In the name of God

Semnan University, School of Mechanical Engineering

Engineering Mathematics Problems

(Set #1-Ordinary Differential Equations)

Dr. Mohammad S. Valipour ***Fall 2011***

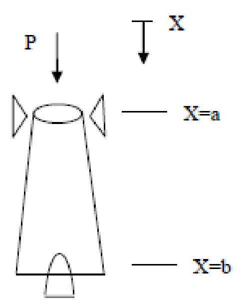
۱) معادله تغییر مکان یک ستون با سطح مقطع متغیر، در صورتی که شعاع متناسب با $\sqrt{x}$ باشد از رابطه:

$$\begin{cases} x^2 y'' + \lambda y = 0 & , a < x < b \\ y(a) = 0 \\ y(b) = 0 \end{cases}$$

داده شده است که $\lambda = \dfrac{b^2 P}{EI_0}$، P بار وارده ، E مدول الاسیسیته و I_0 ممان اینرسی مقطع در $x = b$ است.

اولًا- جواب کلی تغییر مکان ستون را وقتی $\lambda > \dfrac{1}{4}$ است بیابید، ثانیاً- نشان دهید که بار بحرانی برابر است با:

$$P_{cr} = \frac{EI_0}{b^2}\left[\frac{1}{4} + \frac{\pi^2}{\left(\ln(\frac{b}{a})\right)^2}\right]$$



۲) زمانیکه یک چترباز خود را از یک هواپیما پرتاب می کند دو نیرو به وی وارد می شود:

- نیروی گرانش که به سمت پایین به وی وارد می شود.

- نیروی مقاومت هوا که به سمت بالا به وی وارد می شود.

شتاب گرانشی با g نشان داده می شود ودر نزدیکی زمین برابر $9.8\,ms^{-2}$ در نظر گرفته می شود. مقاومت هوا بستگی به اندازه وشکل جسمی که از هوا پرتاب می شود دارد. از ضریب k برای نشان دادن مقدار مقاومت هوا استفاده می شود که ضریب درگ یا پسا نام دارد. مقاومت هوا با مجذور سرعت متناسب است بنابراین نیروی مقاومت هوا که به سمت بالا به جسم پرنده وارد می شود برابر است با:

$$F_{air} = kv^2$$

نیروی گرانشی هم برابر است با:

$$F_{gravity} = mg$$

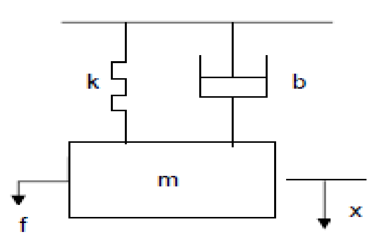
نیروی نهایی که به جسم وارد می شود را با F_{total} نشان می دهیم که برابر است با:

$$F_{total} = F_{air} - F_{gravity} = kv^2 - mg$$

از رابطه $\sum F = ma$ استفاده کنید و به سوالات زیر پاسخ دهید:

- عبارتی برای سرعت فرد پرنده پیدا کنید.
- سرعت فرد پرنده را بعد از ۵ ثانیه وقتی که جرم وی 80kg وضریب مقاومت هوا ۰،۲ باشد بیابید.
- سرعت حد را برای هر شئ پرنده ای به صورت پارامتری بر حسب g و k حساب کنید.
- سرعت حد را برای فرد پرنده با مقدار جرم 80kg وضریب مقاومت هوا ۰،۲ حساب کنید.

۳) سیستم جرم و فنر رو به رو را در نظر بگیرید:



معادله ی ریاضی حاکم بر این سیستم به صورت زیر بدست می آید:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = f(t)$$

که در این معادله:

m=2, b=5, k=3.125 and $f = e^{-t}\sin t$

اگر شرایط اولیه حاکم بر مسئله به صورت زیر باشد:

$$t = 0 \Rightarrow x = 0$$
$$t = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 0$$

از تبدیل لاپلاس استفاده کرده و جابجایی سیستم را بدست آورید.

۴) معادله دیفرانسیل زیر را با استفاده از سری های توانی حل کنید. چهار ترم اول را در هر بخش از حل سری ها حول نقطه $x_0 = 0$ بدست آورید.

$$(x^2 + 1)y'' - 4xy' + 6y = 0$$

۵) تابع $y(x)$ در معادله زیر صدق می کند.

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

رونسکین دو جواب مستقل $y_1(x)$ و $y_2(x)$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

فرض کنید $y_1(x)$ معلوم باشد. از رونسکین استفاده کرده و یک معادله مرتبه اول ناهمگن برای $y_2(x)$ تعیین کنید و نشان دهید که:

$$y_2(x) = y_1(x)\int_{x_0}^{x} \frac{W(t)}{y_1(t)^2}\,dt \qquad (1)$$

نشان دهید رونسکین معادله زیر را ارضا می کند:

$$\frac{dW}{dx} + p(x)W = 0$$

اثبات کنید که $y_1(x) = 1 - x$ جوابی از معادله زیر است:

$$xy'' - (1 - x^2)y' - (1 + x)y = 0$$

از معادله (۱) استفاده کرده و سری توانی حول نقطه $x_0 = 0$ برای y_2 که مستقل از y_1 باشد و در شرایط زیر صدق کند را محاسبه و سه ترم اول این سری را بیابید.

$$y_2(0) = 0 \text{ و } y_2''(0) = 1$$

۶) معادله زیر را در نظر بگیرید:

$$4x^2y'' + 4xy' + (8x^2 - 1)y = 0$$

اگر:

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{x}}\sin x\,,\ J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{x}}\cos x$$

باشند. جواب عمومی معادله فوق را بدست آورید.

۷) اگر y(x) جواب عمومی معادله زیر باشد:

$$x^2 y''' + 3xy'' + ay' = 0$$
$$y = A + \sqrt{x}(B + Cg(x))$$

مقدار ثابت a و تابع g(x) را تعیین کنید.

۸) **برنامه نویسی(اختیاری دارای نمره ی اضافی):**

سنجاب کوهی پستاندارکوچکی است که در کوه های صخره ای درون خاک زندگی می کند. مشاهدات زیر در مورد این حیوان وجود دارد:

۱- اگر جمعیت این حیوان زیاد باشد، نرخ رشد جمعیت کاهش یافته وحتی منفی می شود.

۲- اگر جمعیت این حیوان خیلی کم باشد تعداد حیوانات بالغی که جفتی برای خود پیدا می کنند کاهش یافته و نرخ رشد جمعیت باز منفی می شود.

پارامتر P جمعیت ، پارامتر N (فشردگی جمعیت) بر این دلالت دارد که جمعیت بسیار زیاد است و پارامتر M(پارامتر پراکندگی جمعیت) بر این دلالت دارد که جمعیت بسیار کم است.

یک مدل ریاضی مفید که تطابق خوبی هم با مشاهدات بالا دارد و در واقع اصلاح شده ی مدل لوجستیک (logistic) است به صورت زیر تعریف می شود:

$$\frac{dP}{dt} = kP(1-\frac{P}{N})(\frac{P}{M}-1)$$

که k ثابت است. به سوالات زیر پاسخ دهید(برای پاسخ خود استدلال بیاورید)

a- نقاط تعادلی (بحرانی) مساله را تعیین کنید.

b- گراف جمعیت بر اساس زمان را رسم کنید و خطوط N=cte و M=cte را در آن مشخص کنید.

c- -فرض کنید:

d- N=100 and M=1 and k = 1

باشند. گراف جمعیت بر حسب زمان را برای شرط اولیه زیر رسم کنید.

$p(0)=20$

d - فرض کنید سنجاب ها از یک ناحیه خاص با نسبت ثابت E مهاجرت کنند. معادله جدید حاکم بر مساله را بدست آورید. همچنین در مورد نقاط تعادلی جدید با وجود پارامتر E بحث کنید.

راهنمایی: نقطه تعادلی نقطه ای است که جمعیت به طور ثابت با زمان تغییر می کند.

توجه: در صورت امکان برای رسم گراف ها از برنامه MATLAB استفاده کنید.