www.icivil.ir

پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

ارائه کتابها و جزوات رایگان مهندسی عمران

بهترین و برترین مقالات روز عمران

انجمن های تخصصی مهندسی عمران

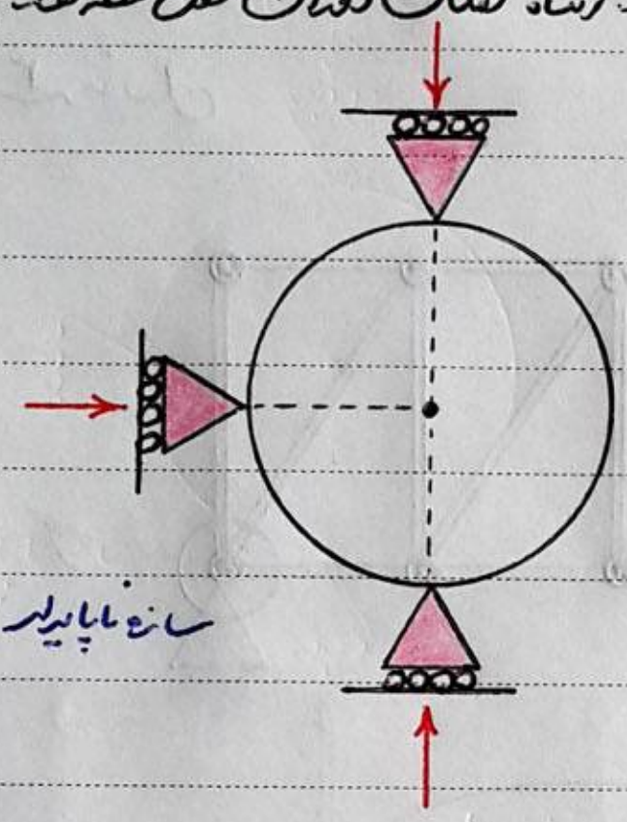
فروشگاه تخصصی مهندسی عمران

بسم الله الرحمن الرحیم

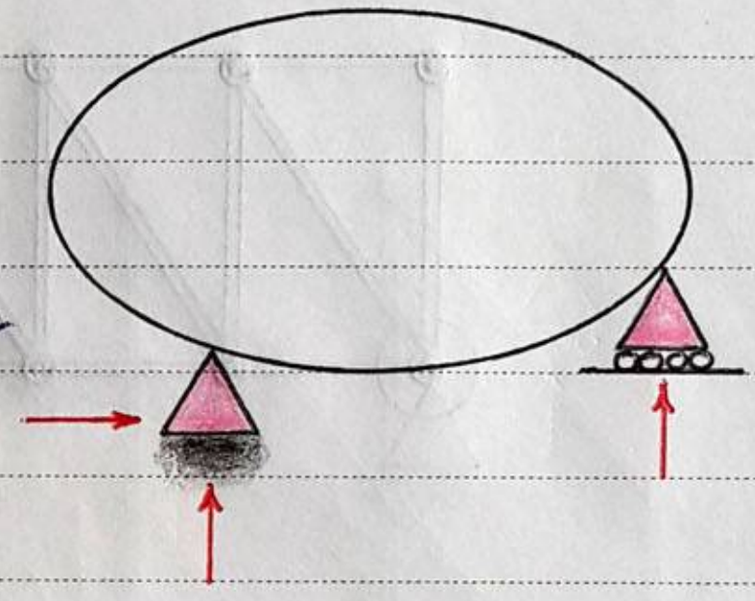
تعریف سازه

مجموعه‌ای از عضوهای متصل به هم است که برای تحمل و انتقال نیرو و پایداری در برابر بارهایی که به آن وارد می‌شود ساخته شده است.

- برای پایداری یک جسم در صفحه نیاز به حداقل ۳ قید نا متقارب است ، اگر ۳ قید متقارب باشند کوتاه ترین فاصله نقطه تقارب را داشته



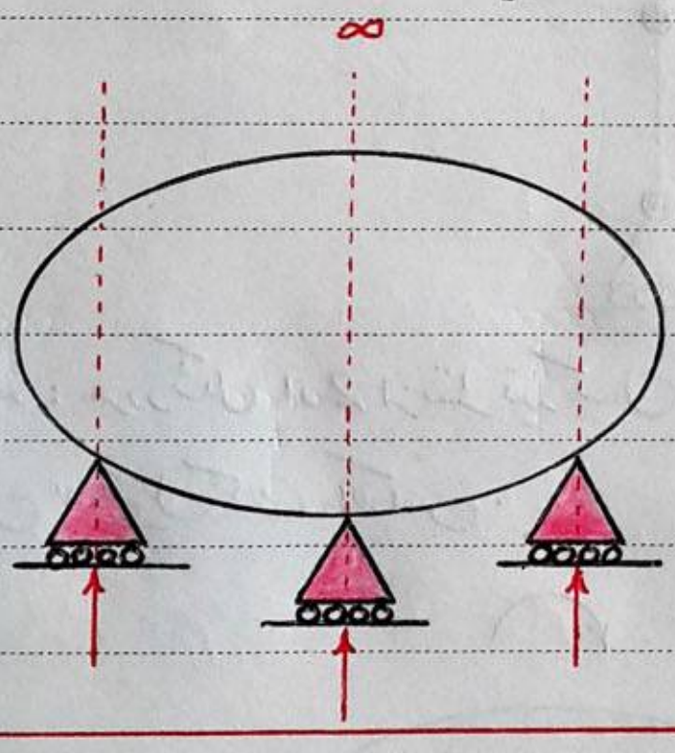
سازه ناپایدار



سازه پایدار معین

جسم صلب : جسمی که در برابر نیروهای وارده فاصله بین ذرات (نقاط مختلف) آن تغییر نکند

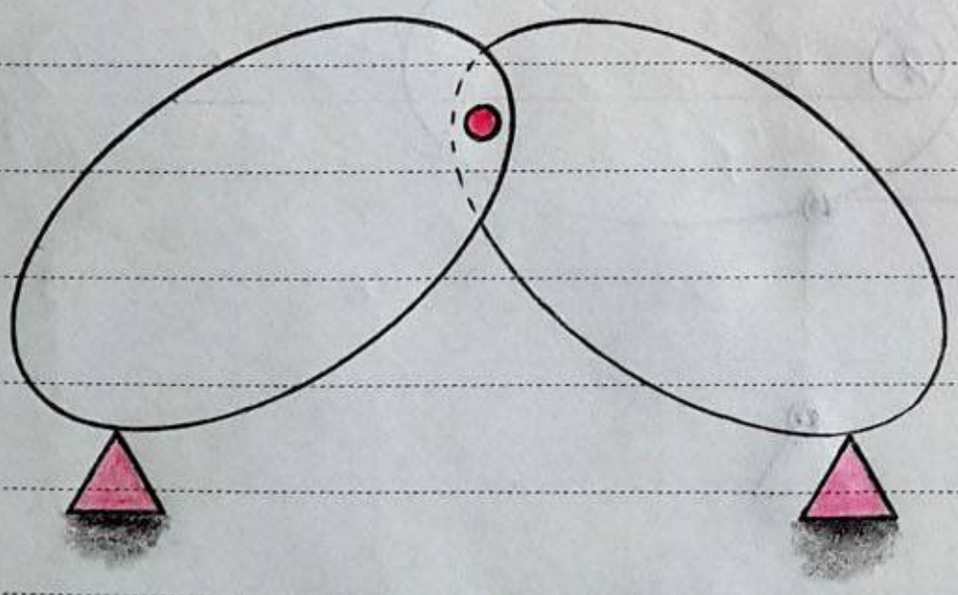
جسم انعطاف پذیر : " " " " " " " " تغییر کند



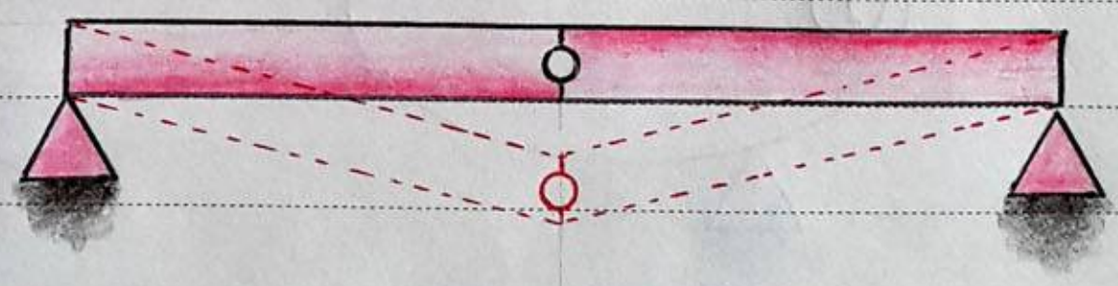
با توجه به اینکه جسم ۳ قید نا متقارب دارد

چون در نقطه بی نهایت به هم می رسند پس جسم در حال تعادل نیست

دایره‌ای که شعاع آن بی نهایت است



ناپایداری آنی

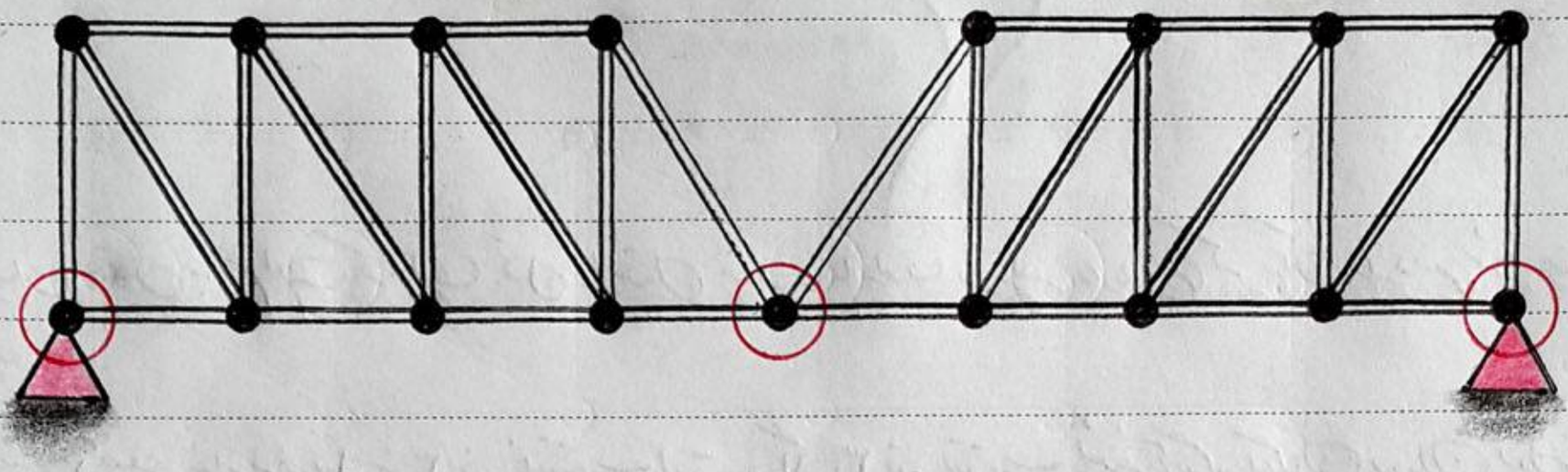


اگر در سازه‌ای یک منفصل داخلی داشتیم یک قید به قیدهای خارجی اضافه می‌کند

شرط تعادل دو جسم صلب که به یکدیگر متصل شده‌اند این است که حداقل ۳ منفصل داشته باشند که در یک راستا نباشند

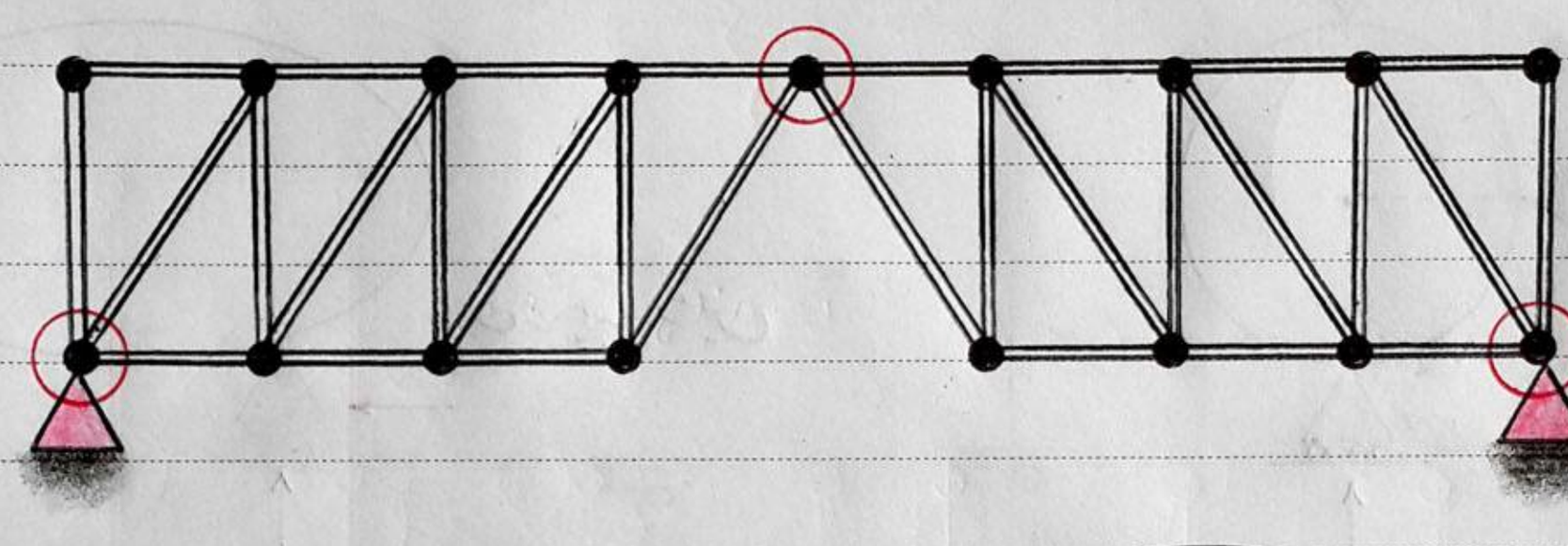
ناپایدار آنی : ناپایداری است که با کوچکترین تغییر شکل ، مشکل ناپایداری آن حل شود و سازه پایدار شود

ali_intel66@yahoo.com

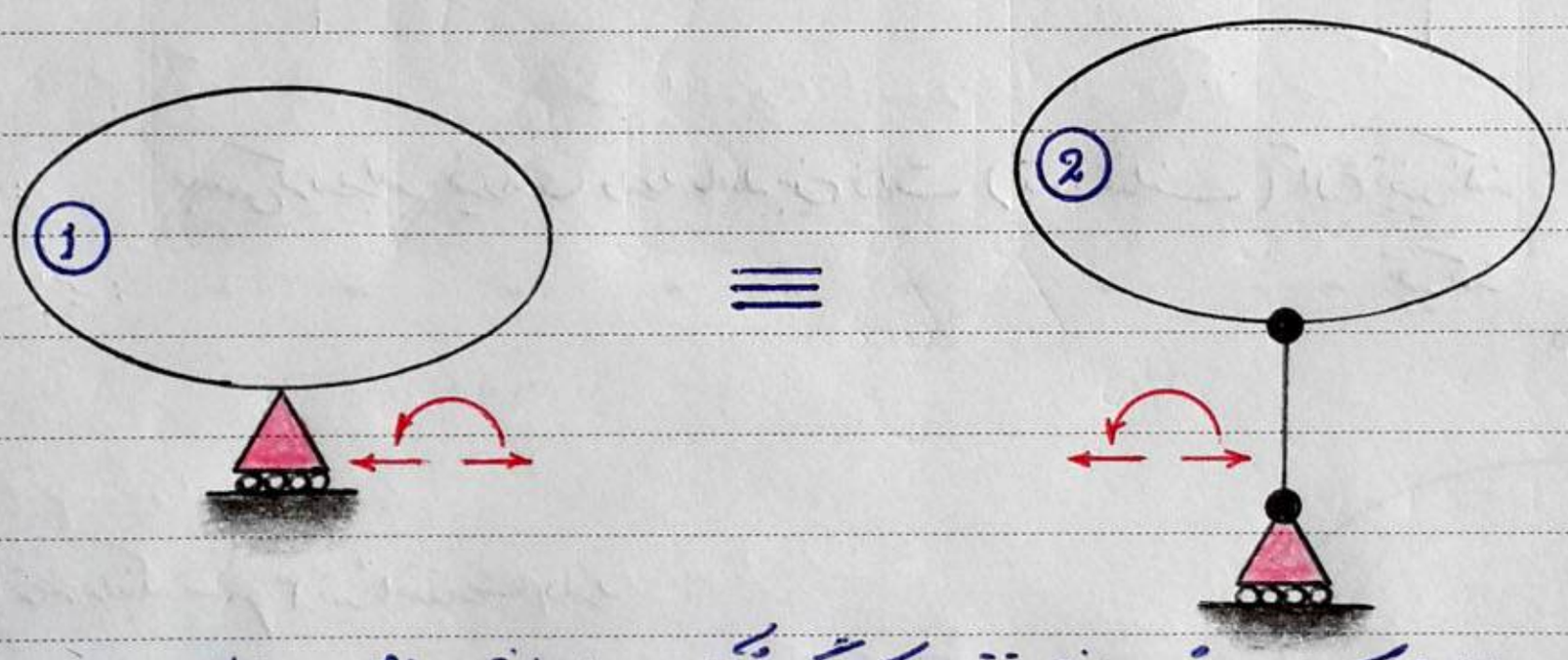


ناپایدار

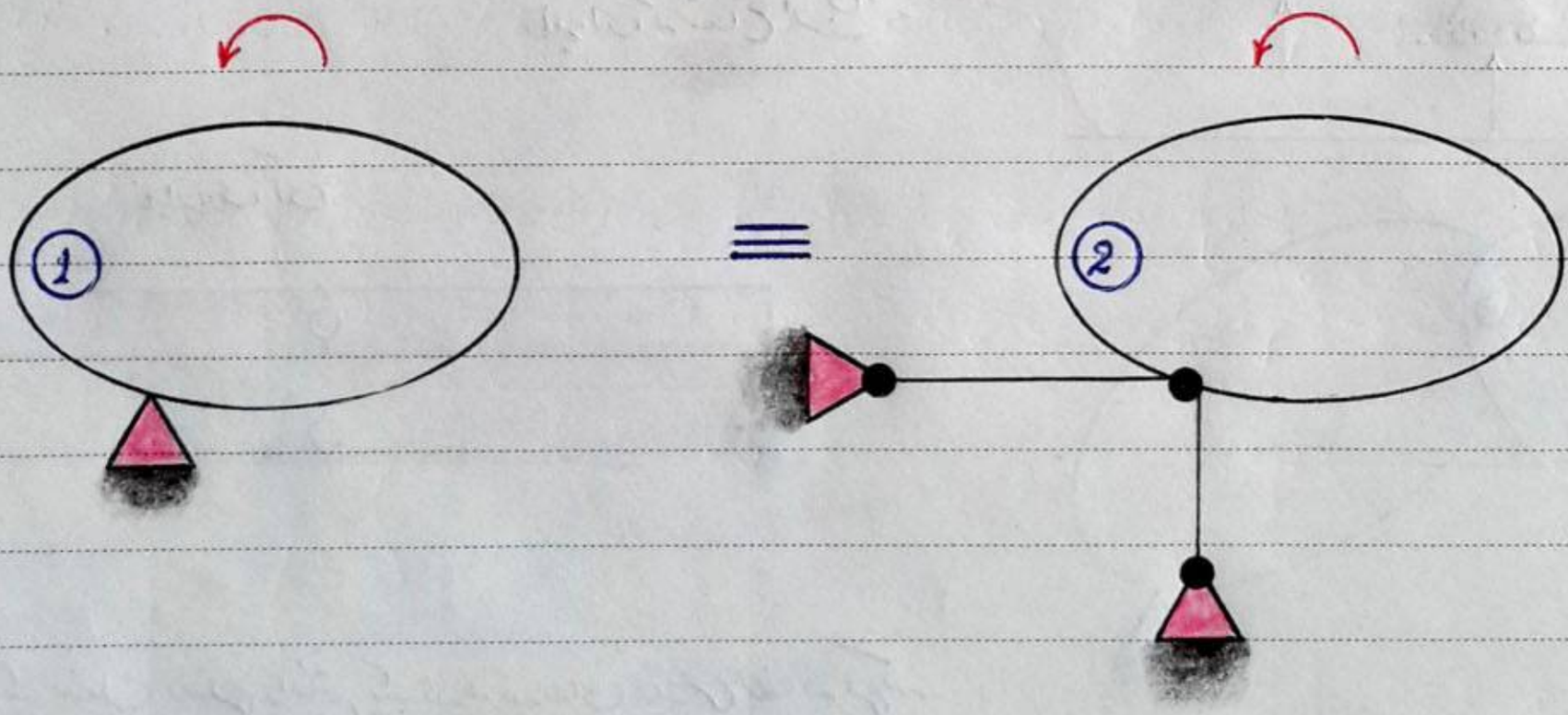
سازه‌های ۳ـ مفصل



پایدار



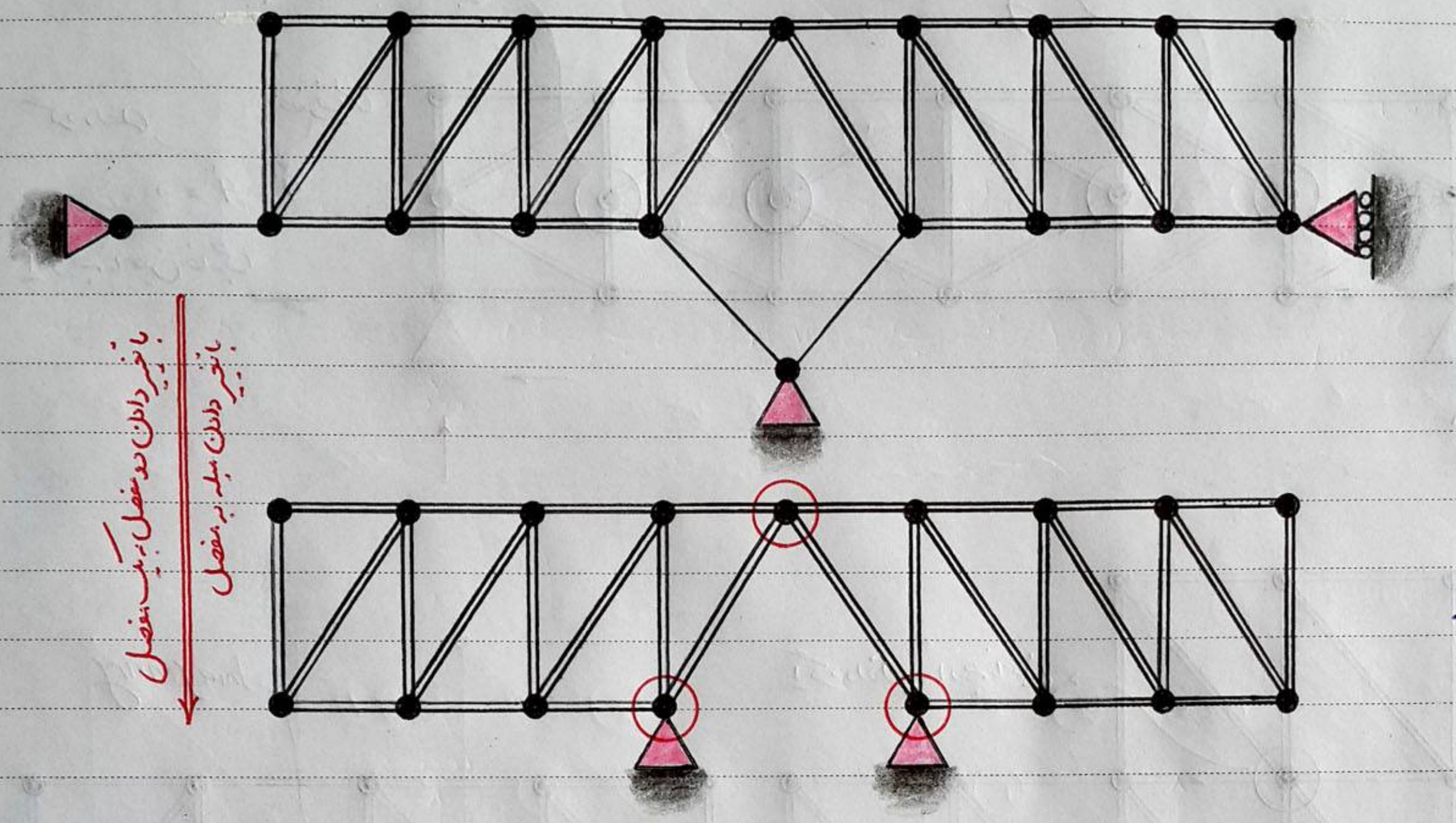
قضیه: هر دو شکل 1 و 2 از نظر قید یکسان می‌باشند بدین ترتیب که اگر شکل 1 را در اختیار داشتیم می‌توان به صورت لزوم آن را به شکل 2 تبدیل کرد و بالعکس.



دو شکل 1 و 2 از نظر قید یکسان می‌باشند.

دو میله در جایی که به هم می‌رسند (نقطه تقاطع) می‌توان آن دو میله را به یک مفصل تبدیل کرد یا برعکس

ali_intel66@yahoo.com



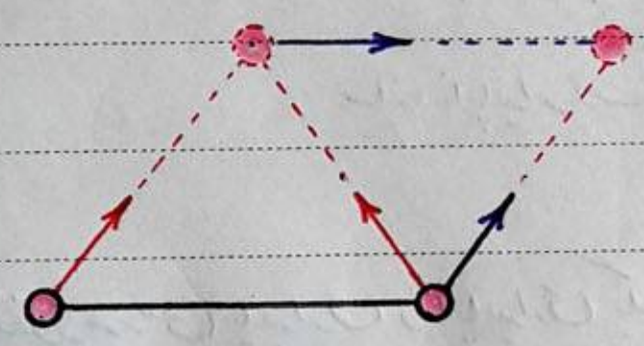
با تغییر دادن دو مفصل به یک مفصل
با تغییر دادن سه مفصل بر مفصل

پایدار

سازه معین

سازه‌ای که بتوان نیروهای داخلی و عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی آن را فقط با معادلات تعادل استاتیکی بدست آورد

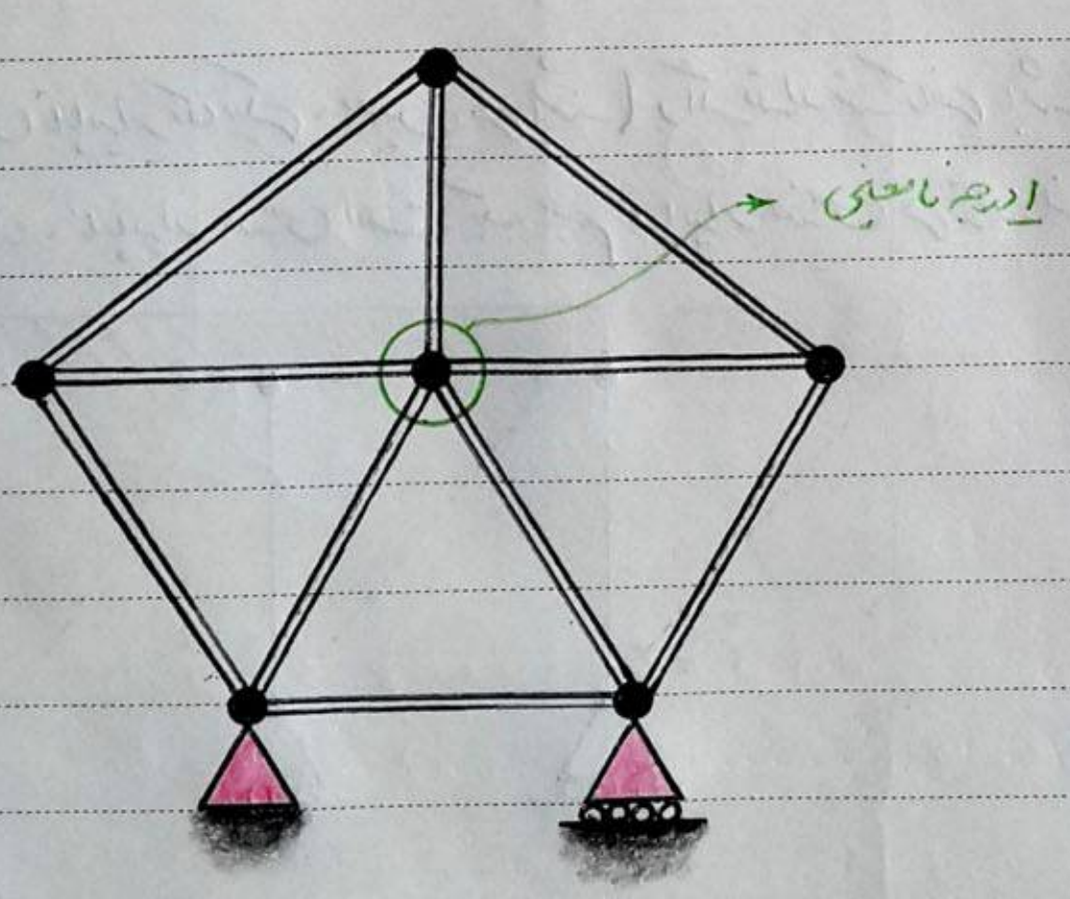
$\Sigma Fx = 0$ $\Sigma Fy = 0$ $\Sigma M = 0$



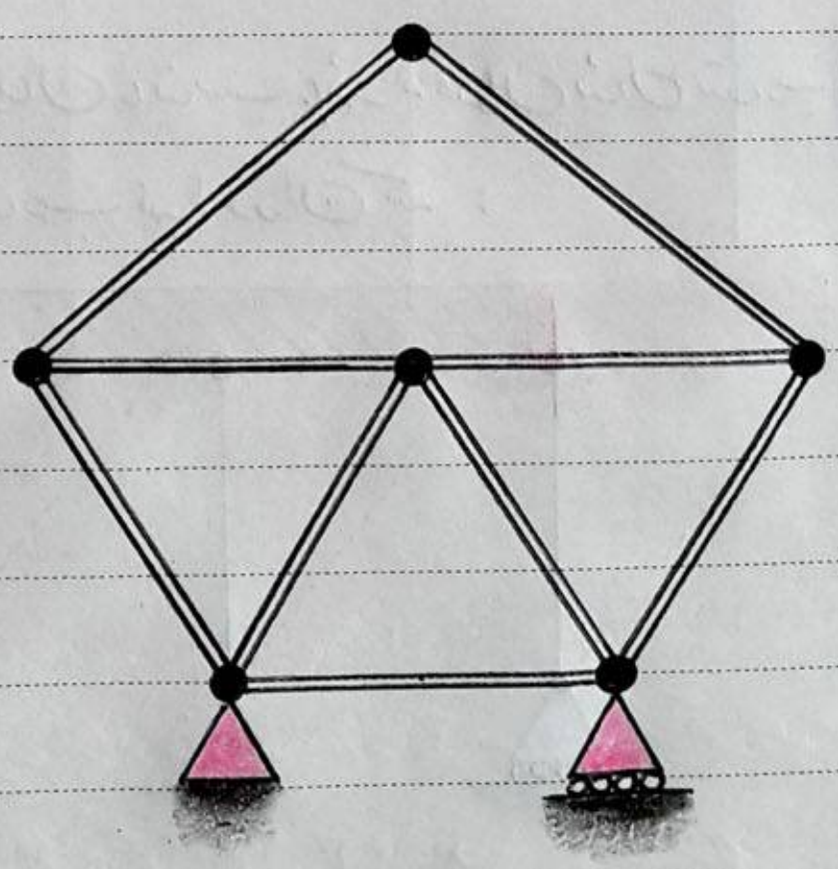
روش رشد مثلثی

در روش رشد مثلثی از دو گره دو عضو خارج می‌شوند و یک گره به هم می‌رسند.

اگر در خرپایی تمام مثلث‌های آن ۳ عضوی بود به تعداد گره‌های داخلی درجات نامعینی دارد (البته عین و نامعینی مربوط به عضوهای داخلی است)

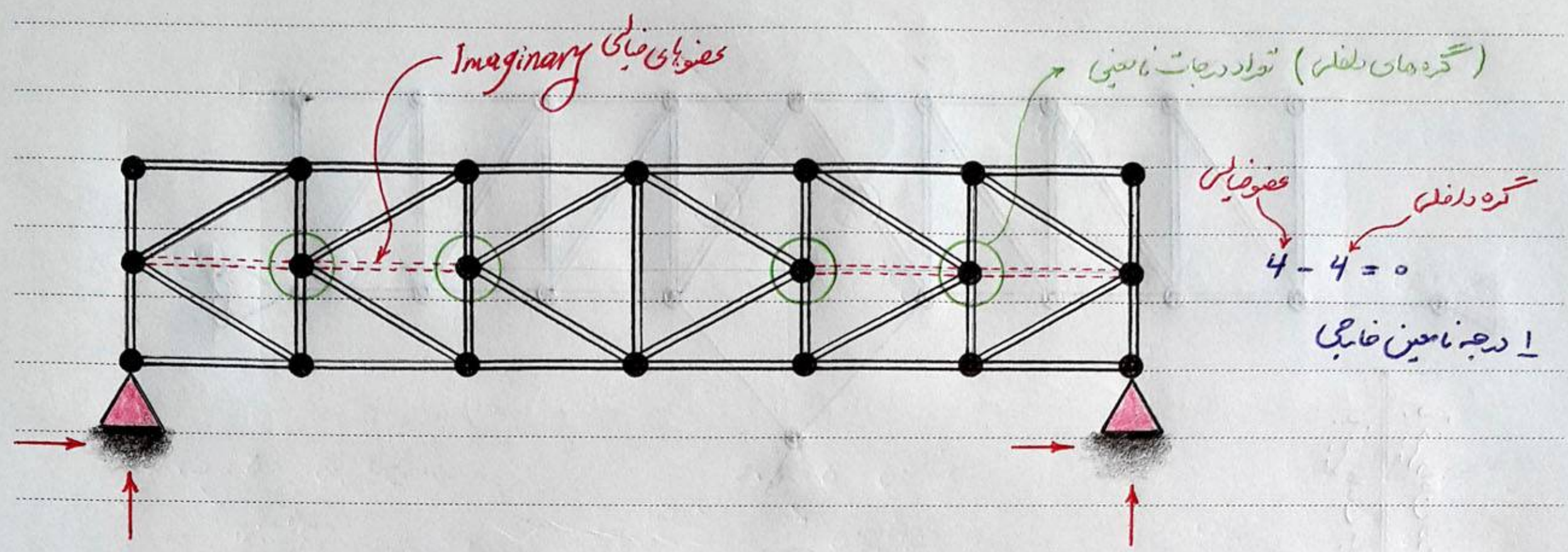


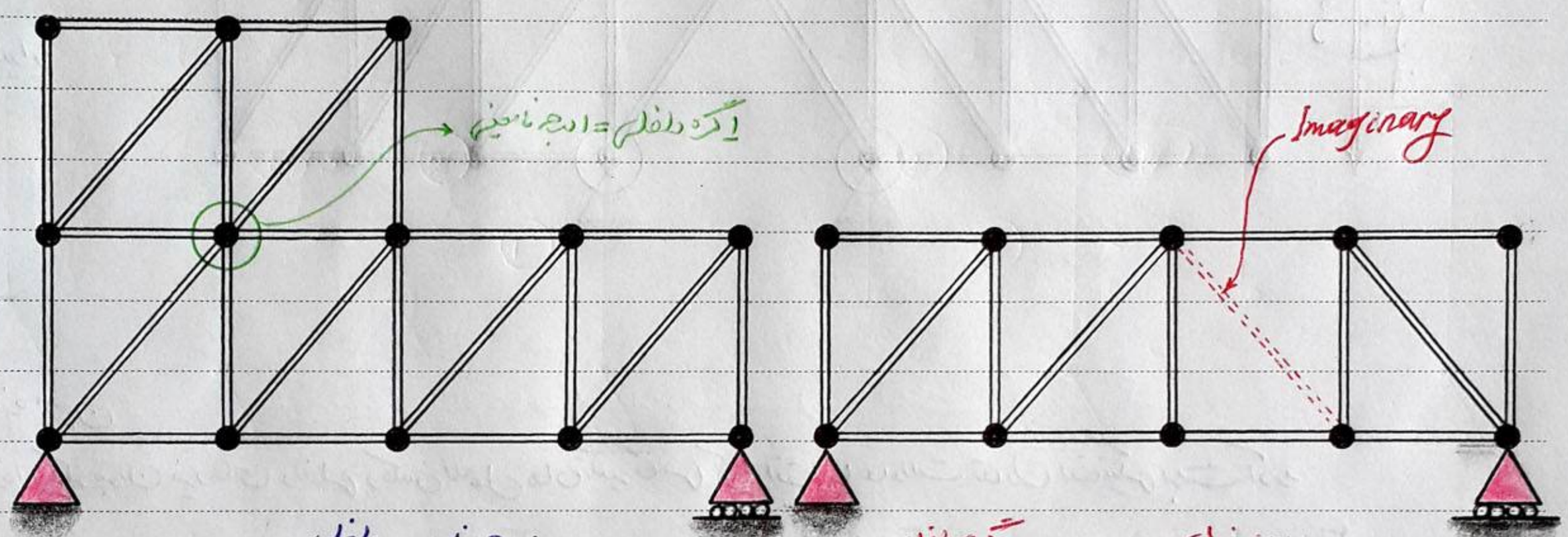
سازه پایدار و نامعین



سازه پایدار و معین

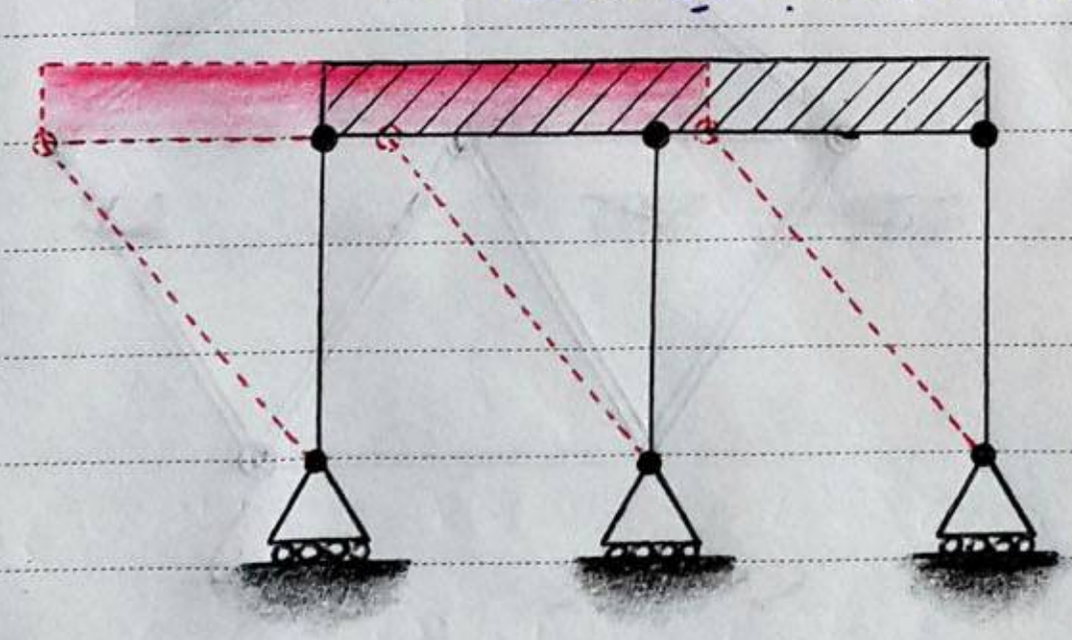
PAPCO
ali_intel66@yahoo.com

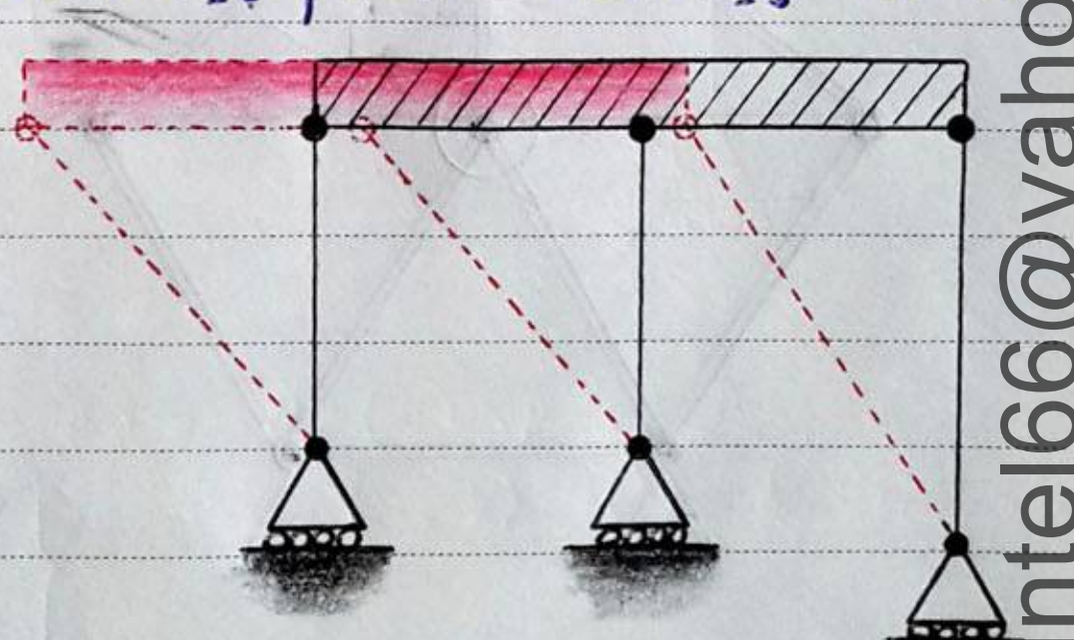




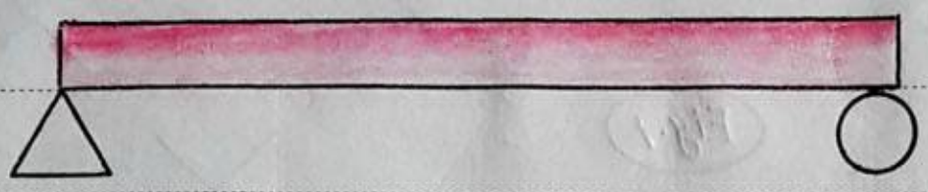
به منظور بررسی پایداری و ناپایداری یک جسم (سازه) اولویت با شمارش تعداد قیدهای آن می باشد اگر تعداد قیدها کافی نباشد سازه را ناپایدار مکانیکی گوئیم. برای مثال یک جسم در صفحه نیاز به ۳ قید نا متقارب دارد اگر تعداد قیدها کمتر از این مقدار باشد سازه ناپایدار مکانیکی است

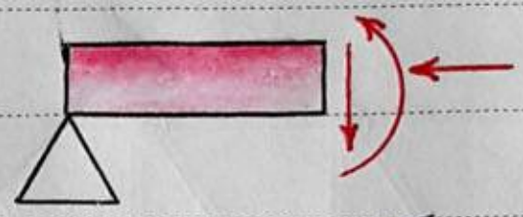
(سازه های ناپایدار مکانیکی، معین می باشند) و اگر تعداد قید کافی باشد ولی طول چیدمان نامناسب باشد به عنوان مثال متقارب باشند گونه سازه، ناپایدار هندسی است یک جسم ناپایدار هندسی می تواند نسبت به نقطه تقارب قیدها دوران کند :





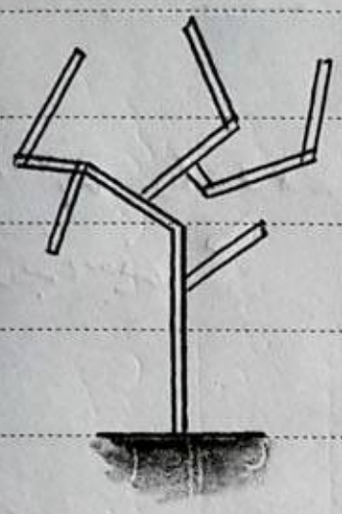
P4PCO
ali_Intel66@yahoo.com





نامعینی فاجها

مامی دانیم که اگر یک تیر معمولی مطابق شکل را برش بزنیم (برای تحلیل نیروهای داخلی)
به ازای هر برش ۳ درجه نامعینی بوجود می آید.



① روش برش - درخت

یک درخت با کلیه تکیه گاه گیردار و اتصالات صلب و شاخه هایی که تنها یک اتصال با بدنه درخت دارند معین و با یدار است (اگر اتصال بیش از یک بار باشد باید آن را برش زد در نتیجه به ازای هر برش ۳ درجه نامعینی اضافه می گردد.

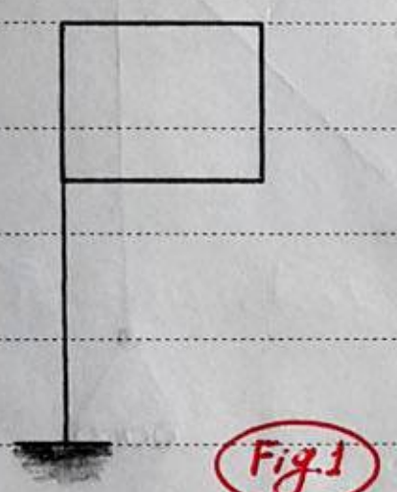


Fig.1

(برش) 1 x 3 (درجه نامعینی) = 3

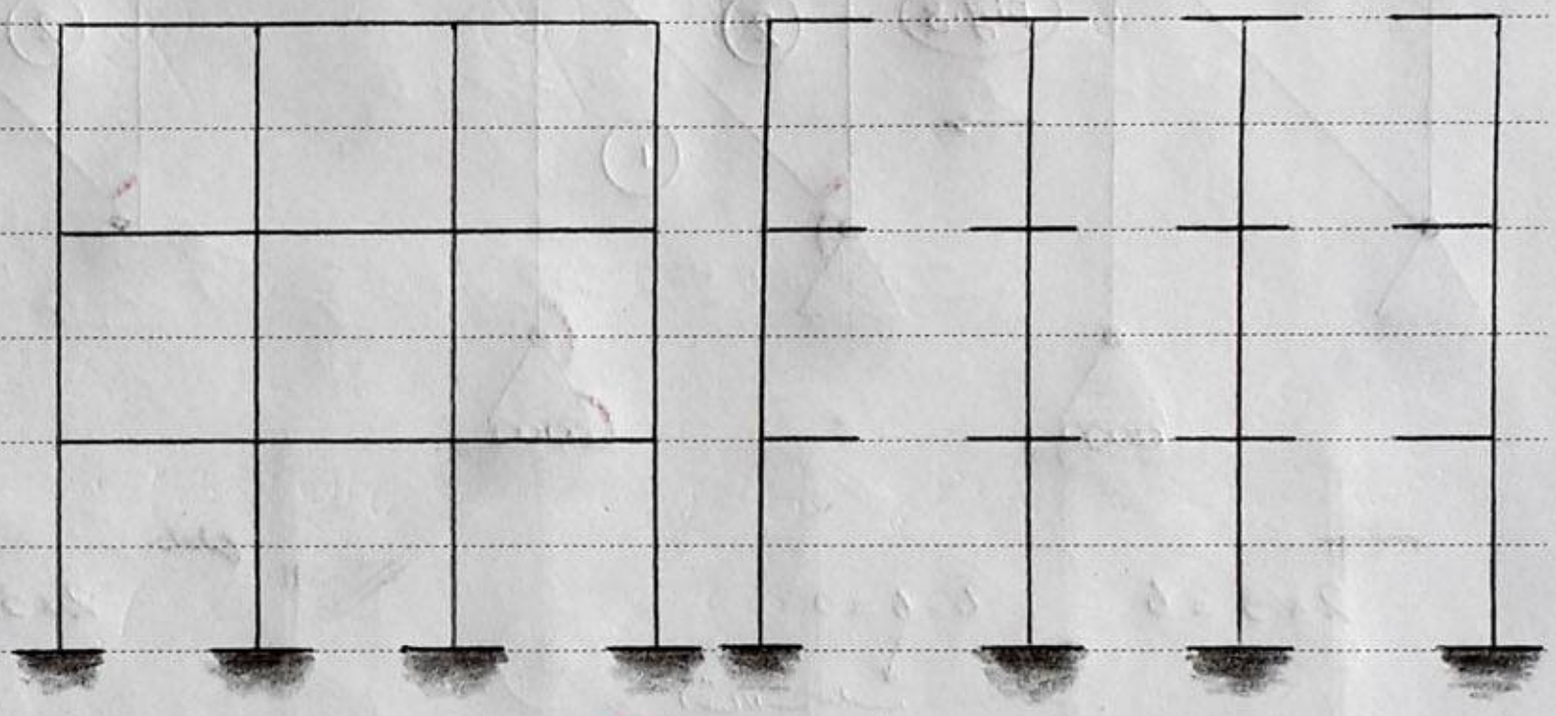


Fig.2

درجه نامعینی 9x3 = 27

② روش طقه: یک طقه بسته با اتصالات صلب ۳ درجه نامعینی دارد. (به ازای هر طقه بسته، ۳ درجه نامعینی)

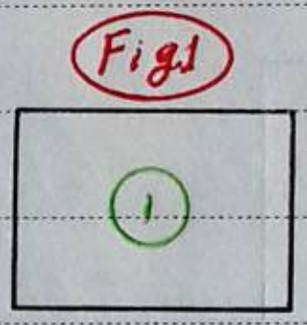


Fig.1

۳ درجه نامعینی

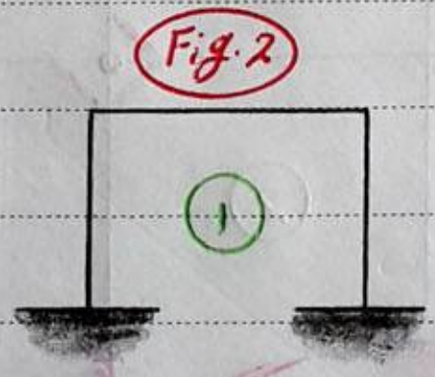


Fig.2

۳ درجه نامعینی

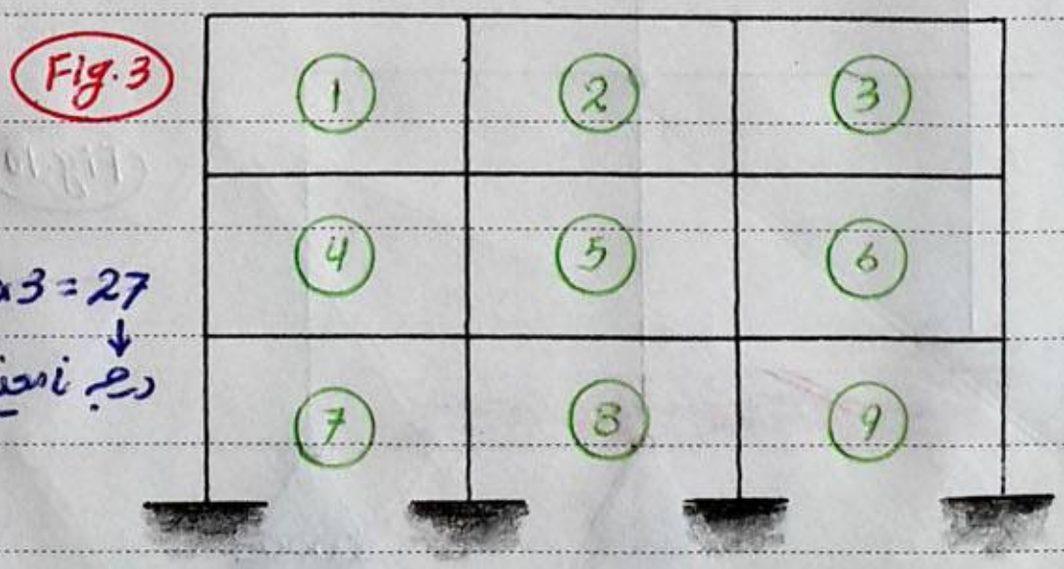


Fig.3

9x3 = 27
↓
درجه نامعینی

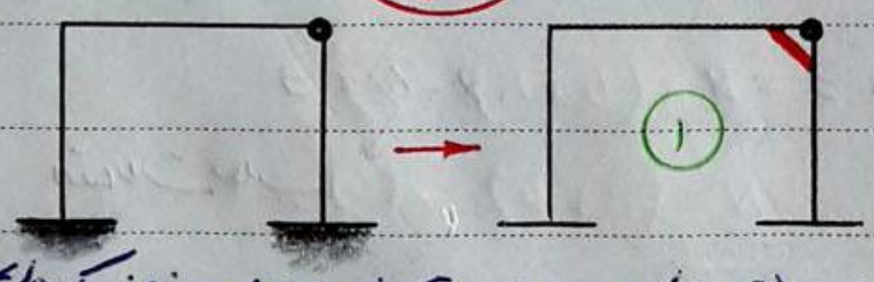


Fig.4

چون اتصال صلب فرض کرده ایم ⇒ (1x3) - 1 = 2 درجه نامعینی

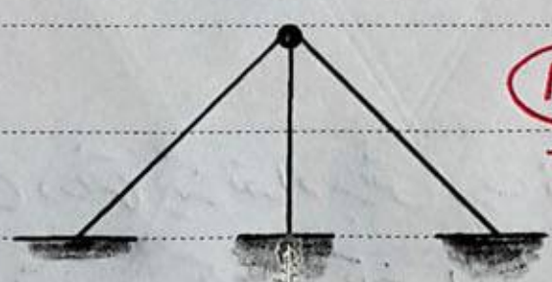
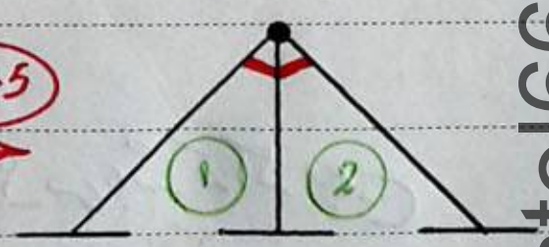


Fig.5

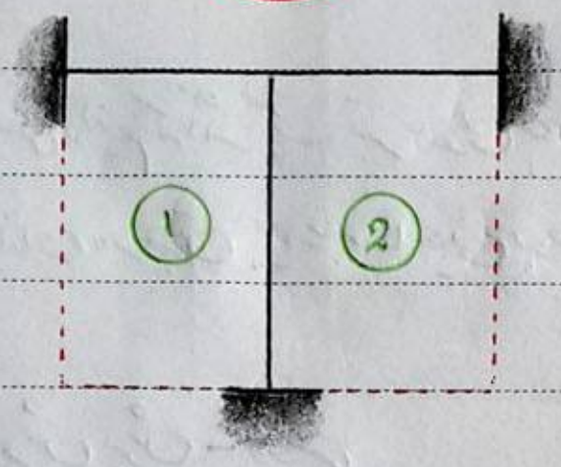


(2x3) - 2 = 4 درجه نامعینی

ali_intel66@yahoo.com

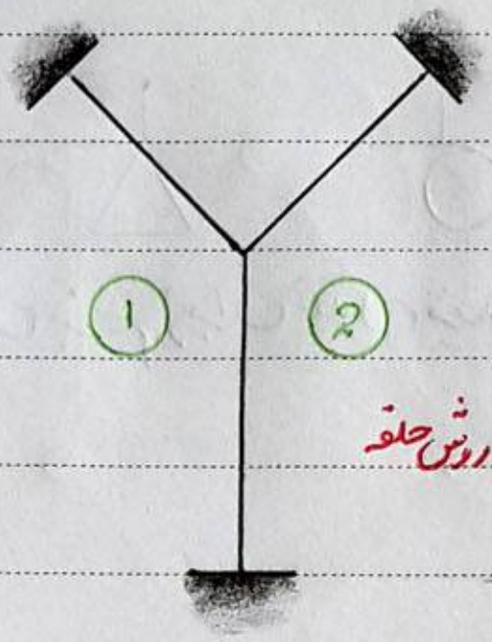
Subject :
Year . Month . Date . ( )

Fig.6

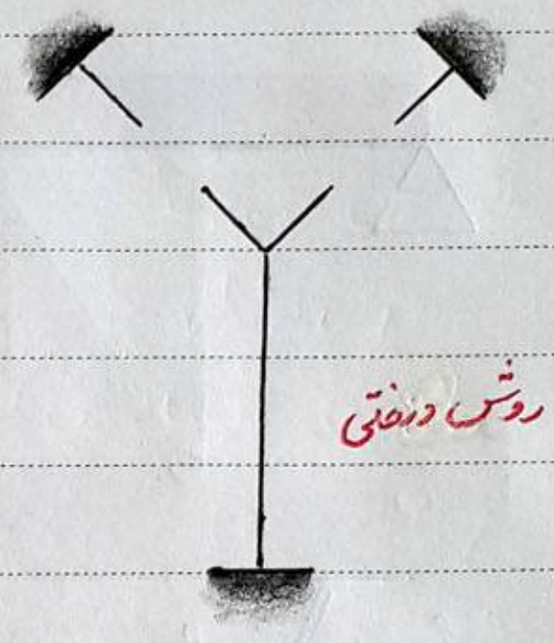


$2 \times 3 = 6$ درجه نامعینی
حلقه ← درجه نامعینی

Fig.7

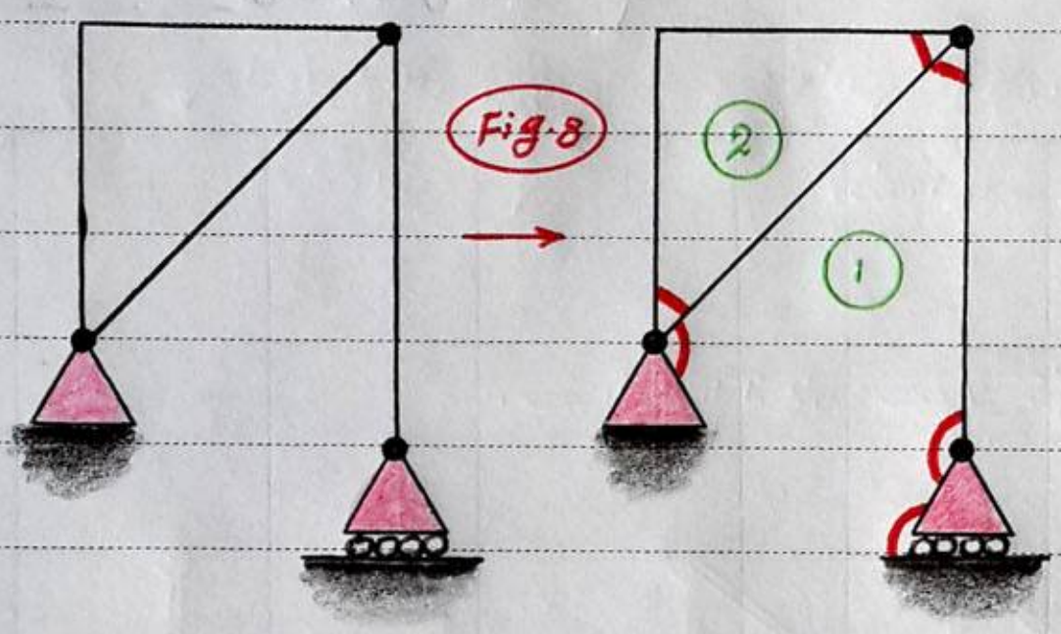


$2 \times 3 = 6$ درجه نامعینی
حلقه ← درجه نامعینی



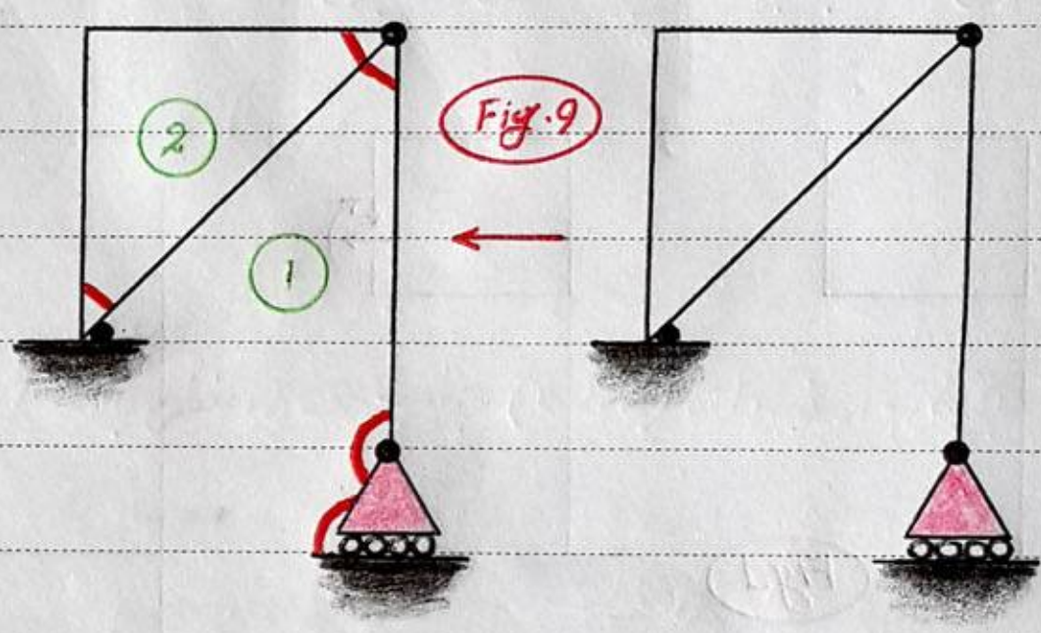
$2 \times 3 = 6$ درجه نامعینی
برش ← درجه نامعینی

Fig.8



$2 \times 3 = 6$ $6 - 6 = 0$
اتصالات صلب

Fig.9



$2 \times 3 = 6$ $6 - 5 = 1$ درجه نامعینی
اتصالات صلب

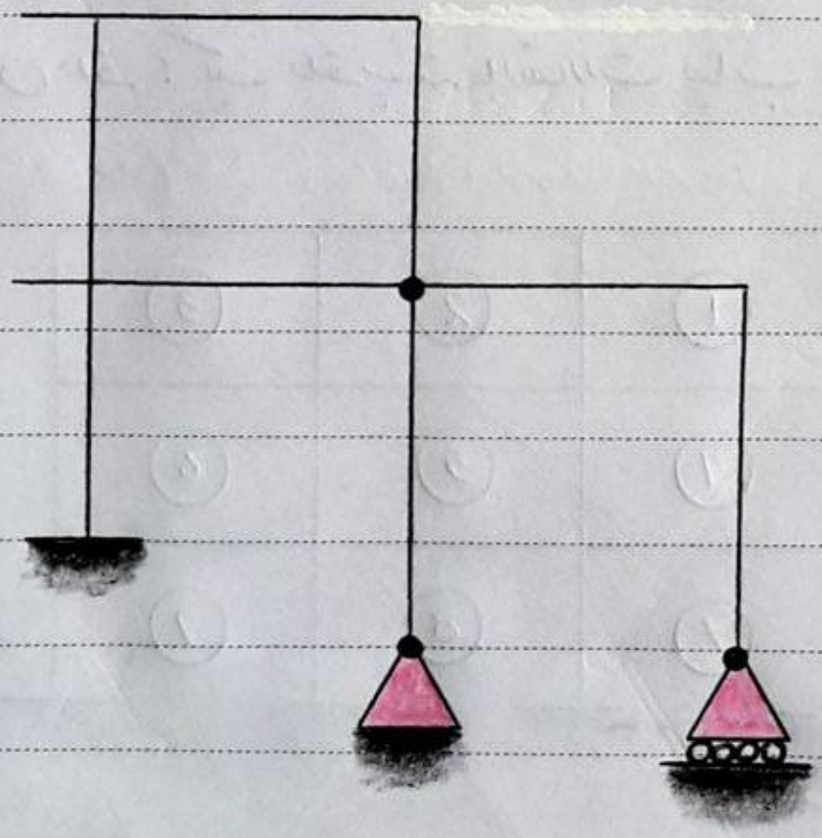
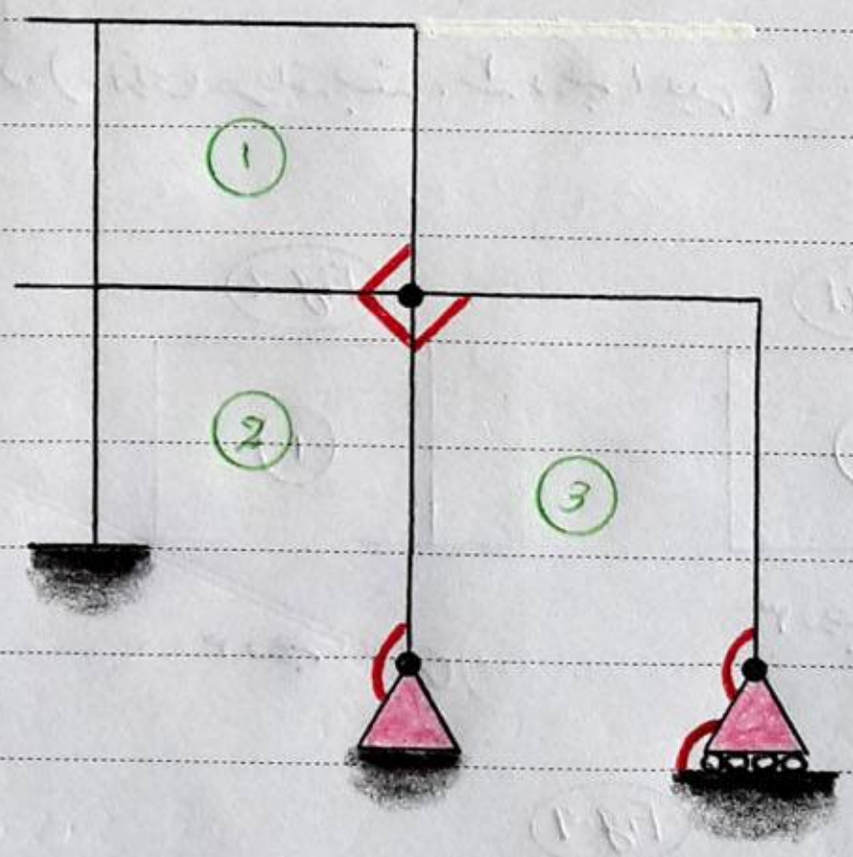


Fig.10



$3 \times 3 = 9$ $9 - 6 = 3$
اتصالات صلب

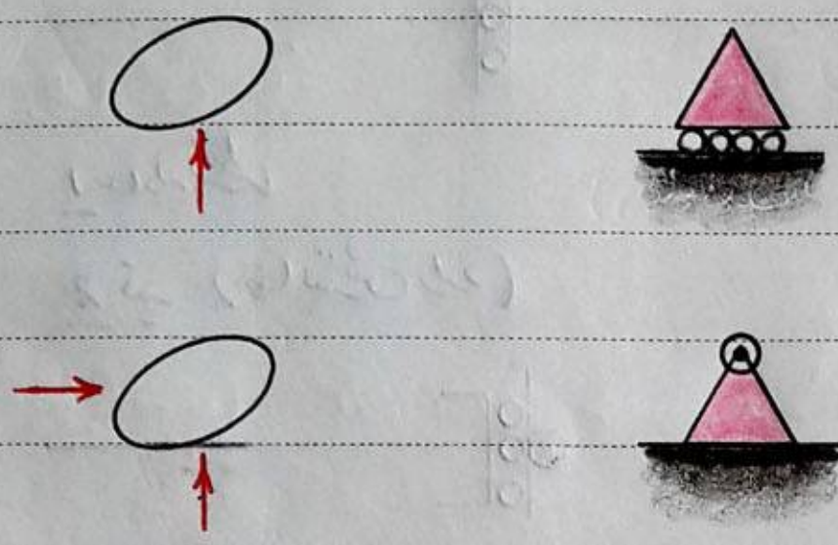
دلیل بار روش درختی نیز تعداد برش درسازه ۳ می باشد که اگر مجموع اتصالات صلب را از آن کم کنیم باز هم به همین نتیجه می رسیم

PAPCO

ali_intel66@yahoo.com

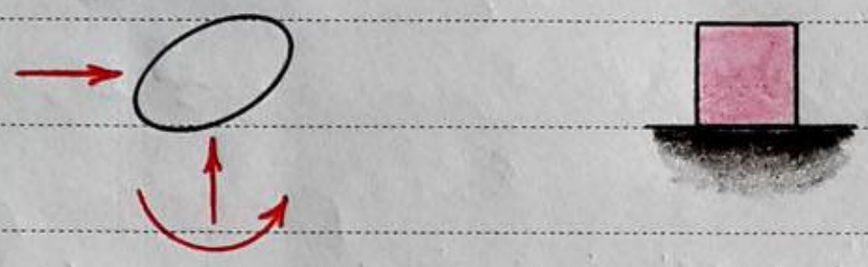
Subject :
Year . Month . Date . ( )

قیدها - تکیه گاه‌ها

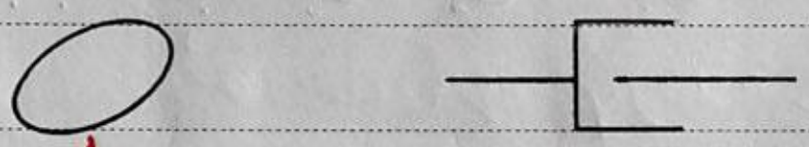


قید غلتک Roller

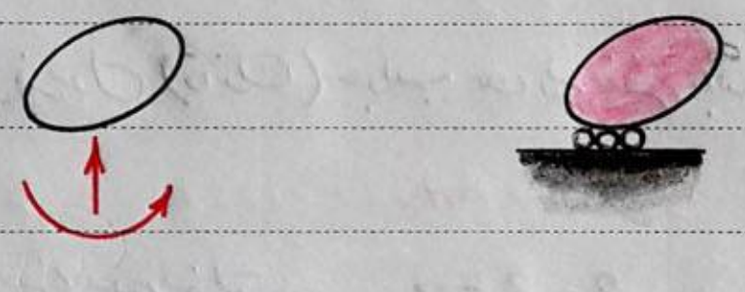
قید مفصلی Pin



قید صلب - قید کامل - قید گیردار fixed



قید کشویی - قید کفشک - قید تلسکوپی



قید برشی - قید لغزشی - تکیه گاه لغزنده گیردار

قید فنر

قید فنر پیچشی

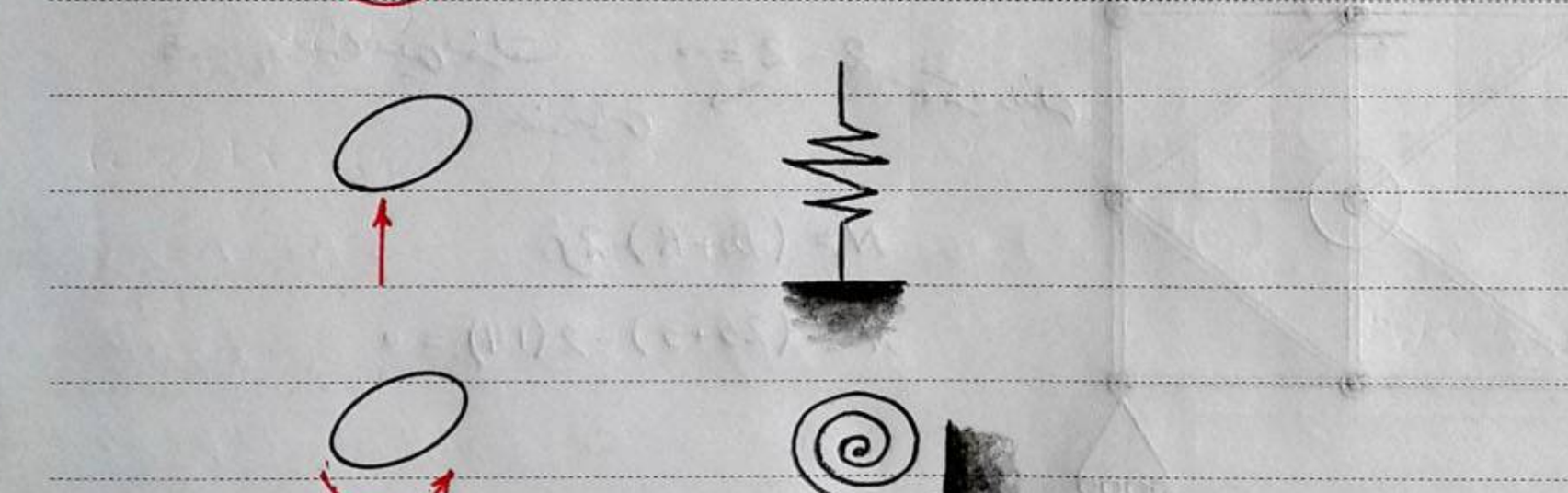


Fig.11

≡

هر تکه معادل باشد به شرط آنکه نقطه اتصال تعیین نامعین

درجه نامعینی $1 \times 3 = 3$

دو فنر ① و ② را می‌توان با فیلد معادل ساخت کرد و با یک فنر پیچشی که جلو گیری می‌کند از دوران

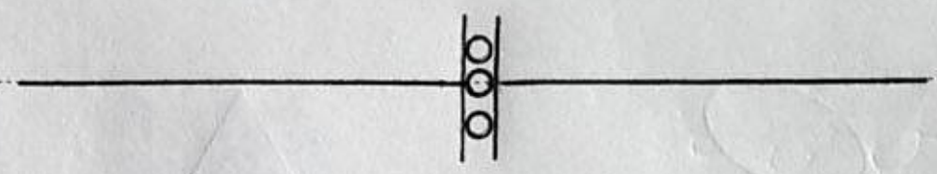
در نتیجه نقطه A تشکیل اتصال صلب را می‌دهد.

نقطه B ؛ مفصلی که دوران ندارد تشکیل اتصال صلب می‌دهد.

ali_intel66@yahoo.com

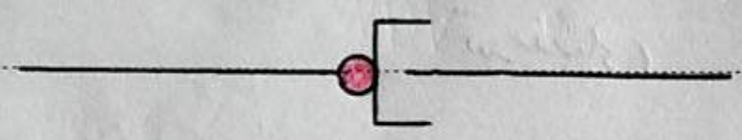
۱ معادله شرط

۲ قید (تنها لغزش دارد)



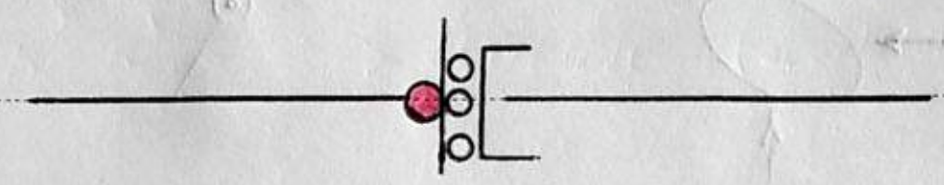
۱ معادله شرط

۲ قید (تنها لغزش دارد)



۲ معادله شرط

۱ قید



۳ معادله شرط

۵ قید

فرمول محاسبه جهت درجات معینی و نامعینی فقط برای خرپا

$N = (B+R) - 2j$

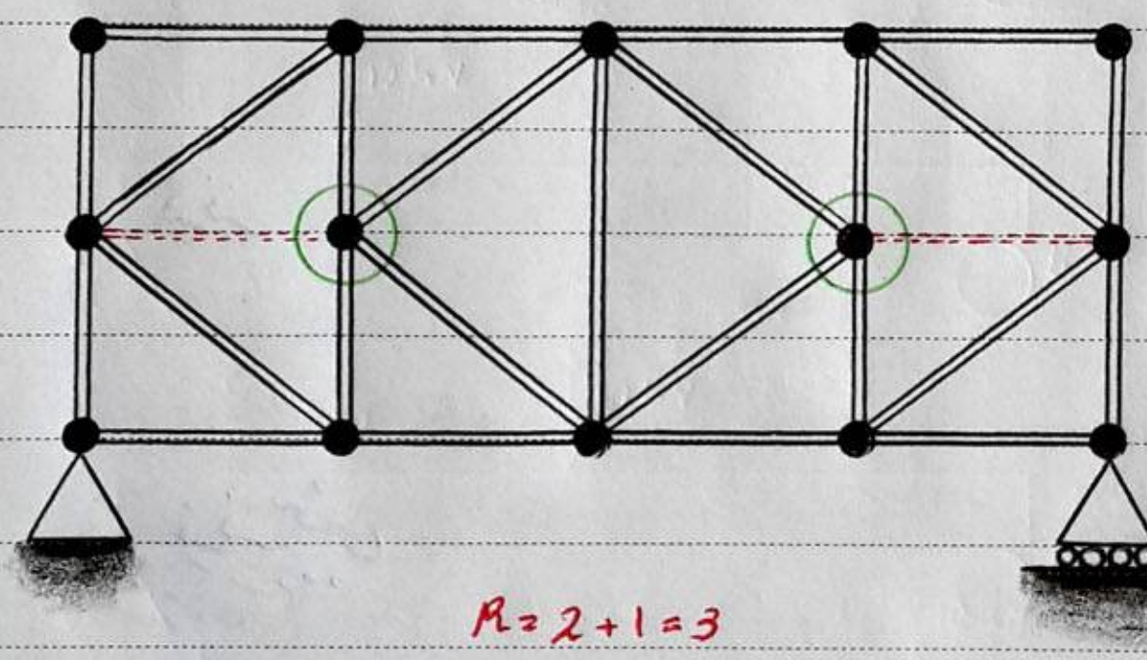
N : درجه نامعینی سازه

R : واکنش تکیه گاهی

B : تعداد اعضاء

j : تعداد گره ها

اگر با تعدادی از فرمول (قانون) جواب معادله منفی باشد نشان می‌دهد که سازه نامعین است.



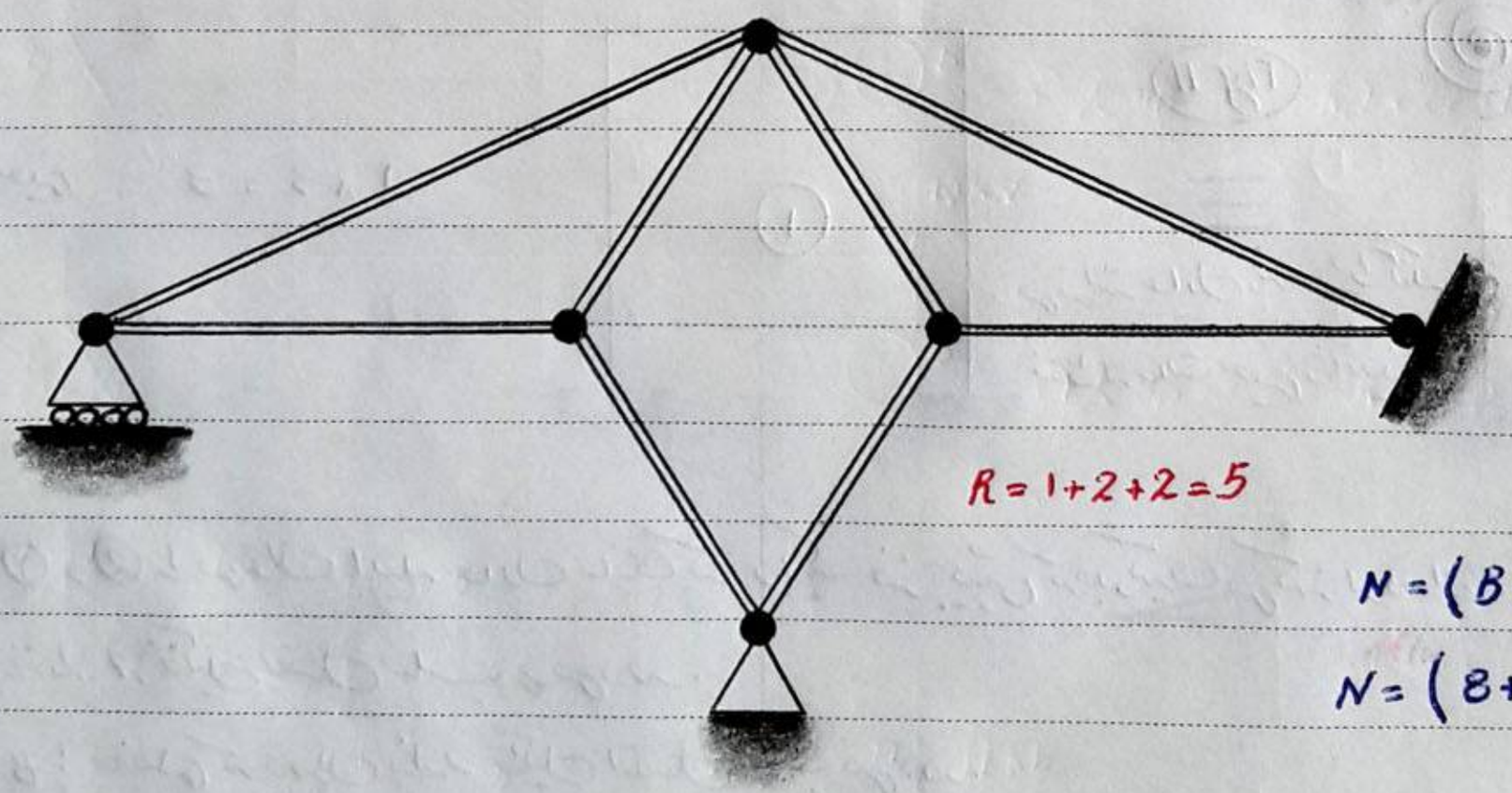
$R = 2+1 = 3$

درجه نامعینی سازه

گره داخلی $\leftarrow 2-2=0 \rightarrow$ عضو خارجی

$N = (B+R) - 2j$

$N = (25+3) - 2(14) = 0$



$R = 1+2+2 = 5$

$N = (B+R) - 2j$

$N = (8+5) - 2(6) = 1$

ali_intel66@yahoo.com

Subject :
Year . Month . Date . ( )

فرمول محاسبه نامعینی ویعنی برای تیرهای ۲ بعدی

$N = 3(B-j)+R-C$

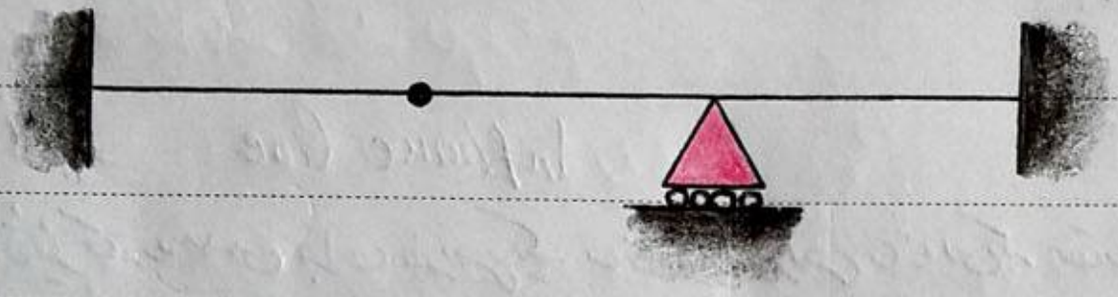
N : درجه نامعینی سازه

B : تعداد اعضاء

R : رکنش تکیه گاهی

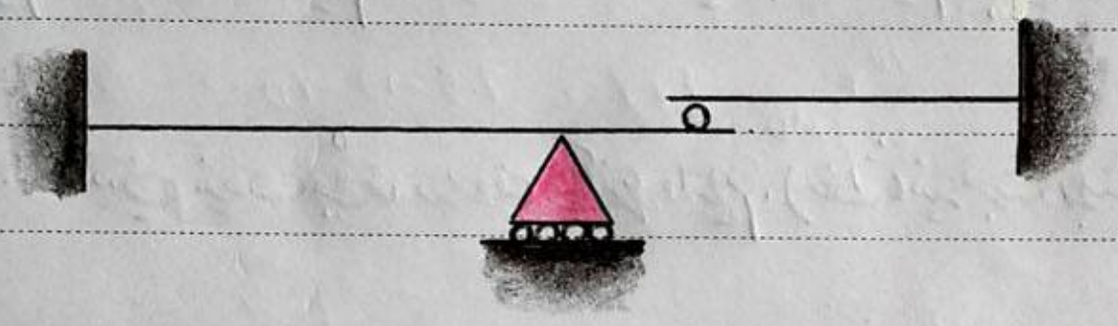
j : تعداد گره

C : تعداد معادلات شرطی



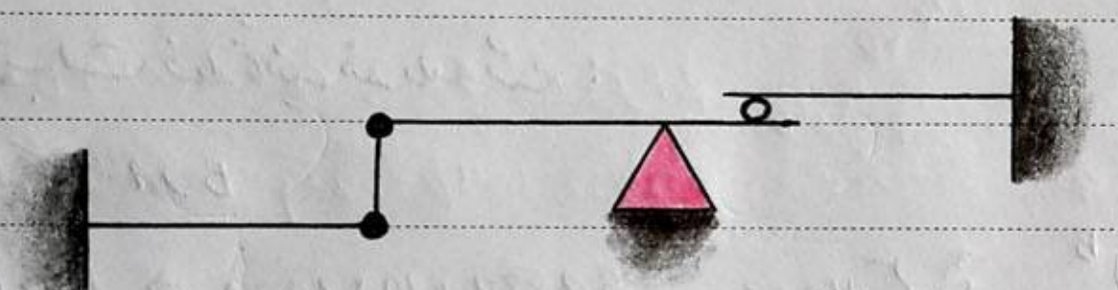
$N = 3(B-j)+R-C$

$N = 3(2-3)+7-1 = 3$ درجه نامعینی



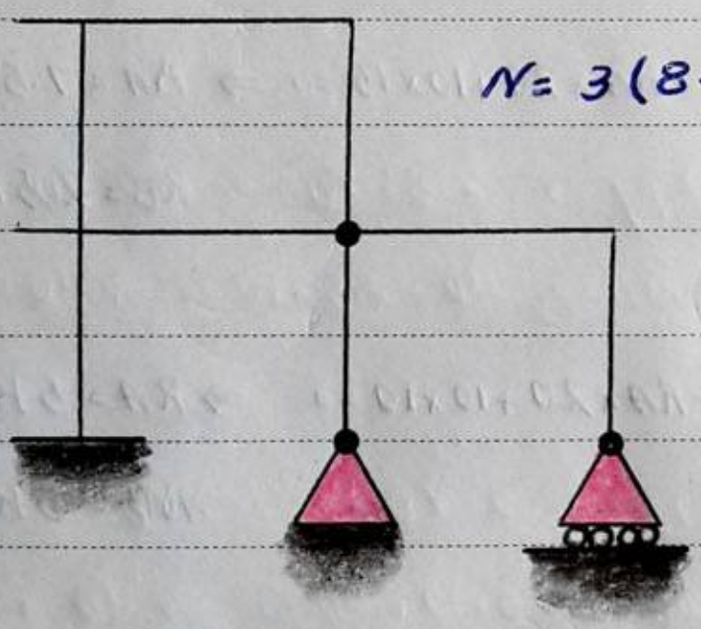
$N = 3(B-j)+R-C$

$N = 3(2-3)+7-2 = 2$ درجه نامعینی

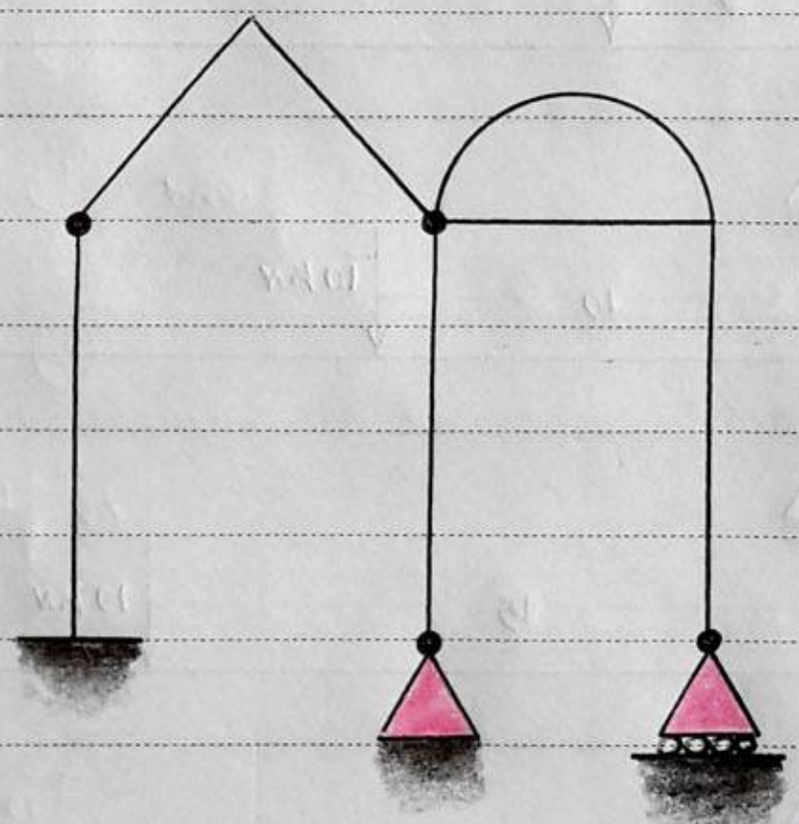


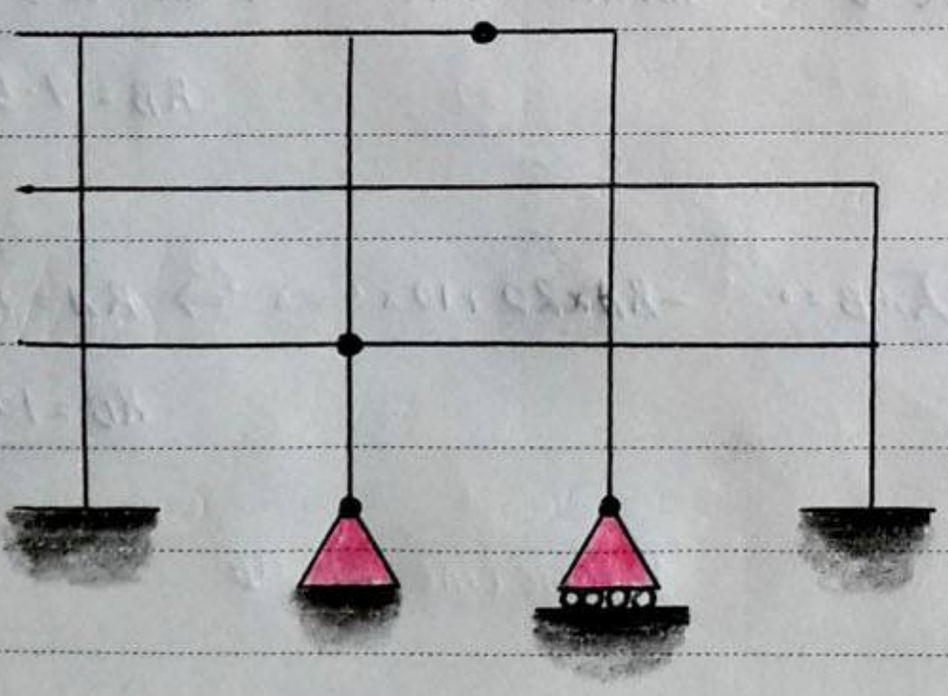
$N = 3(B-j)+R-C$

$N = 3(4-5)+8-4 = 1$ درجه نامعینی



$N = 3(8-8)+6-3 = 3$

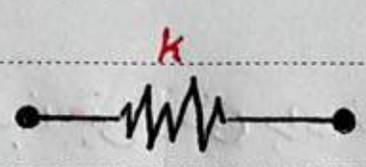




$N = 3(7-7)+6-4 = 2$

$N = 3(20-17)+9-4 = 14$

ali_intel66@yahoo.com



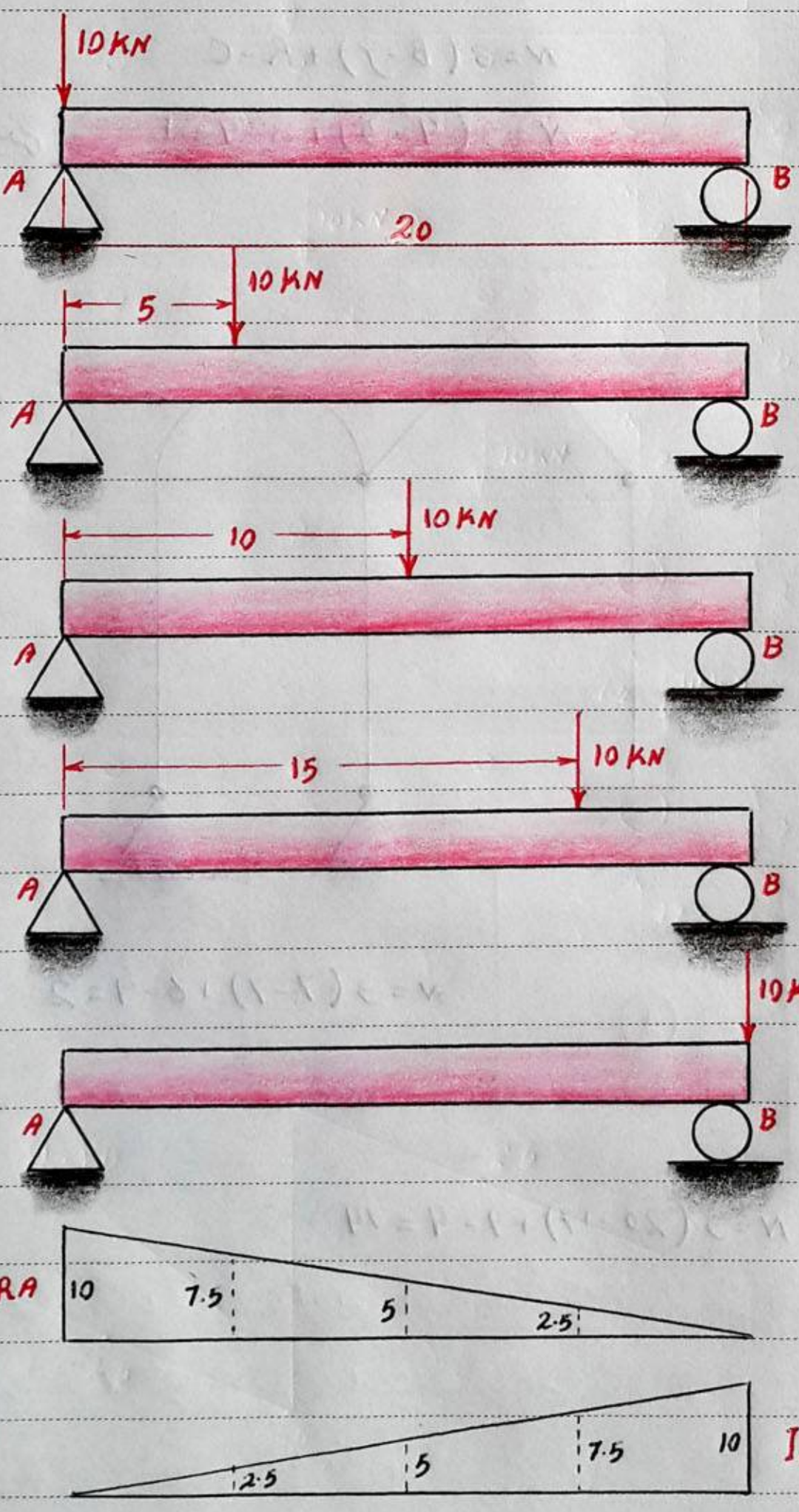
ماتریس سختی سازه

$$\Delta_i = \frac{F}{k}$$

$$\begin{vmatrix} k & -k \\ -k & k \end{vmatrix} = k^2 - k^2 = 0 \Rightarrow \text{unstable}$$ (ناپایدار است)

خط تاثیر Influnce line

خطوط تاثیر کاربرد مهمی برای طراحی یک سازه دارد طراحی سازه ای که مقاومت آن در برابر بارهای ثابت و متغیر بحرانی مناسب است. در این بخش می خواهیم در مورد نحوه ترسیم خط تاثیر یک سازه معین بحث کنیم همچنین نظریه ای درباره تعیین نیروی مینیمم، نیروی متمرکز متحرک در سازه، تیرها و پلها و ... و تعیین نیروی برشی در اعضای کنترل داریم. (خط تاثیر جهت پیدا کردن اثر داخلی نیروها به علت عبور بار متحرک در سازه)



- مطلوب است خط تاثیر تیر داده شده :

در تکیه گاه A و B

$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 \quad -RA \times 20 + 10 \times 20 = 0 \Rightarrow RA = 10\,KN$

$RB = 0$

$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 \quad -RA \times 20 + 10 \times 15 = 0 \Rightarrow RA = 7.5\,KN$

$RB = 2.5\,KN$

$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 \quad -RA \times 20 + 10 \times 10 = 0 \Rightarrow RA = 5\,KN$

$RB = 5\,KN$

$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 \quad -RA \times 20 + 10 \times 5 = 0 \Rightarrow RA = 2.5\,KN$

$RB = 7.5\,KN$

$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 \quad -RA \times 20 + 10 \times 0 = 0 \Rightarrow RA = 0$

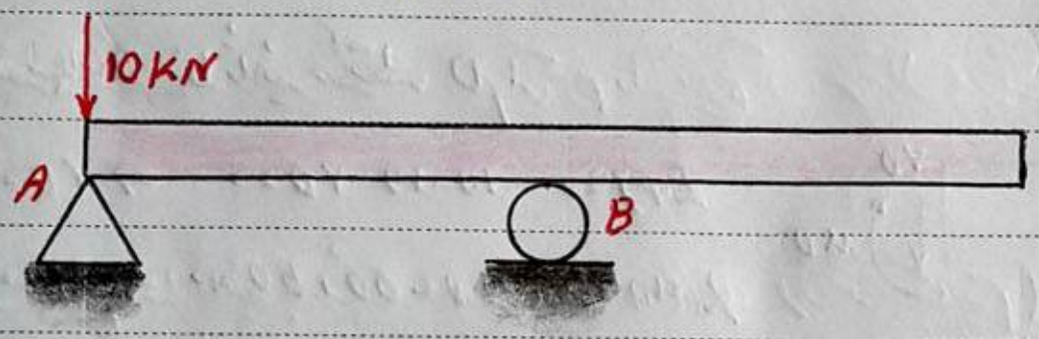
$RB = 10\,KN$

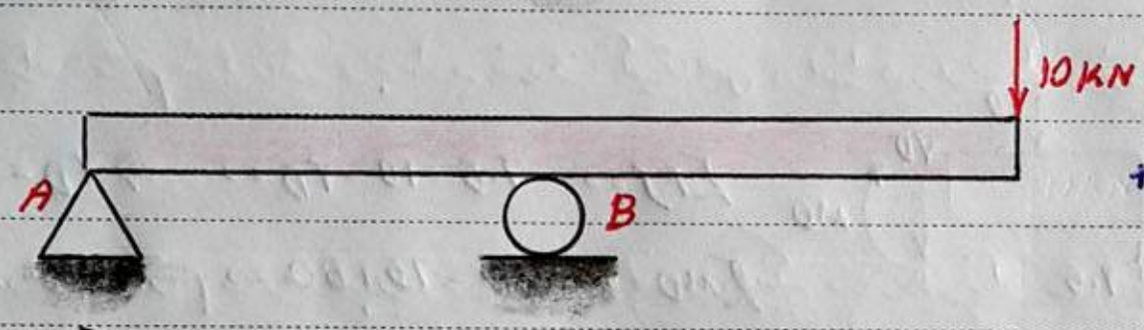
ali_intel66@yahoo.com

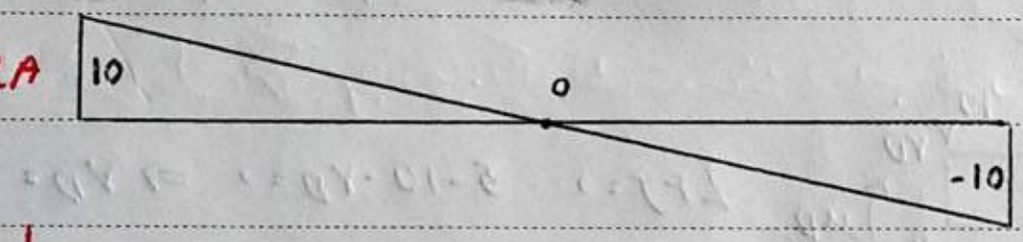
Subject :
Year . Month . Date . ( )

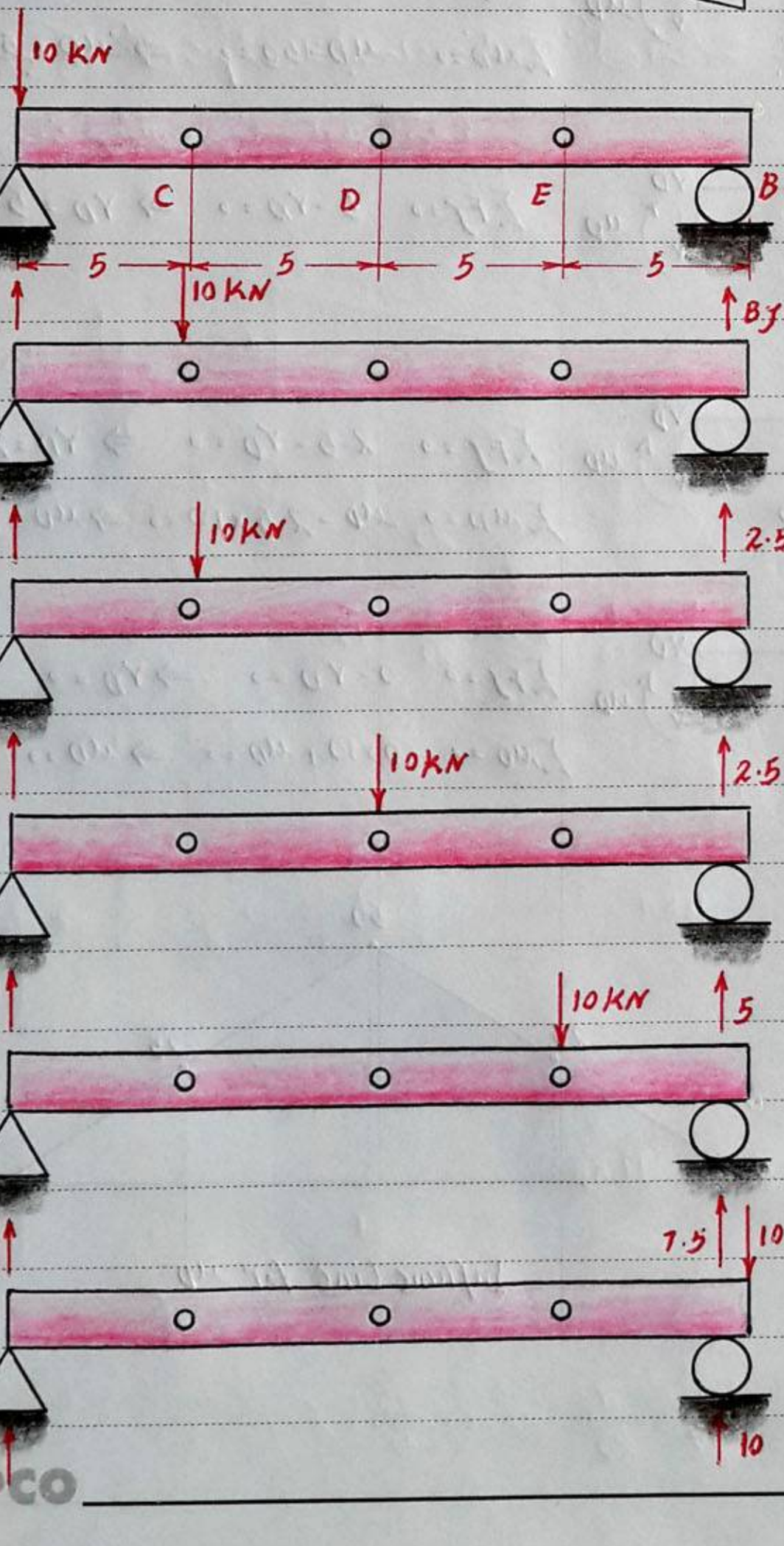
در خصوص سازه های معین به دست آوردن اثر نیروهای داخلی شامل : عکس العمل های تکیه گاهی ، نیروی برشی ، لنگر خمشی و نیروی محوری معادله خط می باشند بنابراین به آن خط تاثیر گفته می شود در حالیکه در خصوص سازه های نامعین است تیکر این معادلات دیگر بصورت خط نمی باشند و معادله منحنی می باشند که به آن منحنی تاثیر گفته می شود.

RA = 10

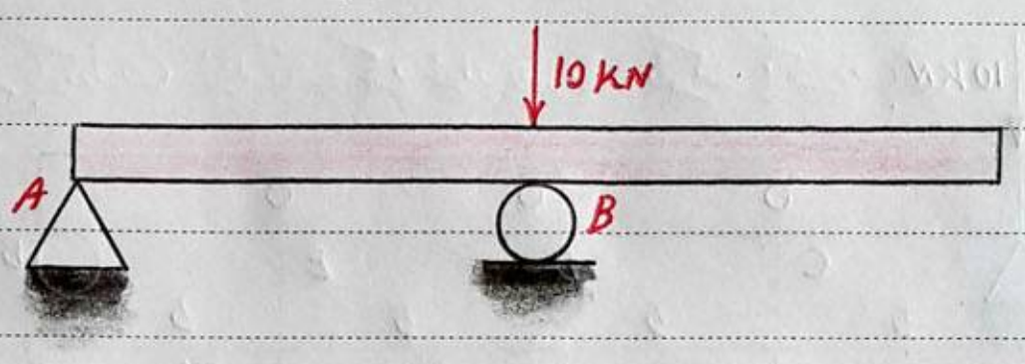






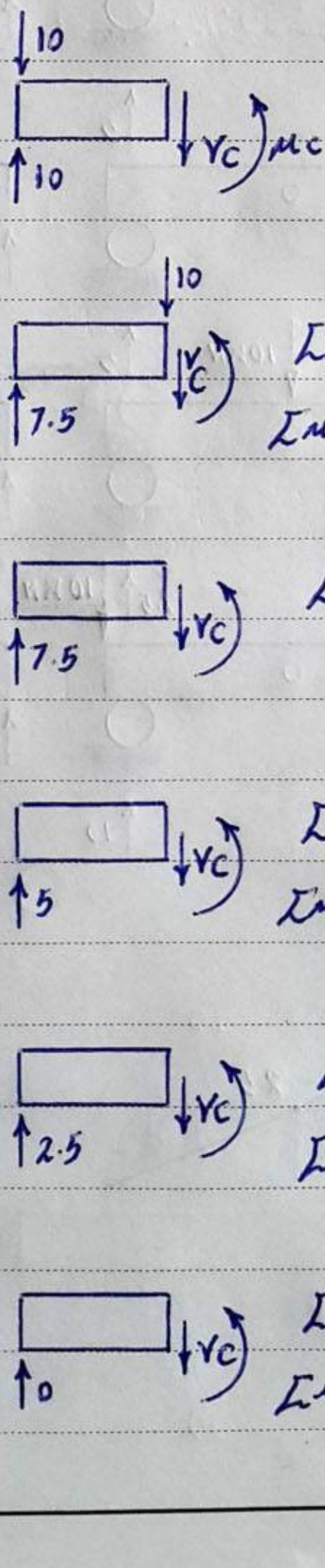


RA = 0



$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 \quad -RA \times 10 - 10 \times 10 = 0 \Rightarrow RA = -10$

- مطلوب است خط تاثیر در نقط C :



$\sum F_J = 0 \quad 10 - 10 - V_C = 0 \Rightarrow V_C = 0$

$\sum M_C = 0 \quad M_C - 50 \times 50 = 0 \Rightarrow M_C = 0$

$\sum F_J = 0 \quad 7.5 - 10 - V_C = 0 \Rightarrow V_C = -2.5$

$\sum M_C = 0 \quad M_C - 7.5 \times 5 = 0 \Rightarrow M_C = 37.5$

$\sum F_J = 0 \quad 7.5 - V_C = 0 \Rightarrow V_C = 7.5$

$\sum F_J = 0 \quad 5 - V_C = 0 \Rightarrow V_C = 5$

$\sum M_C = 0 \quad M_C - 5 \times 5 = 0 \Rightarrow M_C = 25$

$\sum F_J = 0 \quad 2.5 - V_C = 0 \Rightarrow V_C = 2.5$

$\sum M_C = 0 \quad M_C - 2.5 \times 5 = 0 \Rightarrow M_C = 12.5$

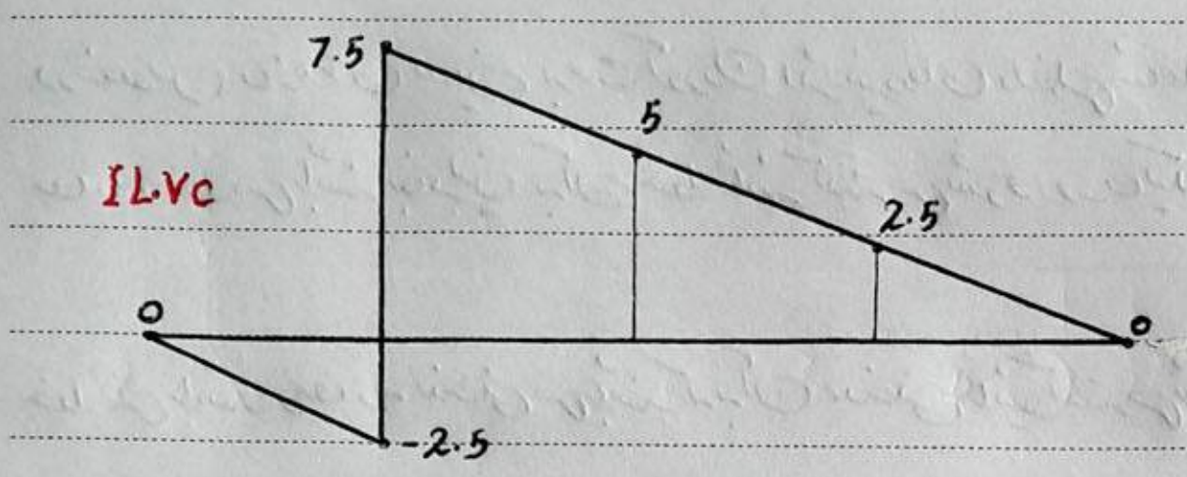
$\sum F_J = 0 \quad 0 - V_C = 0 \Rightarrow V_C = 0$

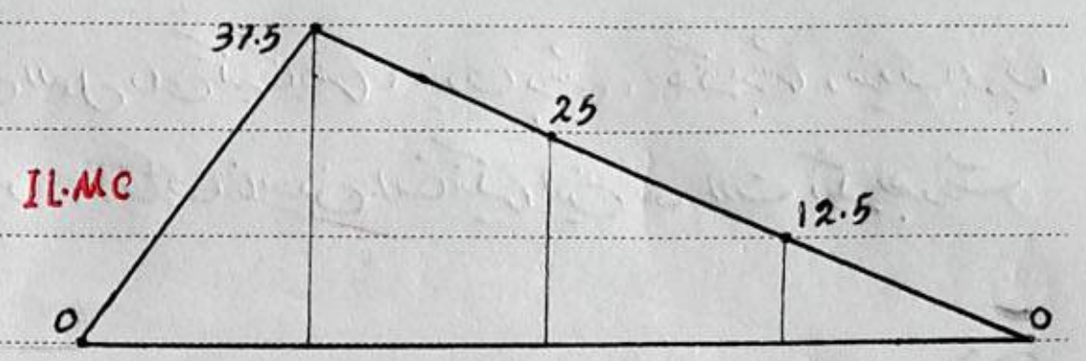
$\sum M_C = 0 \quad M_C - 0 \times 5 = 0 \Rightarrow M_C = 0$

PAPCO
ali_intel66@yahoo.com

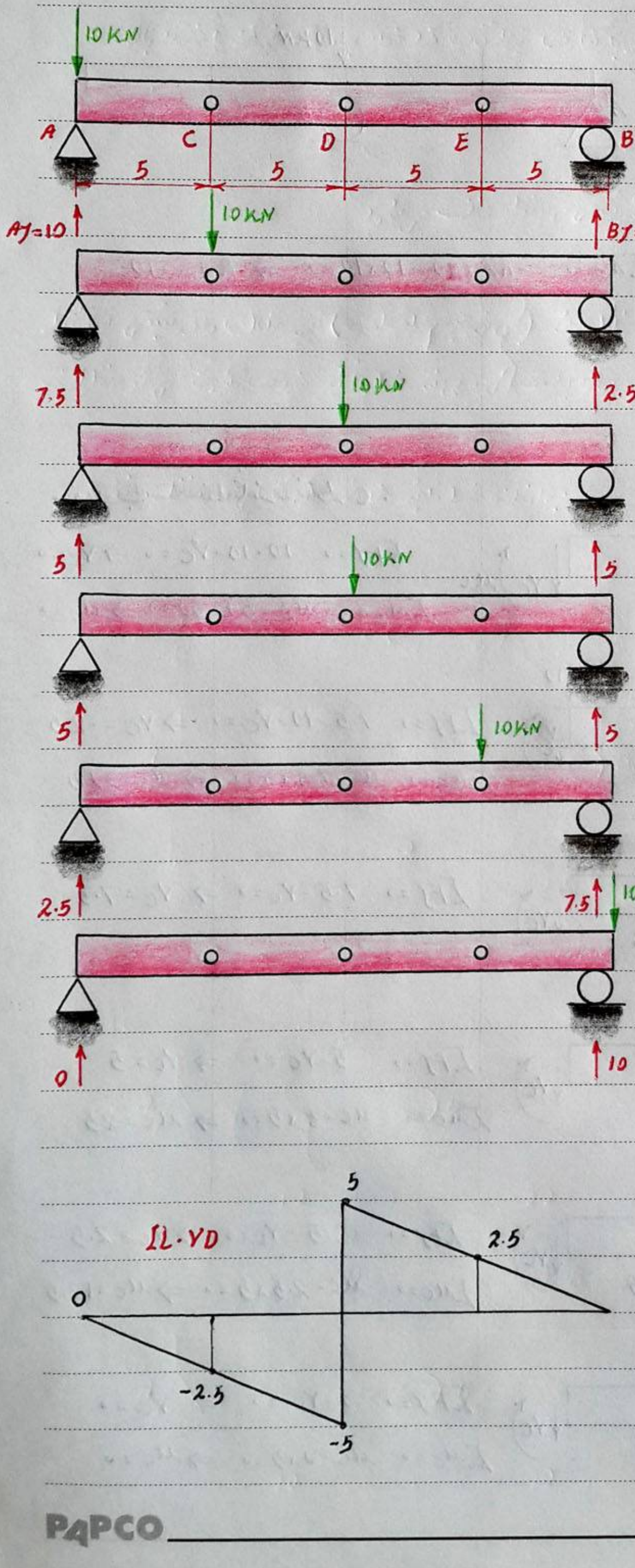
Subject:

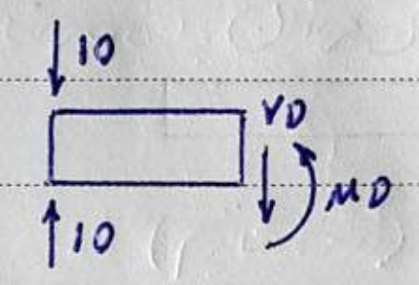
Year. Month. Date. ( )





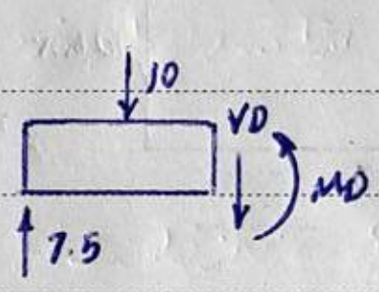
- مطلوب است خط تاثیر در نقطه D :





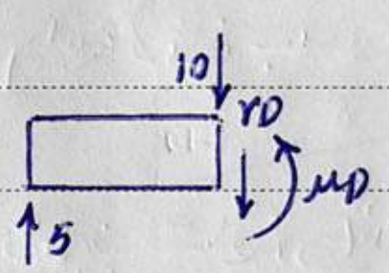
$\sum F_J = 0 \quad 10 - V_D - V_D = 0 \Rightarrow V_D = 0$

$\sum M_D = 0 \quad M_D - 10 + 10 = 0 \Rightarrow M_D = 0$



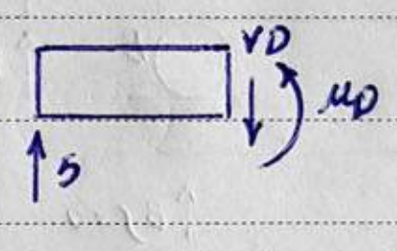
$\sum F_J = 0 \quad 7.5 - 10 - V_D = 0 \Rightarrow V_D = -2.5$

$\sum M_D = 0 \quad M_D - 75 + 50 = 0 \Rightarrow M_D = 25$

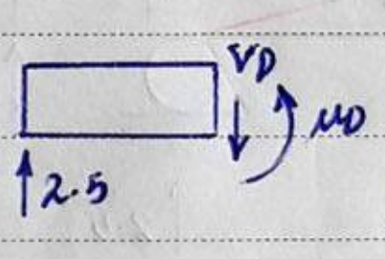


$\sum F_J = 0 \quad 5 - 10 - V_D = 0 \Rightarrow V_D = -5$

$\sum M_D = 0 \quad M_D - 50 = 0 \Rightarrow M_D = 50$

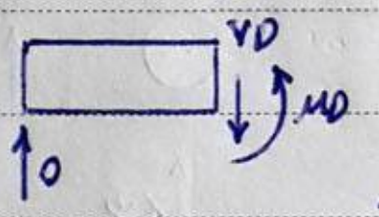


$\sum F_J = 0 \quad 5 - V_D = 0 \Rightarrow V_D = 5$



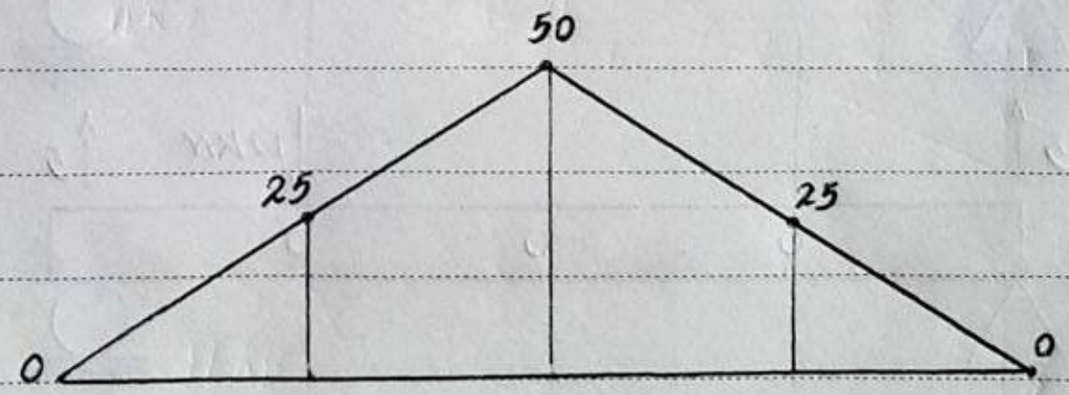
$\sum F_J = 0 \quad 2.5 - V_D = 0 \Rightarrow V_D = 2.5$

$\sum M_D = 0 \quad M_D - 2.5 \times 10 = 0 \Rightarrow M_D = 25$



$\sum F_J = 0 \quad 0 - V_D = 0 \Rightarrow V_D = 0$

$\sum M_D = 0 \quad 0 \times 10 + M_D = 0 \Rightarrow M_D = 0$



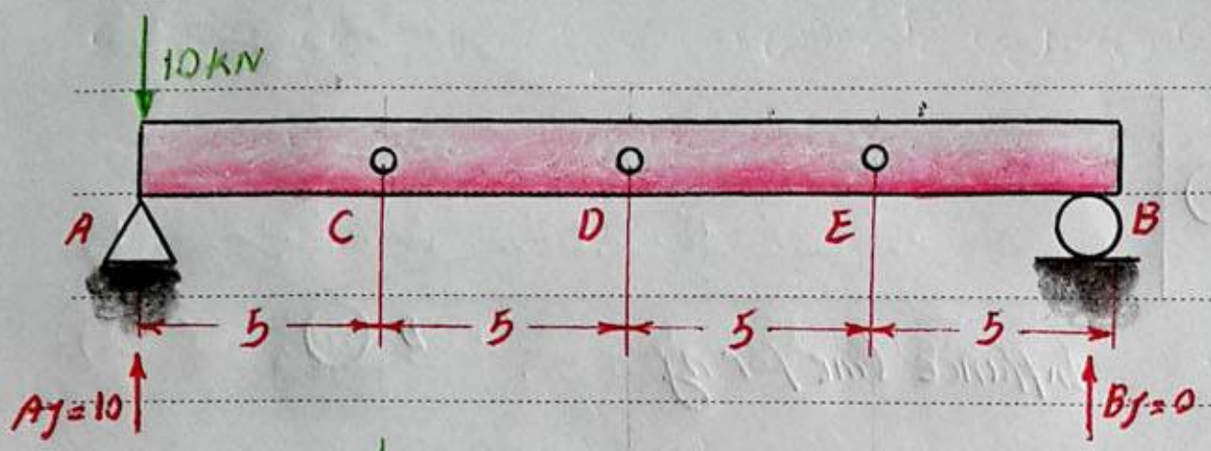
Influne Line for MD

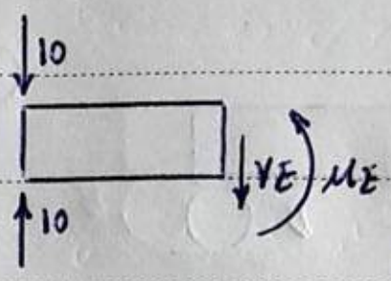
PAPCO

ali_intel66@yahoo.com

Subject:
Year. Month. Date. ( )

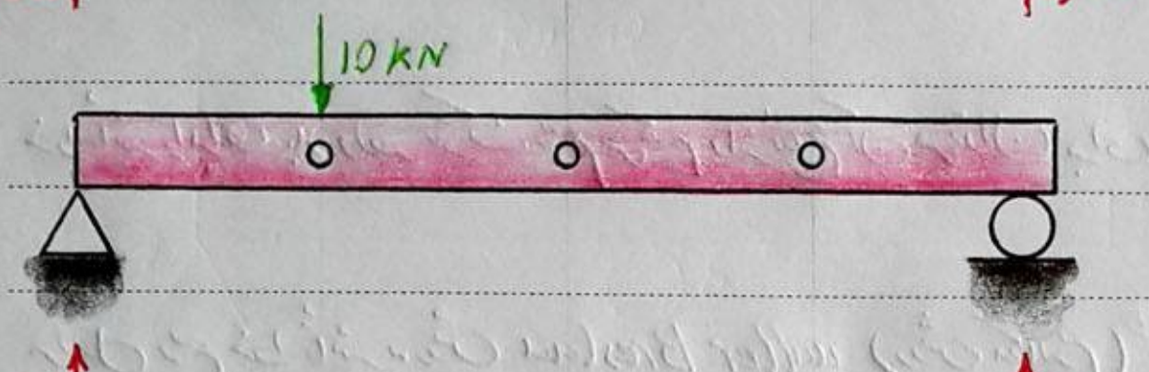
- مطلوبست خط تأثیر در نقطه E :

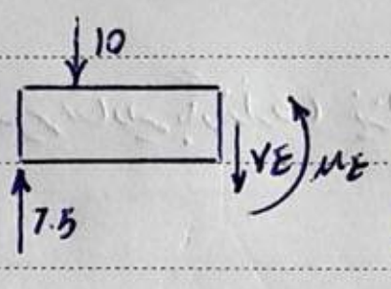




$\sum F_y = 0 \quad 10 + 10 - V_E = 0 \Rightarrow V_E = 0$

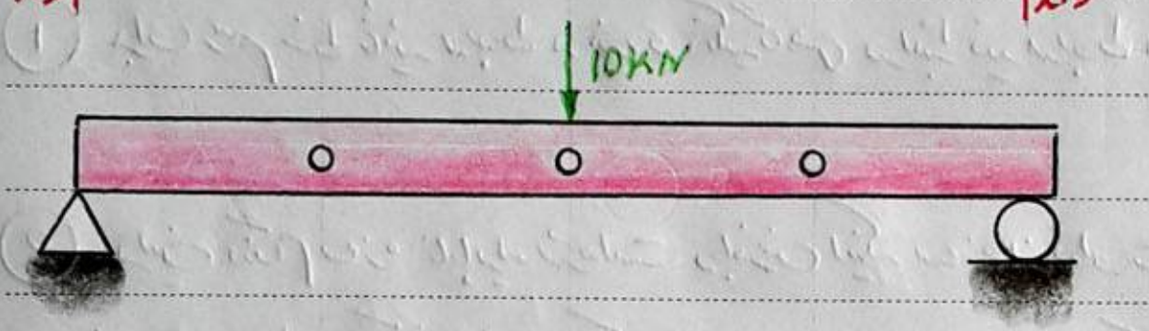
$\sum M_E = 0 \quad M_E - 150 + 150 = 0 \Rightarrow M_E = 0$

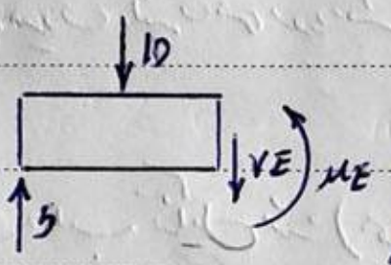




$\sum F_y = 0 \quad 7.5 - 10 - V_E = 0 \Rightarrow V_E = -2.5$

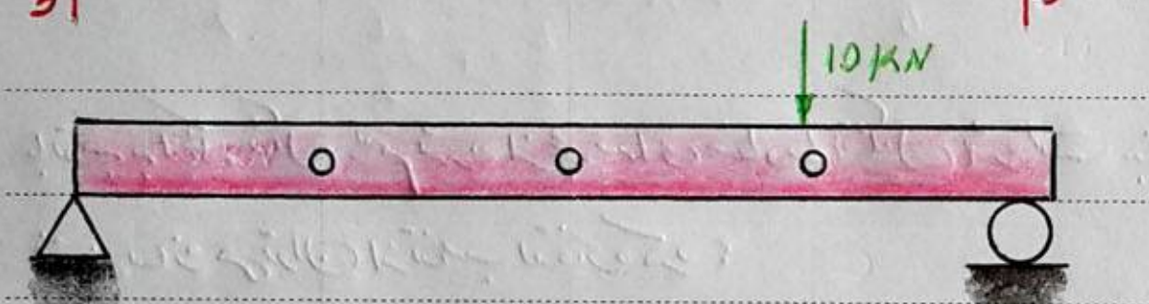
$\sum M_E = 0 \quad M_E - 112.5 + 100 = 0 \Rightarrow M_E = 12.5$

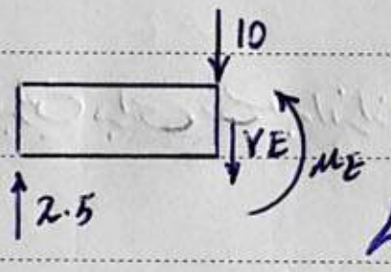




$\sum F_y = 0 \quad 5 - 10 - V_E = 0 \Rightarrow V_E = -5$

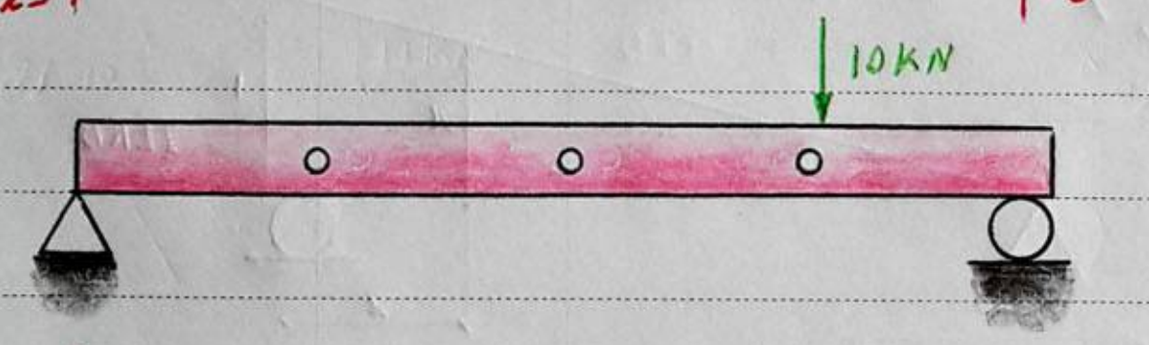
$\sum M_E = 0 \quad M_E - 75 + 50 = 0 \Rightarrow M_E = 25$

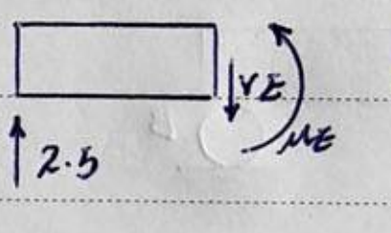




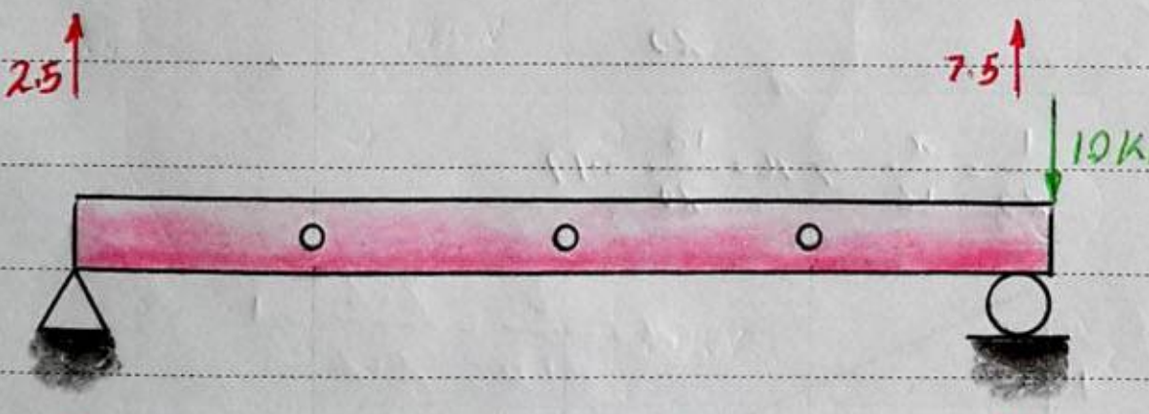
$\sum F_y = 0 \quad 2.5 - 10 - V_E = 0 \Rightarrow V_E = -7.5$

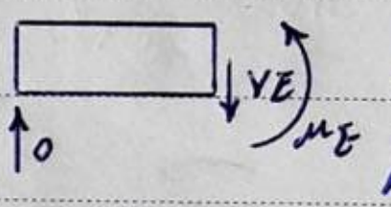
$\sum M_E = 0 \quad M_E - 2.5 \times 15 = 0 \Rightarrow M_E = 37.5$





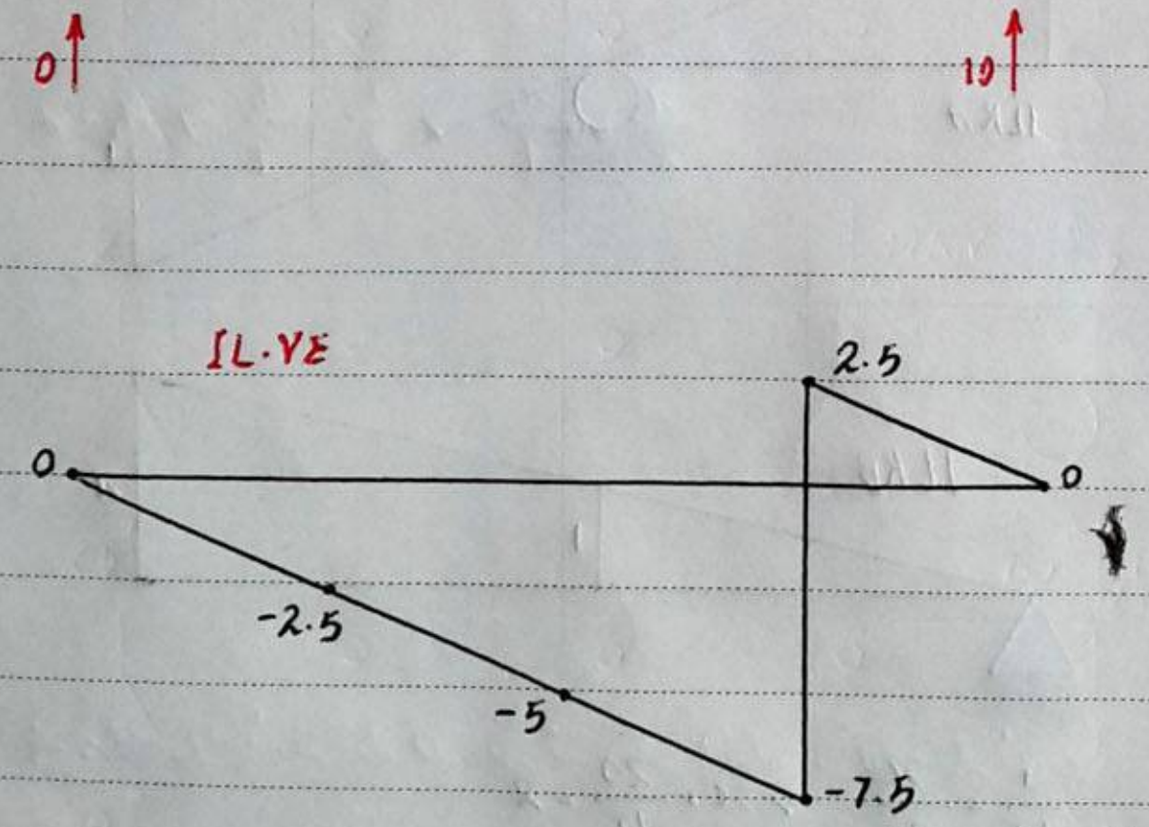
$\sum F_y = 0 \quad 2.5 - V_E = 0 \Rightarrow V_E = 2.5$

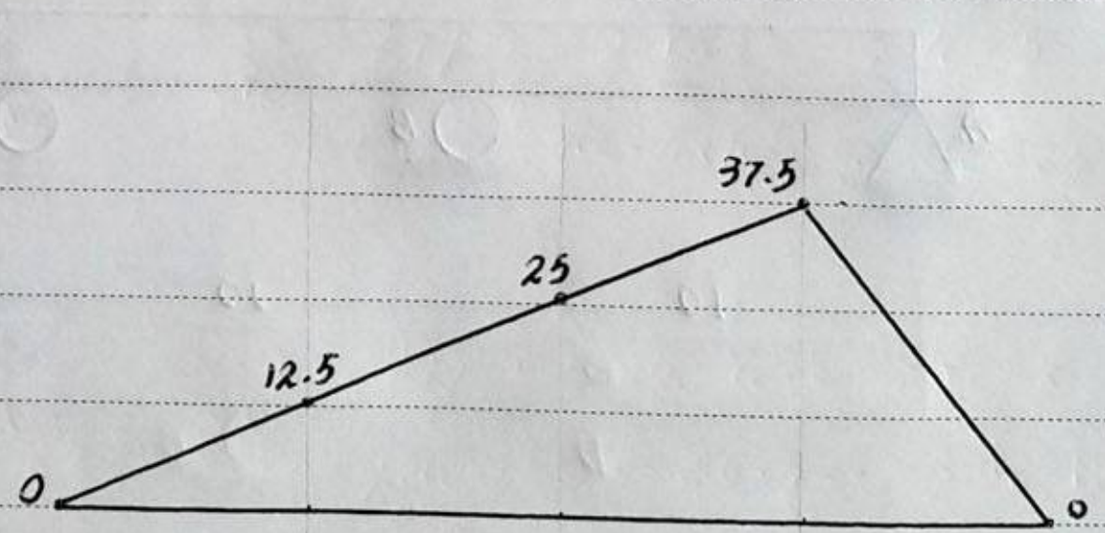




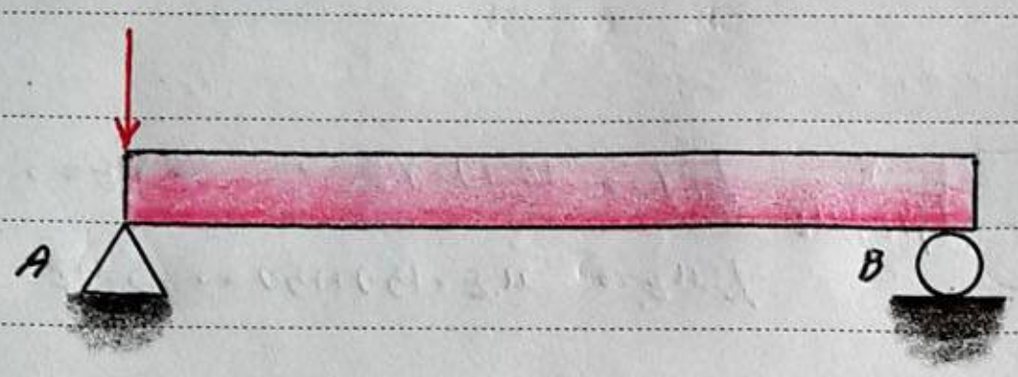
$\sum F_y = 0 \quad 0 - V_E = 0 \Rightarrow V_E = 0$

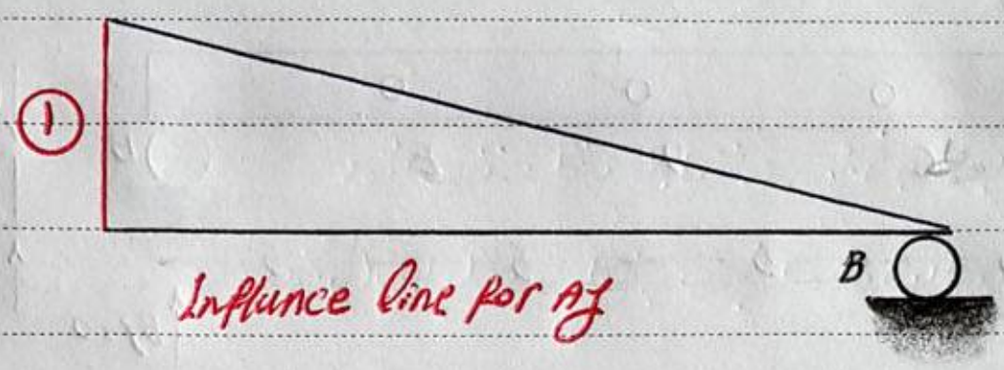
$\sum M_E = 0 \quad M_E - 0 \times 20 = 0 \Rightarrow M_E = 0$





ali_intel66@yahoo.com





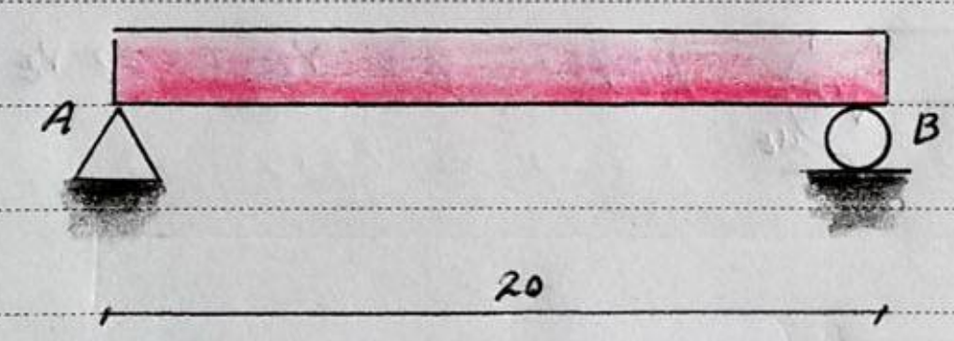
خط تاثیر را برای بار واحد متحرک رسم می‌کنیم و از نتایج آن می‌توان برای سایر مقادیر بارگذاری خیز لتفای کرد خواه بصورت متمرکز یا گسترده باشد

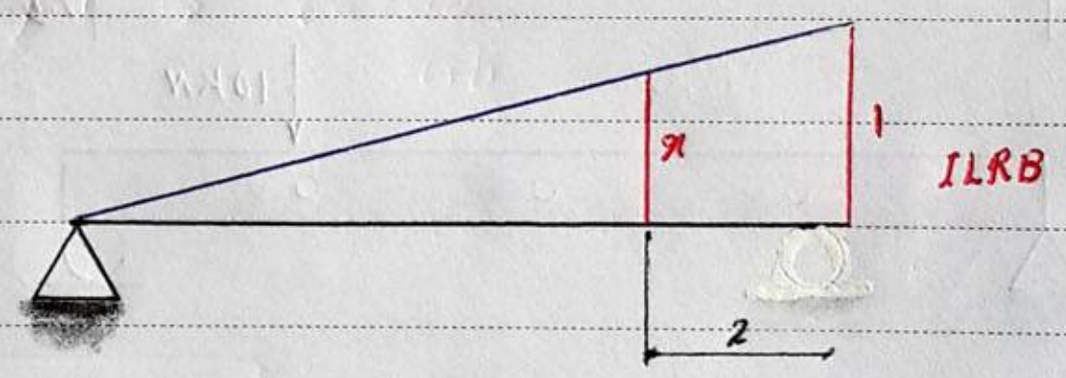
مراحل رسم خط تاثیر به روش Muller Breslau (روش مکانیزم)

(1) برای رسم خط تاثیر مربوط به نیروی تکیه‌گاهی در ابتدا قید مربوط به نیروی تکیه‌گاهی مورد نظر حذف می‌شود

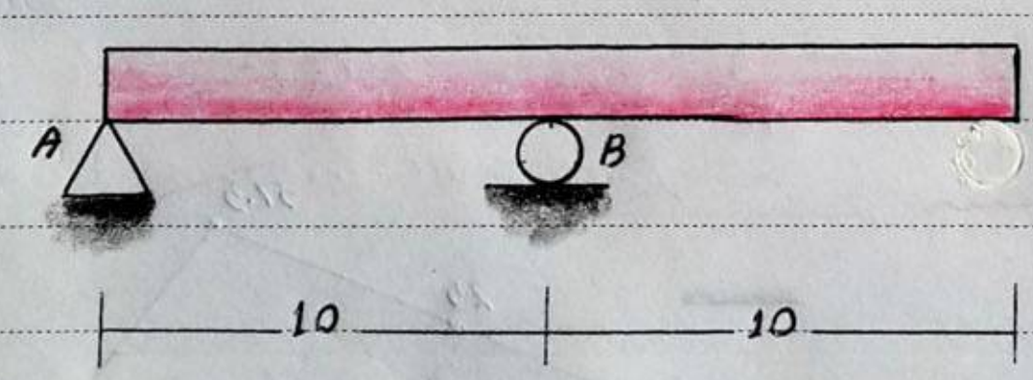
(2) در این هنگام سازه ناپایدار شده است و با فرض اینکه سازه از قطعات صلب تشکیل شده (می‌شد جسم صلبیت) تغییر مکان واحد بسته‌ای به نقطه قید حذف شده اعمال می‌کنیم با توجه به اینکه قطعات سازه را صلب فرض کرده‌ایم شکل سازه بدست آمده همان خط تاثیر نیروی تکیه‌گاهی مورد نظر است

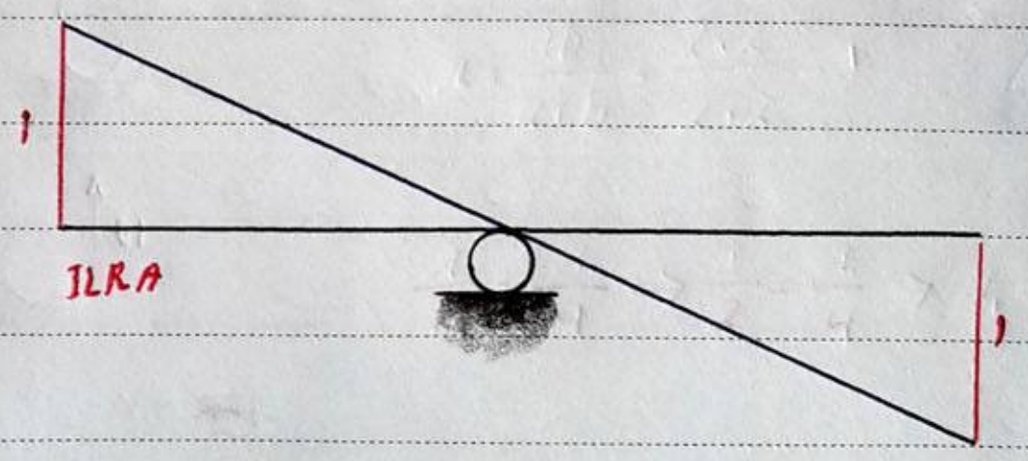
با توجه به اینکه شکل رسم شده از مجموعه‌ای خطوط تشکیل شده است بنابراین برای محاسبه اندازه خط تاثیر نیروی تکیه‌گاهی مورد نظر در نقطه مختلف سازه می‌توان از تناسب لتفای کرد؛

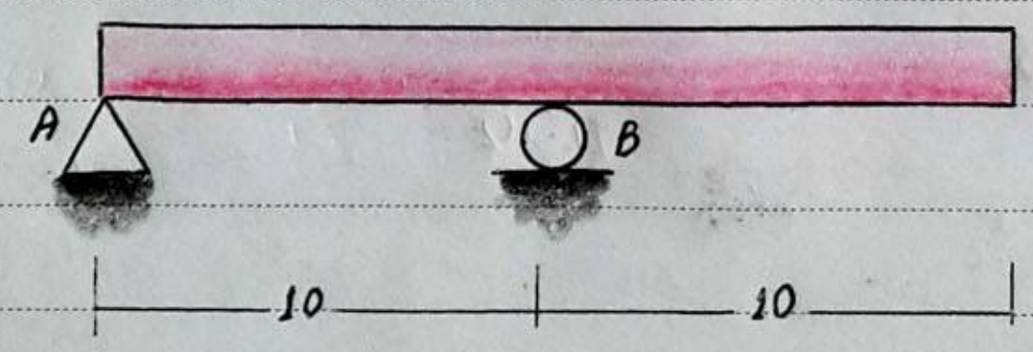


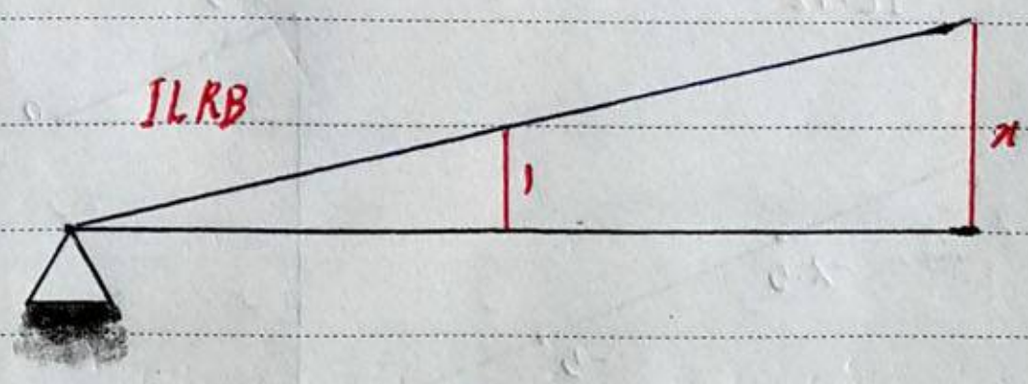


$$\frac{1}{20} = \frac{x}{18} \Rightarrow x = \frac{18}{20} = 1.9$$





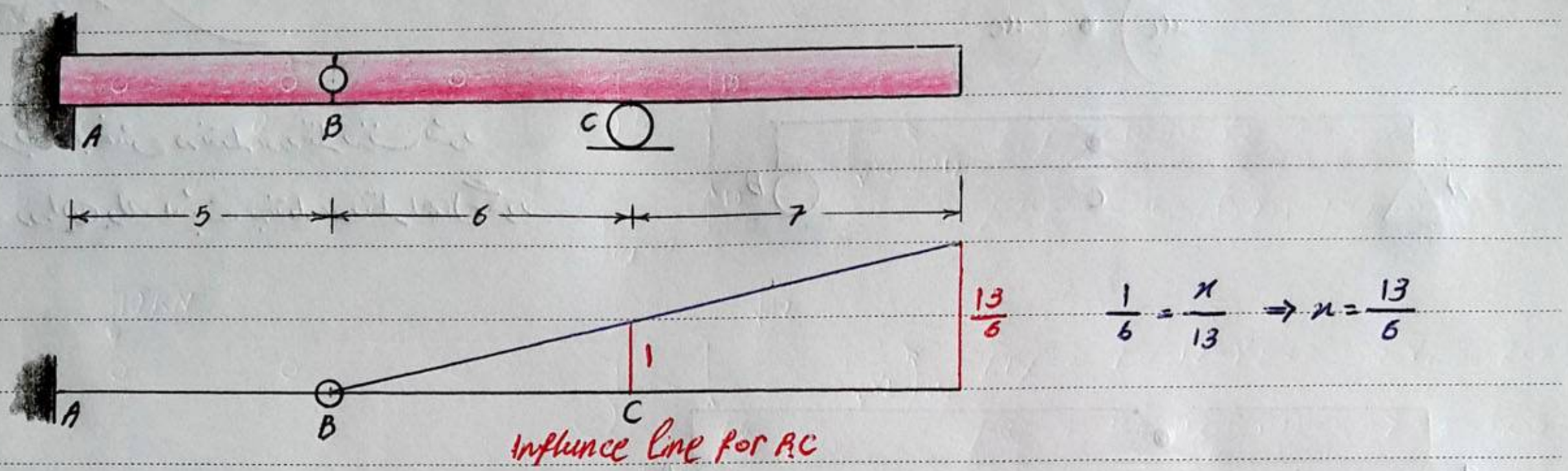




$$\frac{1}{10} = \frac{x}{20} \Rightarrow x = \frac{20}{10} = 2$$

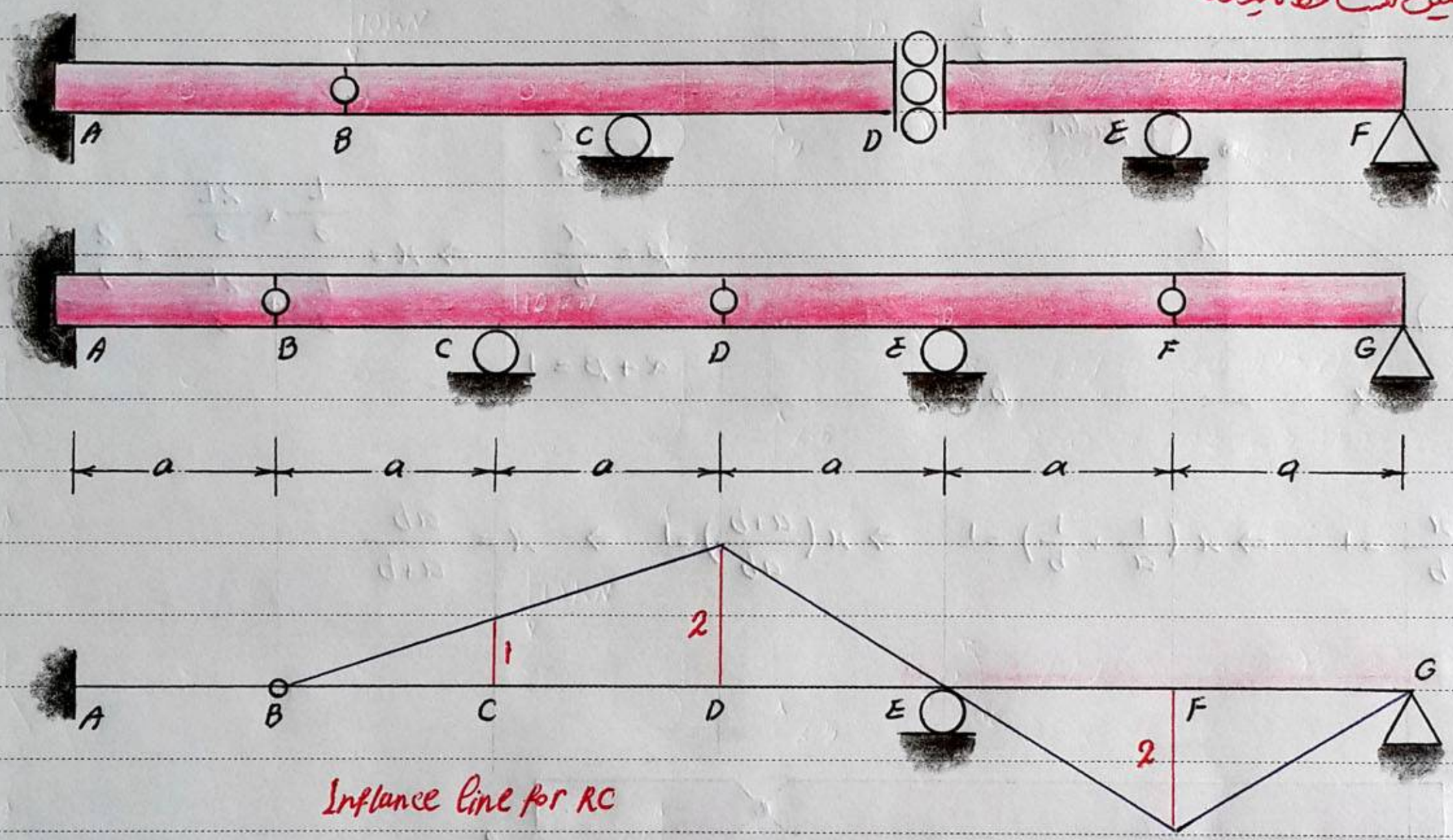
ali_intel66@yahoo.com

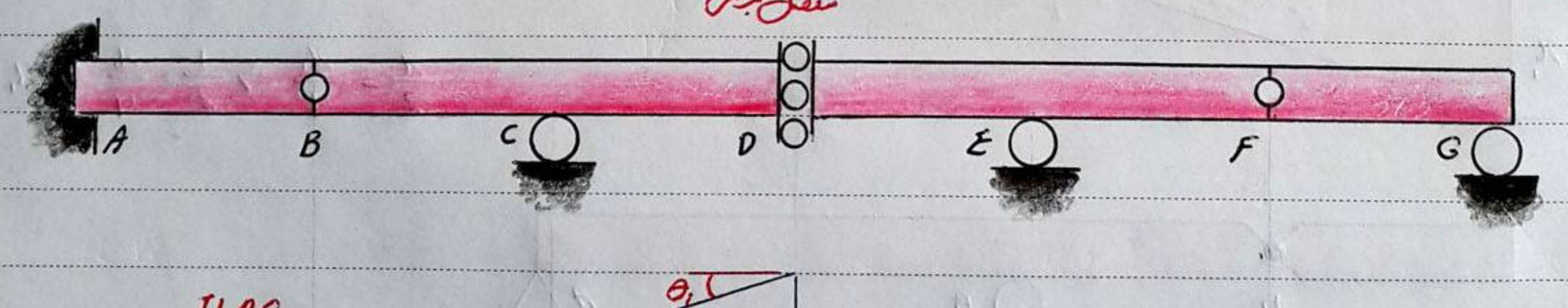
Subject :
Year . Month . Date . ( )



$\frac{1}{6} = \frac{x}{13} \Rightarrow x = \frac{13}{6}$

چون نامعین است خط تأثیر دارد



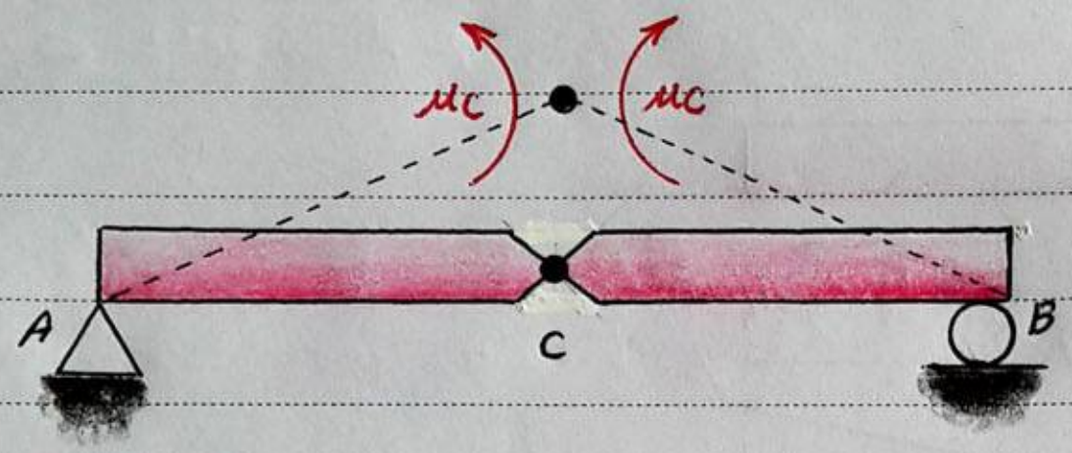


مفصل برشی

$\theta_1 = \theta_2$ شیب مماس در طرف مفصل برشی تیر یکی است

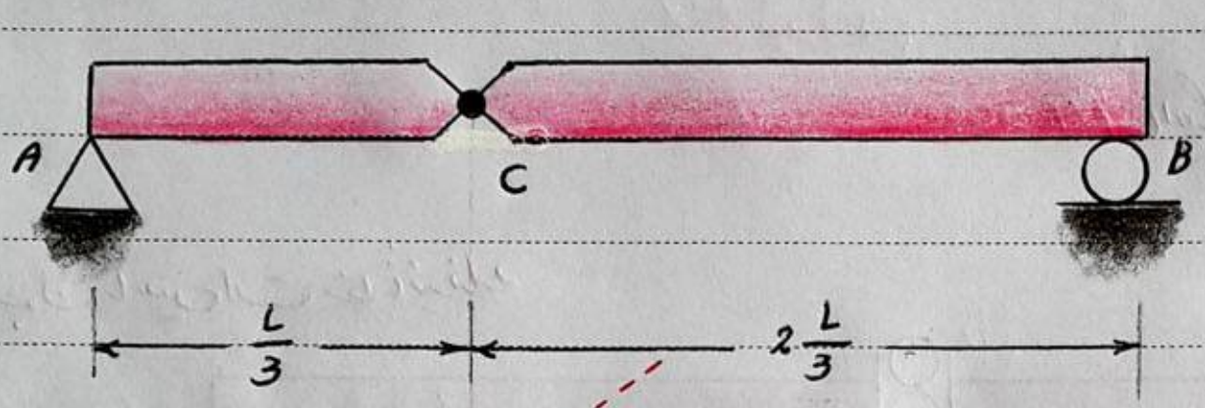
ali_intel66@yahoo.com

خط تاثیر لنگر خمشی



① قید مربوط به خمش در نقطه مورد نظر حذف شود

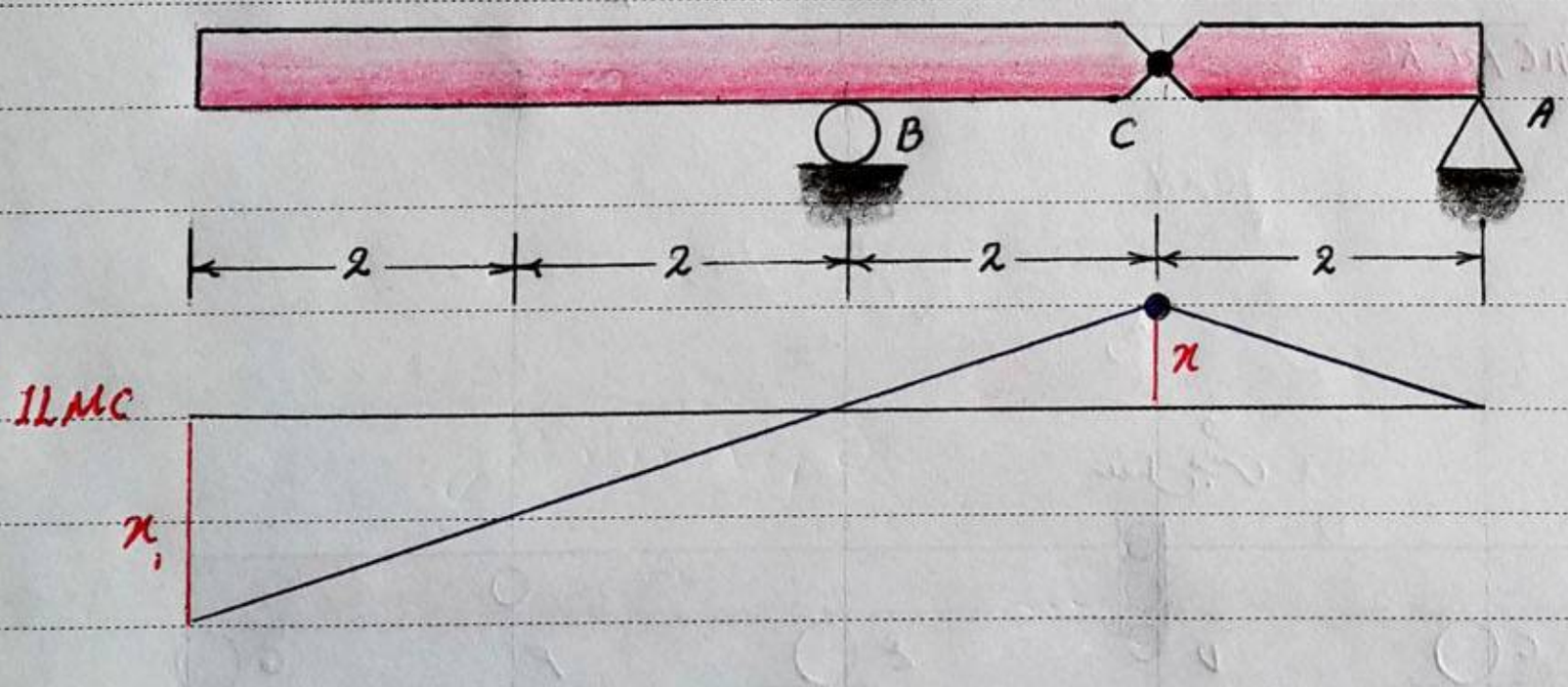
② یک دوران واحد نسبت به نقطه مورد نظر اعمال گردد



$$\alpha = \frac{x}{a} \qquad \beta = \frac{x}{b} \qquad \alpha + \beta = 1$$

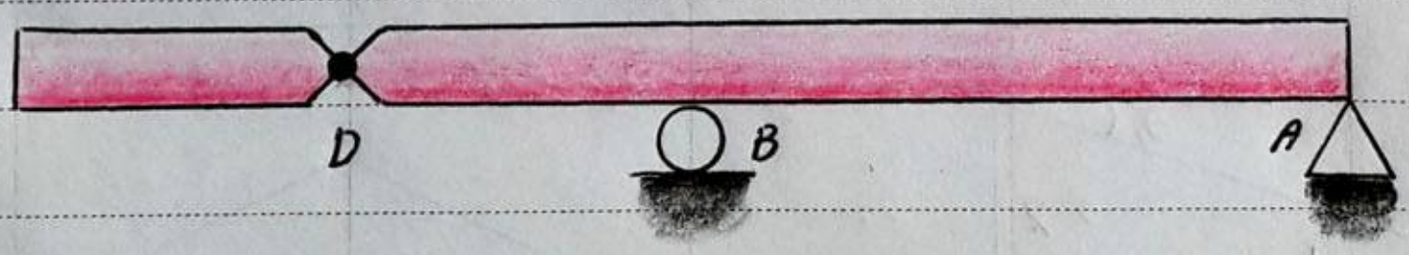
$$\Rightarrow x = \frac{\frac{L}{3} \times \frac{2L}{3}}{\frac{L}{3} + \frac{2L}{3}} = \frac{2}{9}L$$

$$\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = 1 \Rightarrow x\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 1 \Rightarrow x\left(\frac{a+b}{ab}\right) = 1 \Rightarrow x = \frac{ab}{a+b}$$



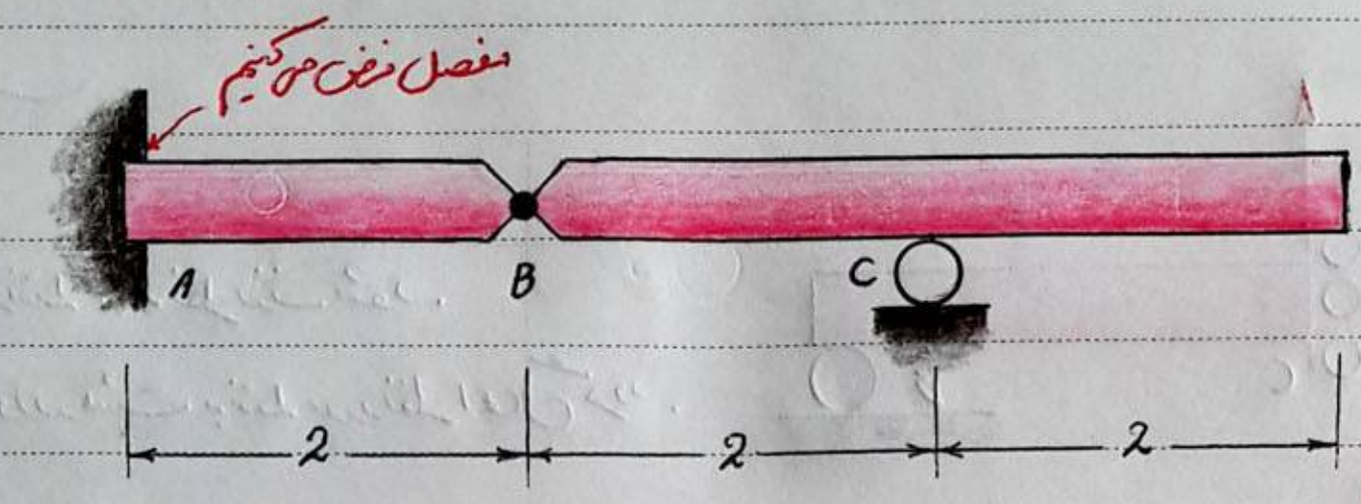
$$x = \frac{ab}{a+b} = \frac{2\times 2}{2+2} = 1$$

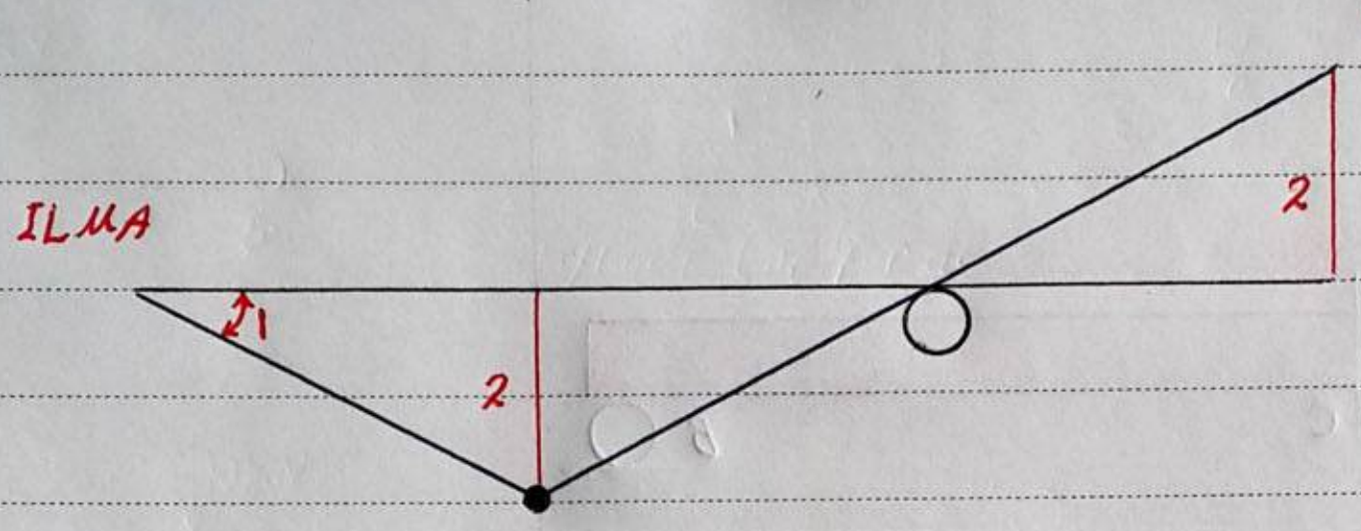
$$\frac{x}{2} = \frac{x_1}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x_1}{4} \Rightarrow x_1 = 2$$

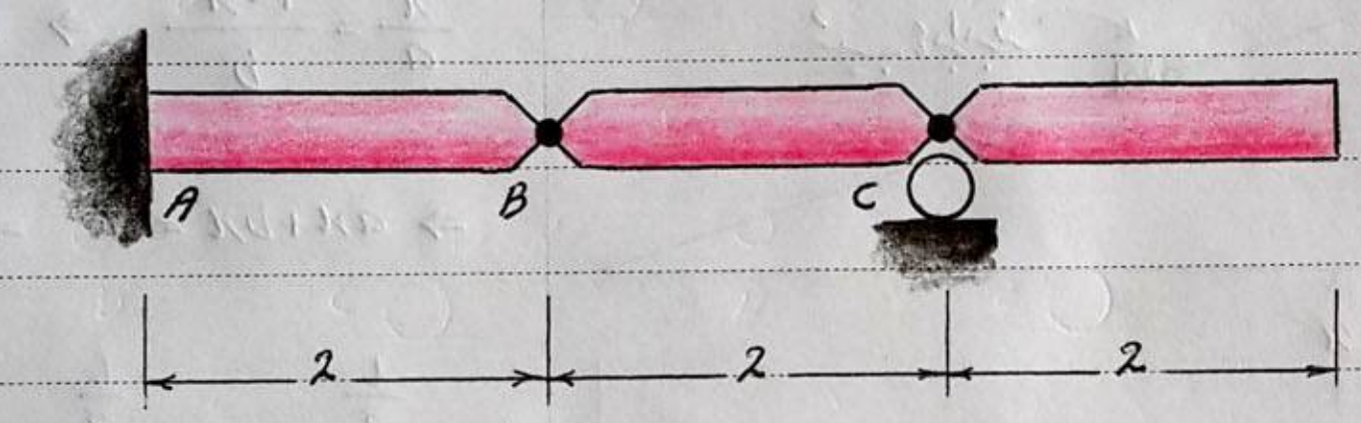


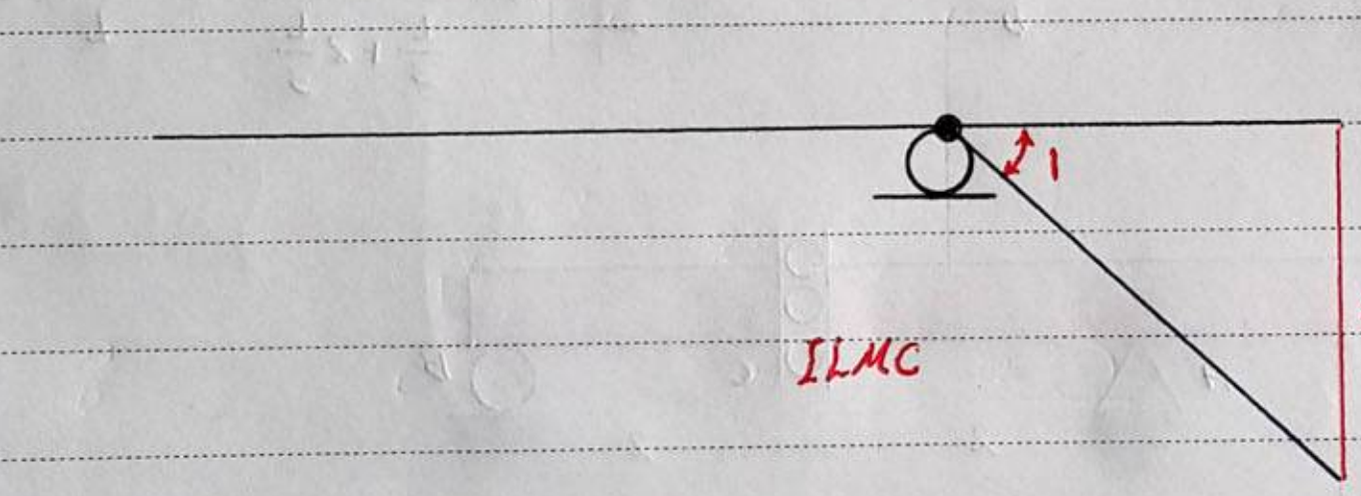
بار به محض اینکه از نقطه D عبور کند دیگر تاثیری در آن نقطه ندارد

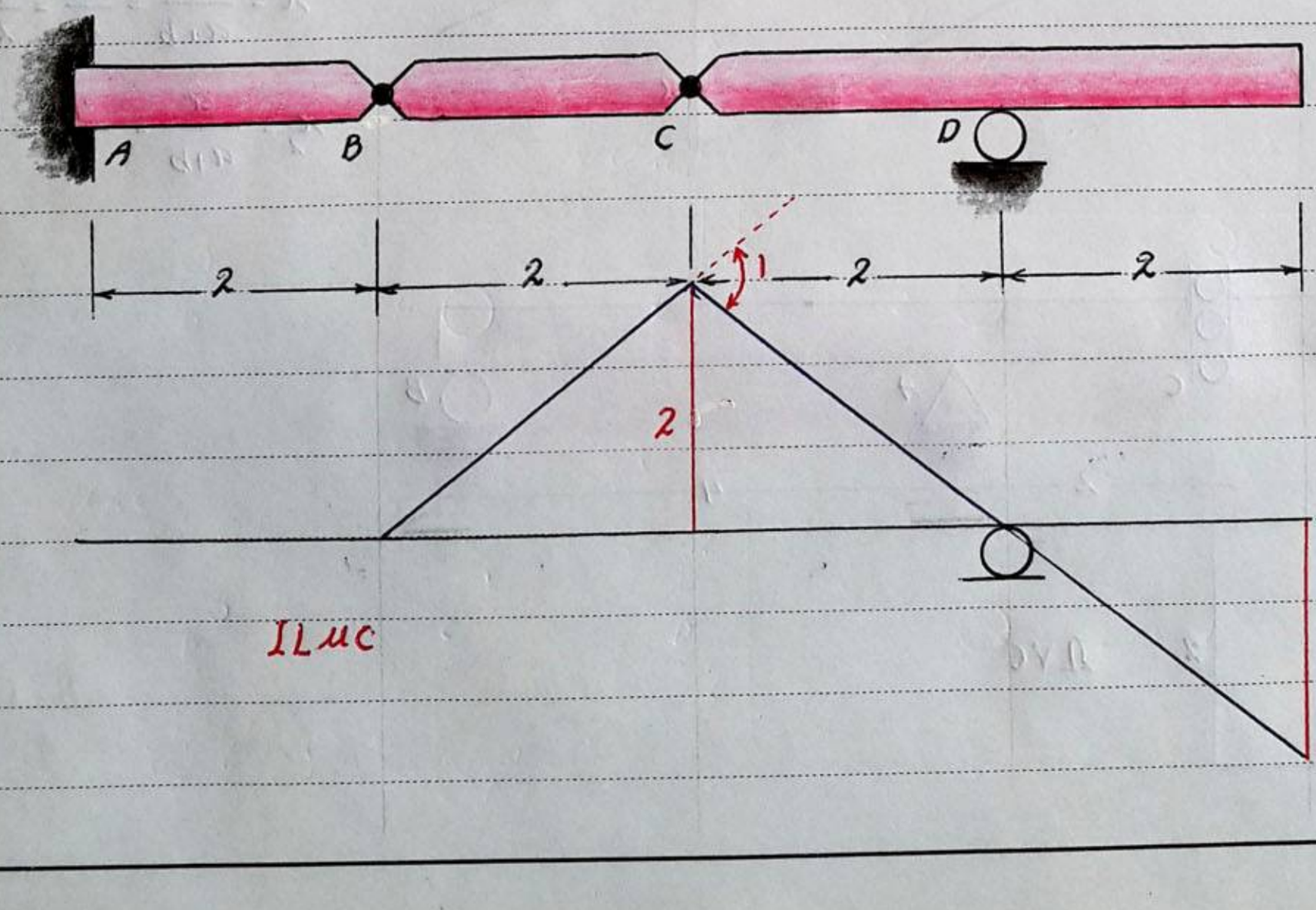
PAPCO
ali_intel66@yahoo.com





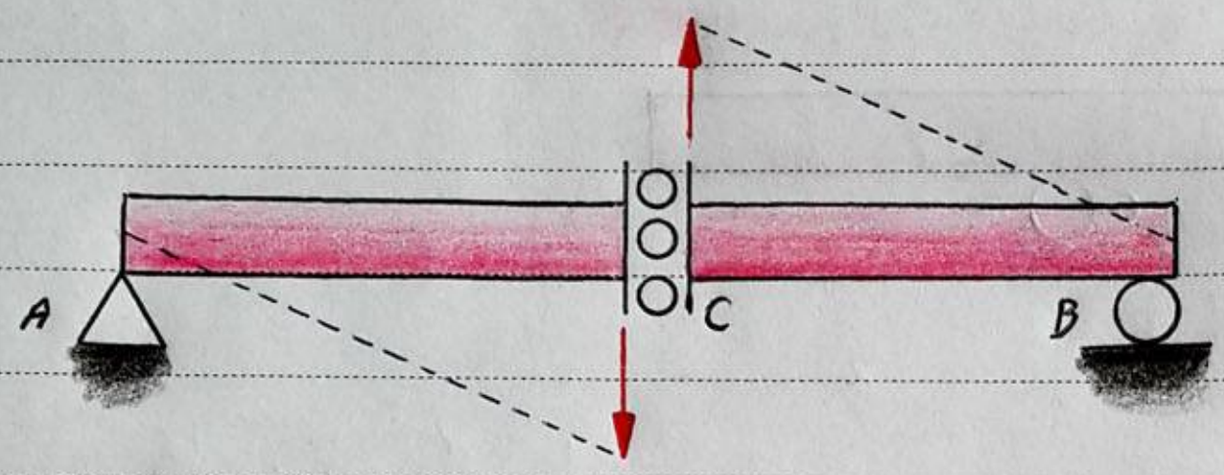






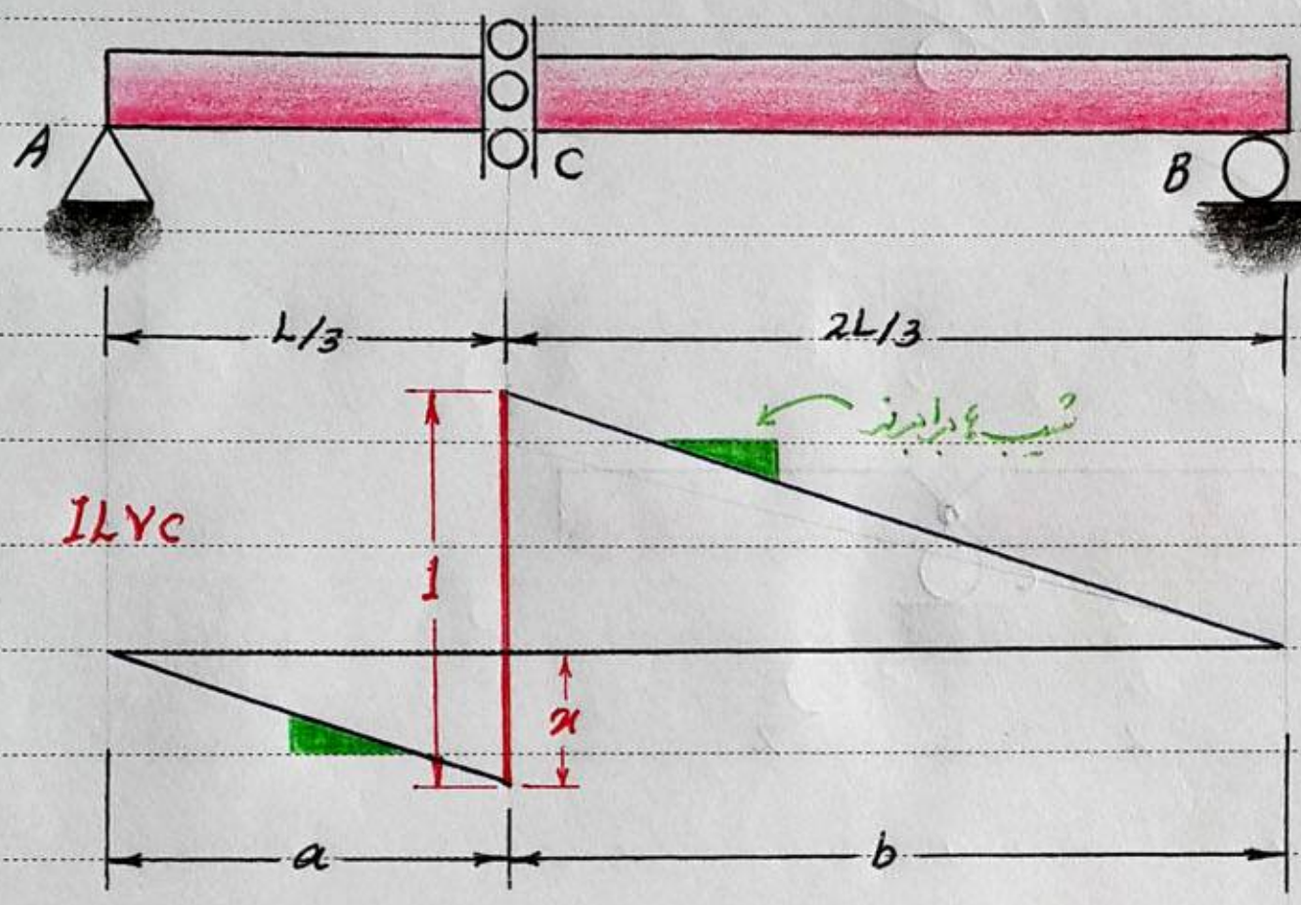
ali_intel66@yahoo.com

خط تاثیر نیروی برشی



① تیر مربوط به برش در نقطه مورد نظر حذف شود.

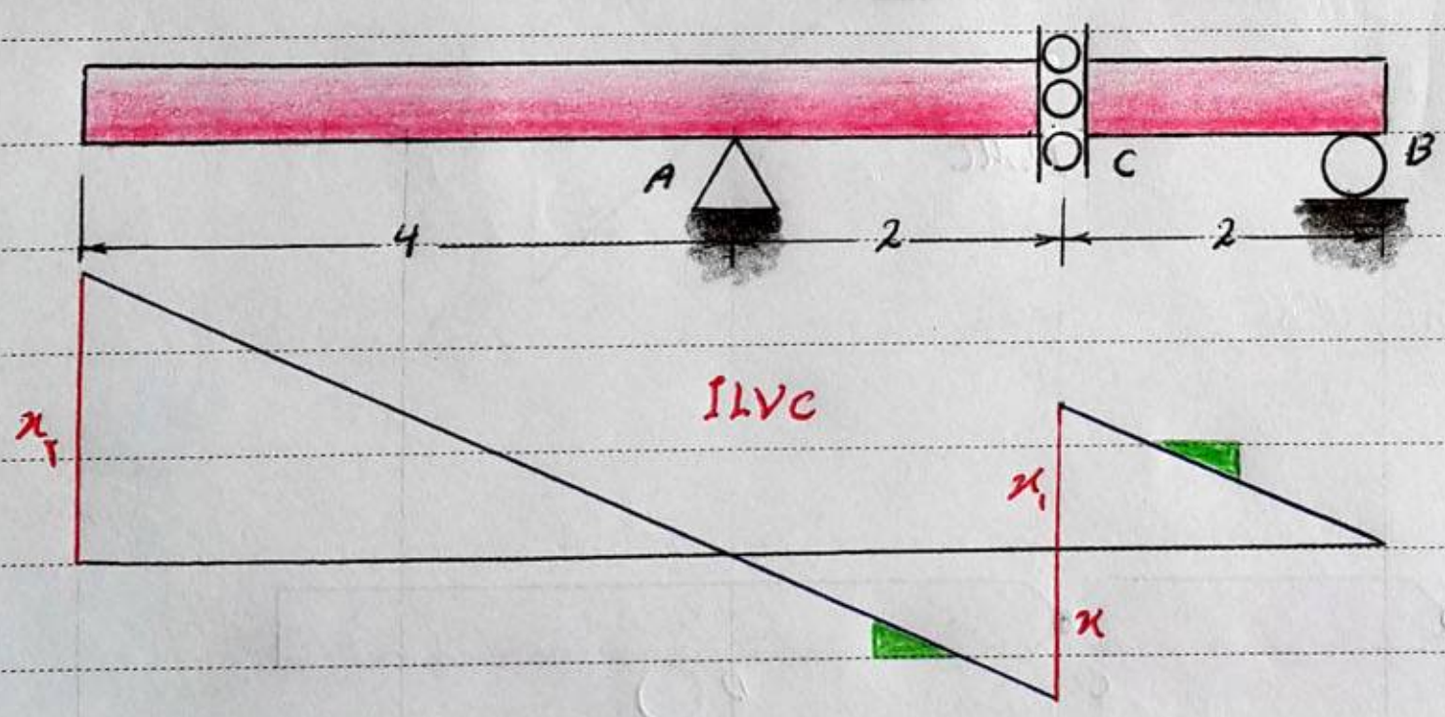
② یک جابجایی برشی واحد مثبت به نقطه مورد نظر اعمال گردد.



$$\frac{x}{a} = \frac{1-x}{b} \Rightarrow bx = a - ax$$

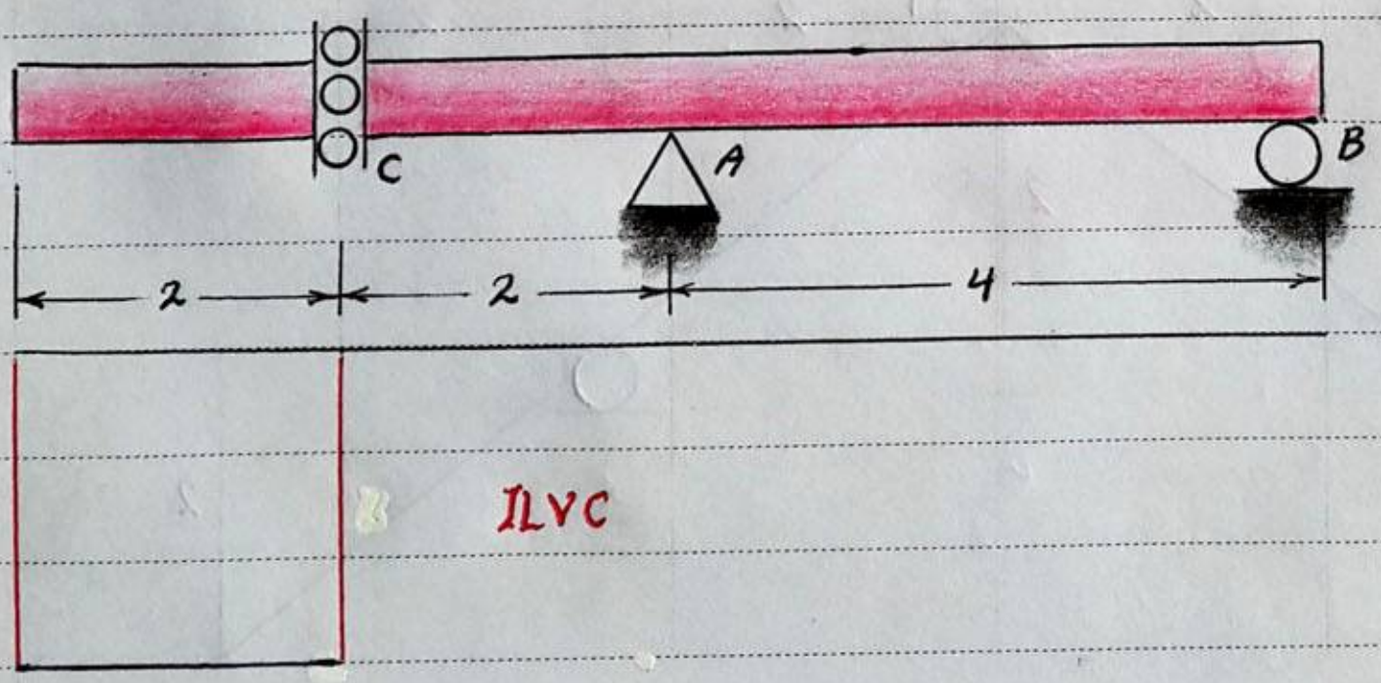
$$\Rightarrow ax + bx = a \Rightarrow x = \frac{a}{a+b}$$

$$x = \frac{\frac{L}{3}}{\frac{L}{3} + 2\frac{L}{3}} = \frac{\frac{L}{3}}{L} = \frac{1}{3}$$

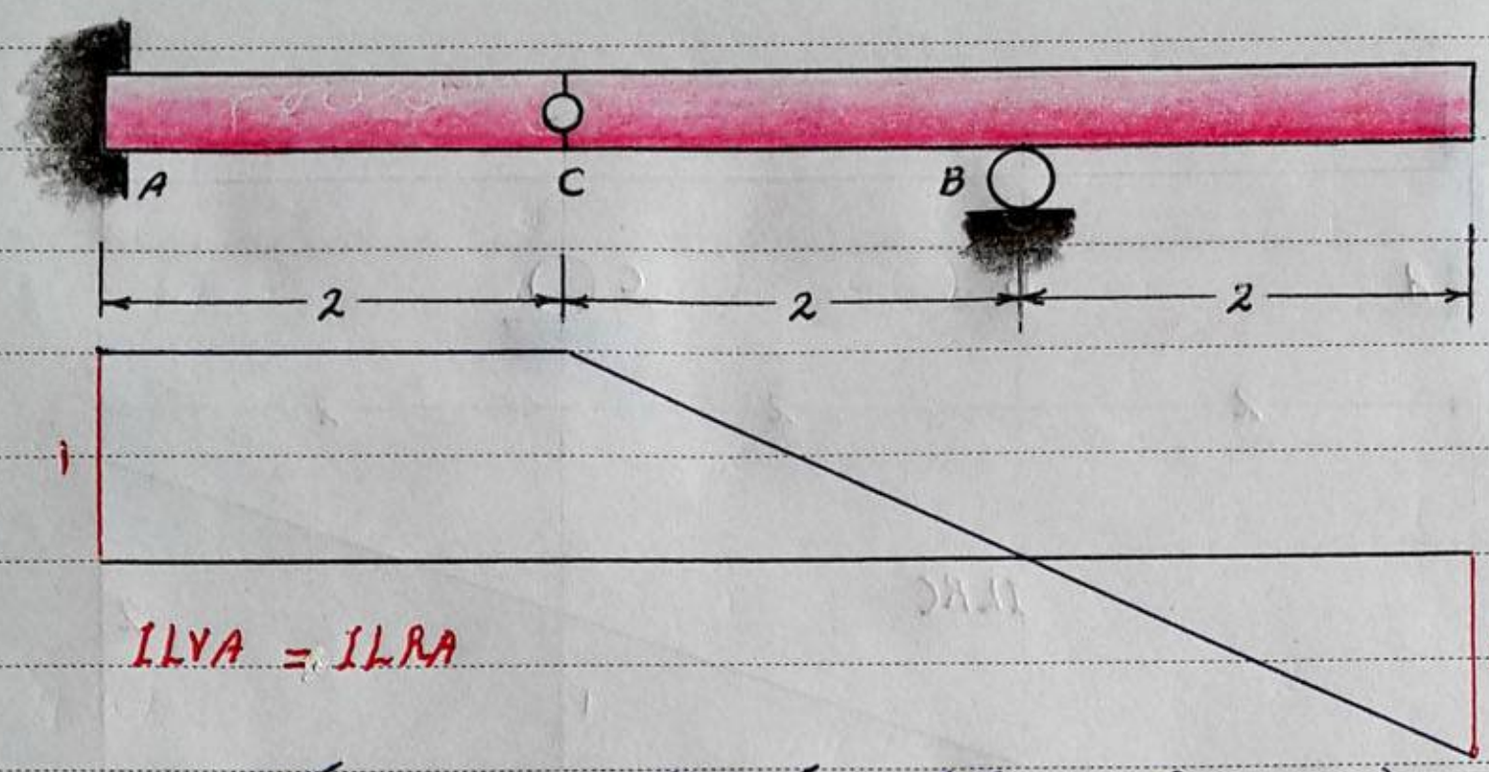


$$x = \frac{a}{a+b} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad x_1 = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{a}{a+b} = \frac{4}{4} = 1$$

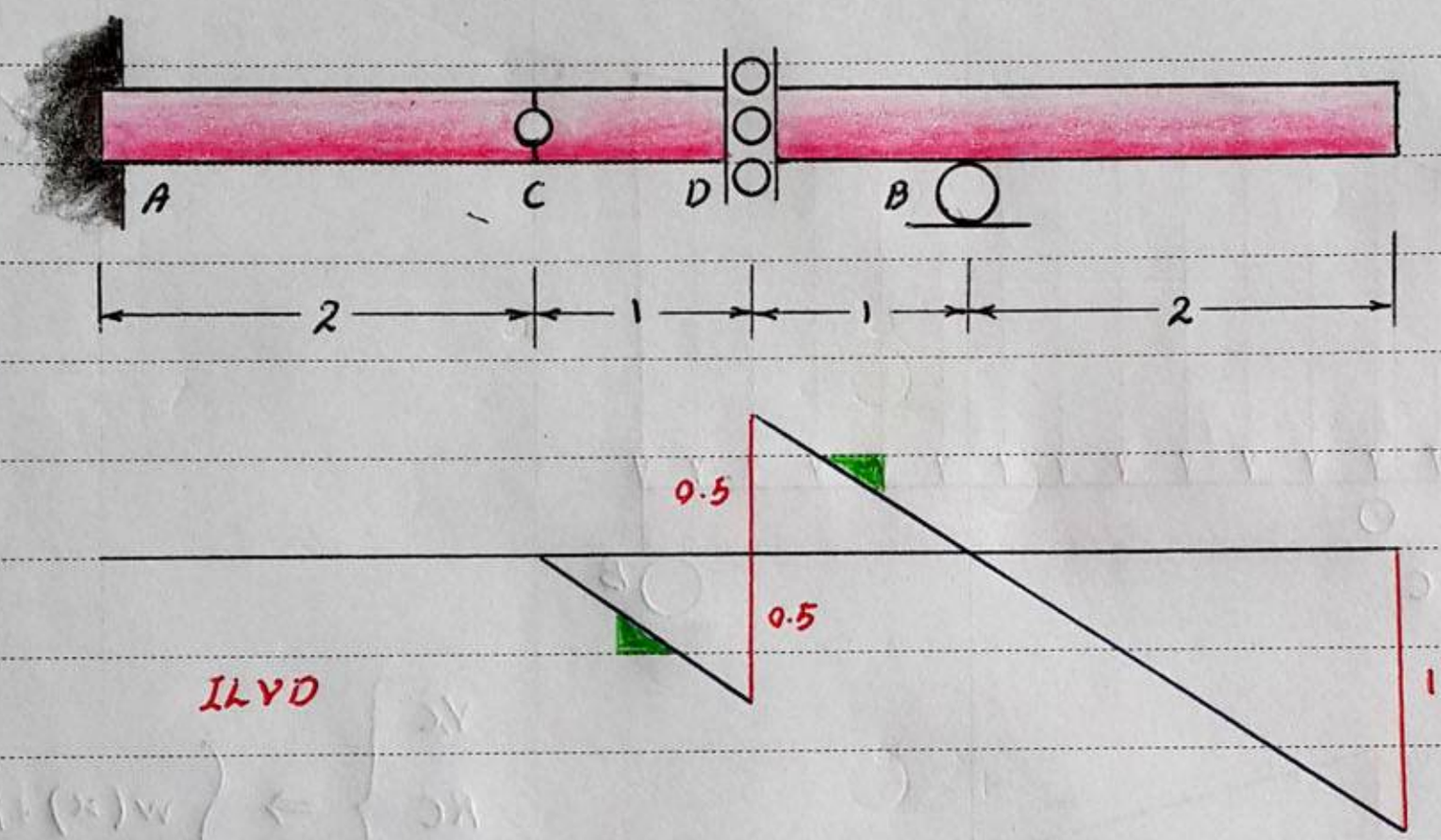


ali_intel66@yahoo.com

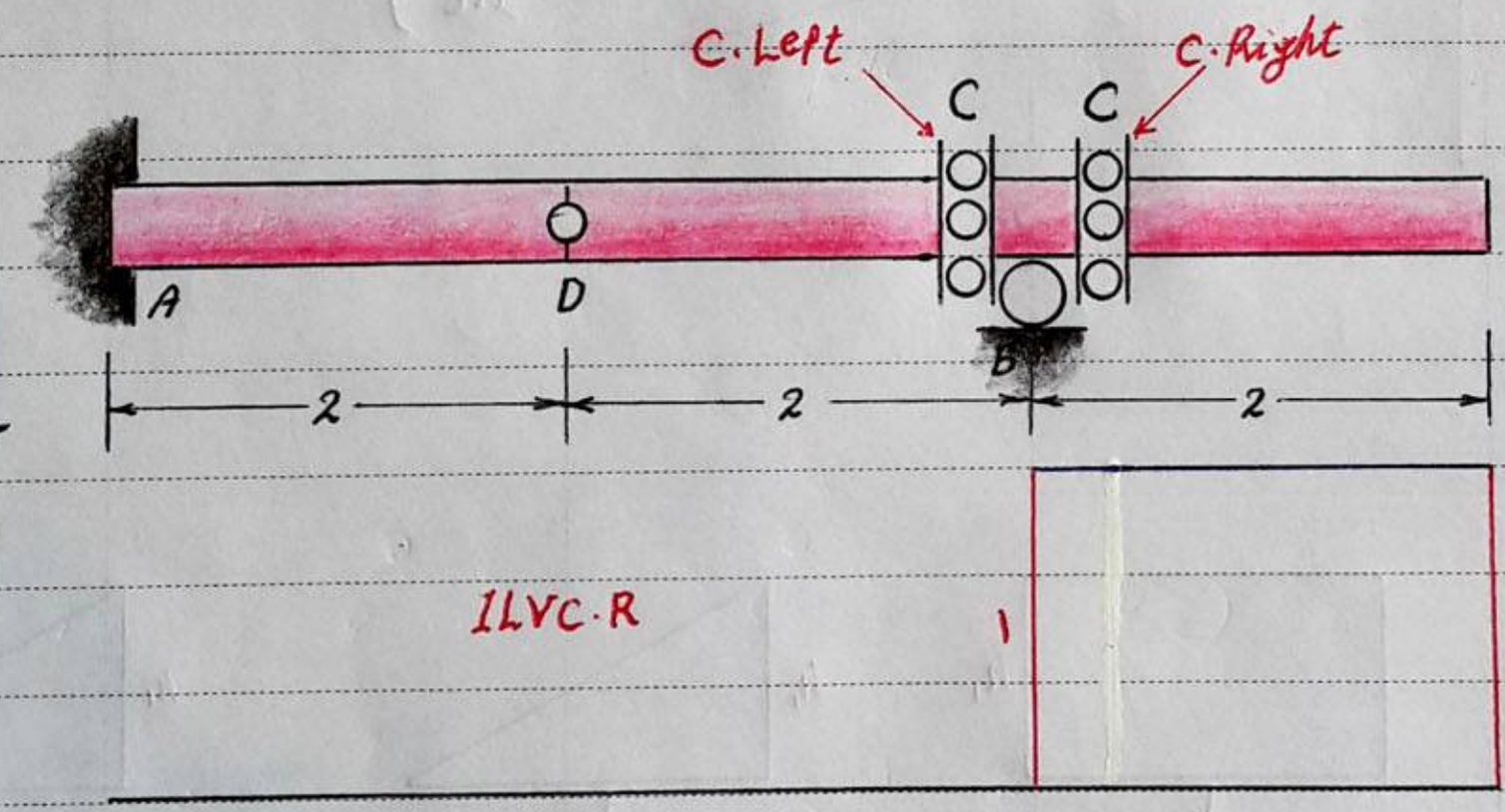


ILVA = ILRA

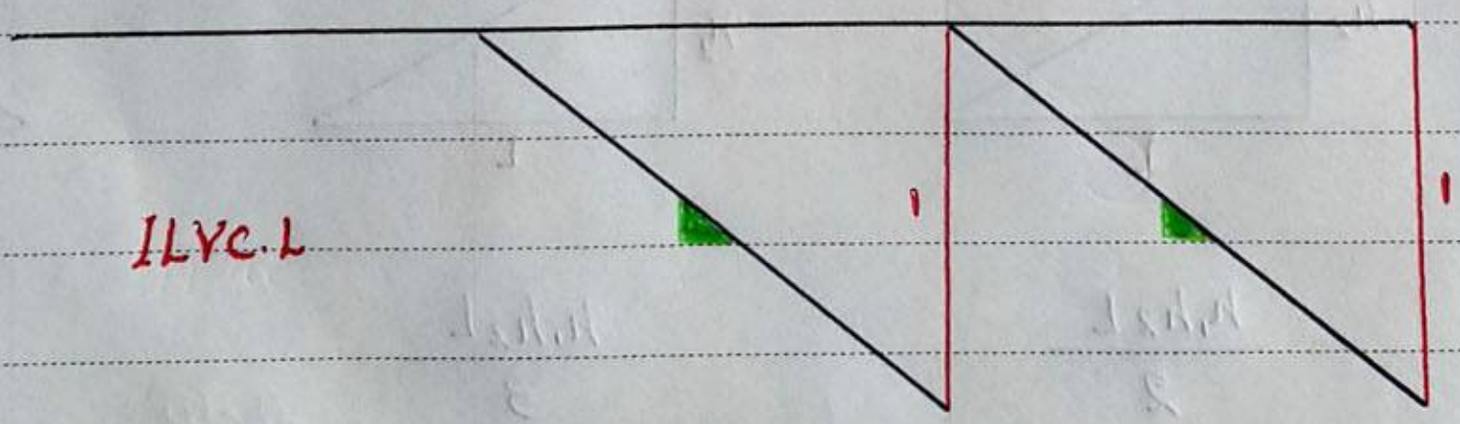
خط تأثیر نیروی برشی و نیروی تکیه گاهی در تکیه گاه، گیردار با هم برابرند (یکی است)



ILVD



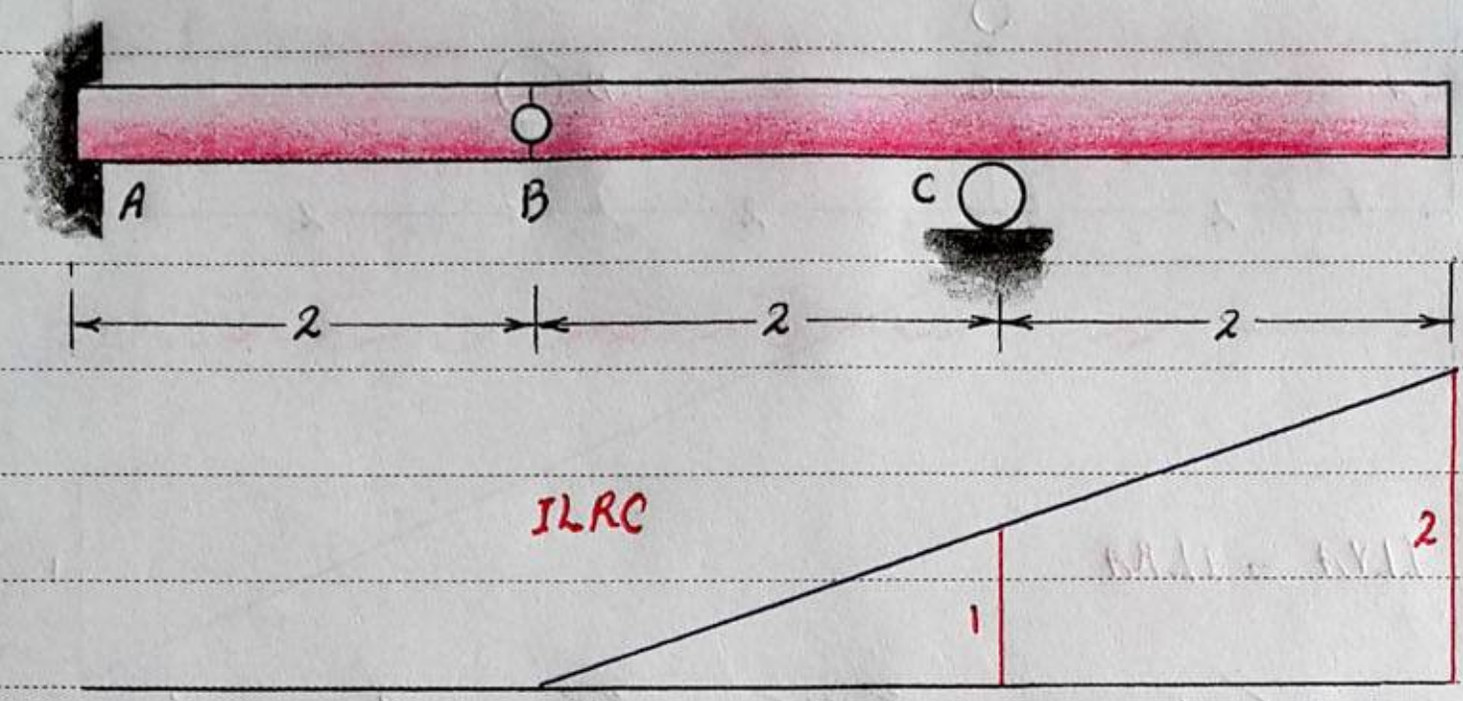
ILVC.R



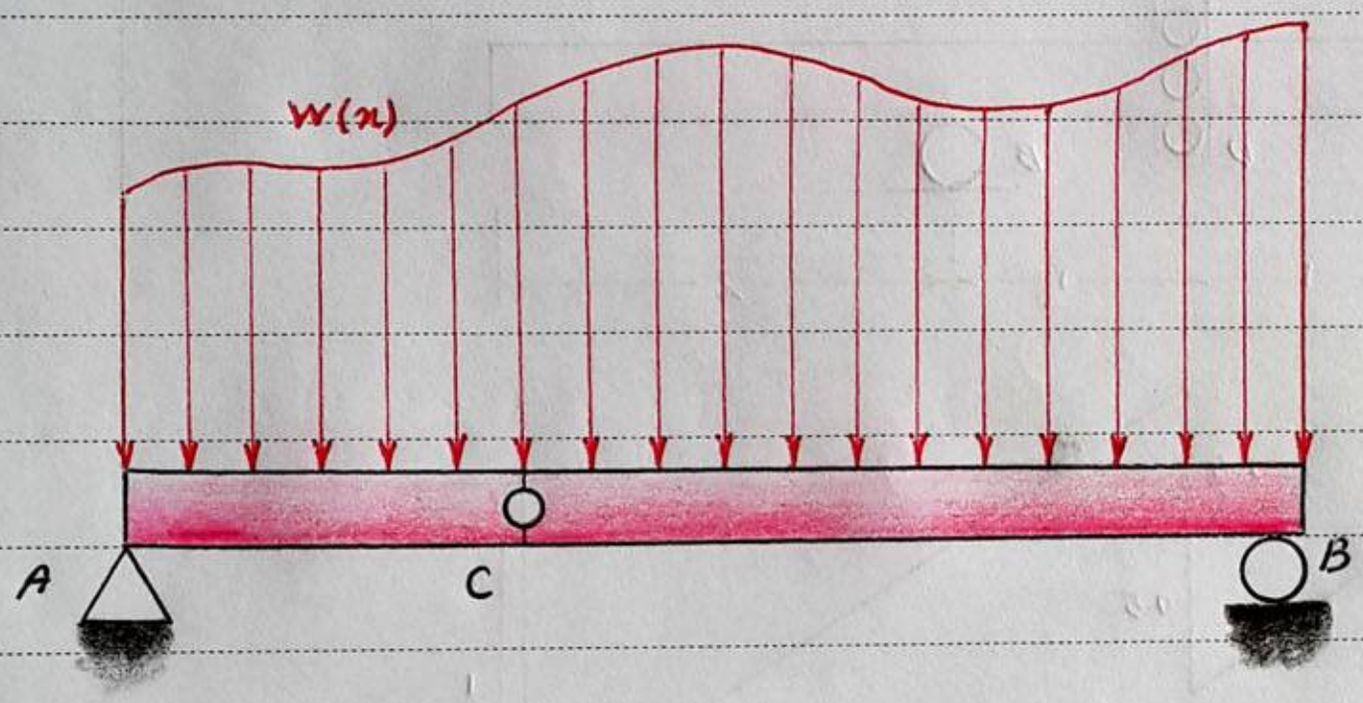
ILVC.L

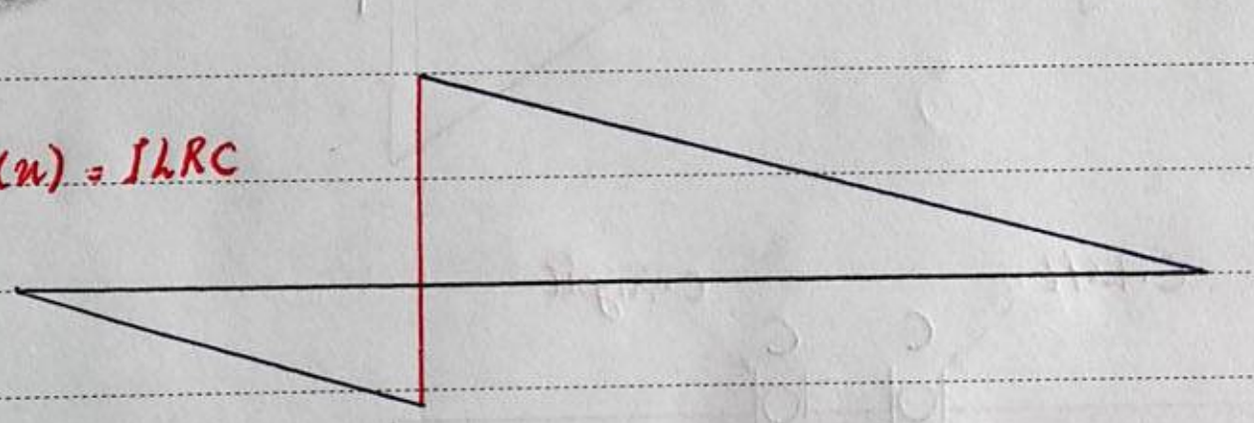
ali_intel66@yahoo.com

Subject :
Year . Month . Date . ( )

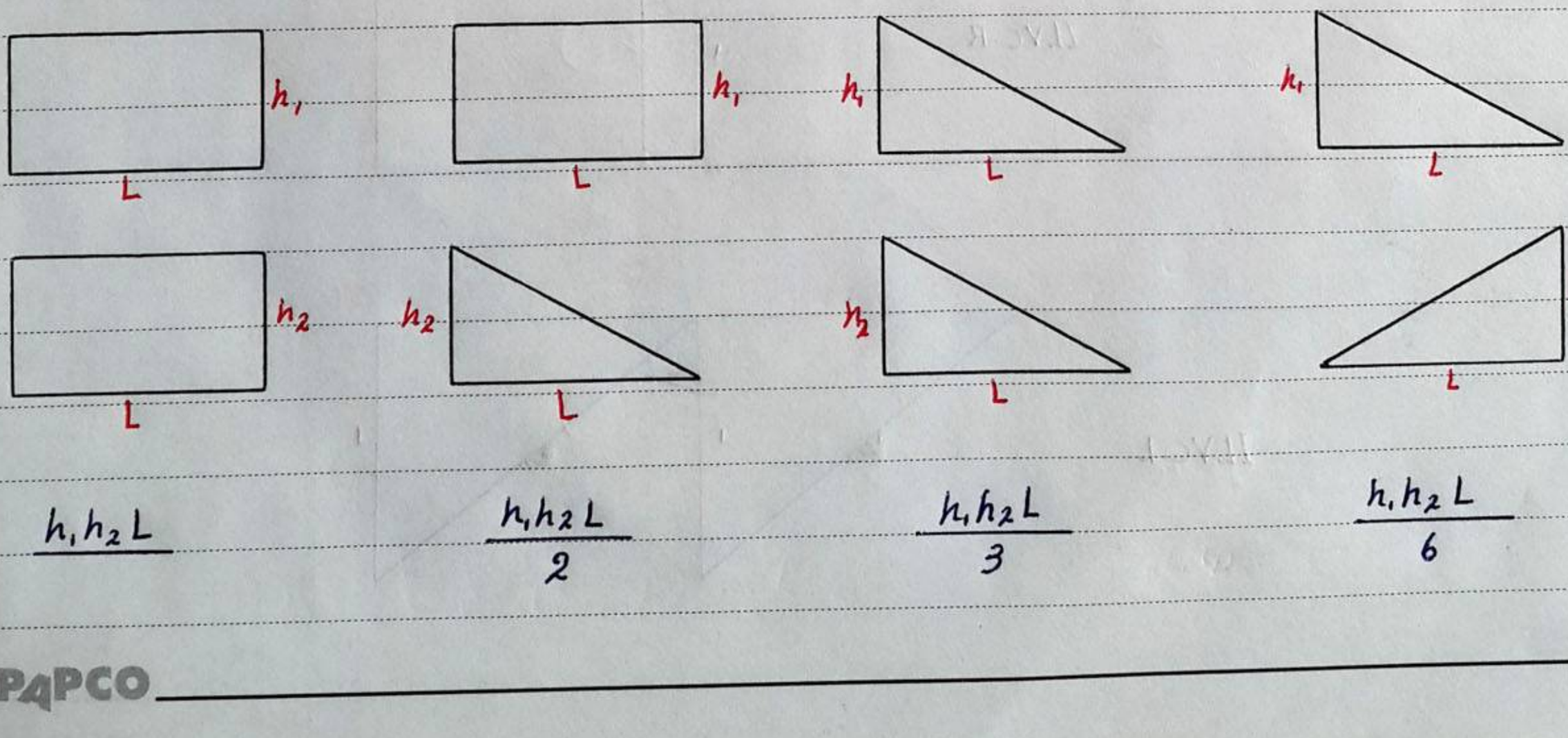


کاربرد خطوط تاثیر





$$\left.\begin{matrix} VC \\ RC \\ MC \end{matrix}\right\} \Rightarrow \int w(x) \cdot R(x)\, dx$$



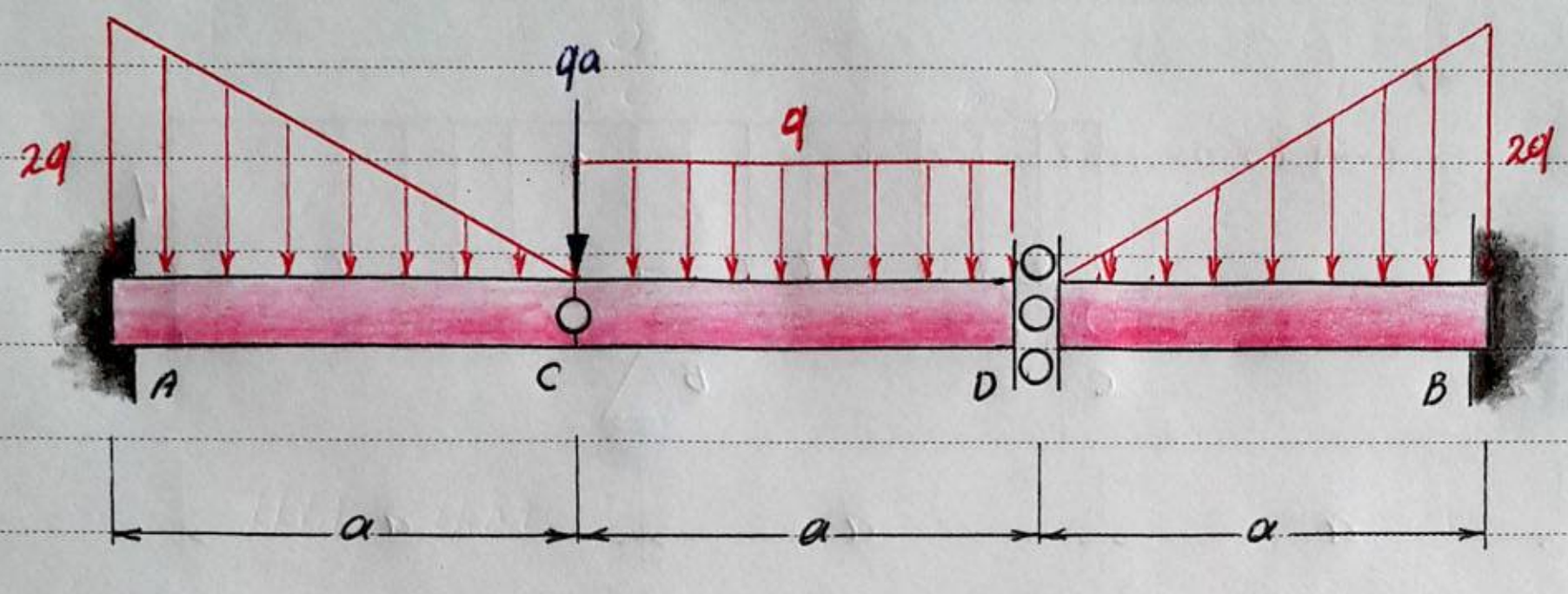
$\frac{h_1 h_2 L}{}$ $\frac{h_1 h_2 L}{2}$ $\frac{h_1 h_2 L}{3}$ $\frac{h_1 h_2 L}{6}$

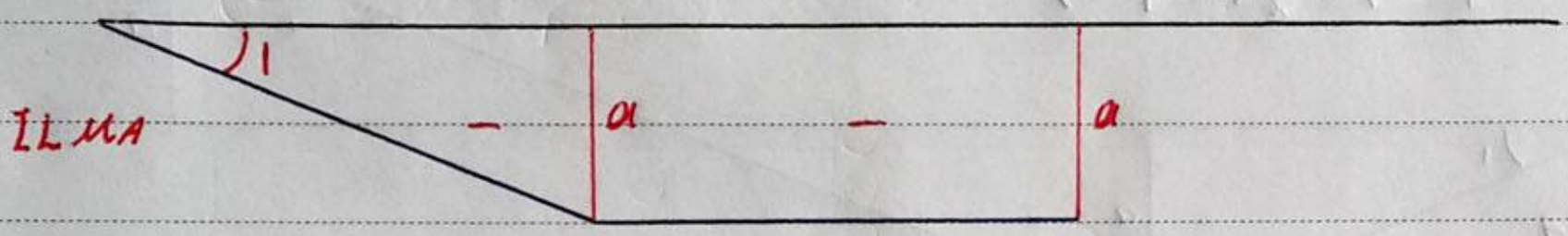
PAPCO

ali_intel66@yahoo.com

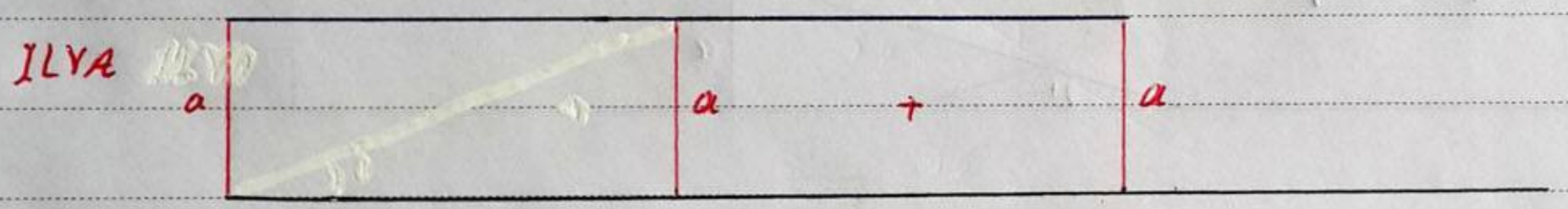
Subject :

Year . Month . Date . ( )

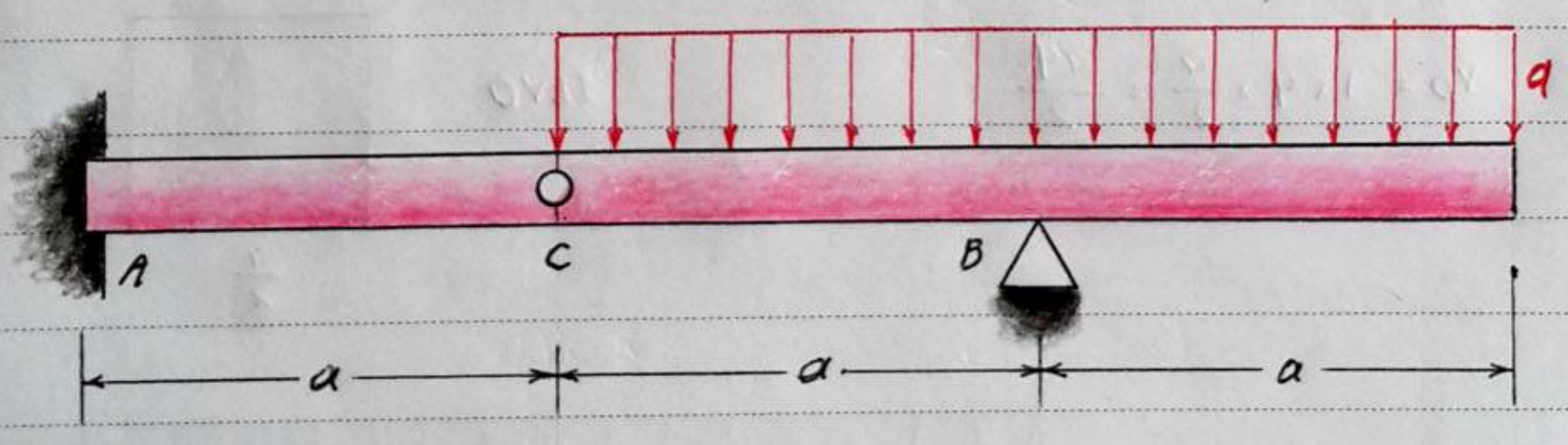


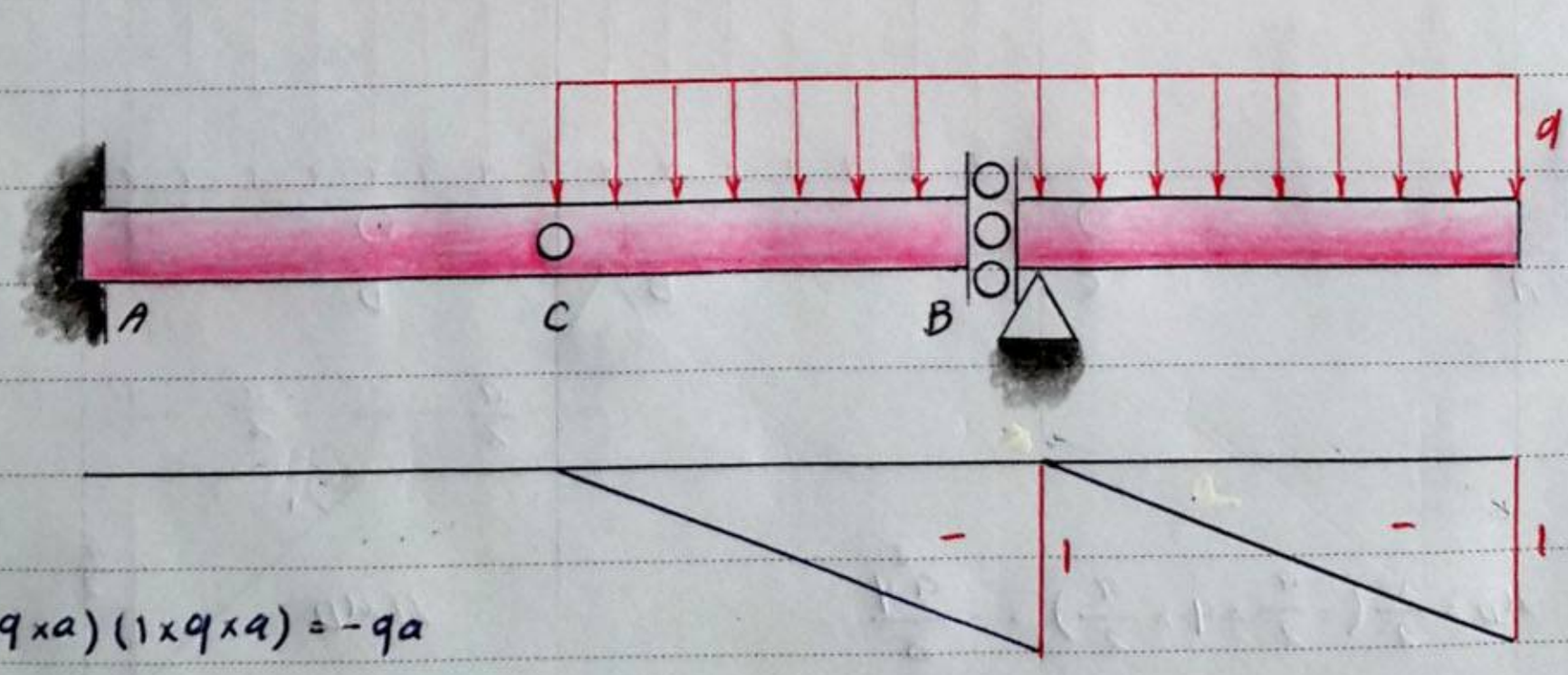


$$M_A = \frac{1}{6}(2q \cdot a \cdot a) + qa \cdot a + q \cdot a \cdot a = -\frac{7}{3}qa^2$$



$$V_A = \frac{1}{2}(2q \cdot a \cdot a) + qa \cdot a + q \cdot a \cdot a = 3qa^2$$

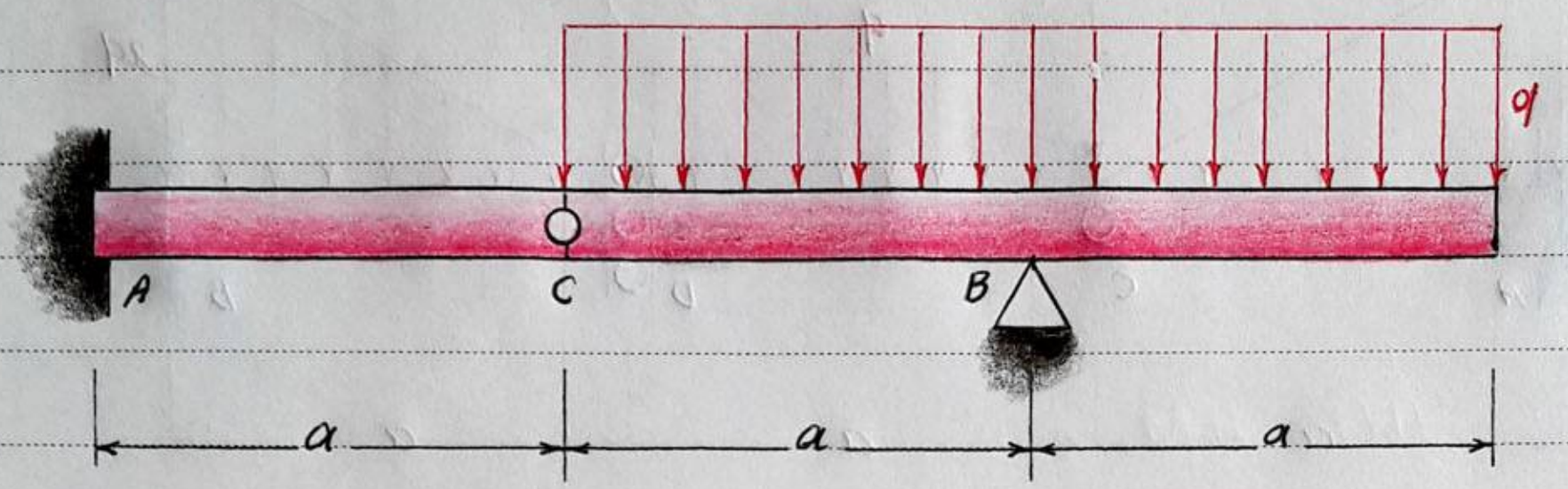




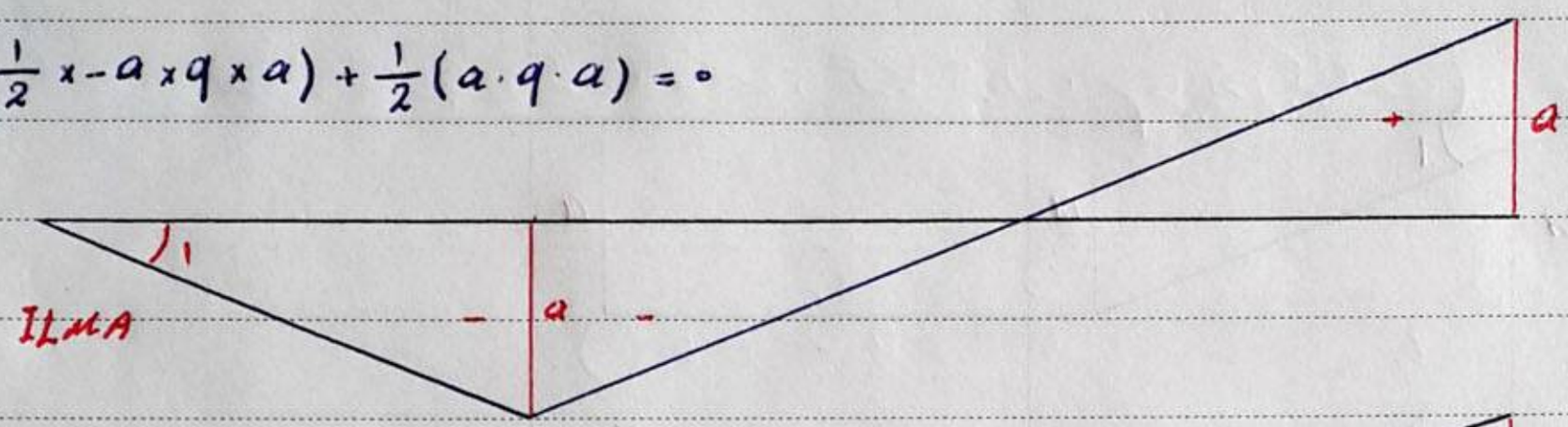
$$V_{B_L} = -\frac{1}{2}(1 \times q \times a)(1 \times q \times a) = -qa$$

PAPCO

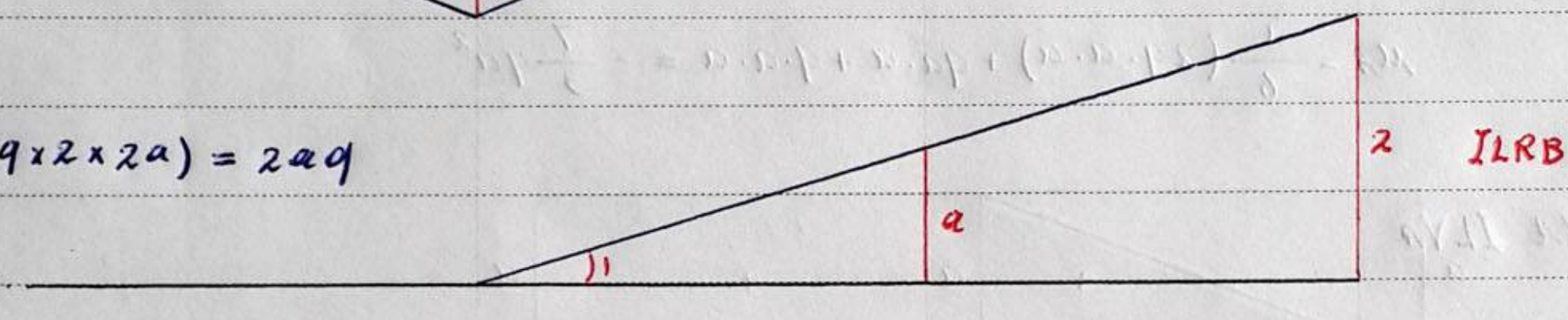
ali_intel66@yaho.com

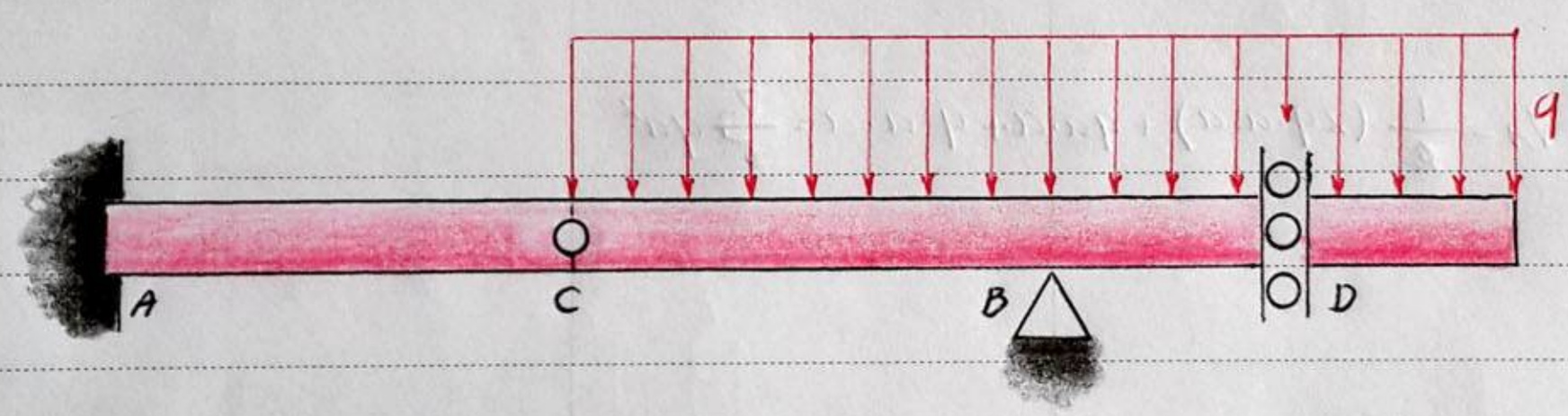


$$M_A = 0 + \left(\frac{1}{2} \times -a \times q \times a\right) + \frac{1}{2}(a \cdot q \cdot a) = 0$$

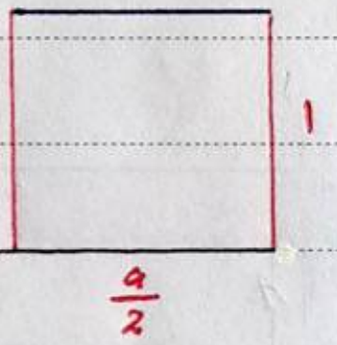


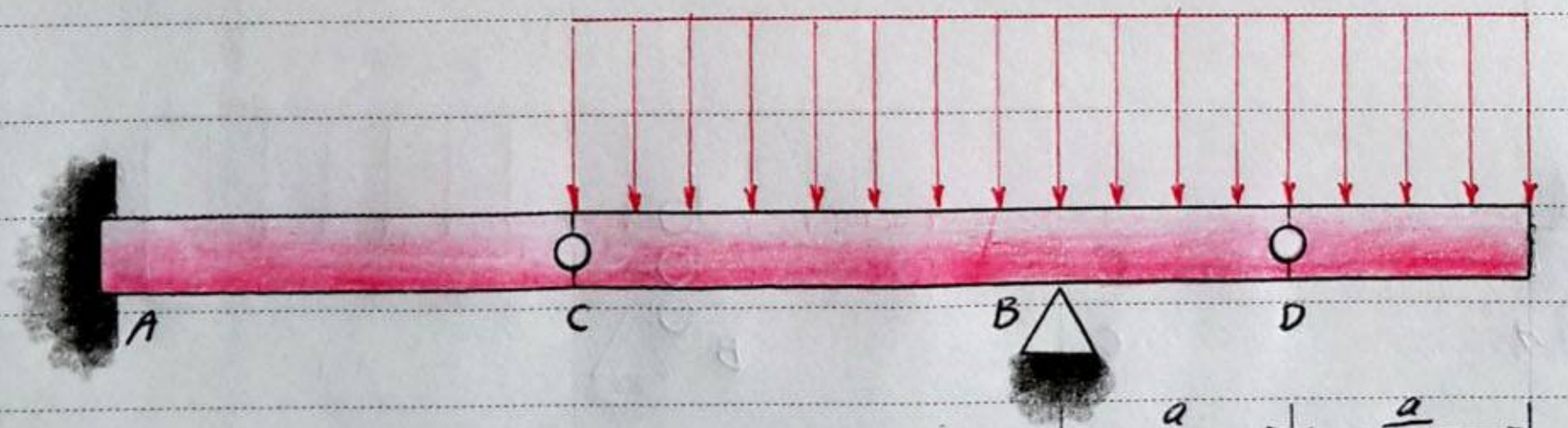
$$A_B = \frac{1}{2}(q \times 2 \times 2a) = 2aq$$



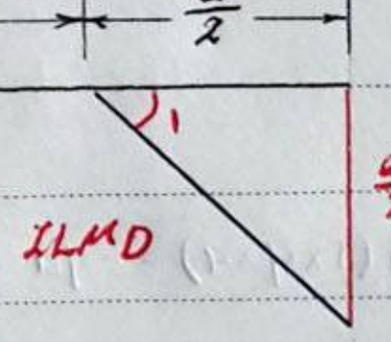


$$V_D = 1 \times q \times \frac{a}{2} = \frac{aq}{2}$$



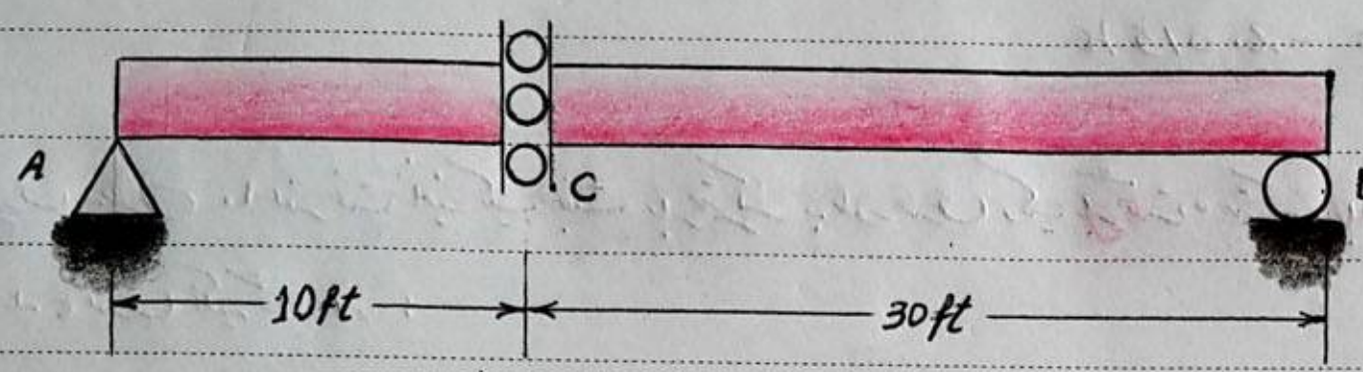


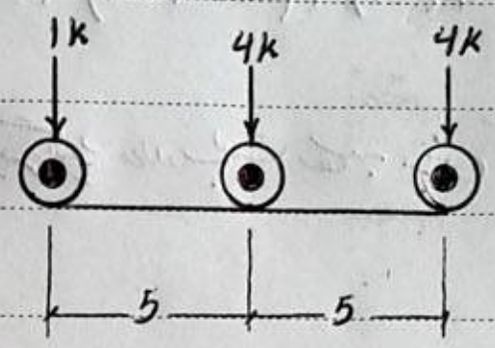
$$M_D = \frac{1}{2}\left(-\frac{a}{2} \times q \times \frac{a}{2}\right) = -\frac{a^2 q}{8}$$



ali_intel66@yahoo.com

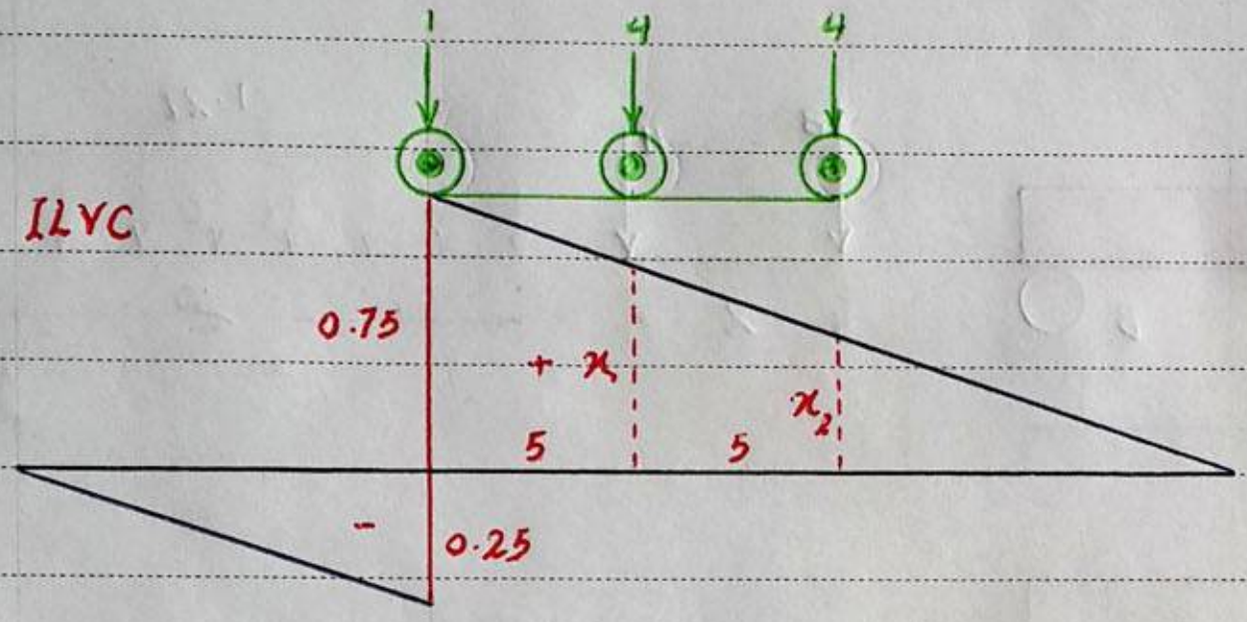
moving load





ILVC

Case I

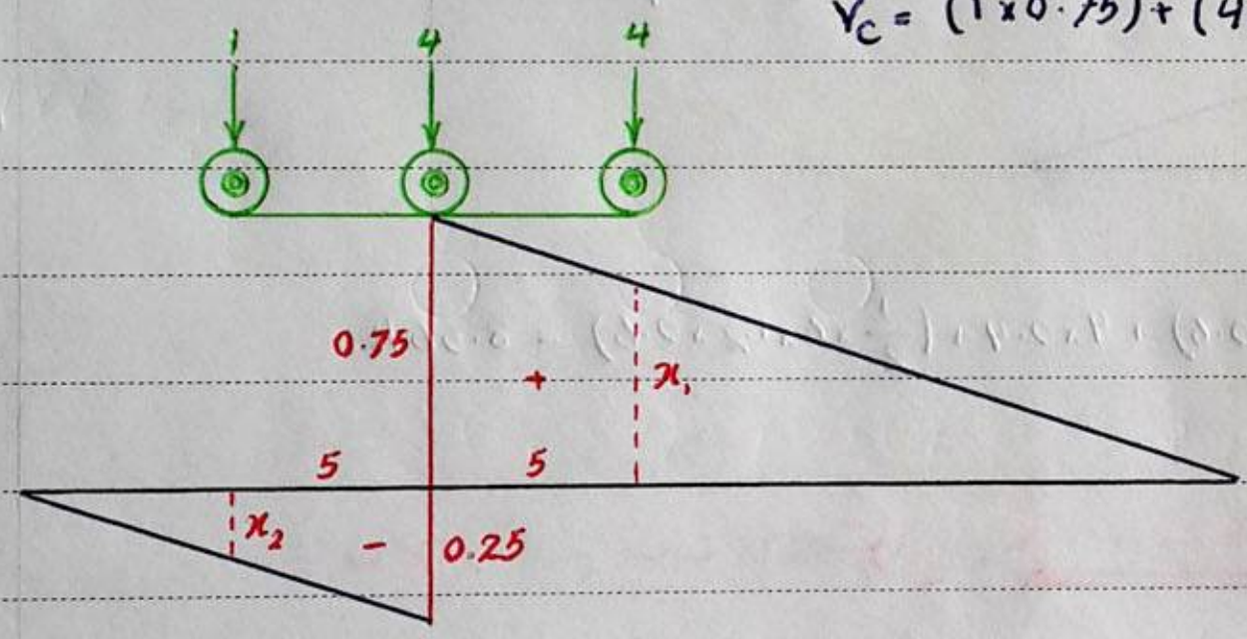


$$\frac{0.75}{30} = \frac{x_1}{25} \Rightarrow x_1 = \frac{0.75 \times 25}{30} = 0.625$$

$$\frac{0.75}{30} = \frac{x_2}{20} \Rightarrow x_2 = \frac{0.75 \times 20}{30} = 0.5$$

$$V_C = (1 \times 0.75) + (4 \times 0.625) + (4 \times 0.5) = 5.25\ k$$

Case II

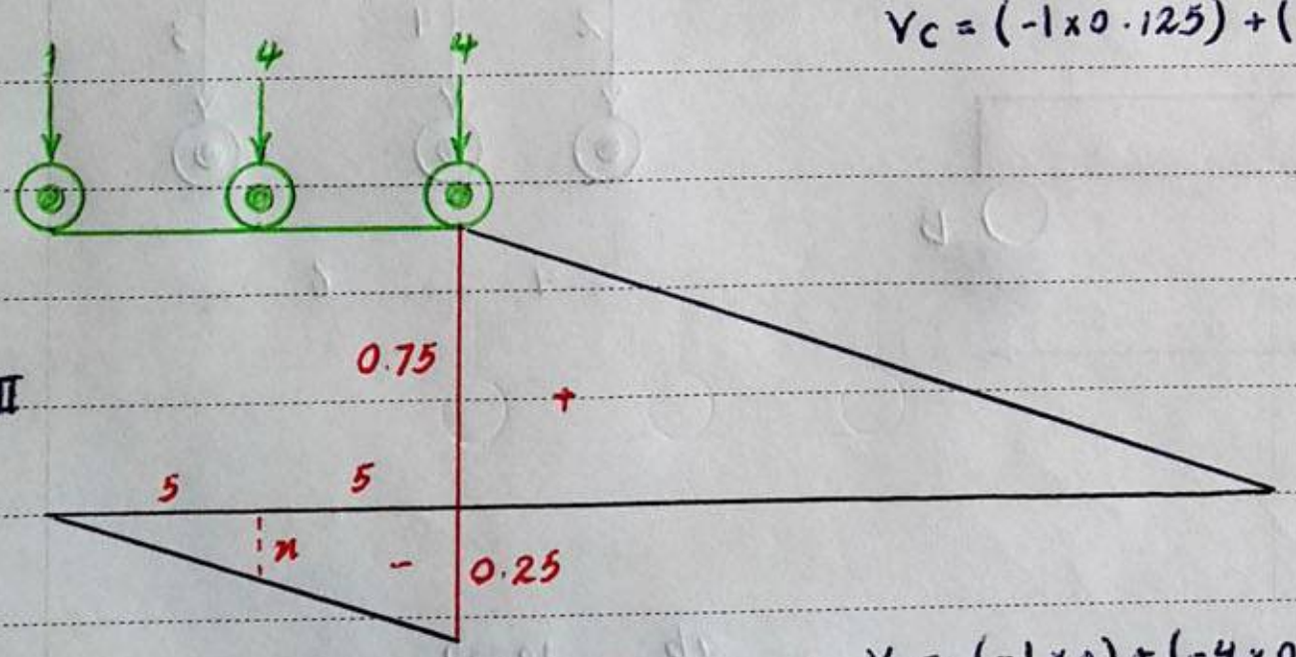


$x_1 = 0.625$

$$\frac{0.25}{10} = \frac{x_2}{5} \Rightarrow x_2 = \frac{0.75 \times 5}{10} = 0.125$$

$$V_C = (-1 \times 0.125) + (4 \times 0.75) + (4 \times 0.625) = 5.375\ k$$

case III



$x = 0.125$

$$V_C = (-1 \times 0) + (-4 \times 0.125) + (4 \times 0.75) = 2.5\ k \quad \Rightarrow V_{C\,MAX} = 5.375\ k$$

برای شیب خط: $\Delta V = \rho S (x_2 - x_1)$ sloping — ρ: مقدار میزو، S: شیب خط، $(x_2 - x_1)$: جابجایی میزو

برای پرش: $\Delta V = \rho (\gamma_2 - \gamma_1)$ jump — ρ: مقدار میزو، $(\gamma_2 - \gamma_1)$: مقدار پرش

محاسبه را از یک تا n ادامه می‌دهیم تا ΔV منفی شود

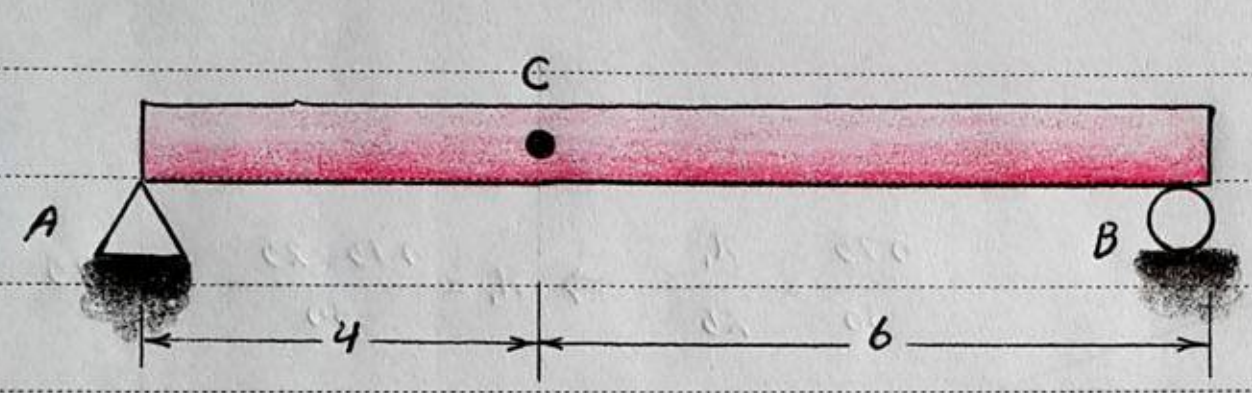
ali_intel66@yahoo.com

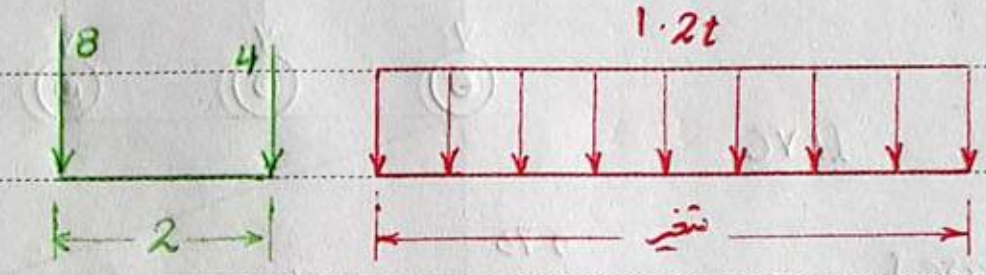
Subject :
Year . Month . Date . ( )

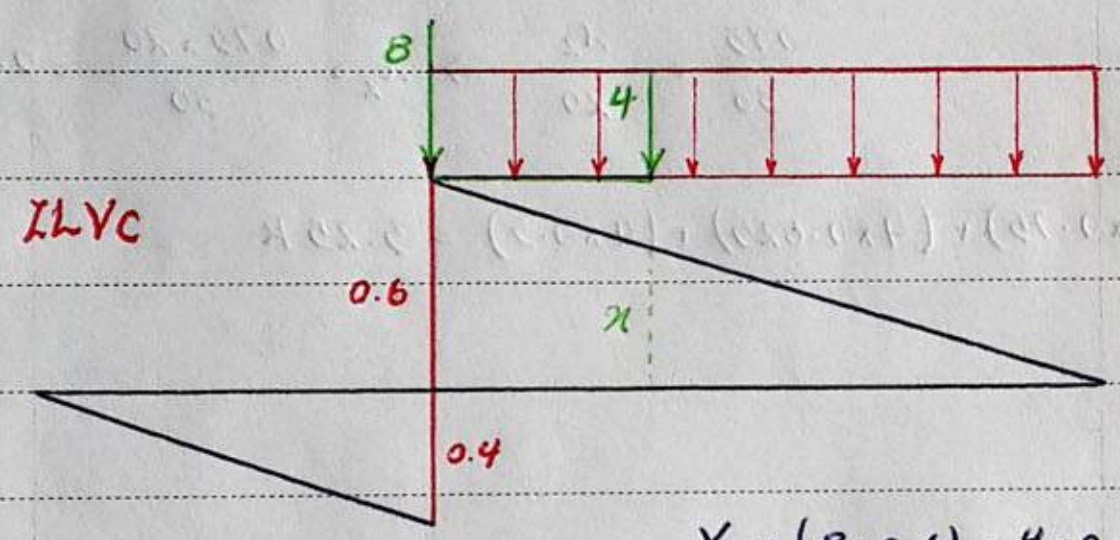
$$V_{1-2} = 1(-1) + (1+4+4)(0.025)(5) = 0.125\ k$$

$$V_{2-3} = 4(-1) + (1+4+4)(0.025)(5) = -2.875\ k$$

- قیری به طول ۱۰ متر تحت تأثیر یک جفت بار متمرکز به طور متری و یک بار گسترده متحرک با طول متغیر قرار می‌گیرد مطلوب است محاسبه برش ماکزیمم مثبت در فاصله ۴ متری تکیه گاه A :



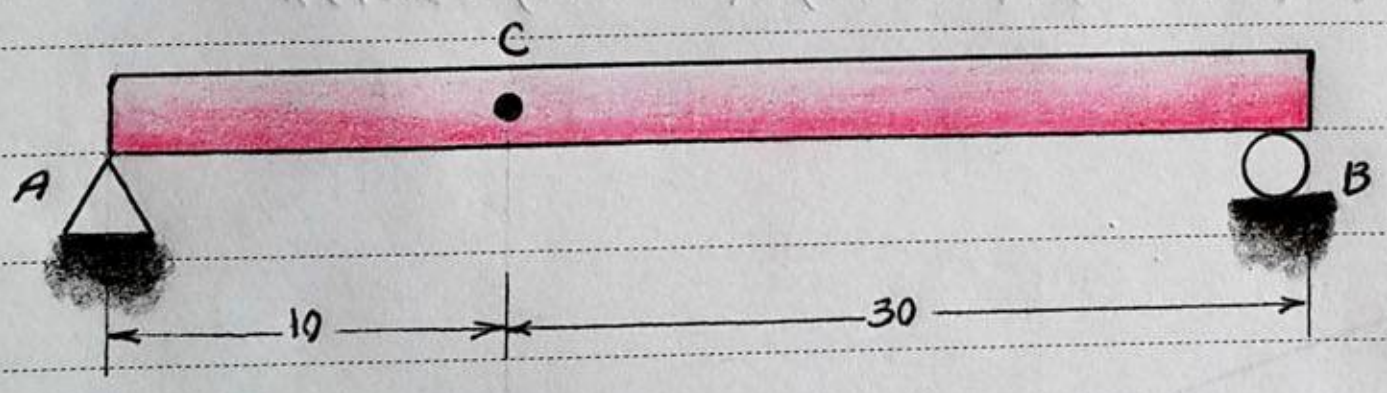


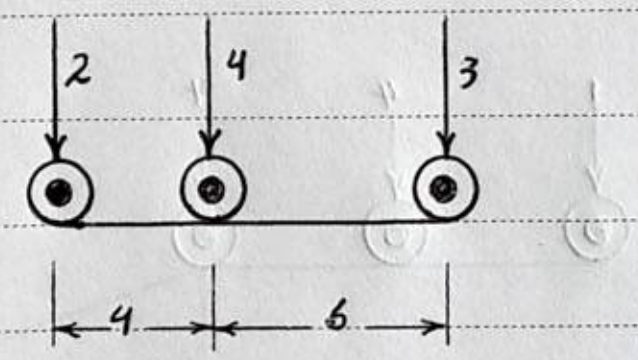


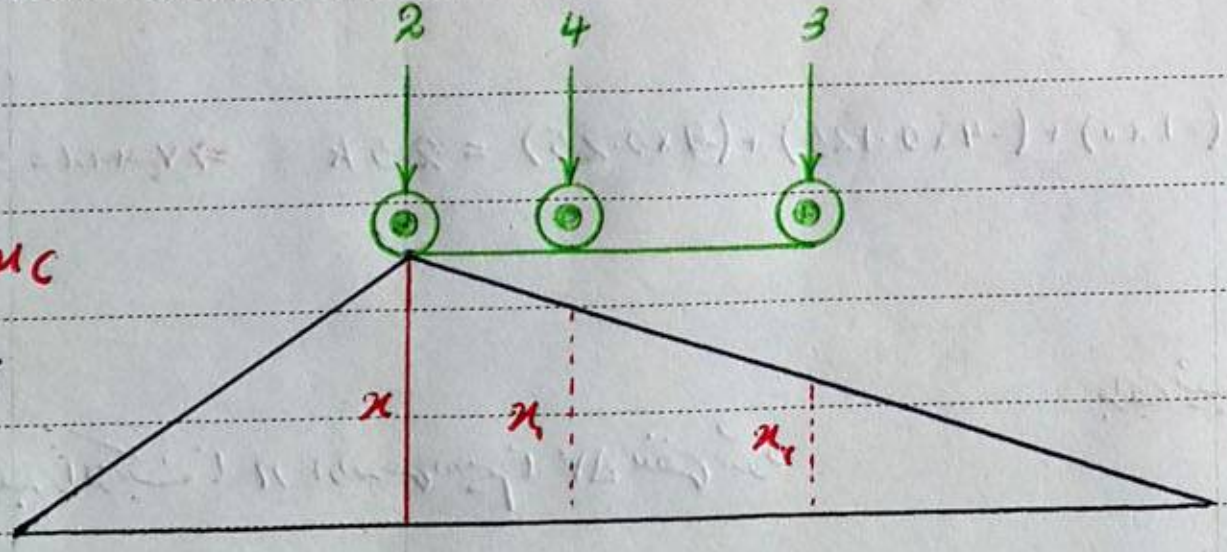
$$\frac{.16}{6} = \frac{x}{4} \Rightarrow x = 0.4$$

5 (1)
8.56 (2)
12 (3)
16.21 (4)

$$V_C = (8\times0.6) + 4\times0.4 + \left(\frac{1}{2}\times6\times1.2\times0.6\right) = 8.56\ k$$







$$x = \frac{ab}{a+b} = \frac{10\times30}{40} = 7.5$$

$$x_1 : \frac{7.5}{30} = \frac{x_1}{26} \Rightarrow x_1 = 6.5$$

$$x_2 : \frac{7.5}{30} = \frac{x_2}{20} \Rightarrow x_2 = 5$$

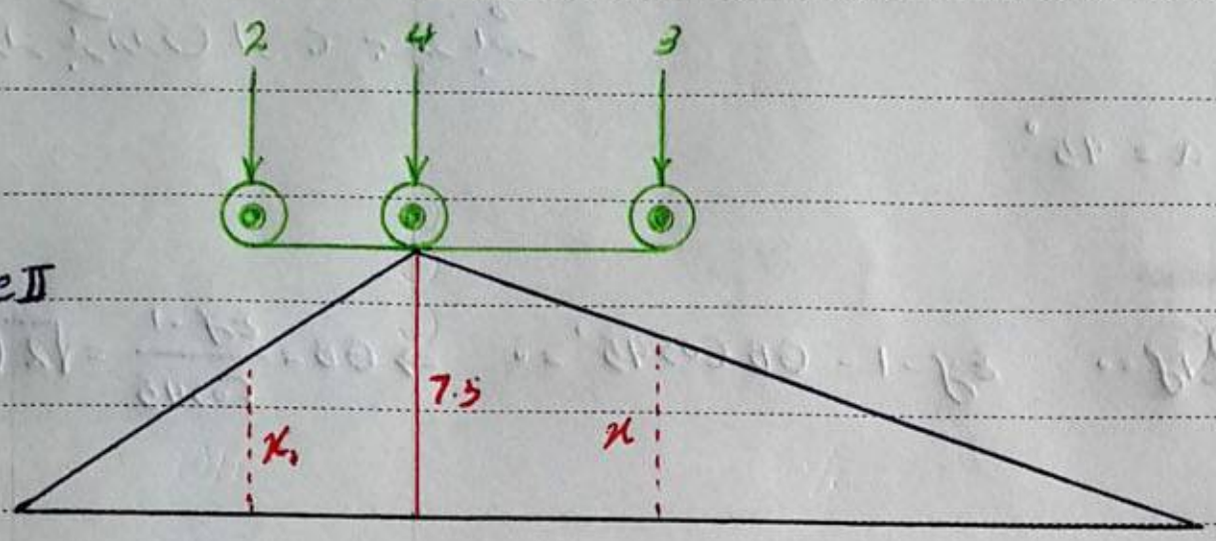
$$M_C = (2\times7.5) + (4\times6.5) + (3\times5) = 56\ k.ft$$

PAPCO
ali_intel66@yaho.com

Subject :

Year . Month . Date . ( )

Case II

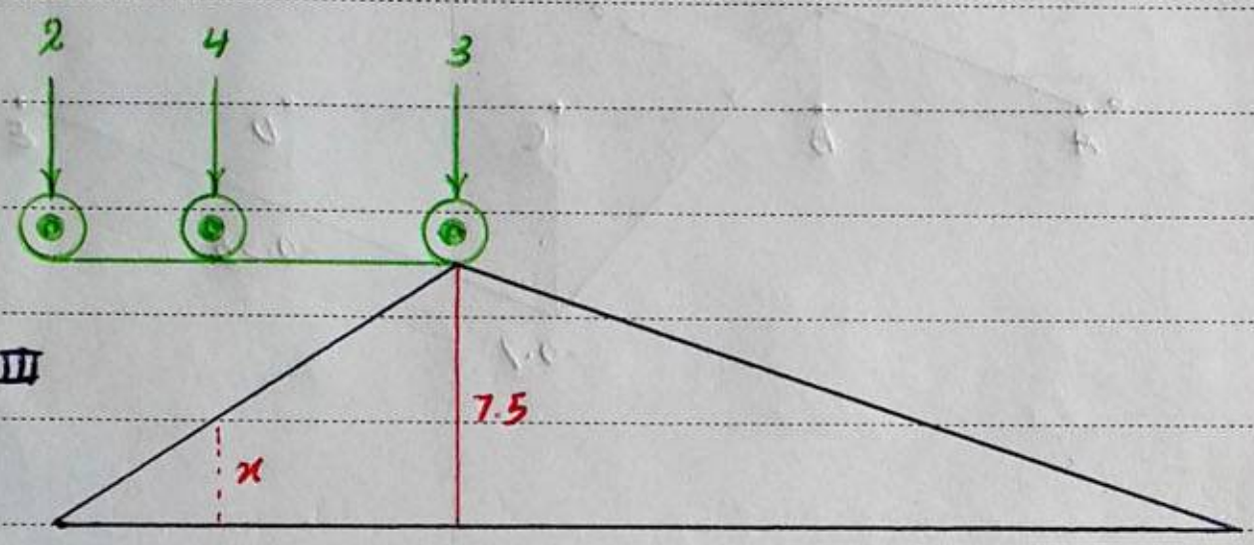


$$x: \frac{7.5}{30} = \frac{x}{24} \Rightarrow x = 6$$

$$x_1: \frac{7.5}{10} = \frac{x_1}{6} \Rightarrow x_1 = 4.5$$

$$M_C = (2 \times 4.5) + (4 \times 7.5) + (3 \times 6) = 57 \text{ kft}$$

Case III



$$x: \frac{7.5}{10} = \frac{x}{4} \Rightarrow x = 3$$

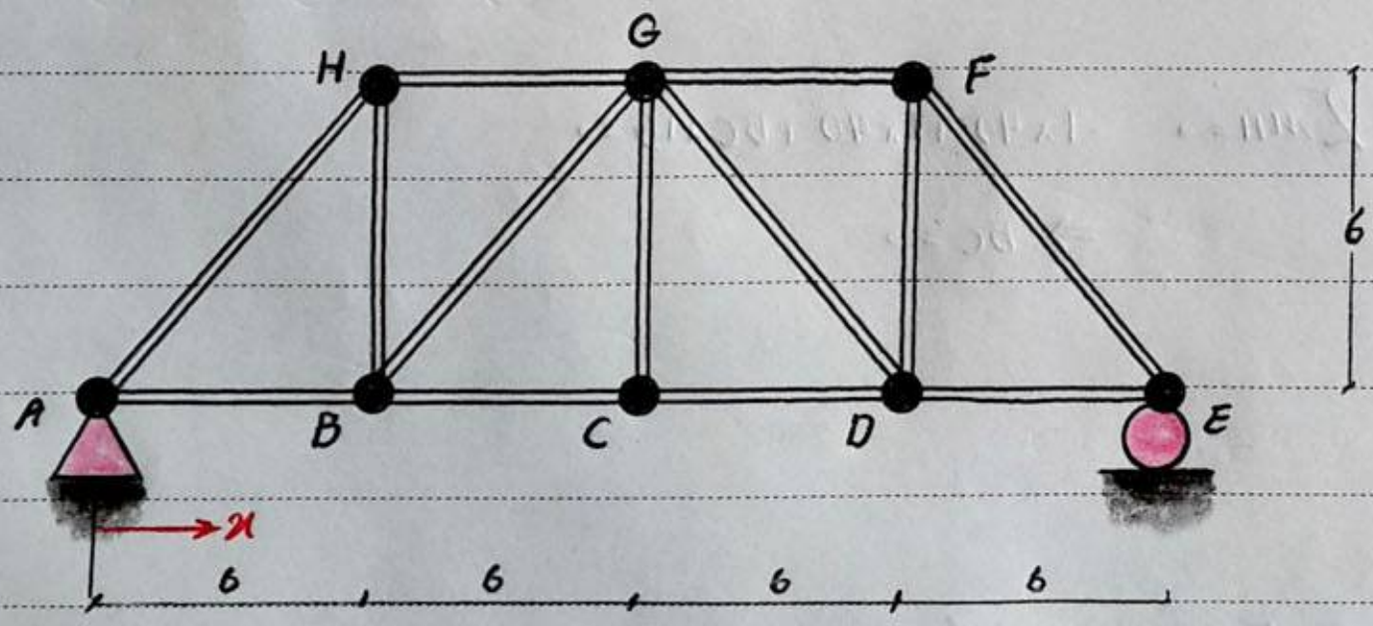
$$M_C = (2 \times 0) + (4 \times 3) + (3 \times 7.5) = 34.5 \text{ kft}$$

$$\Delta M = PS(x_2 - x_1)$$

$$M_{1-2} = -2 \times \frac{7.5}{10} \times 4 + (4+3) \times \frac{7.5}{30} \times 4 = 1$$

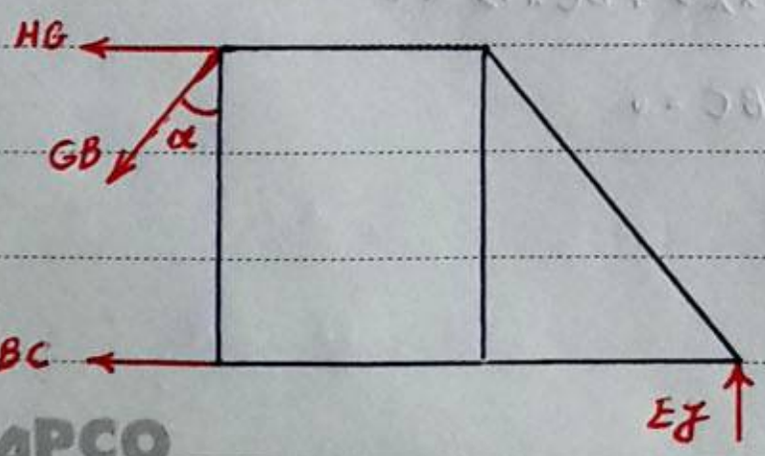
$$M_{2-3} = -(2+4)\frac{7.5}{10} \times 6 + (3 \times \frac{7.5}{30} \times 6) = -22.5$$

خط تاثیر خرپا



خط تاثیر GB را رسم کنید

زمانی که بار در کف سازه در حال حرکت است



$\alpha = 45^\circ$

اگر بار گذاری قبل از نقطه C باشد کنگ داریم؟

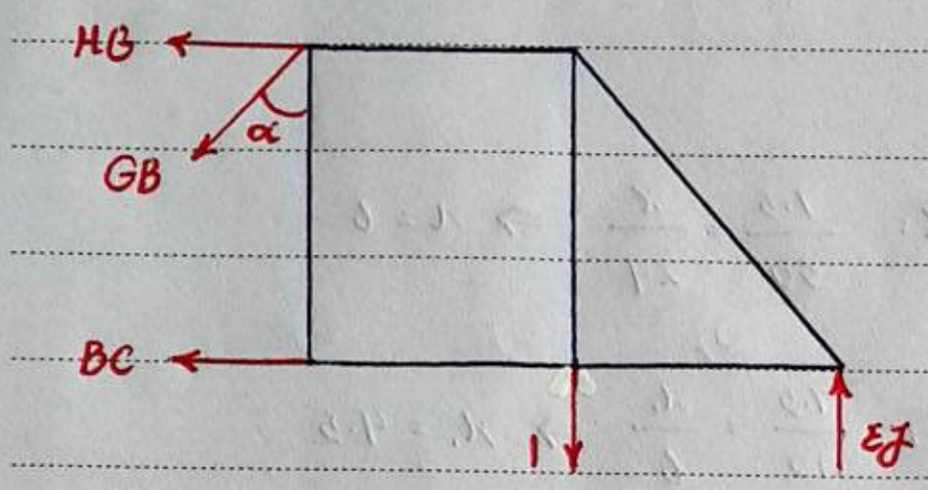
$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad Ey - GB\cos 45^\circ = 0 \Rightarrow GB = \frac{Ey}{\cos 45^\circ} = \sqrt{2}\,Ey$$

PAPCO

ali_intel66@yahoo.com

Subject :

Year . Month . Date . ( )

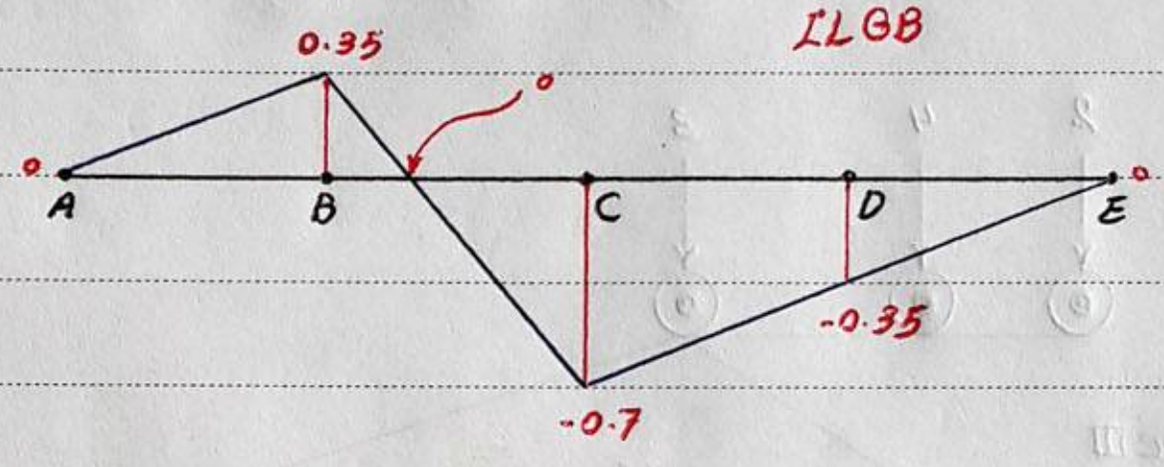


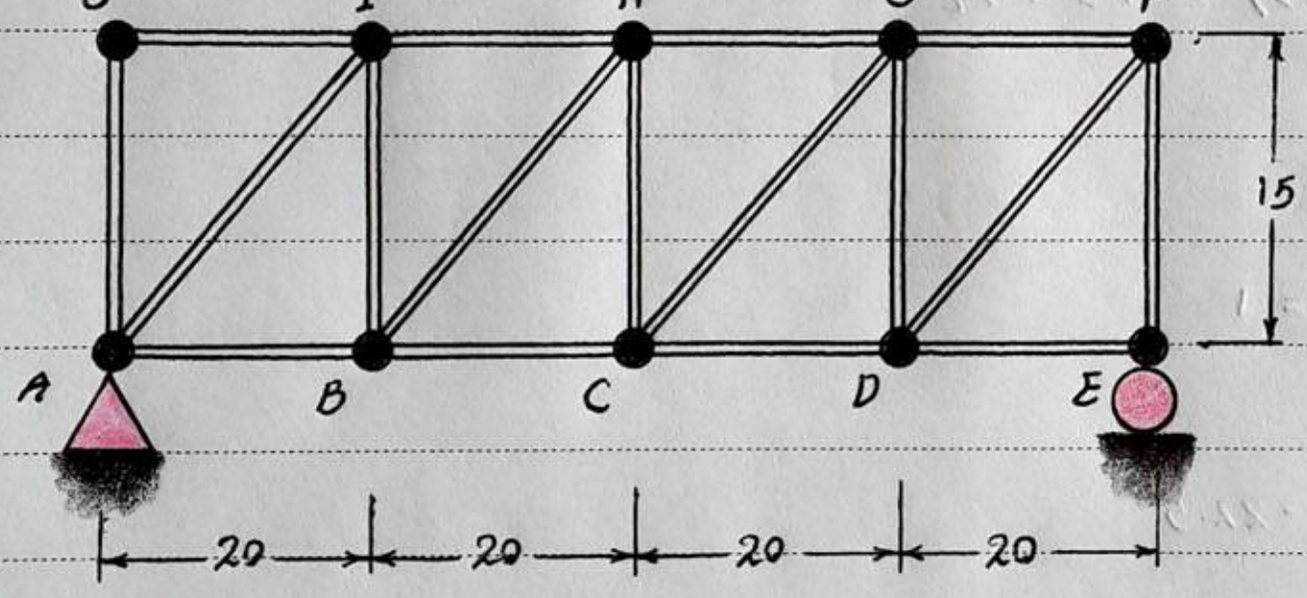
$\alpha = 45^\circ$

اگر مقدار بارگذاری از C به بعد باشد

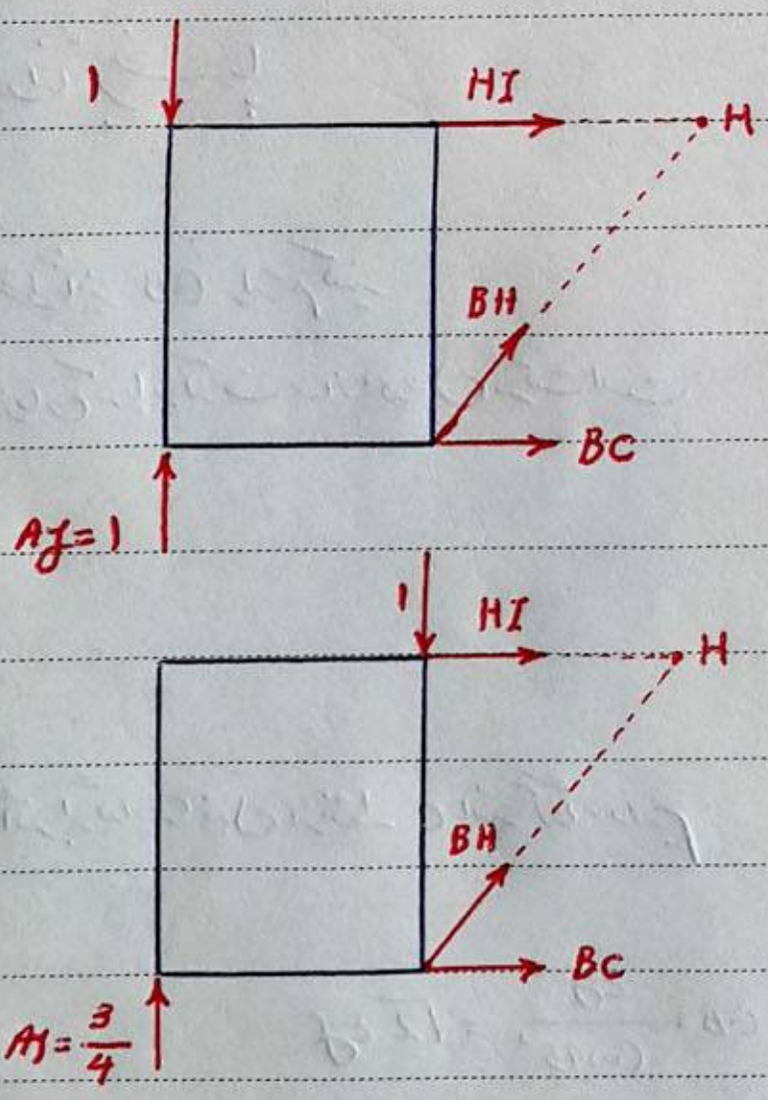
$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad Ey - 1 - GB\cos 45^\circ = 0 \Rightarrow GB = \frac{Ey-1}{\cos 45} = \sqrt{2}(Ey-1)$

x	EJ	GB
0	0	0
6	$\frac{1}{4}$	0.35
12	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
18	$\frac{3}{4}$	-0.35
24	1	0





- حاکثر نیروی عضو BC در اثر زیر دقتر که نیروی متحرک 20kN و بارگذاری متحرک 0.6 kN از سمت نامالبی فرضا عبور کند را بیابید ؛



$+\circlearrowleft \sum M_H = 0 \quad -1\times 40 + 1\times 40 + BC\times 15 = 0$

$\Rightarrow BC = 0$

$+\circlearrowleft \sum M_H = 0 \quad -\frac{3}{4}(40) + 1\times 20 + BC\times 15 = 0$

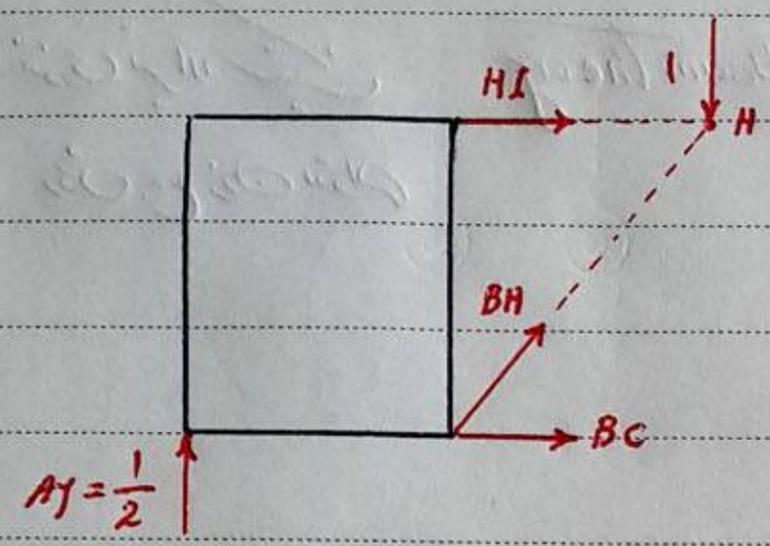
$-30 + 20 + 15BC = 0$

$BC = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$

ali_intel66@yahoo.com

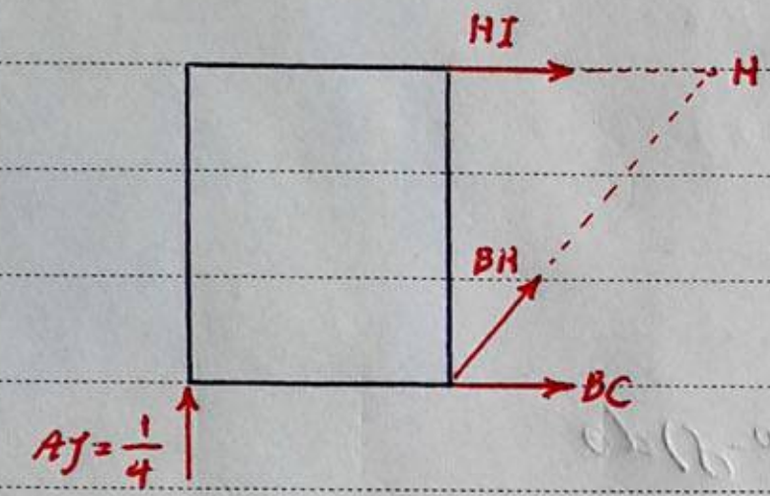
PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )



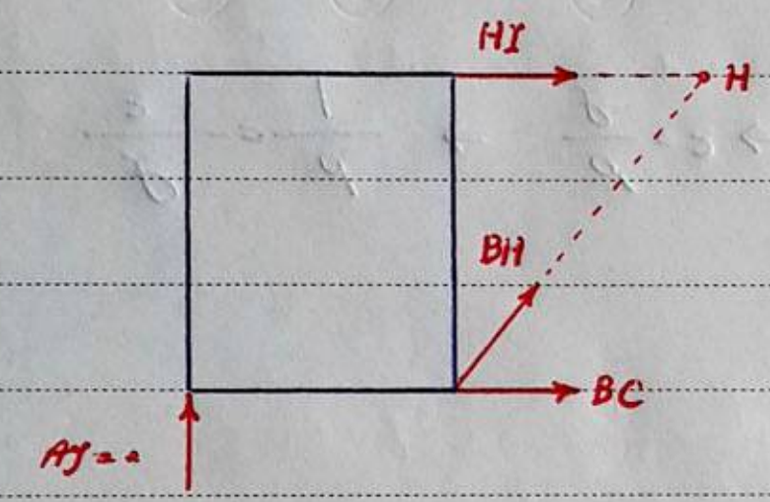
$+\circlearrowleft \sum M_H = 0 \quad -\frac{1}{2}(40) + BC\,15 = 0$

$-20 + 15BC = 0 \quad \Rightarrow BC = \frac{4}{3}$



$+\circlearrowleft \sum M_H = 0 \quad -\frac{1}{4}(40) + BC15 = 0$

$-10 + 15BC = 0 \quad \Rightarrow BC = \frac{2}{3}$

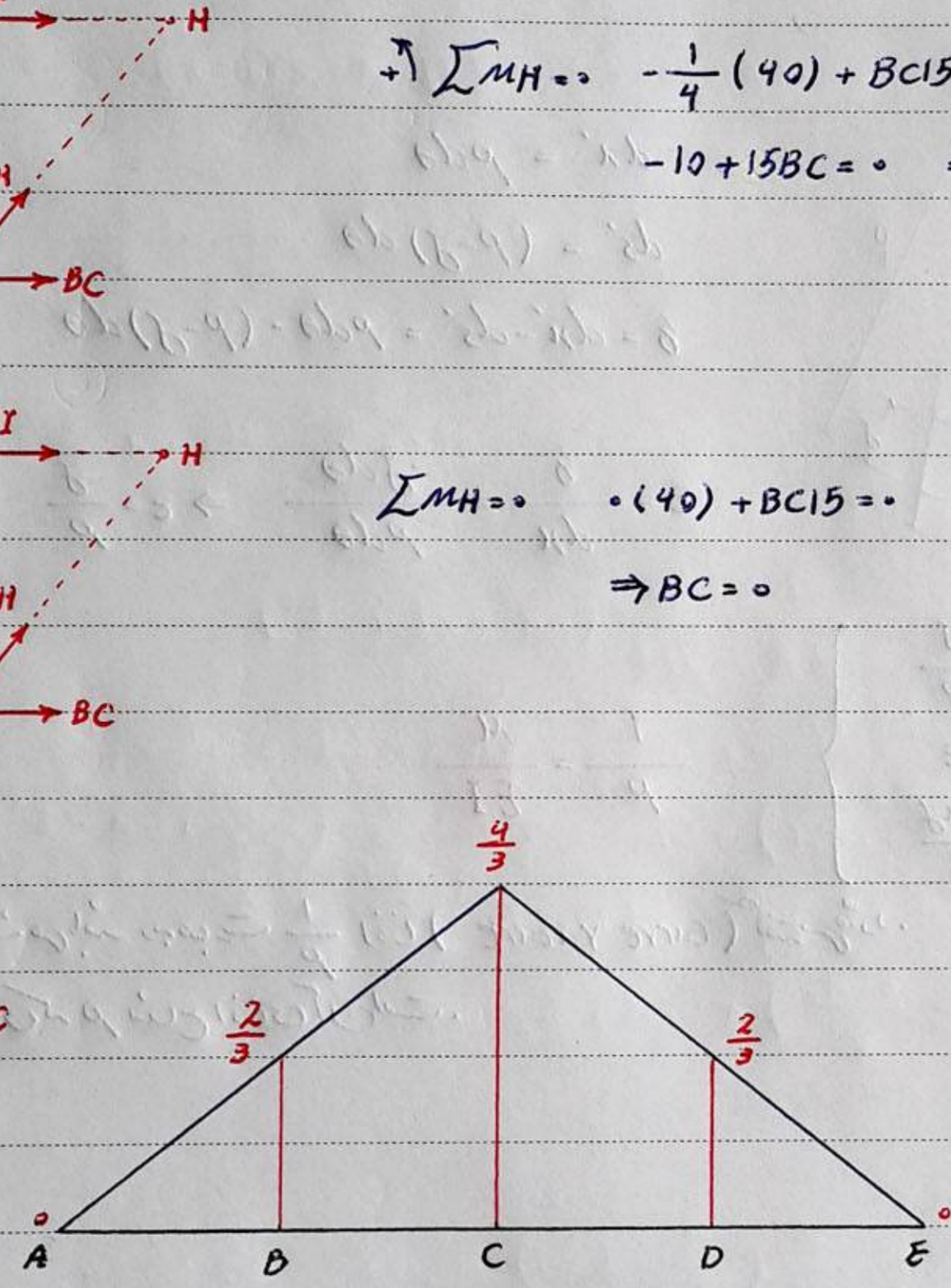


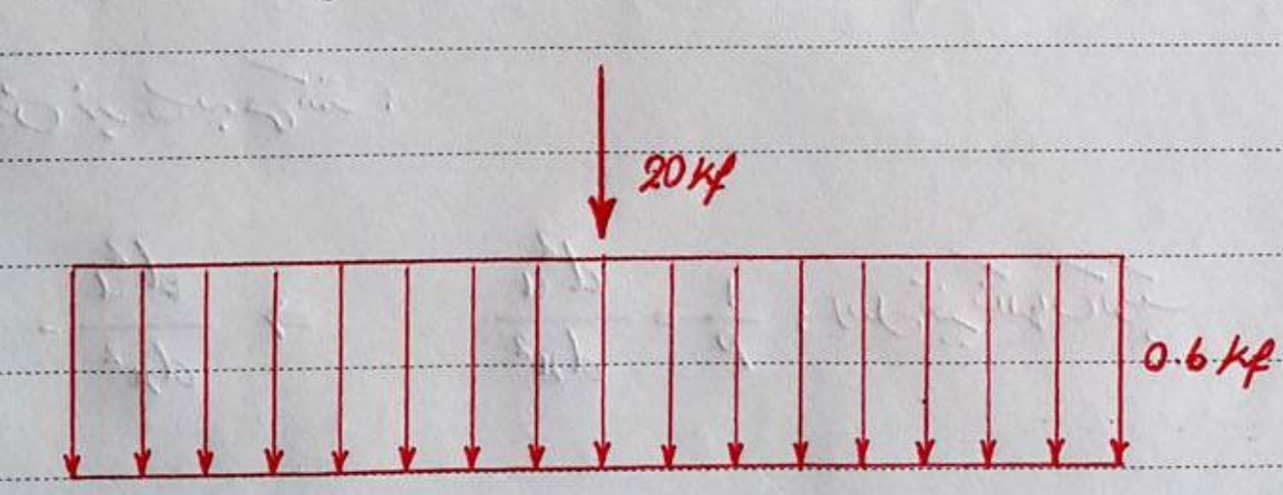
$\sum M_H = 0 \quad 0(40) + BC15 = 0$

$\Rightarrow BC = 0$

x	BC
0	0
20	$\frac{2}{3}$
40	$\frac{4}{3}$
60	$\frac{2}{3}$
80	0

IL BC



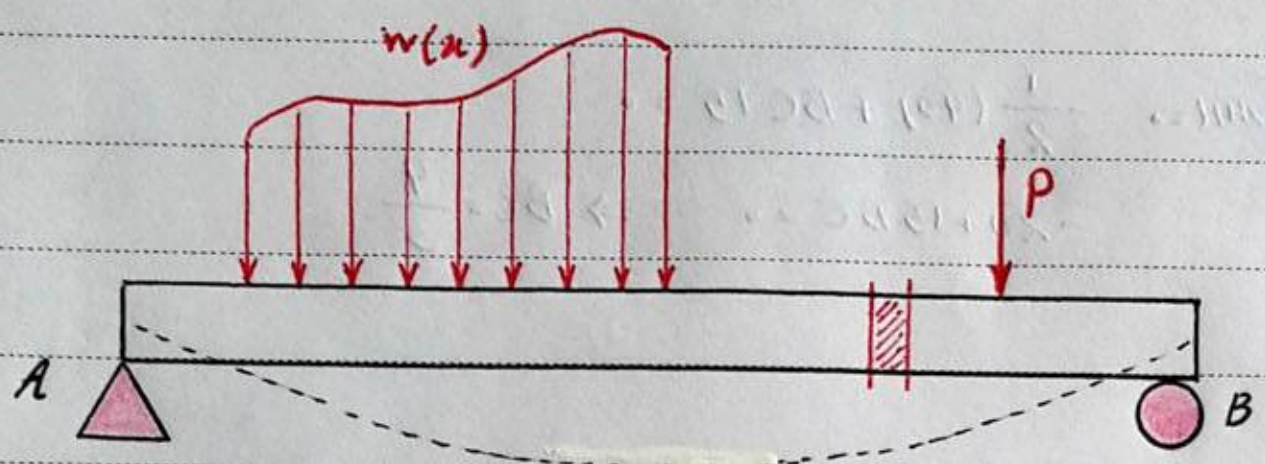


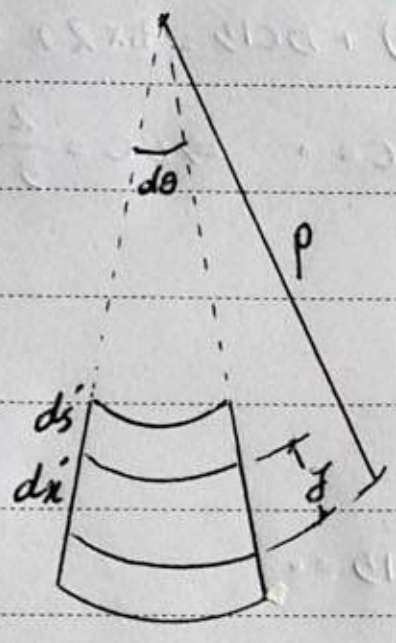
$BC = 20 \times \frac{4}{3} + \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3} \times 0.6 \times 80\right) = 58.66\,kf \quad T$

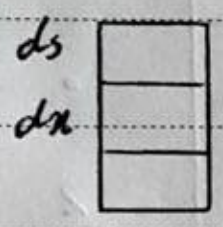
ali_intel66@yahoo.com

Elastic Beam theory — تئوری تیر الاستیک

روش جمع زدن لنگر







$ds = dx$

$dx' = \rho d\theta$

$ds' = (\rho - y)\, d\theta$

$\delta = dx' - ds' = \rho d\theta - (\rho - y) d\theta$

$$\varepsilon = \frac{\delta}{dx} = \frac{-y d\theta}{\rho d\theta} \Rightarrow \varepsilon = \frac{-y}{\rho} \Rightarrow \frac{1}{\rho} = -\frac{\varepsilon}{y}$$

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon &= -\frac{y}{\rho} \\ \sigma &= E\varepsilon \\ \sigma &= -\frac{My}{I} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

ρ : شعاع انحنای تیر الاستیک می‌باشد و به عبارت $\frac{1}{\rho}$ انحنا (curve vature) گفته می‌شود.

M : هنگر داخلی تیر در نقطه‌ای که ρ شعاع انحنای آن است.

E : مدول الاستیسیته

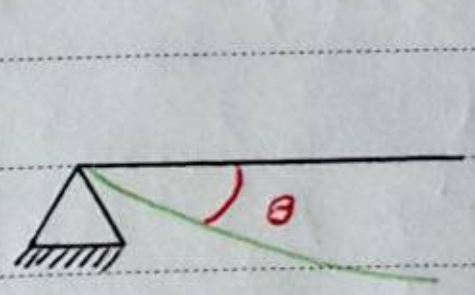
I : ممان اینرسی تیر

- در ریاضیات $\frac{1}{\rho}$ را به روش زیر محاسبه می‌کنند :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2u}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{du}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

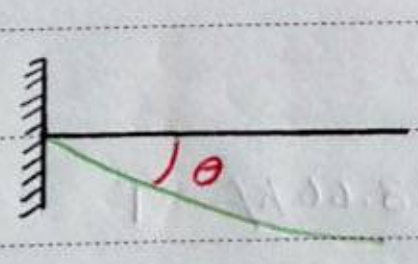
اصل تغییر شکلهای کوچک : $\frac{1}{\rho} = \frac{d^2u}{dx^2} \Rightarrow \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{M}{EI}$

شرایط مرزی



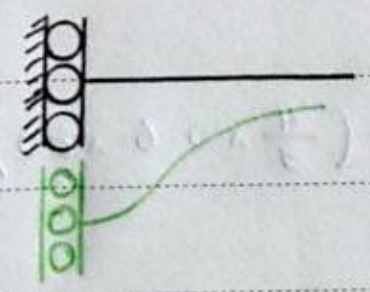
$u = 0$

$\theta = \checkmark$



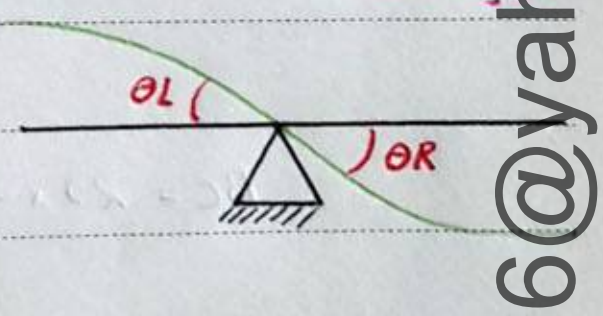
$\theta = 0$

$u = 0$



$u = \checkmark$

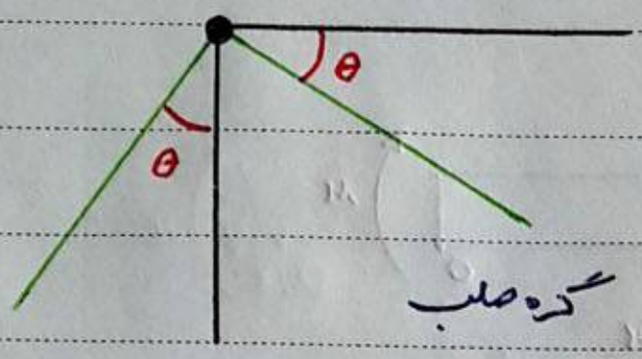
$\theta = 0$



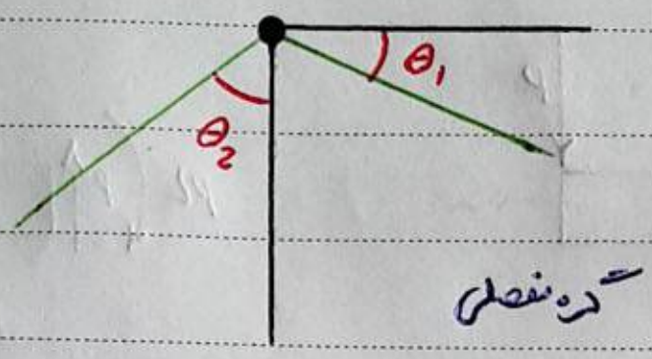
$u = 0$

$\theta L = \theta R$

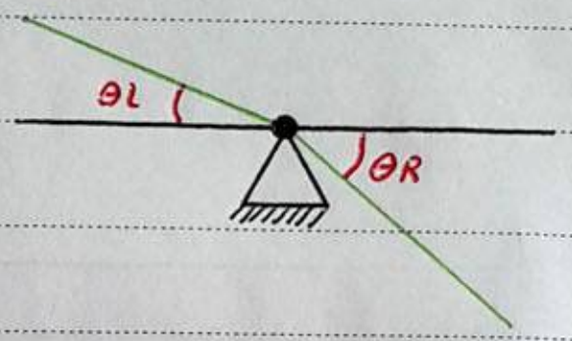
ali_intel66@yahoo.com



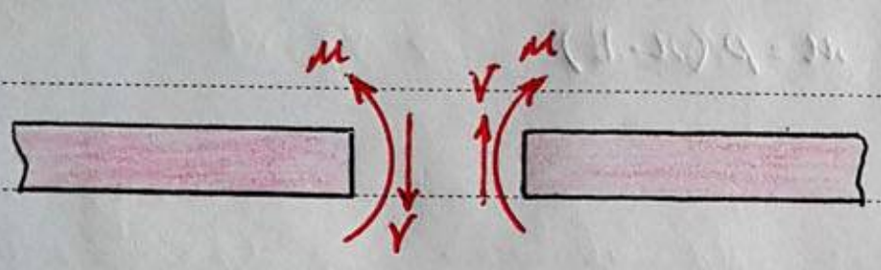
$\theta = \theta$

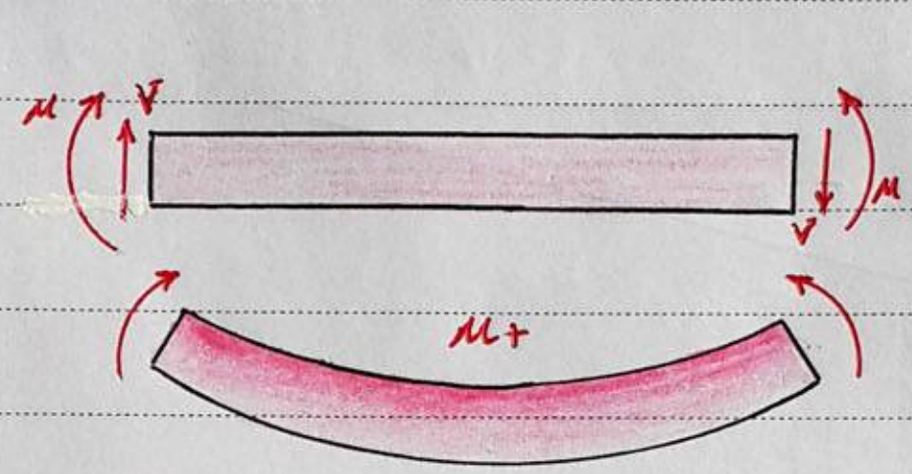


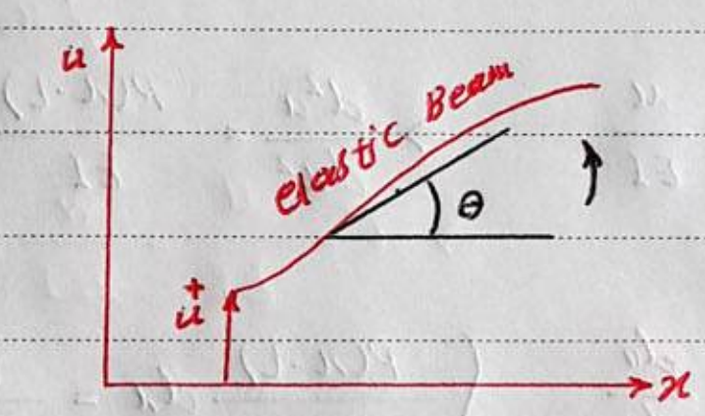
$\theta_1 \neq \theta_2$



$\theta L \neq \theta R$







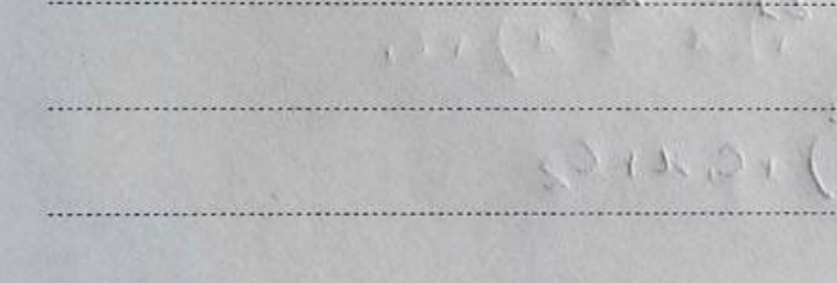
روش حل

۱) منحنی تغییرات لنگر خمشی تیر رسم می‌شود، تابع یا توابع آن برحسب x نوشته می‌شود.

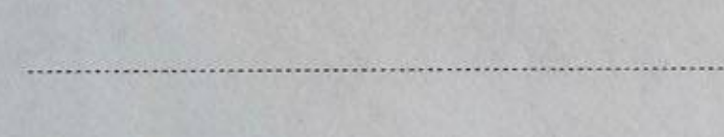
۲) یکبار انتگرال گیری از تابع لنگر معادله شیب یا θ بدست خواهد آمد.

۳) یکبار انتگرال گیری از تابع یا معادله شیب (یا دوبار انتگرال گیری از تابع لنگر) تابع تغییر مکان یا u بدست خواهد آمد.

پس از هر بار انتگرال گیری ضرایب ثابتی در معادله بوجود می‌آید که با استفاده از شرایط مرزی مقدار آن ضرایب محاسبه خواهد شد؛



$M(x) = M_0$



$$\frac{d^2u}{dx^2} = u'' = \frac{M}{EI} = \frac{M_0}{EI}$$

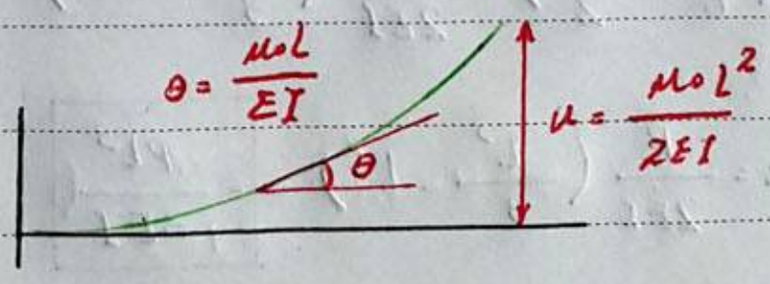
(شیب) $\theta = \frac{du}{dx} = \frac{M_0}{EI}x + C_1$

(تغییرمکان) $u = \frac{M_0}{2EI}x^2 + C_1 x + C_2$

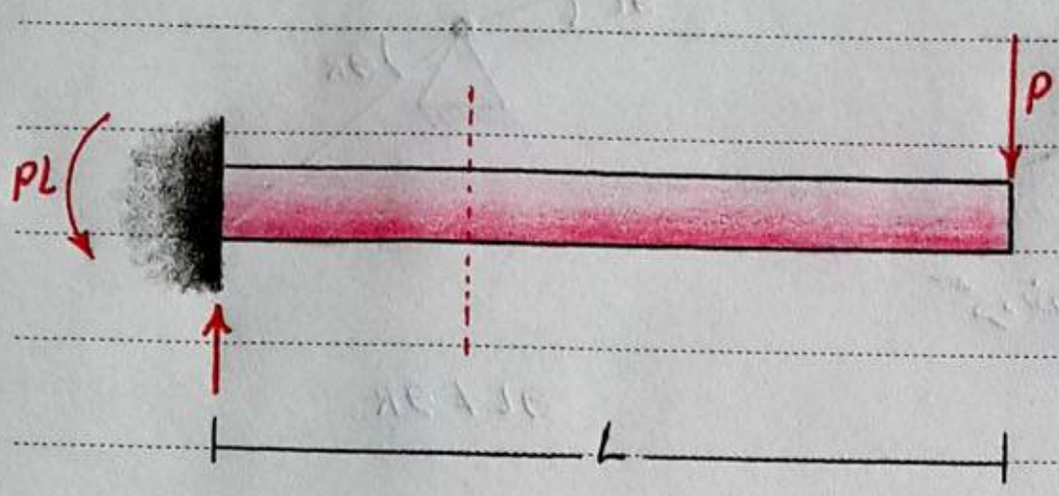
شرایط مرزی

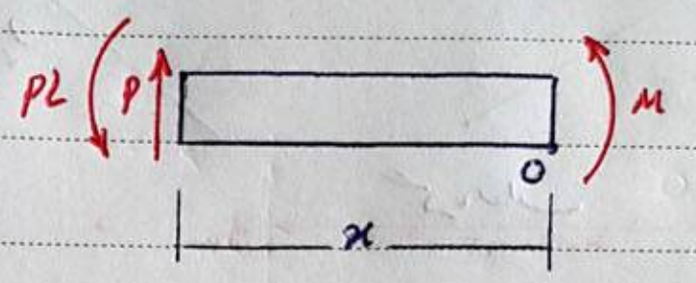
$x=0 \quad u=0 \quad 0 = \frac{M_0}{2EI}\cdot 0 + 0 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

$x=0 \quad \theta=0 \quad 0 = \frac{M_0}{EI}\cdot 0 + C_1 \Rightarrow C_1 = 0$



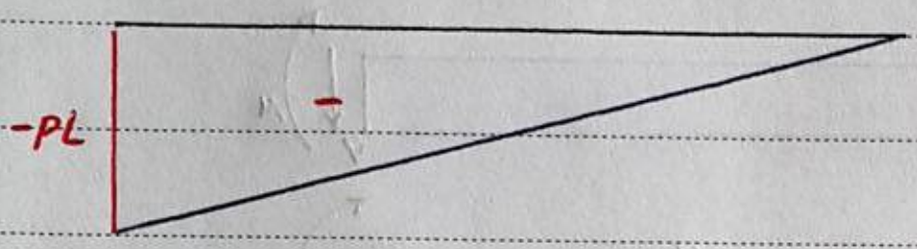
PAPCO
ali_intel66@yahoo.com





$+\circlearrowleft \sum M_o = 0 \qquad M + PL - Px = 0$

$M = P(x-L)$



$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{M}{EI} \Rightarrow \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{P(x-L)}{EI}$$

معادله شیب: $\theta = \frac{du}{dx}$ $\qquad \int \frac{P(x-L)}{EI}\,dx = \frac{P}{EI}\int (x-L)\,dx = \frac{P}{EI}\left(\frac{x^2}{2} - Lx\right) + C_1$

معادله تغییر شکل: $u = \int \left[\frac{P}{EI}\left(\frac{x^2}{2} - Lx\right)\right] + C_1\,dx = \frac{P}{EI}\left(\frac{x^3}{6} - \frac{Lx^2}{2}\right) + C_1 x + C_2$

۱) $x = 0 \quad \theta = 0$ براساس شرایط مرزی

$0 = \frac{P}{EI}\left(\frac{x^2}{2} - Lx\right) + C_1 \xrightarrow{x=0} \frac{P}{EI}\left(\frac{0^2}{2} - L(0)\right) + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

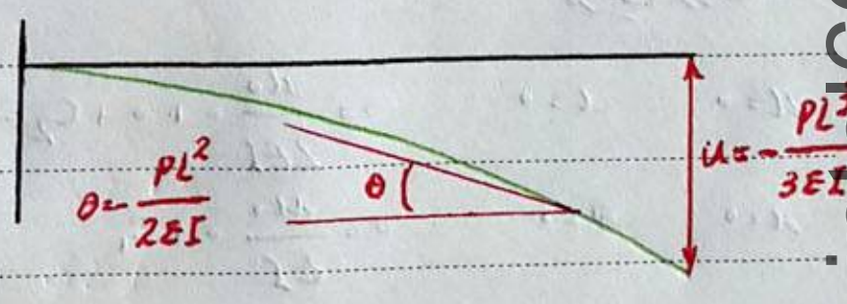
۲) $x = 0 \quad u = 0$

$0 = \frac{P}{EI}\left(\frac{x^3}{6} - \frac{Lx^2}{2}\right) + C_1 x + C_2 \xrightarrow{x=0} \frac{P}{EI}\left(\frac{0^3}{6} - \frac{L0}{2}\right) + C_1(0) + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

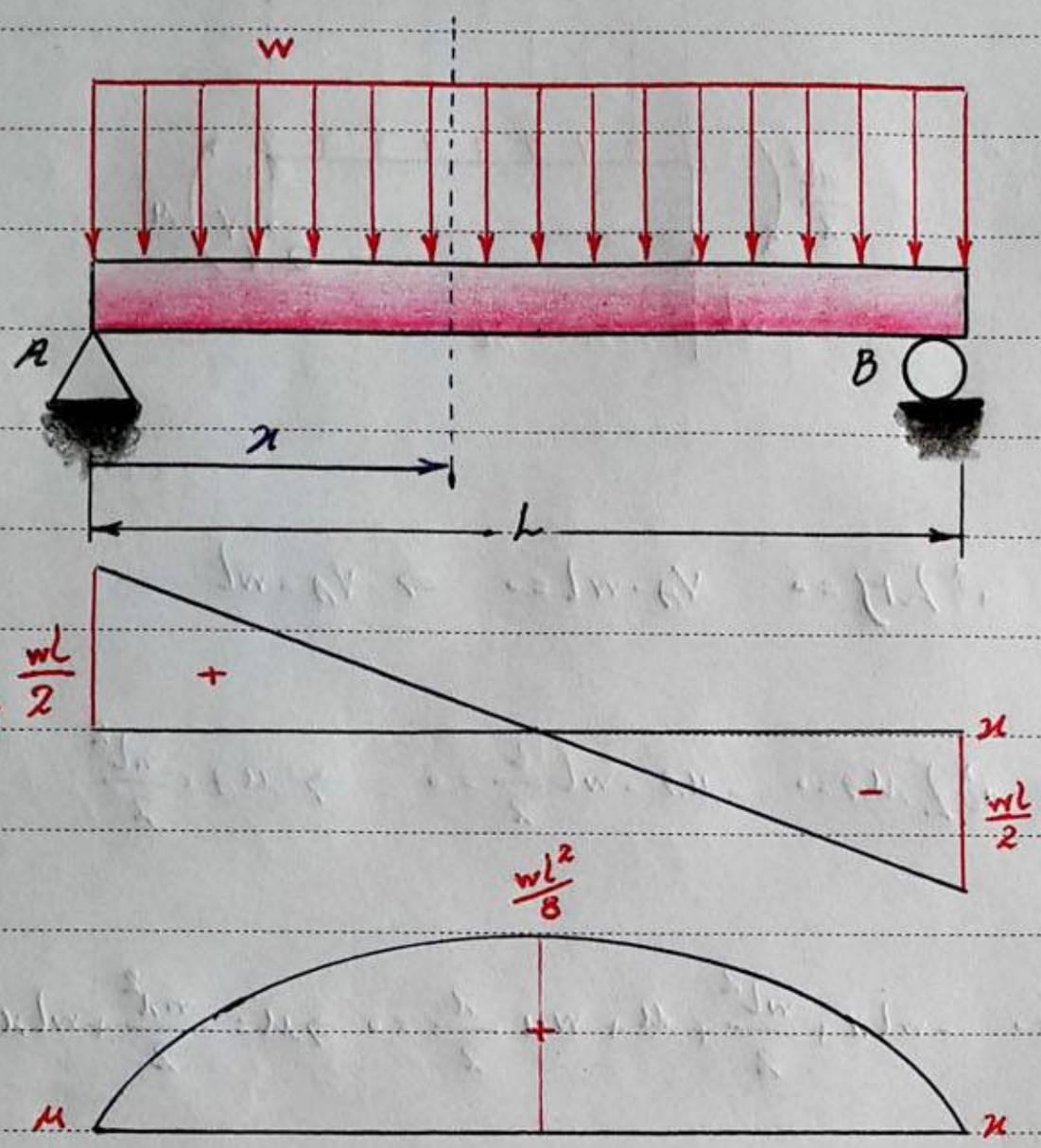
$\theta = \frac{P}{EI}\left(\frac{x^2}{2} - Lx\right) \quad x = L \quad \theta = \frac{P}{EI}\left(\frac{L^2}{2} - L^2\right) = \boxed{-\frac{PL^2}{2EI}}$

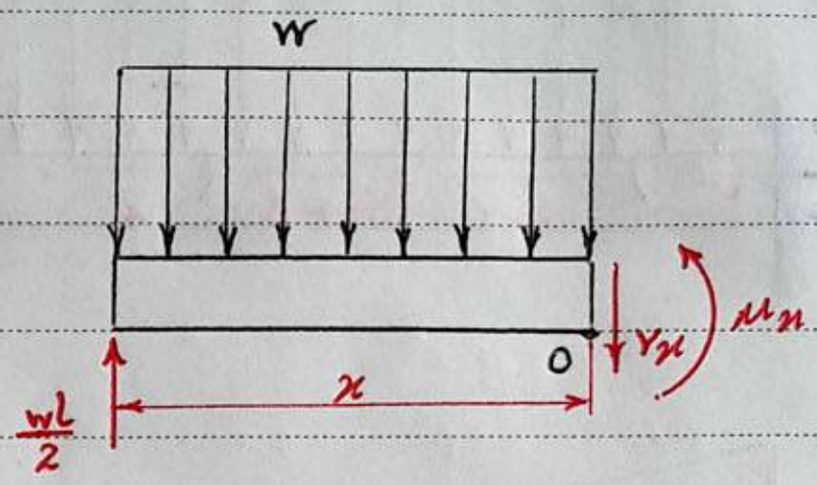
$u = \frac{P}{EI}\left(\frac{x^3}{6} - \frac{Lx^2}{2}\right) = \frac{P}{2EI}\left(\frac{x^3}{3} - Lx^2\right)$

$x = L \quad u = \frac{P}{2EI}\left(\frac{L^3}{3} - L^3\right) = \boxed{-\frac{PL^3}{3EI}}$



ali_intel66@yahoo.com





$$+\circlearrowleft \sum M_O = 0 \quad -\frac{wL}{2}x + M + wx\frac{x}{2} = 0$$

$$\Rightarrow M = \frac{wL}{2}x - \frac{wx^2}{2}$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = u'' = \frac{M}{EI} \quad \Rightarrow u'' = \frac{1}{EI}\left(\frac{wL}{2}x - \frac{wx^2}{2}\right) = \frac{w}{EI}\left(\frac{L}{2}x - \frac{x^2}{2}\right)$$

$$\theta = \frac{w}{2EI}\left(\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) + C_1$$

$$u = \frac{w}{2EI}\left(\frac{Lx^3}{6} - \frac{x^4}{12}\right) + C_1 x + C_2$$

$x = 0 \quad u = 0$ با این شرایط مرزی قید طریم؛

$$0 = \frac{w}{2EI}(0 - 0)0 + C_2 \quad \Rightarrow C_2 = 0$$

$x = L \quad u = 0$

$$0 = \frac{w}{2EI}\left(\frac{L^4}{6} - \frac{L^4}{6}\right) + C_1 L \quad \Rightarrow \quad 0 = \frac{w}{2EI}\left(\frac{L^4}{6}\right) + C_1 L \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{-wL^3}{12EI}$$

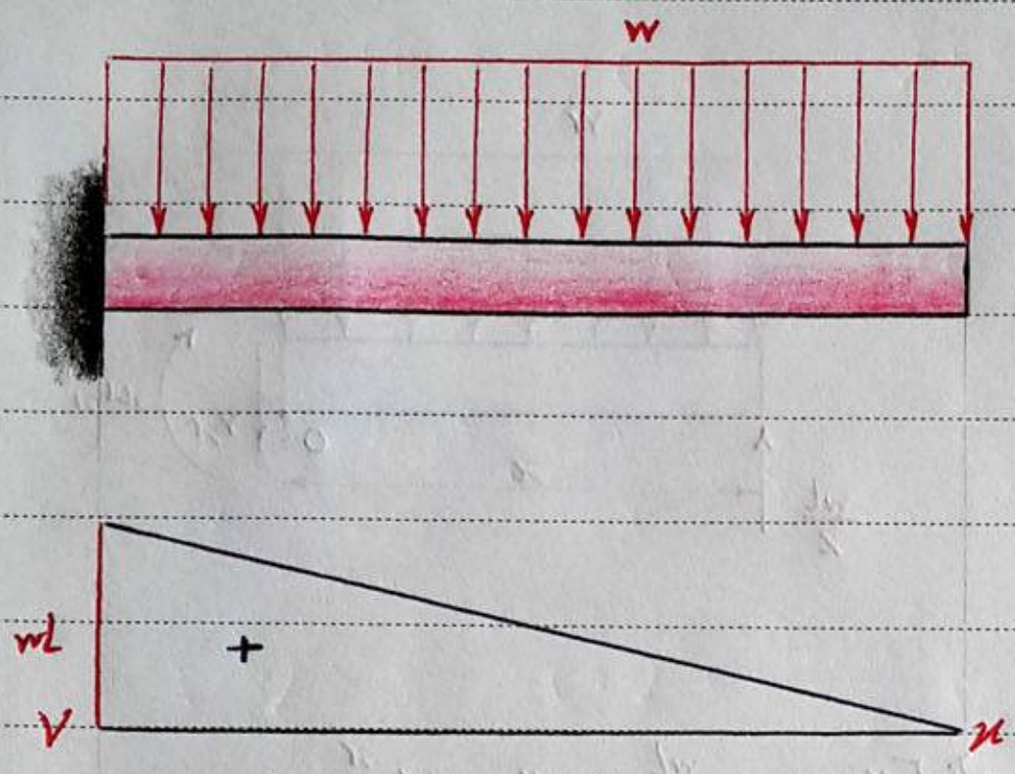
$$u = \frac{w}{2EI}\left(\frac{Lx^3}{6} - \frac{x^4}{12}\right) - \frac{wL^3}{12EI}\cdot x \quad \Rightarrow u = \frac{w}{24EI}(-x^4 + 2Lx^3 - L^3x)$$

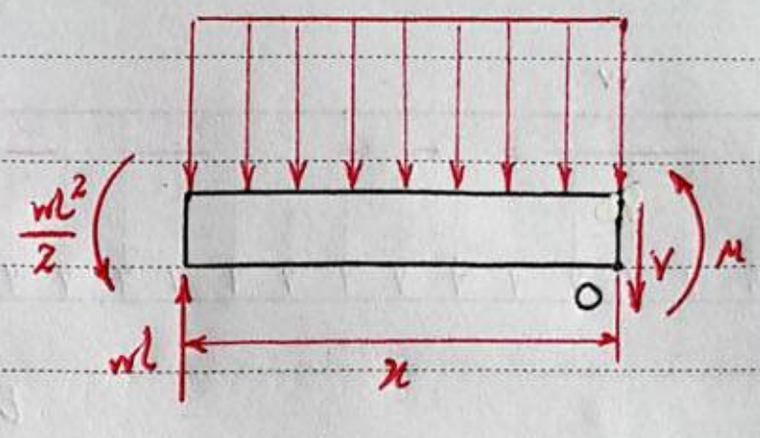
$u_{max} = ?$

$x = \frac{L}{2} \Rightarrow \theta = 0 \; , u = u_{max}$

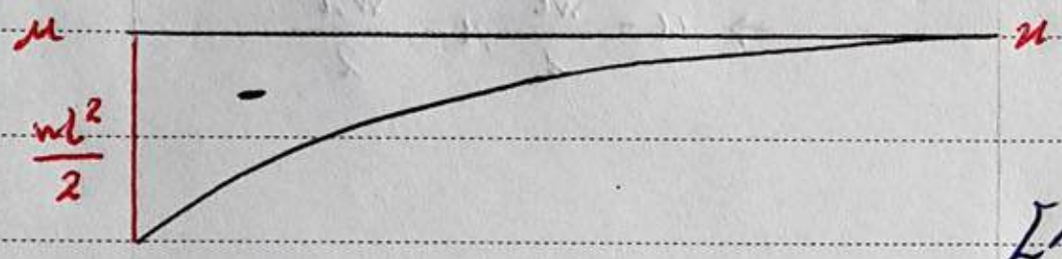
$$u_{max} = \frac{w}{24EI}\left[-\left(\frac{L}{2}\right)^4 + 2L\left(\frac{L}{2}\right)^4 - L^3\left(\frac{L}{2}\right)\right] = -\frac{5}{384}\frac{wL^4}{EI}$$

PAPCO
ali_intel66@yahoo.com





$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad V_A - wL = 0 \Rightarrow V_A = wL$



$+) \sum M_A = 0 \quad -M_A - wL\frac{L}{2} = 0 \Rightarrow M_A = -\frac{wL^2}{2}$

$\sum M_O = 0 \quad -wLx + \frac{wL^2}{2} + M + wx\frac{x}{2} = 0 \Rightarrow M = -\frac{wx^2}{2} + wLx - \frac{wL^2}{2}$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = u'' = \frac{M}{EI} \Rightarrow u'' = \frac{M}{EI} = \frac{w}{2EI}(-x^2 + 2Lx - L^2)$$

با انتگرال‌گیری $\theta = \frac{w}{2EI}\left(\frac{-x^3}{3} + \frac{2Lx^2}{2} - L^2x\right) + C_1 \Rightarrow \theta = \frac{w}{2EI}\left(-\frac{x^3}{3} + Lx^2 - L^2x\right) + C_1$

$$u = \frac{w}{2EI}\left(-\frac{x^4}{12} + \frac{Lx^3}{3} - \frac{L^2x^2}{2}\right) + C_1x + C_2$$

$x = 0 \quad u = 0$ با این شرایط مرزی تعیین می‌کنیم

$$0 = \frac{w}{2EI}(0) + C_1(0) + C_2 \Rightarrow C_2 = 0$$

$x = 0 \quad \theta = 0$

$$0 = \frac{w}{2EI}(0) + C_1 \Rightarrow C_1 = 0$$

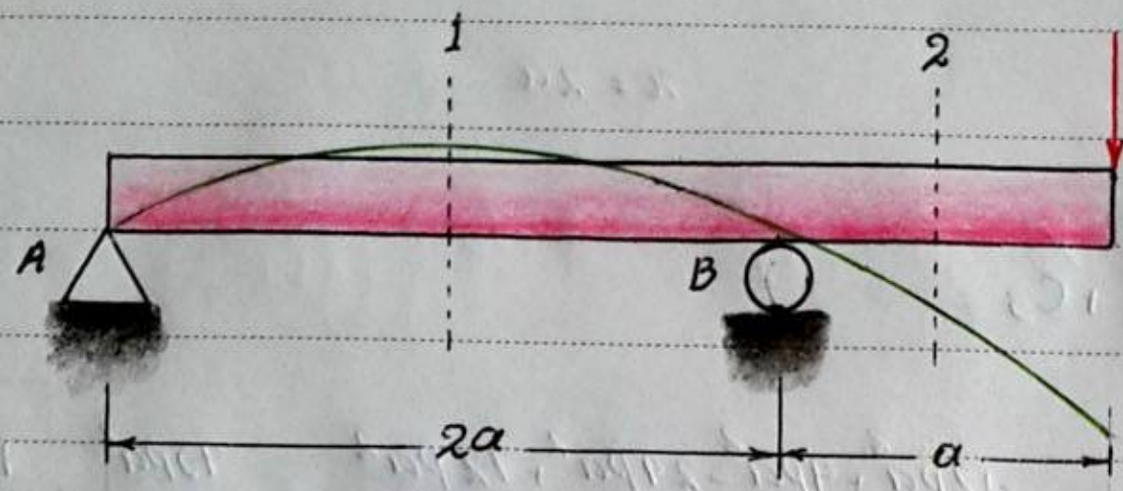
$$u = \frac{w}{24EI}(-x^4 + 4Lx^3 - 6L^2x^2)$$

$u_{max} = ?$

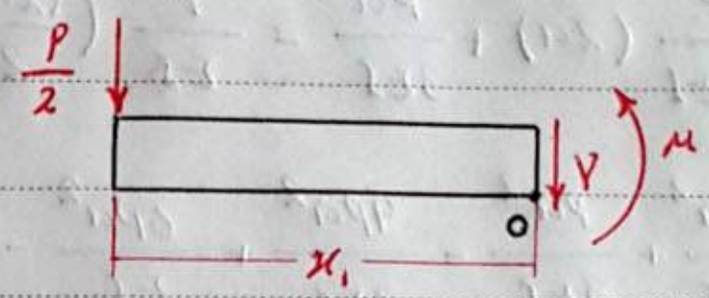
$x = L \Rightarrow u_{max} = \frac{w}{24EI}(-L^4 + 4L^4 - 6L^4) = -\frac{wL^4}{8EI}$

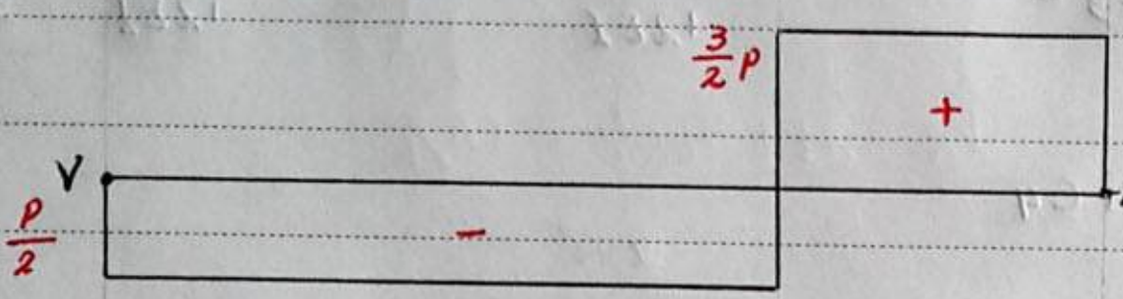
PAPCO
ali_intel66@yahoo.com

Subject:
Year. Month. Date. ( )



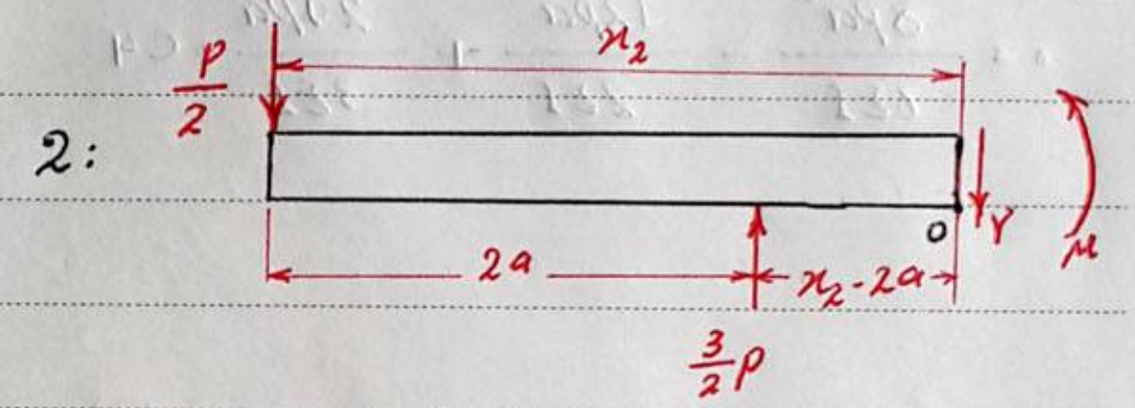
$B_y = \frac{3}{2}P \uparrow \qquad A_y = \frac{P}{2} \downarrow$





$\sum M_O = 0 \qquad M + \frac{P}{2}x_1 = 0 \qquad \Rightarrow M = -\frac{P}{2}x_1$

$0 < x_1 < 2a$



$\sum M_O = 0 \qquad M + \frac{P}{2}x_2 - \frac{3}{2}P(x_2 - 2a) = 0 \qquad \Rightarrow M = -\frac{P}{2}x_2 + \frac{3P}{2}(x_2 - 2a) = Px_2 - 3Pa$

$2a < x_2 < 3a$

for x_1: $\frac{d^2u}{dx_1^2} = -\frac{P}{2}x_1 \xrightarrow[\theta = ?]{\int ①} \theta = -\frac{P}{4EI}x^2 + C_1 \xrightarrow[u = ?]{\int ②} u = -\frac{P}{12EI}x^3 + C_1x_1 + C_2$

for x_2: $\frac{d^2u}{dx_2^2} = Px_2 - 3Pa \xrightarrow[\theta]{\int} \theta = \frac{P}{EI}\left(\frac{x_2^2}{2} - 3ax\right) + C_3$

$\xrightarrow[u]{\int} u = \frac{P}{EI}\left(\frac{x_2^3}{6} - \frac{3ax^2}{2}\right) + C_3x + C_4$

$u = -\frac{P}{12EI}x^3 + C_1x_1 + C_2 \xrightarrow{E,I \text{ مقادیر ثابت}} u = -\frac{P}{12}x^3 + C_1x_1 + C_2$

$x = 0 \qquad u = 0$

$0 = -\frac{P}{12}(0) + C_1(0) + C_2 \Rightarrow \boxed{C_2 = 0}$

$x = 2a \qquad u = 0$

$0 = -\frac{P}{12}(2a)^3 + C_1(2a) + 0 \Rightarrow 0 = -\frac{4Pa^2}{12} + C_1 \Rightarrow \boxed{C_1 = \frac{Pa^2}{3}}$

$x = 2a \qquad u = 0$

$0 = \frac{P}{6}(2a)^3 - \frac{3}{2}Pa(2a)^2 + C_3(2a) + C_4 = 0$

$\theta_{LB} = \theta_{RB}$

$\theta_{LB} = -\frac{P}{4EI}x^2 + C_1 \quad , \quad \theta_{RB} = \frac{P}{EI}\left(\frac{x_2^2}{2} - 3ax\right) + C_3$

PdPCO

ali_intel66@yahoo.com

$$\Rightarrow \quad -\frac{P}{4EI}x^2 + C_1 = \frac{P}{EI}\left(\frac{x_2^2}{2} - 3ax\right) + C_3 \qquad x = 2a$$

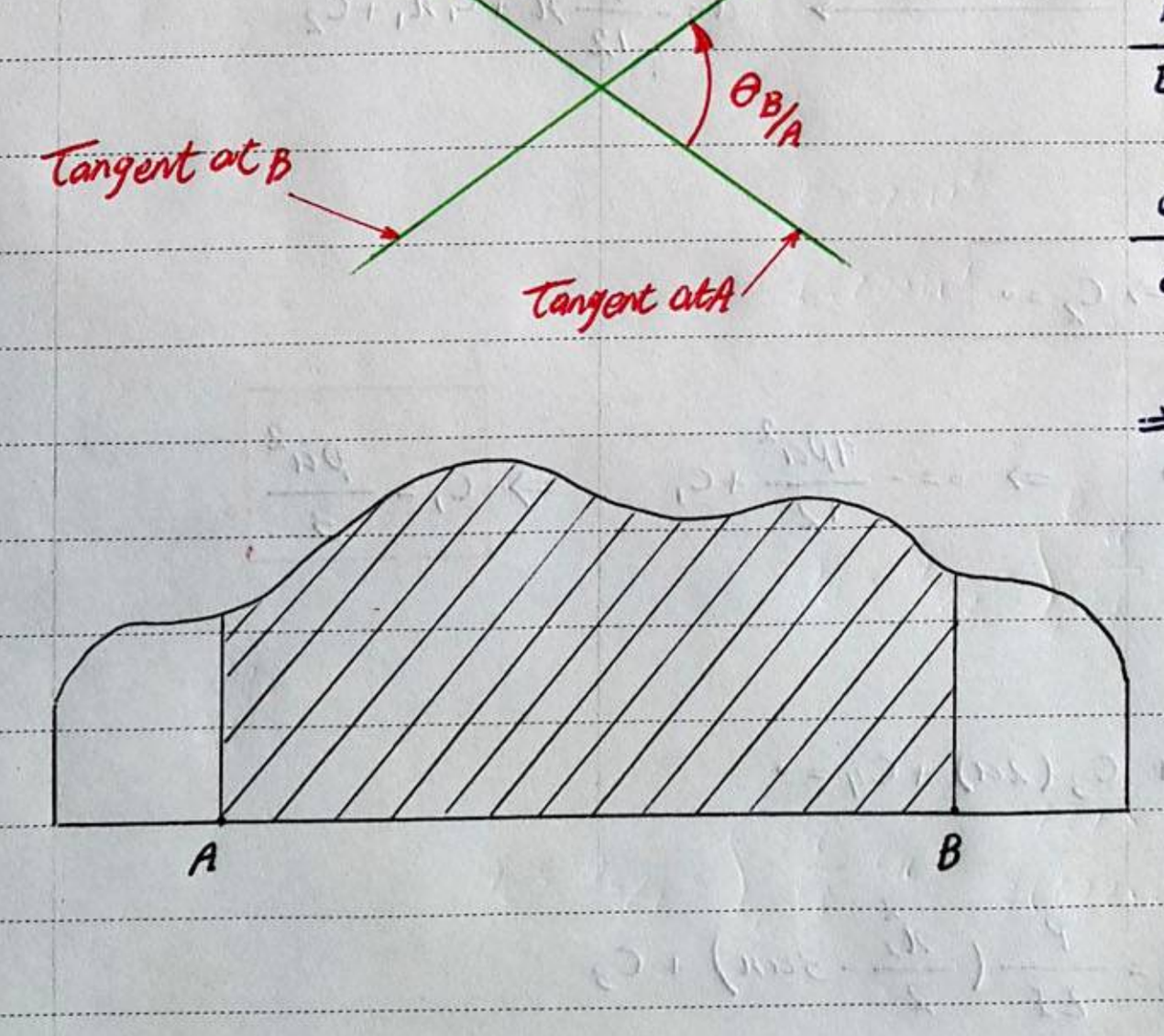
$$-\frac{P}{4EI}(2a)^2 + \frac{Pa^2}{3EI} = \frac{P}{EI}\left(\frac{(2a)^2}{2} - 3a(2a)\right) + C_3$$

$$-\frac{4Pa^2}{4EI} + \frac{Pa^2}{3EI} - \frac{4Pa^2}{2EI} + \frac{6Pa^2}{EI} - C_3 = 0 \quad \Rightarrow C_3 = \frac{-12Pa^2 + 4Pa^2 - 24Pa^2 + 72Pa^2}{12EI} = \frac{40Pa^2}{12EI} = \boxed{\frac{10Pa^2}{3EI}}$$

$$0 = \frac{P}{6EI}(2a)^3 - \frac{3}{EI2}Pa(2a)^2 + \frac{10Pa^2}{3EI}(2a) + C_4$$

$$0 = \frac{8Pa^3}{6EI} - \frac{12Pa^3}{2EI} + \frac{20Pa^3}{3EI} + C_4 \qquad \Rightarrow C_4 = \frac{8Pa^3 - \overbrace{36Pa^3}^{4Pa^3} + 40Pa^3}{6EI} = \frac{12Pa^3}{6EI} = \boxed{-2Pa^3}$$

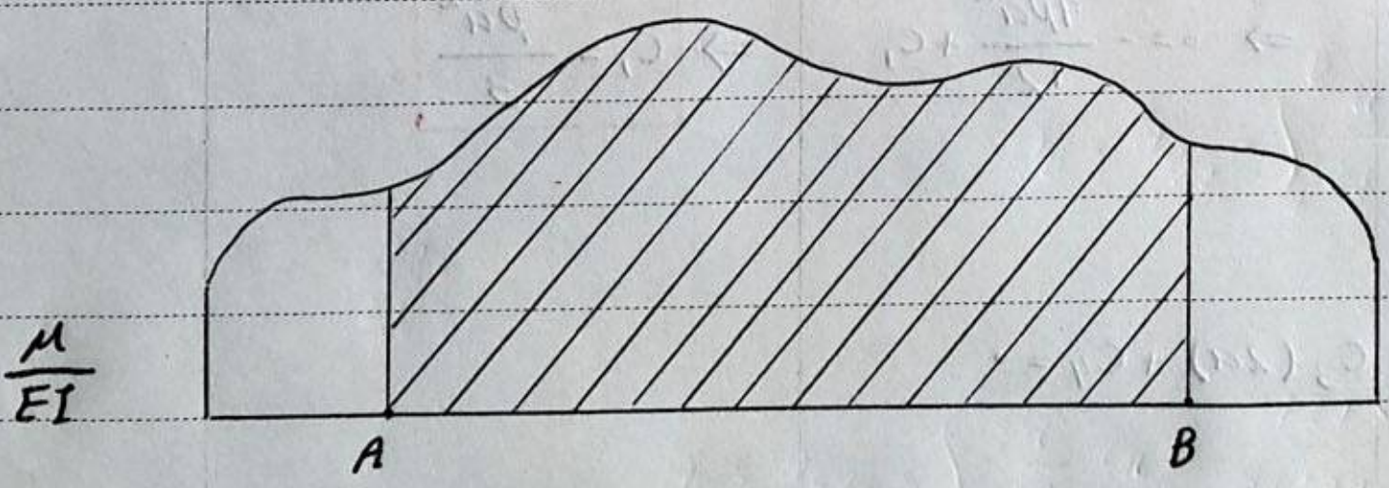
Moment area Theorems قضایای لنگر سطح



$$\frac{M}{EI} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \theta \longrightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\theta}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{M}{EI} = \frac{d\theta}{dx} \Rightarrow d\theta = \left(\frac{M}{EI}\right)dx$$



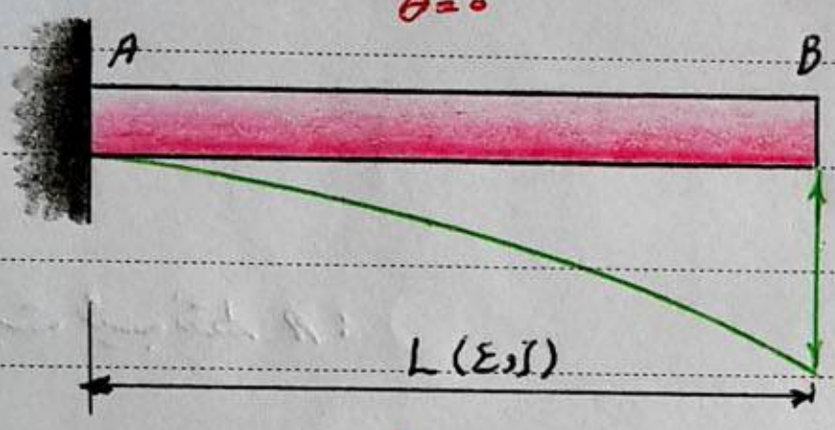
ali_intel66@yahoo.com

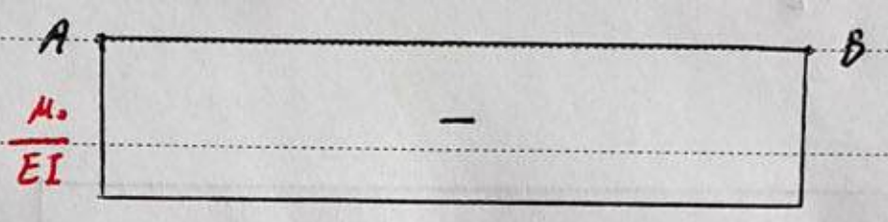
$$\int_A^B d\theta = \int_A^B \frac{M}{EI} dx \Rightarrow \theta_B - \theta_A = \int_A^B \frac{M}{EI} dx \Rightarrow \theta_{B/A} = \int_A^B \frac{M}{EI} dx$$

قضیه اول لنگر سطح

تغییر شیب بین دو نقطه برروی منحنی الاستیک تیر (تغییر شکل - خیز) برابر است با مساحت $\frac{M}{EI}$ بین آن دو نقطه.

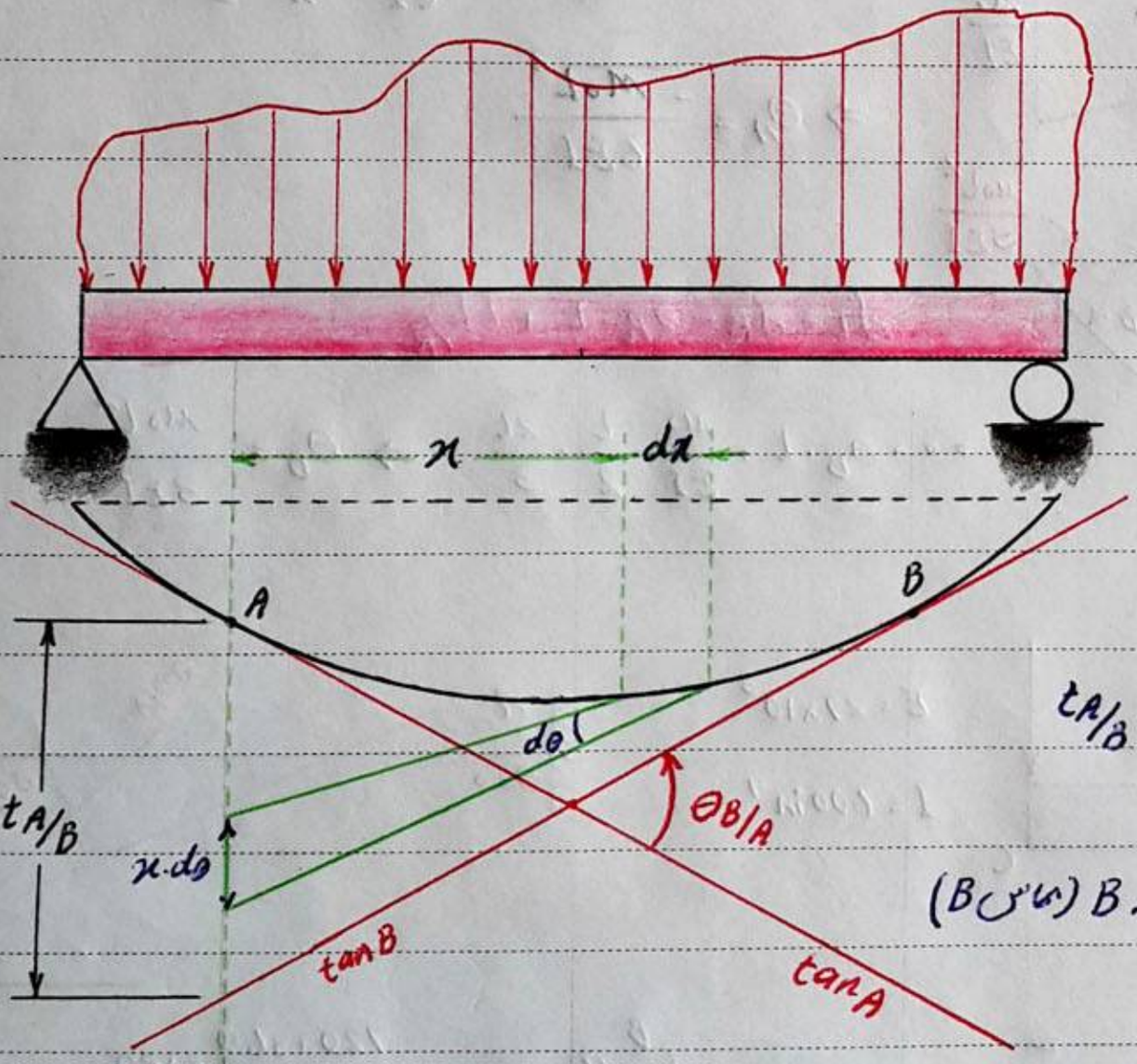
باید توجه شود که تغییر زاویه وقتی که مساحت $\frac{M}{EI}$ مثبت است بصورت پادساعتگرد (CCW) می باشد و وقتی این مساحت $\frac{M}{EI}$ منفی است تغییر زاویه ساعتگرد (CW) می باشد.





$$\theta_{B/A} = \int_A^B \frac{M}{EI} dx = -\frac{M_0 L}{EI} \Rightarrow \theta_B = \frac{M_0 L}{EI}$$

قضیه دوم لنگر سطح



$$d\theta = \frac{M}{EI} \cdot dx$$

$$x\,d\theta = x \frac{M}{EI} dx$$

$$t_{A/B} = \int x \cdot d\theta = \int x \frac{M}{EI} dx = \bar{x} \int \frac{M}{EI} dx$$

اختلاف تانم نقطه A روی منحنی الاستیک تیر نسبت به امتداد شیب نقطه B (مماس B)

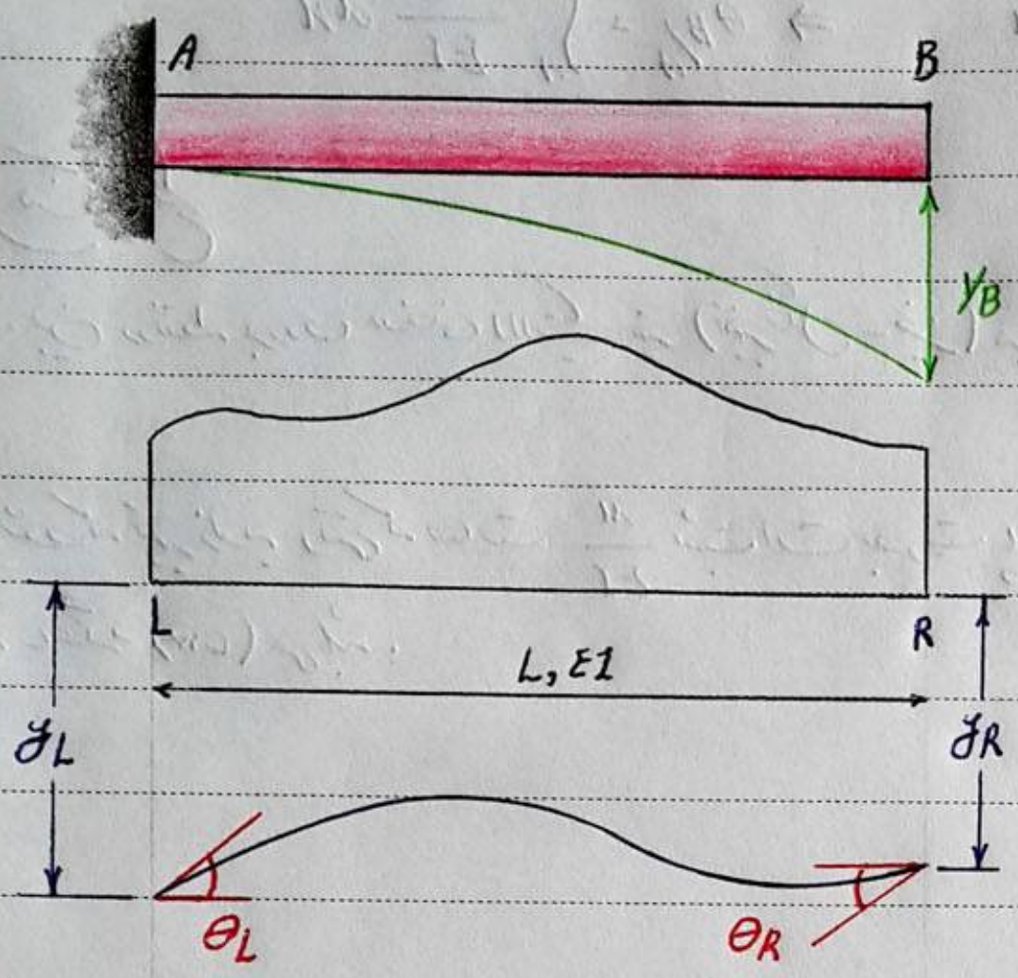
برابر است با لنگر سطح زیر منحنی $\frac{M}{EI}$ بین دو نقطه A و B.

این لنگر نسبت به نقطه A محاسبه می شود و با علامت $t_{A/B}$ محاسبه می شود.

باید توجه شود که اگر لنگر $\frac{M}{EI}$ بین نقاط A و B مثبت باشد این بدان معنا است که $t_{A/B}$ در بالای منحنی الاستیک قرار دارد و به طور مثبت اگر منفی باشد نشان دهنده آن است که امتداد شیب نقطه در زیر B قرار خواهد گرفت.

P4PCO
ali_intel66@yahoo.com

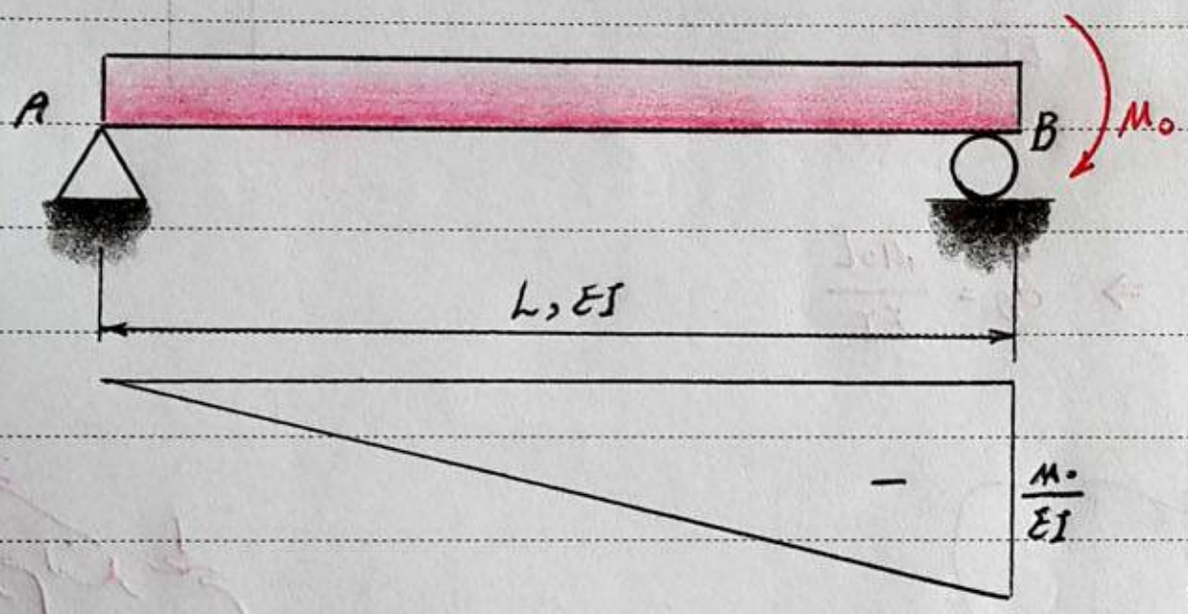
Subject :
Year . Month . Date . ( )



$$y_B = \frac{L}{2} \cdot \frac{M_o L}{EI} \Rightarrow \mathcal{J}_B = \frac{M_o L^2}{2EI}$$

$$y_R = \mathcal{J}_L + \theta_L \cdot L + t_{R/L}$$

$$y_L = \mathcal{J}_R - \theta_R \cdot L + t_{L/R}$$

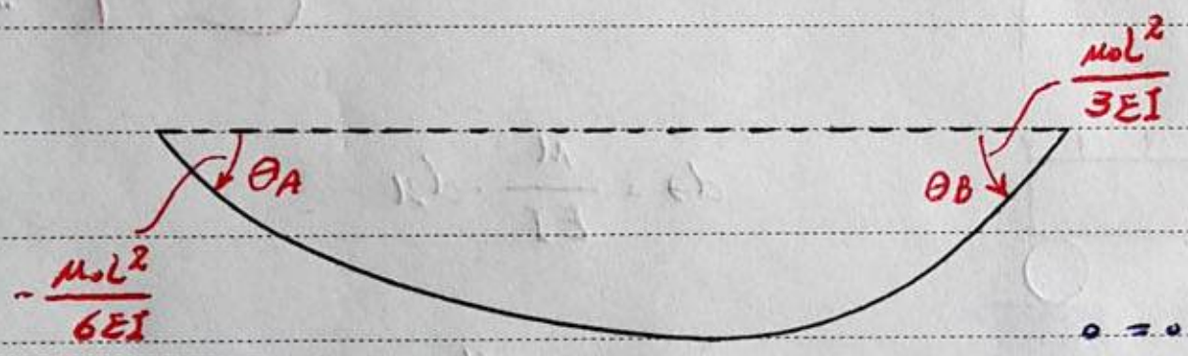


- معلوبیت شیب نقطه A :

$$\mathcal{J}_R = \mathcal{J}_L + \theta_L \cdot L + t_{R/L}$$

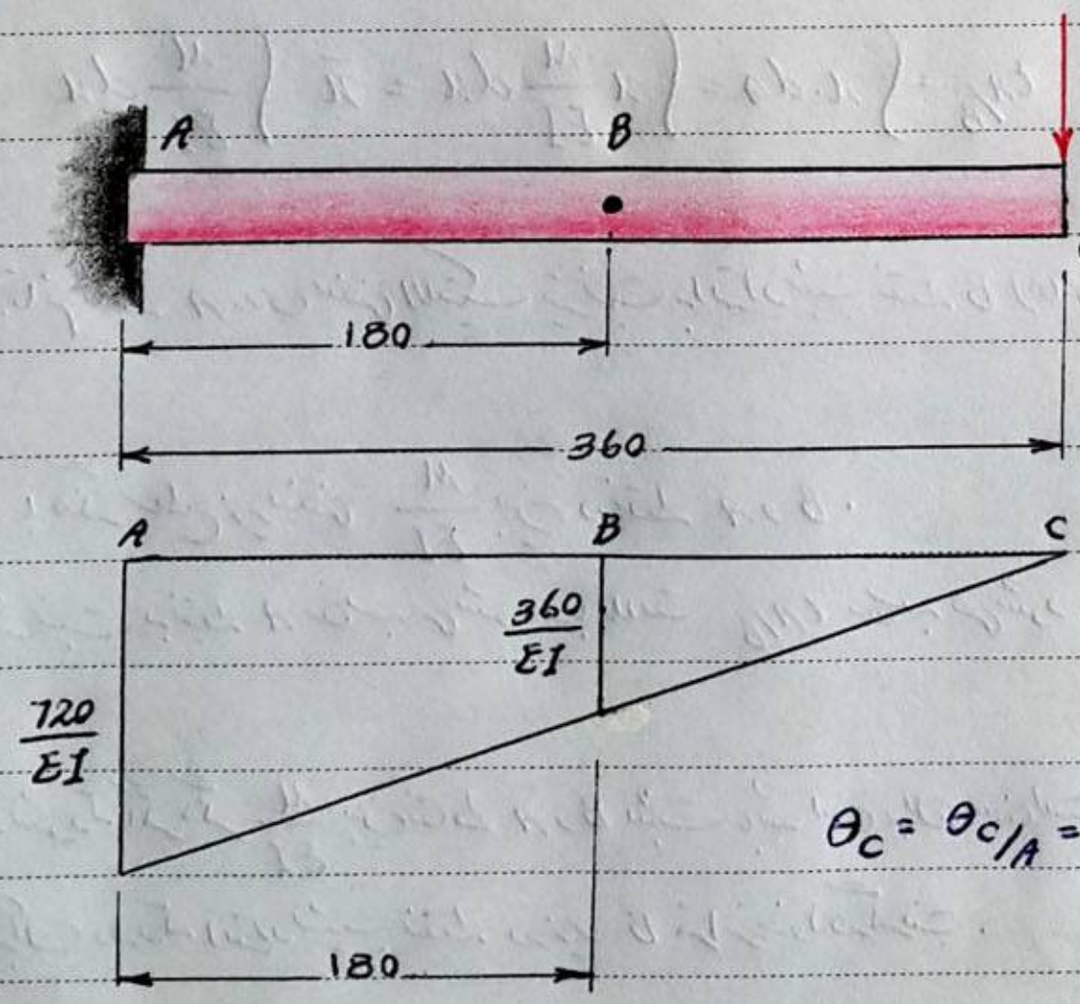
$$0 = 0 + \theta_A \cdot L + \frac{M_o}{EI} \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{L}{3}$$

$$\Rightarrow \theta_A = \frac{-M_o L^2}{6EI}$$



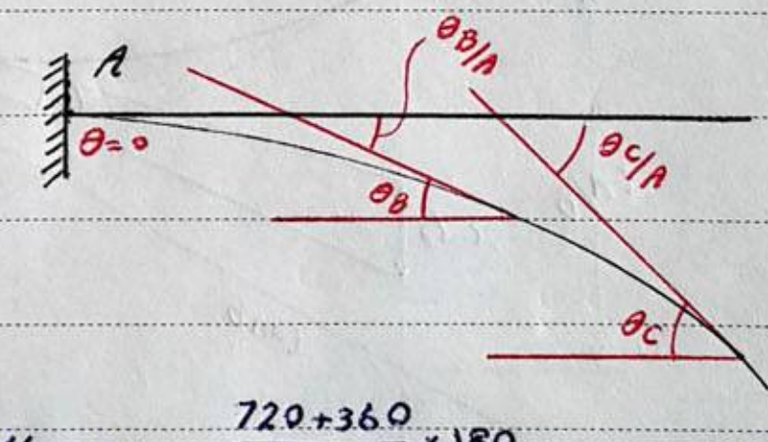
$$\mathcal{J}_L = \mathcal{J}_R - \theta_R \cdot L + t_{L/R}$$

$$0 = 0 - \theta_B \cdot L + \frac{M_o}{EI} \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{2L}{3} \Rightarrow \theta_B = \frac{M_o L^2}{3EI}$$



$E = 29 \times 10^3$

$I = 600 in^4$

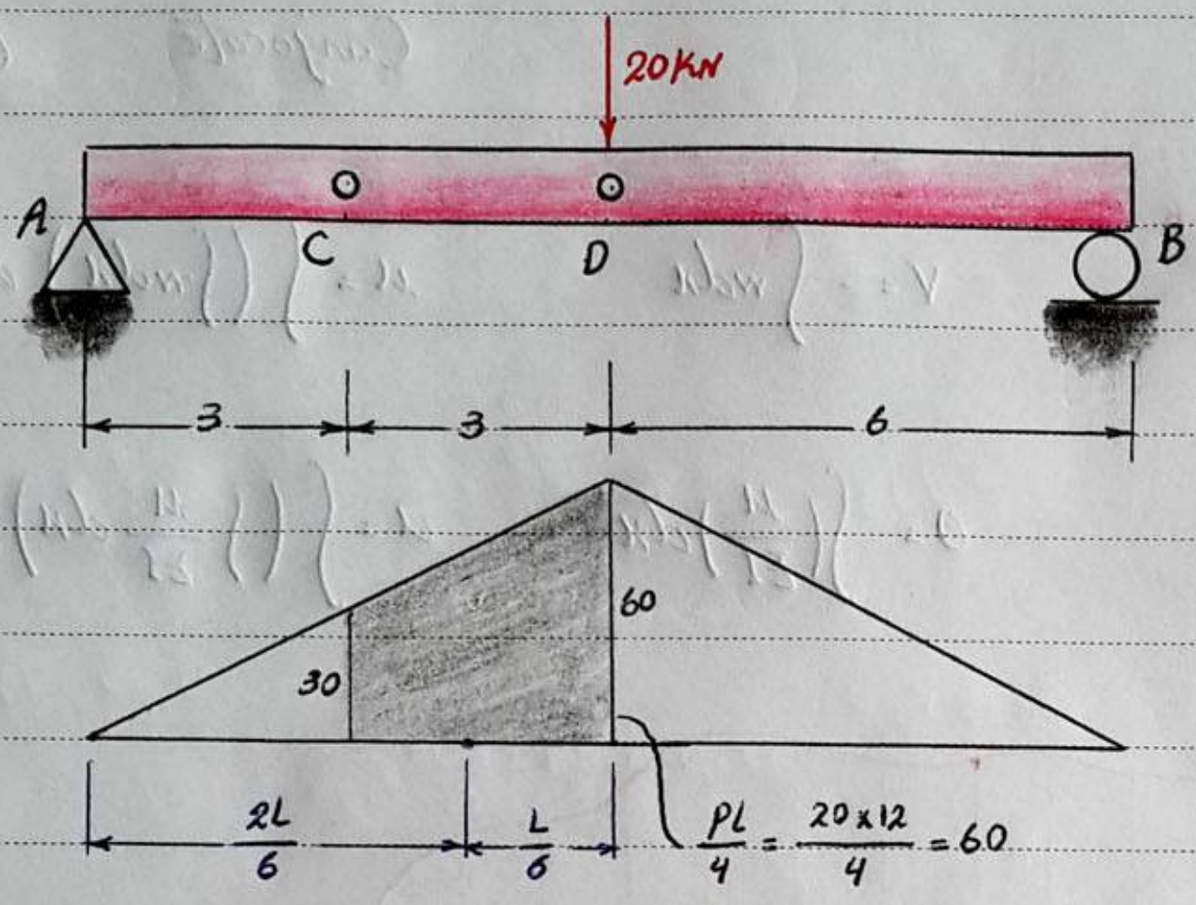


$$\theta_B = \theta_{B/A} = \int_A^B \frac{M}{EI} dx = \frac{\frac{720+360}{2} \times 180}{600 \times 29 \times 10^3} = -0.00559 rad$$

$$\theta_C = \theta_{C/A} = \int_A^C \frac{M}{EI} dx = \frac{720 \times 360}{2(600 \times 29 \times 10^3)} = 0.00745 rad$$

ali_intel66@yahoo.com

Subject:
Year. Month. Date. ( )



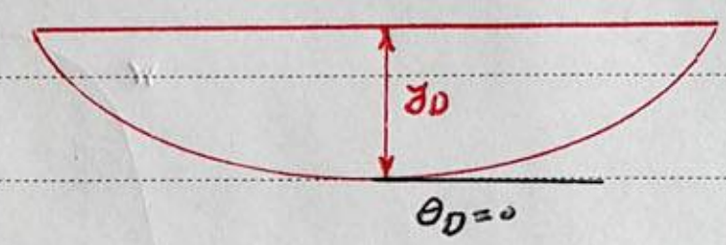
مطلوب است شیب و تغییر مکان نقاط C و D ؟

$E = 200\ Gpa$ $I = 6\times10^6\ mm^4$

$$\theta_C = \theta_{D/C} = \int_C^D \frac{M}{EI}dx = \frac{60\times30}{2EI}\times3$$

$$\Rightarrow \theta_{D/C} = \frac{135\times10^6}{200\times10^3\times6\times10^6} = 0.001125\ rad$$

$\theta_D = 0$

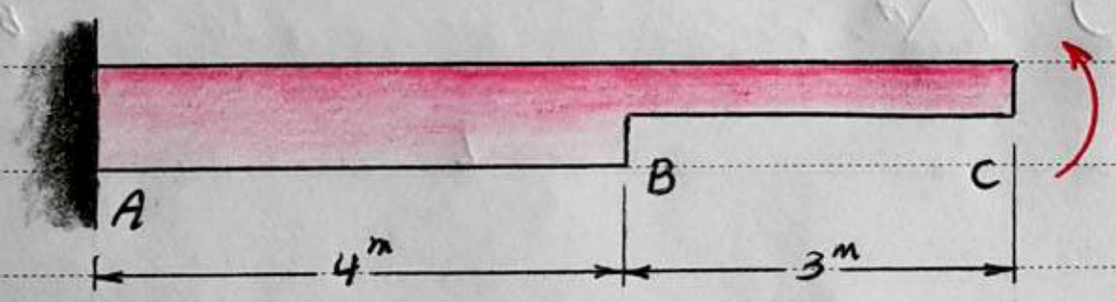


$$\Delta_L = \Delta_R - \theta_R\cdot L + t_{L/R} \Rightarrow 0 = \Delta_D - 0 + t_{A/D}$$

$$\Delta_D = -t_{A/D} = \frac{PL}{4}\cdot\frac{L}{2}\cdot\frac{L}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{L}{2}\cdot\frac{1}{EI} = \frac{PL^3}{48EI} = \frac{20\times10^3\times12^3\times10^9}{48(200\times10^3\times6\times10^6)} = 600$$

$$\Delta_L = \Delta_R - \theta_R\cdot L + t_{L/R} \Rightarrow \Delta_A = \Delta_D - \theta_D\cdot L + t_{A/D}$$

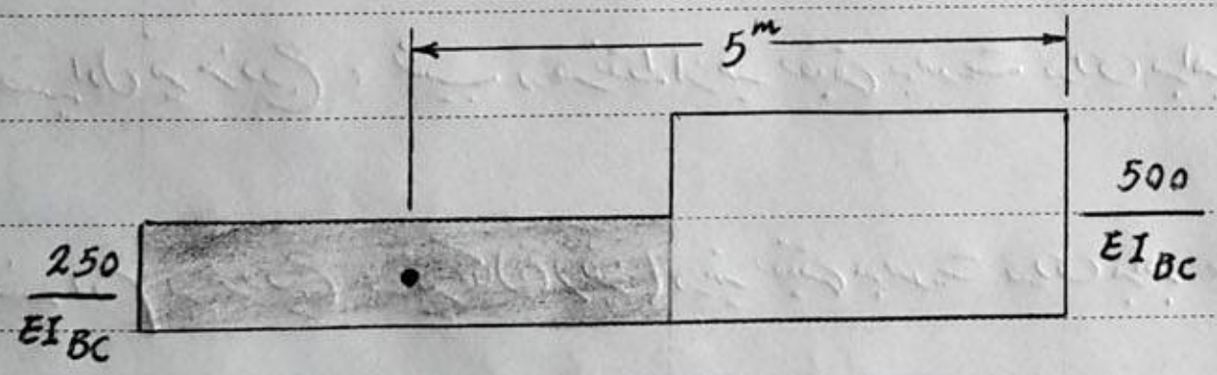
$$0 = 600 - \theta_D\times(6\times10^3) + t_{A/D} \Rightarrow \theta_D = \frac{1}{\quad}\left(600 - \frac{60\times10^3\times10^3\times6\times10^3\times4\times10^3}{2(200\times10^3\times6\times10^6)}\right) = 0$$



Δ_B و Δ_C را بیابید؟

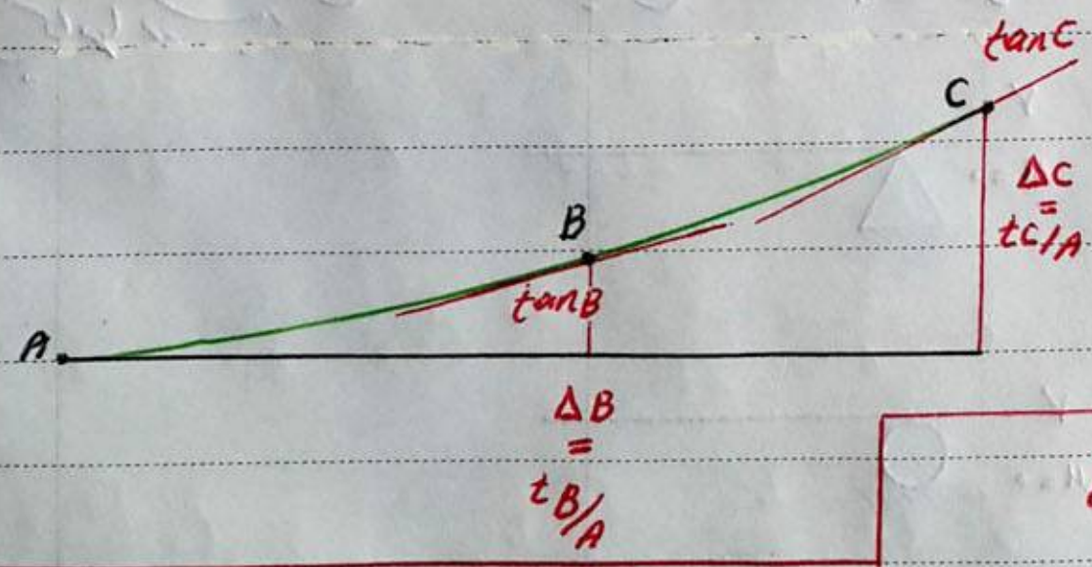
$I_{AB} = 8\times10^6\ mm^4$ $I_{BC} = 4\times10^6\ mm^4$

$E = 200\ Gpa$



$$\Delta_B = t_{B/A} = \frac{250\times4\times2}{EI_{BC}}$$

$$\Delta_B = t_{B/A} = \frac{2000\times10^6}{200\times10^3\times4\times10^6} = 2.5\ mm$$



$$\Delta_C = t_{C/A} = \frac{250\times4\times5}{EI_{BC}} + \frac{500\times3\times1.5}{EI_{BC}}$$

$$\Delta_C = t_{C/A} = \frac{5000\times10^6}{200\times10^3\times4\times10^6} + \frac{2250\times10^6}{200\times10^3\times4\times10^6} = 9.06\ mm$$

$$\Delta_L = \Delta_R - \theta_R\cdot L + t_{L/R} \Rightarrow 0 = \Delta_D - 0 + t_{L/R}$$:جایگذاری

$$\Delta_D = -\frac{60\times10^6}{2}\times6\times10^3\times\frac{2}{3}\times6\times10^3\times\frac{1}{200\times10^3\times6\times10^6} = \frac{60\times6\times4\times10^3}{2\times200\times6} = -600\ mm$$

PARCO

ali_inter66@yahoo.com

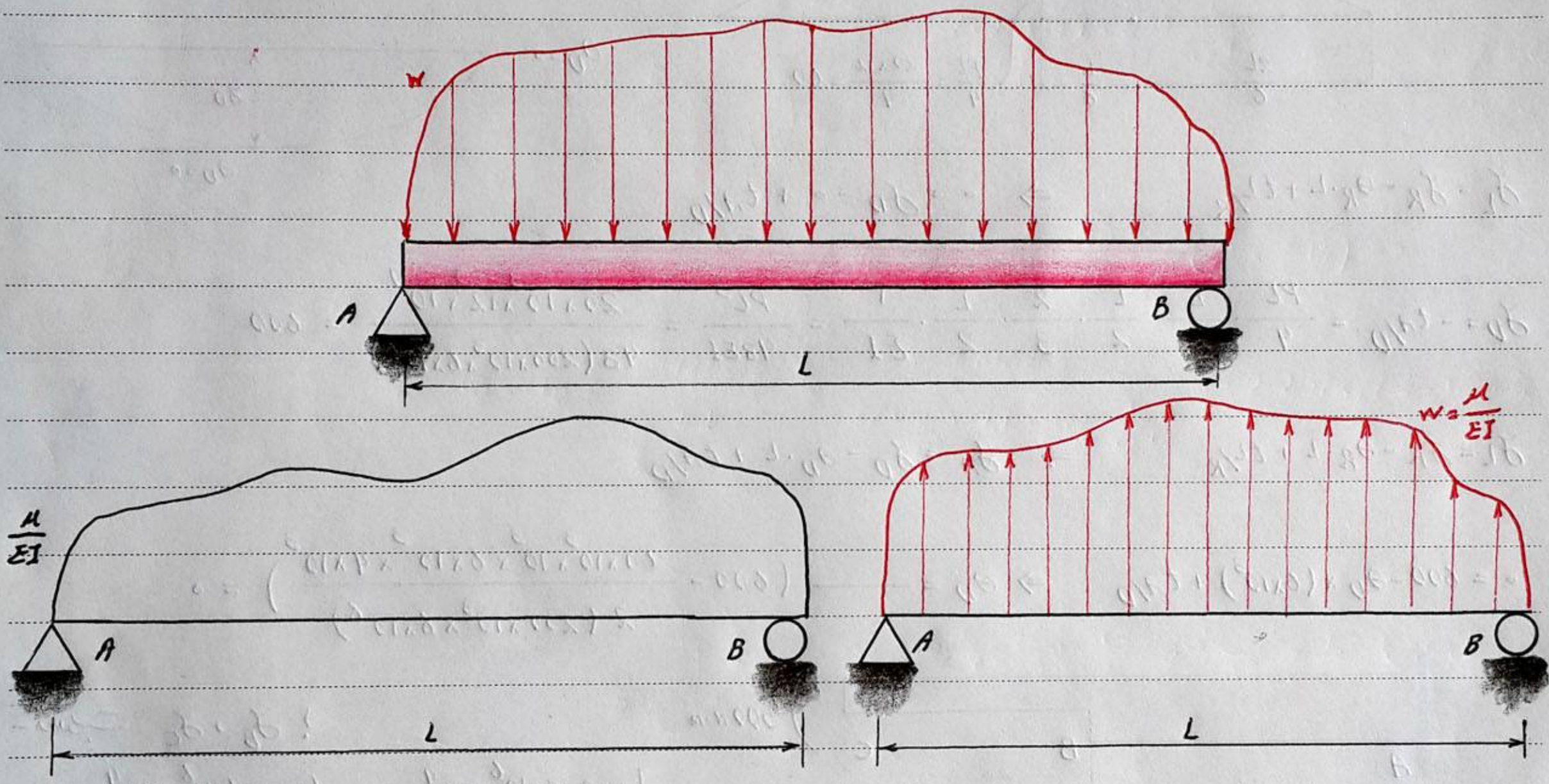
Subject :
Year . Month . Date . ( )

خمش	برش
$\frac{d^2M}{dx^2} = -w$	$\frac{dV}{dx} = -w$
فیز	شیب
$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{M}{EI}$	$\frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{EI}$

تیر مزدوج Conjocate

$V = -\int w\,dx$ $\qquad M = \int \left(\int w\,dx\right) dx$

$\theta = \int \left(\frac{M}{EI}\right) dx$ $\qquad u = \int \left(\int \frac{M}{EI}\,dx\right) dx$



قضیه اول تیر مزدوج : شیب در هر نقط از تیر حقیقی به صورت عددی برابر مقدار نیروی برشی در نقطه ای متناظر با آن نقط در تیر مزدوج می باشد.

قضیه دوم تیر مزدوج : تغیر مکان (فیز) در تیر حقیقی به صورت عددی برابر مقدار لنگر خمشی در نقطه ای متناظر با آن نقط در تیر مزدوج می باشد

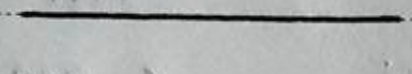
Real Beam تیر حقیقی	Conjocate Beam تیر مزدوج
θ $u = 0$	V $M = 0$
θ $u = 0$	V $M = 0$
$\theta = 0$ $u = 0$	$V = 0$ $M = 0$

تکیه گاهها در تیر مزدوج

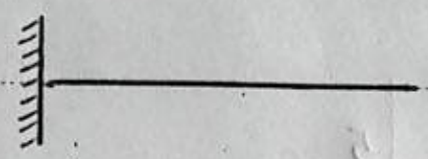
PAPCO

ali_intel66@yahoo.com

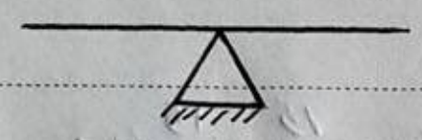
$V=0$
$M=0$



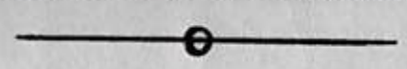
$\theta=0$
$u=0$



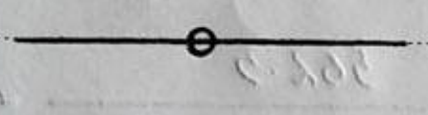
θ
$u=0$



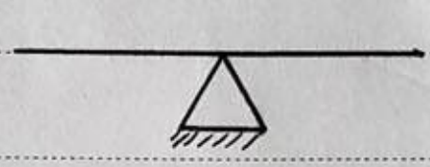
V
$M=0$



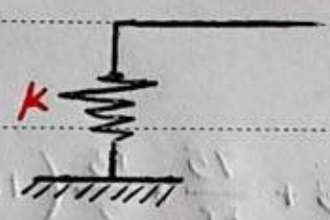
θ
u
$M=0$



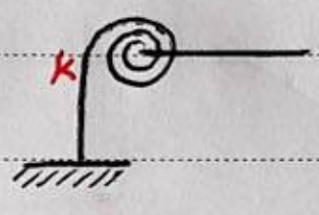
V
M
$u=0$

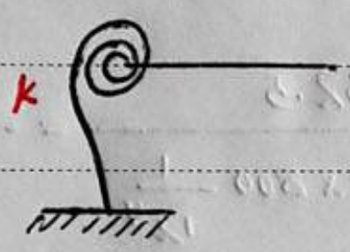


$u=\frac{F}{k}$

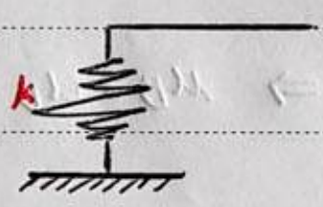


$-\frac{1}{k}$





$+\frac{1}{k}$



روش حل

۱) ابتدا تیر مزدوج را برای تیر حقیقی رسم می‌نماییم این تیر دارای طولی یکسان با تیر حقیقی می‌باشد و شرایط تکیه‌گاههای آن مشابه جدول فوق است

۲) به طور کلی شیب در تیر حقیقی برابر با برش در تیر مزدوج و همچنین خیز در تیر حقیقی برابر لنگر در تیر مزدوج می‌باشد بنابراین اگر تکیه‌گاهها در تیر اصلی دارای شیب باشند در نقطه معادله آن در تیر مزدوج باید نیروی برشی وجود داشته باشد و اگر تیر حقیقی دارای خیز باشد در نقطه متناظر آن در تیر مزدوج باید لنگر خمشی وجود داشته باشد

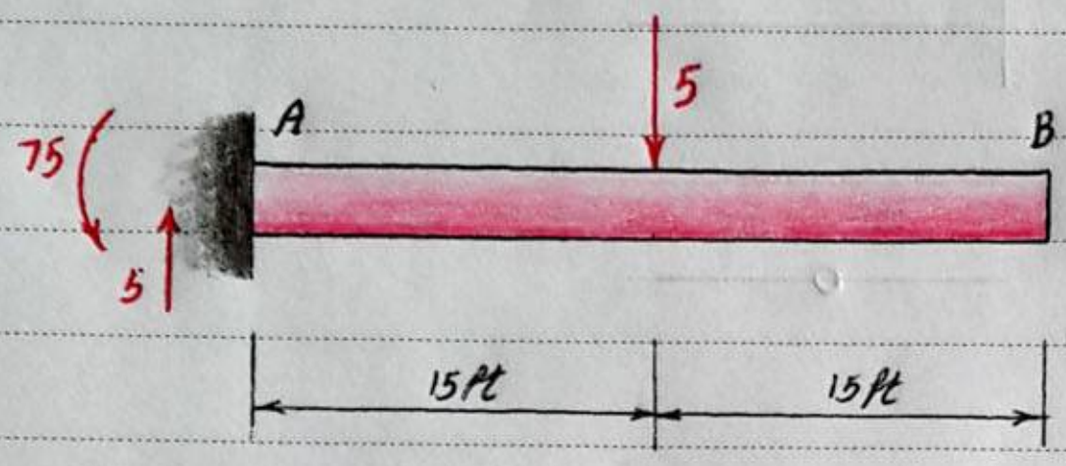
۳) تیر مزدوج با عبور $\frac{M}{EI}$ بارگذاری می‌شود این بارگذاری به صورت بار گسترده در بالای تیر رسم می‌شود و جهت آن در $\frac{M}{EI}$ مثبت است رو به بالا و اگر $\frac{M}{EI}$ منفی باشد جهت آن رو به پائین می‌باشد

نکته : حداکثر خیز در هنگامی از تیر رخ می‌دهد که شیب آن نقطه صفر باشد :

$$u_{max} \longrightarrow \frac{du}{dx} = \theta(x) = 0$$

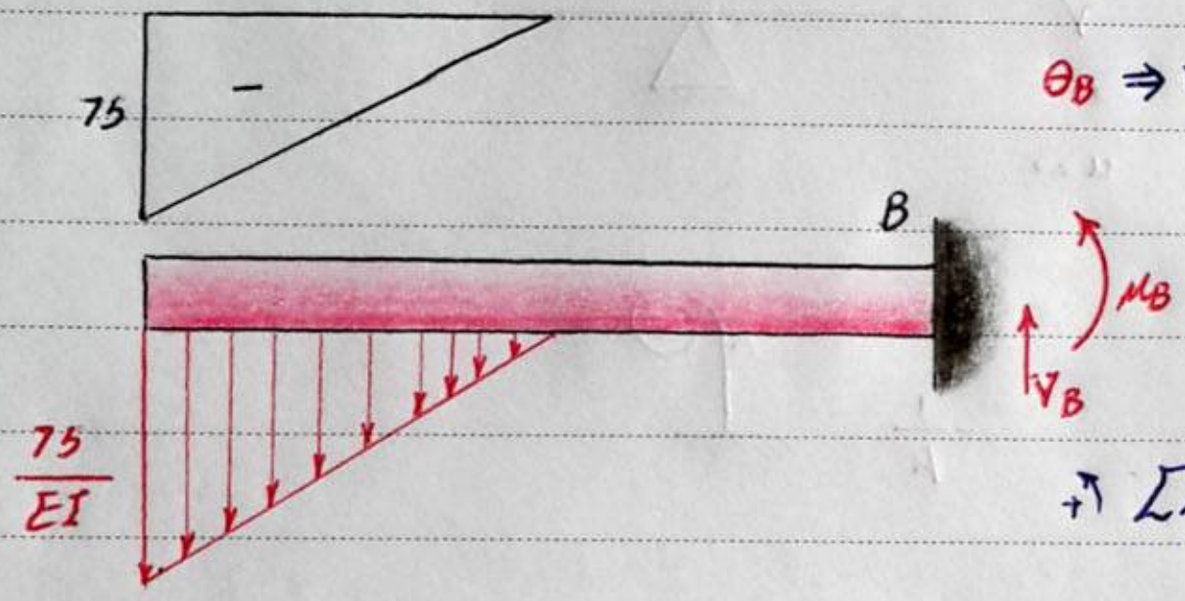
ali_intel66@yahoo.com

- خیزوشیب و در نقطه B بیابید:



$E = 29 \times 10^3 \ ksi$ $I = 800 \ in^4$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad V_B - \frac{75}{EI} \times \frac{15}{2} = 0 \quad \Rightarrow V_B = \frac{562.5}{EI}$

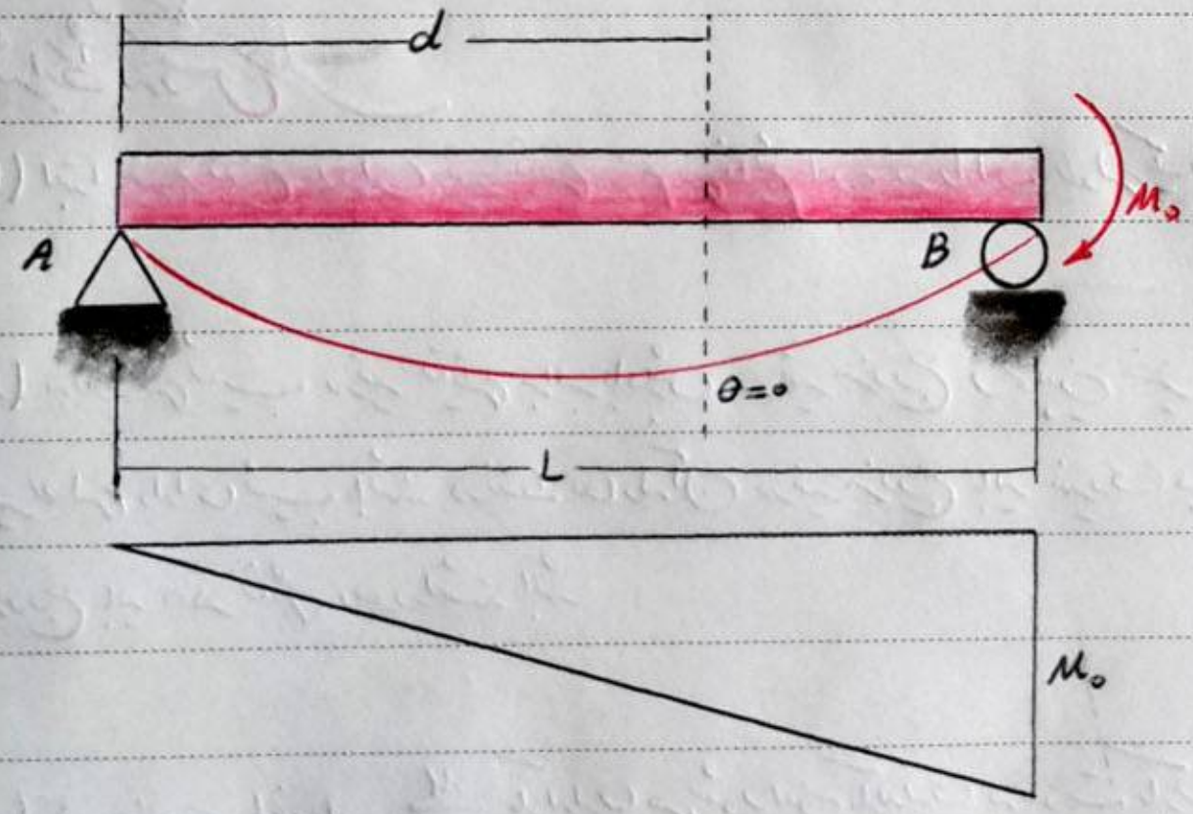


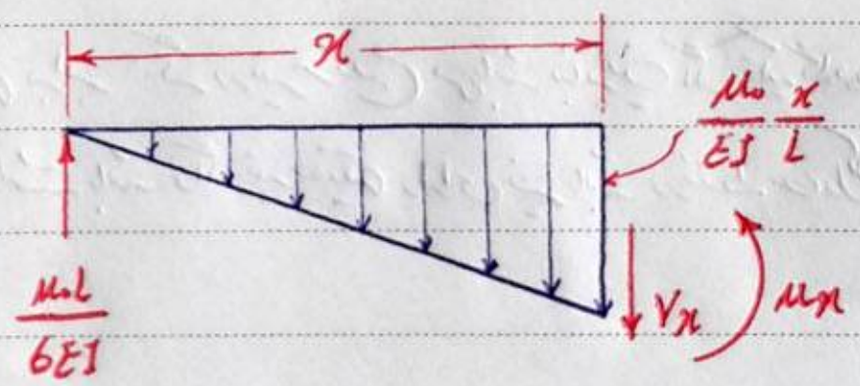
$\theta_B \Rightarrow V_B = \frac{562.5}{29 \times 10^3 \times 144 \times 800 \frac{1}{12^4}} = 0.00349 \ rad$

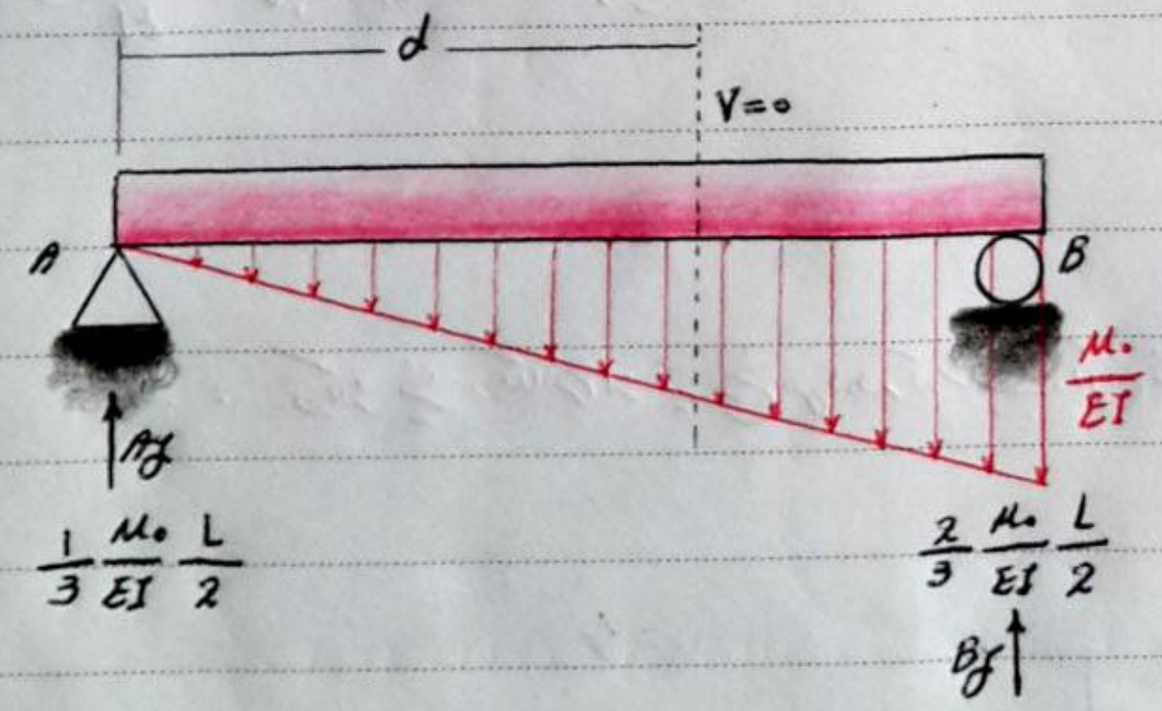
$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 \quad M_B + \frac{75}{EI} \times \frac{15}{2}\left(15 + \frac{2}{3}15\right) = 0$

$\Rightarrow M_B = \theta_B = \frac{-14062.5}{EI} = \frac{-14062.5}{29 \times 10^3 \times 144 \times 800 \frac{1}{12^4}} = -0.0872 \ ft = -1.05 \ in$

- در چه فاصله‌ای از نقطه A شیب منحنی الاستیک برابر صفر می‌شود؟







$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad \frac{M_0 L}{6EI} - \frac{M_0}{EI}\frac{x}{L}\frac{x}{2} = 0$

$\Rightarrow \frac{M_0 L}{6EI} - \frac{M_0 x^2}{2LEI} = \frac{M_0 L}{6} - \frac{M_0 x^2}{2L}$

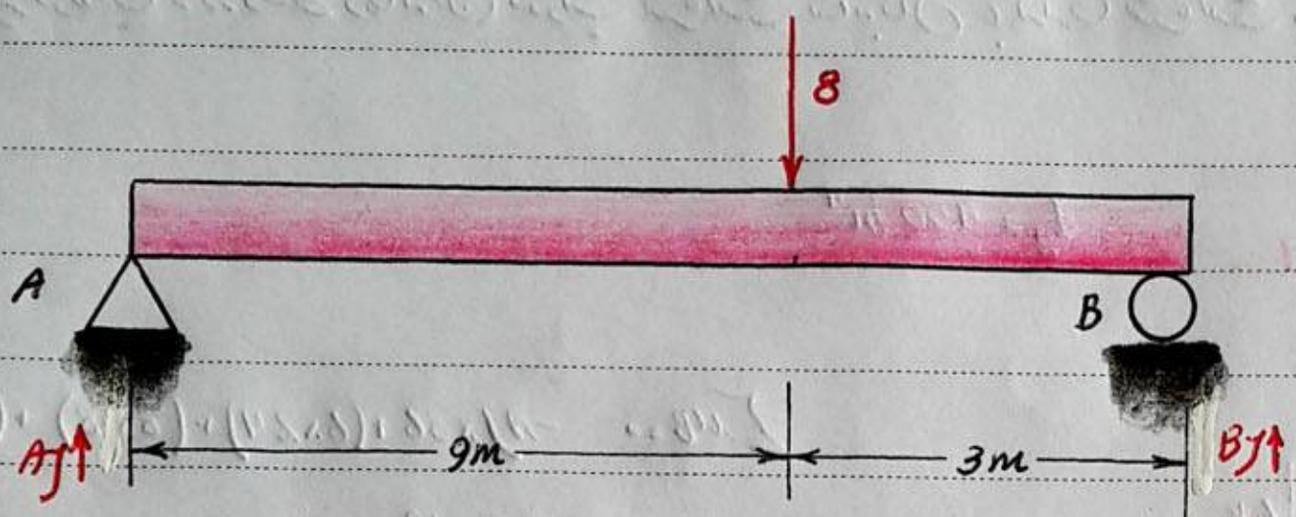
$\Rightarrow \frac{L}{6} = \frac{x^2}{2L} \quad \Rightarrow x^2 = \frac{2L^2}{6} = \frac{L^2}{3}$

$\Rightarrow x = \frac{L}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}L \quad \Rightarrow d = \frac{\sqrt{3}}{3}L$

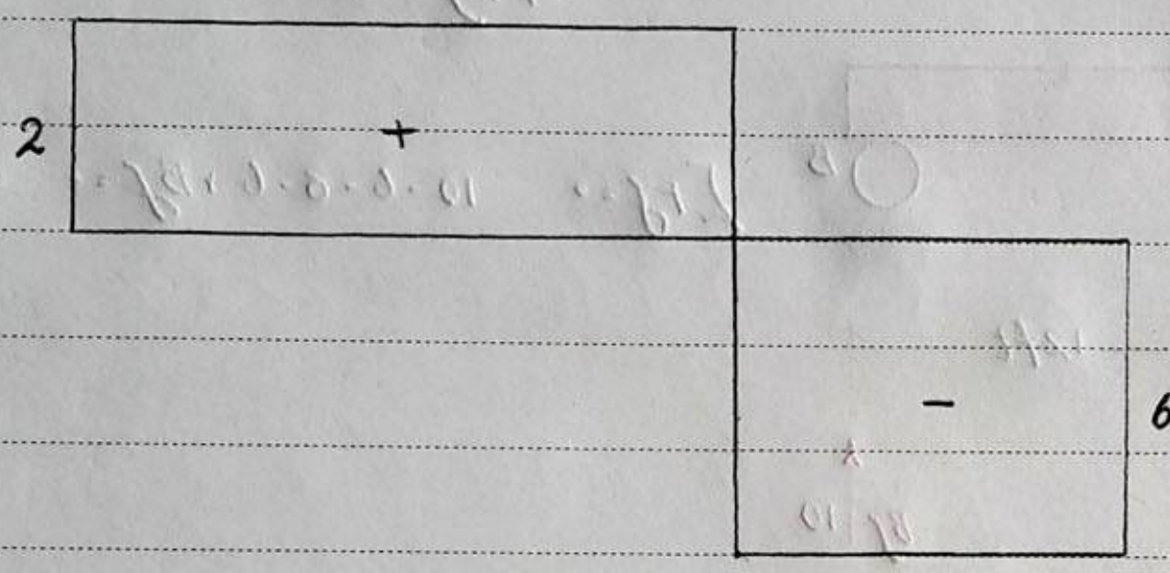
ali_intel66@yahoo.com

- مرکز تغیر مکان را در تیر زیر محاسبه کنید ؛

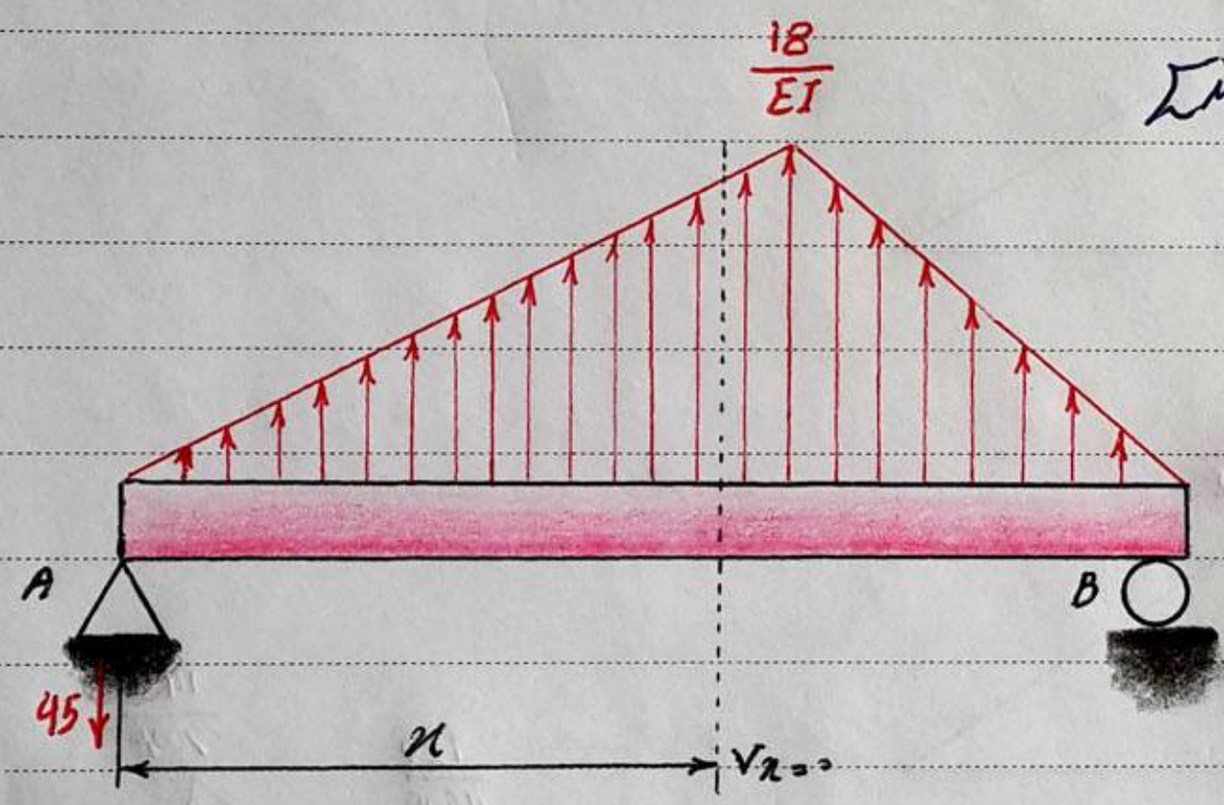
$E = 200\ Gpa$ $I = 60 \times 10^6\ in^4$



$\sum M_B = 0 \quad 8\times 3 - Aj \times 12 = 0 \quad \Rightarrow Aj = 2$

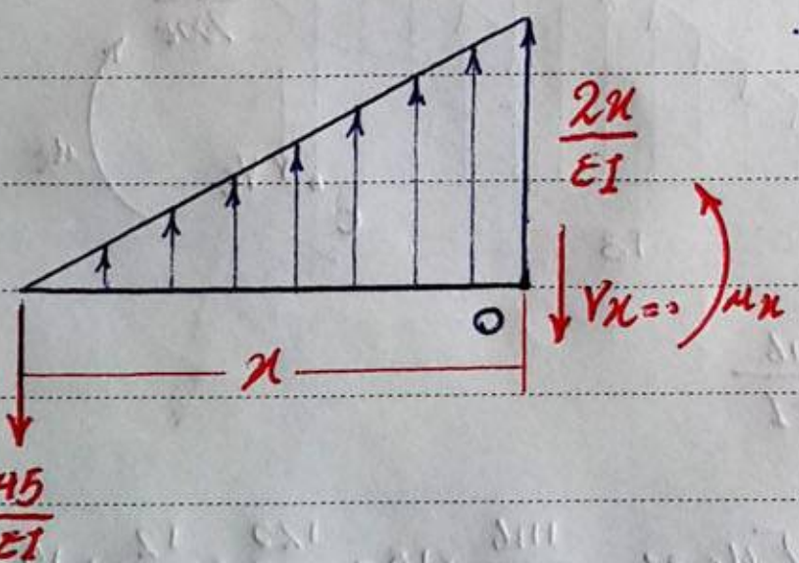


$\sum F_j = 0 \quad 2 - 8 + Bj = 0 \quad \Rightarrow Bj = 6$



$\sum M_B = 0 \quad -Aj \times 12 - \frac{18\times 3}{EI} \times 2 - \frac{18\times 9}{2EI} \times 6 = 0$

$\Rightarrow Aj = -45 \quad = 45 \downarrow$



$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad -45 + 2x\frac{x}{2} = 0 \quad \Rightarrow x^2 = 45 \quad \Rightarrow x = 6.7\ m$

$\curvearrowleft \sum M_O = 0 \quad M_x + 45(6.7) - 2x\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{3}x = 0$

$\Rightarrow M_x + 301.5 - (6.7)^2 \cdot \frac{6.7}{3} = 0 \quad \Rightarrow M_x = -201.25$

$\frac{}{EI}$

$E = 200 \times 10^3$

$I = 60 \times 10^6$

$\Rightarrow M = U = \frac{M_x}{EI} = \frac{-201.25 \times 10^6 \times 10^6}{200 \times 10^3 \times 60 \times 10^6} = -16.77\ mm$

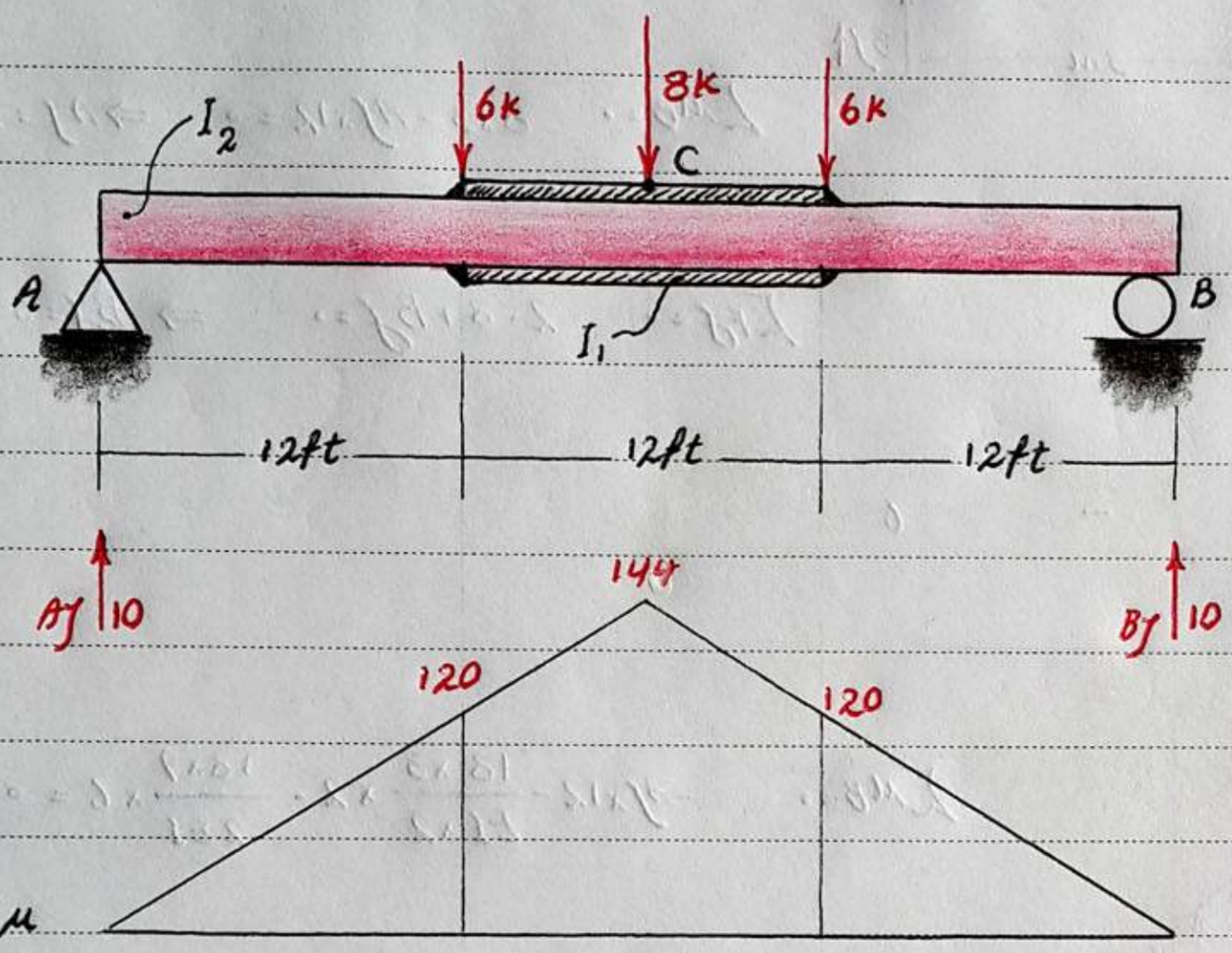
$\begin{cases} 18\times 10^6\ N.mm \\ 45\times 10^6\ N.mm \end{cases}$

PAPCO
ali_intel66@yahoo.com

Subject :
Year . Month . Date . ( )

- یک تیر فولادی که در وسط دهانه آن تقویت شده است مانند شکل بارگذاری شده است. با توجه به بارگذاری اعمال شده تغییر مکان وسط تیر را بیابید:

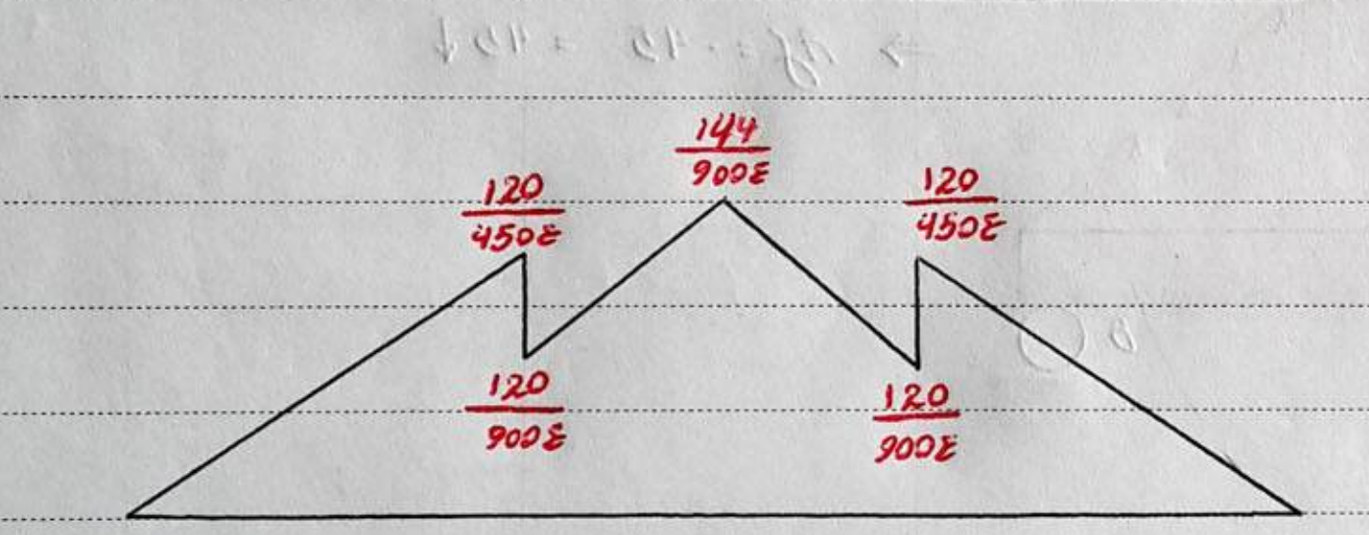
$E = 29 \times 10^3$ Ksi $I_1 = 900\ in^4$ $I_2 = 450\ in^4$

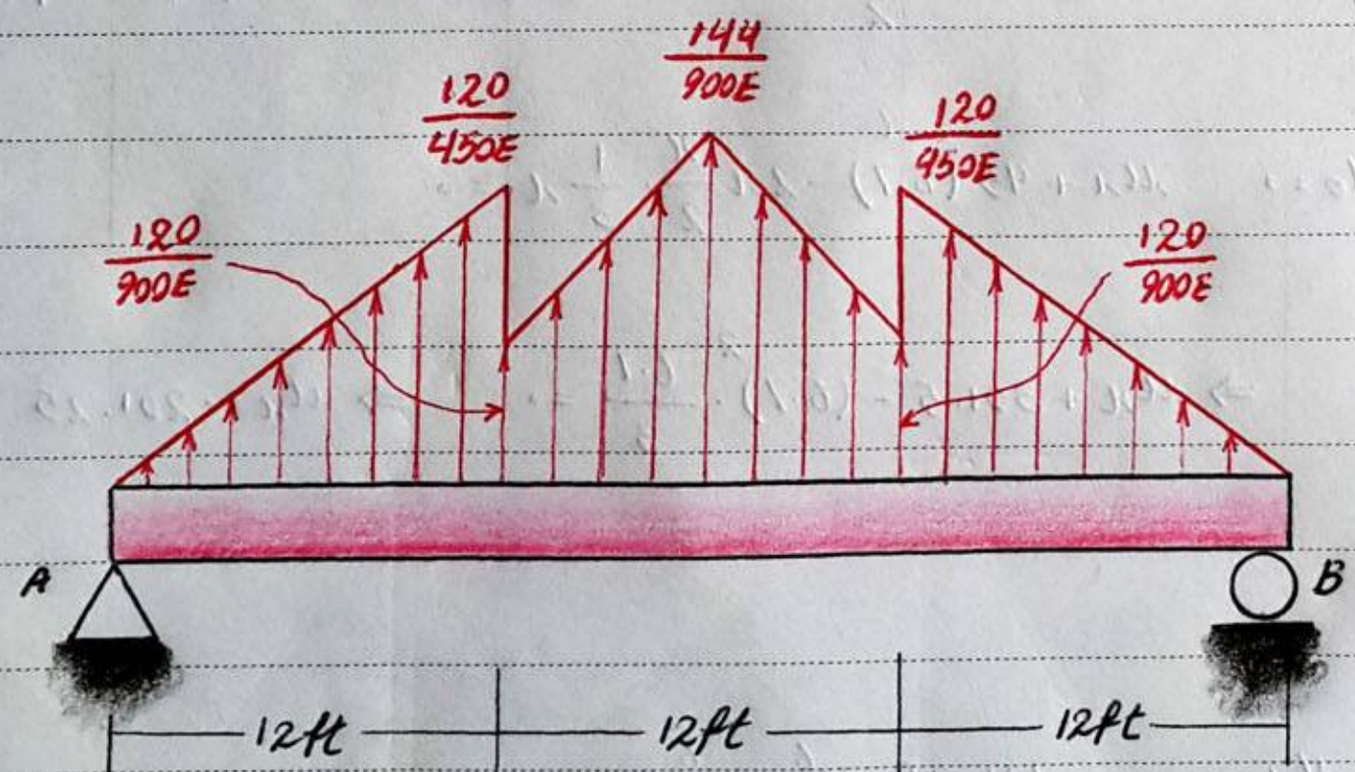


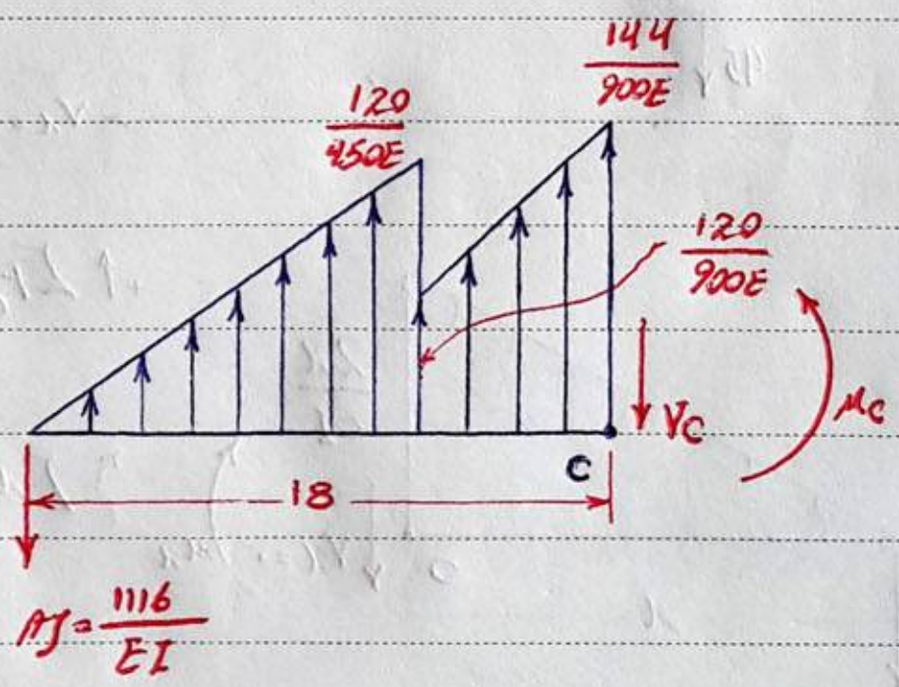
$\sum M_B = 0 \quad -Aj \times 36 + (6\times24) + (8\times18) + (6\times12) = 0$

$\Rightarrow Aj = 10$

$\sum F_j = 0 \quad 10 - 6 - 8 - 6 + Bj = 0 \Rightarrow Bj = 10$







$Aj = \frac{1116}{EI}$

$\sum M_C = 0 \quad \frac{1116}{EI} \times 18 - \frac{120}{EI} \times \frac{12}{2} \times 10 -$

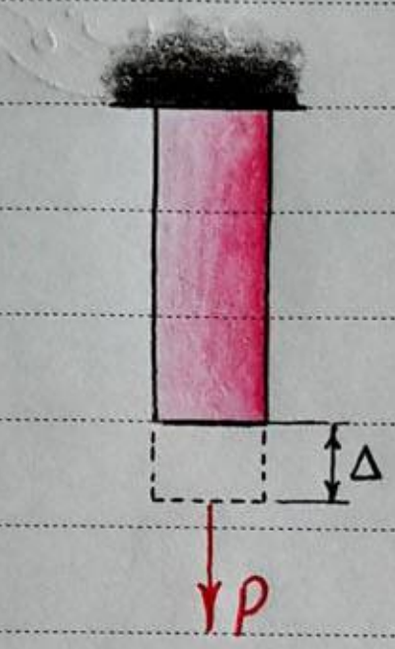
$\hookrightarrow \frac{60}{EI} \times 6 \times 3 - \frac{12}{EI} \times 3 \times 2 + M_C = 0$

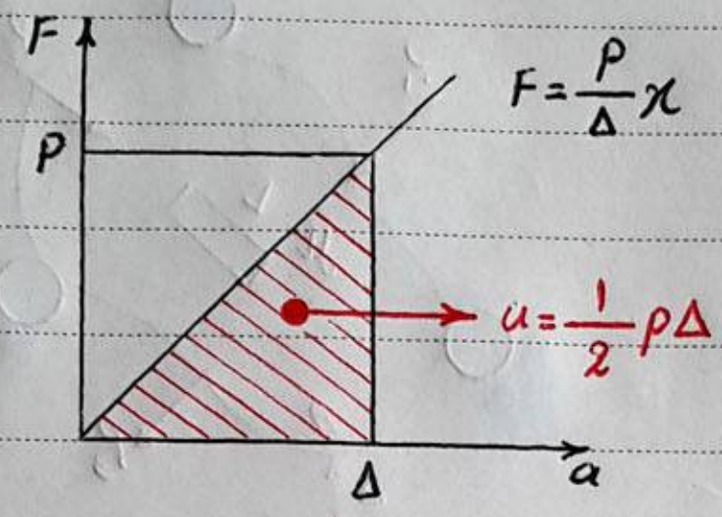
$\Rightarrow 20088 - 7200 - 1080 - 72 + M_C = 0 \Rightarrow M = \frac{-11736}{EI} = -1.55\ in \Rightarrow M_C = U_C = 1.55\ in$

ali_intel66@yahoo.com

Subject :
Year . Month . Date . ( )

کار حاصل از نیروی گرنشی و خمشی

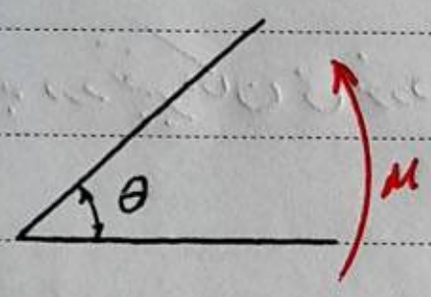




$F = \frac{P}{\Delta} x$

$u = \frac{1}{2} P \Delta$

$u = \int_0^x F.dx = \int_0^x \frac{P}{\Delta} x\, dx$



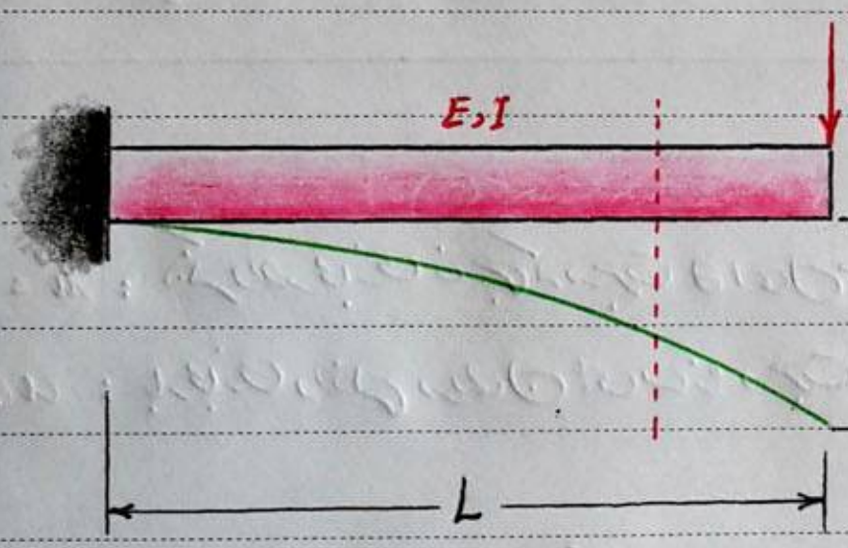
$u_e = \frac{1}{2} M\theta$

$u = \int M d\theta$, $d\theta = \frac{M}{EI}.dx$

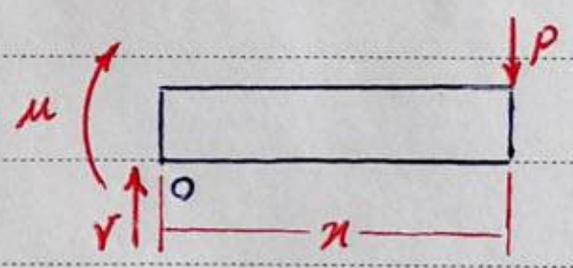
$\Delta = \frac{PL}{AE} \Rightarrow u = \frac{1}{2} P \frac{PL}{AE} = \frac{P^2 L}{2AE}$

$u_e = \frac{1}{2} M\theta = \frac{M^2}{2EI} dx$

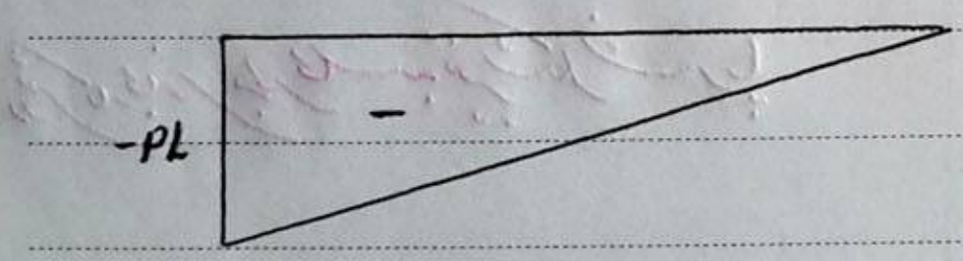
$$u = \int M d\theta = \int \frac{M^2}{2EI} dx$$



- تغییر مکان انتهای تیر را محاسبه کنید :



$\sum M_O = 0 \quad -M - Px = 0 \quad \Rightarrow M = -Px$



$u = \int \frac{M^2}{2EI} dx$

$u_L = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx = \int_0^L \frac{(-Px)^2}{2EI} dx = \frac{Px^3}{6EI}\Big|_0^L = \frac{PL^3}{6EI}$

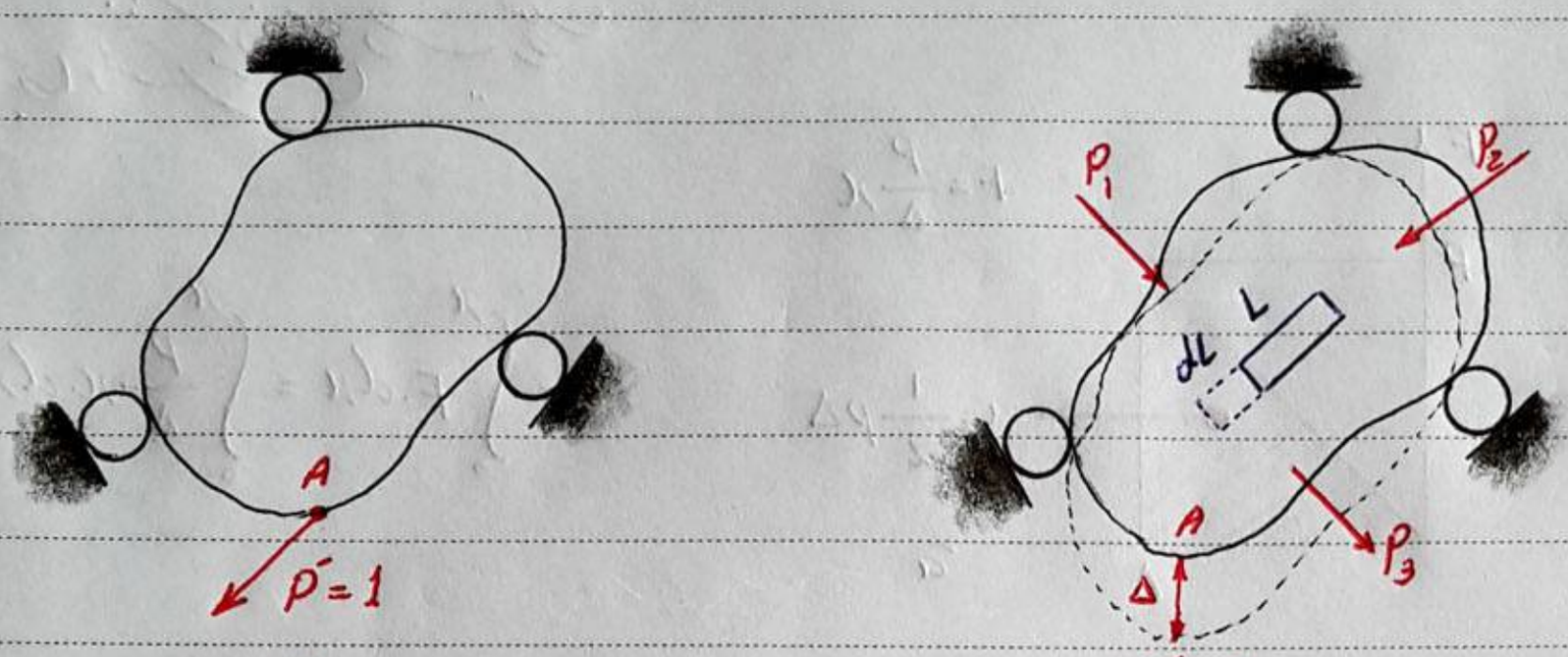
$u_e = \frac{P\Delta}{2} \Rightarrow \frac{P\Delta}{2} = \frac{PL^3}{6EI} \Rightarrow \Delta = \frac{PL^3}{6EI}$

PAPCO

ali_intel66@yahoo.com

Subject :
Year . Month . Date . ( )

روش کار مجازی



Virtual Real

$\sum P \cdot \Delta = \sum u \cdot \delta$

کار بارهای داخلی ← ← مجموع کار بارهای خارجی

$1 \cdot \Delta = \sum u \cdot dL$ ★ به دلیل تغییر مکان می خورد ★

$P' = 1$: بار واحد خارجی مجازی که در جهت Δ اعمال می شود

u : بار مجازی داخلی که در جهت dL به المان های سازه اعمال می شود

Δ : تغییر مکان خارجی حقیقی در اثر بارهای حقیقی

dL : تغییر شکل داخلی المان های سازه به علت بارهای حقیقی

★ مخصوص دوران $1 \cdot \theta = \sum u_\theta \, dL$ ★

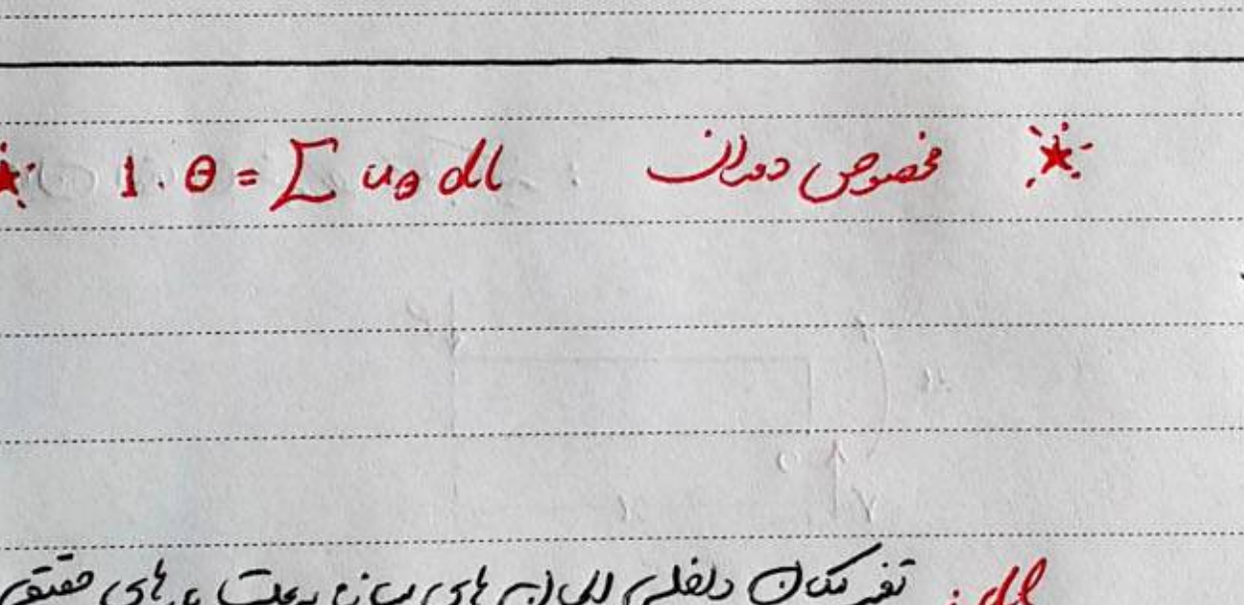
$1' = 1$: لنگر واحد مجازی خارجی که در جهت θ اعمال می شود

u_θ : بار مجازی داخلی دورانی های سازه در جهت dL

θ : دوران خارجی به علت بارهای حقیقی

dL : تغییر مکان داخلی المان های سازه به علت بارهای حقیقی

روش کار مجازی برای محاسبه تغییر شکل خرپا



$$1 \cdot \Delta = \sum \frac{nNL}{AE}$$

ali_intel66@yahoo.com

Subject:
Year. Month. Date. ( )

1 : بار واحد خارجی می باشد که در گره ای از خرپا اعمال می شود که قصد محاسبه تغییر شکل آن را داریم همچنین این بار در جهت Δ اعمال می شود

Δ : تغییر مکان گره ای از خرپا به علت بارهای حقیقی

n : نیروی های داخلی مجازی اعضای خرپا به علت بار واحد خارجی می باشد

N : نیروی داخلی اعضاء خرپا به علت بارگذاری حقیقی خارجی

L : طول اعضای خرپا

A : سطح مقطع اعضای خرپا

E : مدول الاستیسیته اعضای خرپا

ضریب انبساط حرارتی اعضاء خرپا : α

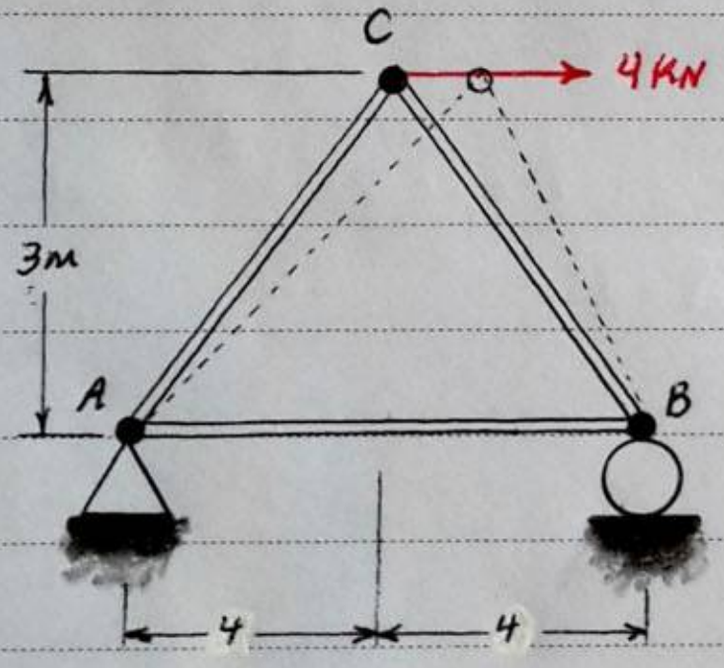
تغیر درجه حرارت اعضای خرپا : ΔL

$\Delta = \sum n \alpha \Delta T L$: تغیرات درجه حرارت

تغییر طول داخلی و طول نسبی شده در اعضای خرپا به علت خطای ساخت : ΔL

$\Delta = \sum n \Delta L$ + خطای ساخت

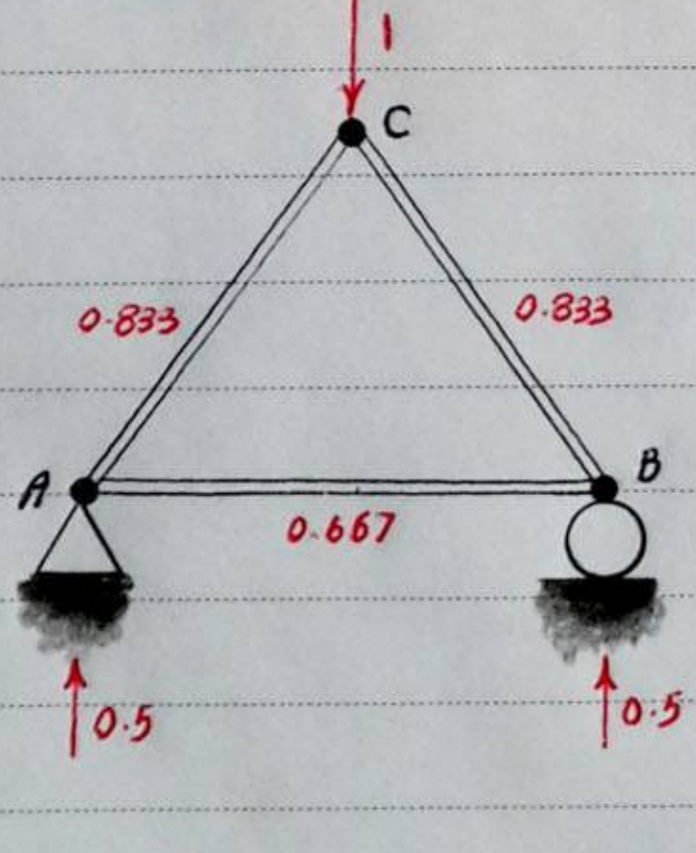
اگر هم فضای ساخت داشتیم و هم حرارت ، Δ های به دست آمده را با هم جمع می کنیم

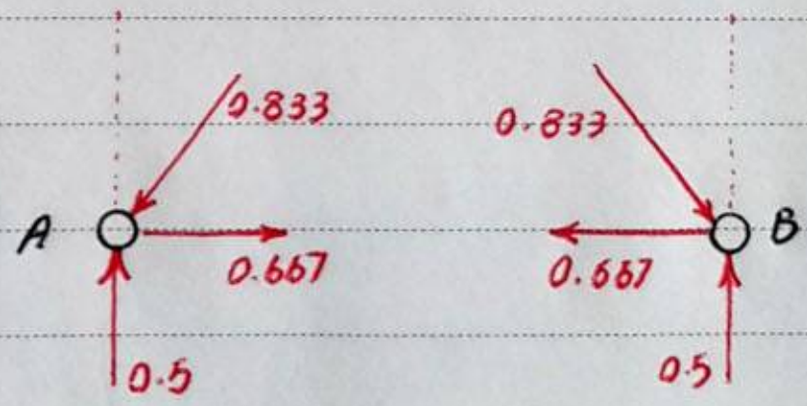


- اگر سطح مقطع اعضای خرپا $400\ mm^2$ و مدول الاستیسیته 200Gpa باشد تغییر مکان قائم گره C از خرپا را وقتی که بار 4KN به صورت افقی بر آن اعمال می شود بیابید ؛

اگر هیچ باری به خرپا اعمال نشود ولی عضو AB 5mm کوتاه تر ساخته شود تغییر مکان قائم گره C را بیابید ؛

حل قسمت اول : خرپا با بار قائم واحد روی گره C

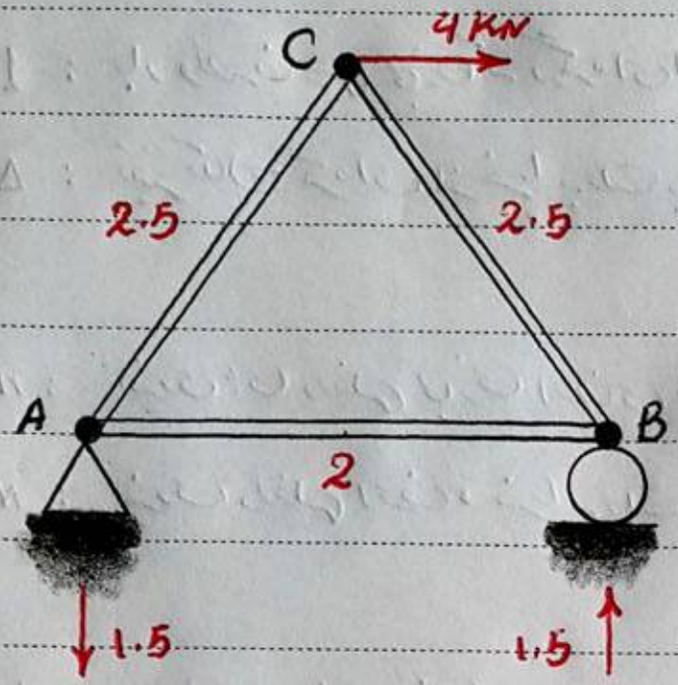




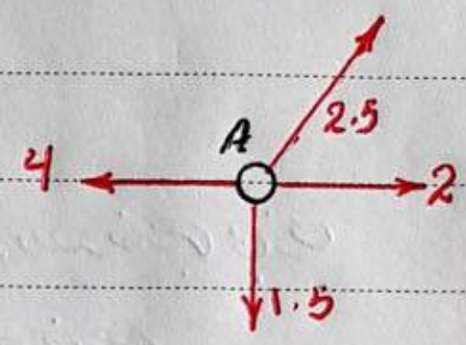
ali_intel66@yahoo.com

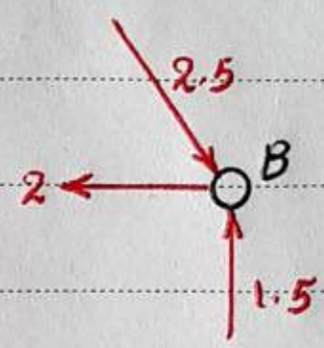
Subject :

Year . Month . Date . ( )



خرپای نمونه :





member	n(KN)	N(KN)	L	nNL/AE
AB	0.667	2	8	10.67
AC	-0.833	2.5	5	-10.41
BC	-0.833	-2.5	5	10.41
				$\sum = 10.67$

$$1 \cdot \Delta = \sum \frac{nNL}{AE}$$

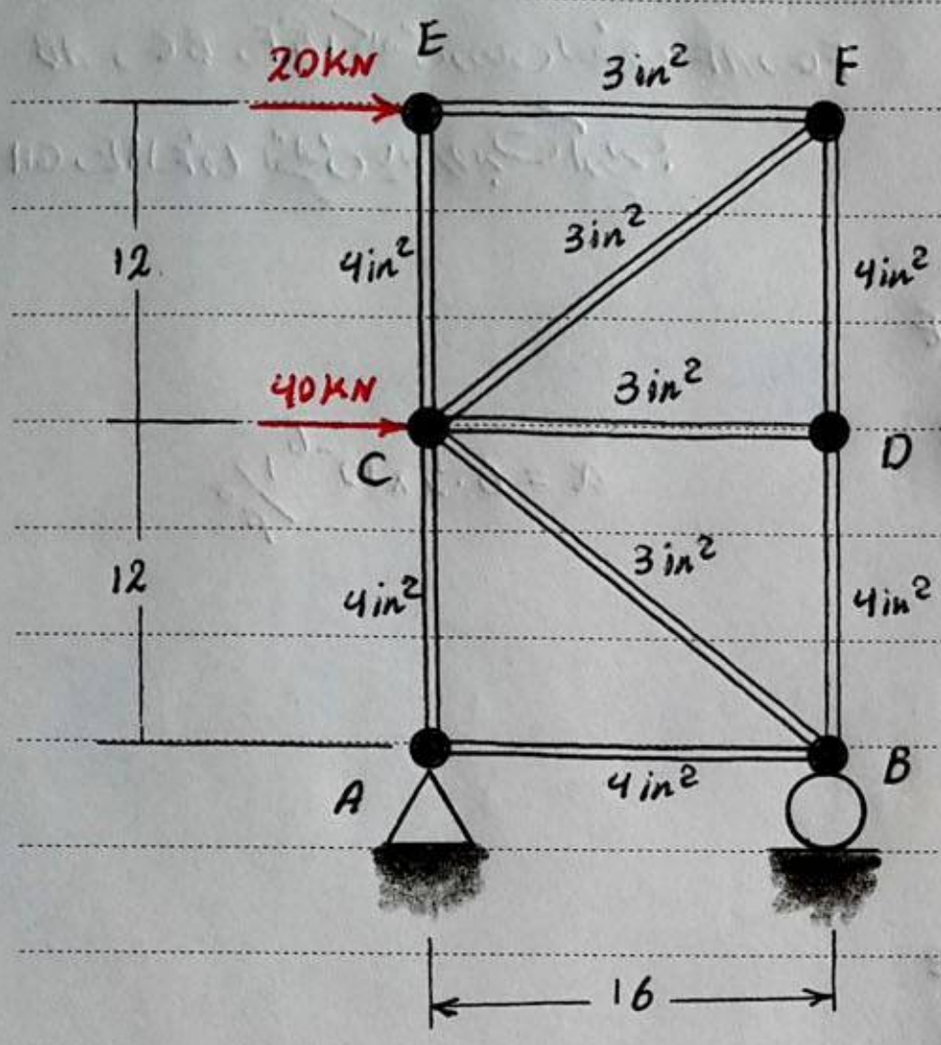
$$\Rightarrow \Delta = \frac{10.67}{AE} = \frac{10.67 \times 10^3 \times 10^3 \times 10^3}{400 \times 200 \times 10^3} = 0.133 \text{ mm}$$

ΔL	nΔL
-5	-3.33
∘	∘
∘	∘

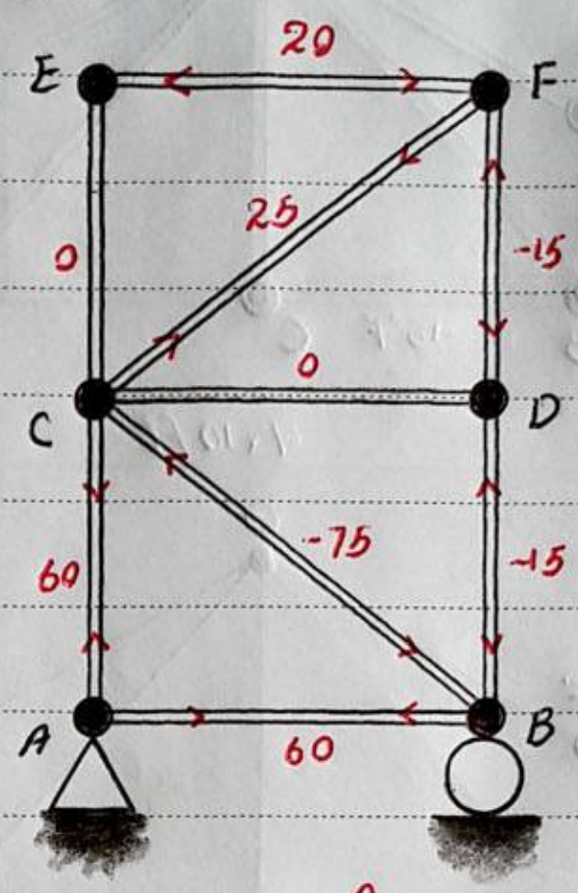
$$\Rightarrow 1 \cdot \Delta = \sum n\Delta L \Rightarrow \Delta = -3.33 \text{ mm}$$

ali_intel66@yahoo.com

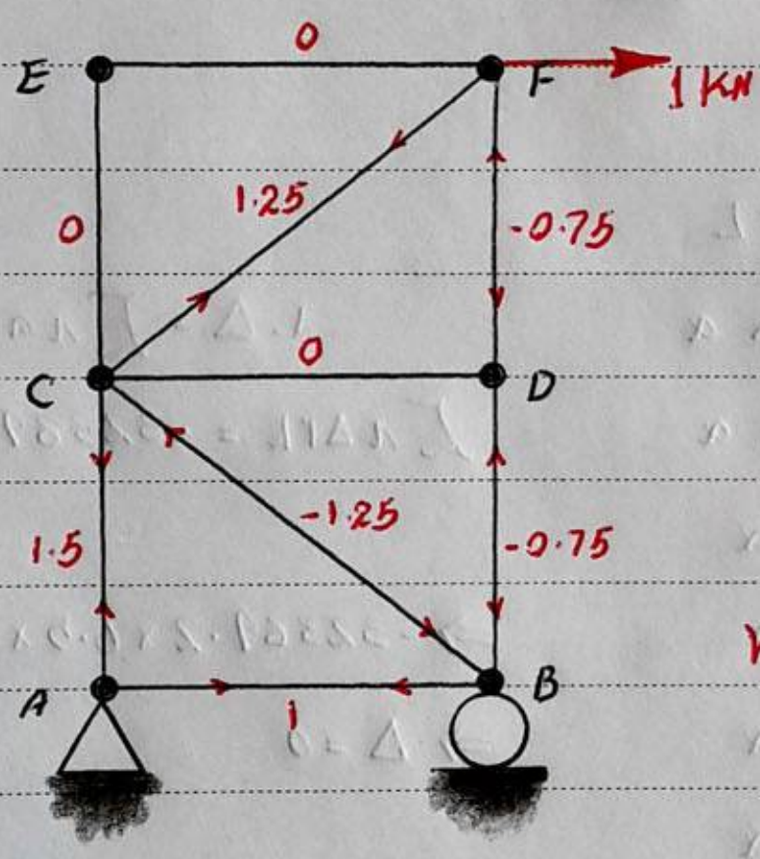
Subject:
Year. Month. Date. ( )



- نیز مکان افقی گره F را محاسبه کنید:



Real system - F Forces



Virtual System - F_y forces

بار واحد 1 را در گره F قرار می دهیم اگر Δ مثبت بدست آمد جهت تغییر شکل هم راستا با بار گذاری و برعکس است

member	n(KN)	N(KN)	L(in)	nNL / A
AB	1	60	192	2880
AC	1.5	60	144	3240
CD	0	0	192	0
CE	0	0	144	0
CB	-1.25	-75	240	7500
EF	0	-20	192	0
FD	-0.75	-15	144	405
DB	-0.75	-15	144	405
FC	1.25	25	240	2500

$$1.\Delta = \sum \frac{nNL}{AE} \quad , E = 29000\ ksi$$

$$\sum nNL/A = 16930$$

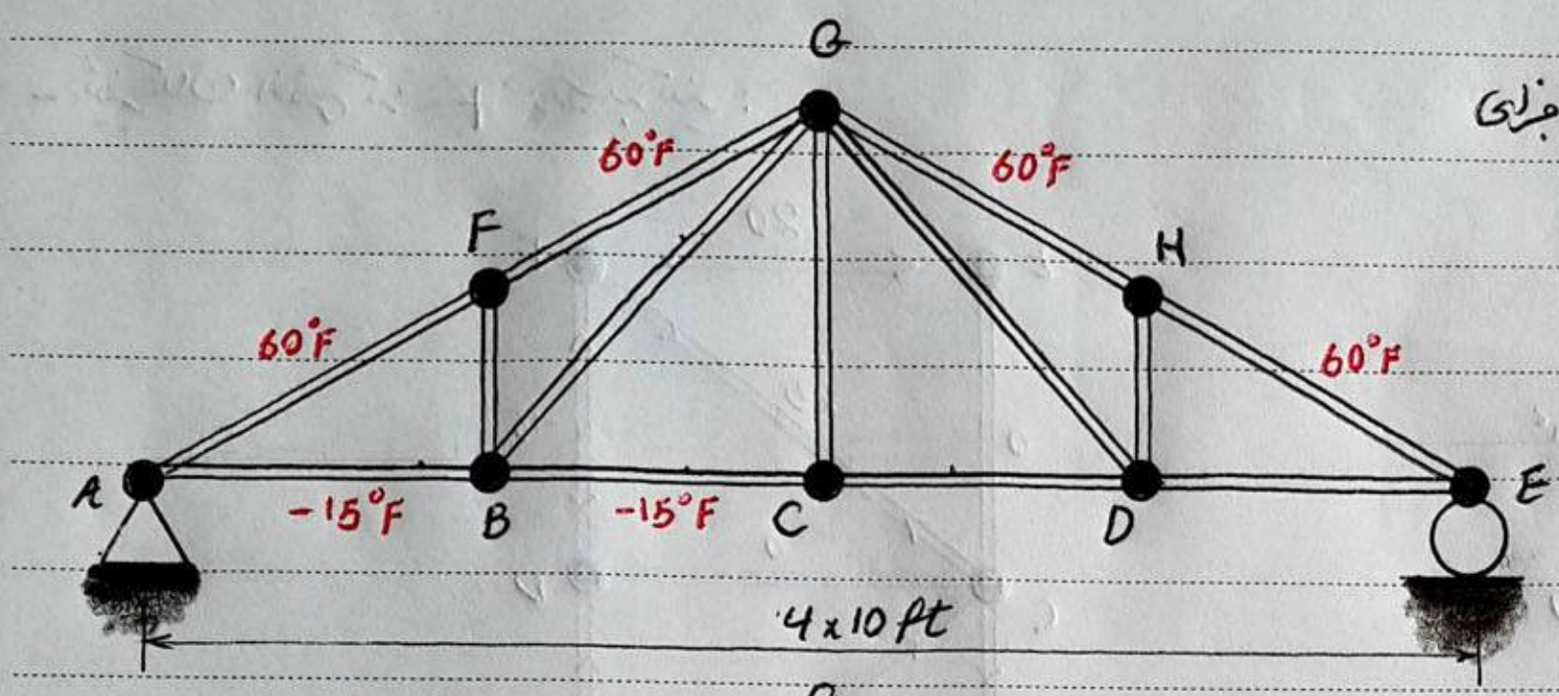
$$\Rightarrow \Delta = \frac{16930}{29000} = 0.584\ in$$

PAPCO

ali_intel66@yahoo.com

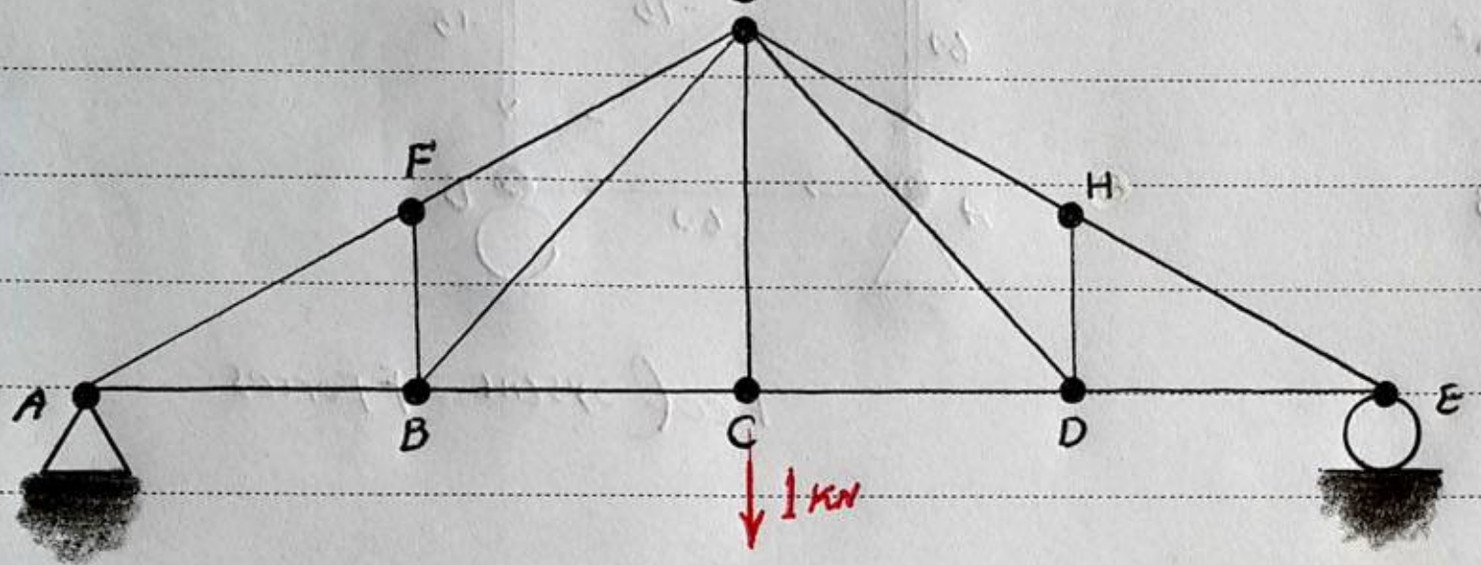
Subject :

Year . Month . Date . ( )



- تغیر مکان قائم گره C را در حالتی که دمای اعضای AF، FG، 15°F کاهش و دمای اعضای AB، BC، HE، GH 60°F افزایش یابد محاسبه کنید؛

$\alpha = 6.5 \times 10^{-6}\ 1/F^{\circ}$



member	n (KN)	ΔT	L	nαΔTL
AB	0.667	-15	10×12	$-1200.6 \times \alpha$
BC	0.667	-15	10×12	$-1200.6 \times \alpha$
AF	-0.833	60	12.5×12	$-7497 \times \alpha$
FG	-0.833	60	12.5×12	$-7497 \times \alpha$
GH	-0.833	60	12.5×12	$-7497 \times \alpha$
HE	-0.833	60	12.5×12	$-7497 \times \alpha$

$1.\Delta = \sum n\alpha\Delta TL$

$\sum n\Delta TL = -32389.2 \times \alpha$

$\Rightarrow -32389.2 \times 6.5 \times 10^{-6} = -0.21$

$\Rightarrow \Delta =$

ali_intel66@yahoo.com

Subject :
Year . Month . Date . ( )

روش کار مجازی - قاب و تیر

$$1\cdot\Delta = \int_0^L \frac{M_2 \cdot M}{EI}\,dx \qquad 1\cdot\theta = \int_0^L \frac{M_{2\theta} \cdot M}{EI}\,dx$$

1 : بار خارجی مجازی واحد که بر تیر یا قاب در جهت Δ اعمال می‌شود

M_2 : لنگر دلفلر مجازی تیر یا قاب که بصورت تابعی از x بیان می‌شود و به علت بار مجازی واحد خارجی بوجود می‌آید

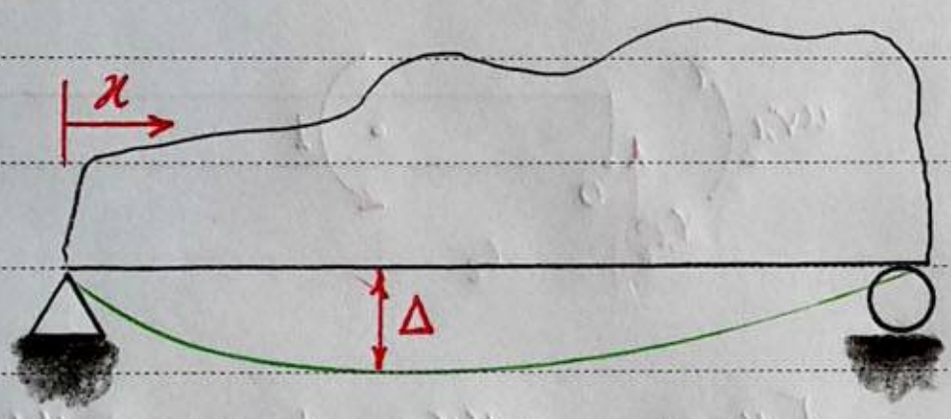
EI : سفتی خمشی تیر

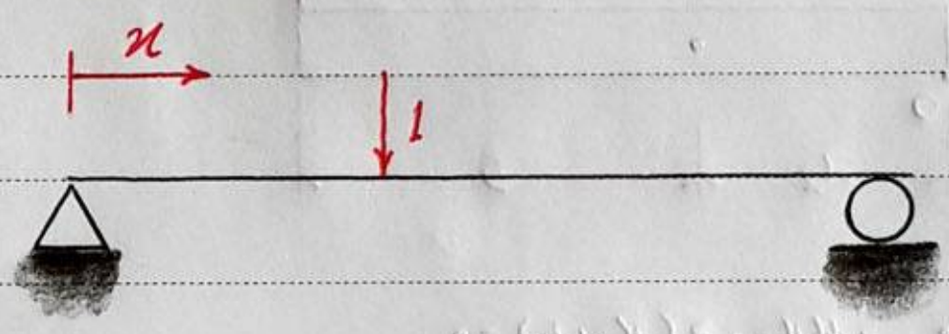
M : لنگر دلفلر تیر یا قاب که بصورت تابعی از x بیان می‌شود و به علت بارهای حقیقی بوجود می‌آید

Δ : تغییر شکل یا تغییر مکان خارجی نقطه‌ای از تیر یا قاب به علت بارهای حقیقی

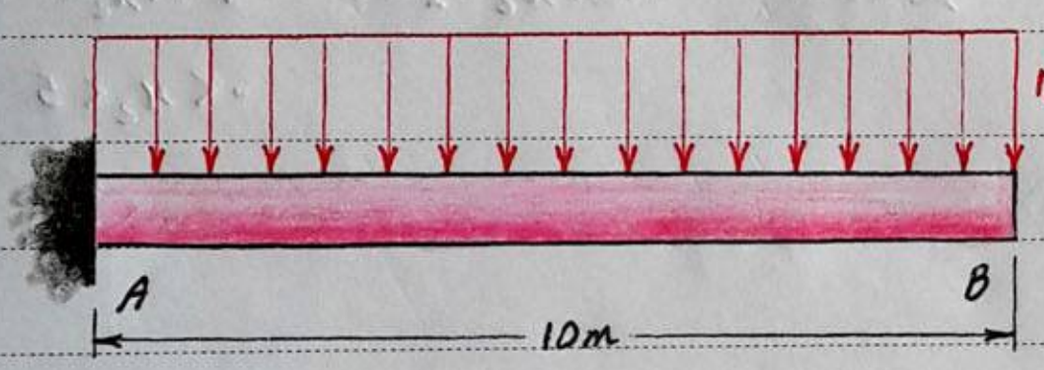
θ : شیب نقطه‌ای از تیر یا قاب به علت بارهای حقیقی

$M_{2\theta}$: لنگر دلفلر مجازی در تیر یا قاب که بصورت تابعی از x بیان می‌شود و به علت لنگر واحد خارجی مرزی بوجود می‌آید

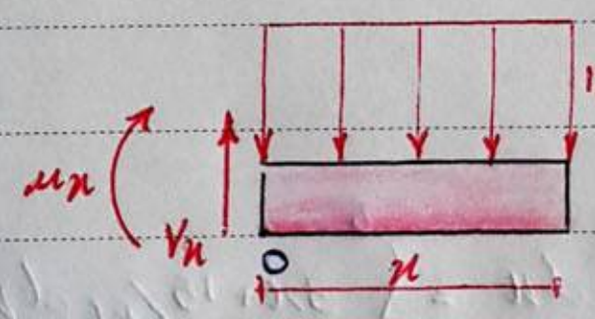




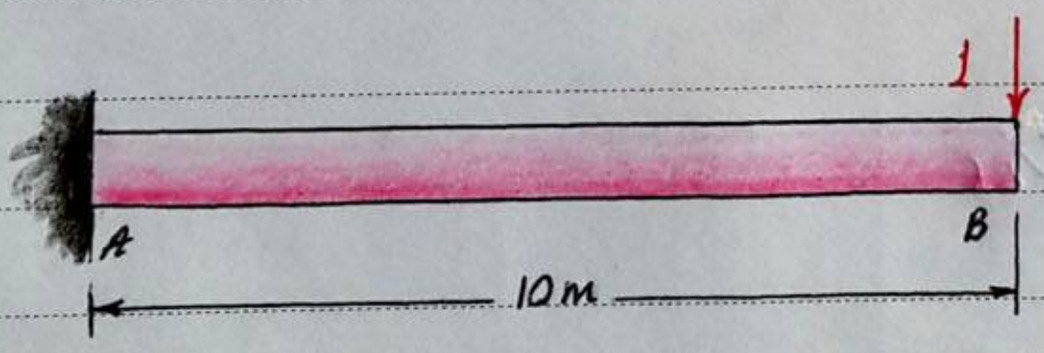
- تغییر شکل تائم در نقطه B از تیر زیر طره شد :

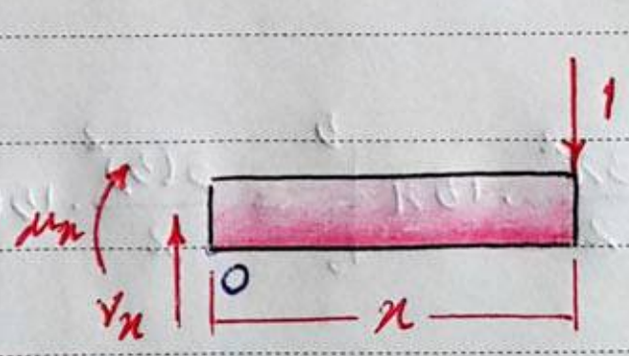


$E = 200\ GPa \qquad I = 500 \times 10^6\ mm^4$



$$\sum M_O = 0 \quad -12x\frac{x}{2} - M_x = 0 \Rightarrow M_x = -6x^2$$





$$\sum M_O = 0 \quad -1x - M_{2x} = 0 \Rightarrow M_{2x} = -x$$

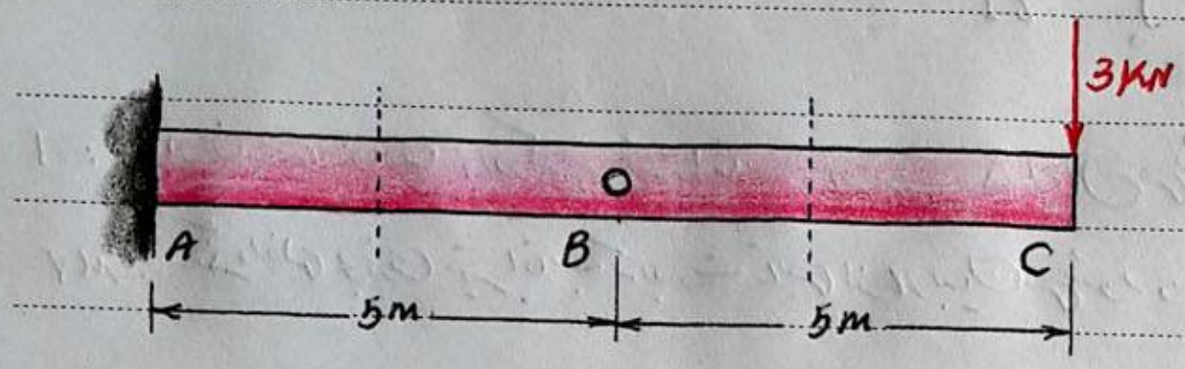
$$1\cdot\Delta = \int_0^L \frac{M_2 \cdot M}{EI}\,dx \Rightarrow 1\cdot\Delta = \int_0^{10} \frac{-x(-6x^2)}{EI}\,dx = \frac{6x^4}{4}\Big|_0^{10} \Rightarrow \Delta_B = \frac{6(10\times10^3)^4}{4\times200\times10^3\times500\times10^6} = 150\ mm$$

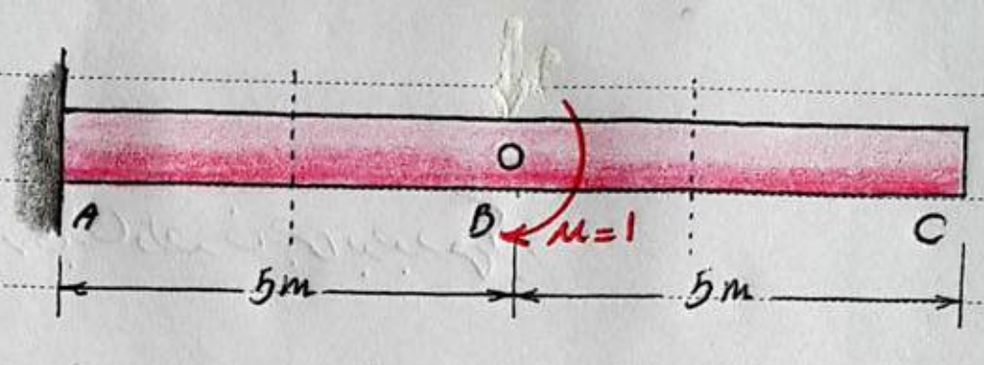
ali_intel66@yahoo.com

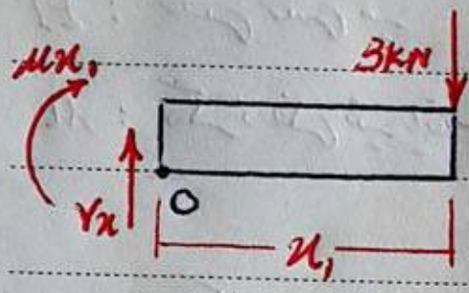
- Determine the slope θ at point B of the steel Beam:

: Example -

$I = 500 \times 10^6$, $E = 200$ Gpa





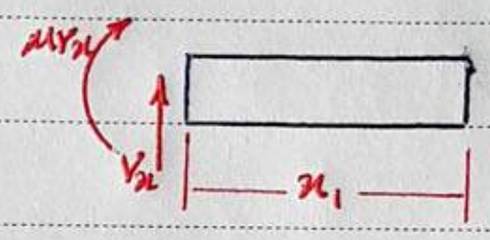


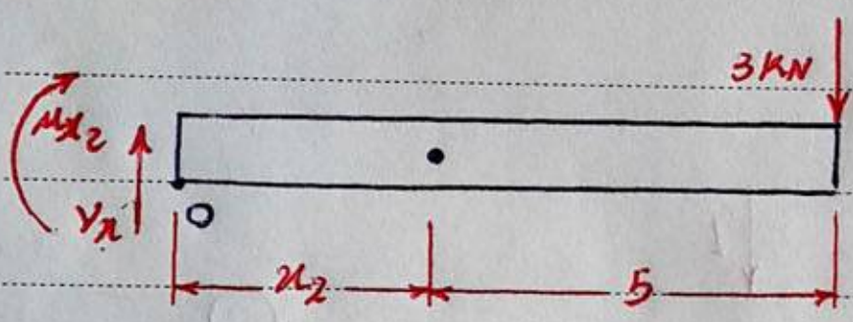
$\sum M_O = 0 \quad -3x - M_{x_1} = 0$

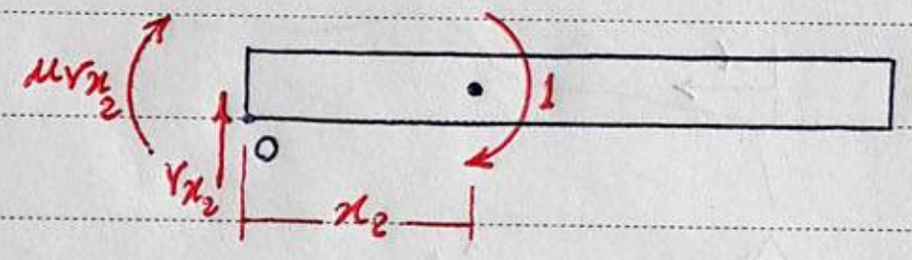
$\Rightarrow M_{x_1} = -3x_1$

$M_V x = 0$

$0 < x_1 < 5$







$\sum M_O = 0 \quad -M_{x_2} - 3(x_2 + 5) = 0$

$\Rightarrow M_{x_2} = -3x_2 - 15$

$\sum M_O = 0 \quad -M_V x_2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow M_{V_{x_2}} = -1$

$0 < x_2 < 5$

$$1 \cdot \theta = \int_0^L \frac{M_V \theta \cdot M}{EI} dx$$

$$1 \cdot \theta = \int_0^5 \frac{0 \cdot -3x_1}{EI} dx + \int_0^5 \frac{-1 \cdot (-3x_2 - 15)}{EI} dx = \int_0^5 3x + 15 / EI \, dx$$

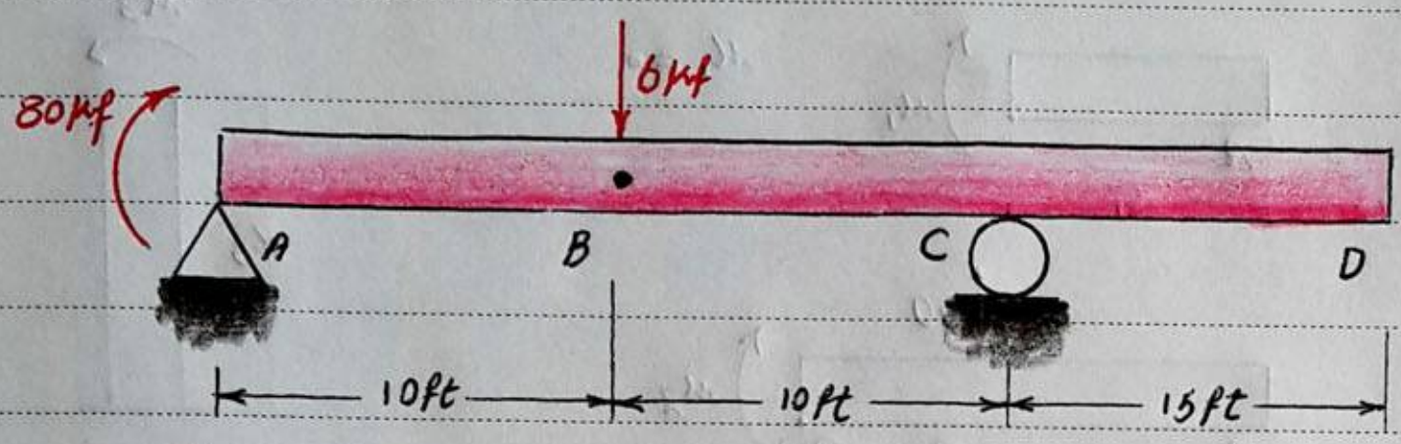
$$\Rightarrow \theta = \frac{3x^2}{2} \cdot 15x \Big|_0^5 = \frac{3(5)^2}{2} \cdot 15(5) = 112.5 \text{ KN}/EI$$

$$\theta = \frac{112.5 \times 10^3 \times 10^3}{200 \times 10^3 \times 500 \times 10^6} = 0.001125 \text{ rad}$$

ali_intel66@yahoo.com

Subject :
Year . Month . Date . ( )

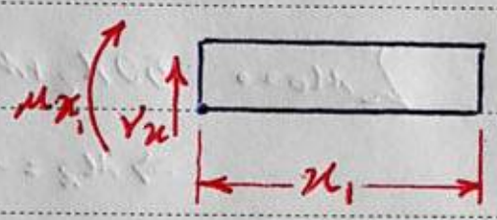
- Determine the displacement at D of the steel Beam! $E = 29 \times 10^3$, $I = 800\ in^4$



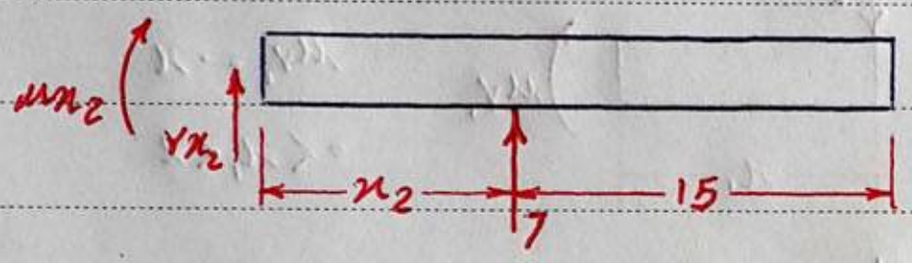
$\sum M_A = 0 \quad Cy20 - 60 - 80 = 0$

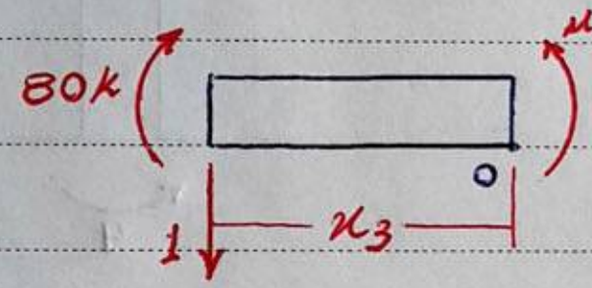
$\Rightarrow Cy = 7$

$M x_1 = 0$

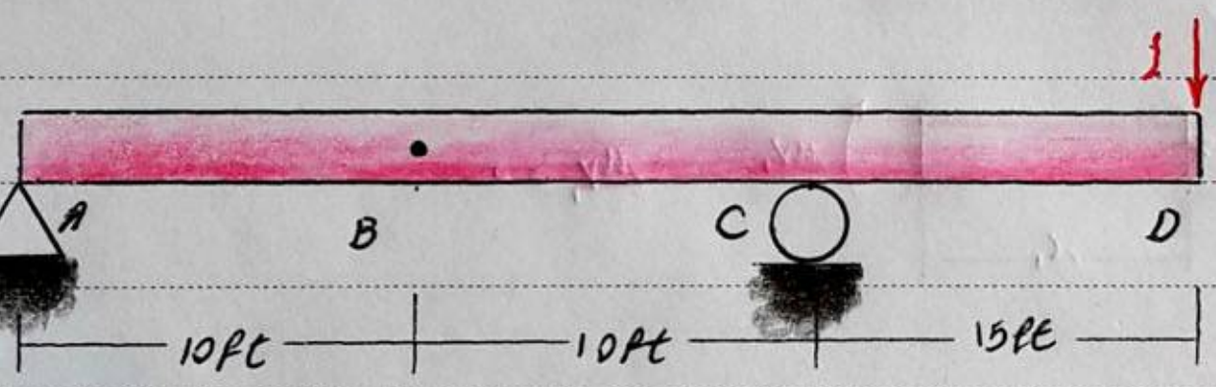


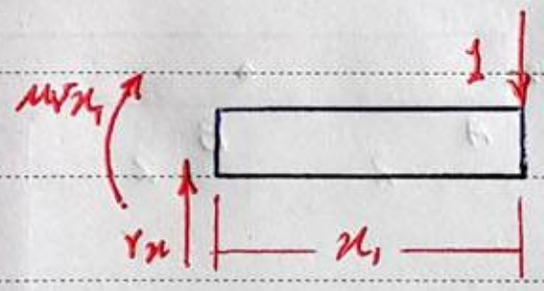
$M x_2 = 7 x_2$



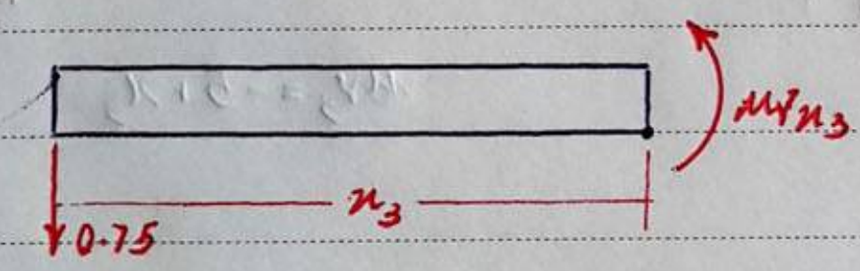


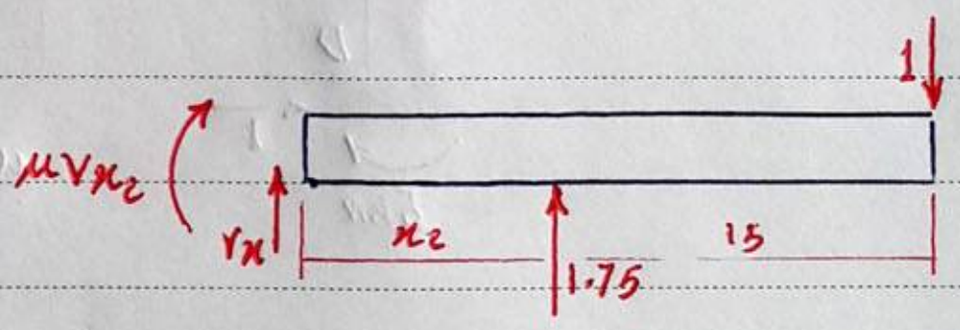
$\sum M_0 = 0 \quad +1 x_3 + M x_3 - 80 = 0 \quad \Rightarrow M x_3 = 80 - x_3$





$M V x_1 = -x$





$\sum M_0 = 0 \quad M V x_3 = -0.75x$

$\sum M_0 = 0 \quad -M V x_2 + 1.75 x_2 - 1(x_2 + 15) = 0$

$\Rightarrow M V x_2 = 0.75x - 15$

$$1.\ \Delta D = \int_0^L \frac{MV \cdot M}{EI} dx = \int_0^{15} \frac{0 \cdot (-x)}{EI} dx + \int_0^{10} \frac{7x \cdot (0.75x - 15)}{EI} dx + \int_0^{10} \frac{80 - x(-0.75x)}{EI} dx$$

$$\Rightarrow \Delta D = \frac{-3500}{EI} - \frac{2750}{EI} = \frac{-6250}{EI} \qquad \Rightarrow \Delta D = \frac{-6250 \times 12^3}{29 \times 10^3 \times 800} = -0.465\ in$$

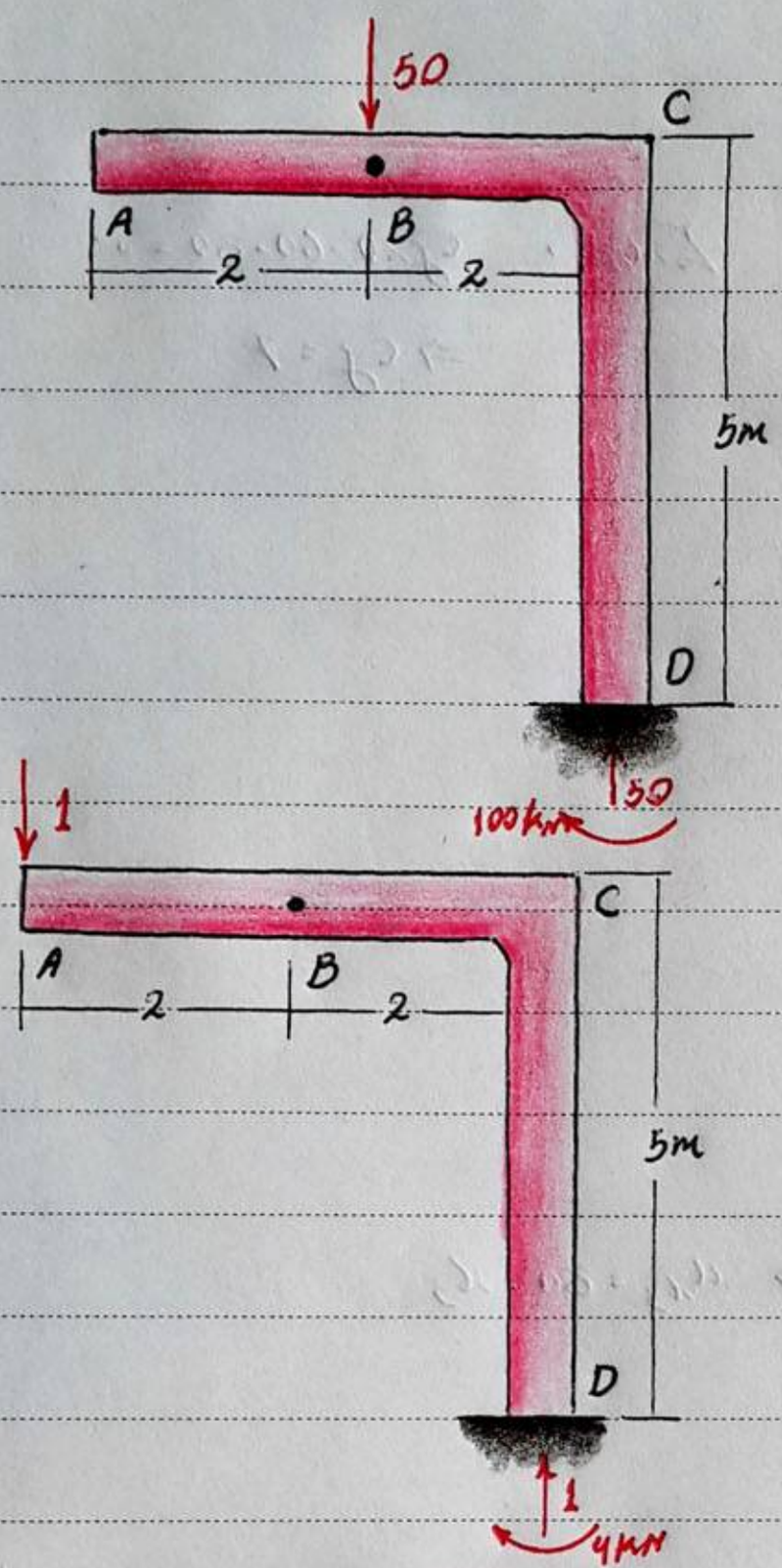
PAPCO

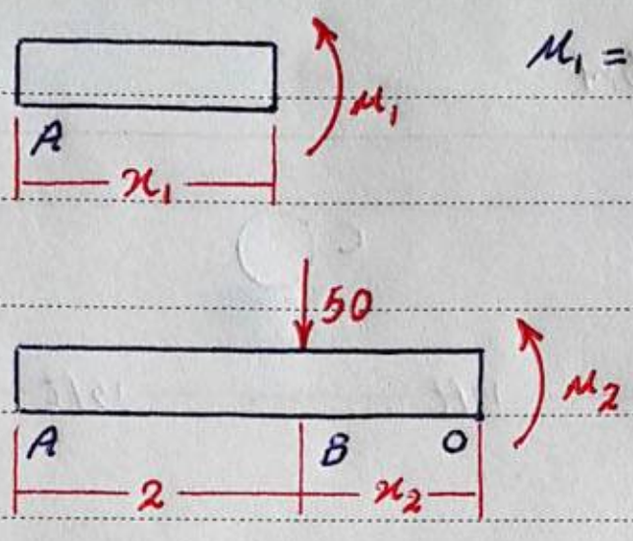
ali_intel66@yahoo.com

Subject :

Year . Month . Date . ( )

- Determine the horizontal and vertical displacement of point A on the frame ? $E = 200\,Gpa$ $I = 200 \times 10^6\,mm^4$

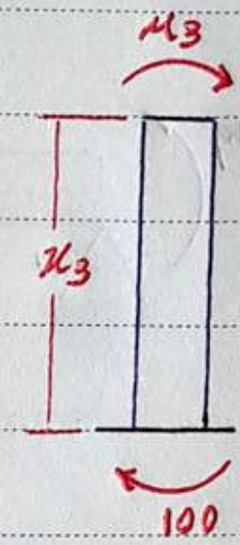




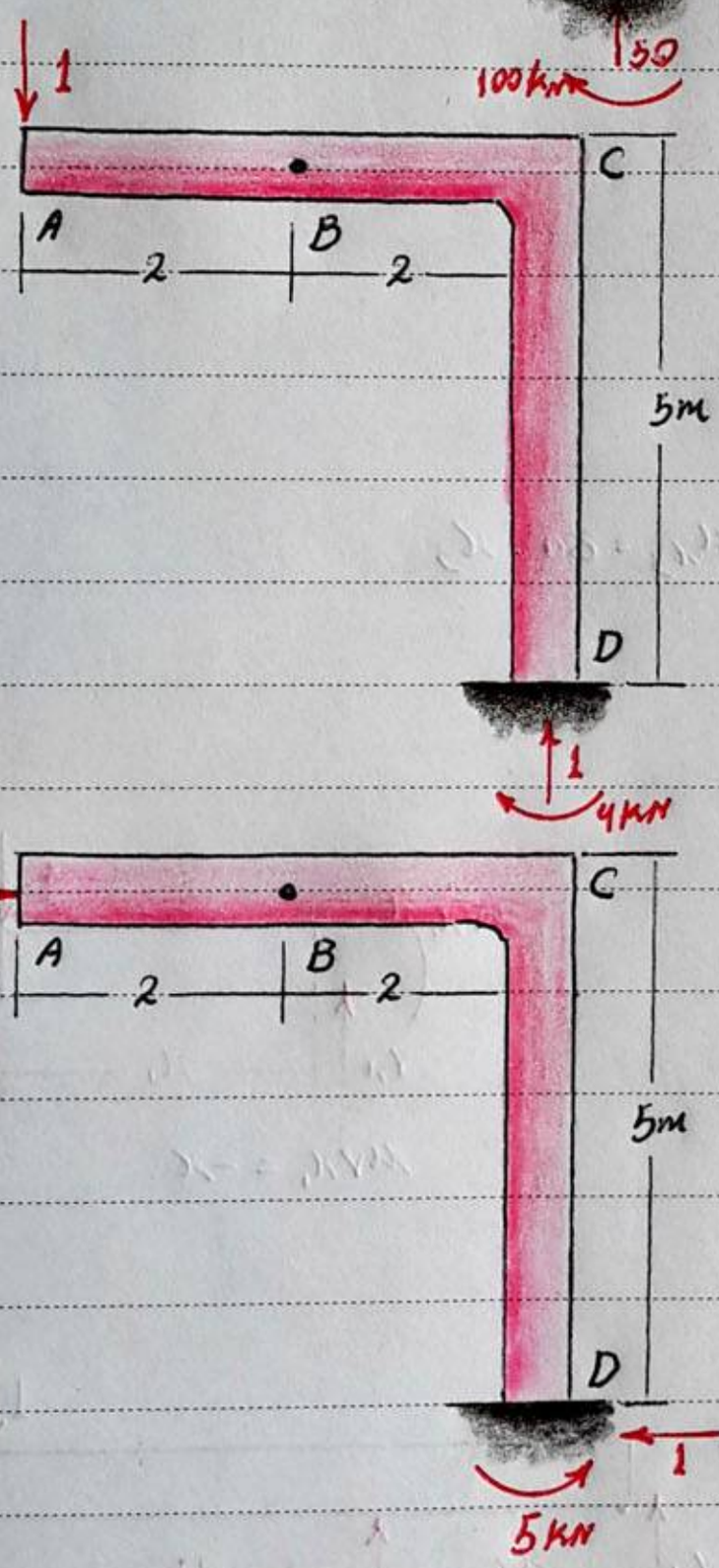
$M_1 = 0$

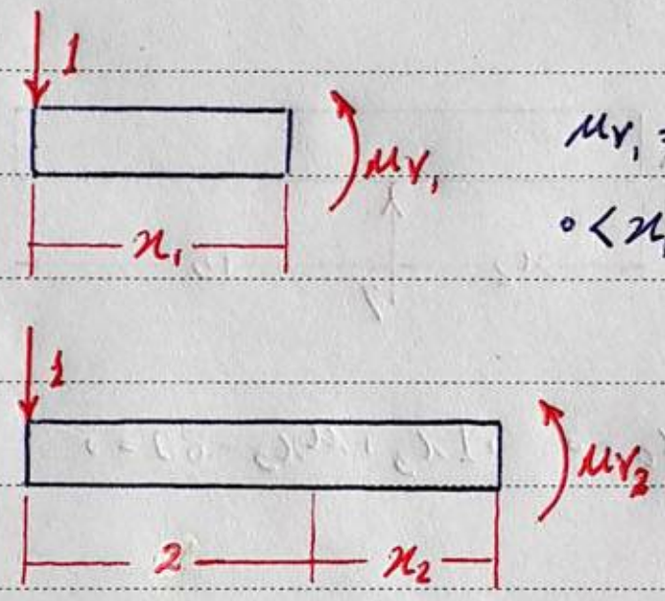
$\sum M_O = 0 \quad 50x_2 + M_2 = 0$

$\Rightarrow M_2 = -50x_2$



$M_3 = -100$



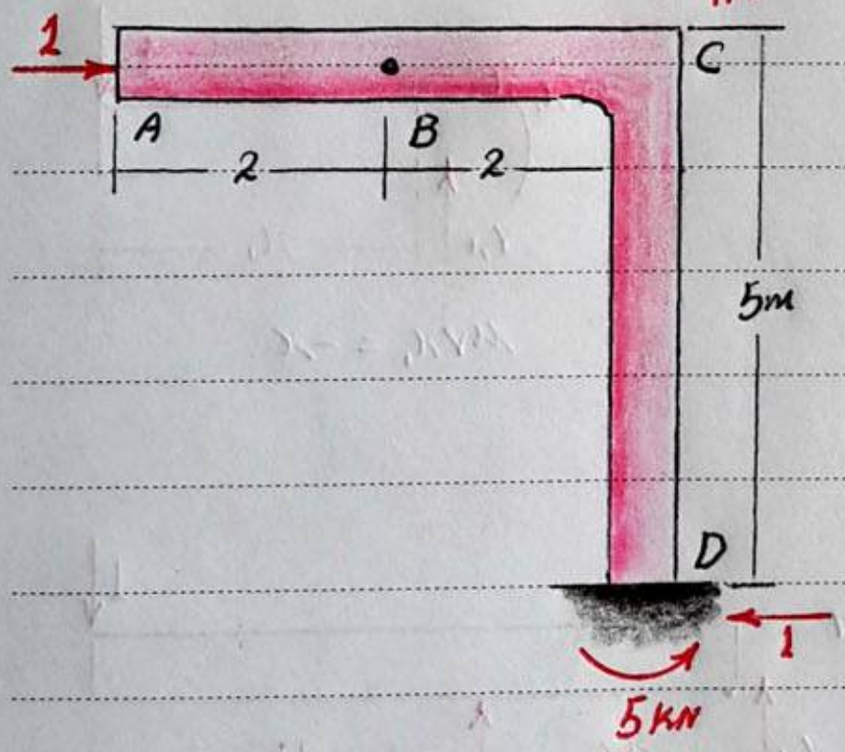


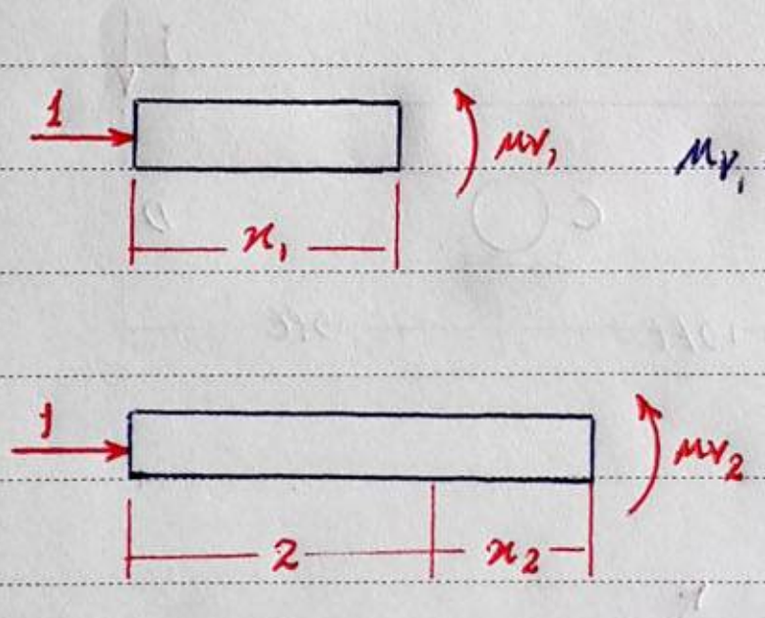
$M_{V_1} = -x$

$0 < x_1 < 2$

$M_{V_2} = -2 - x_2 \qquad 0 < x_2 < 2$

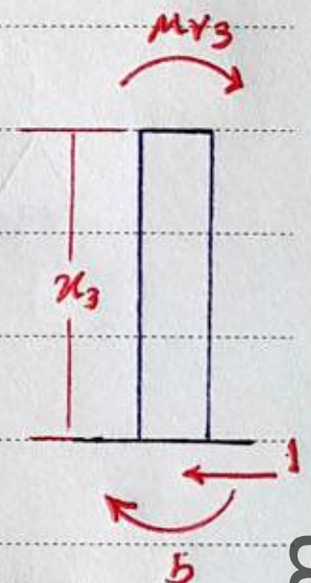
$M_{V_3} = -4 \qquad 0 < x_3 < 5$





$M_{V_1} = 0$

$M_{V_2} = 0$



$M_{V_3} = -5 + x_3$

member	Origin	L	M	M_V	M_H
AB	A	0-2	0	$-x$	0
BC	B	0-2	$-50x_2$	$-2-x_2$	0
CD	C	0-5	-100	-4	$-5+x_3$

PAPCO

ali_intel66@yahoo.com

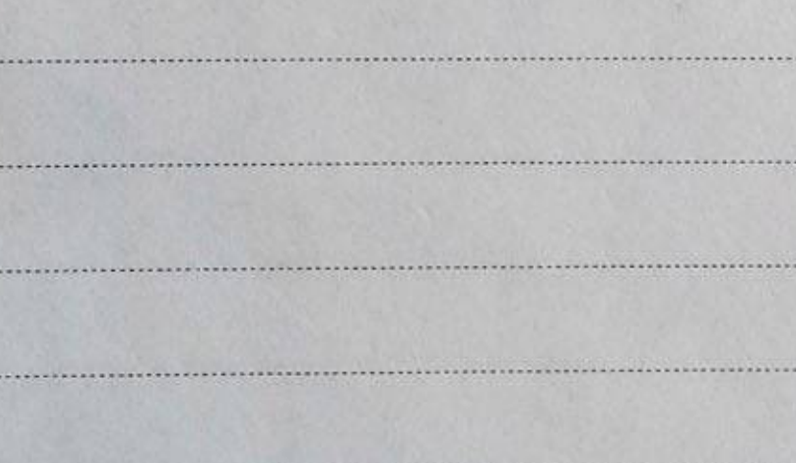
Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$1.\ \Delta V = \int_0^L \frac{MV.M}{EI}\,dx = \int_0^2 \frac{0\times(-x)}{EI}\,dx + \int_0^2 \frac{-50x(-2-x)}{EI}\,dx + \int_0^5 \frac{-100\times -4}{EI}\,dx$$

$$\Delta V = \int_0^2 100x + 50x^2/EI\,dx + \int_0^5 400/EI\,dx = 2333/EI \Rightarrow \Delta = \frac{2333\times10^3}{200\times200\times10^9} = 58.33\ mm$$

$$1.\ \Delta H = \int_0^L \frac{MV.M}{EI}\,dx = \int_0^2 \frac{0}{EI}\,dx + \int_0^2 \frac{-50x\times0}{EI}\,dx + \int_0^5 \frac{-100\times(-5\times x_3)}{EI}\,dx$$

$$\Delta H = \int_0^5 500 - 100x/EI\,dx = 500x - \frac{1}{2}100x^2\Big|_0^5 \Rightarrow \Delta = \frac{1250\times10^9}{200\times200\times10^6} = 31.25\ mm$$



ali_intel66@yahoo.com