^2y + bxy^2 + 2y^3$ هارمونیک (همساز) باشد. سپس یک تابع تحلیلی f بیابید که u قسمت موهومی آن باشد.



ریاضی مهندسی

۲۳ دانشگاه تهران / میان‌ترم اول ۸۷-۱۳۸۶

اگر $z = x + iy$ ، آنگاه توابع $f(z) = e^{x-iy}$ و $g(z) = e^{-y+ix}$ هر یک در کدام نقاط صفحه نسبت به متغیر مختلط Z مشتق‌پذیر هستند؟ این توابع را بر حسب Z بنویسید.

۲۴ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم دوم ۸۶-۱۳۸۵

دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم اول ۸۳-۱۳۸۲

$$f(z) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} + i \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

اگر نشان دهید $f(z)$ در $z = 0$ در شرایط

کشی - ریمان صدق می‌کند ولی در $z = 0$ مشتق‌پذیر نیست.

۲۵ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم دوم ۸۶-۱۳۸۵

اگر $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ یک تابع حقیقی باشد، آنگاه برای تحلیلی بودن $f(z)$ ، $u(x, y)$ باید چه نوع تابع حقیقی باشد؟

۲۶ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم دوم ۸۶-۱۳۸۵

نواحی تحلیلی بودن و تحلیلی نبودن $f(z) = \frac{|z-1|^2}{z-1} + |x| + iy$ را مشخص کنید.

۲۷ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم دوم ۸۶-۱۳۸۵

نقاط تحلیلی و غیرتحلیلی تابع $f(z) = \frac{\ln(z^2 + 1)}{(2z - i)^2}$ را بیابید.

۲۸ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم دوم ۸۶-۱۳۸۵

نقاط غیرتحلیلی تابع $f(z) = \ln z + \frac{|z-1|^2}{z-1}$ را بیابید و نقاط تکین تنهای f را مشخص کنید.

۲۹ دانشگاه صنعتی امیرکبیر / پایان‌ترم اول ۸۶-۱۳۸۵

$u = xy$ بخش حقیقی یک تابع تحلیلی $f(z)$ است.

الف) $f(z)$ را تعیین کنید.

ب) $f(z)$ را به صورت تابعی از Z بنویسید.

۳۰ دانشگاه صنعتی امیرکبیر / پایان‌ترم اول ۸۶-۱۳۸۵

تابع $f(z) = |z|^2$ مفروض است.

الف) ثابت کنید که $f(z)$ در $z = 0$ مشتق‌پذیر است.

ب) ثابت کنید که $f(z)$ در هر نقطه دیگر غیر از $z = 0$ مشتق‌پذیر نمی‌باشد.

ج) $f(z)$ در چه نقاطی از صفحه تحلیلی نیست؟ چرا؟



۳۱ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم اول ۱۳۸۵-۸۶

دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم اول ۱۳۸۲-۸۳

الف) شرایط کشی - ریمان را برای تابع $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ در دستگاه قطبی بیابید.
ب) اگر تابع $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ تحلیلی باشد، به کمک مختصات قطبی نشان دهید:

$$f'(z) = (\cos \theta - i \sin \theta) \frac{\partial f}{\partial r} = -\frac{\sin \theta + i \cos \theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}$$

→ این قسمت، تکراری با سؤال (۱) همین فصل می باشد.

ج) با استفاده از قسمت (ب) مشتق $f(z) = \sqrt{z}$ را بیابید.

۳۲ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۱۳۸۵-۸۶

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / شهریور ماه ۱۳۸۵

نقاط تحلیلی و غیرتحلیلی تابع $f(z) = \sin(\bar{z})$ را به دست آورید.

۳۳ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۱۳۸۵-۸۶

نشان دهید تابع $f(z) = e^{z^2}$ تام است و سپس نشان دهید که برای هر عدد مختلط z داریم: $f'(z) = 2ze^{z^2}$

۳۴ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم اول ۱۳۸۵-۸۶

نشان دهید $u(x, y) = 2x - x^3 + 3xy^2$ هارمونیک است و مزدوج هارمونیک آن را بیابید.

۳۵ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم اول ۱۳۸۵-۸۶

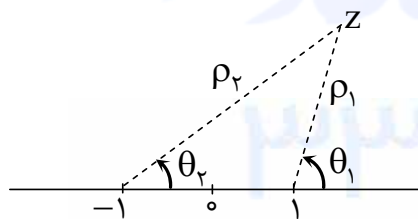
مجموعه جواب معادله $\sin z = \cosh 4$ را بیابید.

۳۶ دانشگاه تهران / میان‌ترم اول ۱۳۸۵-۸۶

اگر a, b, c ثابت‌های حقیقی باشند و $u(x, y) = \sin x \sinh y + ax + by + c$ ، آنگاه نشان دهید که u در تمام صفحه xy همساز است. تابعی تام به نام $f(z)$ به ازای تمام z ها بیابید به قسمی که $u(x, y) = \operatorname{Re}(f(z))$.

۳۷ دانشگاه تهران / میان‌ترم اول ۱۳۸۵-۸۶

یکی از ریشه‌های دوم $(z^2 - 1)$ را به صورت $(z-1)^{\frac{1}{2}}(z+1)^{\frac{1}{2}}$ تعریف می‌کنیم که



در آن $z-1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$ ، $z+1 = \rho_2 e^{i\theta_2}$ ، $-\pi < \theta_1$ و $\theta_2 < \pi$.

نقاطی از صفحه مختلط z (صفحه xy) را تعیین کنید که در آنها تابع $f(z)$ پیوسته نیست و لذا مشتق هم ندارد. این تابع در کدام نقاط از صفحه z تحلیلی است؟

۳۸ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / شهریور ماه ۱۳۸۵

نشان دهید که تابع $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$ همساز است. تابع تحلیلی $f(z) = u + iv$ را طوری تعیین کنید که $f(0) = 2i$.



ریاضی مهندسی

۳۹) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / شهریور ماه ۱۳۸۵

تابع $f(z) = z \operatorname{Im} z$ در چه نقاطی مشتق پذیر است؟ مقدار $f'(0)$ را در صورت وجود بیابید.

۴۰) دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان ترم دوم ۸۵-۱۳۸۴

نواحی ای را که شرایط معادلات کوشی - ریمان برای تابع $f(z) = \operatorname{Im} \left(\frac{2z}{z+1} \right)$ برقرار است را بیابید و مشتق تابع را به شرط وجود محاسبه کنید.

۴۱) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان ترم دوم ۸۵-۱۳۸۴

در مجموعه اعداد مختلط ثابت کنید: $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$

۴۲) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان ترم دوم ۸۵-۱۳۸۴

در مشتق پذیری تابع $f(z) = |x| - iy$ در صفحه مختلط بحث کنید. سپس مقادیر $f'(1+i)$ ، $f'(-1+i)$ و $f'(i)$ را در صورت وجود بیابید.

۴۳) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان ترم دوم ۸۵-۱۳۸۴

برای تابع تام $f = u + iv$ ثابت کنید $\nabla^2(xv + yu)$ همساز است. $(\nabla^2 g = g_{xx} + g_{yy})$

۴۴) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان ترم دوم ۸۵-۱۳۸۴

نقاط غیر تحلیلی تابع $f(z) = \ln(\sin z)$ را بیابید.

۴۵) دانشگاه تهران / میان ترم دوم ۸۵-۱۳۸۴

معادله $\cos z = 2$ را حل کرده و جوابهای آن را به دست آورید.

۴۶) دانشگاه تهران / میان ترم دوم ۸۵-۱۳۸۴

نشان دهید که تابع حقیقی $v(x, y) = e^x(x \sin y + y \cos y)$ در تمام صفحه xy همساز است. سپس یک تابع مختلط $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ بر حسب z بیابید که در تمام صفحه $z = x + iy$ نسبت به متغیر z تحلیلی باشد.

۴۷) دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان ترم اول ۸۵-۱۳۸۴

دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان ترم دوم ۸۲-۱۳۸۱

فرض کنید u و v قسمت‌های حقیقی و موهومی تابع $f(z)$ است که به صورت مقابل تعریف می‌شود. نشان دهید u و v در مبداء مختصات در شرایط کوشی-ریمان صدق می‌کنند ولی تابع در مبداء مشتق پذیر نیست.

$$f(z) = \begin{cases} \frac{(\bar{z})^2}{z} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$$

این سؤال، تکراری با قسمتهای (ب) و (ج) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان ترم دوم ۸۷-۱۳۸۶ می باشد.

۴۸) دانشگاه صنعتی شریف / میان ترم اول ۸۵-۱۳۸۴

تابع $f(x + iy) = x^3 + iy^3$ در چه نقاطی مشتق پذیر و در چه نقاطی تحلیلی است؟ مشتق تابع را در این نقاط به دست آورید.



۴۹ دانشگاه صنعتی شریف / میان‌ترم اول ۸۵-۱۳۸۴

مقادیر زیر را با ارائه کامل راه حل به دست آورید.

(الف) $(i - \sqrt{3})^{i + \sqrt{3}}$

(ب) $\operatorname{Re}\left(\left(\frac{-1 + 5i}{2 + 3i}\right)^{1384}\right)$

(ج) $\cos^{-1}(3)$

۵۰ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم دوم ۸۴-۱۳۸۳

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / شهریور ماه ۱۳۸۰

رابطه‌ای بین پارامترهای a و b به دست آورید به طوری که $u = \cos(ax) \cosh(by)$ همساز (توافقی) شود. سپس v مزدوج همساز u را بیابید.

۵۱ دانشگاه صنعتی امیرکبیر / پایان‌ترم اول ۸۴-۱۳۸۳

تحت چه شرایطی $f(x, y) = e^{ax} \cos(by)$ یک تابع همساز (هارمونیک) می‌باشد؟ سپس مزدوج همساز آن را بیابید.

۵۲ دانشگاه صنعتی امیرکبیر / پایان‌ترم اول ۸۴-۱۳۸۳

(الف) نشان دهید $\cos(x + iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$.

(ب) صفرهای $f(z) = \sinh(\cos z)$ را بیابید.

۵۳ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۸۴-۱۳۸۳

ثابت کنید که اگر $z \neq 0$ ، آنگاه تابع $u(x, y) = \ln \sqrt{|z|}$ همساز است و سپس تابع $v(x, y)$ را طوری بیابید که تابع $f(z) = u + iv$ تابعی تحلیلی گردد.

۵۴ دانشگاه صنعتی شریف / میان‌ترم اول ۸۴-۱۳۸۳

اگر f تابع تحلیلی باشد، نشان دهید تابع $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ نیز تحلیلی است.

۵۵ دانشگاه صنعتی شریف / میان‌ترم اول ۸۴-۱۳۸۳

نشان دهید تابع $u(x, y) = \sinh(x) \sin(y)$ هارمونیک است. تابع $v(x, y)$ را به عنوان مزدوج هارمونیک پیدا کنید. نقاطی که در آن تابع $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ هم‌مدیس نمی‌باشد را بیابید.

۵۶ دانشگاه علم و صنعت ایران / میان‌ترم اول ۸۴-۱۳۸۳

نواحی که تابع $\omega = \frac{1}{\sin \frac{1}{z}}$ تحلیلی است را مشخص کنید. قطب‌های تابع را تعیین کرده و مانده تابع را در این قطب‌ها بیابید.

۵۷ دانشگاه علم و صنعت ایران / میان‌ترم اول ۸۴-۱۳۸۳

کلید توابع هارمونیک به شکل $u = f\left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right)$ را بیابید.



ریاضی مهندسی

۵۸) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / شهریور ماه ۱۳۸۳

معادله $\sin z = i$ را در دستگاه اعداد مختلط حل کنید.

۵۹) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / شهریور ماه ۱۳۸۳

نقاط پیوستگی - مشتق پذیری و تحلیلی تابع $f(z) = \cos \bar{z}$ را مشخص کنید.

۶۰) دانشگاه صنعتی شریف / پایان ترم دوم ۸۳-۱۳۸۲

نشان دهید $u(x, y) = 3xy^2 - x^3 + \sin x \cosh y$ هارمونیک است. مزدوج هارمونیک آن را نیز بیابید.

۶۱) دانشگاه تهران / پایان ترم دوم ۸۳-۱۳۸۲

نشان دهید تابع $u(x, y) = \cos x \cosh y$ در تمام نقاط صفحه xy همساز است. سپس تابع حقیقی $v(x, y)$ را به قسمی بیابید که تابع مختلط $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ در همه نقاط Z تحلیلی باشد. مقدار تابع $f(z)$ را صریحاً بر حسب Z به دست آورید. $f'(z)$ را نیز محاسبه کنید.

۶۲) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان ترم دوم ۸۳-۱۳۸۲

نقاط غیر تحلیلی تابع $f(z) = \frac{\log(z+4)}{z^2+i}$ را مشخص کنید.

۶۳) دانشگاه تهران / میان ترم دوم ۸۳-۱۳۸۲

اگر $v(x, y) = \sinh x \cdot \sin y$ ، نشان دهید که تابع حقیقی v همساز است. تابع تحلیلی f از متغیر $z = x + iy$ را به قسمی تعیین کنید که $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$ (قسمت موهومی f). مقدار تابع f را بر حسب متغیر Z در هر نقطه به دست آورید.

۶۴) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان ترم اول ۸۳-۱۳۸۲

تحقیق کنید تابع $f(z) = \ln(3 + e^z)$ در چه نقاطی غیر تحلیلی است؟

۶۵) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان ترم اول ۸۳-۱۳۸۲

معادله $\sinh z = i$ را حل کنید.

۶۶) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / شهریور ماه ۱۳۸۲

نقاط تحلیلی $f(z) = |x - 2y| + i|y + 2x|$ را به دست آورید.

۶۷) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان ترم دوم ۸۲-۱۳۸۱

تابع f با ضابطه $f(z) = \sin z$ تعریف شده است.

الف) آیا f تابعی تحلیلی است؟

ب) نشان دهید به ازای هر Z ، $\frac{d}{dz}(\sin Z) = \cos Z$.



۶۸ دانشگاه تهران / میان‌ترم دوم ۸۲-۱۳۸۱

اگر $A(x, y)$ و $B(x, y)$ دارای مشتقات مرتبه دوم پیوسته در یک حوزه D باشند و تعریف کنیم:
 $u(x, y) = A_x + B_y$ و $v(x, y) = -A_y + B_x$ ، آنگاه شرط لازم و کافی برای آنکه
 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ در حوزه D تحلیلی باشد چیست؟

۶۹ دانشگاه تهران / میان‌ترم دوم ۸۲-۱۳۸۱

اگر $\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$ و $\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$ ، آنگاه صفرهای این توابع را تعیین کنید یعنی برای
هر یک، مجموعه نقاطی از صفحه Z را مشخص کنید که در آنها تابع صفر می‌شود. صفرهای توابع $\sin Z$ و
 $\cos Z$ را نیز مشخص نمایید.

۷۰ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم اول ۸۲-۱۳۸۱

تحلیلی بودن تابع
اگر $z \neq 0$ $f(z) = \frac{x^3(1-i) - y^3(1-i)}{x^2 + y^2}$
اگر $z = 0$ $f(z) = 0$
در $z = 0$ را بررسی کنید.

۷۱ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۸۲-۱۳۸۱

در مشتق‌پذیری تابع زیر روی صفحه مختلط بحث کنید و سپس تابع f' را در نقاطی که تابع $f(z)$
مشتق‌پذیر می‌باشد، بیابید.
 $f(z) = \cos x + i(\cos x + \cos y)$

۷۲ دانشگاه صنعتی امیرکبیر / پایان‌ترم دوم ۸۱-۱۳۸۰

الف) a را به گونه‌ای انتخاب کنید که تابع $u(x, y) = ax^2y - y^3 + xy$ همساز شود و سپس v را
چنان بیابید که تابع $f(z) = u + iv$ تحلیلی شود.
ب) مقدار $f'(i^{4901})$ را بیابید.

۷۳ دانشگاه صنعتی امیرکبیر / پایان‌ترم دوم ۸۱-۱۳۸۰

ثابت کنید:
 $\cos^{-1} z = -i \log[z + i(1 - z^2)^{\frac{1}{2}}]$

۷۴ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم دوم ۸۱-۱۳۸۰

تابع $u(x, y) = \operatorname{Re}(e^x)$ را بر حسب y و x بنویسید. چرا این تابع در حوزه‌ای که شامل مبدأ نباشد، همساز است؟

۷۵ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم دوم ۸۱-۱۳۸۰

اگر تابع $f(z) = u + iv$ در ناحیه D تحلیلی باشد، در صورتیکه $w = e^u \cos v$ و $p = e^u \sin v$ ،
نشان دهید تابع $F(z) = w + ip$ نیز در D تحلیلی است.



ریاضی مهندسی

۷۶) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم دوم ۸۱-۱۳۸۰

با فرض $k > 0$ و $u(x, y) = e^{kx} \cdot \cos y$ ،

الف) تابع $v(x, y)$ ، مزدوج همساز $u(x, y)$ را بیابید.

ب) تابع $f(z) = u + iv$ را بر حسب z نوشته و سپس $\oint_{|z|=1} f(z) dz$ را محاسبه کنید.

۷۷) دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم اول ۸۱-۱۳۸۰

نقاط غیر تحلیلی تابع $f(z) = \frac{e^z + i}{ze^z - 2iz}$ را به دست آورید.

۷۸) دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم اول ۸۱-۱۳۸۰

نشان دهید که تابع $f(z) = \begin{cases} \bar{z}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$ در شرایط قضیه کوشی - ریمن صادق است ولی در نقطه $z = 0$ مشتق پذیر نیست.

۷۹) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۸۱-۱۳۸۰

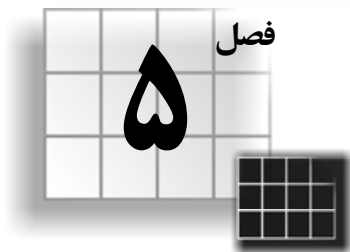
اگر $u(x, y) = e^{\pi x} \cos(\pi y)$ قسمت حقیقی تابع تحلیلی $f(z) = u + iv$ باشد، مطلوبست محاسبه $f'(z)$.

۸۰) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / شهریور ماه ۱۳۸۰

خط شاخه‌ای را برای تابع $\omega = \ln(z)$ تعریف کنید و در تحلیلی بودن و تحلیلی نبودن تابع زیر بحث

کنید و نواحی تحلیلی بودن را مشخص کنید. $f(z) = \ln(z - i) + ze^z + z^3 \sin\left(\frac{1}{z}\right) + \frac{\|z\|^2}{\bar{z}}$

گروه آموزشی



انتگرال‌های مختلط

۱) دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم دوم ۸۸-۱۳۸۷

انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

$$\oint_{|z|=2} \frac{|\bar{z}|^2 z + z^2 + 1}{|z|^2} dz \quad \text{(الف)}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos^2 x}{x^4 + 1} dx \quad \text{(ب)}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos \theta}{3 + \sin \theta} d\theta \quad \text{(ج)}$$

۲) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم دوم ۸۸-۱۳۸۷

انتگرال‌های زیر را حل کنید.

$$\oint_{|z|=1} z^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{z}} dz \quad \text{(الف)}$$

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{1 + \sin^2 \theta} d\theta \quad \text{(ب)}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx \quad \text{(ج)}$$



انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

(الف) $\int_{|z-i|=2} \left(z \cot z + \frac{z-i}{\bar{z}+i} + \frac{1}{\cosh z} \right) dz$

(ب) $\int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{12 \cos \theta - 13} d\theta$

(ج) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x + \cos 2x}{1+x^4} dx$

هریک از انتگرال‌های زیر را حل کنید.

(الف) $\oint_{|z|=2} \frac{e^z - 1 - z}{z^2(1-z)} dz$

(ب) $\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{1 + \sin^2 \theta}$

↪ این قسمت، تکراری با قسمت (ب) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم دوم ۱۳۸۷-۸۸ می‌باشد.

انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

(الف) $\int_C (|z|^2 + z^2) dz$ ، C دایره $|z|=2$ از $(2,0)$ تا $(0,2)$.

(ب) فرض کنید C بیضی $\frac{(x+4)^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ در جهت مثبت مثلثاتی باشد و $f(w) = \int_C \frac{z^2 - z + 1}{z(z-w)} dz$

در این صورت $f'(5)$ را تعیین کنید.

(ج) $\int_{|z|=1} (1 - \cos z) e^{\frac{1}{z}} dz$

(الف) بسط لوران $f(z) = \frac{z}{(z-1)(2-z)}$ را در ناحیه $|z| > 2$ تعیین کنید.

(ب) قطب‌ها و مانده‌های متناظر با قطب در توابع زیر را تعیین کنید.

(۱) $f(z) = \frac{\sin z}{z^2(z^2+4)}$

(۲) $g(z) = (z-3) \sin\left(\frac{1}{z+2}\right)$



۷ دانشگاه صنعتی شریف / شهریور ماه ۱۳۸۷

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

مقدار انتگرال روبرو را با استفاده از مانده‌ها محاسبه کنید.

۸ دانشگاه صنعتی شریف / شهریور ماه ۱۳۸۷

فرض کنید C معرف دایره $|z| = 2$ در جهت مثلثاتی باشد. مقدار انتگرال زیر را با استفاده از مانده‌ها محاسبه کنید.

$$\oint_C \frac{(z^2 + 1)}{z^6 - 6z^4 + 5z^2} dz$$

۹ دانشگاه صنعتی شریف / شهریور ماه ۱۳۸۷

$$f(z) = \frac{1 + 2z^2}{z^3 + z^5}$$

الف) سری لوران تابع روبرو را روی ناحیه $0 < |z| < 1$ بنویسید.

ب) فرض کنید $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ تابعی تحلیلی باشد و به ازای هر $z \in \mathbb{C}$ نامساوی $|f(z)| \leq |z|^n + 1$ برقرار باشد. نشان دهید f یک چند جمله‌ای از درجه حداکثر n است.

۱۰ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / شهریور ماه ۱۳۸۷

انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

$$\oint_{|z|=3} \left(\frac{1}{z-1} \cos\left(\frac{1}{z}\right) + \frac{\bar{z}}{z} \right) dz$$

الف)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 1)^2} dx$$

ب)

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \theta}{5 - 4 \cos \theta} d\theta$$

ج)

۱۱ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / شهریور ماه ۱۳۸۷

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos \omega x}{1 + \omega^2} d\omega = \frac{\pi}{2} e^{-x}$$

اگر $x > 0$ ، ثابت کنید:

۱۲ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / شهریور ماه ۱۳۸۷

هر یک از انتگرال‌های زیر را حل کنید.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos^3 x}{x^2 + 1} dx$$

الف)

$$\oint_{|z|=2} \frac{ze^{\frac{1}{z}}}{(z-1)^2} dz$$

ب)



ریاضی مهندسی

۱۳) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / شهریور ماه ۱۳۸۷

انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

(الف) $\oint_{|z|=1} \left(\frac{\tan z}{z} + \frac{\bar{z}}{|z|} \right) dz$

(ب) $\oint_{|z|=1} \sin^2 \frac{1}{z} dz$

(ج) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{(x^2 + 4)^2} dx$

(د) $\int_0^{2\pi} \frac{1 + \sin \theta}{3 + \cos \theta} d\theta$

۱۴) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / شهریور ماه ۱۳۸۷

بسط لوران تابع $f(z) = \frac{z-5}{z^2+2z-3}$ حول صفر در ناحیه $|z| < 1$ را بیابید.

۱۵) دانشگاه صنعتی شریف / پایان‌ترم دوم ۸۷-۱۳۸۶

تابع $f(z) = \frac{1}{z^2(z-1)}$ با ضابطه $f(z)$ مفروض است.

(الف) سری لوران $f(z)$ را روی $|z| < 1$ بنویسید.

(ب) سری لوران $f(z)$ را روی $|z| > 1$ بنویسید.

(ج) سری لوران $f(z)$ را روی $0 < |z-1| < 1$ بنویسید.

۱۶) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم دوم ۸۷-۱۳۸۶

انتگرال‌های زیر را حل کنید.

(الف) $\oint_{|z-1|=2} \frac{e^z}{(z-1)^{100}} dz$

(ب) $\oint_{|z|=1} \frac{e^{z^2 + \frac{1}{z^2}}}{z^2} dz$

(ج) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^4} dx$

۱۷) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم دوم ۸۷-۱۳۸۶

سری لوران تابع $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ را در نقطه $z_0 = -i$ به دست آورید.



انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

(الف) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^6+1} dx$

(ب) $\oint_C \left(\frac{2z+\pi i}{e^{2z}+1} + \frac{z^2}{\sin z} \right) dz$, $C: |z|=2$

(ج) $\oint_C \sin\left(\frac{z}{z-1}\right) dz$, $C: |z|=\frac{3}{2}$

(د) $\int_0^{\pi} \frac{\cos 2\theta}{\sqrt{2}-\cos \theta} d\theta$

اگر $b > 0$ عددی ثابت باشد نشان دهید که رابطه زیر صحیح است.

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos(2bx) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-b^2}$$

مقدار انتگرال حقیقی روبرو را محاسبه کنید.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2} dx$$

این سؤال، تکراری با قسمت (ب) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / شهریورماه ۱۳۸۷ می باشد.

فرض کنید C دایره $|z|=2$ با جهت مثبت باشد. انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int_C \frac{\cosh(\pi z)}{z(z^2+1)} dz$$

تابع f با ضابطه $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ مفروض است.

(الف) سری تیلور $f(z)$ را روی $|z| < 1$ حول مبدأ بنویسید.

(ب) سری لوران $f(z)$ را روی $1 < |z| < 2$ بنویسید.

(ج) سری لوران $f(z)$ را روی $|z| > 2$ بنویسید.



ریاضی مهندسی

دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم اول ۸۷-۱۳۸۶

انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

$$\int_{|z|=1} \left(\ln z + \frac{1}{z^2} \sin z + z^2 \sin \frac{1}{z} \right) dz \quad (\text{الف})$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b \sin \theta} \quad a > |b| \quad (\text{ب})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \cos 3x}{(x^2 + 1)^2 (x^2 + 4)} dx \quad (\text{ج})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 - 1}{x(x-1)(x^2 + 1)} dx \quad (\text{د})$$

دانشگاه تهران / پایان‌ترم اول ۸۷-۱۳۸۶

اگر $n > 2$ و عدد طبیعی باشد، مقدار انتگرال $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^n)^2}$ را حساب کنید.

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم اول ۸۷-۱۳۸۶

انتگرال‌های زیر را حل کنید.

$$\oint_{|z|=4} \frac{(z+2)dz}{z^4 + 5z^3 + 6z^2} \quad (\text{الف})$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2} - \cos \theta} \quad (\text{ب})$$

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم اول ۸۷-۱۳۸۶

اگر $a > b > 0$ و m عددی ثابت باشد، نشان دهید:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin(mx) dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} = \frac{\pi}{a^2 - b^2} (a^2 e^{-ma} - b^2 e^{-mb})$$

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم اول ۸۷-۱۳۸۶

بسط لوران تابع $f(z) = \frac{2 \cos z + z^2 - 3}{z^5}$ را حول نقطه $z = 0$ را به دست آورید و سپس مقدار

$$\oint_{|z|=1} f(z) dz$$

دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم دوم ۸۶-۱۳۸۵

انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

$$\oint_{|z|=1} \left(\frac{\bar{z}}{z} + z^2 e^{\frac{1}{z}} + \cos z \right) dz \quad (\text{الف})$$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+9)}$$

(ب)

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \theta}{1+\sin \theta} d\theta$$

(ج)

۲۹ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم دوم ۸۶-۱۳۸۵

انتگرال‌های زیر را حل کنید.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2+1)^2} dx$$

(الف)

$$\oint_{|z|=2} \left(\frac{1-z^2}{1-z} \cos z + \frac{1}{z(e^z-1)} \right) dz$$

(ب)

$$\oint_{|z|=3} \frac{1}{1-z} \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz$$

(ج)

۳۰ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم دوم ۸۶-۱۳۸۵

بسط لوران تابع $f(z) = \frac{1}{z^2 - z^3}$ را حول نقطه $z_0 = 1$ بیابید.

۳۱ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم دوم ۸۶-۱۳۸۵

انتگرال‌های زیر را حل کنید.

$$\oint_{|z|=1} \frac{\tanh^2(z + \frac{1}{z}) dz}{e^z \cdot \sin z}$$

(الف)

$$\int_0^{2\pi} \frac{1+\sin \theta}{3+\cos \theta} d\theta$$

(ب)

این قسمت، تکراری با قسمت (د) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / شهریورماه ۱۳۸۷ می باشد.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2x dx}{x^2 + x + 1}$$

(ج)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{(x^2 - 2x + 2)^2}$$

(د)

۳۲ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم دوم ۸۶-۱۳۸۵

سری لوران تابع $f(z) = e^z(z-1)^{-2}$ را حول $z = i$ به دست آورید.



ریاضی مهندسی

۳۳) دانشگاه صنعتی امیرکبیر / پایان‌ترم اول ۸۶-۱۳۸۵

هریک از انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\oint_{|z|=5} \frac{e^z}{\cosh z} dz$

ب) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + x + 1} dx$

۳۴) دانشگاه صنعتی امیرکبیر / پایان‌ترم اول ۸۶-۱۳۸۵

الف) بسط‌های مکلورن e^z و $\log(1+z)$ را بنویسید.

ب) با استفاده از قسمت الف)، بسط مکلورن $f(z) = e^z \log(1+z)$ را بنویسید. (تا چهار جمله)

ج) در چه محدوده‌ای $f(z)$ تحلیلی نمی‌باشد؟

۳۵) دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم اول ۸۶-۱۳۸۵

دانشگاه علم و صنعت ایران / شهریور ماه ۱۳۸۲

نشان دهید: $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b \sin \theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}$, $a > |b|$

↪ این سؤال، تکراری با قسمت ب) دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم اول ۸۷-۱۳۸۶ می‌باشد.

۳۶) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم اول ۸۶-۱۳۸۵

سری لوران $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)}$ را در بازه $2 < |z| < 3$ به دست آورید.

۳۷) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم اول ۸۶-۱۳۸۵

سری لوران تابع $f(z) = \frac{-2z + 3}{z^2 - 3z + 2}$ حول صفر همگرا در $1 < |z| < 1$ را بیابید.

۳۸) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم اول ۸۶-۱۳۸۵

انتگرال‌های زیر را به دست آورید.

الف) $\int_{|z|=1} e^{\frac{1}{z}} \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz$

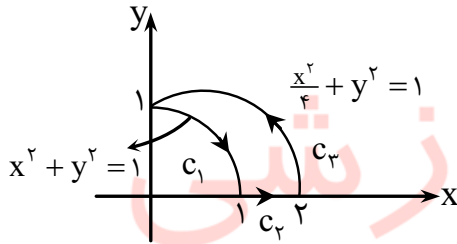
ب) $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\cos \theta + \sin \theta + 4}$

ج) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 \cos 2x}{(x^2 + 4)^2} dx$

د) $\int_c ((\bar{z})^2 + |z|) dz$, $c: x^2 + y^2 = 1, y \geq 0$



۳۹ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / شهریور ماه ۱۳۸۵



مطلوبست محاسبه $\oint_C \bar{z} dz$ که C منحنی ساده و بسته در شکل روبرو است.

۴۰ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / شهریور ماه ۱۳۸۵

مقدار انتگرال $\oint_{|z|=1} \frac{e^{az}}{z} dz$ (a عدد حقیقی ثابت) را بیابید. سپس به کمک آن مقدار انتگرال زیر را بیابید.

$$\int_0^{2\pi} e^{a \cos \theta} \cos(a \sin \theta) d\theta$$

۴۱ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / شهریور ماه ۱۳۸۵

انتگرال های زیر را بیابید.

(الف) $\int_0^\pi \frac{d\theta}{(\delta + \epsilon \cos \theta)^2}$

(ب) $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(x^2 - 2x + \delta)^2}$

۴۲ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / شهریور ماه ۱۳۸۵

سری لوران تابع زیر را حول $z = 0$ بیابید و سپس $\text{Res} f(z)$ (مانند حول -2) را بیابید.

$$f(z) = \frac{1 - e^{-\frac{1}{z}}}{z + 2}$$

۴۳ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان ترم دوم ۸۵-۱۳۸۴

بسط لوران تابع $\frac{1}{z-a}$ را در ناحیه $|z| > a$ بنویسید که در آن $|a| < 1$. سپس با قرار دادن $z = e^{i\theta}$

مجموع های روبرو را بیابید. $\sum_{n=1}^\infty a^{n-1} \cos n\theta$, $\sum_{n=1}^\infty a^{n-1} \sin n\theta$

۴۴ دانشگاه تهران / پایان ترم دوم ۸۵-۱۳۸۴

فرض می کنیم C مرز دایره $|z|=1$ پیموده شده در جهت مثلثاتی باشد. مقدار انتگرال مختلط زیر را

حساب کنید. $I = \oint_C \frac{\tanh(\pi z)}{4z^2 + 1} dz$



ریاضی مهندسی

۴۵) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم دوم ۸۵-۱۳۸۴

انتگرال‌های زیر را بیابید.

(الف)
$$\oint_{|z|=\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\sin\left(\frac{z+1}{z}\right)}{z^{\sqrt{2}}+z} dz$$

(ب)
$$\oint_{|z-n|=\frac{1}{n}} \frac{dz}{z(z-1)(z-4)\dots(z-n)}$$

 $(n \geq z)(n \in \mathbb{N})$

(ج)
$$\int_0^{\pi} \frac{\cos \theta}{5 + 4 \cos \theta} d\theta$$

۴۶) دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم اول ۸۵-۱۳۸۴

انتگرال‌های حقیقی زیر را بیابید.

(الف)
$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{p + q \cos x} \quad p > q > 0$$

(ب)
$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^4 + 1} dx$$

۴۷) دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم اول ۸۵-۱۳۸۴

بسط لوران تابع $f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)(z + 2)}$ را در ناحیه $|z| > 2$ بیابید.

۴۸) دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم اول ۸۵-۱۳۸۴

فرض کنید $f(z)$ روی ناحیه $D = \{z : |z| < 2\}$ تحلیلی باشد. نشان دهید:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \cos^2 \frac{\theta}{2} d\theta = 2f(0) + f'(0)$$

۴۹) دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم اول ۸۵-۱۳۸۴

مطلوبست محاسبه انتگرال زیر.

$$\int_{|z|=2} e^{e^z} dz$$

۵۰) دانشگاه صنعتی شریف / میان‌ترم اول ۸۵-۱۳۸۴

کلیه قطب‌های تابع $f(z) = \frac{\tan(\sin z)}{z^3}$ را به‌دست آورده، مرتبه و مانده هر یک را مشخص کنید.



۵۱ دانشگاه صنعتی شریف / میان‌ترم اول ۸۵-۱۳۸۴

مقدار انتگرال‌های زیر را به‌دست آورید.

$$\int_{|z|=2} \frac{|z| e^{\bar{z}}}{z^2} dz \quad \text{(الف)}$$

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin \theta \cos \theta}{1 + \cos \theta} \right)^2 d\theta \quad \text{(ب)}$$

۵۲ دانشگاه صنعتی شریف / پایان‌ترم دوم ۸۴-۱۳۸۳

انتگرال‌های نیمه‌متناهی زیر را محاسبه کنید.

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 - 1} dx \quad \text{(الف)}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^2 + 1} dx \quad \text{(ب)}$$

۵۳ دانشگاه صنعتی شریف / پایان‌ترم دوم ۸۴-۱۳۸۳

انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

$$\int_{|z|=1} |z-1| |dz| \quad \text{(الف)}$$

$$\int_{|z|=1} \frac{z - \sinh z}{z^6} dz \quad \text{(ب)}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos^3 x}{(x-1)^2 + 1} dx \quad \text{(ج)}$$

۵۴ دانشگاه صنعتی شریف / پایان‌ترم دوم ۸۴-۱۳۸۳

(الف) تابع $\log z$ را به صورتی تعریف کنید که بتوان آن را به شکل یک رشته تیلور در $Z_0 = 1$ نوشت.

(ب) قطب‌های تابع $f(z) = \frac{z^{\frac{1}{2}}}{z(z-2)^2}$ و مرتبه آن‌ها را تعیین کنید و مانده تابع را در آن نقاط به‌دست آورید.

(ج) کلیه مقادیر z که برای آن $e^{z^2} = 1$ است را به‌دست آورید.

(د) یک رشته لوران در همسایگی $Z=3$ و یک رشته تیلور در همسایگی $Z=0$ برای تابع $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)^2}$ بنویسید.

۵۵ دانشگاه صنعتی امیرکبیر / پایان‌ترم دوم ۸۴-۱۳۸۳

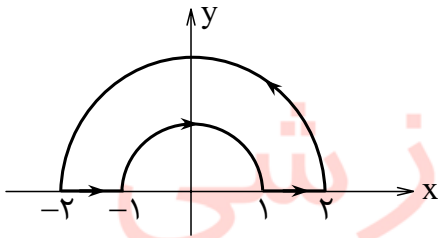
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^4} dx \quad \text{انتگرال مقابل را محاسبه کنید.}$$

این سؤال، تکراری با قسمت (ج) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم دوم ۸۷-۱۳۸۶ می‌باشد.



ریاضی مهندسی

دانشگاه صنعتی امیرکبیر / پایان‌ترم دوم ۸۴-۱۳۸۳ (۵۶)



مطلوبست مقدار انتگرال زیر روی کانتور C که مرز بسته ناحیه قطبی $1 < r < 2$ و $0 \leq \theta \leq \pi$ می‌باشد.

$$g = \oint_C \frac{z}{z} dz$$

دانشگاه صنعتی امیرکبیر / پایان‌ترم دوم ۸۴-۱۳۸۳ (۵۷)

$$\oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z} dz = 2\pi i f(0)$$

الف) طبق فرمول انتگرال کشی نتیجه بگیرید که

$$\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) d\theta = 2\pi f(0)$$

ب) به کمک الف) نتیجه بگیرید که

$$\int_0^{2\pi} \cos(\cos \theta + i \sin \theta) d\theta = 2\pi$$

ج) نشان دهید که

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم دوم ۸۴-۱۳۸۳ (۵۸)

انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \sin \theta}$$

الف)

$$\int_{|z|=2} \left(z^2 e^{\frac{1}{z}} + \frac{1}{z^2 \sin z} + \bar{z} \right) dz$$

ب)

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{(x^2 + b^2)^2} dx, \quad a, b > 0$$

ج)

دانشگاه صنعتی شریف / پایان‌ترم اول ۸۴-۱۳۸۳ (۵۹)

انتگرال‌های زیر را محاسبه نمایید.

$$\int_{|z|=2} \frac{z^2 + e^{\bar{z}}}{z^2(z-1)} dz$$

الف)

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{(x^2 + 1)^2} dx$$

ب)

دانشگاه صنعتی امیرکبیر / پایان‌ترم اول ۸۴-۱۳۸۳ (۶۰)

الف) نقاط تکین تنهای $f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{z^2(z^2+1)}$ و نوع این نقاط را مشخص کنید.

ب) مانده تابع $f(z)$ را در قطب‌هایش بیابید.



دانشگاه صنعتی امیرکبیر / پایان ترم اول ۸۴-۱۳۸۳

مقدار انتگرال $\int_0^{\infty} \frac{\cos mx}{x^2+1} dx$ را بیابید (m عددی صحیح و مثبت است).

دانشگاه صنعتی امیرکبیر / پایان ترم اول ۸۴-۱۳۸۳

بسط لوران تابع $f(z) = \frac{1}{1-z^2}$ را در فاصله $0 < |z-1| < 2$ بیابید.

دانشگاه صنعتی امیرکبیر / پایان ترم اول ۸۴-۱۳۸۳

الف) فرض کنیم $C_1: \begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = b \sin \theta \end{cases}$ و $C_2: \begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$ برای $0 \leq \theta \leq 2\pi$ دو خم بسته باشند به

طوری که $\rho < a$ و $\rho < b$. آیا مقدار انتگرال های $\oint_{C_1} \frac{1}{z} dz$ و $\oint_{C_2} \frac{1}{z} dz$ برابرند؟ نام قضیه یا قضایای

استنادی را ذکر کنید.

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta} = \frac{2\pi}{ab}$$

ب) با توجه به قسمت قبل نشان دهید:

دانشگاه صنعتی شریف / میان ترم اول ۸۴-۱۳۸۳

انتگرال های حقیقی زیر را محاسبه نمایید.

الف) $\int_0^{2\pi} e^{\cos \theta} \cos(\sin \theta) d\theta$

ب) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos(nx)}{(x+a)^2 + b^2} dx$

دانشگاه صنعتی شریف / میان ترم اول ۸۴-۱۳۸۳

الف) کلیه قطب های تابع $f(z) = \frac{\cot z \coth z}{z^3}$ را به دست آورید و مرتبه آنها را مشخص نمایید.

ب) مانده تابع f را در هر قطب آن محاسبه نمایید.

ج) حاصل انتگرال $\oint_{|z|=4} f(z) dz$ را به دست آورید.

دانشگاه صنعتی شریف / میان ترم اول ۸۴-۱۳۸۳

سری لوران تابع $f(z) = \frac{z+1}{z^2+1}$ را حول نقطه $z=i$ نوشته و نواحی همگرایی را مشخص نمایید.



ریاضی مهندسی

۶۷ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / شهریور ماه ۱۳۸۳

انتگرال‌های زیر را حل کنید.

(الف)
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x^2 - 2x + 2}$$

(ب) منحنی C به معادله $|2z - i| = 3$ می‌باشد.

$$\int_C \frac{(z^2 - 2z) dz}{(z+1)^2 (z^2 + 4)}$$

۶۸ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / شهریور ماه ۱۳۸۳

سری لورنت تابع $f(z) = \frac{z \cos \frac{1}{z}}{z+1}$ را حول $z = 0$ بنویسید و سپس مقدار انتگرال $\oint_{|z|=\frac{1}{4}} f(z) dz$ را تعیین کنید.

۶۹ دانشگاه صنعتی شریف / پایان‌ترم دوم ۸۳-۱۳۸۲

مطلوبست محاسبه

(الف)
$$\oint_{|z|=2} (1+z)^{\circ} dz$$

(ب)
$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin 2x}{(x^2 + 1)^2} dx$$

۷۰ دانشگاه صنعتی شریف / پایان‌ترم دوم ۸۳-۱۳۸۲

بسط لوران تابع $f(z) = \frac{2z+1}{z^4 - 8z}$ را حول مبدأ، یکبار روی $0 < |z| < 2$ و دیگر بار روی $|z| > 2$ بیابید.

۷۱ دانشگاه صنعتی امیرکبیر / پایان‌ترم اول ۸۳-۱۳۸۲

انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

(الف)
$$\oint_{C: |z|=2} \tan z dz$$

(ب)
$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2 + 1)^2} dx$$

۷۲ دانشگاه صنعتی امیرکبیر / پایان‌ترم اول ۸۳-۱۳۸۲

با استفاده از قضیه کوشی برای تابع $f(z) = e^{-z^2}$ نشان دهید:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2bx dx = \sqrt{\pi} e^{-b^2}, \quad 0 < b$$

(راهنمایی: کانتور C را مرز مستطیل $|x| \leq a$ و $0 \leq y \leq b$ در نظر بگیرید).

۷۳ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم اول ۸۳-۱۳۸۲

مطلوبست محاسبه
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 ax}{x(x^2 + b^2)} dx \quad a > 0, \quad b > 0$$



۷۴ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم اول ۸۳-۱۳۸۲

الف) ثابت کنید: $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b \sin \theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}$, $a > |b|$

↪ این قسمت، تکراری با قسمت (ب) دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم اول ۸۷-۱۳۸۶ می‌باشد.

ب) با کمک (الف) نتیجه بگیرید: $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(\Delta - 3 \sin \theta)^2} = \frac{5\pi}{32}$

۷۵ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم اول ۸۳-۱۳۸۲

مطلوبست محاسبه $\oint_{|z|=1} (e^{-\frac{1}{z}} \sin \frac{1}{z} + \frac{\cot z}{z}) dz$

۷۶ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم اول ۸۳-۱۳۸۲

مطلوبست تعیین بسط لوران $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)}$ در ناحیه $1 < |z| < 3$.

۷۷ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۸۳-۱۳۸۲

سری لوران تابع $f(z) = \frac{z^2 + 1}{(z+1)(z+2)(z-3)}$ را در ناحیه $\frac{1}{2} < |z+2| < 1$ به دست آورید.

۷۸ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم اول ۸۳-۱۳۸۲

انتگرال‌های زیر را حل کنید.

الف) $\int_{|z|=2} \frac{\cos \frac{1}{z}}{z-1} dz$

ب) $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos \theta + \sin \theta}$

ج) $\int_{|z|=1} (\bar{z} + e^{z^2}) dz$

د) $\int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^4} dz$

۷۹ دانشگاه علم و صنعت ایران / شهریور ماه ۱۳۸۲

ثابت کنید تحت شرایط مناسب روی تابع f ، رابطه روبرو برقرار است. $\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \cos \theta d\theta = \pi f'(0)$

۸۰ دانشگاه علم و صنعت ایران / شهریور ماه ۱۳۸۲

مطلوبست محاسبه $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin \pi x}{x^4 - 1} dx$



ریاضی مهندسی

۸۱) دانشگاه علم و صنعت ایران / شهریور ماه ۱۳۸۲

بسط لوران تابع $f(z) = e^{\frac{z}{z-2}}$ را در حوالی ۲ بنویسید. ناحیه همگرایی سری را مشخص کنید. ماهیت نقاط تکین تابع را مشخص کنید.

۸۲) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / شهریور ماه ۱۳۸۲

نقاط تکین و نوع آن را برای تابع $f(z) = \frac{e^{-z}}{(z-1)^3} + \frac{\sin hz}{z^4}$ یافته و سپس $\int_{|z|=2} f(z) dz$ را محاسبه کنید.

۸۳) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / شهریور ماه ۱۳۸۲

مقدار انتگرال‌های زیر را بیابید.

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos mx}{x^2+1} dx \quad (m > 0) \quad \text{(الف)}$$

↪ این قسمت، تکراری با سؤال (۶۱) همین فصل می باشد.

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{1-2a \cos \theta + a^2} d\theta \quad (0 < a < 1) \quad \text{(ب)}$$

۸۴) دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم دوم ۸۲-۱۳۸۱

مطلوبست محاسبه انتگرال‌های زیر.

$$\int_0^{2\pi} \frac{f(e^{i\theta})}{\sqrt{2} - \cos \theta} d\theta \quad \text{(الف) } f \text{ تابعی پیوسته است.}$$

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin^2 \theta}{2 + \cos \theta} d\theta \quad \text{(ب)}$$

۸۵) دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم دوم ۸۲-۱۳۸۱

نشان دهید مقدار انتگرال $\oint_C \frac{z}{z^3+1} dz$ که C شامل کلیه قطب‌های تابع تحت انتگرال است، برابر صفر است.

۸۶) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم دوم ۸۲-۱۳۸۱

انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2} dx \quad \text{(الف)}$$

↪ این قسمت، تکراری با قسمت (ب) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / شهریورماه ۱۳۸۷ می باشد.

$$\int_{|z|=1} \left(\bar{z} + \frac{1}{z} + e^z \right) dz \quad \text{(ب)}$$

$$\int_{|z|=3} (z-1)^3 \cdot \cos\left(\frac{z}{z-1}\right) dz \quad \text{(ج)}$$



۸۷) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم دوم ۸۲-۱۳۸۱

اگر f تابعی پیوسته باشد، آنگاه مقدار انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int_0^{2\pi} \frac{f(e^{i\theta})}{\sqrt{2} - \cos \theta} d\theta$$

↪ این سؤال، تکراری با قسمت (الف) دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم دوم ۸۲-۱۳۸۱ می‌باشد.

۸۸) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم دوم ۸۲-۱۳۸۱

سری لوران تابع $f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$ را روی $D: \left\{ z: |z-2| < \frac{1}{2} \right\}$ به دست آورید.

۸۹) دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم اول ۸۲-۱۳۸۱

در صورتی که $0 < a < 1$ ، انتگرال‌های زیر را حساب کنید.

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{1 - 2a \cos \theta + a^2} d\theta \quad (\text{الف})$$

↪ این قسمت، تکراری با قسمت (ب) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / شهریورماه ۱۳۸۲ می‌باشد.

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x(1+x^2)^2} dx \quad (\text{ب})$$

۹۰) دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم اول ۸۲-۱۳۸۱

$$\oint_{|z|=1} (z|z| + \sin z + \frac{\cot z}{e^z - 1}) dz$$

$|z|=1$

۹۱) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۸۲-۱۳۸۱

انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

$$\int_{|z|=1} z^f \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz \quad (\text{الف})$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{(x^2 + b^2)^2} dx, \quad a, b > 0 \quad (\text{ب})$$

↪ این قسمت، تکراری با قسمت (ج) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم دوم ۸۴-۱۳۸۳ می‌باشد.

۹۲) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۸۲-۱۳۸۱

حاصل انتگرال $\int_C (e^z + \operatorname{Im} z) dz$ را بیابید که در آن C دارای معادله پارامتری زیر است.

$$C: z(t) = t^2 + 3(t+1)i, \quad 0 \leq t \leq 1$$

۹۳) دانشگاه صنعتی امیرکبیر / پایان‌ترم دوم ۸۱-۱۳۸۰

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx \quad (\text{الف})$$



ریاضی مهندسی

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

(ب) نشان دهید:

$$f(z) = \frac{1 - e^{2iz}}{z^2}$$

(راهنمایی: از تابع کمک بگیرید.)

۹۴) دانشگاه صنعتی امیرکبیر / پایان‌ترم دوم ۸۱-۱۳۸۰

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 5z}$$

بسط لوران تابع روبرو را در ناحیه $1 < |z-1| < 4$ بیابید.

۹۵) دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم اول ۸۱-۱۳۸۰

هر یک از انتگرال‌های زیر را حل کنید.

$$\oint_{|z|=1} \frac{e^z - 1}{z} dz$$

(الف)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{(x^2 + 4)(x-1)} dx$$

(ب)

۹۶) دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم اول ۸۱-۱۳۸۰

مطلوبست محاسبه انتگرال $\int_0^{\pi} \frac{1}{\alpha + \beta \cos \theta} d\theta$ که در آن $0 < \beta < \alpha$.

گروه آموزشی



نگاشت

۱) دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم دوم ۸۸-۱۳۸۷

تبدیل موبیوسی بیابید که سه نقطه 0 ، ∞ و -1 را به ترتیب به سه نقطه -1 ، 1 و 0 بنگارد. سپس مبدل ناحیه $Re z \geq 0$ و $Im z \geq 0$ را تحت این نگاشت بیابید.

۲) دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم دوم ۸۸-۱۳۸۷

دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم اول ۸۸-۱۳۸۷

تصویر ناحیه $|x| \leq \frac{\pi}{4}$ و $1 \leq y \leq 2$ را تحت نگاشت $w = \sinh z$ بیابید.

۳) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم دوم ۸۸-۱۳۸۷

تصویر ناحیه $D = \{z \mid 0 < Re z \leq 1\}$ را به کمک نگاشت $w = \frac{iz}{z-1}$ تعیین کنید.

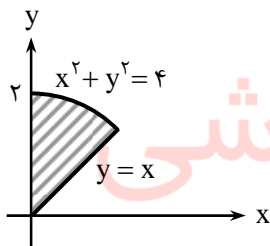
دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم اول ۸۸-۱۳۸۷

تبدیل موبیوسی بیابید که سه نقطه 0 ، 1 و i را به ترتیب به سه نقطه -1 ، ∞ و $-i$ تبدیل سازد. سپس مبدل محورهای X و Y را تحت این نگاشت دقیقاً به دست آورید.

$$(0, 1, i) \rightarrow (-1, \infty, -i)$$



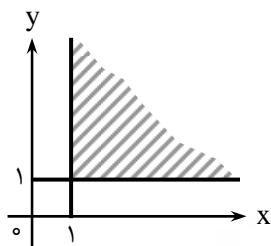
۵) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۸۸-۱۳۸۷



تصویر ناحیه مقابل را تحت نگاشت $W = \frac{1}{z^2}$ بیابید.

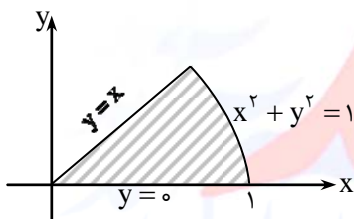
۶) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / شهریور ماه ۱۳۸۷

دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم اول ۸۱-۱۳۸۰



نقش ناحیه مقابل را تحت نگاشت $W = i \frac{z-1}{z+1}$ به دست آورید.

۷) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / شهریور ماه ۱۳۸۷



تصویر ناحیه مقابل را تحت نگاشت $W = \frac{z^{\wedge} - i}{z^{\wedge} + i}$ بیابید.

۸) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / شهریور ماه ۱۳۸۷

نشان دهید که با تبدیل $W = \frac{z-2}{z}$ قرص $|z-1| < 1$ به روی نیم‌صفحه $X < 0$ نگاشته می‌شود.

۹) دانشگاه صنعتی شریف / پایان‌ترم دوم ۸۷-۱۳۸۶

تصویر نوار بسته نیمه نامتناهی $\{0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, y \geq 0\}$ را تحت نگاشت $\sin z$ پیدا کنید. سپس به کمک

آن تبدیلی معرفی کنید که نوار باز $\{0 < x < \frac{\pi}{4}, y > 0\}$ را به طور همدیس، یک به یک و پوشا به داخل

دایره واحد بفرستد.



۱۰) دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم دوم ۸۷-۱۳۸۶

مبدل ناحیه $|z| \leq 1$ ، $0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4}$ را تحت نگاشت $w = iz^2$ مشخص کنید.

۱۱) دانشگاه تهران / پایان‌ترم دوم ۸۷-۱۳۸۶

با قرار دادن $z = re^{i\theta}$ تصویر ناحیه $|z| \geq 1$ تحت تبدیل $w = z + \frac{1}{z}$ را در صفحه مختلط w مشخص نمایید (از طریق تعیین نمودن تصویر دایره‌های $r = a$ و $a \geq 1$). تصویر بخش‌هایی از محور x و محور y واقع در ناحیه $|z| \geq 1$ را تحت تبدیل فوق ذکر کنید. همین مسئله را در مورد تصویر ناحیه $|z| \leq 1$ تحت تبدیل مذکور حل کنید.

۱۲) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم دوم ۸۷-۱۳۸۶

تبدیل دو خطی (موبیوس) بیابید که نقاط $z_1 = -i$ و $z_2 = 0$ و $z_3 = i$ را به ترتیب بر نقاط $w_1 = -1$ و $w_2 = i$ و $w_3 = 1$ بنگارد. تصویر نقاط خارج دایره $|z-1|=1$ را توسط تبدیل فوق به دست آورید.

۱۳) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم دوم ۸۷-۱۳۸۶

تصویر ناحیه $R = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid 0 < \text{Im} z < \pi\}$ را تحت نگاشت $\omega = f(z) = \frac{e^z - i}{e^z + i}$ بیابید.

۱۴) دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم اول ۸۷-۱۳۸۶

تبدیل موبیوسی بنویسید که $(\infty, 1, 2) \rightarrow (i, \infty, 0)$ و سپس با تبدیل $w = \frac{z-2i}{z-i}$ مبدل منحنی‌های مقابل را بیابید. $\arg z = \frac{\pi}{4}$ ، $|z|=1$ ، $|z|=2$

۱۵) دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم اول ۸۷-۱۳۸۶

الف) نشان دهید که نگاشت $w = \sin z$ در $z = \frac{\pi}{2}$ تحلیلی است ولی در آنجا همدیس نیست.
ب) تصویر دایره $\Gamma = C$ را توسط نگاشت‌های $w = z \pm \frac{1}{z}$ به دست آورید. اگر $C=1$ ، تصویر چیست؟

۱۶) دانشگاه تهران / پایان‌ترم اول ۸۷-۱۳۸۶

تبدیل خطی کسری بیابید که سه نقطه $z_1 = 1$ و $z_2 = i$ و $z_3 = -1$ را به ترتیب به سه نقطه $w_1 = -1$ و $w_2 = i$ و $w_3 = 1$ بنگارد. این تبدیل دایره $|z|=1$ در جهت مثلثاتی را به کدام منحنی و در چه جهتی می‌نگارد؟ (با ذکر دلیل)

۱۷) دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم دوم ۸۶-۱۳۸۵

الف) اگر $-\pi < \theta \leq \pi$ و $z = re^{i\theta}$ ، آنگاه نقاط شاخه‌ای و خطوط شاخه‌ای تابع $f(z) = \ln(z-1-i)$ را مشخص کنید.
ب) تبدیل موبیوسی بنویسید که $(-1, 1, 0) \rightarrow (0, \infty, 1)$. سپس نقش ناحیه $|z| \leq 1$ ، $\text{Im} z \geq 0$ را تحت این نگاشت بیابید و آن را رسم کنید.



دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم دوم ۸۶-۱۳۸۵ (۱۸)

الف) نشان دهید که تابع $\omega = \sin z$ در $x = -\frac{\pi}{2}$ هم‌مدیس نیست. نقش خط $y = 0$ را تحت این نگاشت مشخص کرده و آن را رسم کنید.

ب) نقش ناحیه محصور بین خطوط $y = \pm x$ و $y = -2$ را تحت نگاشت $\omega = \frac{1}{z}$ مشخص کرده و رسم کنید.

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم دوم ۸۶-۱۳۸۵ (۱۹)

تصویر ناحیه محصور بین دو خط $x = 0$ و $x = 1$ را تحت نگاشت $w = \frac{i}{z+1}$ یافته و آن را رسم کنید.

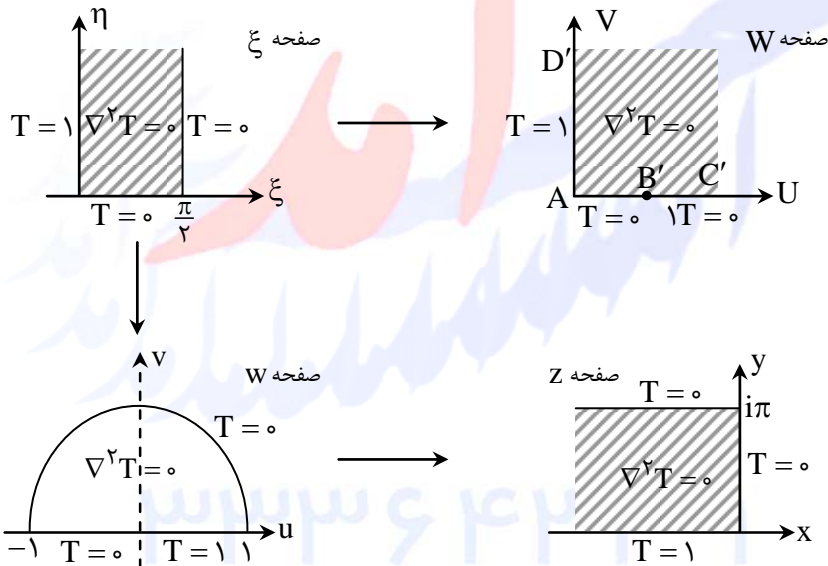
دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم دوم ۸۶-۱۳۸۵ (۲۰)

تصویر منحنی $y = x^2$ را تحت نگاشت $w = z^2$ بیابید.

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم دوم ۸۶-۱۳۸۵ (۲۱)

تصویر ناحیه $R = \{z = x + iy ; -1 < x < 2, 0 \leq y \leq 1\}$ را تحت نگاشت $w = z^2$ تعیین کنید.

دانشگاه تهران / پایان‌ترم اول ۸۶-۱۳۸۵ (۲۲)



الف) سه تبدیل بالا را که با علامت پیکان مشخص شده‌اند تعیین کنید. این نگاشت‌ها باید درون ناحیه را به درون ناحیه و کرانه‌ها را به کرانه‌ها ببرند.

ب) مسئله مقدار مرزی در ربع صفحه w را حل کرده و به وسیله نگاشت‌ها جواب مسئله مقدار مرزی متناظر را در صفحه w به‌دست آورید.



۲۳) دانشگاه صنعتی امیرکبیر / پایان‌ترم اول ۸۶-۱۳۸۵

تصویر ناحیه $|z| < 1$ را تحت تابع $w = (z+1)^2$ بیابید. شکل ناحیه تصویر را رسم کنید.

۲۴) دانشگاه صنعتی امیرکبیر / پایان‌ترم اول ۸۶-۱۳۸۵

به کمک نسبت برخوردی و انتخاب سه نقطه دلخواه مناسب، تبدیل موبیوسی را بیابید که دایره $|z|=1$ در صفحه z ها را به محور افقی $v=0$ در صفحه w ها بنگارد.

۲۵) دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم اول ۸۶-۱۳۸۵

الف) تبدیل موبیوسی بنویسید که $(0, i, \infty) \rightarrow (1, \infty, -1)$ را بنگارد.

ب) تصویر ناحیه $D = \{x + iy \mid x \geq 1, y \geq 1\}$ را توسط $\omega = i \frac{z-1}{z+1}$ بیابید.

→ این قسمت، تکراری با سوال (۶) همین فصل می باشد.

۲۶) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۸۶-۱۳۸۵

تصویر ناحیه $|z-1| < 1$ را توسط نگاشت $w = \frac{z+1}{z+i}$ به دست آورید.

۲۷) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم اول ۸۶-۱۳۸۵

تصویر ناحیه $R = \{x + iy \mid x^2 + (y-1)^2 \leq 1\}$ را تحت نگاشت $f(z) = \ln(z-i) + 1$ بیابید.

۲۸) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / شهریور ماه ۱۳۸۵

نگاشتی بیابید که نقاط $z_1 = 0$ و $z_2 = 1$ و $z_3 = +\infty$ را به ترتیب روی نقاط $w_1 = 0$ و $w_2 = +\infty$ و $w_3 = 1$ تصویر کند. تصویر ناحیه $D = \{(x, y) \mid x > 0, y > 0\}$ را تحت نگاشت فوق بیابید.

۲۹) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / شهریور ماه ۱۳۸۵

تصویر ناحیه روبرو را تحت نگاشت $f(z) = (1-i)e^{-z}$ بیابید. $R = \{(x, y) \mid x \leq 0, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{4}\}$

۳۰) دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم دوم ۸۵-۱۳۸۴

نگاشتی بیابید که نوار نیمه‌متناهی $D = \left\{z : 0 \leq x, |y| \leq \frac{1}{4}\right\}$ را درون دایره واحد بنگارد.

۳۱) دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم دوم ۸۵-۱۳۸۴

نگاشت موبیوسی بیابید که سه نقطه $(1, i, 0)$ را بر روی سه نقطه $(0, \infty, -i)$ بنگارد. سپس مبدل ناحیه

$0 \leq \text{Arg } z \leq \frac{\pi}{4}$ را تحت نگاشت $\omega = \frac{z-1}{z-i}$ دقیقاً مشخص کنید.

۳۲) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم دوم ۸۵-۱۳۸۴

تصویر ناحیه $|z-2i| \leq 4$ را تحت نگاشت $w = \frac{1}{z}$ بیابید.



ریاضی مهندسی

۳۳) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان ترم دوم ۸۵-۱۳۸۴

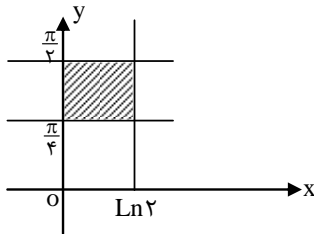
تصویر ناحیه $D = \{x + iy \mid 1 \leq x \leq 1 + \frac{\pi}{4}, 1 \leq y \leq 2\}$ تحت نگاشت $f(z) = i \sin(z-1-i)$ چیست؟

۳۴) دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان ترم اول ۸۵-۱۳۸۴

الف) تبدیل موبیوس بنویسید که $(i, \infty, 0) \rightarrow (0, 1, 1)$.

ب) مبدل ناحیه $0 \leq \text{Im } z$ و $|z| \leq 1$ را تحت نگاشت $w = i \frac{1-z}{1+z}$ بیابید.

۳۵) دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان ترم اول ۸۵-۱۳۸۴

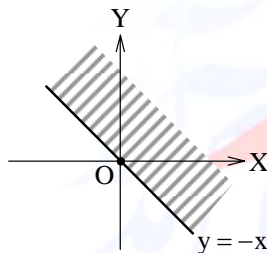


تصویر ناحیه مقابل را تحت نگاشت $w = \frac{e^z}{e^z + 1}$ بیابید.

۳۶) دانشگاه صنعتی امیرکبیر / پایان ترم دوم ۸۴-۱۳۸۳

نگاشتی را بیابید که ناحیه $|z-1| \leq 1$ را به نیم صفحه $u \leq 0$ بنگارد.

۳۷) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان ترم دوم ۸۴-۱۳۸۳

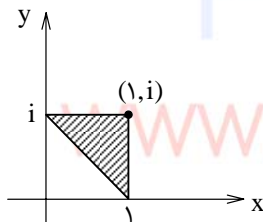


نقش نیم صفحه مقابل را تحت نگاشت $w = f(z) = \frac{z-1-i}{z+1+i}$ به دست آورید.

۳۸) دانشگاه صنعتی شریف / پایان ترم اول ۸۴-۱۳۸۳

نگاشت موبیوس را مثال بنویسید که ناحیه $D = \{(x, y) \mid x \geq y\}$ را به داخل دایره $|z-i|=1$ ببرد.

۳۹) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان ترم اول ۸۴-۱۳۸۳



الف) نگاشت $w = z^2$ ناحیه محدود به مثلث مقابل را به چه ناحیه‌ای می‌نگارد؟

ب) نقش ناحیه $D = \{x + iy \mid x \geq 1, y \geq 1\}$ توسط نگاشت

$$w = i \frac{z-1}{z+1}$$

چيست؟

→ این قسمت، تکراری با سؤال (۶) همین فصل می باشد.



۴۰ دانشگاه صنعتی شریف / میان‌ترم اول ۸۴-۱۳۸۳

نگاشتی را پیدا کنید که ناحیه $\{z \mid \operatorname{Im} z < 1, \operatorname{Re} z > 2\}$ را به داخل دایره واحد بنگارد.

۴۱ دانشگاه علم و صنعت ایران / میان‌ترم اول ۸۴-۱۳۸۳

تبدیل موبیوس $(i, \infty, 0) \rightarrow (\infty, 1, 2)$ را تعیین کنید و سپس با تبدیل $\omega = \frac{z - 2i}{z - i}$ مبدل ناحیه D را بیابید.

$$D = \{z \mid |z| \leq 1, \operatorname{Re} z \geq 0\}$$

۴۲ دانشگاه علم و صنعت ایران / میان‌ترم اول ۸۴-۱۳۸۳

نقش ناحیه $\begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ y \leq 0 \end{cases}$ را تحت نگاشت $\omega = \sin^2 z$ بیابید.

۴۳ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / شهریور ماه ۱۳۸۳

تصویر مستطیل $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 4\}$ را تحت نگاشت $w = z^2$ تعیین کنید.

۴۴ دانشگاه صنعتی شریف / پایان‌ترم دوم ۸۳-۱۳۸۲

میدان $1 < y < x$ را به صورت یک به یک، پوشا و کانفرمال بر دیسک واحد بنگارید.

۴۵ دانشگاه تهران / پایان‌ترم دوم ۸۳-۱۳۸۲

تصویر خطوط $x=1$ و $y=1$ و $x+y=1$ توسط نگاشت (تبدیل) $w = z^2$ را در صفحه مختلط $w = u + iv$ (u و v حقیقی) مشخص نمایید. ناحیه کراندار محصورشده توسط این سه خط در صفحه xy به کدام ناحیه در صفحه uv برده (تصویر) می‌شود؟

۴۶ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم دوم ۸۳-۱۳۸۲

نقش ناحیه $D = \{z : |z-1| \leq 1\}$ را تحت نگاشت $w = \frac{z+1}{z}$ بیابید.

۴۷ دانشگاه صنعتی امیرکبیر / پایان‌ترم اول ۸۳-۱۳۸۲

نگاشت موبیوسی را بیابید که ناحیه $|z| < 1$ را به ناحیه $0 < x$ (نیم‌صفحه بالایی در صفحه مقادیر) تصویر کند و $z=1$ به $x=0$ ، و i به i ، و $-i$ به $-i$ تصویر شوند.

۴۸ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم اول ۸۳-۱۳۸۲

تبدیل ناحیه $\operatorname{Im} z \geq 0$ و $|z| < 1$ را تحت نگاشت $w = i \frac{1-z}{1+z}$ بیابید.

۴۹ این سوال، تکراری با قسمت (ب) دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم اول ۸۵-۱۳۸۴ می‌باشد.



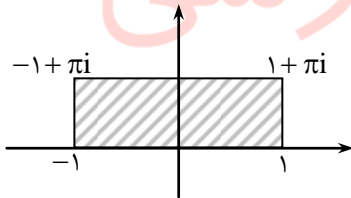
ریاضی مهندسی

۴۹) دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم اول ۱۳۸۲-۸۳

تصویر نوار $1 \leq \text{Im } z \leq 2$ و $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ را تحت نگاشت $w = \sinh z$ بیابید.

۵۰) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۱۳۸۲-۸۳

تصویر ناحیه مقابل تحت نگاشت $w = e^z$ چگونه است؟



۵۱) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم اول ۱۳۸۲-۸۳

تصویر ناحیه $R = \{z = x + iy \mid -\frac{x}{4} < x < \frac{x}{4}\}$ را تحت نگاشت $f(z) = \sin z$ تعیین کنید.

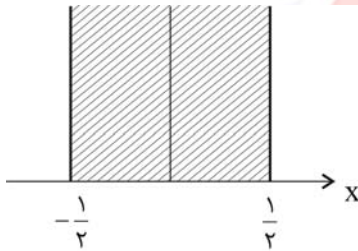
۵۲) دانشگاه تهران / میان‌ترم اول ۱۳۸۲-۸۳

تبدیل (نگاشت) تابع تحلیلی f را معرفی کنید به قسمی که ناحیه بسته $\{z = x + iy : x \leq 0, 0 \leq y \leq \pi\}$ را

به روی نیم قرص واحد $\begin{cases} |w| \leq 1 \\ v = \text{Im } w \geq 0 \end{cases}$ بنگارد. تصویر مرزها (کرانه‌ها) را توسط این تبدیل مشخص نمایید.

۵۳) دانشگاه علم و صنعت ایران / شهریور ماه ۱۳۸۲

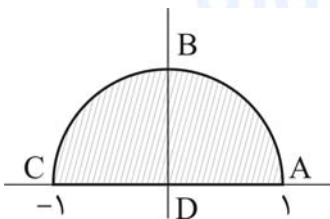
نقش ناحیه مقابل را تحت نگاشت $\omega = \sin \pi z$ به دست آورید.



۵۴) دانشگاه علم و صنعت ایران / شهریور ماه ۱۳۸۲

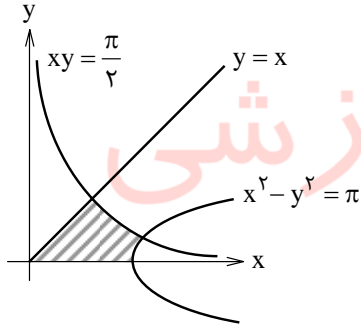
الف) تبدیل دو خطی بیابید که نقاط $(-1, 1, \infty)$ را به $(0, \infty, -1)$ تبدیل می‌کند.

ب) نقش ناحیه داده شده توسط $\omega = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2$ را بیابید.





۵۵) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / شهریور ماه ۱۳۸۲



تصویر ناحیه روبرو را تحت نگاشت $\omega = Z^2$ بیابید.

۵۶) دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم دوم ۸۲-۱۳۸۱

ناحیه محدود به منحنی‌های $x=1$ ، $y=1$ و $x+y=1$ را توسط نگاشت $\omega = Z^2 + 2Z$ تصویر کنید و (بدون استفاده از خاصیت کانفرمال بودن تابع) با محاسبه زوایای A' ، B' و C' تصویر زوایای A ، B و C نشان دهید زوایا تحت این نگاشت ثابت باقی می‌مانند.

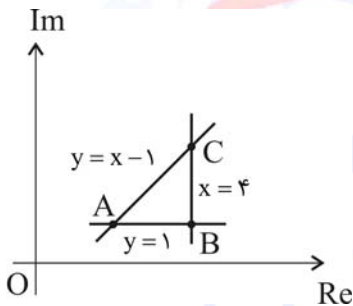
۵۷) دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم دوم ۸۲-۱۳۸۱

نقش ناحیه $0 < x < 1$ و $-1 < y < 0$ را تحت نگاشت $\omega = \frac{1}{z+1}$ بیابید.

۵۸) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم دوم ۸۲-۱۳۸۱

نقش $x = \frac{\pi}{4}$ را تحت نگاشت $\omega = \sin Z$ بیابید.

۵۹) دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم اول ۸۲-۱۳۸۱



نقش شکل روبرو تحت نگاشت $\omega = Z^2$ را بیابید و با ذکر جزئیات نشان دهید که اندازه زوایای بین منحنی‌های مبدل همان اندازه زوایای A ، B و C است.

۶۰) دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم اول ۸۲-۱۳۸۱

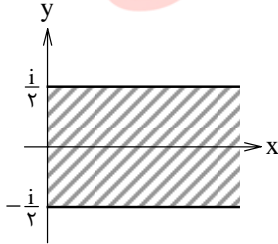
تبدیل موبیوسی را بنویسید که $(i, \infty, 0) \mapsto (0, 1, -1)$. سپس مبدل ناحیه $D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq 1\}$

توسط تبدیل $\omega = \frac{z-i}{z+i}$ را بیابید.



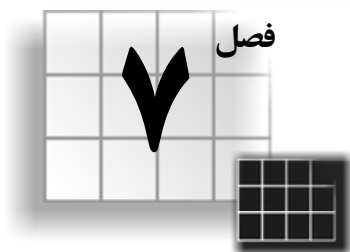
نقش ناحیه $D = \{z = x + iy \mid x \geq 1, y \geq 1\}$ را با تبدیل موبیوس $\omega = \frac{z-1}{z+1}$ تعیین کنید و شکل‌ها را دقیقاً رسم کنید.

تصویر ناحیه زیر را تحت نگاشت $\omega = (1+i)\sin(\pi iz)$ یافته و رسم کنید.



نگاشتی بیابید تا سه نقطه $z = 0, 2 + 2i, 4$ را به ترتیب به روی نقاط $0, 1, \infty$ بنگارد. سپس نقش ناحیه داخل دایره $\|z - 2\| = 2$ و خارج دایره $\|z - 1\| = 1$ را تحت نگاشت به‌دست آمده بیابید.

گروه آموزشی



سایر مباحث

۱ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم اول ۸۶-۱۳۸۵

لاپلاس معکوس $F(s) = \frac{1}{(s^2 + 1)^2}$ را به کمک قطب‌ها و اندها به دست آورید.

۲ دانشگاه صنعتی شریف / میان‌ترم اول ۸۶-۱۳۸۵

مقادیر سری‌های زیر را محاسبه کنید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin nx}{n} \right)^2 \quad (\text{الف})$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n - \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n(n^2 - 1)} \quad (\text{ب})$$

۳ دانشگاه صنعتی شریف / میان‌ترم اول ۸۵-۱۳۸۴

الف) با استفاده از محاسبه انتگرال تابع $f(z) = (1+z^2)^{-1}$ روی مرز مستطیل $s = \{z \mid |x| \leq a, 0 \leq y \leq b\}$ تساوی زیر را برای مقدار $0 < b < 1$ اثبات نمایید.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1-b^2+x^2)dx}{(1-b^2+x^2)^2 + 4b^2x^2} = \pi$$

ب) مقدار انتگرال فوق را در حالت‌های $b=1$ و $b>1$ به دست آورید.



ریاضی مهندسی

دانشگاه صنعتی شریف / میان‌ترم اول ۸۵-۱۳۸۴

مقدار سری مقابل را برای مقادیر $y > 0$ به دست آورید. $e^{-y} \cos x + e^{-2y} \cos 2x + e^{-3y} \cos 3x + \dots$

دانشگاه صنعتی امیرکبیر / پایان‌ترم دوم ۸۴-۱۳۸۳

با توجه به اینکه $|\omega| = \omega \bar{\omega}$ و نیز $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ ، $\int_0^{2\pi} e^{in\theta} d\theta = 0$

فرض کنید که $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n$. ثابت کنید که

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=R} z^{n-1} |f(z)|^2 dz = a_0 \bar{a}_n R^{2n}$$

دانشگاه صنعتی امیرکبیر / پایان‌ترم دوم ۸۴-۱۳۸۳

به کمک بسط مکلورن $|z| < 1$ ، $f(z) = \frac{1}{1-z}$

الف) ثابت کنید که $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = -\log(1-z)$ ، $|z| < 1$

ب) قضیه آبل زیر را بدون اثبات مدنظر قرار دهید.

قضیه آبل: اگر $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ همگرا باشد، آنگاه: $\lim_{r \rightarrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$ ، $0 < r < 1$

حال با استفاده از قضیه آبل، الف) و $z = re^{i\theta}$ ثابت کنید که

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n} = -\ln \left| 2 \sin \frac{\theta}{2} \right|, \quad 0 < |\theta| \leq \pi$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n} = \frac{\pi - \theta}{2}, \quad 0 < \theta < 2\pi$$

دانشگاه صنعتی امیرکبیر / پایان‌ترم اول ۸۴-۱۳۸۳

با توجه به اینکه مجموع ریشه‌های معادله درجه n ، $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$ برابر است

با $-\frac{a_{n-1}}{a_n}$ و با استفاده از ریشه‌های پنجم عدد یک، ثابت کنید که

$$1 + \cos 72^\circ + \cos 144^\circ + \cos 216^\circ + \cos 288^\circ = 0$$

دانشگاه صنعتی شریف / پایان‌ترم دوم ۸۳-۱۳۸۲

بسط تابع $f(x) = x$ را روی $(0, 1)$ بر حسب توابع خاص مسئله اشتروم - لیوویل زیر بیابید.

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y(1) = 0$$



طبق قضیه‌ای در آنالیز مختلط، اگر z_k ، $k = 1, 2, \dots, m$ ، قطب‌های تابع تحلیلی $f(z)$ باشند، داریم:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = -\sum_{k=1}^m \text{Res}[f(z)\pi \cot \pi z; z_k]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

با بهره‌گیری از این قضیه، نشان دهید:

با استفاده از $A + iB$ مجموع‌های زیر را حساب کنید.

$$A = \cos x + \binom{n}{1} \cos 2x + \dots + \binom{n}{n} \cos(n+1)x$$

$$B = \sin x + \binom{n}{1} \sin 2x + \dots + \binom{n}{n} \sin(n+1)x$$

الف) معادله مقابل را حل کنید.

ب) با استفاده از دستگاه کمکی لاگرانژ، تمام رویه‌هایی را در فضا تعیین کنید که صفحات مماس بر آنها از نقطه $(0, 0, 1)$ بگذرند.

راهنمایی: معادله صفحه مماس بر رویه $f(x, y, z) = 0$ در نقطه (x_0, y_0, z_0) عبارت است از:

$$(x - x_0)f_x + (y - y_0)f_y + (z - z_0)f_z = 0$$

دنباله فیبوناچی به شکل روبرو تعریف می‌شود: (برای هر n) $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ ، $a_1 = 1$ ، $a_0 = 1$

فرض کنید $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. در این صورت ثابت کنید که در دایره همگرایی داریم: $f(z) = \frac{z}{1-z-z^2}$

گروه آموزشی



گروه آموزشی آماد

www.Amad-Group.ir