Dastnameh.ir
پایگاه علمی سازه های دریایی فراساحل و مهندسی زلزله

بخشی از جزوه درس

مهندسی زلزله پیشرفته

دانشجو : امیر غفوری‌نژاد

مدرس : تابش‌پور

ممکن است در این نوشتار، اشکالات املایی، فرمولی و شکلی وجود داشته‌باشد که مسئولیت آن با دانشجو و یا مدرس این کلاس نیست.

نشر این جزوه صرفاً جنبه راهنمایی و ترویج داشته و استفاده از آن در کارهای حرفه‌ای و تحقیقاتی مستلزم بررسی بیشتر و اطمینان از صحت نوشتار می‌باشد.

جلسه اول مورخه: ۸، ۱۲، ۹۳

مهندسی زلزله پیشرفته:

کاربرد دینامیک و ارتعاشات در مهندسی زلزله

هدف اصلی:

افزایش وسعت و عمق اطلاعات در حوزه مهندسی زلزله

مراجع:

۱- ارتعاشات ساختمان های برشی
۲- مبانی مهندسی زلزله } کتاب مهندسی زلزله (دانشنامه زلزله ۲)
۳- مهندسی زلزله پیشرفته
۴- جلد اول تفسیر آیین نامه ۲۸۰۰
۵- جلد سوم تفسیر آیین نامه ۲۸۰۰
۶- مسائل مبانی زلزله } کتاب مسائل مهندسی زلزله (دانشنامه زلزله ۳)
۷- مسائل زلزله کاربردی
۸- کاربرد مهندسی زلزله در بهسازی
۹- کتاب ارتعاشات مکانیکی نوشته آقای تامسون
۱۰- هندبوک ارتعاشات Harris
۱۱- مقدمه ای بر ارتعاشات تصادفی

نرم افزارهای کاربردی در درس مهندسی زلزله پیشرفته:

BisPec
Nonlin
Seismo Signal
Seismo match

برای اینکه یک مهندس خوب باشیم بایستی فیزیک (پدیده) رو خوب درک کنیم، بایستی یک دید خوب داشته باشیم و با اثبات ریاضی. خاصیت پدیده شناسی آن مطلب را داشته باشیم.

مطالب این فصل از فصل ۹ کتاب مقدمه‌ای بر ارتعاشات تصادفی و فصل ۱۸ کتاب مهندسی زلزله.

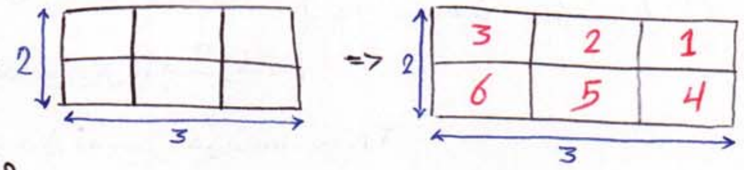
☐ فیزیک تا ریاضی، ابتدا تا ابتدا physics to mathematics first to first

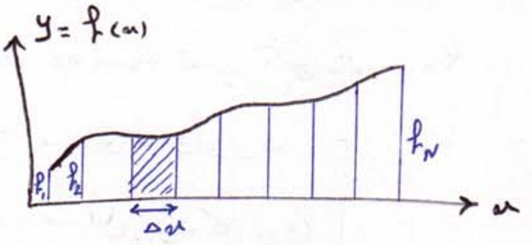
ریاضی: فقط انسان می‌تواند شمارش کند. اصولاً ریاضی‌ها بیانی است از طبیعت که براساس ادراک و یافته‌های بشر.

جمع همان تداوم شمارش است. مثلاً وقتی می‌گوییم ۶+۷ برای تعیین مقدار آن اگر از عدد شش به اندازه هفت واحد به شمارش خود ادامه دهیم به عدد سیزده می‌رسیم.

ضرب همان جمع است؛ لذا در شکل زیر نحوه تبدیل ضرب به جمع و تبدیل جمع به شمارش را می‌توانیم بدست آوریم:

$2 \times 3 = 6 \Rightarrow$





$$\int f(x)\,dx = \sum f(x)\,\Delta x$$

انتگرال: عملاً جمع تعداد زیادی مساحت مستطیل است که خود این محاسبه مساحت‌ها عمل ضرب یا جمع است. لذا در کل تداوم شمارش می‌باشد.

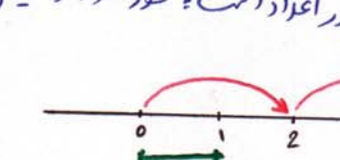
توانمندی بشر
- شمارش
- بیان ← قوه ناطقه ← ادبیات

باید با بیان ادبیات درست قوانین ریاضی را تعریف نماییم تا به شمارش برسد.

سوال: به چه نحوی می‌توانیم ابزار شمارش را نهادینه کنیم؟

شمارش را با محور اعداد مکانیزه می‌کنیم. ابزار توانمندی شمارش محور اعداد است؛ محور اعداد را سیستم مختصات می‌نامیم.

بردار پایه: در سیستم مختصات محور اعداد می‌توان یک بردار به طول یک گام (واحد) در نظر گرفت.



$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum F_z = 0 \end{cases}$$

نکته: جهت تعیین معادلات تعادل استاتیکی از فلسفه محور مختصات اعداد استفاده می‌کنیم.

سیستم n بعدی را به n سیستم یک‌بعدی تبدیل می‌کنیم. (براساس توانمندی بشر پدیده‌های پیچیده n بعدی را به n تا سیستم یک بعدی مبتنی بر توانمندی اش تبدیل می‌کند)

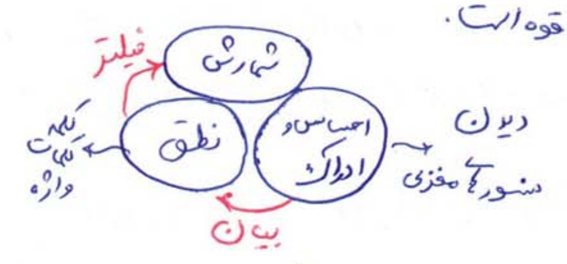
نکته: اولین قدم در تمام مسائل مهندسی فرض سیستم مختصات است.

نکته: تعیین $\sum F_y$ ، $\sum F_z$ عین $\sum F_x$ است و مفهوم آن‌ها یکی است، ولی تفکیک آن‌ها مهم است.

استقلال و وابستگی بین بردارها:

بردار خطی است فلش دار (→ or ↗)

توان منذی بشر: بشر ترکیبی از این سه قوه است.



x

$\dot{x}$

$\ddot{x}$

غیرقابل فهم برای انسان ← $\dddot{x}$

نکته: اگر سرعت ثابت باشد فقط با دیدن قابل احساس می‌باشد، بشر توانایی فهم مرتبه سوم ($\dddot{x}$) به بالا را ندارد.

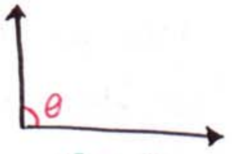
نکته: بشر طبیعت را با احساس می‌فهمد و با نطق آن را بیان می‌کند و در نهایت آن را با شمارش قانون‌مندی کند.

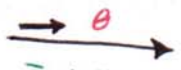
نکته: بشر طبیعت را فیلتر کرده، آنرا به n سیستم تک بعدی ساده تبدیل می‌کند.

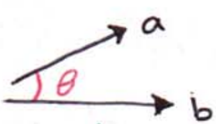
نکته: خیلی از حقیقت‌های خلقت از سه قوه انسان خارج است و نسبت به آنها اطلاع پیدا نمی‌کند، مگر ابزاری بسازند که آنها را بتواند آن بعدها را کشف کند، که همین ابزار کم در واقع در تعیین میزان این پدیده بازهم می‌کند.

☐ فضای برداری:

زاییده تفکیک یک سیستم پیچیده n بعدی می‌باشد.


کاملاً مستقل


کاملاً وابسته



بینابین

اگر دو بردار هیچ مولفه و وجه اشتراکی نداشته باشد، آن‌گاه به آن‌ها بردارهای مستقل می‌گوییم.

بهترین معیار برای میزان وابستگی بین دو بردار $\cos\theta$ می‌باشد. زیرا مقدار آن در حالت تعامد (استقلال) $\theta=90^\circ$ برابر صفر است. یعنی هیچ هم بستگی وجود ندارد و در حالت $\theta=0$ بیشترین وابستگی وجود دارد که در آن $\cos\theta$ مقدار بیشینه (واحد) را دارد.

کسینوس بین دو بردار میزان وابستگی (عدم استقلال) بین آن‌ها را نشان می‌دهد.

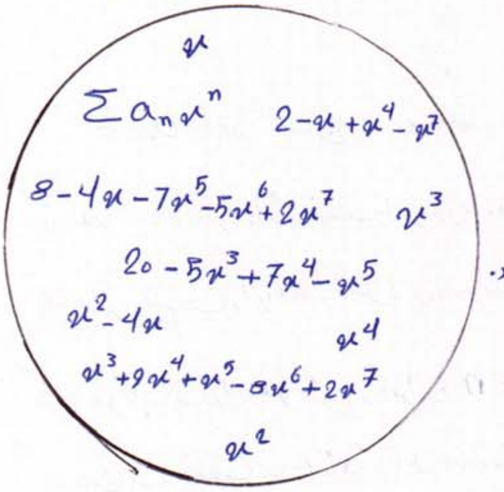
ریاضی حاصل جبر، هندسه و مثلثات می‌باشد.

☐ کل ریاضیات را می‌توان با فضای برداری بیان کرد
- فضای برداری جبری
- فضای برداری مثلثاتی
- فضای برداری هندسی

- فضا: هرجایی در طبیعت

☐ فضای برداری جبری: $y(x) = \sum a_n x^n$

می‌توان تصور کرد که یک فضای برداری به اسم «فضای برداری جبری» وجود دارد که بردارهای پایه آن x^n بوده و از ترکیب (جمع) این بردارهای توان هر بردار دلخواه $\sum a_n x^n$ را بیان کرد.



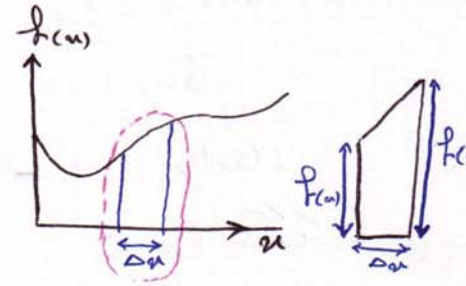
این ترکیب خطی $\sum a_n x^n$ در واقع بسط تیلور است.

نکته: ریاضی در فضای جبری را بسط تیلور (خیام) گفته می‌شود.

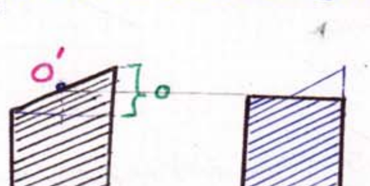
جبر نگاه هوشمندانه به فضای برداریست

نکته: اسکالر بردار تک بعدی است.

چیست مشتق و حد میل به سمت صفر:

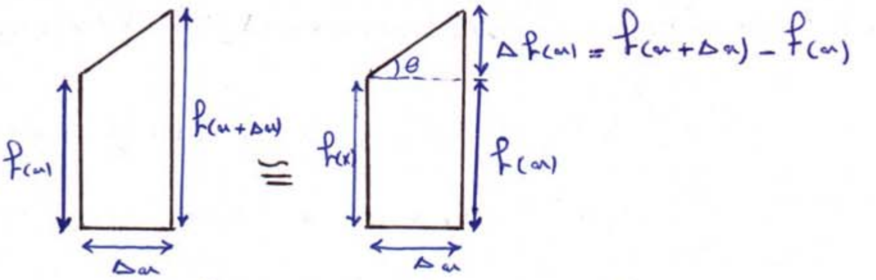


اگر بخواهیم در یک تابع پیوسته در طول یک گام، تغییرات تابع بصورت خطی باشد، باید طول گام را کوچک و بلکه بسیار کوچک در نظر بگیریم برای اینکه به ازای هر مقداری از انحنا و خمیدگی تابع، این تغییرات بصورت خطی باشد، ناگزیر باید Δx به سمت صفر میل کند. اکنون مساحت زیر تابع که همان مساحت ذوزنقه است، تبدیل به مستطیل می‌باشد.



مشتق: اینقدر دیفرانسیل (Δx) رو کوچک می‌کنیم که تابع $f(x)$ در آن فاصله خطی شود و وسط آن خط را انتخاب (نقطه o') می‌کنیم تا یک مستطیل داشته باشیم.

$$o = f(x+\Delta x) - f(x)$$



$$\text{شیب}\,\theta = \tan\theta = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

مشتق در واقع شیب (آهنگ تغییرات) می باشد.

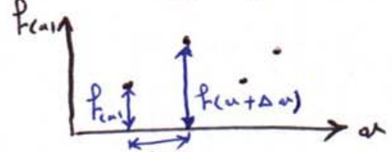
حد و مشتق جا هم می باشد.

ضرورت حد، رسیدن به دقت در جمع کردن است.

معادلات دیفرانسیل:

بشر هم مقادیر را می فهمد هم تغییرات مقادیر

در طبیعت هیچ چیز ثابت نیست، همه چیز طبیعت در تغییرات است. لذا ما می توانیم در طبیعت تغییرات را اندازه گیری نمائیم.



تغییرات همان مشتق است. تغییر y ← y' است.

$$f(x+\Delta x) = y'\Delta x + f(x)$$

فلسفه معادلات دیفرانسیل تغییرات در عالم (طبیعت) یا در قالب زمان یا مکان ...... $y, y', y'', \dots$

قانون نیوتن $\sum F = ma \xrightarrow{\text{در ادبیات ما می شود}} m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$ قانون حرکت

روش حل معادلات دیفرانسیل:

سوال: در کلاس درس معادلات دیفرانسیل برای حل معادلات چه کاری انجام می دهیم؟

هیچ کاری نمی کنیم، همان کاری را که در کلاس جبر انجام می دهیم یا به عبارتی همان کار جبر (شمارش) را تکرار می کنیم. این فرآیند تبدیل معادلات دیفرانسیل به معادلات جبری است.

فضای برداری معادلات دیفرانسیل:

$y''+3y'-4y=0$
$y'''-3y''+5y=0$
$y'+2y=0$
$7y'+y=0$
$4y'=\cos x$

اکنون می توان تصور کرد که یک فضای برداری به اسم فضای برداری معادلات دیفرانسیل وجود دارد که بردارهای پایه آن $y^{(n)}$ می باشد (مشتق مرتبه nام تابع y) و از ترکیب (جمع) این بردارها می توان هر بردار دلخواه $\sum a_n y^{(n)} = f(x)$ را بیان کرد.

چگونگی تبدیل فضای برداری معادلات دیفرانسیلی به فضای برداری معادلات جبری؟ $ay''+by'+cy=0$

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_2 y^{(2)} + a_1 y^{(1)} + a_0 y = 0$$

$$y = f(x) = \underline{a_0} + \underline{a_1} x + \underline{a_2} x^2 + \cdots + a_n x^n$$ (ترکیب خطی برداری (فضای جبری)

$$y' = f'(x) = 0 + \underline{a_1} + \underline{2a_2} x + \underline{3a_3} x^2 + 4a_4 x^3 + \cdots$$

برای اینکه قاعده تسلسل دار y و y' برابر باشند باید $a_0=1$ داشته باشیم:

$\text{if}: a_0 = 1$ $\qquad a_0 = a_1 \Rightarrow a_1 = 1$

$$a_1 = 2a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{a_1}{2} \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2}$$

$$a_2 = 3a_3 \Rightarrow a_3 = \frac{a_2}{3} \Rightarrow a_3 = \frac{1}{3!}$$

$$\vdots \qquad \qquad \vdots$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{n!}$$

$$y = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = e^x$$

عدد نپر

خورشی و مشتقش یکی است درصورتیکه از $a_0=1$ ... استفاده کرده باشیم.

فلسفه عدد نپر تبدیل فضای دیفرانسیل به فضای جبری است، این مشروط به حرکت بی‌نهایت است.

چرا سری فضای برداری بایستی نامحدود باشد؟

به‌خاطر بحث تسلسل که دو مقدار با هم برابر باشند.

تمرین: حل معادله دیفرانسیلی

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_2 y^{(2)} + a_1 y^{(1)} + a_0 y = 0$$

$$y = a_0 + a_1 \lambda x + a_2 \lambda^2 x^2 + \cdots$$ (بجای ها از λ در معادلات استفاده کنیم)

$$y' = \lambda (0 + a_1 + 2a_2 \lambda x + 3a_3 \lambda^2 x^2 + \cdots)$$

$\text{if}: a_0 = 1$

$$a_0 = a_1 \lambda \Rightarrow a_1 = \frac{\lambda}{!}$$

$$a_1 = 2a_2 \lambda \Rightarrow a_2 = \frac{a_i}{2} = \frac{\lambda}{2!}$$

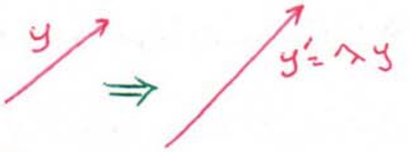
$$a_n \qquad \Rightarrow a_n = \frac{\lambda}{n!}$$

[illegible]

$$y' = \lambda \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right) = \lambda e^{\boxed{\lambda x}} = \lambda y$$

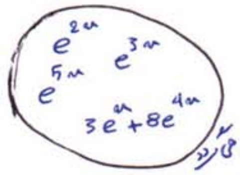
$$e^{\lambda x} \xrightarrow{\text{مشتق}} \lambda e^{\lambda x}$$

مشتق آن λ برابر خودش می‌شود.



حال که به این تابع رسیدیم $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$ را بردار پایه می‌گوییم.

همه از جنس $e^{\lambda x}$



لذا برای حل معادلات دیفرانسیلی ← از فضای برداری جبری تابع‌ها استفاده می‌گردد

هر ترکیب خطی از بردارهای پایه جواب حل معادله دیفرانسیلی می‌باشد.

$$y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$$

λ_i ها معلوم، C_i ها را براساس شرایط مرزی بدست می‌آوریم.

تمرین 1: صفحات ۱۴۵- ۱۴۶ کتاب مقدمه‌ای بر ارتعاشات تصادفی را بخوانید و خلاصه‌نویسی نمایید.

مسئله مقدار ویژه - بردار ویژه

برای تبدیل معادلات دیفرانسیل به معادلات جبری از ایده $y'=\lambda y$ استفاده می‌شود.

معادلات دیفرانسیل

$$y=e^{\lambda x}$$
$$y'=\lambda e^{\lambda x}$$

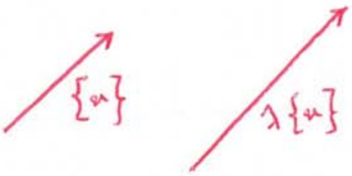
یک بردار موازی مشتق اصلی خود باشد

$$[A]\{x\}=\lambda\{x\}$$

ماتریس تبدیل ← [A]

بردار ← {x}

تبدیل یک بردار به موازی خودش



$$[A]\{x\}-\lambda\{x\}=\{0\}$$

مسئله مقدار ویژه - بردار ویژه به حل معادله زیر منجر می‌شود.

$$([A]-\lambda[I])\{x\}=\{0\}$$

می‌دانیم معادله بالا درصورتی برقرار است که دترمینان ماتریس $[A]-\lambda[I]$ مساوی صفر باشد:

$$|[A]-\lambda[I]|=0$$

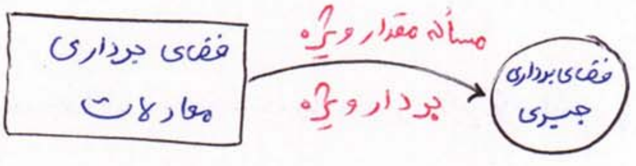
اکنون با حل این معادله، مقادیر λ تعیین می‌شود که به آنها «مقدار ویژه» می‌گوییم.

به ازای هر مقدار ویژه می‌توان برداری یافت که در مسئله مقدار ویژه - بردار ویژه صدق کند که به آن «بردار ویژه» می‌گوییم.

تمرین اختیاری ۲، ما به‌ازای ادبیات توضیح داده شده را تا کنون از کتاب آپوستل توضیح دهیم؟

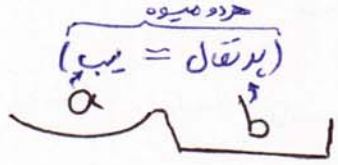
تمرین اختیاری ۳، فصل جبر خطی کتاب هیلدبرند را بخوانیم؟

نکته، کلید تبدیل فضای برداری معادلات دیفرانسیلی به فضای برداری جبری را مسأله مقدار ویژه - بردار ویژه است



نکته، همه مسائل طبیعت دیفرانسیل است، همه کارها را ما با فضای جبری حل می کنیم.

■ عدد مختلط:

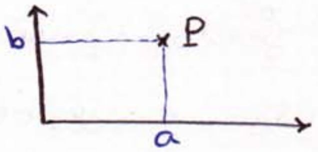


با گرفتن دو شکل مرتبط در یکی کنار هم

$Z=a+ib$: نمایش جبری

اشکال مختلف نمایش عدد مختلط:

(a,b) ، $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ ، $[a,b]$ ، $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$ ، $\{a,b\}$; $\begin{Bmatrix}a\\b\end{Bmatrix}$

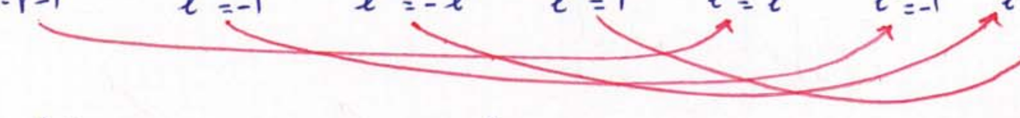


اما علاقمندیم به این شکل (نمایش جبری) عدد مختلط

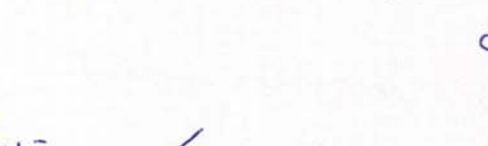
را بنویسیم. $a+ib$ که فعلاً قبول می کنیم $i=\sqrt{-1}$ می باشد.

رویکرد تناوبی توجیهی

$i=\sqrt{-1}$ $\quad i^2=-1$ $\quad i^3=-i$ $\quad i^4=1$ $\quad i^5=i$ $\quad i^6=-1$ $\quad i^7=-i$ $\quad i^8=1$



- در طبیعت بسیار مواجه می شویم با پدیده ای:
  - نوسانی
  - هارمونیک
  - رفت و برگشتی

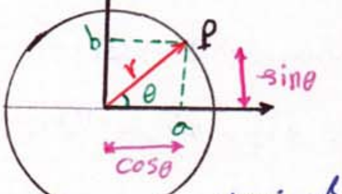


■ چیستی توابع هارمونیک (مثلثات):

برای توابع هارمونیک دو رویکرد داریم: الف) رویکرد هندسی به توابع مثلثاتی ب) رویکرد جبری به توابع مثلثاتی

- رویکرد هندسی به توابع مثلثاتی: ($\cos\theta$ ، $\sin\theta$)

if $r=1$



با توجه به قانون فیثاغورث می توان نوشت

$$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$$

نکته، اگر دو عدد مربع داری حاصل جمعی مساوی یک باشند، یکی از آن ها سینوس و دیگری کسینوس یک زاویه خواهد بود.

رویکرد نمایش جبری (نقطه P): $a+ib=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}\times(a+ib)$

$$\Rightarrow \; =\underbrace{\sqrt{a^2+b^2}}_{r}\left\{\underbrace{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{\cos\theta}+i\,\underbrace{\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{\sin\theta}\right\}$$

$$a+ib=r\,(\cos\theta+i\sin\theta) \quad ; \quad \theta=\tan^{-1}\frac{b}{a}$$

$$Z=r\,(\cos\theta+i\sin\theta)$$

- رویکرد جبری به توابع مثلثاتی:

با چیستی $e^{\lambda x}$ آشنا شدیم. اکنون λ را عدد موهومی i فرض می کنیم. با توجه به بسط تابع می توان نوشت:

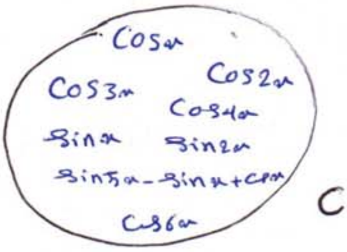
$$e^{ix}=1+(ix)+\frac{(ix)^2}{2!}+\frac{(ix)^3}{3!}+\frac{(ix)^4}{4!}+\cdots$$

$$e^{ix}=\underbrace{\left\{1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots\right\}}_{\cos x}+i\underbrace{\left\{x-\frac{x^3}{3!}+\cdots\right\}}_{\sin x}$$

$$\Rightarrow e^{ix}=\cos x+i\sin x$$ اویلر

تمرین ۴: درخصوص $i=\sqrt{-1}$ بحث شود؟

☐ فضای برداری مثلثاتی:



فضایی که بردارهای پایه آن $\sin x$ و $\cos x$ باشند.

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots \rightarrow$$ جبری

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots \rightarrow$$ جبری

برای پاسخ های هارمونیک از ترکیب خطی فضای مثلثاتی استفاده می کنیم.

تمامی فضا های برداری جبری تعریف می شوند.

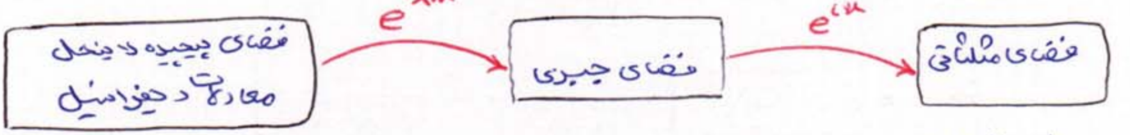
فضاهای برداری مثلثاتی از روی فضای برداری جبری بدست می آید.

فضای برداری مثلثاتی از ترکیب خطی فضای جبری بدست آمده است.

سری فوریه $$y(x)=\sum a_m\cos mx+\sum b_n\sin nx$$

سری فوریه نوشتن یک تابع برداری دلخواه در یک فضای برداری مثلثاتی (برای محاسبه بارباد - زلزله) برای محاسبه بارهای هارمونیکی استفاده می شود.

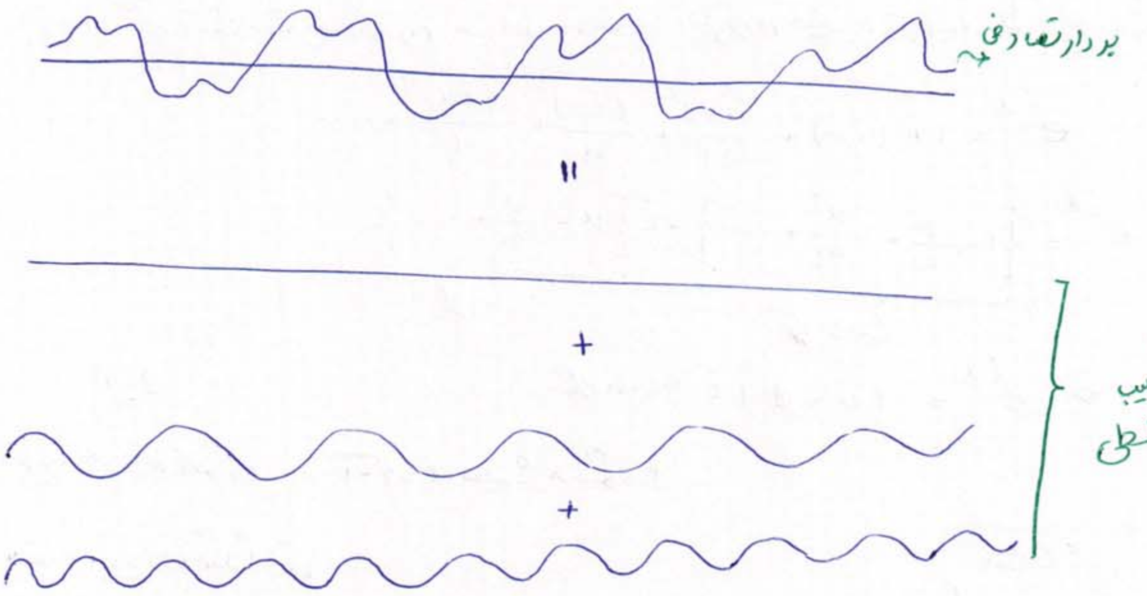
i، کلید تبدیل فضای برداری جبری به مثلثاتی می‌باشد.



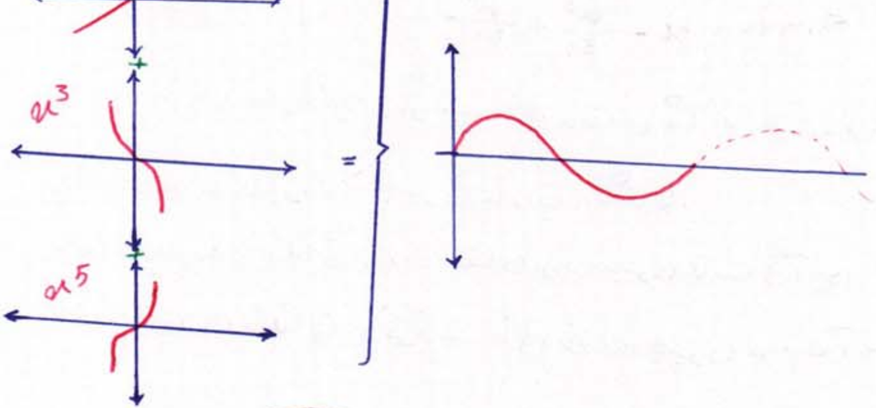
مبدأ و مؤخر فضای جبری است.

فلسفه اینکه فضای جبری از ۱، x، x^2، x^3، ... استفاده می‌شود به ترکیب خطی از آنها استفاده کنیم تا هر شکل دلخواه‌ای را در طبیعت بیان نماییم.

فضای مثلثاتی به ظاهر تصادفی است، که از ترکیب خطی بردارهای ساده هارمونیک حاصل می‌شود.



فضای مثلثاتی تصادفی، که از ترکیب خطی بردارهای پایه (هارمونیک‌ها) و بردار ساده هارمونیک تشکیل شده است.



فضای برداری هندسی:

فضایی است که داخل آن یک سری خط جهت‌دار وجود دارد. ترکیب خطی این بردارها را فضای برداری هندسی نامیده می‌شود.

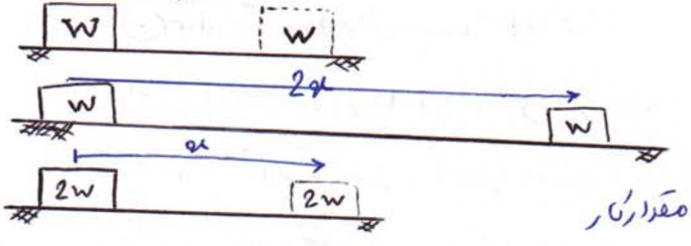
کاربرد: نمایش شماتیک بردار نیرو، سرعت و تغییرمکان و ... می‌باشد.

یک فضا شامل یک سری خط فلش دار است که با هم جمع می‌شوند.

نمایش مشابک فضای برداری جبری و مثلثاتی

☐ چیستی کار:

انواع نیروها در طبیعت موجب انجام یک سری تغییرات می‌شود، این تغییر و تحولات کار می‌باشد.



کار انجام شده هم با نیرو و هم با جابجایی مربوطه ارتباط خطی مستقیم دارد.

به این ترتیب می‌توان از ترکیب این دو نکته، مقدار کار را بصورت حاصل ضرب نیرو در جابجایی داشت. این بیان توصیفی را می‌توان بصورت ریاضی بیان کرد: (کار در حالت یک بعدی)

$$\underset{\text{نیرو}}{F}$$

کار ← $W = F \cdot x$ → مسافت جابجایی شده

حاصل این عبارت در واقع می‌شود شمارش

اکنون می‌خواهیم قانون کار را از حالت یک بعدی به حالت دو بعدی بسط دهیم. به سادگی و براساس نتایج روش کار یک بعدی می‌توان بیان کرد. اگر بردار $\vec{F}$ دارای دو مؤلفه F_x و F_y در دو امتداد محورهای x و y جابجا شود آنگاه کار $\vec{F}$ مساوی است با:

$$W = F_x \cdot x + F_y \cdot y$$

و اگر مسأله را بصورت سه بعدی در نظر بگیریم خواهیم داشت:

$$W = F_x \cdot x + F_y \cdot y + F_z \cdot z$$

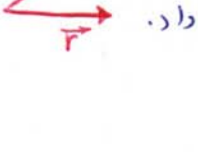
اکنون فقط برای سادگی نمایش معادله بالا، تعاریف و نمادهایی را با هم قرارداد می‌کنیم و آن را بصورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{r}$$

که $\vec{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \vec{k}$ و $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\bar{k}$ می‌باشد و علامت «.» را ضرب داخلی می‌نامیم. دلیل این نام‌گذاری، فرو رفتن و درهم تنیده شدن دو بردار $\vec{F}$ و $\vec{r}$ و تبدیل آنها به یک عدد می‌باشد. آنچه در بالا بیان شد نمایش «جبری» ضرب داخلی است.

$$W = F_x \cdot x + F_y \cdot y + F_z \cdot z = \vec{F} \cdot \vec{r} \rightarrow$$ رویکرد جبری

رویکرد هندسی کار

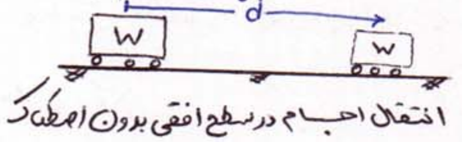


نکته مهم این است که می‌توانیم مفهوم رویکرد جبری کار را بصورت هندسی و مثلثاتی نشان داد.

قبل از بیان این رویکرد با سیستم پارادوکس کار مطرح شود.

پارادوکس کار: فرض کنید در یک سطح افقی بدون اصطکاک یک وزنه قرار است در همان امتداد افق

جابجا می‌شود مطابق شکل سوال این است، برای جابجا کردن وزنه به اندازه d چه مقدار کار انجام می‌شود؟

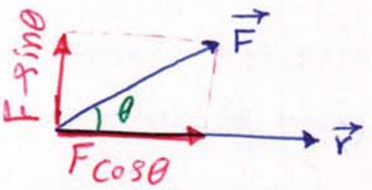


انتقال اجسام در سطح افقی بدون اصطکاک

در جواب به راحتی می‌توان احساس کرد که در اینجا هیچ کاری انجام نمی‌شود:

$$W = F \times d = 0 \times d = 0$$

بیان مثلثاتی قانون ضرب داخلی (کار):



برای بیان این موضوع مطابق شکل نیروی مورب $\vec{F}$ در امتداد افقی به اندازه $\vec{r}$ جابجا می‌شود (کار انجام دهد)

اکنون بردار $\vec{F}$ را به دو مولفه افقی و قائم تجزیه کنیم یعنی مسأله دو بعدی را تبدیل به دو مسئله یک بعدی کنیم، مولفه افقی F_x به اندازه $F_x\ r_x$ کار انجام می‌دهد ولی مولفه قائم F_y هیچ کاری انجام نمی‌دهد:

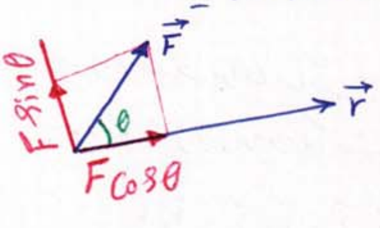
$$F_x = F\cos\theta \qquad \text{if } r_x = d$$

$$F_y = F\sin\theta$$

$$W = F_x r_x = (F\cos\theta)\,d = Fd\cos\theta$$

یعنی کار که ضرب داخلی نیرو در جابجایی است بصورت زیر نیز قابل بیان است.

کار مساوی است با تصویر نیرو در امتداد جابجایی، ضرب در مقدار جابجایی

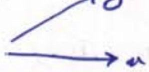


$$W = \vec{F}\cdot\vec{r} = F.r\cos\theta$$

$$\vec{F}.\vec{r} = \begin{cases} F_x x + F_y y + F_z z \\ |F||r|\cos\theta \end{cases}$$

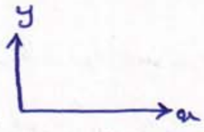
کار ماهیتی است که برای فهم آن مشکلی نداریم لذا برای بیان مقدار ریاضی کار از ماهیت رابطه شهودش استفاده می‌شود.

نکته: ضرب داخلی دو بردار اگر اندازه x و y یک شود به $\cos\theta$ تبدیل می‌شود.

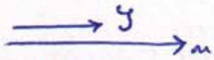


لذا ضرب داخلی دو بردار به مقدار $\cos\theta$ وابسته است.

لذا خواهیم داشت

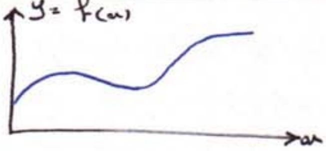


مستقل کامل



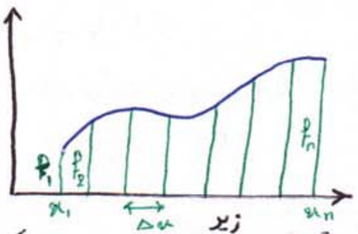
وابسته کامل

☐ برداری سازی تحلیلی (دیجیتالی یا آنالیتیکال)



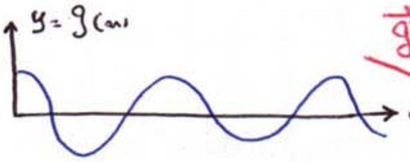
چگونه تابع شکل روبرو را برداری کنیم؟

می‌توان به جای نمایش جبری $f_{(x)} = \sum a_n x^n$ آن را بصورت برداری نشان داد، به اینصورت که در تعداد مناسبی از مقادیر x، مقدار تابع را محاسبه می‌کنیم و آن را در یک رشته یا بردار بازنمی می‌کنیم در شکل مقابل از $x = x_1$ تا $x = x_n$ بازه‌ی $\Delta x = (x_n - x_1)/(n-1)$ مشخص شده‌اند.

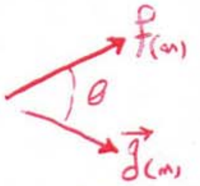


تبدیل سطح زیر منحنی به اجزای کوچک

بدین ترتیب تابع $f_{(x)}$ به بردار $\vec{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ تبدیل می‌شود.



به همین صورت تابع $g_{(x)}$ را در بازه مورد نظر به بردار $\vec{g} = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$ تبدیل می‌کنیم



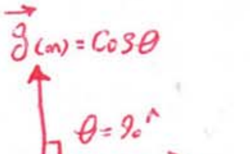
حاصل ضرب داخلی دو بردار $\vec{f}$ و $\vec{g}$ را می‌توان بصورت زیر نوشت،

$$\vec{f} \cdot \vec{g} = \sum_{i=1}^{n} f_i g_i = f_1 \cdot g_1 + f_2 \cdot g_2 + \cdots + f_n \cdot g_n$$

اکنون فرم گسسته ضرب داخلی دو تابع را بدست آوردیم. اگر بخواهیم این معادله را به فرم پیوسته بیان کنیم باید نماد $\sum$ را به $\int$ تبدیل کنیم:

$$\vec{f} \cdot \vec{g} = \int_{x_1}^{x_n} f_{(x)}\, g_{(x)}\, dx$$

اگر فاصله بین نقاط رو خیلی کم نماییم.



نکته: $\sin\theta$ و $\cos\theta$ دو تابع عمود بر هم (متعامد) می‌باشد.

نمایش جبری: $\vec{f} \cdot \vec{g} = \int f_{(x)}\, g_{(x)}\, dx$

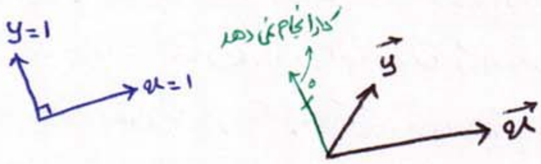
نکته: اگر یک بردار دلخواه در یک بردار یکه ضرب داخلی شود. طول تصویر بردار دلخواه در امتداد بردار یکه بدست می‌آید. اکنون اگر بردار تابع $g_{(x)}$ یکه باشد. ضرب داخلی $\vec{f} \cdot \vec{g}$ مقدار تصویر $\vec{f}$ در امتداد $\vec{g}$ را بدست می‌دهد و براساس معادله بالا می‌توان نوشت:

$$\text{تصویر } \vec{f} \text{ در امتداد } \vec{g} = \int_{x_1}^{x_n} f_{(x)}\, g_{(x)}\, dx$$

- نکته هم این است که اگر $g_{(x)} = \sin nx$ باشد آنگاه $\int_{x_1}^{x_n} f_{(x)} \sin nx\, dx$ آن سهم از تابع $f_{(x)}$ است که در امتداد بردار $\sin nx$ قرار دارد، که همان فرکانس مساوی n در تابع می‌باشد.

نکته: اگر ضرب داخلی ۲ بردار را حساب کردیم می توانیم از روی θ درصد وابستگی ۲ بردار را حساب نمائیم. اگر $\theta = 0$ باشد وابسته و $\theta = 90^\circ$ مستقل خواهد بود

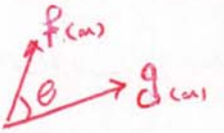
☐ ضرب داخلی:



تصویر یک بردار در امتداد بردار دیگر ضرب داخلی می باشد.

$$x, y \xrightarrow{\text{if } x, y = 1} = \cos\theta$$

- تصویر بردار y در امتداد x ضرب داخلی



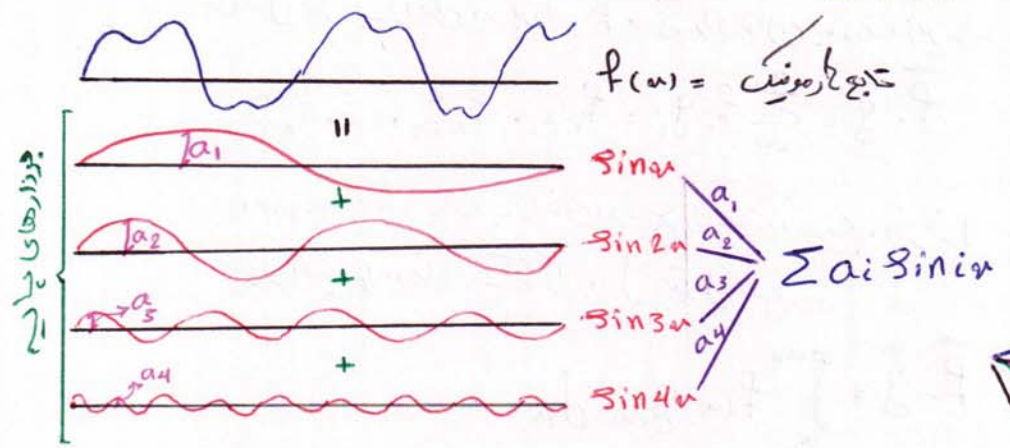
$$\vec{f} \cdot \vec{g} = |f||g| \cos\theta$$

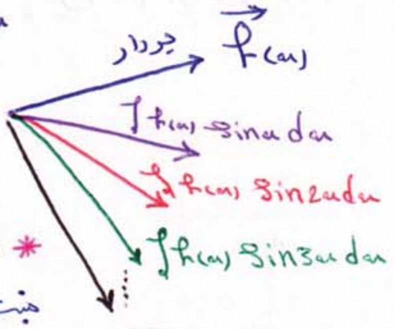
$$\underbrace{\vec{f} \cdot \vec{g}}_{} = \int f(x)\, g(x)\, dx$$

تصویر بردار $\vec{f}$ در امتداد بردار $\vec{g}$

نکته: جبر دارکی خط فلش دار است.

☐ نکته مهم:

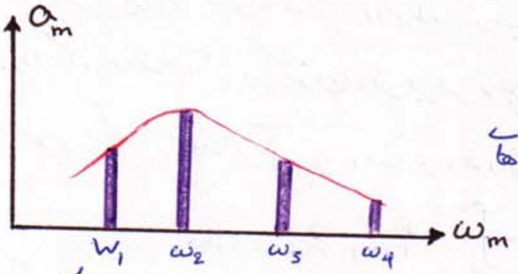




* ضرب داخلی تابع با بردارهای پایه (وزن داخلی بردار پایه به تابع $f(x)$ به جهت وزنی آن، وزن بردار a_m را در $f(x)$ می دهد.

$$\text{ضریب فوریه}: a_m = \int f(x) \sin mx\, dx$$

طیف:



تابعی است که محور قائم آن سهم هر هارمونیک است و مؤلفه افقی آن فرکانس هارمونیک های پایه است $(\sin \omega t)$

اولین بار طیف نور وارد واژگان فنی شده است. که تمامی نورهای موجود ترکیب خطی از ۷ نور اصلی می باشد. برحسب طول موج (λ) هر نور یک رنگ می شود، که از طریق منشور نور می توان رنگ ها را از هم تجزیه کرد.

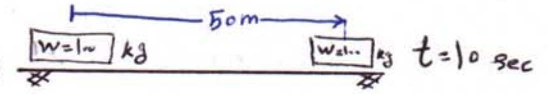
تمرین ۵: فصول اول تا چهارم کتاب مقدمه ای بر ارتعاشات تصادفی را مرور نمائید؟

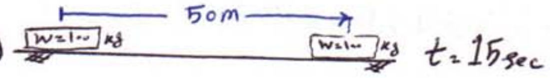
تمرین ۶: سه فصل اول کتاب ارتعاشات مکانیکی مولف تامسون را دقیق بخوانید و آن را در سه صفحه خلاصه نویسی نمایید؟

تمرین ۷: بیست نکته مهم از کلاس درس امروز را یاداشت نمایید؟

تمرین ۸: بعد از نصب نرم افزارهای Nonlin ، BisPec ، Seismo signal و Seismo match ، help و سوال آنها را با دقت بررسی نمایید؟

قدرت (توان):

1) 

2) 

اگر وزنه ای به وزن W=100kg را به میزان 50m جابجا کنیم در زمان های مختلف $t=10_{sec}$ و $t=15_{sec}$ خواهیم داشت.

کار② = کار①

$$\text{قدرت (توان)} = \frac{W \curvearrowright \text{کار}}{T \curvearrowright \text{زمان}}$$

توان: میانگین زمانی کار یا مقدار کار در واحد زمان مفهوم ریاضی توان می باشد.

میانگین ضرب داخلی دو تابع:

$$\frac{\int f_{(x)}\, g_{(x)}\, dx}{T} = E(fg)$$

اکسپ ولیو (امید ریاضی)

تمرین ۹: در سری فوریه اثبات کنید:

$$f_{(t)} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\omega_n t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\omega_n t$$

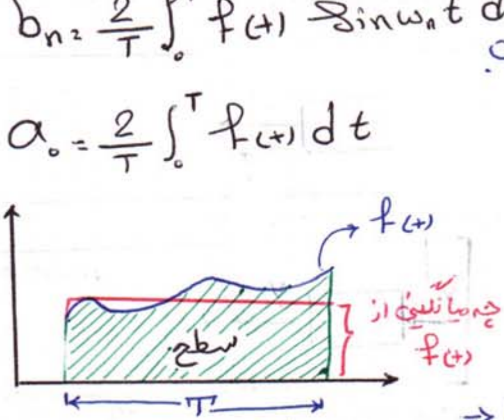
$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t) \cos\omega_n t\, dt$$

نکته: a_n و b_n دامنه های مربوط به هارمونیک با فرکانس ω_n هستند.

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t) \sin\omega_n t\, dt$$

نکته: a_0 مقدار میانگین تابع در دوره تناوب است.

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f_{(t)}\, dt$$



سطح : $\int_0^T f(t)\, dt$

$T \times$ چه میانگین از f = سطح

$\Rightarrow$ (چه میانگین از f) $a_0 = \frac{2\int_0^T f(t)dt}{T}$

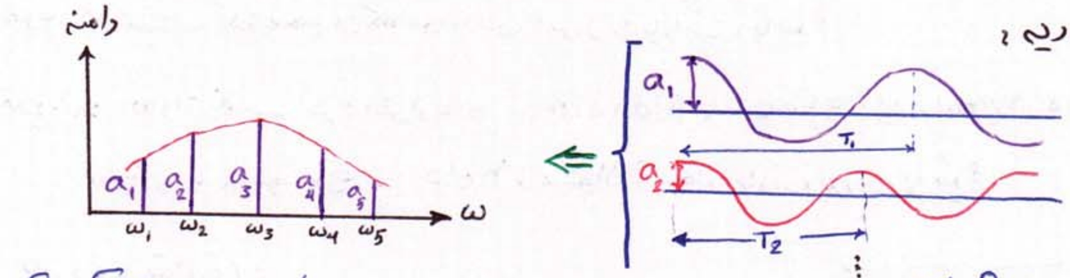
سری فوریه: بیان تابع برحسب بردارهای پایه هارمونیک

سری فوریه: بیان تابع در فضای برداری مثلثاتی

نکته: اگر تابع $f(t)$ زوج باشد، آنگاه فقط بخش کوسینوسی می ماند و قسمت سینوسی حذف می شود.

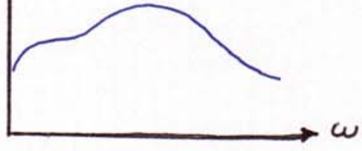
نکته: اگر تابع $f(t)$ فرد باشد، آنگاه قسمت سینوسی وجود خواهد داشت.

طیف فوریه:



اگر به جای نمایش گسسته مقادیر دامنه، تابع پیوسته (دامنه) برحسب فرکانس را بدست آورد و آن را رسم نمائیم، منحنی حاصل طیف فوریه است. (به این تابع دامنه، تبدیل فوریه می گویند)

نکته: با توجه به آنکه $e^{-i\omega t} = \cos\omega t - i\sin\omega t$ است، می توان به جای تفکیک سینوسی و کسینوسی تابع و بیان گسسته دامنه برحسب فرکانس، آن را بصورت زیر نمایش می دهیم:



$$F(\omega) = \int_0^T f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt \quad : \quad i = \sqrt{-1}$$

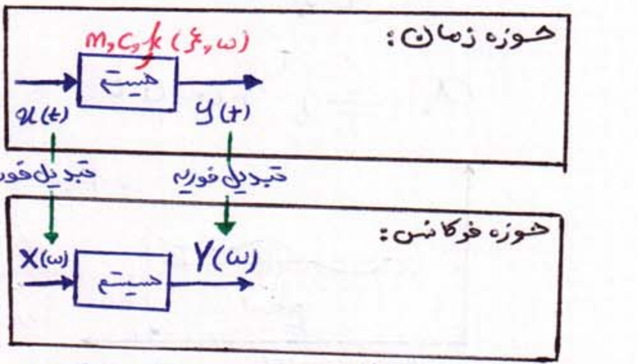
$F(\omega)$: تبدیل متناهی فوریه برای تابع $f(t)$ است.

تابع $e^{-i\omega t}$ همان بردار پایه در فضای مثلثاتی است.

$\int f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$ همان ضرب داخلی این بردار پایه با تابع $f(t)$ می باشد.

تذکر: ضرب داخلی یک بردار مانند $f(t)$ در یک بردار دلخواه مانند $e^{-i\omega t}$، میزان تصویر بردار اول (یعنی $f(t)$) روی بردار دوم ($e^{-i\omega t}$) را نشان می دهد؛ یعنی نشان می دهد که چه سهمی از فرکانس مشخص ω (هارمونیک) در داخل تابع $f(t)$ نهفته است و آن را بیرون می کشد و ظاهر می کند.

فرآیند انتقال از حوزه زمان به حوزه فرکانس و جزئیات مربوط به آن:



انتقال از حوزه زمان به حوزه فرکانس با استفاده از تبدیل فوریه

$$X(\omega) \times H(\omega) = Y(\omega)$$

تمرین ۱۰: تابع $H(\omega)$ (تابع پاسخ فرکانسی) را از کتاب ارتعاشات دینامیک سازه‌ای را پیدا کنید؟

سوال: چرا طیف اساسی ترین بحث مهندسی زلزله است؟ چون ابزار تبدیل فضای تاریخچه زمانی پیچیده به فضای استاتیکی ساده می‌باشد.

سوال: رمز غلبه بر طبیعت چیست؟ ۱- فهم پیچیدگی‌ها ۲- ساده سازی این پیچیدگی‌ها

تذکر: در مطالب درس مهندسی زلزله پیشرفته بحث طیف را با سه رویکرد بیان می‌کنیم: ۱- رویکرد کف سنگ ارتعاشات ۲- رویکرد ارتعاشات تصادفی ۳- رویکرد مهندسی زلزله

تمرین ۱۱: تابع $A\cos\omega t + B\sin\omega t$ در صورتی که متغیرهای A، B، ω مطابق زیر باشند ترسیم نموده و در مقدار max آن بحث مفصل نمائید.

حالت دوم	حالت اول
$A=1$	$A=1$
$B=3$	$B=1$
$\omega=2\pi$	$\omega=2\pi$

تمرین ۱۲: توابع $F_1=10\cos 2\pi t$ ، $F_2=2\sin 2\pi t$ و $F_3=F_1+f_2$ را ترسیم نمائید؟

تمرین ۱۳: از هر دو تابع تمارین قبل fft گرفته و کد نویسی matlab آنها را انجام دهید؟

تمرین ۱۴: با استفاده از نرم افزار seismo soft مقدار fft (سری فوریه) بگیرید و با تمارین قبلی مقایسه کنید؟

تمرین ۱۵: در نرم افزار matlb تابع $A\sin\omega_1 t + B\cos\omega_2 t$ را با دستور (ساب پلات) ترسیم کنید؟

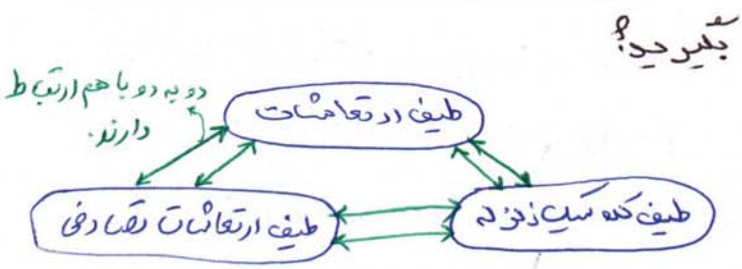
			نمودار ①

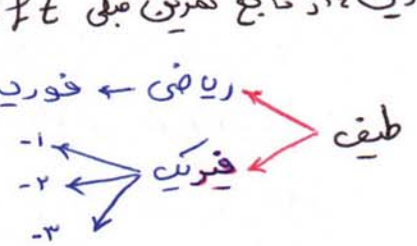
$$\begin{array}{c} 2\\ \times\\ 3\\ \times\\ 2\\ \times\\ 2\\ \hline 24 \end{array}\begin{cases}A=1.5\\ B=1,5,10\\ \omega_1=1,2\pi\\ \omega_2=2\pi,\frac{2\pi}{10}\end{cases}$$

حالت

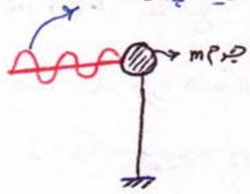
حالت ①
$A=1$
$B=1$
$\omega_1=1$
$\omega_2=2\pi$

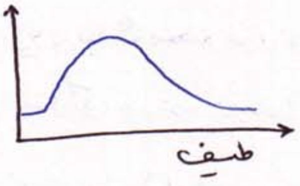
تمرین ۱۶: از تابع تمرین قبلی fft بگیرید؟





(force) ارتعاش نیرو ← بار تاریخچه زمانی





مروری بر ارتعاشات،

ساختار و محتوای کلیه کتاب‌های دینامیک سازه‌ای

$$\delta_{dyn} = \delta_{st}(\underbrace{D.A.F}_{\text{سری فوریه}})$$

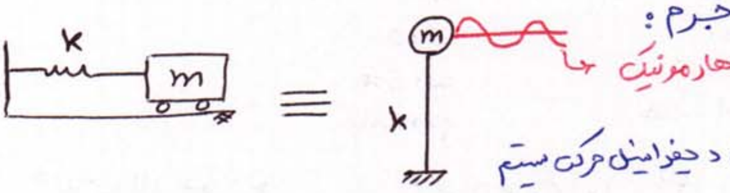
جلسه دوم مورخه ۲۲، ۱۲، ۹۳

ریاضی - فیزیک - مهندسی

☐ ساختار تمام کتب ارتعاشات:

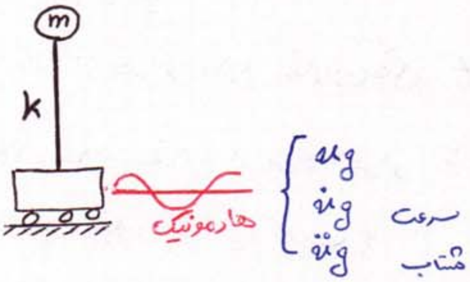
الف) نصف اول همه مطالب کتب ارتعاش:

۱- تحریک هارمونیک در محل جرم:



معادله دیفرانسیل حرکت سیستم $m\ddot{x} + kx = f_0 \sin\omega t$

۲- تحریک پایه:



برحسب آنکه بین x_g، $\dot{x}_g$ و $\ddot{x}_g$ کدامیک معلوم باشد داریم:

$$\begin{cases} x_g = \overset{PGD}{\boxed{x_{g_0}}} \sin\omega_g t \\ \dot{x}_g = \overset{PGV}{\boxed{\dot{x}_{g_0}}} \sin\omega_g t \\ \ddot{x}_g = \overset{PGA}{\boxed{\ddot{x}_{g_0}}} \sin\omega_g t \end{cases}$$

معادله دیفرانسیل حرکت سیستم: $m\ddot{x} + kx = -m\ddot{x}_g$ (I)

اگر x_g داشته باشیم آنگاه $\ddot{x}_g = -\omega_g^2 x_{g_0} \sin\omega_g t$

اگر $\dot{x}_g$ داشته باشیم آنگاه $\ddot{x}_g = \omega_g \dot{x}_{g_0} \cos\omega_g t$

که در معادله (I) مقادیر $\ddot{x}_g$ را جایگزین می‌کنیم.

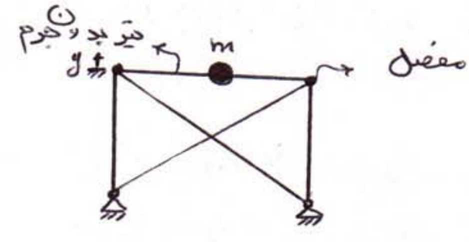
در آینده‌ای نزدیک با توجه به فصول ۸ و ۹ کتاب مهندسی زلزله با معلوم بودن پارامترهای بیشینه دامنه یعنی PGD، PGV و PGA و نیز مشخص بودن فرکانس زمین می‌توان معادله دیفرانسیل ارتعاش سازه تحت زلزله را تشکیل داد.

$$PGA = \omega^2 PGD$$

تست های صفحه‌ی ۸۰۸ - ۸۱۱ کتاب مهندسی زلزله گروه‌های ۵-۶- ۱۴-۱۵ را بررسی نمائید.

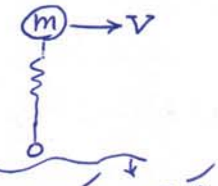
نکته: علامت + و منفی در سمت راست معادله دیفرانسیل حرکت سیستم در تحریک پایه در مقدار پاسخ‌های حداکثر سیستم تأثیری ندارد.

تمرین ۱: بررسی کنید که علامت + و منفی در معادله دیفرانسیل حرکت سیستم در تحریک پایه در پاسخ بیشترین مقدار شتاب، سرعت و تغییرمکان تأثیری ندارد؟



تمرین ۲: سطح تست شماره ۶ صفحه ۸۰۸ کتاب مهندسی زلزله را محاسبه نمائید؟

نکته: جهت حرکت دینامیکی ماشین‌ها داریم:



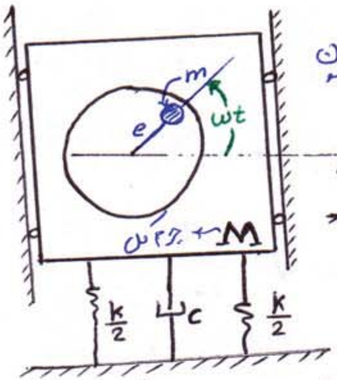
معادله حرکت سیستم: $m\ddot{x}+kx=\pm m\ddot{y}_g$

حرکت در جهت y می باشد.

تمرین ۳: تست شماره ۲۴ صفحه ۸۱۵ کتاب مهندسی زلزله را محاسبه نمائید؟

☐ ناميزاني چرخان:

منبع کتاب تئوری ارتعاشات با کاربردهای آن مولف آقای ویلیام تامسون صفحه ۶۲



نیروی آشفتگی هارمونیک حاصل از ناميزاني چرخان

ناميزاني در ماشین های چرخان یک منبع معمولی برای برانگیزش نوسانی است. در اینجا یک سیستم جرم-فنر را در نظر می گیریم. این سیستم مقید است در جهت عمودی حرکت کند و با یک ماشین چرخان ناميزان برانگیخته می شود (مطابق شکل). ناميزاني با جرم m که دارای خروج از مرکز e است و با سرعت زاویه‌ای ω می چرخد نشان داده می شود. فرض می کنیم x تغییرمکان جرم غیرچرخان (M − m) از وضعیت تعادل استاتیکی باشد. دراینصورت، تغییرمکان جرم m برابر است با:

تغییرمکان جرم چرخان m : $x+e\sin\omega t$

بنابراین معادله حرکت عبارت است از:

$$(M-m)\ddot{x}+m\frac{d^2}{dt^2}(x+e\sin\omega t)=-kx-c\dot{x}$$

که می توان آن را به شکل زیر مرتب کرد:

$$M\ddot{x}+c\dot{x}+kx=(m\,e\,\omega^2)\sin\omega t$$ → جابجایی

این معادله شبیه تحریک پایه جابجایی می باشد ⇒ u_g

واضح است که این معادله با معادله $m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=F_0 \sin\omega t$ همسان است که در آن F_0 با $me\omega^2$ جایگزین شده است.

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=F_0 \sin\omega t \quad ①$$

جهت حل این معادله دیفرانسیل دارای دو جواب است: الف) حل عمومی (تابع مکمل) که در این حالت، ارتعاشی آزاد میرا است. ب) حل خصوصی معادله حالت پایدار است که فرکانس ω آن با فرکانس بر انگیزش یکسان است. می‌توان فرض کرد که حل خصوصی به شکل زیر است:

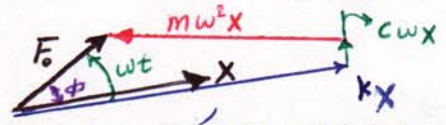
$$x=X\sin(\omega t-\phi) \quad \text{(II)}$$

که در آن X دامنه نوسان و ϕ فاز تغییر مکان نسبت به نیروی بر انگیزش.
با جایگزاری مشتقات x در معادله دیفرانسیل ① و ساده سازی کردن خواهیم داشت.

$$X=\frac{F_0}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2+(c\omega)^2}}$$

$$\phi=\tan^{-1}\frac{cm}{k-m\omega^2}$$

نکته: با توجه به اینکه در حرکت هارمونیک سرعت و شتاب نسبت به تغییر مکان، به ترتیب °90 و 180 تقدم فاز دارند. جمله‌های معادله دیفرانسیل را بطور ترسیمی می‌توان نمایش داد مطابق شکل که به صورت از این نمودار دیده می‌شود که: =>



اکنون می‌توانیم معادله‌های بالا را بصورت شکل بی‌بعد بیان کنیم. تا بتوانیم نمایش ترسیمی این نتایج را بفهمیم. با تقسیم کردن صورت و مخرج معادلات بالا بر k بدست می‌آوریم:

$$X=\frac{\frac{F_0}{k}}{\sqrt{(1-\frac{m\omega^2}{k})^2+(\frac{c\omega}{k})^2}} \quad , \quad \tan\phi=\frac{\frac{c\omega}{k}}{1-\frac{m\omega^2}{k}}$$

معادله‌ها را می‌توان برحسب کمیت‌های زیر می‌توان بیان کرد:

$\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}}=$ فرکانس طبیعی نامیرا سیستم

$c_{cr}=2m\omega_n=$ میرایی بحرانی

$\xi=\frac{c}{c_{cr}}=$ نسبت میرایی

$$\frac{c\omega}{k}=\frac{c}{c_{cr}}\frac{c_c\omega}{k}=2\xi\frac{\omega}{\omega_n}$$

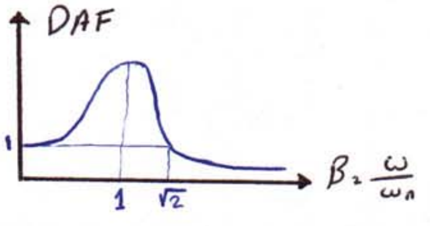
در اینصورت عبارت‌های بی‌بعد دامنه و فاز به شکل زیر هستند:

$$\frac{Xk}{F_0}=\frac{1}{\sqrt{(1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2)^2+(2\xi\frac{\omega}{\omega_n})^2}} \quad ; \quad \tan\phi=\frac{2\xi\,\boxed{\frac{\omega}{\omega_n}}\rightarrow\beta}{1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2}$$

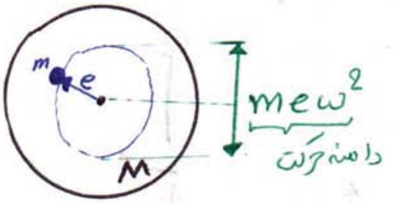
نکته: این معادله‌ها نشان می‌دهند که دامنه بی‌بعد $\frac{XK}{F_0}$ وفاز ϕ فقط توابعی از نسبت فرکانس $\beta=\frac{\omega}{\omega_n}$ و نسبت میرایی ξ هستند.

بطور خلاصه، معادله دیفرانسیل وحل کامل آن شامل جمله گذرا، به شکل زیر می‌توان نوشت:

$$u(t)=X_1 e^{-\xi\omega_n t}\sin(\underbrace{\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n}_{\omega_D} t+\phi_1)+\frac{F_0}{k}\frac{\sin(\omega t-\phi)}{\sqrt{(1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2)^2+(2\xi\frac{\omega}{\omega_n})^2}}$$



$$u_{dyn}=\underset{\downarrow \frac{F_0}{K}}{u_{st}}\cdot DAF\ \sin\omega t$$



M: جرم کل دیسک

m: جرم غیر یکنواخت در این نقطه

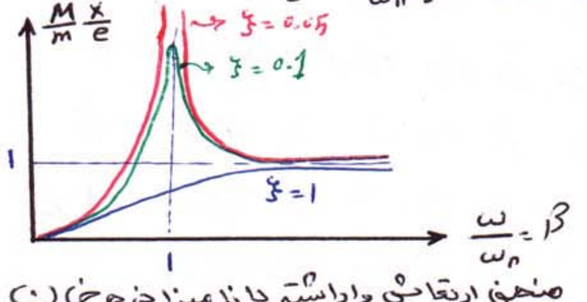
تمرین ۴: شکل طیف ص۶۳ کتاب تامسون را بدست آورید و با Excel یا matlb رسم نمائید؟

در ادامه حل نا میزانی چرخان با جایگزین کردن پارامترها معادله دیفرانسیلی نا میزانی چرخان در حالت پایدار معادله $m\ddot{u}+c\dot{u}+ku=F_0\sin\omega t$ خواهیم داشت:

$$X=\frac{me\omega^2}{\sqrt{(k-M\omega^2)^2+(c\omega)^2}}\quad;\ \tan\phi=\frac{c\omega}{k-M\omega^2}$$

روابط بالا را به شکل بی‌بعد زیر می‌توان نوشت

$$\frac{M}{m}\frac{X}{e}=\frac{(\frac{\omega}{\omega_n})^2}{\sqrt{[1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2]^2+[2\xi\frac{\omega}{\omega_n}]^2}}\quad;\ \tan\phi=\frac{2\xi(\frac{\omega}{\omega_n})}{1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2}$$

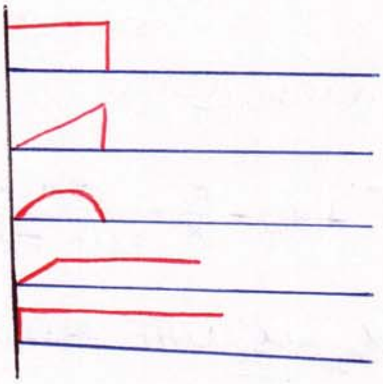


منحنی ارتعاش واداشته با نا میزانی چرخان

حل کامل به شکل زیر است:

$$X(t)=X_1 e^{-\xi\omega_n t}\sin(\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n t+\phi_1)+\frac{me\omega^2}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2+(c\omega)^2}}\sin(\omega t-\phi)$$

ب) نصف دوم همهٔ کتب ارتعاشات؛ در خصوص بار ضربه می‌باشد.



بار مستطیل؛

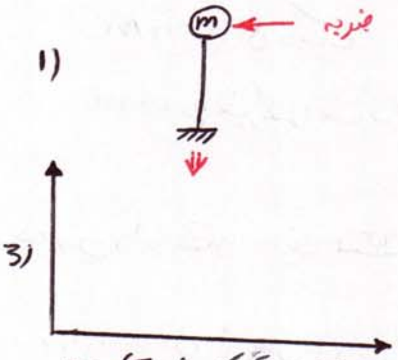
بار مثلث؛

بار نیم سینوس؛

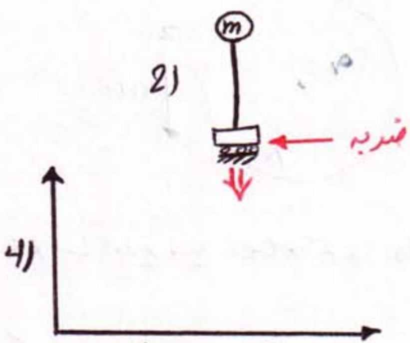
بار رمپ؛

بار پله؛

چهار تیپ سوال در بارهای ضربه‌ای می‌توانیم داشته باشیم:



طیف تحریک ضربه‌ای در جرم



طیف تحریک ضربه‌ای در پایه

پاسخ بارهای غیرهارمونیک (ضربه):

نوع ۱- تحریک ضربه‌ای در جرم ← **حوزه زمان**

نوع ۲- تحریک ضربه‌ای در پایه ← حوزه زمان

نوع ۳- طیف تحریک ضربه‌ای در جرم ← حوزه فرکانس

نوع ۴- طیف تحریک ضربه‌ای در پایه ← حوزه فرکانس

تذکر: فهم فلسفه تحریک زلزله در حوزهٔ فرکانس منوط به درک عمیق مسائل چارگانه ضربه است.

■ ارتعاشات:

- محل اعمال بار
  - جرم
  - پای سازه
- نوع بار
  - هارمونیک
  - ضربه‌ای

با بررسی طیف مطالب زیر را می‌توانیم بدست آوریم؛

۱- پریود خاک

۲- حوزه نزدیک

۳- ضریب بازتاب (بارگذاری)

۴- تولید رکورد مصنوعی؛ و ....

انواع رویکرد ارتعاشات:

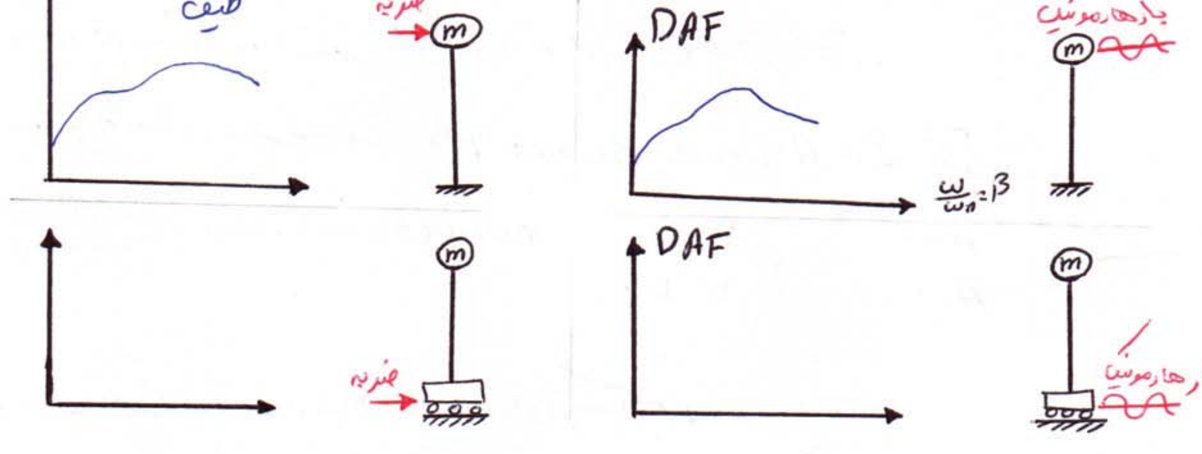
۱- رویکرد ارتعاشات کلاسیک

۲- رویکرد ارتعاشات تصادفی

۳- رویکرد ارتعاشات مهندسی زلزله

- رویکرد ارتعاشات کلاسیک: (DAF)

چهار حالت زیر بررسی می‌شود:



- رویکرد ارتعاشات تصادفی:

در رویکرد ارتعاشات تصادفی خواهیم داشت:

$$S_{\ddot{x}} = \omega^4 S_x$$
$$S_{\dot{x}} = \omega^2 S_x$$
$$S_x$$

- رویکرد ارتعاشات مهندسی زلزله:

در رویکرد ارتعاشات مهندسی زلزله (طیف)

$$S_a = \omega^2 S_d$$
$$S_v = \omega S_d$$
$$S_d$$

جابجایی × فرکانس = سرعت ⇐ رویکرد زلزله ← (دامنه)

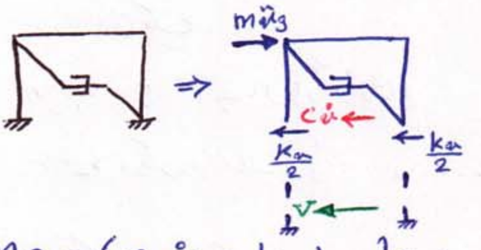
(جابجایی)^2 × (فرکانس)^2 = (سرعت)^2 ⇐ رویکرد تصادفی ← (مربعات دامنه)

↓ همان انرژی

نکته: توان ۲ یعنی انرژی

نکته: طیف در واقع همان فوریه می باشد.

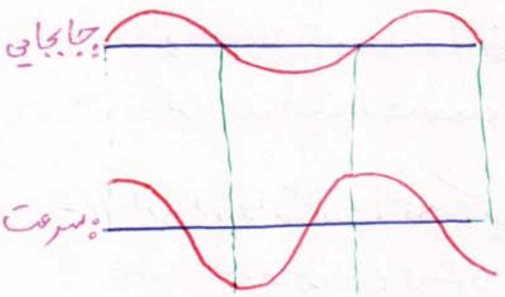
سوال: برشی پایه در یک سیستم یک درجه آزادی با معادله دیفرانسیل $m\ddot{u}+c\dot{u}+ku=-m\ddot{u}_g$ که وقتی شتاب پایه است، چقدر می باشد.



$$V = c\dot{u} + 2\times\frac{ku}{2} \Rightarrow$$

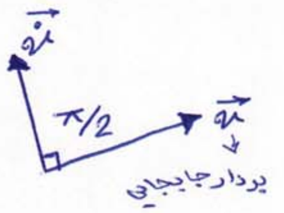
$$V = c\dot{u} + ku$$

$$\max(c\dot{u}+ku) = ku \Rightarrow V_{max} = ku$$



$u = u_0 \sin\omega t$

$\dot{u} = \omega u_0 \cos\omega t$



* وقتی u بیشترین است، زمانی است که $\dot{u}$ آن صفر باشد.

تمرین ٥: در خصوص بیشینه تابع $A\sin\omega t+B\cos\omega t$ بحث شود.

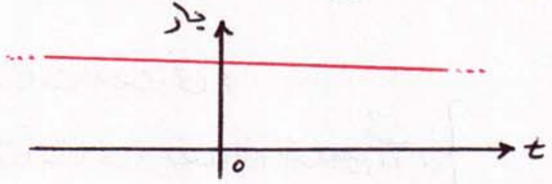
$A=1 \qquad B=1$

$A=1 \qquad B=10$

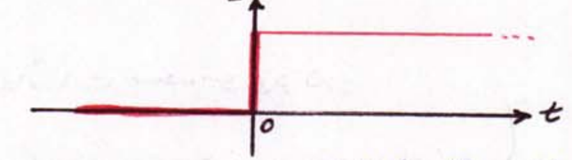
حل: نکته ←

$\max(A\sin\omega t+B\cos\omega t) = \max(A,B)$

☐ چیستی استاتیک و ارتباط آن با دینامیک:



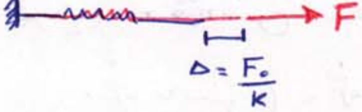
نمودار تاریخچه زمانی بارگذاری استاتیکی:



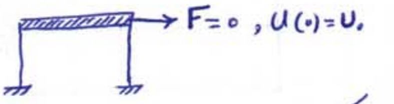
نمودار دینامیکی (بارگذاری)

بار ضربه تداوی (هاوسی تایپ) پله ای

نکته: فنر مقابل تحت نیروی F بصورت استاتیکی قرار بگیرد فنر به اندازه $\frac{F_0}{k}$ تغییر شکل داده است.

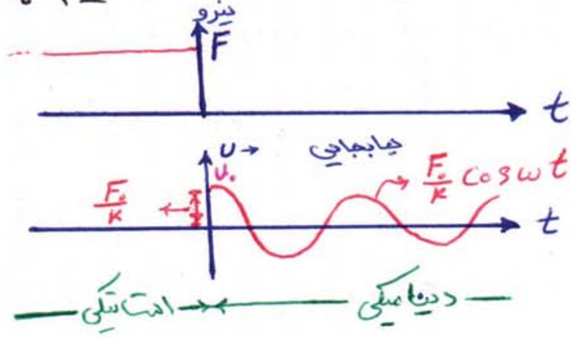


سوال ۱: نمودار $u-t$ و نمودار نیرو-زمان را برای یک سازه درصورتی که جابجایی اولیه سازه $t=0$ برابر u_0 باشد ترسیم نمایید.

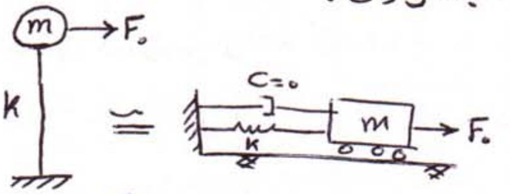


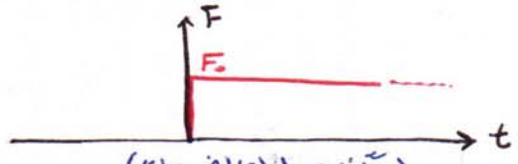
معادله حرکت: $m\ddot{u}+ku=0$

ارتعاش آزاد تحت جابجایی اولیه:



سوال ۲: معادله دیفرانسیل نامیرای یک درجه آزادی:





بارگذاری پله‌ای (ضربه‌ای)

معادله حرکت سیستم: $m\ddot{x}+kx=F_0$ Ⓘ

جواب عمومی $x_G(t)=A\cos\omega t+B\sin\omega t$

$x_p(t)=A\;;\;\dot{x}_p(t)=0\;,\;\ddot{x}_p(t)=0$

در معادله Ⓘ قرار می‌دهیم مقادیر $x_p(t)$، $\dot{x}_p(t)$، $\ddot{x}_p(t)$ می‌باشد.

جواب خصوصی $m(0)+kA=F_0\Rightarrow A=\frac{F_0}{k}\;;\;x_p(t)=\frac{F_0}{k}$

$$x_T(t)=x_G(t)+x_p(t)\Rightarrow x(t)=A\cos\omega t+B\sin\omega t+\frac{F_0}{k}$$

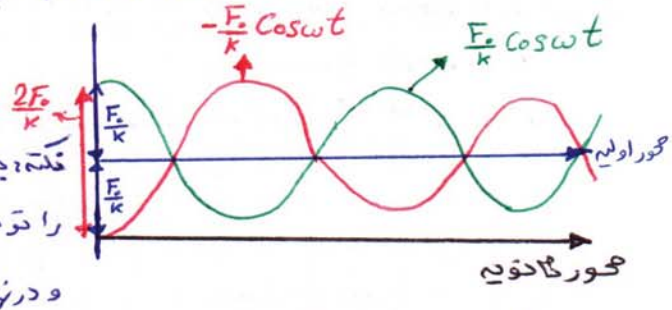
با اعمال شرایط مرزی، اگر $x(0)=0$ و $\dot{x}(0)=0$ باشد خواهیم داشت.

$$x(0)=0\Rightarrow A\times1+\frac{F_0}{k}=0\Rightarrow\boxed{A=-\frac{F_0}{k}}$$

$$\dot{x}(0)=0\Rightarrow-A\omega\sin\omega t+B\omega\sin\omega t=0\Rightarrow\boxed{B=0}$$

$$\Rightarrow x(t)=-\frac{F_0}{k}\cos\omega t+\frac{F_0}{k}=\frac{F_0}{k}(1-\cos\omega t)$$

$$x(t)=\frac{F_0}{k}-\frac{F_0}{k}\cos\omega t$$

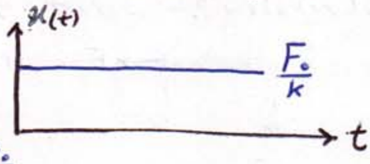


نکته: برای ترسیم نمودار تابع $x(t)$ ابتدا نمودار $\frac{F_0}{k}\cos\omega t$ را ترسیم می‌کنیم، سپس قرینه $-\frac{F_0}{k}\cos\omega t$ را ترسیم نموده و درنهایت مقدار $\frac{F_0}{k}$ رو به نمودار $-\frac{F_0}{k}\cos\omega t$ اضافه می‌کنیم جهت این کار محور اولیه (افقی) نمودار رو به میزان $\frac{F_0}{k}$ جابجا می‌کنیم.

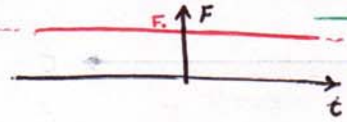
تمرین ۶- بحث دو برابر شدن نیروی وزن ضربه ناشی از سقوط اجسام از ارتفاع صفر را از کتاب دینامیک سازه‌ای بازخوانی کرده و کلیه مفاهیم را بازخوانی نمایید؟

نکته: با توجه به سوال ۱و۲ صفحه قبل اگر آن ها رو با هم جمع کنیم خواهیم داشت:

$$\begin{cases} m\ddot{x}+kx=0 \Rightarrow x(t)=\frac{F_0}{k}\cos\omega t \\ m\ddot{x}+kx=F_0 \Rightarrow x(t)=\frac{F_0}{k}-\frac{F_0}{k}\cos\omega t \end{cases} \Rightarrow$$



$$2x(t)=2\frac{F_0}{k} \Rightarrow x(t)=\frac{F_0}{k}$$



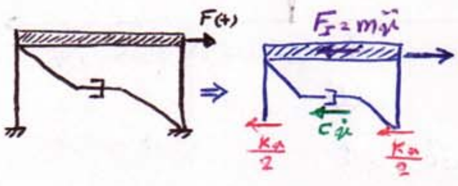
جمع استاتیک از قبل تا کنون (۰) و بارگذاری پله‌ای می‌شود استاتیک:

نکته: وجود بار ضربه سبب می‌شود بار استاتیکی ۲ برابر شود $\left(\frac{2F_0}{k}\right)$

نکته: در زلزله های حوزه نزدیک حداکثر پاسخ ۲ برابر می‌شود؛ اگر باند (A Per band) حوزه نزدیک ۲ برابر می‌شود.

بازخوانی دقیق‌تر ارتعاشات:

براساس فصل ٦ کتاب مهندسی زلزله (۲۴۷ـ ۳۴۱، صفحات)



نکته: براساس توضیحات ص۲۵ کتاب مهندسی زلزله برش پایه در واقع همان kx می‌باشد.

$$Max(kx, m\ddot{x}) \Rightarrow kx=m\ddot{x}$$

روش تقریبی تعیین پریود سازه (ASCE 7-05):

$$T_a=0.1N$$

N: تعداد طبقات

T_a: پریود سازه

رابطه $T_a=0.1N$ دقت بسیار بالایی دارد در تعیین دوره تناوب سازه‌ها؛ یک رابطه جهان شمول است برای همه انواع خاک‌ها، همه نوع سازه‌ها و ...

این رابطه مستقل از توزیع جرم، سختی و ... می‌باشد.

در رابطه بالا برای قاب های خمشی تعداد طبقات کمتر از ۱۲ و ارتفاع طبقات حداقل ۳ متر باشد.

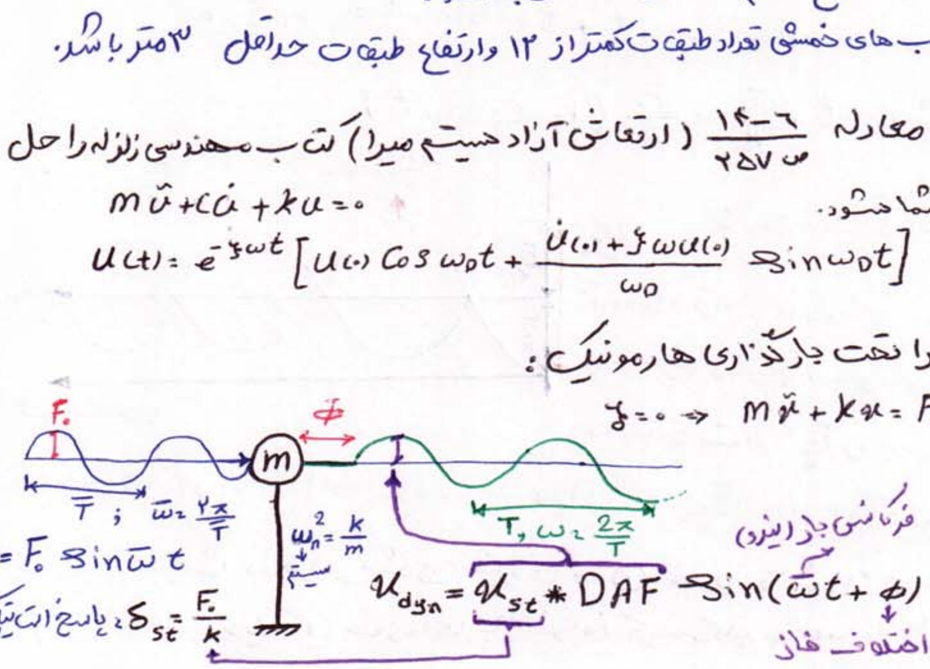
تمرین ۷: آنقدر معادله $\frac{\text{۱۴-٦}}{\text{۲۵۷ ص}}$ (ارتعاش آزاد سیستم میرا) کتاب مهندسی زلزله را حل کنید که ملکه ذهن شما شود.

$$m\ddot{u}+c\dot{u}+ku=0$$

$$u(t)=e^{-\xi\omega t}\left[u(0)\cos\omega_D t+\frac{\dot{u}(0)+\xi\omega u(0)}{\omega_D}\sin\omega_D t\right]$$

☐ پاسخ سیستم نامیرا تحت بارگذاری هارمونیک:

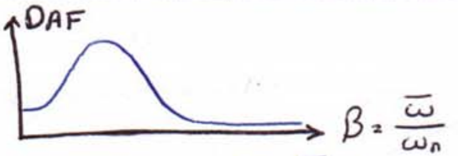
$$\xi=0 \Rightarrow m\ddot{x}+kx=F_0\sin\bar{\omega}t$$



$$F(t)=F_0\sin\bar{\omega}t$$

$\delta_{st}=\frac{F_0}{k}$: پاسخ استاتیکی

$$u_{dyn}=u_{st}*DAF\sin(\bar{\omega}t+\phi)$$



DAF: تابعی است از نسبت فرکانس تحریک به فرکانس سیستم

تشدید: فرکانس تحریک با فرکانس پاسخ برابر است $\beta=\frac{\bar\omega}{\omega_n}=1$

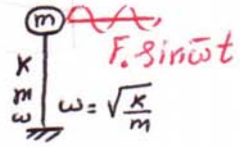
تمرین ۸: معادله $\frac{\text{۲۴-۶}}{\text{۲۶۱ص}}$ کتاب مهندسی زلزله (پاسخ سیستم نامیرا تحت بارگذاری هارمونیک) $m\ddot{u}(t)+ku(t)=P_0\sin(\bar\omega t)$ را اثبات نمائید.

$$u(t)=\frac{P_0}{k}\frac{1}{1-\beta^2}(\sin\bar\omega t-\beta\sin\omega t)$$ → مهمترین رابطه در مهندسی زلزله (درواقع این رابطه درخت تنومند در مهندسی زلزله است).

نکته: درک عمیق معادله ۶-۲۴ کتاب مهندسی زلزله $u(t)=\frac{P_0}{k}\frac{1}{1-\beta^2}(\sin\bar\omega t-\beta\sin\omega t)$ درواقع درپیوست ب ص ۷۵۱ به چه ی باشد.

تمرین ۹: آن قدر معادله $\frac{\text{۱۹-۶}}{\text{۲۶۰ص}}$ کتاب مهندسی زلزله $m\ddot{u}(t)+ku(t)=P_0\sin(\bar\omega t)$ را حل کنید تا به معادله $\frac{\text{۲۴-۶}}{\text{۲۶۱ص}}$ $u(t)=\frac{P_0}{k}\frac{1}{1-\beta^2}(\sin\bar\omega t-\beta\sin\omega t)$ برسید تا ملکه ذهن شود؟

☐ پاسخ سیستم نامیرا تحت بارگذاری هارمونیک:



$$m\ddot{u}(t)+ku(t)=P_0\sin\bar\omega t$$

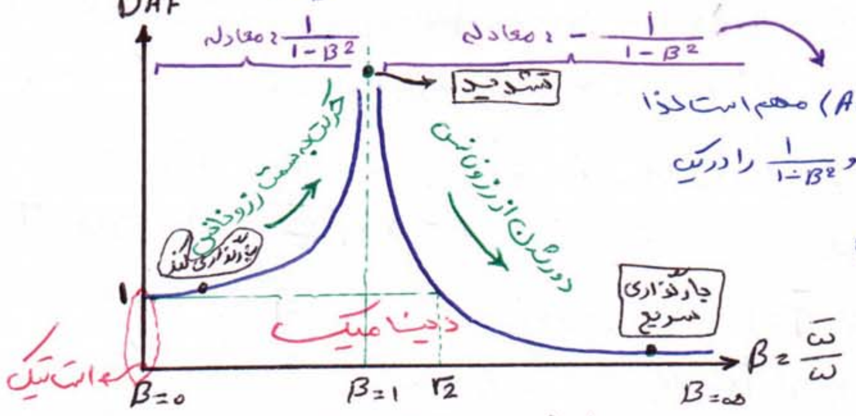
$$u(t)=\underbrace{\underbrace{\frac{P_0}{k}}_{\delta_{st}}\underbrace{\left(\frac{1}{1-\beta^2}\right)}_{DAF}}_{\delta_{dyn.}}\left\{\sin\bar\omega t-\beta\sin\omega t\right\}$$

DAF → $\beta=\frac{\bar\omega}{\omega}$ تابعی از ⇒ $\begin{cases}\bar\omega & \text{تحریک}\\ \omega & \text{سیستم}\end{cases}$ سیستم < m, k

*DAF (De Amplification Factor)

دامنه پاسخ دینامیکی $\delta_{dyn.}$: < استاتیک ، حوزه فرکانس

$DAF=\frac{1}{1-\beta^2}$: ضریب تشدید دینامیکی ، طیف



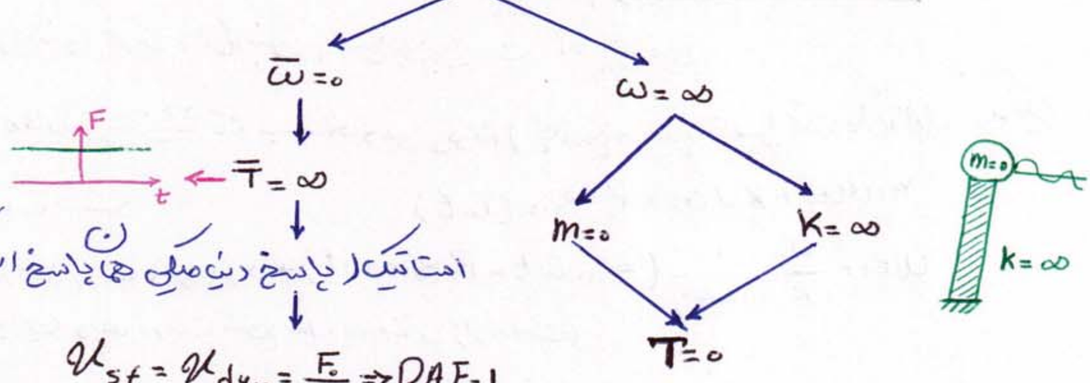
طیف سیستم نامیرا

نکته: برای ما دامنه (Amplitut) مهم است لذا دو نمودار توابع $\frac{1}{1-\beta^2}$ و $-\frac{1}{1-\beta^2}$ را درکی شکل ترسیم می کنیم

نکته: حرکت به سمت رزونانس یعنی چه؟ یعنی داریم از فرکانس سازه ω به سمت فرکانس رزونانس (فرکانس نیرو

خارجی $\bar{\omega}$) می رسیم.

تحلیل نمودار طیف صفحه قبل:

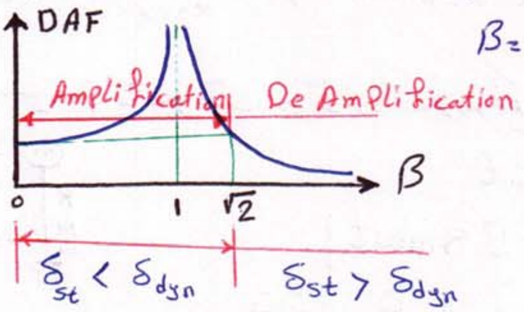


$$u_{st}=u_{dyn}=\frac{F_0}{k}\Rightarrow DAF=1$$

نکته: سیستمی که جرم ندارد صلب فرض می کنیم.

نکته: پاسخ دینامیکی از استاتیکی بیشتر است زمانی که ($0<\beta<\sqrt{2}$)

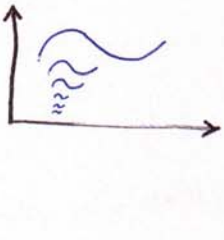
سوال: آیا ممکن است سیستم استاتیکی نباشد اما Amplification (دامنه) آن استاتیکی باشد؟ بله در $\beta=\sqrt{2}$



δ_{st}: پاسخ استاتیکی

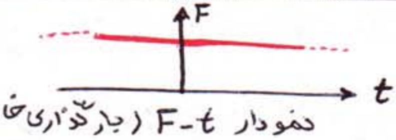
δ_{dyn}: پاسخ دینامیکی

$$\text{if}:\beta=\infty\Rightarrow\begin{cases}\frac{\bar{\omega}}{\omega}=\infty\Rightarrow\bar{\omega}=\infty\Rightarrow\bar{T}=0\longrightarrow\\ \frac{\bar{\omega}}{\omega}=\infty\Rightarrow\omega=0\begin{cases}\nearrow k=0\\ \searrow m=\infty\end{cases}\longrightarrow\end{cases}$$



نکته: در زمانی که $\bar{T}=0$: اینقدر بار سریع تغییر جهت می دهد که $\bar{T}$ آن صفر باشد لذا در این خصوص هیچ گونه عکس العملی سازه ندارد لذا پاسخ سیستم صفر خواهد شد به عبارتی سازه مجال تغییر جهت نخواهد داشت.

نکته: در زمانی که $k=0$ (سختی سیستم صفر باشد): در این حالت فرض می کنیم دوره تناوب سازه T خیلی زیاد ($T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k=0}}=\infty$) باشد، وقتی به سازه یک نیروی هارمونیک رفت و برگشتی به سازه اوارد گردد. [در نتیجه سازه با توجه به اینکه ($\bar{T}\ll T$) دوره تناوب سازه بسیار بیشتر از دوره تناوب نیروی هارمونیک خارجی است.] لذا این تحریک هارمونیک خارجی اجازه عکس العمل به سازه داده نمی شود، لذا مقدار جابجایی $DAF=0$ می گردد.

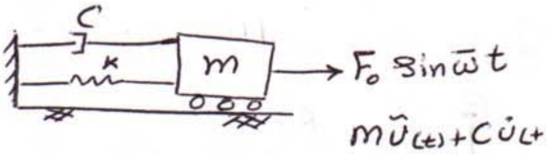


نمودار F-t (بارگذاری خارجی)

نکته: درصورتی که فرکانس تحریک صفر باشد خواهیم داشت

$\bar{\omega}=0 \Rightarrow \bar{T}=\infty \Rightarrow$ تحریک بار استاتیکی

☐ بارگذاری هارمونیک روی سیستم میرا:



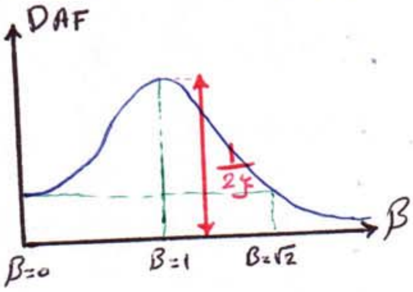
معادله حرکت سیستم: $m\ddot{u}(t)+c\dot{u}(t)+ku(t)=F_0 \sin\bar{\omega} t$

پاسخ ماندگار (پایدار)

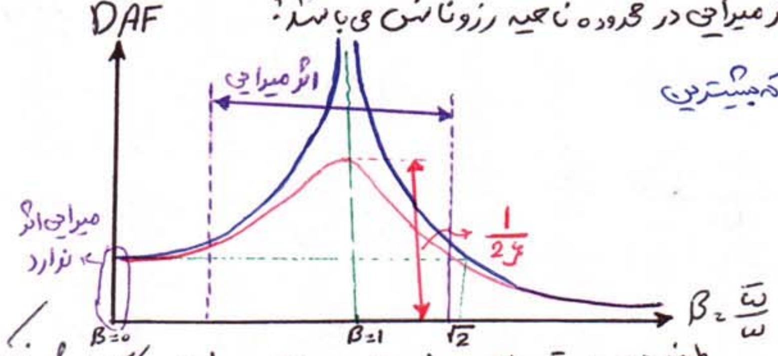
$$U(t)=\frac{F_0}{k}\,DAF\,\sin(\bar{\omega} t-\theta)$$

$$DAF=\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}} \quad ;$$

$$\theta=\tan^{-1}\frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}$$



سوال: نشان دهید بیشترین اثر میرایی در محدوده ناحیه رزونانس می‌باشد؟



طیف سیستم نامیرا با سیستم میرا تحت بارگذاری هارمونیک

حل: بیشترین اثر میرایی جایی است که بیشترین جابجایی را داریم.

نکته: اثر اعجاز انگیز میرایی در همسایگی میرایی می‌باشد.

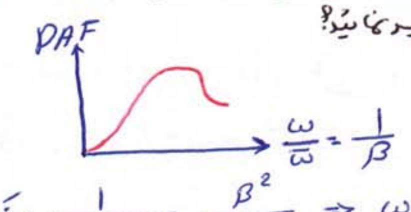
نکته: در محدوده $0.5 \leqslant \beta \leqslant 2$ اثر میرایی بروز بیشتری دارد. قابل توجه است که در این محدوده مربوط به تشدید است.

تمرین ۱۰- از کتاب معادلات دیفرانسیل مسئله‌های زیر را حل نمائید؟

$$\ddot{q}+\omega_n^2 q=F_0 \sin\omega_n t$$

$$\ddot{q}+2\xi\omega_n\dot{q}+\omega_n q=F_0 \sin\omega_n t$$

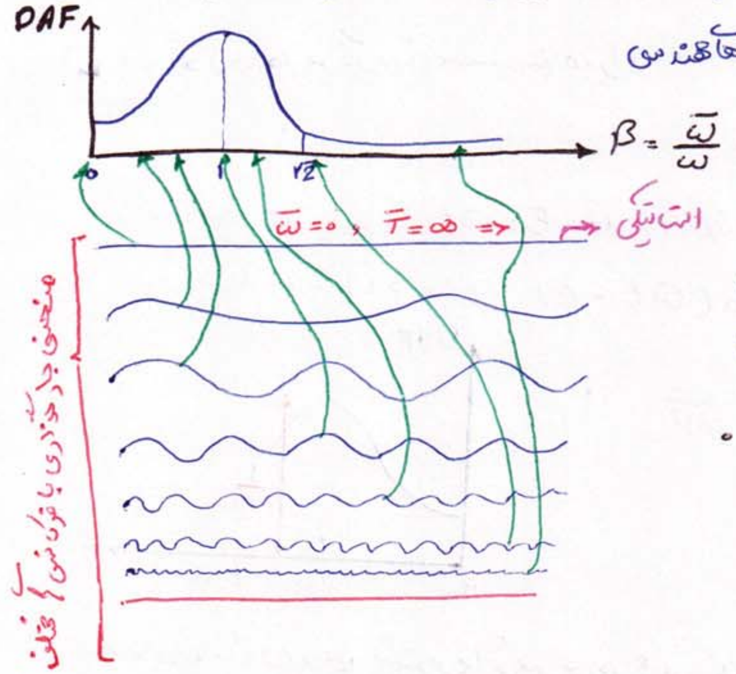
تمرین ۱۱- درصورتی که تحریک هارمونیک در پایه ایجاد گردد مفروض است ترسیم طیف پاسخ سازه یک درجه آزادی (منحنی طیف را تفسیر نمائید)؟

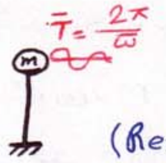


نکته: $\frac{1}{1-\frac{1}{\beta^2}}=\frac{\beta^2}{1-\beta^2} \Rightarrow \omega=1, \quad \frac{\bar{\omega}^2}{1-\bar{\omega}^2}$

□ با توجه به شکل طیف (نمودار β - DAF) می توان دو رویکرد زیر در خصوص حالات حدی بحث کرد:

رویکرد اول: فرکانس سیستم (ω) ثابت و فرکانس بارگذاری ($\bar{\omega}$) در بازه ی صفر تا بی نهایت در تغییر باشد. در ادبیات برخی از رشته های مهندسی

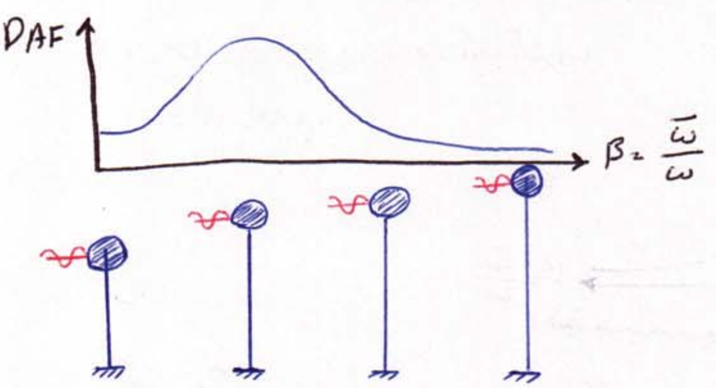




در این حالت به $H(\omega)$ عملگر دامنه پاسخ RAO (Response Amplitude operator) می گویند. این یک تعریف عام برای RAO است.

$\omega = cte$ ، $0 \leqslant \bar{\omega} < \infty$

رویکرد دوم:



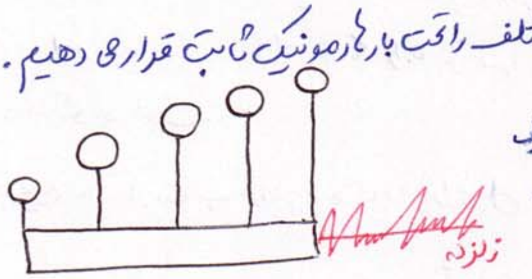
فرکانس بارگذاری ثابت ($\bar{\omega}$) و فرکانس سیستم ω در بازه ی صفر تا بی نهایت در تغییر باشد

حالات حدی:

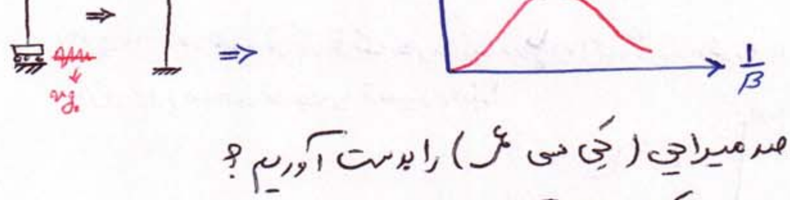
$\beta \to 0$ ، $\beta = 1$ ، $\beta = \sqrt{2}$ ، $\beta = \infty$

$\bar{\omega} = cte$ ، $0 \leqslant \omega < \infty$

در این حالت یک سازه با دوره تناوب مختلف را تحت بارهارمونیک ثابت قرار می دهیم.



نکته: برای ترسیم طیف زلزله یک سازه یک درجه آزادی رو با دوره های تناوب متفاوت تحت زلزله (تحریک در پایه) قرار می دهیم لذا مطابق نکات قبلی طیف زلزله را ترسیم می کنیم.



تمرین ۱۲- چگونه مقدار درصد میرایی (کِی سی عمل) را بدست آوریم؟

□ هویت معادله ارتعاش سازه تک درجه آزادی:

وقتی می گویند سیستم را تعیین هویت کن یعنی اینکه بگوییم در معادله $m\ddot{x} + C\dot{x} + kx = 0$

مقادیر m ، c ، k را تعیین نمائیم.

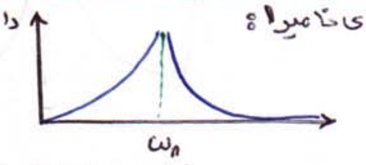
$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} m \\ c \\ k \end{matrix}\right\} \text{هویت}$$

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} \frac{c}{2m\omega_n} = \xi \\ \frac{k}{m} = \omega_n \end{matrix}\right\} \text{هویت}$$

* * *

سیستم های نامیرا:

$$\ddot{x} + \omega_n x = 0 \xrightarrow[\text{بگیریم}]{\text{اگر FFT}}$$



پاسخ سیستم نامیرا تحت بارگذاری هارمونیک:

$$x_{dyn} = \underbrace{x_{st}}_{\text{عدد}}\ \underbrace{\frac{1}{1-\beta^2}}_{\text{عدد}}\left(\sin\underbrace{\bar{\omega}}_{\text{فرکانس تحریک}}t - \beta\sin\underbrace{\omega}_{\text{فرکانس سیستم}}t\right)$$

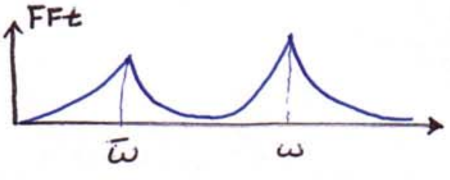
$$= a\left(\sin\bar{\omega}t + b\sin\omega t\right)$$

بحث ریاضی معادله $a(\sin\omega_1 t + \sin\omega_2 t)$ خواهیم داشت.

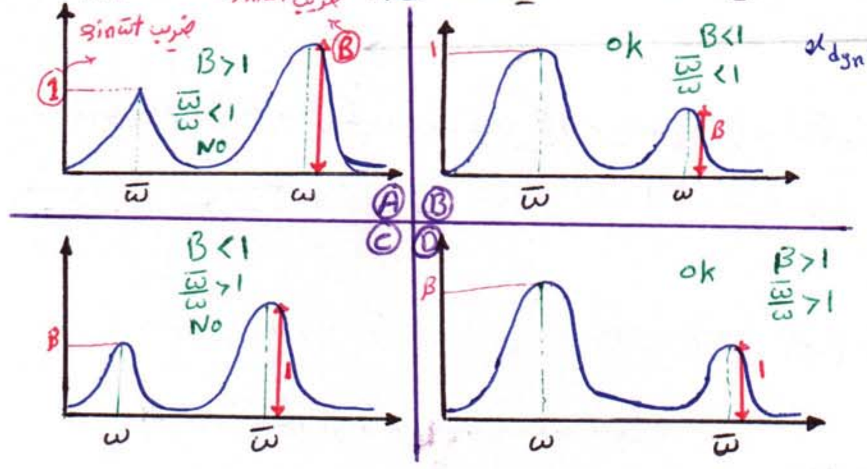
$$a(\sin\omega_1 t + \sin\omega_2 t) \Rightarrow a(\omega_1, \omega_2)$$

یعنی a تابعی از ω_1، ω_2 می باشد.

اگر از تابع FFt بگیریم یک نقطه ماکزیمم (پیک) در ω و $\bar{\omega}$ خواهیم داشت



نکته: اگر از تابع فوق FFT بگیریم به ۴ حالت زیر می رسیم:



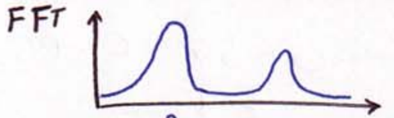
$$x_{dyn} = x_{st}\frac{1}{1-\beta^2}(\sin\bar{\omega}t - \beta\sin\omega t)$$

$$\begin{cases} \sin\bar{\omega}t \rightarrow 1 & \text{ضریب} \\ \sin\omega t \rightarrow \beta & \text{ضریب} \end{cases}$$

برای حالت $\beta > 1 \Rightarrow \begin{cases} Ⓐ = \text{InPosible} \\ Ⓓ = \text{Posible} \end{cases}$

برای حالت $\beta < 1$ $\begin{cases} Ⓑ = \text{Posible} \\ Ⓒ = \text{InPosible} \end{cases}$

نکته: طبق نمودارها در حالت Posible در هر دو حالت فرکانس کوچک (مربوط به تحریک یا مربوط به سازه) مقدار دامنه آن بیشتر است.

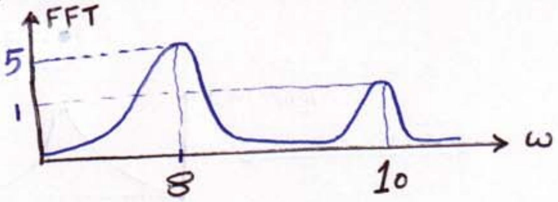


صحیح می باشد.

اشتباه است

سوال: نمودار FFT به ω را برای تابع زیر ترسیم نمایید.

$$F_{(t)} = 1\sin 10t + 5\sin 8t$$



تمرین ۳: معادله زیر را حل نمایید و ۱۰ بار از روی آن رونویسی نمایید؟

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = \frac{F_0}{m}\sin\omega t$$

$$x_{c(t)} = e^{-\xi\omega_n t}\{A\sin\omega_D t + B\cos\omega_D t\}$$

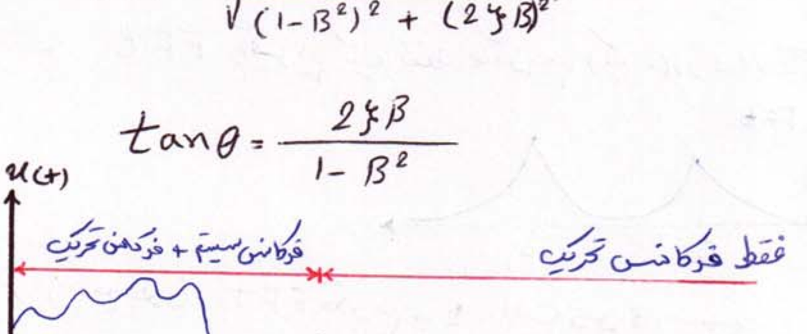
فرکانس تحریک

$$\underbrace{x_{p}(t) = \frac{F_0}{k}\cdot DAF\cdot\sin(\omega t - \theta)}_{\text{Steady State}}$$

پاسخ حالت ماندگار سیستم

$$DAF = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

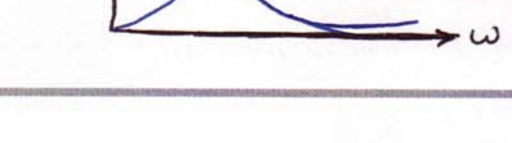
$$\tan\theta = \frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}$$



- تمرین ۴: توجیه فیزیکی بیاورید که چرا در سیستم میرا در بخش پاسخ مانا، فرکانس سیستم وجود ندارد؟ (اگر FFT بگیریم یک نقطه (قله) مربوط به فرکانس تحریک دارد) (در جواب ارتعاش اجباری یا مانا بایستی FFT بگیریم).

نکته: اگر از معادلات حرکت سیستم های مختلف FFT بگیریم خواهیم داشت.

۱- ارتعاش آزاد یک سیستم نامیرا:

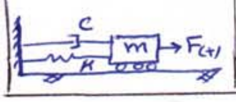


۲- ارتعاش اجباری یک سیستم میرا:

۳- ارتعاش اجباری سیستم نامیرا

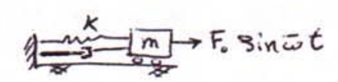
تمرین ۱۵: یک سیستم ارتعاش میرا با فرکانس $\omega_n = 2\pi$ ($T_n = 1$) و نسبت میرایی $\xi = 5\%$ تحت تحریک هارمونیک $\omega = 3\pi$ دارای دامنه مساوی $10cm$ است. دامنه پاسخ تحت تحریک هارمونیک با فرکانس $\omega = 4\pi$ چقدر می‌باشد؟

تمرین ۱۶: در جدول ذیل (تحریک هارمونیک در جرم $\beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega}$) جاهای خالی را تکمیل نمایید؟

نمایش سیستم	معادله سیستم	$\beta < 1$	$\beta = 1$	$\beta > 1$
	نامیرا $m\ddot{x} + kx = F_0 \sin\bar{\omega}t$			
	میرا $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin\bar{\omega}t$			

تمرین ۱۷: نتایج حاصل از جدول قبل را بحث و تحلیل نمایید؟

تمرین ۱۸: در حالت $\beta = 1$ برای سیستم نامیرا که منجر به پاسخ مبهم $\frac{\infty}{0}$ می‌گردد را رفع ابهام نمایید؟ (هوپیتال)



☐ سیستم میرا تحت بارگذاری هارمونیک:

$$\text{if}: \beta \ll 1: \quad x = x_{st} \sin\bar{\omega}t \Rightarrow x = \overbrace{\frac{F_0}{\underset{\text{سیستم}}{\boxed{k}}} \sin\bar{\omega}t}^{\text{تحریک}}$$

تقریبا $(\beta \ll 1) \Rightarrow DAF = 1 \; , \; \theta = 0$

k-dominant (k حاکم است).

$$\text{if } \beta = 1: \quad x = \frac{x_{st}}{2\xi} \sin(\bar{\omega}t + \frac{\pi}{2}) \quad ; \quad \underset{\text{تحریک}}{\bar{\omega}} = \underset{\text{سیستم}}{\omega_n}$$

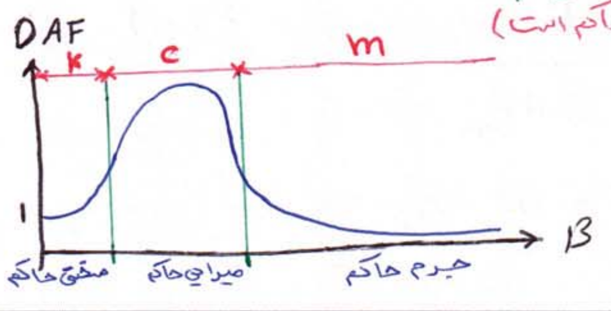
$$\xi = \frac{c}{2m\omega_n} \Rightarrow x = \frac{F_0}{k \frac{c}{m\omega_n}} \sin(\bar{\omega}t + \frac{\pi}{2}) \quad , \quad k = m\omega_n^2$$

$$\Rightarrow x = -\frac{F_0}{c\,\omega_n} \cos(\bar{\omega}t) \overset{\omega_n = \bar{\omega}}{\Rightarrow} x = -\overbrace{\frac{F_0}{\underset{\text{سیستم}}{\boxed{c}}\,\bar{\omega}} \cos(\bar{\omega}t)}^{\text{تحریک}}$$

c- dominant (c حاکم است)

$$\text{if } \beta \gg 1: \quad x = \frac{x_{st}}{\beta^2} \sin(\bar{\omega}t + \pi) = \overbrace{\frac{F_0}{\underset{\text{سیستم}}{\boxed{m}}\,\omega^2} \sin\bar{\omega}t}^{\text{تحریک}}$$

m- dominant (جرم (m) حاکم است)



معادله تعادل در فضای نیروها: $m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=F_0\sin\omega t$

شتاب (معادله تعادل در فضای شتاب) طرفین معادله را بر m تقسیم می‌کنیم:

$$\underbrace{\ddot{x}}_{\text{شتاب سیستم}}+\underbrace{2\xi\omega_n x}_{\text{شبه شتاب برگرفته از سرعت}}+\underbrace{\omega_n^2 x}_{\text{شبه شتاب برگرفته از جابجایی}}=\underbrace{\frac{F_0}{m}\sin\omega t}_{\text{شبه شتاب تحریک}}$$

جابجایی (معادله تعادل در فضای جابجایی) طرفین معادله را بر k تقسیم می‌کنیم:

$$\underbrace{\overbrace{\frac{m}{k}\ddot{x}}^{\frac{\ddot{x}}{\omega^2}}}_{\text{جابجایی مستخرج از شتاب}}+\underbrace{\frac{c}{k}\dot{x}}_{\text{جابجایی مستخرج از سرعت}}+\frac{k}{k}x=\underbrace{\frac{F_0}{k}\sin\omega t}_{\text{تحریک جابجایی}}$$

سرعت (معادله تعادل در فضای سرعت) طرفین معادله را بر c تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{m}{c}\ddot{x}+\frac{c}{c}\dot{x}+\frac{k}{c}x=\frac{F_0}{c}\sin\omega t$$

or

سرعت (طرفین معادله شتاب را بر ω_n تقسیم می‌کنیم):

$$\frac{\ddot{x}}{\omega_n}+2\xi\dot{x}+\omega_n x=\frac{F_0}{\boxed{m\omega_n}}\sin\omega t$$

$$m\times\omega_n=m\times\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{m^2}\times\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{m^2\frac{k}{m}}=\sqrt{mk}$$

نکته: چون ω_n یک مقدار ثابت است در معادله شتاب می‌توانیم آن را تقسیم بر ω_n نمائیم تا به معادله سرعت برسیم.

□ سیستم میرا تحت بارگذاری هارمونیک: $m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=F_0\sin\bar{\omega}t$

$$x_{dyn}=\underbrace{x_{st}}_{PGD}\cdot\underbrace{DAF_{dis}}_{\text{DAF جابجایی}}\cdot\underbrace{\sin(\overset{\text{تحریک}}{\bar{\omega}}t-\theta)}_{\text{هارمونیک}}$$

مشتق‌گیری: $\dot{x}_{dyn}=x_{st}\cdot DAF_{dis}\cdot\bar{\omega}\cos(\bar{\omega}t-\theta)$

نکته: طرف راست معادله را در $\frac{\omega_n}{\omega_n}$ ضرب می‌کنیم.

$x_{st}\cdot\omega_n=\dot{x}_{st}$ سرعت

$$\dot{x}_{dyn}=x_{st}\cdot DAF_{dis}\frac{\omega_n}{\omega_n}\bar{\omega}\;\beta\;\underbrace{\cos(\bar{\omega}t-\theta)}_{\text{هارمونیک}}$$

$$\dot{x}_{dyn}=\underbrace{\dot{x}_{st}}_{PGV}\cdot\underbrace{\beta\cdot DAF_{dis}}_{DAF_{vel}}\times\cos(\bar{\omega}t-\theta)$$

سرعت

$$S_v=\omega S_d$$

مجدد مشتق‌گیری می‌کنیم لذا خواهیم داشت.

$$\ddot{u}_{dyn}=-\dot{u}_{st}\cdot\beta.DAF_{dis}\;\bar{\omega}\;\sin(\bar{\omega}t-\theta)$$

نکته: طرف راست معادله را در $\frac{\omega_n}{\omega_n}$ ضرب می‌کنیم

$\ddot{u}_{st}=\dot{u}_{st}\,\omega_n$ شتاب

$$\ddot{u}_{dyn}=-(\dot{u}_{st})\,\beta.DAF_{dis}\,\frac{\omega_n}{\omega_n}\,\bar{\omega}\,\sin(\bar{\omega}t-\theta)$$

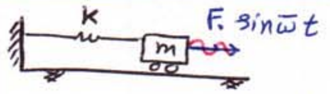
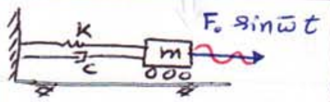
β

$$\ddot{u}_{dyn}=-\underbrace{\ddot{u}_{st}}_{PGA}\cdot\underbrace{\beta^2.DAF_{dis}}_{DAF_{acc}}\cdot\underbrace{\sin(\bar{\omega}t-\theta)}_{\text{هارمونیک}}$$

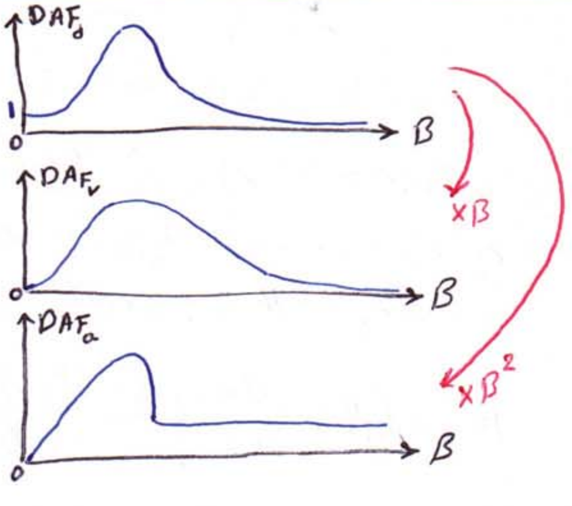
$$S_a=\omega^2 S_d$$

نکته: در آیین‌نامه ۲۸۰۰ مقدار PGA برابر A می‌باشد.

مطالب فوق‌الذکر را بصورت خلاصه در جدول زیر برای سیستم‌های یک درجه آزادی میرا و نامیرا تحت بارگذاری خارجی بازنویسی می‌کنیم: (تحریک هارمونیک در جرم)

نمایش سیستم	مقادیر	سیستم میرا	سیستم نامیرا
 نامیرا: $m\ddot{u}+ku=F_0\sin\bar{\omega}t$	DAF_d	$\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}}$	$\frac{1}{1-\beta^2}$
	DAF_v	$\frac{\beta}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}}$	$\frac{\beta}{1-\beta^2}$
میرا: $m\ddot{u}+c\dot{u}+ku=F_0\sin\bar{\omega}t$	DAF_a	$\frac{\beta^2}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}}$	$\frac{\beta^2}{1-\beta^2}$

نکته: با ضرب β تبدیل می‌شود

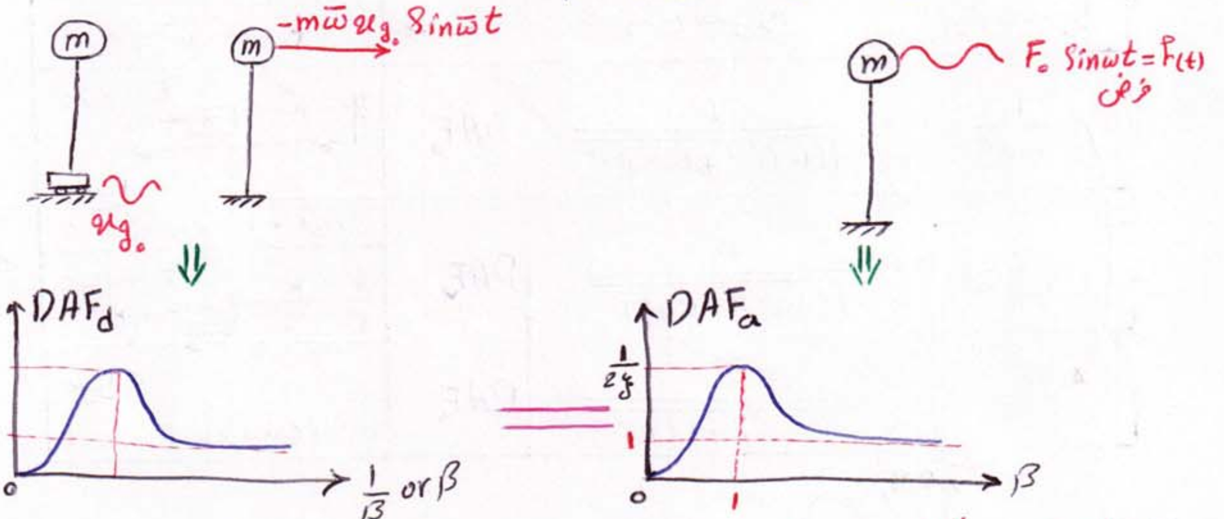


تمرین ۱۹- تعیین کنید در چه β مقدار DAF_v ماکزیمم است؟

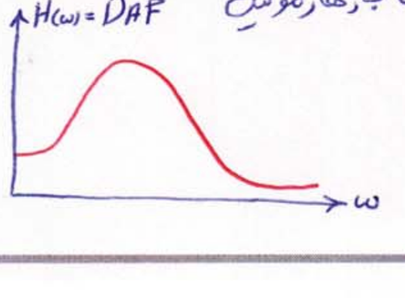
نکته: طیف شتاب در حالتی که تحریک هارمونیک جابجایی در پایه است؛ همان طیف جابجایی است وقتی که تحریک هارمونیک در محل جرم است.

DAF_a (جابجایی در پایه) $=$ DAF_d (تحریک هارمونیک در محل جرم)

نکته: طیف جابجایی (DAF_d) در حالت تحریک جابجایی در محل پایه برابر است با طیف شتاب (DAF_a) در حالت تحریک هارمونیک در محل جرم.



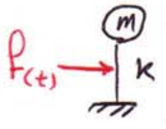
تابع تبدیل فرکانسی (RAO): نمودار نسبت دامنه پاسخ دینامیکی به پاسخ استاتیکی برحسب فرکانس سیستم به فرکانس تحریک را تابع تبدیل فرکانسی می نامند. این تابع نشان دهنده ویژگی های بسیار مهمی از سیستم و پاسخ آن تحت بار هارمونیک است. معمولاً آن را با $H(\omega)$ نشان می دهند.



$$H(\omega) = RAO = \frac{(x_{dyn})_{max}}{(x_{st})_{max}} = \frac{(F_0/K)\,DAF}{(F_0/K)} = DAF$$

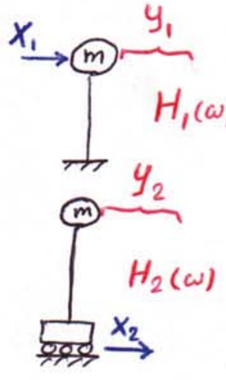
جلسه سوم مورخ ۹۴,۱,۲۱

هدف از این درس: افزایش وسعت و عمق اطلاعات در این حوزه



نکته: ممکن است تحریک نیرو در محل جرم نباشد

□ تابع پاسخ فرکانسی:



$$H_1(\omega) \Rightarrow \begin{cases} Y_1(\omega) = \overbrace{H_1(\omega)}^{\text{تابع تبدیل فرکانسی (RAO)}} \cdot X_1(\omega) \\ S_{y_1}(\omega) = |H_1(\omega)|^2 \cdot S_{x_1}(\omega) \end{cases}$$

$$H_2(\omega) \Rightarrow \begin{cases} Y_2(\omega) = H_2(\omega) \cdot X_2(\omega) \\ S_{y_2}(\omega) = |H_2(\omega)|^2 \cdot S_{x_2}(\omega) \end{cases}$$

$$H_2 : \text{تحریک جابجایی زمین} \longrightarrow \text{جابجایی سازه} \Longrightarrow$$

$$H_2' : \text{تحریک جابجایی زمین} \xrightarrow{\text{تبدیل به}} \text{نیروی اینرسی در محل جرم}$$

یا

$$\text{شتاب زمین} \xrightarrow{\text{تبدیل به}} \frac{\text{نیروی اینرسی در محل جرم}}{\text{مقدار جرم}} \equiv \beta$$

همان ضریب بازتاب آیین نامه ۲۸۰۰

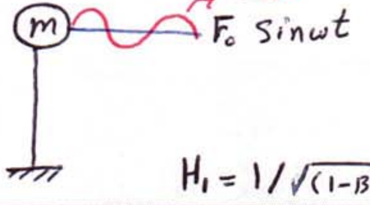
$$H_2' \times H_2 = H_1$$

$$\left\{ m \times H_{\text{شتاب در پایه} \rightarrow \text{شتاب در محل جرم می دهد}} \right\} = \left\{ H_{\text{شتاب پایه} \rightarrow \text{نیرو در محل جرم}} \right\}$$

$$\left\{ H_{\text{شتاب در پایه} \rightarrow \text{نیرو در محل جرم}} \right\} \times \left\{ H_{\text{نیرو در محل جرم} \rightarrow \text{جابجایی در محل جرم}} \right\} = \left\{ H_{\text{شتاب در محل پایه} \rightarrow \text{جابجایی در محل جرم}} \right\}$$

نکته:

$$\left\{ H_{\text{نیرو در محل جرم} \longrightarrow \text{جابجایی در محل جرم}} \right\} \xrightarrow{\text{همان}} \frac{1}{1-\beta^2} = DAF$$



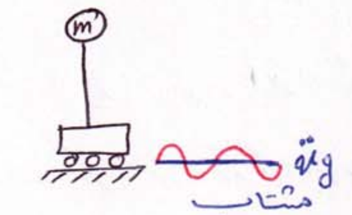
نکته: اگر داشته باشیم:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin\omega t$$

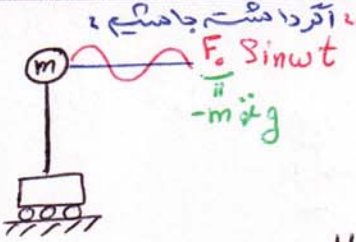
$$H_{\text{نیرو در محل جرم} \rightarrow \text{جابجایی در محل جرم}} = H_1$$

$$H_1 = 1 / \sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}$$

نکته: اگر داشته باشیم:



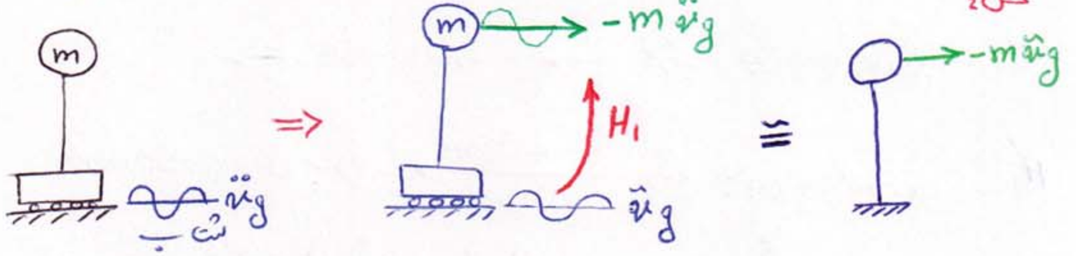
تبدیل می‌شود به $\Longrightarrow$



$$\left\{ \overbrace{H \quad \underbrace{\text{شتاب در پایه}}_{a} \rightarrow \underbrace{\text{نیرو در محل جرم}}_{b}}^{H_1} \right\} \times \left\{ \overbrace{H \quad \underbrace{\text{نیرو در محل جرم}}_{b} \rightarrow \underbrace{\text{جابجایی در محل جرم}}_{c}}^{H_2} \right\} = \left\{ \overbrace{H \quad \text{شتاب پایه} \rightarrow \text{جابجایی در محل جرم}}^{H_3} \right\}$$

$$\underbrace{H_{a\to b} \times H_{b\to c}}_{a\to c} = H_{a\to c} \quad ; \quad H_1 \times H_2 = H_3$$

تمرین: تابع تبدیل H_1، شتاب در محل پایه به نیرو در محل جرم را محاسبه کنید؟



$$H \quad \text{شتاب در محل پایه} \longrightarrow \text{نیرو در محل جرم} = H_1$$

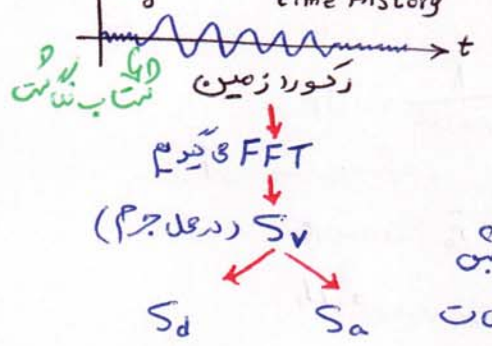
$$\ddot{u} \longrightarrow -m\ddot{u}_g = H_1$$

معادله حرکت:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = \underbrace{-m\ddot{u}_g}_{\text{نیرو در محل جرم}}$$

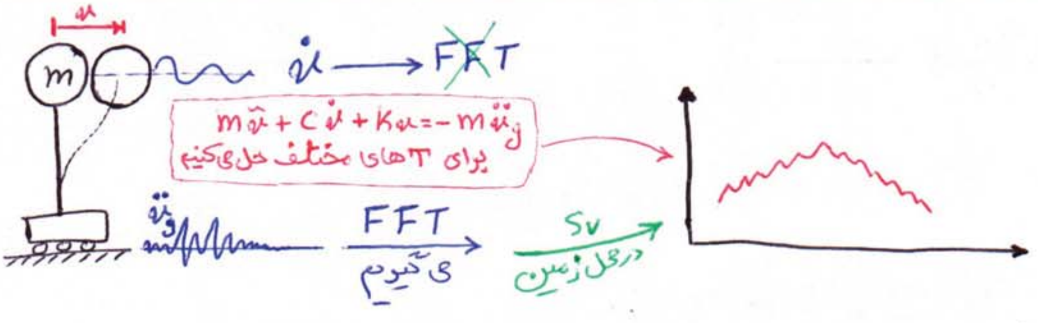
راه ساده برای تعیین طیف های زلزله:

الف) تعیین طیف سرعت از تبدیل فوریه شتاب زلزله: بدون تحلیل دینامیکی می توانیم طیف ترسیم کنیم.



اگر از Time History رکورد زلزله FFT بگیریم S_v (سرعت) را به ما می دهد. از روی آن می توانیم S_a و S_d را محاسبه کنیم.

صفحات ۶۲۱ تا ۶۲۴ کتاب مهندسی زلزله دکتر تابش پور مطالعه شود. فهم این قسمت مستلزم دانش ارتعاشات تصادفی است که بعداً توضیح داده می شود.



طیف سرعت در محل جرم = طیف فوریه شتاب در پایه

☐ نکته: طبق مطالب فوق داریم:

$$DAF=\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}}$$ جابجایی در محل جرم

$$DAF=|H(\omega)|$$

تذکر: مقدار |H(ω)| همان DAF است که می‌تواند عدد مختلط باشد.

جابجایی جرم تحت تحریک پایه: $$x(t)=x_{st}\times DAF=\frac{F_0}{k}\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}}$$

تذکر:

شتاب پایه

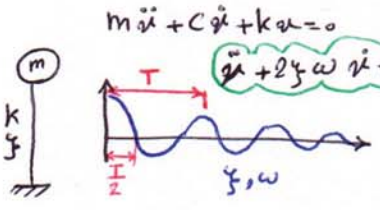
$$\begin{cases}\ddot{x}_g=\ddot{x}_{g_0}\sin\omega_g t\longrightarrow FFT\\ \dot{x}=\omega_g x_{st}\,DAF\cos\omega_g t\longrightarrow FFT\end{cases}$$

تمرین: هندبوک هریس (Hrise) را ظرف یک ساعت بررسی نمایید! (مرجع خوبی برای PhD می‌باشد بازخوانی ارتعاشات سازه به زبانی ساده)

⊕ کاهش لگاریتمی (تنزل لگاریتمی)

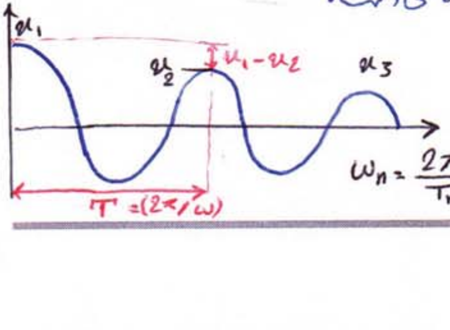
$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=0$$

$$\ddot{x}+2\xi\omega\dot{x}+\omega^2x=0 \;*$$



اگر پاسخ ارتعاش آزاد یک سیستم میرا را داشته باشیم تمام هویت سیستم (ω و ξ) را خواهیم داشت.

نکته: برای داشتن هویت سیستم پاسخ ارتعاش آزاد کافی است.



$$\omega_n=\frac{2\pi}{T_n}$$

اثبات:

$$\frac{x_1-x_2}{x_1}=1-\frac{x_2}{x_1}=1-e^{-\Delta}$$

بسط تیلور Δ کوچک $$\Rightarrow e^{-\Delta}=1-\Delta \Rightarrow 1-\frac{x_2}{x_1}=1-(1-\Delta)=\Delta$$

$$\frac{u_n}{u_0} = e^{-2\pi n \xi \sqrt{1-\xi^2}} \quad , \quad \delta = \ln\frac{u_1}{u_2} \Rightarrow \frac{u_2}{u_1} = e^{-\delta}$$

$$\delta = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \simeq 2\pi\xi$$

روش دوم:

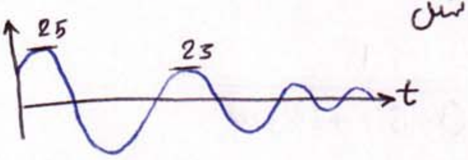
$$\underbrace{\frac{u_1-u_2}{u_1}}_{\downarrow} = 2\pi\xi$$

کاهش دامنه نسبی $= 2\pi\xi \Rightarrow \boxed{\xi = \frac{1}{2\pi}}$ (کاهش دامنه نسبی)

تذکر: از هر دامنه به دامنه سیکل بعدی چند درصد دامنه کم می شود.

نکته: در رابطه * صفحه قبل اگر سیستمی جرمش ۱۰ تن باشد رابطه * را در ۱۰٫۰۰۰ kg ضرب می کنیم تا هویت سیستم (ω و ξ) تعیین گردند.

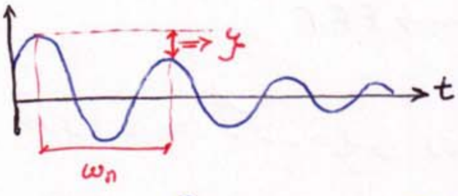
مثال: میرایی یک سیستم با پاسخ ارتعاشی مطابق شکل مقابل چقدر می باشد؟



حل:

$$\frac{25-23}{25} = 2\pi\xi \Rightarrow \xi = 1.3\%$$

نکته: در یک سیستم ارتعاش آزاد:



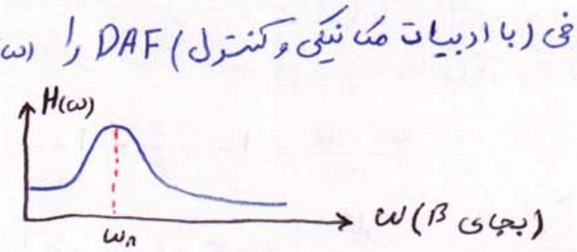
این نمودار خود سیستم است در حوزه زمان $h(t)$

تمام هویت سیستم در پاسخ ارتعاش آزاد آن متجلی می شود. (ξ و ω)

$H(\omega)$ همان سیستم است (خود سیستم در حوزه فرکانس)

$$\overset{\text{حوزه زمان}}{h(t)} \equiv \overset{\text{حوزه فرکانس}}{H(\omega)}$$

نکته: در دنیای ارتعاشات تصادفی (با ادبیات مکانیکی و کنترل) DAF را $H(\omega)$ می نامند.

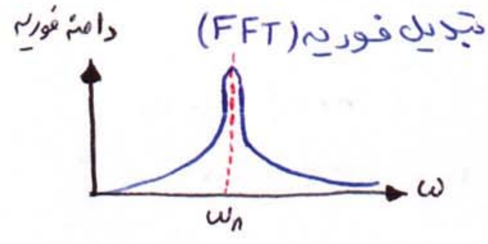


- هویت (identity) سیستم ارتعاش آزاد چه می‌باشد؟ ارتعاش آزاد = خود سیستم

پاسخ ارتعاش آزاد یک سیستم میرا مطابق شکل مقابل است.

هویت سیستم ارتعاش آزاد: m، c و k یا (ξ، ω_n) می‌باشد.

نکته: اگر از پاسخ ارتعاش آزاد سیستم‌های میرا یا نامیرا تبدیل فوریه (FFT) بگیریم به چه می‌رسیم؟



جواب: به یک قله باریک در فرکانس اصلی سیستم (ω_n)

اکنون که سیستم ارتعاش آزاد میرا و نامیرا را بررسی کردیم. می‌خواهیم به سراغ ارتعاش اجباری سیستم برویم.

☐ بازخوانی ارتعاش اجباری:

سیستم ارتعاش اجباری نامیرا:

$x_{(t)} = x_{st} \times$ ضریب تقویت دینامیکی × (هارمونیک با فرکانس تحریک − نسبت فرکانس × هارمونیک با فرکانس سیستم)

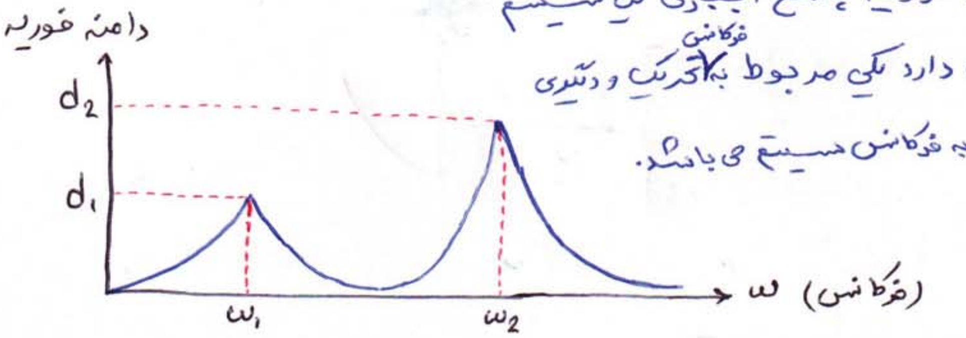
رابطه فوق برای $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ برقرار است.

$$x(t) = x_{st} \times \frac{1}{1-\beta^2} \times (\sin\bar{\omega}t - \beta\sin\omega t) \quad ; \beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega}$$

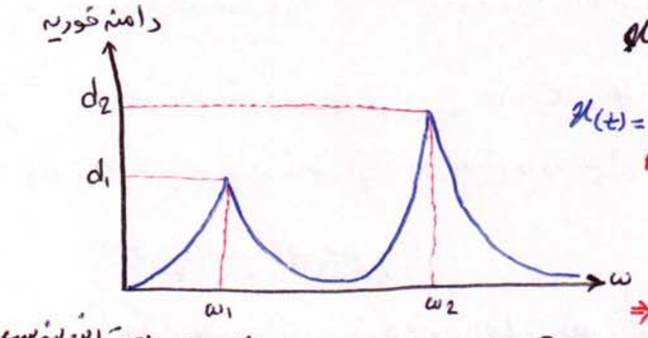
سوال مهم: پارادوکس: چگونه اینکه پاسخ فوق با فرض $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ بدست آمده است. پس دیگر چیزی بعنوان ارتعاشات آزاد وجود ندارد، پس چرا در پاسخ هنوز هم فرکانس سیستم وجود دارد؟!

اگر از تابع ($\sin\bar{\omega}t - \beta\sin\omega t$)، FFT بگیریم خواهیم داشت:

- در تبدیل فوریه پاسخ اجباری یک سیستم نامیرا دو قله دارد یکی مربوط به فرکانس تحریک و دیگری مربوط به فرکانس سیستم می‌باشد.



■ نکته؛ کدام یک از ω_1 و ω_2 به سیستم مربوط و کدام یک به تحریک؟



$$x(t) = x_{st}\frac{1}{1-\beta^2}(\sin\bar{\omega}t - \beta\sin\omega t)$$

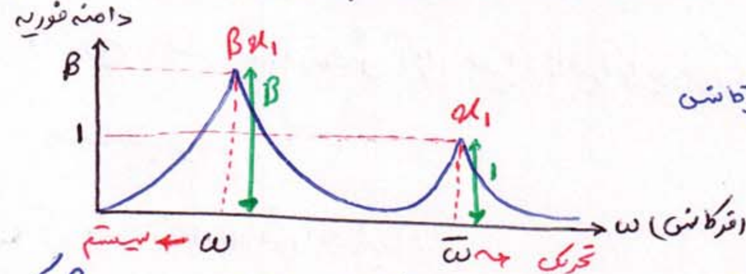
$$x(t) = \underbrace{\frac{x_{st}}{1-\beta^2}}\sin\bar{\omega}t - \underbrace{\frac{x_{st}\cdot\beta}{1-\beta^2}}\sin\omega t$$

$$\text{if: } \frac{x_{st}}{1-\beta^2} = 1 \quad \text{or} \quad \frac{x_{st}}{1-\beta^2} = x_1$$

$$\Rightarrow x(t) = 1\times\sin\bar{\omega}t - \beta\times\sin\omega t$$

یا می توانیم بنویسیم $\Rightarrow x(t) = x_1 \cdot \sin\bar{\omega}t - \beta x_1 \cdot \sin\omega t$

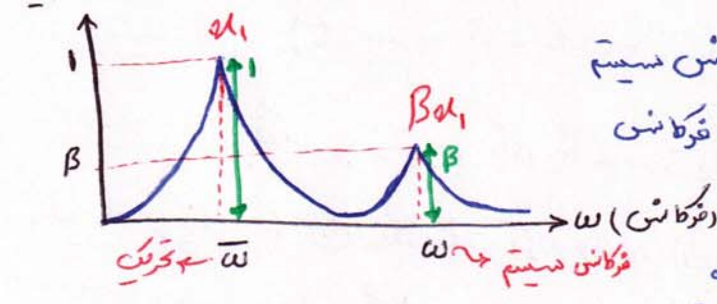
الف) اگر $1 < \beta$ باشد:



یعنی فرکانس سمت چپ فرکانس سیستم است.

در این حالت دامنه مربوط به فرکانس سیستم βx_1 و دامنه مربوط به فرکانس تحریک x_1 می باشد که مطابق شکل فرکانس سیستم بزرگ تر از فرکانس تحریک می باشد.

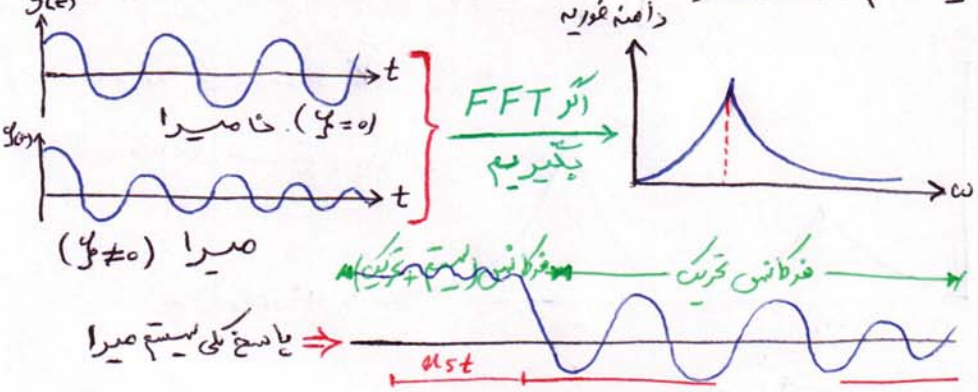
ب) اگر $1 > \beta$ باشد:



در این حالت دامنه مربوط به فرکانس سیستم (βx_1) از دامنه مربوط به فرکانس تحریک (x_1) کوچک تر خواهد بود؛ که این قاعده در رسم فوق نیز رعایت شده است.

نکته؛ در هر دو حالت قله چپ بزرگ تر از قله سمت راست است ولی تشخیص آن باید بررسی گردد.

■ سیستم ارتعاش آزاد:

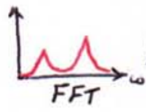


نکته: اگر در حالت های مختلف FFT بگیریم خواهیم داشت: (برای حالت $\beta \neq 1$):

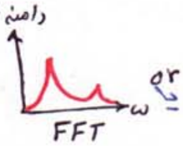
$\beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega}$ نسبت فرکانس

الف) سیستم میرا ارتعاش آزاد ← یک قله دارد.

ب) سیستم میرا ارتعاش اجباری ← می تواند



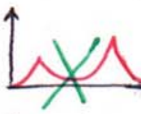
یا

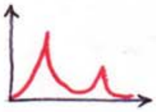


باشد

ج) سیستم نامیرا ارتعاش آزاد ← یک قله دارد.

د) سیستم نامیرا ارتعاش اجباری ←





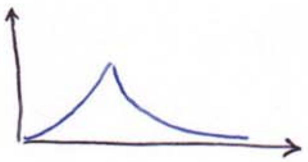
* هـ) حالت مانا ارتعاش اجباری سیستم میرا ←

u_{st} حذف

یک قله خواهد داشت (اول حذف شده و فقط ترکیب بماند)

مثال: مطلوب است مشخص نمودن سیستم ارتعاشی در منحنی FFT شکل ذیل در صورتی که مقدار $\beta \neq 1$ باشد؟

سیستم حالت های (ب، د)

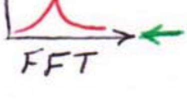


سیستم حالت های (الف، ج، هـ)

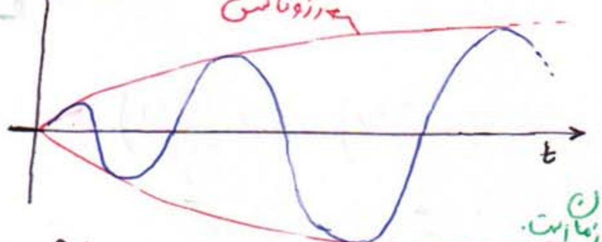
نکته: اگر $\beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega} = 1$ باشد مقدار FFT در حالت های مختلف:

- تذکر: پدیده تشدید (رزونانس) در سیستم با ارتعاش اجباری پدید می آید.

الف) رزونانس در سیستم میرا (در $T \to \infty$) ←



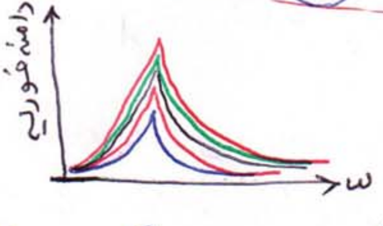
ب) رزونانس در سیستم نامیرا:



FFT وابسته به زمان خواهد بود (بازه زمان)

Time Dependent!

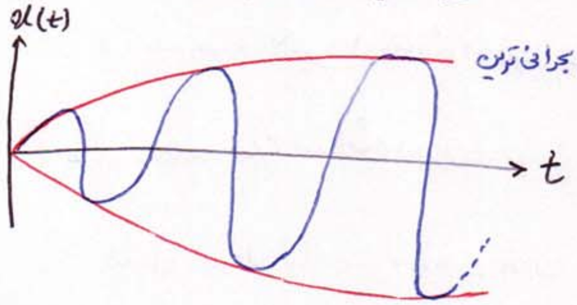
محدودیت FFT در حالت فوق: مقدار Amplitude تابع زمان است.



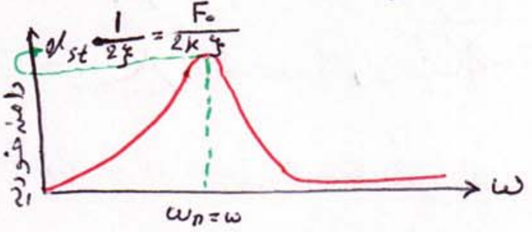
لذا از سیستم نامیرا در حالت رزونانس نمی توان FFT گرفت چون به زمان وابسته است مطابق شکل مقابل که از سیستم FFT گرفته شده است مشخص می شود که وابسته به زمان است و نمی توان از آن FFT گرفت.

محدودیت مقدار Amplitude وابسته به زمان است لذا با استفاده از FFT نمی‌توانیم از این سیستم (نامیرا در حالت رزونانس) FFT بگیریم لذا بایستی از این سیستم ویولیت گرفته شود تا دامنه max را بدست آوریم.

☐ منحنی FFT پاسخ رزونانس سیستم در حالت میرا به چه صورتی می‌باشد؟



می‌توانیم در $T\to\infty$ مقدار FFT را رسم کنیم (اجرائی‌ترین حالت).



☐ شباهت و تفاوت بین FFT رزونانس سیستم میرا و نامیرا را بیان کنید؟

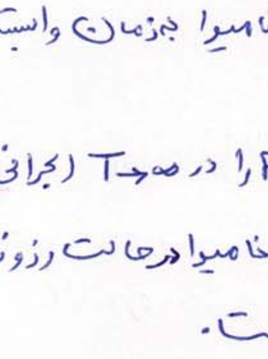
شباهت: هردو سیستم میرا و نامیرا در حالت رزونانس وابسته به زمان هستند.

شباهت: چون مقدار دامنه Amplitude هردو سیستم میرا و نامیرا به زمان وابسته است لذا مقدار FFT مشخص نیست.

تفاوت: در حالت سیستم میرا رزونانس ← می‌توانیم FFT را در $T\to\infty$ (اجرائی‌ترین حالت) بدست آوریم که یک قله دارد. اما از سیستم نامیرا در حالت رزونانس نمی‌توان FFT گرفت چون به زمان وابسته است.

☐ ادامه مطالب انتهای جلسه قبل:

$$DAF_a=\beta DAF_v=\beta^2 DAF_d$$



بحث ارتعاشات:

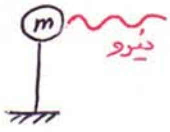
$$\begin{array}{ccccc} DAF_a & =\omega\cdot & \left(\frac{DAF_v}{\omega_n}\right) & =\omega^2\cdot & \left(\frac{DAF_d}{\omega_n^2}\right) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ S_a & =\omega & S_v & =\omega^2 & S_d \end{array}$$

کلاس زلزله:

تمرین: مقادیر max را برای DAF_d، DAF_v و DAF_a را تعیین نمایید و بگویید که این مقدار بیشینه در چه مضربی از ω رخ می‌دهد؟

راهنمایی: بایستی نسبت به ω مشتق بگیریم.

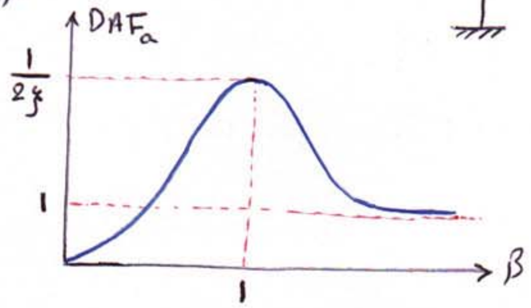
$$DAF_a = \beta^2 DAF_d = \frac{\beta^2}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}}$$



$\beta = 0 \longrightarrow DAF_a = 0$

$\beta = 1 \longrightarrow DAF_a = \frac{1}{2\xi}$

$\beta = \infty \longrightarrow DAF_a = 1$



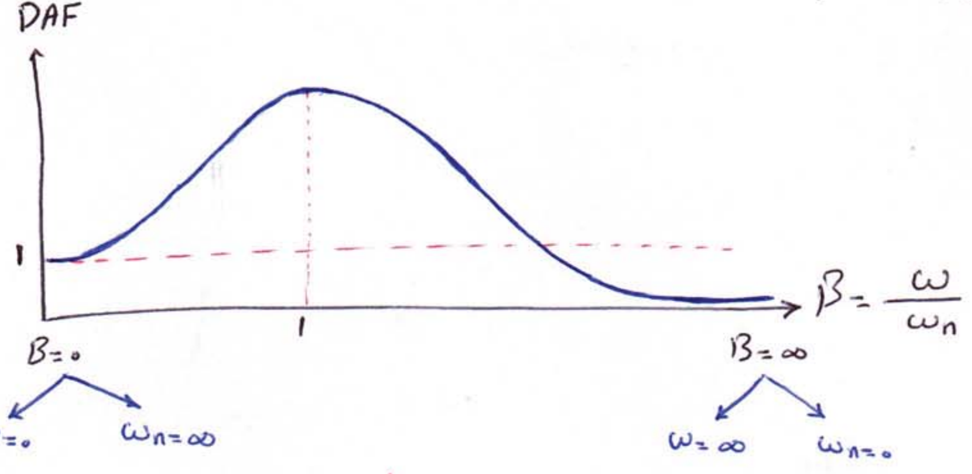
نکته: برای هر سه حالت حداکثر DAF_a، DAF_v و DAF_d ضریب $\frac{1}{2\xi}$ وجود دارد.

تمرین: فصل ۱۲ کتاب مهندسی زلزله دکتر تابش‌پور را مطالعه نمائید؟

تمرین: تمارین ص ۶۳۸ کتاب مهندسی زلزله را بررسی کنید؟

حوزه فرکانس $\xrightarrow[\text{بگیریم}]{FFT}$ حوزه زمان

■ تفسیر دوگانه برای β:



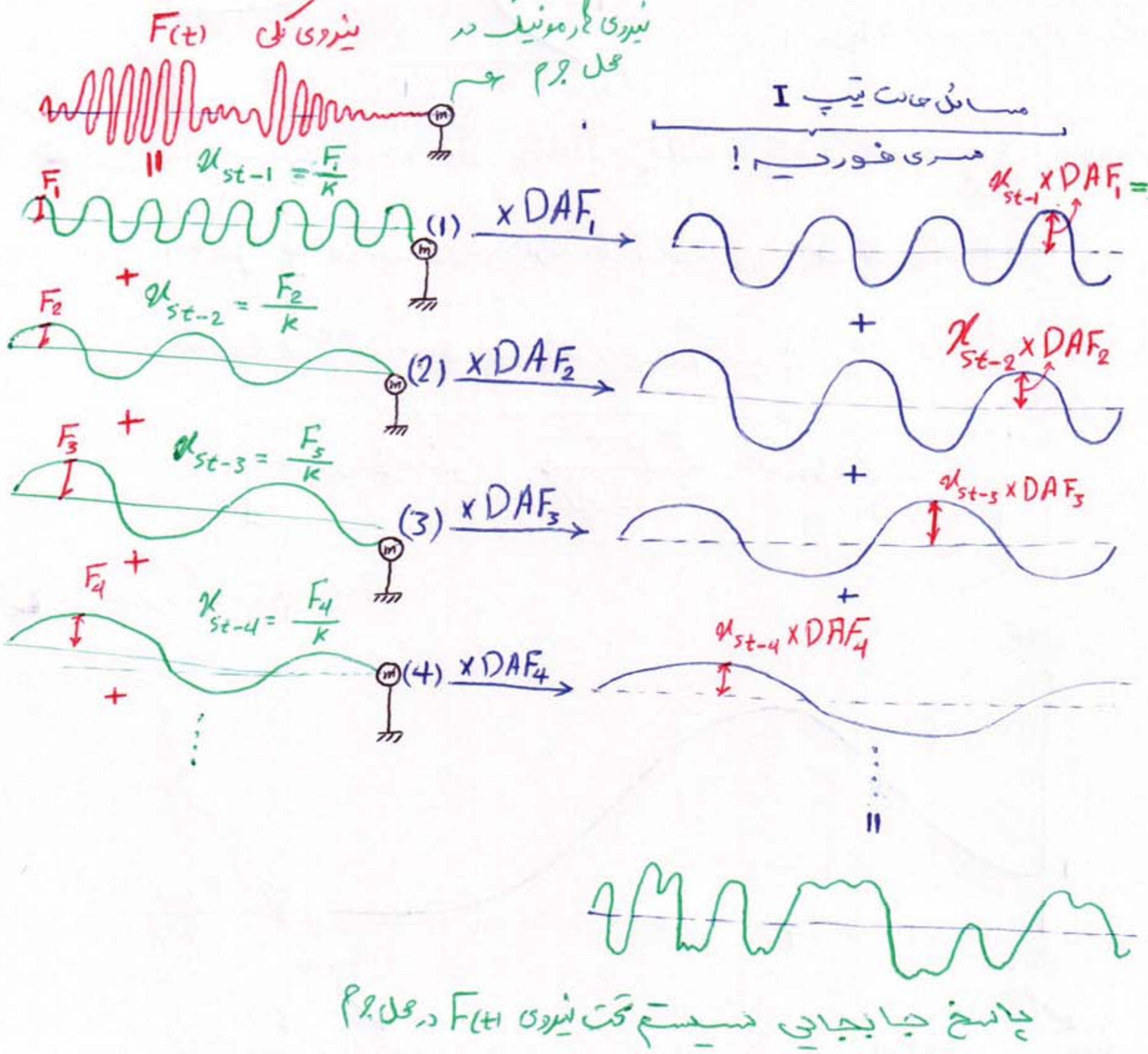
رویکرد اول: $\begin{cases} \omega = \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases} \\ \omega_n = cte \end{cases}$

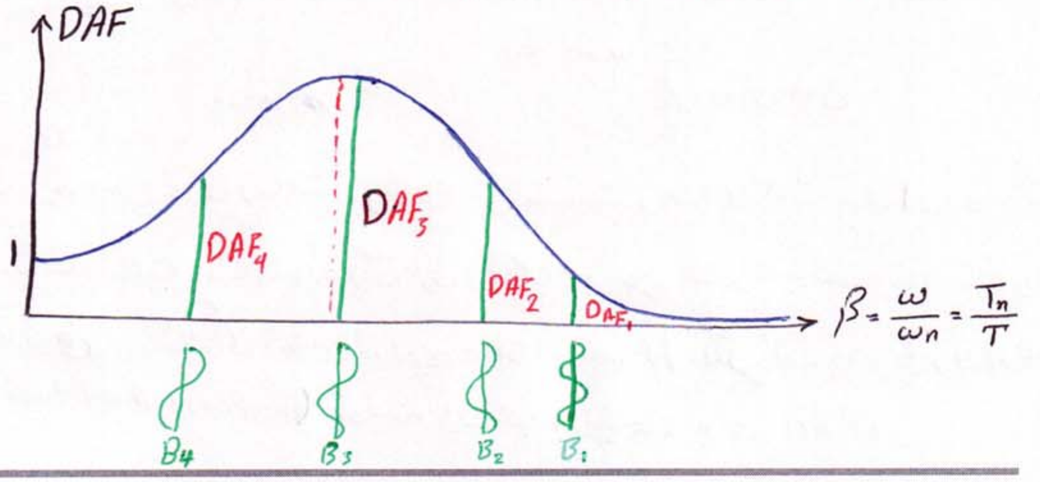
رویکرد دوم: $\begin{cases} \omega = cte \\ \omega_n = \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases} \end{cases}$

رویکرد اول: فرکانس تحریک (ω) متغیر و فرکانس سیستم (ω_n) ثابت: در این حالت که فرکانس سیستم ثابت و فرکانس بارگذاری (تحریک) در بازه صفر تا بی‌نهایت در تغییر باشد در ادبیات برخی از رشته‌های مهندسی در این حالت به $H(\omega)$ عملگر دامنه پاسخ (RAO) (Response Amplitude operator) گویند. این یک تعریف عام برای RAO است. ممکن

است تعریف‌های خاص‌تری نیز ارائه شود. در ادبیات ارتعاشات به این ضریب تشدید دینامیکی می‌گویند. این ضریب برای سیستم نامیرا مساوی $\left(\frac{1}{1-\beta^2}\right)$ است.

تجزیه مؤلفه‌های تحریک عام به مؤلفه‌های هارمونیک به یک سیستم با $\omega_n = cte$ لذا خواهیم داشت:





طبق منحنی طیف صفحه قبل داریم:

$$x(t)=\sum_{i=1}^{N}\left\{\frac{\boxed{F_i}}{k}\times\boxed{DAF_i}\right\}\sin(\omega_i t-\theta_i)$$

دامنه سری فوریه نیرو

تاریخچه زمانی پاسخ جابجایی

x_{st-i}

$H(\omega_i)$

DAF_i در فرکانس iام مورد نظر

طبق فرمول فوق، از ضرب سری فوریه نیرو در مقادیر تابع فرکانس، ضریب سری فوریه پاسخ جابجایی بدست می آید.

رویکرد دوم: فرکانس تحریک (ω) ثابت، فرکانس سیستم (ω_n) متغیر؛ فرکانس بارگذاری (تحریک) ω ثابت و فرکانس سیستم (ω_n) در بازه‌ی صفر تا بی‌نهایت در تغییر باشد.

حالات حدی: $\beta \to 0$ ، $\beta \to 1$ ، $\beta \to \sqrt{2}$ و $\beta \to \infty$.

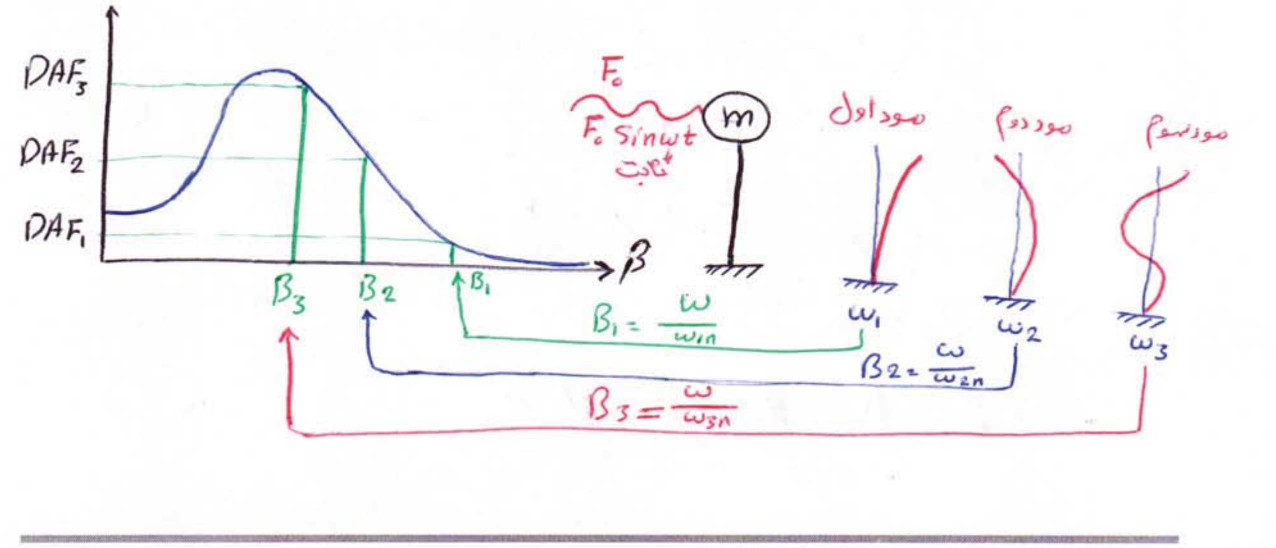
ضریب تشدید دینامیکی R_D در سیستم میرا بصورت زیر است:

$$R_D=\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}}$$

در این رویکرد یک سازه n درجه آزادی را تحت تحریک ثابت با فرکانس مشخص ω فرض کنید فرکانس های اصلی مودهای مختلف سیستم بصورت زیر (ω_{1n} ، ω_{2n} ، ω_{3n} ....، ω_{Nn}) حال با تغییر مقدار فرکانس سیستم و ثابت بودن فرکانس تحریک برای هر یک از مقادیر مختلف β_i بدست می آید:

$$\beta_i=\frac{\omega}{\omega_{in}}$$

مسائل تیپ II :



تمرین: آیا برای شکل طیف صفحه قبل می توان نوشت؟

$$x(t) = \frac{F_0}{k} \sum_{i=1}^{N} DAF_i \, \sin(\omega_i t - \theta_i)$$

جواب: خیر چرا؟ معادله درست آن چیست؟

راهنمایی: چون مقدار k سیستم ثابت نیست (k مودی سیستم) باید k_i درداخل Σ باشد.

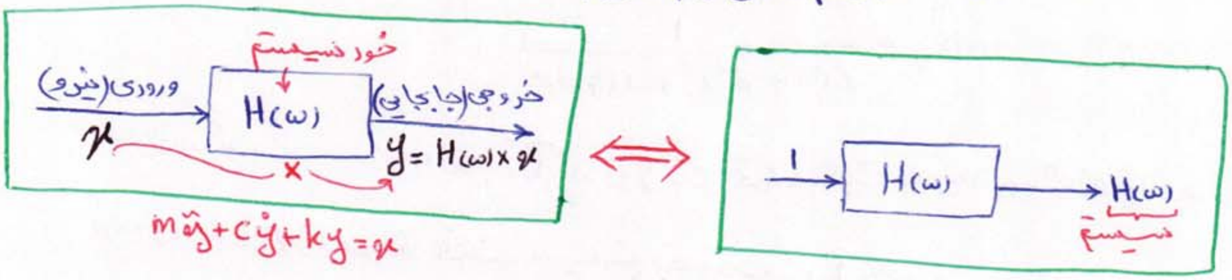
$$k_i = \omega_i^2 m_i$$

k_i: k های مودی (تعمیم یافته)

⊕ ارتباط بین DAF و $|H(\omega)|$:

$$x_{dyn} = DAF \times x_{st}$$

$H(\omega)$ عموماً x (نیرو) در محل جرم است.



نکته: با ورودی 1 خروجی خود سیستم است. مثل به رابطه $F = kx$ می باشد.

نکته: از نظر ظاهری شبیه نرمی است چون نیرو را یک می دهیم. از لحاظ عملکردی شبیه سختی است. (سختی (k) هم در حرکت معنی دارد و هم در سکون)

نکته: کل هویت سیستم است تنها سختی (k) می باشد.

نکته: } ۱- نرمی ← $1 \leftarrow \boxed{F} = kx$
۲- سختی ← $F = k\boxed{x} \rightarrow 1$

ورودی: $x_{(t)} = \overset{\text{دامنه نیرو}}{x_0} e^{i\omega t}$

خروجی: $y_{(t)} = H_{(\omega)} \times x_{(t)} = H_{(\omega)} x_0 e^{i\omega t}$

از قبل می‌دانیم (از کلاس ارتعاشات تصادفی) :

پاسخ : $y_{(t)} = y\, e^{i\omega t} = y_{st} \cdot DAF \cdot e^{i\omega t}$ (I)

اکنون از کلاس ارتعاشات داریم :

$$y_{(t)} = H_{(\omega)}\, x_0\, e^{i\omega t} \qquad \text{(II)}$$

با مقایسه روابط I و II خواهیم داشت :

$$y_{st} \cdot DAF = H_{(\omega)} \cdot x_0$$

دامنه نیرو (تحریک)

$$\Rightarrow |H_{(\omega)}| = DAF \cdot \frac{y_{st}}{x_0} = DAF \cdot \frac{\frac{\cancel{F_0}}{k}}{\cancel{x_0} = F_0} = \frac{1}{k} DAF$$

دامنه نیرو (تحریک)

x_0 : دامنه تحریک ورودی نیرو از جنس F_0

$$\boxed{|H_{(\omega)}| = \frac{1}{k} DAF}$$

■ سیستم یک درجه آزادی میرا تحت ارتعاش هارمونیک :

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin \omega t$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر m}} \ddot{x} + 2\xi\omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = \frac{F_0}{m} \sin \omega t$$

$$DAF = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \quad ; \quad H_{(\omega)} = \frac{1}{k\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

$$x_{dyn}(t) = x_{dyn} = \frac{F_0}{k} \times DAF = \frac{1}{k} DAF \times F_0 = \underbrace{|H_{(\omega)}|}_{\substack{\text{پاسخ نیروی واحد} \\ \text{RAO}}} \cdot F_0$$

$H_{(\omega)}$ عملگر دامنه پاسخ (Response Amplitude Operator)

نکته : سختی تحت نیروی واحد

نیروی واحد 1 ← $\boxed{F} = \boxed{k}\, x$

سختی تحت نیروی واحد

⊕ ارتعاشات تصادفی :

خوشتار رایج ارتعاش تصادفی : ورودی x ؛ خروجی y

برای سیستم نامیرا:

پاسخ سیستم — نیرو

$$m\ddot{y}+ky=q\ell$$

نحوه نوشتن به شیوه ارتعاش تصادفی:

پاسخ سیستم — دلتای دیراک

حین ضربه: $m\ddot{h}+kh=\underline{\delta(t)}$ (I)

$$\delta(t)=\begin{cases}1 & t=0\\ 0 & t\neq 0\end{cases}$$

$$t>0 \Rightarrow \delta(t)=0$$

چند ثانیه بعد از ضربه

ارتعاش آزاد: $m\ddot{h}+kh=0 \xrightarrow[\text{می کنیم}]{\text{بر } m \text{ تقسیم}} \ddot{h}+\omega^2h=0$

$$h(t)=A\cos\omega_n t+B\sin\omega_n t$$

$$h(0)=0 \Rightarrow A=0$$

$h(t)=B.\sin\omega_n t \longrightarrow$

از طرفین معادله (I) انتگرال می‌گیریم لذا خواهیم داشت:

$$m\int_{0^-}^{0^+}\ddot{h}\,dt+k\int_{0^-}^{0^+}h\,dt=\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)\,dt$$

$$m\dot{h}(0)+\cancel{k}h(0)=1$$

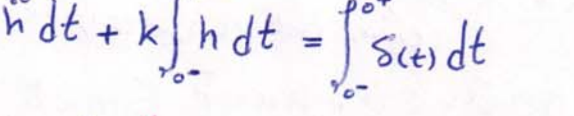
$m\dot{h}(0)=1 \Rightarrow \dot{h}(0)=\frac{1}{m}$ سرعت اولیه

$$\dot{h}(t)=B\omega_n\cos\omega_n t$$

$$\dot{h}(0)=B\omega_n \Rightarrow \frac{1}{m}=B\omega_n \Rightarrow B=\frac{1}{m\omega_n}$$

$\boxed{h(t)=\frac{1}{m\omega_n}\sin\omega_n t}$ پاسخ سیستم نامیرا تحت تحریک ضربه

ضربه در زمان $\tau=0$



نکته: مطالب این قسمت را اضافه کنید به صفحه ۹۰ کتاب مقدمه‌ای بر ارتعاشات تصادفی بند ۴-۶

تمرین : با مراجعه به کتاب های ارتعاشات تصادفی معادله $m\dot{h}(0) + k\,h(0) = 1$ را اثبات کنید؟

$$m\ddot{h} + kh = \delta(t) \quad ; \ t > 0 ,\ \delta(t) = 0$$

حل :

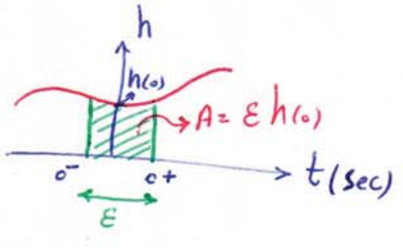
$$h(t) = \frac{1}{m\omega_n}\sin\omega_n t$$

در حین ضربه : $m\ddot{h}(t) + k\,h(t) = \delta(t)$

از طرفین انتگرال می‌گیریم $\Rightarrow m\int_{0^-}^{0^+}\ddot{h}(t)dt + k\int_{0^-}^{0^+}h(t)dt = \int_{0^-}^{0^+}\delta(t)\,dt$

$$m\dot{h}(t)\Big|_{0^-}^{0^+} + \cancel{k\,\varepsilon\,h(0)}^{0} = 1$$

$$\Rightarrow m\dot{h}(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad \dot{h}(0) = \frac{1}{m}$$

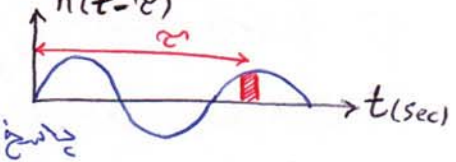


$$h(t) = \frac{1}{m\omega_n}\sin\omega_n t$$

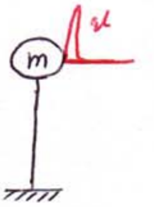
پاسخ سیستم نامیرا تحت تحریک ضربه

$$h(t-\tau) = \frac{1}{m\omega_n}\sin\omega_n(t-\tau)$$

پاسخ سیستم در برابر ضربه در لحظه $t = \tau$

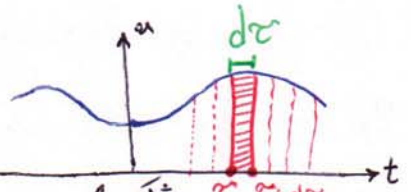


انتگرال دوهامل :



- تحریک دلخواه (نیرو در محل جرم) :

نیرو را با x نشان می دهیم.



شکل A

$h(t)$: تابع پاسخ ضربه، پاسخ سیستم در زمان t به علت ضربه‌ی واحد در زمان $t=0$ است. هم چنین معلوم است که $h(t-\tau)$ پاسخ در زمان t به علت ضربه‌ی واحد در زمان τ است. اکنون یک تحریک دلخواه $x(t)$ را بصورت را بصورت ترکیبی از ضربه های کوچک پشت سرهم بین τ و $\tau + d\tau$ مطابق شکل A در نظر بگیرید.

ضربه‌ی بین τ و $\tau + d\tau$ دارای مقداری مساوی $x(\tau)d\tau$ است که در شکل A با هاشور نشان داده شده است. پاسخ در زمان t به این ضربه، کسر $\frac{x(\tau)d\tau}{1}$ از پاسخ تحت ضربه‌ی واحد در زمان $t = \tau$ است :

$$h(t-\tau)\,x(\tau)\,d\tau$$

به علت خطی بودن سیستم می‌توان از اصل برهم نهی Super-Position برای تعیین پاسخ $y(t)$ استفاده کرد:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t} h(t-\tau)\,x(\tau)\,d\tau \qquad \text{Ⓐ}$$

به این صورت می‌توان پاسخ سیستم را تعیین کرد. به این رویکرد در ریاضیات، تلفیق Convolution و در دینامیک سازه‌ها، انتگرال دوهامل گفته می‌شود. تلفیق عملی روی دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ است که منجر به تولید تابع سومی می‌شود که با $(f*g)(x)$ نشان داده می‌شود:

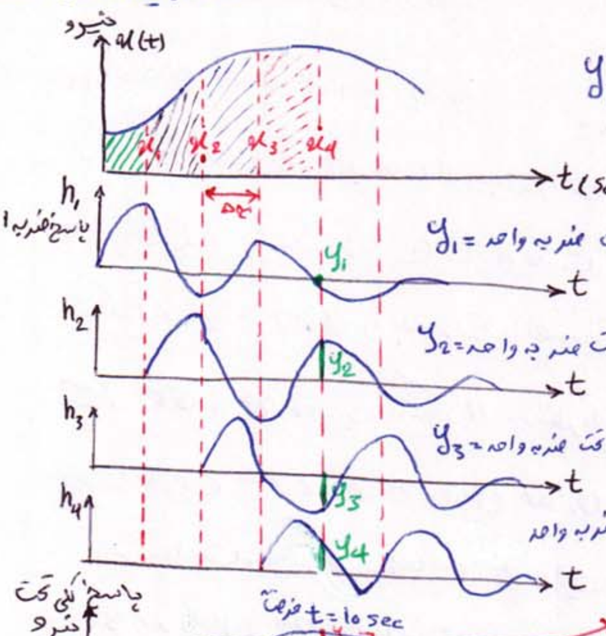
$$(f*g)_{(x)}=\int_{-\infty}^{\infty} f_{(x-y)}\,g_{(y)}\,dy$$

این انتگرال در تحلیل سازه‌ها به نام انتگرال برهم نهی Super-Position است. این انتگرال مهم‌ترین رابطه برای پاسخ سیستم خطی است، به شرط آن که سیستم Passive باشد یعنی پاسخ آن فقط به تحریک‌های گذشته Past وابسته باشد وضمناً $h(t)$ سرانجام به سمت تعادل استاتیکی برود.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| < \infty$$

در آن صورت معادله Ⓐ پاسخ سیستم تحت هر تحریک $x(t)$ است که مقدار $|x(t)|$ بین دو مرز مشخص کران‌دار، محدود باشد.

نکته: $y_1 =$ سطح سبزرنگ × پاسخ تحت ضربه واحد (در نقطه $t=10sec$)



$y_1 =$ پاسخ تحت ضربه واحد × مقدار نیرو ضربه $= h(t-\tau)\{x_1(\tau)\Delta\tau\}$

$y_2 =$ پاسخ تحت ضربه واحد × مقدار نیرو ضربه $= h(t-\tau)\{x_2(\tau)\Delta\tau\}$

$y_3 =$ پاسخ تحت ضربه واحد × مقدار نیرو ضربه $= h(t-\tau)\{x_3(\tau)\Delta\tau\}$

پاسخ تحت ضربه واحد × مقدار نیرو ضربه $= h(t-\tau)\{x_4(\tau)\Delta\tau\}$

پاسخ در لحظه t $= \sum_{i=1} y_i = \sum_{i=1}^{4} h(t-\tau)\{x_i(\tau)\Delta\tau\}$

$= \int_{-\infty}^{t} h(t-\tau)\,x(\tau)\,d\tau$

سوال ، براساس دربیت جلسه اول انتگرال دوهامل را می توان چه نامید؟ انتگرال دوهامل شمارش (جمع) می باشد.

تمرین : تست شماره ۱۰ صفحه ۸۱۰ کتاب مهندسی زلزله را حل کنید؟

تمرین : فصل ارتعاش ممتد در سیستم پیوسته را از یک کتاب دینامیک سازه ای مطالعه کرده و خلاصه نویسی گردد؟

تمرین : تست شماره ۱۶ کتاب مهندسی زلزله دکتر تابش پور را حل کنید، و آن را مجدداً با نصف کردن مدت زمان تحریک دوباره حل کنید؟

تمرین : تست شماره ۱۶ را برای تحریک مستطیلی با مدت تحریک $t=0.2_{sec}$ حل کنید؟

تمرین : حل سه مسئله قبل را با هم مقایسه کنید؟ (مقایسه متفکرانه و دو به دو با هم)

تمرین : تست شماره ۴۱ ص ۸۲۰ کتاب مهندسی زلزله را حل نمائید؟

تست ۱۸ کتاب مهندسی زلزله را با دقت بخوانید و آن را بررسی نمائید؛
تست ۱۹ کتاب مهندسی زلزله درخصوص پدیده ضربان Beating (فرکانس سیستم با فرکانس تحریک اندکی اختلاف داشته باشد) را نشان می دهد.

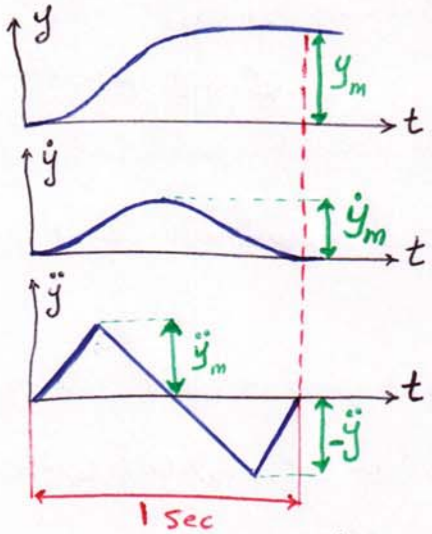
تمرین : تفاوت پدیده Beating (پدیده ضربان) در دو سیستم میرا و نامیرا را با یکدیگر مقایسه نموده با رسم شکل و معادلات مربوط به هرکدام از سیستم ها؟

تمرین اختیاری: مسئله ص ۵۸ ، ص ۶۰ و ص ۶۲ کتاب دانشنامه ۳ دکتر تابش پور را حل نمائید؟

تمرین : تست ۲۳ کتاب مهندسی زلزله دکتر تابش پور را حل نمائید؟

تمرین : تست ۲۳ کتاب مهندسی زلزله را فقط با عوض کردن گزینه ۳ (جای T_1 و T_2 عوض شود) را مجدداً حل نمود و نکات مهم را بصورت متفکرانه بیان نمائید و با تست ۲۳ کتاب مهندسی زلزله مقایسه نمائید؟

تمرین : کتاب ۲۵ صفحه ای نیومارک هال را حدوداً در مدت یک ساعت با دقت قابل قبول مطالعه نمائید؟



شکل صفحه ۴۱ کتاب نیومارک هال
Earthquake Spectra and Design
N.M. NEWMARK
W.J. HALL

☐ فرکانس حوزه نزدیک:

حوزه نزدیک (Near field)

فیزیک حوزه نزدیک به گونه‌ای است که پالس در پایه (بصورت تحریک پالس پایه یا همان سرعت در پایه) است. به این جابجایی ماندگار زمین گفته می‌شود.

زلزله حوزه نزدیک حل مسئله تیپ چهارم (تحریک پالسی در پایه) یا همان سرعت در پایه است.

☐ انواع مسائل مطرح در دینامیک سازه‌ها:

۱- تیپ ۱ (I): نیروی هارمونیک در محل جرم
۲- تیپ 2 (II): جابجایی هارمونیک در پایه (پالیز و در پایه)
۳- تیپ 3 (III): پالس تایپ در جرم (مانند انفجار)
٤- تیپ 4 (IV): پالس تایپ در پایه (مانند زلزله حوزه نزدیک) ← از نوع سرعت

اکنون می‌خواهیم بسراغ روش حل مسائل تیپ $\boxed{IV}$ برویم:

چگونه طیف تیپ III و IV را بدست می‌آوریم؟

نکته: اخیراً در چاپ آئین‌نامه ۲۸۰۰ ویرایش ۴ حوزه نزدیک با ادبیات ضریب اصلاح وارد شده است.

تمرین: فصل ۴ کتاب تامسون را با دقت بخوانید؟

☐ در سیستم میرا:

- معادله حرکت با ادبیات رایج در ارتعاشات تصادفی در سیستم میرا:

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = x$$

* مطالب این قسمت به صفحه ۹۶ کتاب مقدمه‌ای بر ارتعاشات تصادفی اضافه می‌شود.

اکنون خواهیم داشت:

$$m\ddot{h} + c\dot{h} + kh = \delta(t)$$

$$h(t-\tau)=\frac{1}{m\omega_D}e^{-\xi\omega_n(t-\tau)}\sin(\omega_D(t-\tau))$$

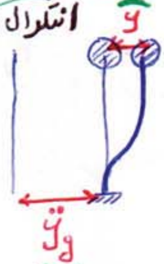
$$\omega_D=\omega_n\sqrt{(1-\xi^2)}$$

$$y(t)=\frac{1}{m\omega_n}\int_0^t x(\tau).\sin(\omega_n(t-\tau))\,d\tau \rightarrow$$ معادله حرکت حالت نامیرا

$$y(t)=\frac{1}{m\omega_D}\int_0^t e^{-\xi\omega_n(t-\tau)}.\underline{x(\tau)}\sin(\omega_D(t-\tau))\,d\tau \quad ①$$ انتگرال دوهامل

حال اگر:

$$m\ddot{y}+c\dot{y}+ky=-m\ddot{y}_g$$



با جایگذاری $x(\tau)=-m\ddot{y}_g$ در معادله ① خواهیم داشت:

$$\Rightarrow y_{(t)}=\frac{1}{\cancel{m}\omega_D}\int_0^t(-\cancel{m}\ddot{y}_g)\,e^{-\xi\omega_n(t-\tau)}.\sin(\omega_D(t-\tau))\,d\tau$$

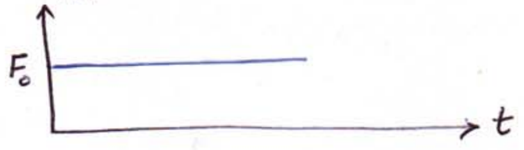
$$y_{(t)}=-\frac{1}{\omega_D}\int_0^t\ddot{y}_g\,e^{-\xi\omega_n(t-\tau)}.\sin(\omega_D(t-\tau))\,d\tau$$

نکته: کاربرد: توابع غیرهارمونیک ضربه را می‌توانیم با این معادله به خوبی حل کرد.

⌗ طیف ضربه (III , V):

برای کاربردهای حل مسائل: ۱- بار انفجار ۲- زلزله حوزه نزدیک

☐ برای سیستم نامیرا:

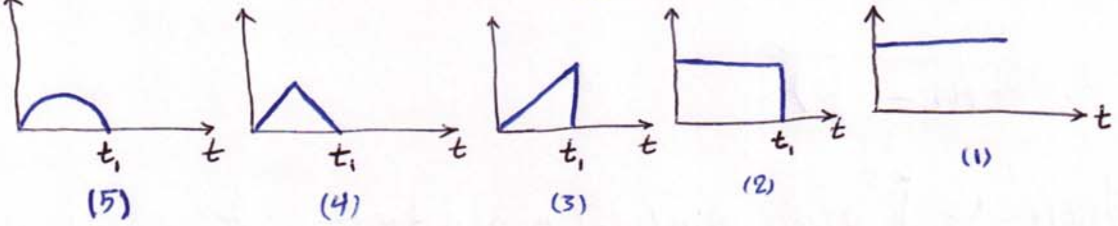


$$h(t)=\frac{1}{m\omega_n}\sin\omega_n t$$

$$x(t)=\frac{F_0}{m\omega_n}\int_0^t\sin\omega_n(t-\tau)\,d\tau$$

$$\Rightarrow=\frac{F_0}{K}(1-\cos\omega_n t)$$

طبق جدول ۴.۲.۱ کتاب تامسون داریم:



نکته: مقدار DAF_{max} حالت (۱) برابر ۲ می‌باشد.

$$DAF_{max_1}=2$$

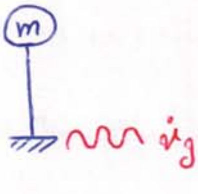
نکته: مطابق شکل برای حالت‌های (2) تا (5) مقدار $DAF_{max}<2$ می‌باشد.

نکته: مطابق شکل وضعیت بحرانی حالت‌های مختلف بارگذاری $(1)>(2)>(3)>(4)>(5)$ می‌باشد.

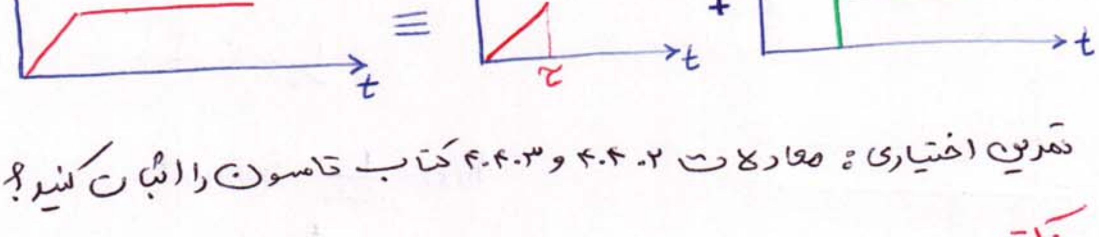
تمرین: مطلوب است محاسبه معادله ۴.۲.۳ کتاب تئوری ارتعاشات با کاربردهای آن تألیف تامسون ص ۱۰۸ با استفاده از انتگرال دوهامل اثبات نمائید؟

$$x=\frac{F_0}{k}\left[1-\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cos(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t-\psi)\right],\quad \tan\psi=\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

نکته: در زلزله های حوزه نزدیک:

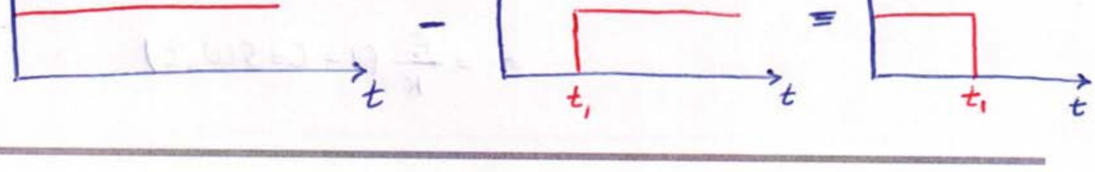


نکته:

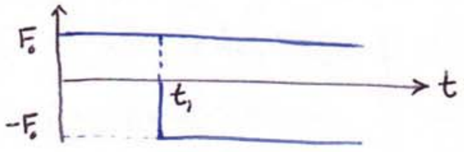


تمرین اختیاری: معادلات ۴.۴.۲ و ۴.۴.۳ کتاب تامسون را اثبات کنید؟

نکته:



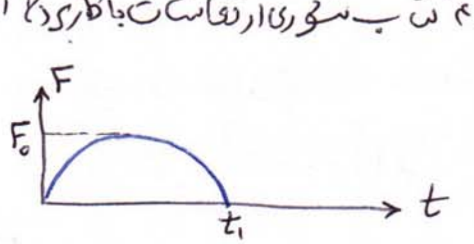
تمرین: مطابق شکل ۳-۴۴ کتاب تئوری ارتعاشات با کاربردهای آن تالیف تامسون معادله ۶-۴-۴ در صفحه ۱۱۵ را اثبات کنید؟



$$\frac{ku}{F_0}=\left\{(1-\cos\omega_n t)-(1-\cos\omega_n(t-t_1)\right\}$$

$$=-\cos\omega_n t+\cos\omega_n(t-t_1)\,,\ t>t_1$$

تمرین: مطلوب است محاسبه معادله ۱۰-۴-۴ کتاب تئوری ارتعاشات با کاربردهای آن تالیف تامسون صفحه ۱۱۶ را اثبات کنید؟

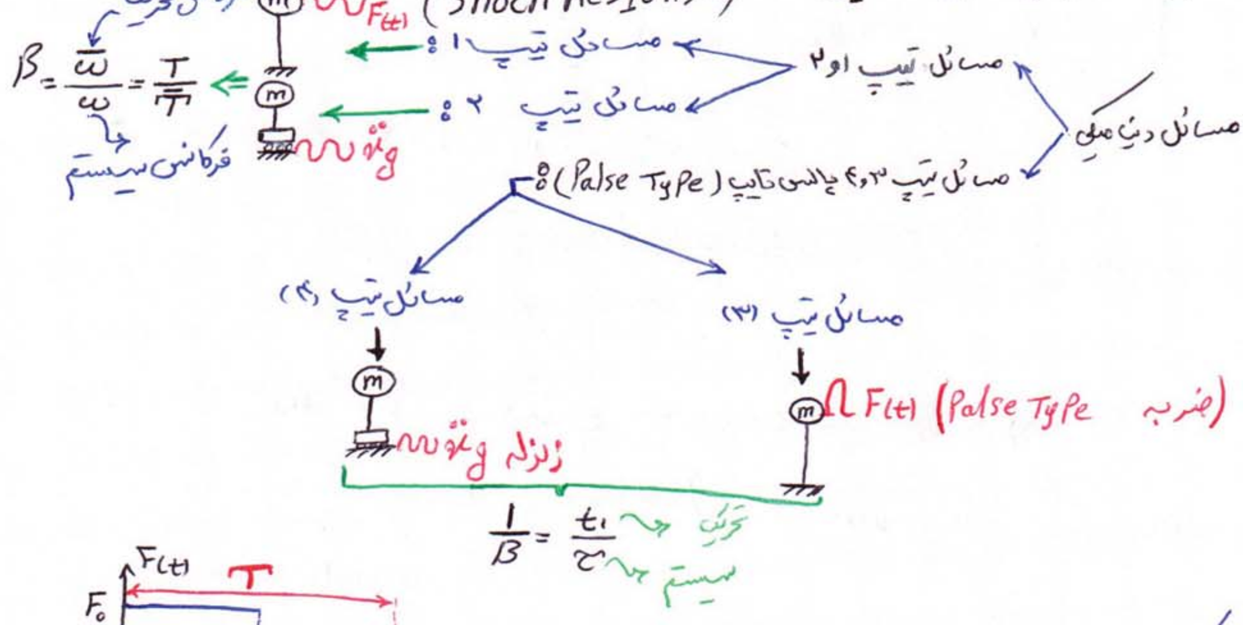


$$\frac{ku}{F_0}=\frac{-P/\omega_n}{1-(P/\omega_n)^2}\sin\omega_n t+\frac{1}{1-(P/\omega_n)^2}\sin Pt$$

$$=\frac{1}{\frac{\tau}{2t_1}-\frac{2t_1}{\tau}}\left[\sin\frac{2\pi}{\tau}t-\left(\frac{2t_1}{\tau}\right)\sin\frac{\pi t}{t_1}\right]\quad t<t_1$$

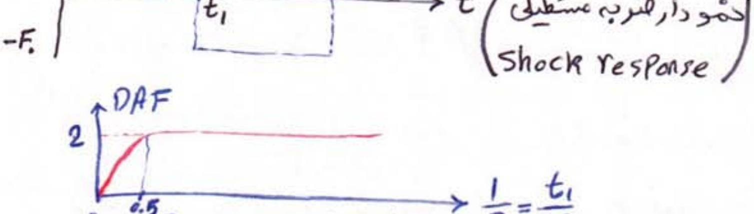
نکته: جهت مدل سازی زلزله های حوزه نزدیک از half_sin Pulse استفاده می کنیم.

طیف ضربه پالس مستطیلی (shoch Response)



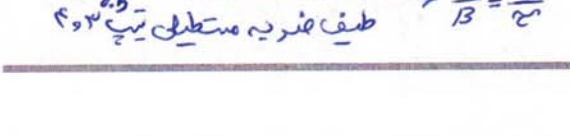
$$\beta=\frac{\bar{\omega}}{\omega}=\frac{T}{\bar{T}}$$

$$\frac{1}{\beta}=\frac{t_1}{\tau}$$

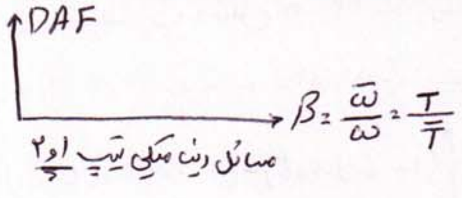


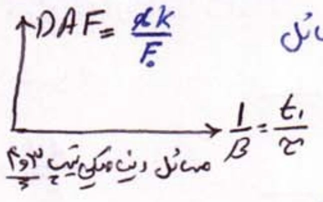
$$t_1=\frac{T}{2}$$ تحریک

$$\frac{1}{\beta}=\frac{t_1}{\tau}$$



نکته:
t_1: نصف پریود تحریک
τ: پریود سیستم





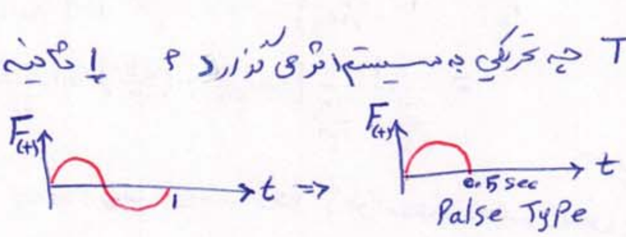
تذکر: تفاوت مسائل تیپ ۳و۴ (ضربه) با مسائل تیپ ۱و۲ در نسبت $\frac{1}{\beta}=\frac{t_1}{\tau}$ می باشد

نکته: upper bond ضریب تأثیر حوزه نزدیک ۲ است که در آیین نامه‌ها ۵ را لحاظ می شود.

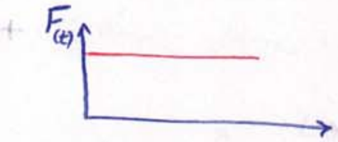
تمرین: مسیر لازم را برای رسیدن به شکل ۴-۵ ۴ کتاب تئوری ارتعاشات با کاربردهای آن تألیف تامسون را طی کنید؟

☐ نکته: یک سیستم داریم با T=1s چه تحریکی به سیستم اثر می گذارد؟ ½ ثانیه

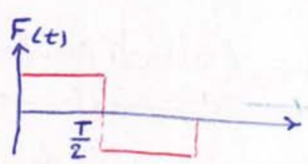
حالت الف)



حالت ب)



$DAF_{max}=2$;



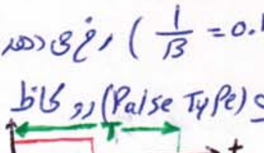
* به عنوان مثال 2sec هارمونیک، ۱ ثانیه پالسی می باشد.

نکته: بحرانی ترین حالتی که سیستم مجال پیدا نمی کند چه می باشد؟ در واقع δ(t) (دلتای دیراک) می باشد، لذا پاسخ از صفر شروع می شود.

نکته: رزونانس معادل مسائل تیپ ۳و۴ در $\frac{1}{\beta}=0.5$ رخ می دهد که از جنس $\beta=1$ می باشد.

نکته: در مسائل استاتیک $DAF=1$ می باشد. و در مسائل دینامیکی DAF کمتر از یک هم وجود دارد.

نکته: در مسائل تیپ ۳و۴ (مسائل Palse Type) ماکزیمم مقدار جابجایی سیستم در DAF رخ می دهد. مقدار (DAFmax) بایستی در منحنی طیف در حدود ($\frac{1}{\beta}=0.5$) رخ می دهد. که این عدد 0.5 در واقع همان $\beta=1$ می باشد (چون کل پریود تحریک (Palse Type) رو لحاظ نمی کنیم. مدت تحریک در مسائل تیپ ۳و۴ نصف مدت تحریک در نظر گرفته می شود لذا مقدار DAF_{max} در طیف Palse Type در 0.5 رخ می دهد.

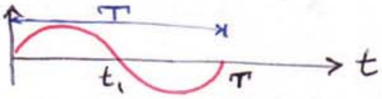


$t_1=\frac{T}{2}$

تمرین: توجیه فیزیکی بیاورید که چرا برخلاف شکل ۴-۵-۴ که مقدار ماکزیمم (عدد ۲) دقیقاً در ۰/۵ رخ می‌دهد، ولی در شکل ۴-۵-۵ مقدار ماکزیمم (عدد کمتر از ۲) در ۰/۵ رخ می‌دهد. (طبق کتاب تئوری ارتعاشات با کاربردهای آن تألیف تامسون ص ۱۱۴) ؟

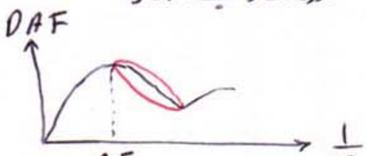
تمرین: چرا مقدار ماکزیمم پاسخ شکل ۴-۵-۴ از ماکزیمم پاسخ شکل ۴-۵-۵ کمتر است (طبق کتاب تئوری ارتعاشات با کاربردهای آن تألیف تامسون ص ۱۱۶) ؟

نکته: چرا در پالس نیم سینوس پس از آنکه طیف $(1/\beta)$ به مقدار max خود می‌رسد کاهش پیدا می‌کند؟ در مسائل تیپ ۳ و ۴



$T = 2\,sec \quad , t_1 = \frac{T}{2} = 1\,sec$

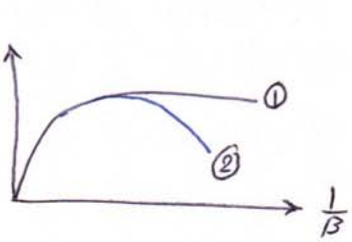
τ_1 دوره تناوب سازه



$\Rightarrow$

هرچه پریود بیشتر می‌شود از رزونانس (تشدید) دوری می‌شویم.

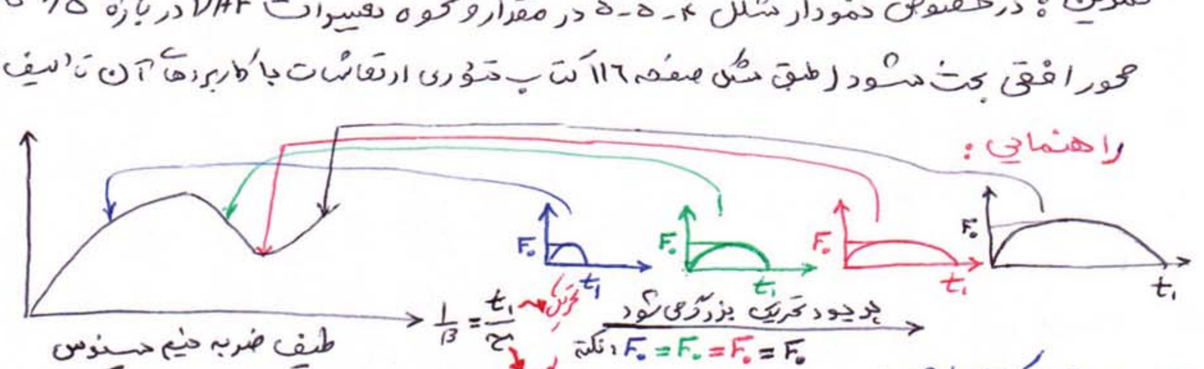
$$\beta_i < \beta = 1 < \beta_j \Rightarrow DAF_i = |DAF_j| < DAF_{max}$$



تمرین: در تفاوت ماهوی DAF دو بخش ۱ و ۲ بحث شود (طیف ضربه مستطیلی و نیم سینوسی) طبق شکل ۴-۵-۴ و ۴-۵-۵ کتاب تامسون ص ۱۱۴

تمرین: در خصوص نمودار شکل ۴-۵-۵ در مقدار و نحوه تغییرات DAF در بازهٔ ۰/۵ تا ۲/۵ روی محور افقی بحث شود (طبق شکل صفحه ۱۱۶ کتاب تئوری ارتعاشات با کاربردهای آن تألیف تامسون)؟

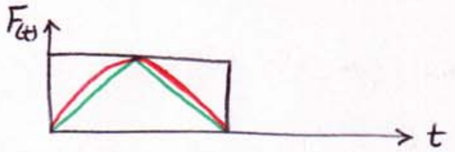
راهنمایی:



* سازه تحت یک Palse Type با پریود تحریک مختلف قرار می‌دهیم. در پریودهای بزرگ و نیروی پالس بزرگ به

سازه اعمال می‌شود. این نیرو مشابه این است که سازه را (Palse Type های بزرگ) با خودش می برد.

تمرین : چرا مقدار upper Pand (آپر باند) مربوط به ضربه مثلثی کمتر از ضربه سینوسی می باشد؟



راهنمایی :

نکته : پدیده زلزله به بار حدوداً مثلثی (ضربه مثلثی) نزدیک تر است.

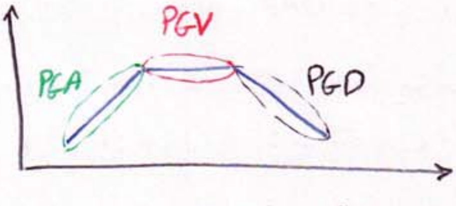
تمرین : فصل ٦ کتاب مهندسی زلزله را مرور نمایید؟

تمرین : مسائل تکمیلی فصل ٦ کتاب مهندسی زلزله دکتر تابش پور را بررسی نمایید؟

تمرین : صفحه ۲۹۸ کتاب مهندسی زلزله درخصوص انتگرال دوهامل خوانده شود؟

تمرین با مراجعه به کتاب "structural dynamics of earthquake engineering" مولف S. Rajasekaran متناظر با صفحه ۳۰۲ کتاب مهندسی زلزله شکل طیف تحریک پالس نیم سینوسی را رسم نمایید؟

تمرین : مسئله ۴-٦-۵٠ ص ۳۳۹ کتاب مهندسی زلزله با روش انتگرال دوهامل حل نمایید؟



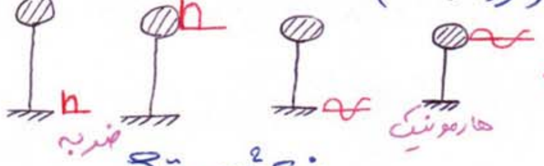
تمرین : مسائل فصل ۷ صفحات ۳۷۴ تا ۴٠۹ با دقت بخوانید؟

تمرین : با توجه به ص ۳۷۹ کتاب مهندسی زلزله حداقل دو نکته را بیان کنید که در کلاس بحث نشده است؟

جلسه ۴ مورخ ۹۴،۲،۴

ارتعاشات تصادفی:

در ارتعاشات تصادفی (چیستی پارامترهای لرزه‌ای، تولید رکورد تصادفی، مبانی و مقدمات روبرو می‌شویم (اصلاح رکورد، مقایسه کردن رکورد و ...)



طیف پاسخ ۳ رویکرد:

۱- ارتعاشات کلاسیک (DAF) ⇐

۲- ارتعاشات تصادفی: $S_{\ddot{u}}$، $S_{\dot{u}}$، S_u

$S_{\ddot{u}} = \omega^2 S_{\dot{u}}$

$S_{\ddot{u}} = \omega^4 S_u$

$S_{\dot{u}} = \omega^2 S_u$

مربع دامنه (انرژی)

۳- مهندسی زلزله: S_a، S_v، S_d

$S_a = \omega^2 S_d = \omega S_v$

آمار:

- میانگین: متوسط داده‌ها

- واریانس: پراکندگی یا فاصله تا میانگین را نشان می‌دهد.

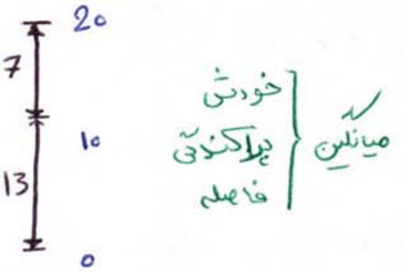
- آمار مهندسی: علم تعیین مقادیر میانگین و پراکندگی حول میانگین می‌باشد.

تذکر: با توجه به اینکه در تمام مطالعات همهٔ موجودات و پدیده‌ها را بررسی نمی‌کنیم و یک تعدادی را بررسی می‌کنیم. پس برای تعمیم آن به علم **آمار** نیاز است.

علم آمار دو کار می‌کند: خواص میانگین و پراکندگی در نمونه را بررسی کرده و با یک حاشیه اطمینان آن را به کل نسبت می‌دهد. این اطلاعات شامل ابزار تعمیم‌گیری، توزیع و بودجه‌بندی می‌باشد.

نکته: نگاه از جزء به کل (استقرایی)

نمونه:



۱- در نمونه، میانگین‌گیری چرا اهمیت دارد؟

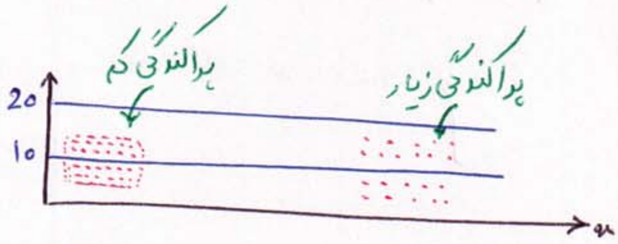
خود میانگین به نحوی پراکندگی را هم نشان می‌دهد.

چون فاصله از صفر تا مرزها را هم نشان می‌دهد.

۲- برای نمونه، میانگین گیری چرا اهمیت دارد؟

پراکندگی حول میانگین است. } σ^2 : واریانس (از جنس مربعات)
σ : انحراف معیار

تذکر: اگر یک معیار را بخواهیم بررسی کنیم، فقط میانگین است، آیتم دومی که سراغ آن می‌رویم پراکندگی می‌باشد.



$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}$$

تعداد داده‌ها

تذکر: اگر واریانس را به n تقسیم نکنیم، نرمال نمی‌شود. چون ممکن است تعداد دو نمونه متفاوت باشد، پس قابل مقایسه نمی‌شود.

لذا به همان دلیلی که $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$ بر n تقسیم شود باید $\sigma^2 = \frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n}$ هم تقسیم گردد. (نرمال شدن)

نکته: واریانس هم نوعی میانگین است.

واریانس: میانگین فاصله از میانگین

نکته: چرا واریانس بر n تقسیم می‌شود. $\sigma^2 = \frac{(x_i-\bar{x})^2}{n}$

جواب: به خاطر پراکندگی و همسان سازی بر n تقسیم می‌کنیم. (برای آنکه قابل مقایسه باشد)؛ لذا به همان دلیل که متوسط $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ بر n تقسیم می‌شود واریانس هم تقسیم بر n می‌شود.

میانگین ← میانگین خود داده‌ها ← میانگین
میانگین ← فاصله داده‌ها تا میانگین ← واریانس

نکته: توان ۲ در واریانس بخاطر آن است که مقدار آن صفر نشود. $\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})}{n}=0\right)$

آمار احتمال $\equiv$ میانگین گیری

- نمونه گیری به این دلیل است که برای کل جامعه به زمان و هزینه زیادی احتیاج دارد.

☐ تست کششی فولاد: یک میلگرد با فولاد نرمه کم کربن St57 را تحت کشش قرار می دهیم.

$\sigma_y = 2340$

$\sigma_y = 2450$

$\sigma_y = 2420$

$\sigma_y = 2610$ max

⋮

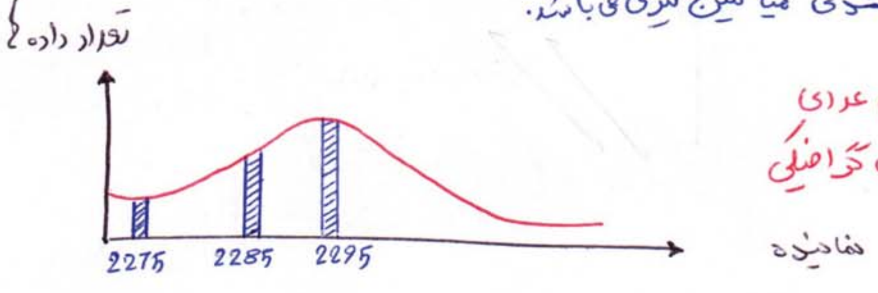
$\sigma_y = 2291$ min

$\bar{x} = \frac{\sum x}{N}$

دسته بندی	تعداد داده ها	نماینده (میانگین طبقه)	تعداد x میانگین
$x_i < 2280$	1		
$2280 < x_i < 2290$	4	2285	4x2285
$2290 < x_i < 2300$	8	2295	8x2295
⋮	⋮	⋮	⋮
$2600 < x_i < 2615$	2		

اشکالات جدول فوق حجم محاسبات زیاد است.

فلسفه دسته بندی میانگین گیری می باشد.



نمایش عددی

نمایش گرافیکی

احتمال اینکه داده ها کمتر از عددی باشد از این نمودار باید انتگرال گرفت.

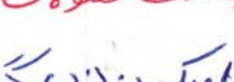
$$\int_{-\infty}^{\text{عدد مورد نظر}} \bigcirc = P(x_i < \text{عدد مورد نظر})$$

در نمودار فوق الذکر میانگین در قله قرار می گیرد.

این محاسبات برای بیمه، گارانتی و جواب تست محصولات کاربرد دارد.

☐ ارتعاشات: حرکت سازه تحت بارهای دینامیکی (زلزله) گفته می شود.

ارتعاشات:
- تصادفی (باد، موج، زلزله)



دو جنبه تصادفی ⇐
- احتمال رخداد
- فرم تحریک

- معین

بیشتر همان حالت اول مد نظر می باشد.

فلسفه طیف: جهت ساده سازی پیچیدگی ها، احتمالات و عدم قطعیت ها از طیف استفاده می کنیم.

تعریف ارتعاشات تصادفی:

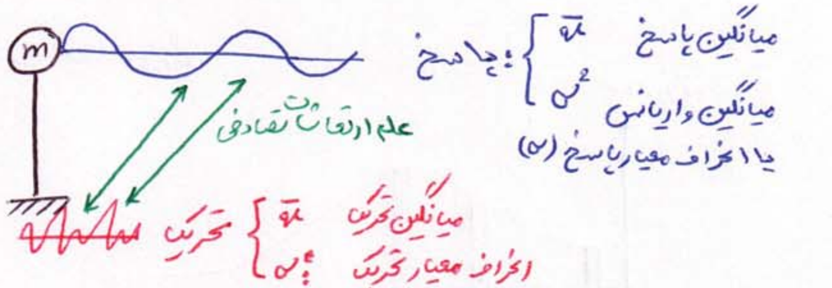
اگر حرکت ارتعاشی یک سیستم، قابل پیش‌بینی نباشد، به آن ارتعاشی تصادفی گفته می‌شود.

بررسی و تعیین وابستگی خصوصیات آماری پاسخ سیستم به خصوصیات آماری تحریک (مانند باد، موج و زلزله) و خواص ارتعاشی سیستم (مانند جرم، سختی و میرایی).

تذکر: یادآوری می‌کنیم که خواص آماری هم عبارتند از میانگین و واریانس (پراکندگی). در تئوری ارتعاشات تصادفی رابطه بین میانگین و واریانس تحریک با میانگین و واریانس پاسخ مورد بررسی قرار می‌گیرد.

ارتعاشات تصادفی ≡ ارتباط بین میانگین تحریک با میانگین پاسخ

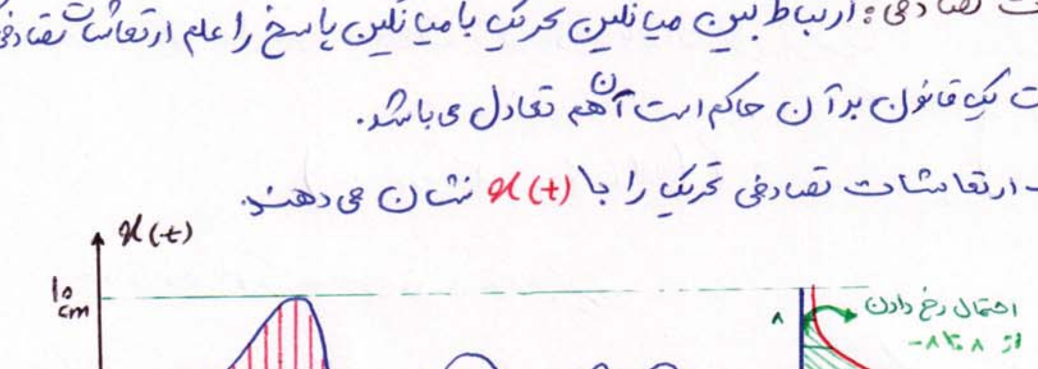
نکته: به عنوان یک قانون کلی می‌توان گفت که هیچ اتفاقی در طبیعت، تصادفی نیست.



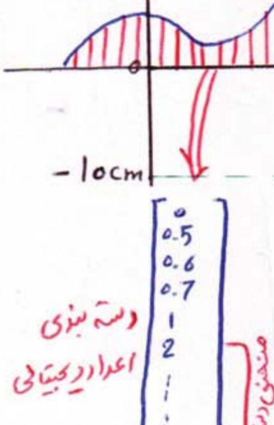
علم ارتعاشات تصادفی: ارتباط بین میانگین تحریک با میانگین پاسخ را علم ارتعاشات تصادفی گویند.

تذکر: طبیعت یک قانون بر آن حاکم است آن هم تعادل می‌باشد.

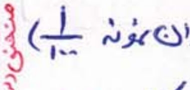
نکته: در کتب ارتعاشات تصادفی تحریک را با $x(t)$ نشان می‌دهند.



منحنی توزیع احتمال (چگالی احتمال)



دیجیتالی کردن، یک تابع را بصورت یک رشته اعداد درمی‌آوریم یا همان گسسته‌سازی یا رشته‌ای کردن (مطابق بردار مقابل از روی نمودار در فواصل Δt به عنوان نمونه $\frac{1}{100}$) به عبارتی تحریک (منحنی فوق‌الذکر) را به Δt تقسیم می‌کنیم که به این کار



⇐ منحنی توزیع احتمال

دیجیتالی کردن گوشیم (برای برداری یا رشته‌ای کردن تحریک).

تذکر: منحنی اعداد دیجیتالی شده را °90 دوران داده تا صفر و بیشینه‌ها روی منحنی قرار گیرد مطابق شکل صفحه قبل با این منحنی، منحنی توزیع احتمال یا چگالی احتمال گفته می‌شود.

☐ تعریف جامع علم ارتعاشات تصادفی:

ارتباط بین واریانس تحریک و واریانس پاسخ می‌باشد.

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i + \cancel{\bar{x}})^2}{n} = \frac{\sum x_i^2}{n}$$ واریانس

چون میانگین مطابق نمودار صفحه قبل صفر می‌شود باید میانگین مربعات را گرفت تا تحریک صفر نباشد (میانگین دامنه)

- تعریف جامع ارتعاشات تصادفی:

ارتباط بین مربعات تحریک با مربعات پاسخ می‌باشد.

به عنوان مثال:

4 مربع پاسخ	100 مربع تحریک
2 پاسخ	10 تحریک

ابتدا ۲ حزکار ارتعاشات تصادفی را توضیح می‌دهیم.

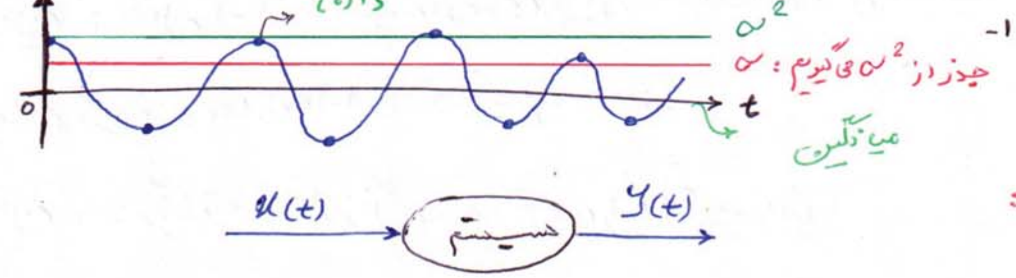
$\bar{x} = \mu = 0$ میانگین

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2}{N} = \frac{\sum x_i^2}{N}$$

$E[x] = \mu$ اِسپکتِید وَلیو

$\mu = 0$

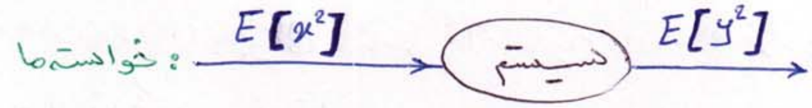
$E[x^2] = \sigma^2$ واریانس



نکته ۱: -

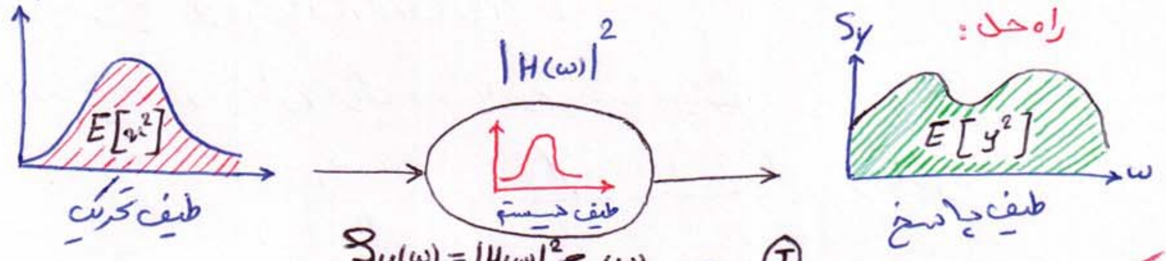
نکته ۲:

□ ارتعاشات تصادفی:



چه کنیم که این خواسته ها در ارتعاشات تصادفی محقق شود؟

راه حل:



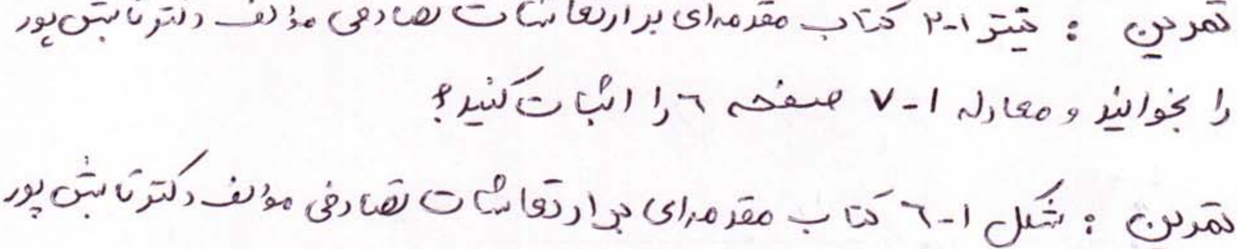
$$S_y(\omega) = |H(\omega)|^2 S_x(\omega) \quad (I)$$

نکته: چرا از مربعات استفاده می کنیم در ارتعاشات؛ چون اگر x ها باهم جمع شوند $\bar{x}$ صفر می شود لذا در ارتعاشات از مربعات استفاده می کنیم.

نکته: سطح زیر منحنی طیف تحریک و پاسخ به ترتیب $E[x^2]$ و $E[y^2]$ را به ما می دهد.

اگر از رابطه (I) انتگرال بگیریم خواهیم داشت

$$\int S_y(\omega) = \int |H(\omega)|^2 S_x(\omega)$$

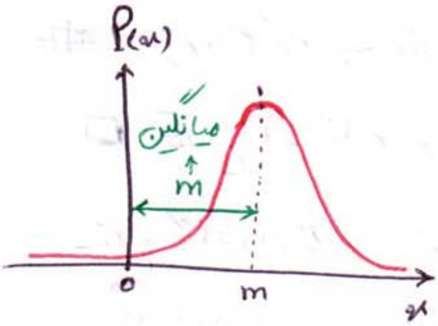


تمرین: تیتر ۱-۲ کتاب مقدمه ای بر ارتعاشات تصادفی مؤلف دکتر تابش پور را بخوانید و معادله ۱-۷ صفحه ۶ را اثبات کنید؟

تمرین: شکل ۱-۶ کتاب مقدمه ای بر ارتعاشات تصادفی مؤلف دکتر تابش پور را رسم کرده و معادله ۱-۱۰ را توضیح دهید؟

تمرین، ده نکته مهم از زندگی خانم گوسی را یادداشت نمائید؟

☐ توزیع نرمال (توزیع گوسی):



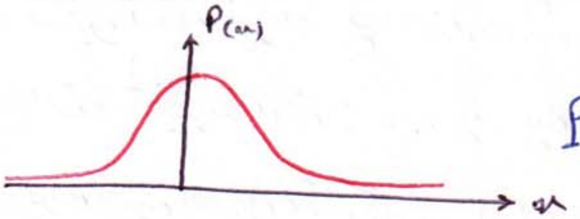
تعداد زیادی از پدیده‌های ارتعاش تصادفی مطابق شکل مقابل تابع چگالی احتمال زنگوله‌ای شکل دارند به آن تابع چگالی احتمال گوسی یا نرمال نیز گویند.

این تابع بصورت زیر می‌باشد

$$P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-m)^2/(2\sigma^2)}$$

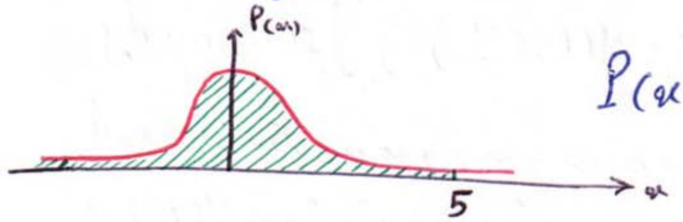
m و σ مقادیر ثابتی هستند.

if : $m = 0$



$$P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/(2\sigma^2)}$$

نکته: احتمال اینکه x کمتر از ۵ باشد را نشان دهید؟



$$P(x \leq 5) = \int_{-\infty}^{5} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}$$

تمرین: رابطه ۱-۱۹ کتاب مقدمه‌ای بر ارتعاشات تصادفی مولف دکتر تابش پور را اثبات کنید؟

$$\sigma^2 = E[x^2] - (E[x])^2$$

واریانس = مربع انحراف معیار = میانگین مربعات − مربع میانگین

تمرین: روابط زیر را مطابق داشته‌های کتاب مقدمه‌ای بر ارتعاشات تصادفی اثبات کنید؟

$$\overbrace{E[x]}^{\text{آمار}} = \int x \overbrace{P(x)}^{\text{احتمال}} dx$$

$$E[x^2] = \int x^2 P(x)\, dx$$

نکته: آمار همان احتمال و احتمال همان آمار است.

فصل دوم کتاب مقدمه‌ای بر ارتعاشات تصادفی (دکتر تابش‌پور)

☐ توزیع احتمال دوتایی، میانگین «چند رکورد»

- تابع چگالی احتمال مرتبه دوم:

با استفاده از تابع چگالی احتمال مرتبه اول $P(x)$ می‌توان احتمال آن که متغیر تصادفی بین x و $x+dx$ باشد محاسبه کرد. این احتمال مساوی $P(x)\,dx$ است.

تابع چگالی احتمال مرتبه دوم $P(x,y)$ مانند قبل تعریف می‌شود فقط به جای یک متغیر، از دو متغیر x و y استفاده می‌شود. احتمال آن که متغیر تصادفی x بین x و $x+dx$ باشد و متغیر تصادفی y بین y و $y+dy$ باشد مساوی $P(x,y)\,dx\,dy$ است.

برای تعیین احتمال مشترک که $x(t_0)$ و $y(t_0)$ بین باند محدودی از مقادیر x و y باشد بصورت زیر است:

$$\mathrm{Prob}(x_1\leqslant x(t_0)\leqslant x_2 \text{ and } y_1\leqslant y(t_0)\leqslant y_2)=\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}P(x,y)\,dx\,dy$$

اگر هر دو باند مقادیر به $+\infty$ و $-\infty$ توسعه پیدا کند آنگاه صد در صد هر دو مقدار $x(t_0)$ و $y(t_0)$ پوشش داده می‌شود:

$$\mathrm{Prob}(-\infty\leqslant x(t_0)\leqslant+\infty \text{ and } -\infty\leqslant y(t_0)\leqslant+\infty)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}P(x,y)\,dx\,dy=1$$

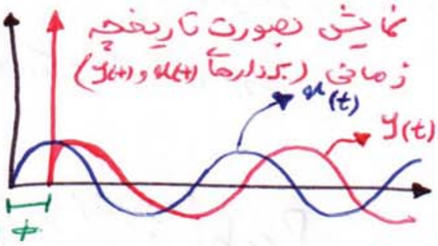
- میانگین های مرتبه دوم:

$$E\begin{bmatrix}\text{تابعی از متغیرهای}\\ \text{تصادفی } x \text{ و } y\end{bmatrix}=\sum\begin{bmatrix}\text{مقدار تابع وقتی که } x \text{ بین } x \text{ و}\\ x+dx \text{ و } y \text{ بین } y \text{ و } y+dy\\ \text{باشد}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\text{احتمال آن که } x \text{ بین } x \text{ و}\\ x+dx \text{ و } y \text{ بین } y \text{ و}\\ y+dy \text{ باشد}\end{bmatrix}$$

$$\underset{\text{آمار}}{\underline{E}}\left[f(\underset{\underset{\text{باد}}{\downarrow}}{x},\underset{\underset{\text{زلزله}}{\downarrow}}{y})\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,\underset{\text{احتمال}}{\underline{P(x,y)}}\,dx\,dy$$

یا دو تا از رکوردهای زلزله و ...

مثال: فرض کنید دو موج سینوسی هم دامنه و هم فرکانس وجود دارد که به اندازه مقدار تصادفی ϕ با یکدیگر اختلاف فاز دارند. مطلوب است مقدار میانگین xy و $(xy)^2$.



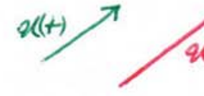
نمایش بصورت تاریخچه زمانی (بردارهای $x(t)$ و $y(t)$)

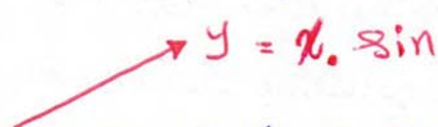
$$x(t) = x_0 \sin\omega t$$

$$y(t) = x_0 \sin(\omega t + \phi)$$

ϕ (اختلاف فاز) اختلاف دو بردار بصورت تأخیر زمانی مشخص می شود (time Lake)

تذکر: علت استفاده از معادله $x(t) = x_0 \sin\omega t$ این است که جواب های این پاسخ قابل تعمیم به سایر بردارهای خودی باشد، به خاطر بردارهای ویژه لذا می توانیم آن را به فضای برداری در سری فوریه تعمیم دهیم.





$y = x_0 \sin(\omega t + \phi)$

$x = x_0 \sin\omega t$

نمایش تفسیر هندسی

تذکر: از تابع $x(t)$ و $y(t)$ در این مثال به این خاطر استفاده شده است که در محاسبه ضریب خود همبستگی را بفهم.

$$E[xy] = \int xy = \sum x \cdot y$$

ضرب داخلی

■ طبق کتاب مقرمدای بر ارتعاشات تصادفی صـ ۲۰ داریم:

حل: فرض کنید از هر دو تابع تاریخچه زمانی در لحظه دلخواه t_0 نمونه برداری می شود:

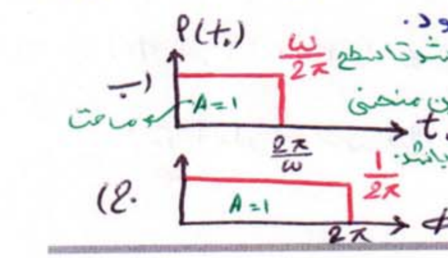
$$x(t_0) = x_0 \sin\omega t_0$$

$$y(t_0) = x_0 \sin(\omega t_0 + \phi)$$

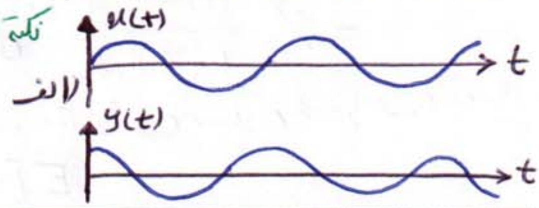
از آنجا که زمان t_0 دلخواه است، ممکن است هر نقطه ای روی محور زمان باشد، اما از آنجا که امواج سینوسی بصورت پریودیک با دوره تناوب $T = \frac{2\pi}{\omega}$ هستند، کافی است فقط بازه زیر در نظر گرفت:

$$0 \leqslant t_0 \leqslant \frac{2\pi}{\omega}$$

اگر t_0 دلخواه انتخاب شود، آنگاه یک متغیر تصادفی با احتمال یکنواخت و تابع چگالی احتمال مرتبه اول $p(t_0)$ مطابق شکل ب خواهد بود.



نکته: با زیر محور t_0 برابر $\frac{2\pi}{\omega}$ باشد تا سطح زیر منحنی 1 شود که این منحنی همان چگالی برابر $\frac{1}{...}$ می باشد. مقدار روی



بطور مثال به اگر زاویه فاز ϕ بطور یکنواخت بین صفر تا 2π توزیع شود، تابع چگالی احتمال $P(\phi)$ مطابق شکل صفحه قبل (ج) خواهد شد. توجه شود که در هر دو مورد، سطح زیر منحنی چگالی احتمال مساوی یک خواهد بود.

اکنون می توان نوشت:

$$\text{Prob}\begin{pmatrix}\text{زمان نمونه برداری بین} \\ t_0 \text{ و } t_0+dt_0 \text{ باشد}\end{pmatrix}=P(t_0)\,dt_0=\frac{\omega}{2\pi}dt_0$$

و:

$$\text{Prob}\begin{pmatrix}\text{زمان نمونه برداری بین} \\ \phi \text{ و } \phi+d\phi \text{ باشد}\end{pmatrix}=P(\phi)\,d\phi=\frac{1}{2\pi}d\phi$$

برای تعیین احتمال دو تابع t_0 و ϕ باید احتمال هر یک را در هم ضرب کنیم. بنابراین احتمال مشترک بصورت زیر است.

$$\text{Prob}\begin{pmatrix}t_0 \text{ زمان نمونه برداری بین} \\ \text{و } t_0+dt_0 \text{ و اختلاف فاز} \\ \text{بین } \phi \text{ و } \phi+d\phi\end{pmatrix}=\frac{\omega}{(2\pi)^2}dt_0\,d\phi$$

و تابع چگالی احتمال مشترک بصورت زیر است:

$$P(t_0,\phi)=\begin{cases}\dfrac{\omega}{(2\pi)^2} & \text{for}\begin{cases}0\leq t_0\leq 2\pi/\omega\\ 0\leq\phi\leq 2\pi\end{cases}\\ 0 & \text{خارج از دامنه}\end{cases}$$

از معادله محاسبه مقدار میانگین مرتبه دوم

$$E\left[f_{(x,y)}\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f_{(x,y)}P_{(x,y)}\,dx\,dy$$

مقدار میانگین xy مساوی است با:

$$E[xy]=\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\int x_0^2\sin\omega t_0\sin(\omega t_0+\phi)\frac{\omega}{(2\pi)^2}dt_0\,d\phi$$

$$=x_0^2\frac{\omega}{(2\pi)^2}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}dt_0\sin\omega t_0\int_0^{2\pi}d\phi\sin(\omega t_0+\phi)$$

ابتدا انتگرال سمت راست را محاسبه می کنیم که مقدار آن مساوی صفر است؛ بنابراین:

$$E[xy]=0$$

همچنین مقدار میانگین $(xy)^2$ بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$E\left[x^2y^2\right]=\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}dt_0\int_0^{2\pi}d\phi\, x_0^4\sin^2\omega t_0\,\sin^2(\omega t_0+\phi)\frac{\omega}{(2\pi)^2}$$

$$=x_0^4\frac{\omega}{(2\pi)^2}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}dt_0\,\sin^2\omega t_0\int_0^{2\pi}d\phi\,\sin^2(\omega t_0+\phi)$$

با محاسبه انتگرال بالا داریم:

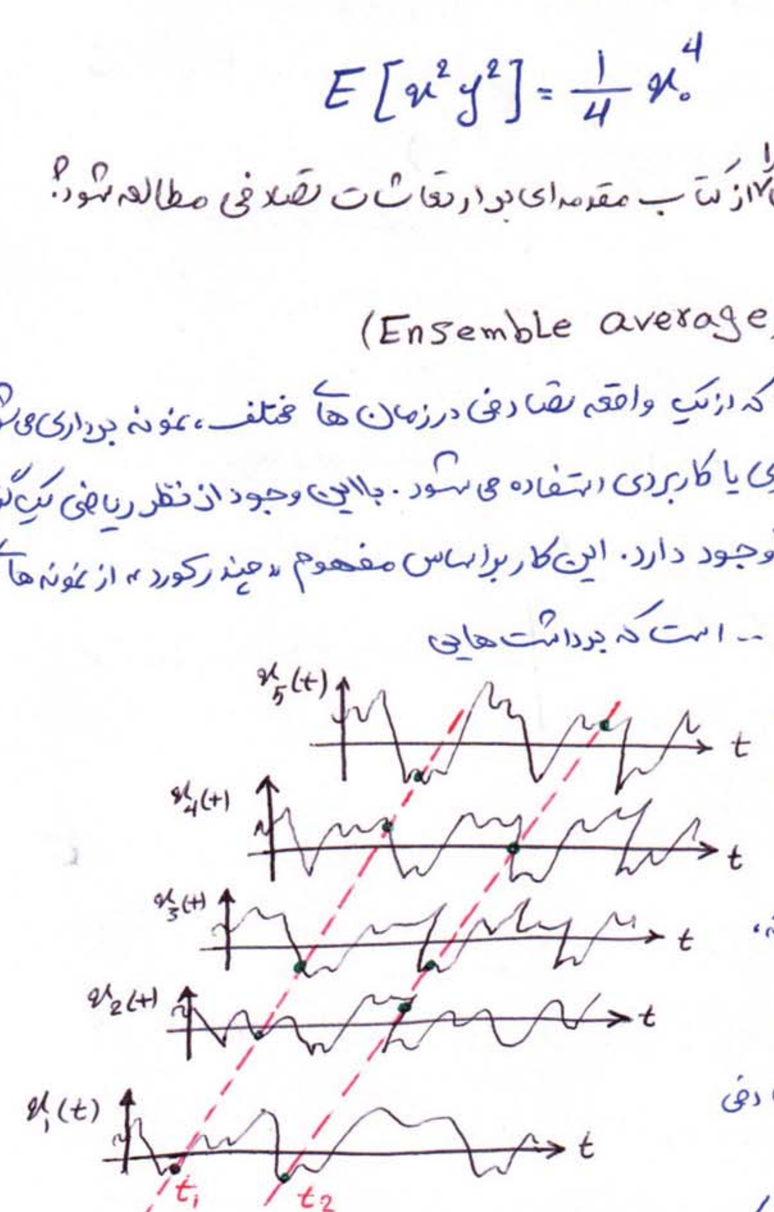
$$E(x^2y^2]=x_0^4\frac{\omega}{(2\pi)^2}\frac{\pi}{\omega}\pi$$

$$E\left[x^2y^2\right]=\frac{1}{4}x_0^4$$

تمرین: احتمال شرطی از کتاب مقدمه‌ای بر ارتعاشات تصادفی مطالعه شود.

میانگین چند رکورد (Ensemble average)

تصور ذهنی ما معمولاً این است که از یک واقعه تصادفی در زمان‌های مختلف، نمونه برداری می‌شود و از آن برای محاسبات آماری یا کاربردی استفاده می‌شود. با این وجود از نظر ریاضی یک گزینه دیگر برای محاسبه میانگین‌ها وجود دارد. این کار براساس مفهوم «چند رکورد» از نمونه‌های $x_1(t)$، $x_2(t)$، $x_3(t)$ و ... است که برداشت‌هایی از فرآیند تصادفی $x(t)$ هستند. معمولاً می‌توان تعداد (زیادی) نمونه برداری از فرآیند تصادفی انجام داد. مجموعه این توابع نمونه، یک تقریب مهندسی برای تعداد نامحدودی نمونه از فرآیند تصادفی است.



در میانگین چند رکورد مطابق شکل بجای اندازه‌گیری در طول یک نمونه‌گیری منفرد بر حسب زمان، از میانگین چند نمونه در یک نقطه خاص استفاده می‌شود. اگر تعداد نمونه‌ها در

لحظه t_1 کافی باشد، توزیع احتمال مرتبه اول برای x در t_1 قابل محاسبه است. اگر اندازه‌گیری‌های دیگری در لحظه t_2 نیز انجام شده باشد، آن‌گاه می‌توان توزیع احتمال مرتبه دوم برای x در t_1 و x در t_2 را تعیین کرد. بطور مشابه با اندازه‌گیری در سایر زمان‌ها می‌توان توزیع‌های احتمالی مراتب بالاتر برای مجموعه را یافت.

تذکر: برای یک فرآیند تصادفی گوسی باید توزیع‌های احتمال رکوردها نیز همگی گوسی باشند.

☐ **فرآیند تصادفی مانا:** اگر توزیع‌های احتمال حاصل از چند رکورد x به زمان مطلق وابسته نباشند، فرآیند تصادفی را مانا (stationary) گویند.

نکته: مطمئناً جمله مانا به توزیع‌های احتمال برمی‌گردد و نه به خود نمونه‌ها.

نکته: تمام میانگین‌ها (میانگین، میانگین مربعات، واریانس و انحراف معیار) از زمان مطلق، مستقل هستند.

نکته: تمام فرآیندهای تصادفی مهندسی باید یک آغاز و یک پایان داشته باشد، لذا آنها در حقیقت نمی‌توانند مانا باشند. ولی برای منظورهای علمی همین که یک فرآیند برای بخش عمده‌ای از عمر مفید، مانا باشد، واقعاً کافی است. ممکن است بتوان با تقسیم کل فرآیند به چند دوره مجزا، هر یک را تقریباً جداگانه مانا فرض کرد.

فرآیند تصادفی مانا بر دو قسم است:
- مانای ضعیف برخی مواقع برای توصیف فرآیندهایی که در آنها توزیع‌های احتمال مرتبه اول و دوم وابسته به زمان نیستند، بکار می‌رود.
- مانای قوی فرآیندی است که برای آن تمام توزیع‌های احتمال در چند رکورد مستقل از زمان هستند.

☐ **فرآیند تصادفی ارگودیک:**

یک فرآیند مانا، فرآیند ارگودیک نامیده می‌شود. اگر علاوه بر این که تمام میانگین‌های چند رکورد آن مانا است، میانگین‌های مربوط به هر یک از نمونه‌های منفرد (هر تاریخچه زمانی) با میانگین‌های چند رکورد یکسان باشد. در این صورت هر یک از توابع نمونه (هر تاریخچه زمانی) کاملاً نشان دهنده چند رکورد شامل فرآیندهای تصادفی است.

نکته: توجه شود که اگر یک فرآیند، ارگودیک باشد باید مانا هم باشد برای اینکه میانگین

در یک تاریخچه زمانی بطور تئوری از $t=-\infty$ تا $t=+\infty$ ادامه دارد و بنابراین مستقل از زمان خواهد بود.

نکته: اگر میانگین های نمونه با میانگین های چند رکورد، یکسان باشد. باید میانگین های چند رکورد مستقل از زمان باشد و بنابراین، فرآیند باید مانا باشد.

تمرین: فرآیند ارگودیک به چه معناست به تیتر ۲-۵-۲ کتاب مقدمه‌ای بر ارتعاشات تصادفی مراجعه نمائید؟

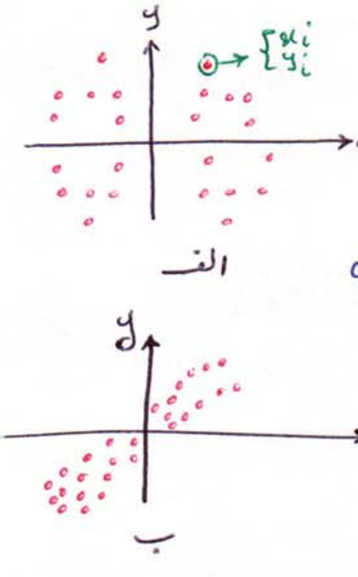
تمرین: کدام یک از جملات زیر درست می‌باشد؟

الف) هر فرآیند تصادفی مانا حتماً ارگودیک است

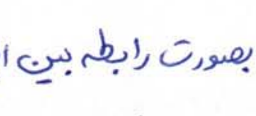
ب) اگر یک فرآیند ارگودیک باشد حتماً مانا نیز هست.

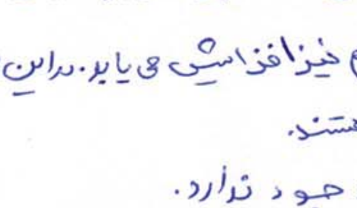
فصل ۳ سوم کتاب مقدمه‌ای بر ارتعاشات تصادفی

■ هم بستگی



الف





ب

جمعی از مقادیر حقیقی دو متغیر x و y را در نظر بگیرید. فرض کنید که هر جفت از این مقادیر مطابق شکل با یک نقطه یکسان نشان داده می‌شود (مانند تنش و کرنش) در شکل الف مقادیر x و y در هر جفت برخلاف شکل ب هیچ گونه ظاهری برای ارتباط با یکدیگر ندارند.

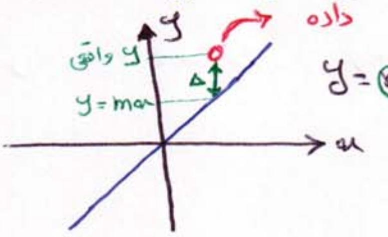
در شکل ب یک الگوی مشخص بصورت رابطه بین این دو وجود دارد به عنوان مثال مشاهده می‌شود با بزرگ شدن x مقدار y هم نیز افزایش می‌یابد. در این صورت می‌گوییم متغیرهای شکل ب با یکدیگر هم بسته هستند.

قابل توجه است که هم بستگی (رابطه) در شکل الف وجود ندارد.

تذکر: کلیدی‌ترین نکتهٔ ارتعاشات تصادفی خودهم‌بستگی می‌باشد

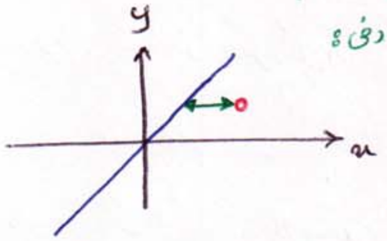
اگر بخواهیم برای بیان هم‌بستگی شکل ب یک رابطه ریاضی تقریبی بین x و y بیان کنیم (خط راست) یکی از راه‌های کمینه کردن مربعات اختلاف بین مقادیر واقعی y با مقادیر حاصل از این خط مستقیم مطابق شکل الف است.

کلیدی‌ترین مطلب ارتعاش تصادفی:



تخمین:
$$y = \overset{\text{مجهول}}{\boxed{m}}\,\underset{\text{برازش}}{x}$$

الف) خط برازش y روی x



ب) خط برازش x روی y

اگر محل محورهای مختصات طوری تنظیم شود که:

$$E[x] = E[y] = 0$$

به این ترتیب معادله خط بصورت زیر خواهد بود:

$$y = mx \quad \text{①}$$

اختلاف بین مقدار واقعی y با مقدار حاصل از خط mx مساوی است با:

$$\Delta = \overset{\text{داده}}{y} - \overset{\text{مجهول}}{\underline{mx}}$$

مقدار میانگین مربعات اختلاف بصورت زیر است:

$$E[\Delta^2] = E\left[(y - mx)^2\right]$$
$$= E[y^2] + m^2 E[x^2] - 2m\,E[xy]$$

برای کمینه کردن مقدار بالا باید از آن نسبت به m مشتق بگیریم و مساوی صفر قرار دهیم:

$$2m\,E[x^2] - 2E[xy] = 0$$
$$\Rightarrow m = \frac{E[xy]}{E[x^2]}$$

بهترین مقدار m

با جایگذاری این مقدار بهینه به جای شیب m در معادله ① می‌توان نوشت:

$$y = \frac{E[xy]}{E[x^2]} \cdot x \quad \text{②}$$

در حالت خطی میانگین‌ها صفر می‌شود لذا با توجه به معادله $\sigma^2 = E[x^2] - (E[x])^2$ برای

حالتی که میانگین‌ها صفر باشد:

$$\sigma_x^2 = E[x^2] \quad , \quad \sigma_y^2 = E[y^2]$$

از معادله II خواهیم داشت:

$$y = \frac{E[xy]}{\sigma_x^2}\, x$$

طرفین معادله فوق را در $\frac{1}{\sigma_y}$ ضرب می‌کنیم لذا خواهیم داشت:

$$\frac{y}{\sigma_y} = \frac{E[xy]}{\sigma_y\,\sigma_x^2}\, x$$

نکته: برای اینکه طرفین معادله بدون بعد باشند بجای σ_x^2 طرف راست معادله $\sigma_x\sigma_x$ قرار می‌دهیم لذا خواهیم داشت:

معادله خط برازش y روی x:

$$\overset{\text{بدون بعد}}{\boxed{\frac{y}{\sigma_y}}} = \underbrace{\boxed{\frac{E[xy]}{\sigma_x\,\sigma_y}}}_{\text{ضریب همبستگی}} \overset{\text{بدون بعد}}{\boxed{\frac{x}{\sigma_x}}}$$

نکته: بطور مشابه می‌توان خط برازش x روی y را بصورت زیر محاسبه کرد:

معادله خط برازش x روی y:

$$\frac{x}{\sigma_x} = \frac{E[xy]}{\sigma_x\,\sigma_y}\,\frac{y}{\sigma_y}$$

نکته: کواریانس: واریانسی که هم به x و هم به y بستگی دارد.

$$\rho\text{: ضریب همبستگی} = \boxed{\frac{\overset{\text{کواریانس}}{E[xy]}}{\sqrt{E[x^2]}\,\sqrt{E[y^2]}}}$$

اگر میانگین x و y صفر نباشد می‌توان نوشت:

$$\frac{y - m_y}{\sigma_y} = \left\{\frac{E[(x-m_x)(y-m_y)]}{\sigma_x\,\sigma_y}\right\}\frac{x - m_x}{\sigma_x} \qquad Ⓐ$$

و:

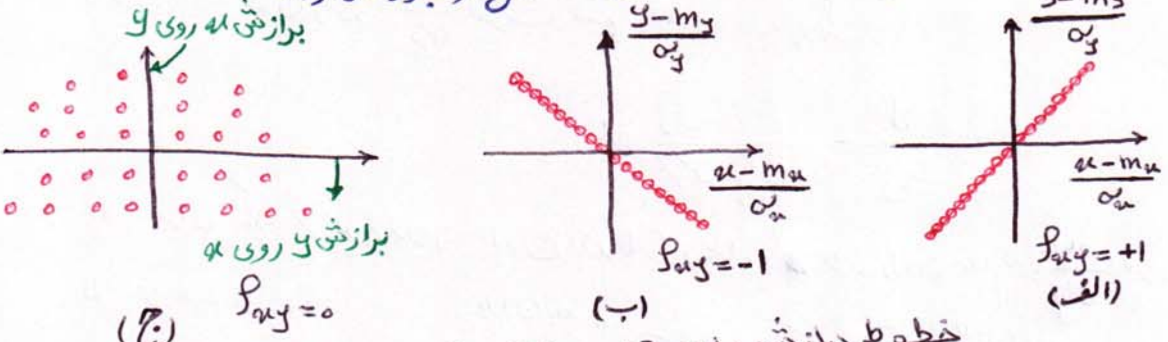
$$\frac{x - m_x}{\sigma_x} = \left\{\frac{E[(x-m_x)(y-m_y)]}{\sigma_x\,\sigma_y}\right\}\frac{y - m_y}{\sigma_y} \qquad Ⓑ$$

که m_x و m_y به ترتیب میانگین‌های x و y هستند. پارامتر:

$$\rho_{xy} = \frac{E[(x-m_x)(y-m_y)]}{\sigma_x\,\sigma_y} \qquad Ⓒ$$

ضریب همبستگی یا کواریانس نرمال شده نامیده می‌شود.

اگر معادلات A و B خط راست یکسانی خواهد بود اگر $\rho_{xy}=\pm1$ باشد. در این صورت بین x و y هم بستگی کاملی وجود دارد و معادله خط مطابق شکل الف یا ب خواهد بود، اگر $\rho_{xy}=0$ باشد، آنگاه مطابق شکل ج هیچ هم بستگی و ارتباطی بین x و y وجود ندارد.



(ج) $\rho_{xy}=0$ (ب) $\rho_{xy}=-1$ (الف) $\rho_{xy}=+1$

خطوط برازش برای مقادیر مختلف ضریب هم بستگی ρ_{xy}

تمرین : رابطه ۳-۸ کتاب مقدمه‌ای بر ارتعاشات تصادفی صفحه ۳۷ را اثبات نمایید!

تفسیر کواریانس: ضرب داخلی دو بردار که نرمال شده به طول آن دو بردار

$$\text{کواریانس} = \frac{\text{ضرب داخلی دو بردار}}{\text{طول بردار اول} \times \text{طول بردار دوم}}$$

تفسیر هندسی انحراف معیار: طول بردار می‌باشد

تفسیر هندسی واریانس: مربع طولی بردار می‌باشد.

تفسیر هندسی ضریب هم بستگی ρ_{xy}: تفسیر هندسی ρ_{xy} برابر $\cos\phi$ می‌باشد.

$$\rho_{xy} = \frac{E[xy]}{\sigma_x \sigma_x} = \cos\phi$$

☐ مثال: اگر دو موج سینوسی با دامنه ثابت متفاوت و فرکانس یکسان و اختلاف فاز ϕ در نظر بگیرید،

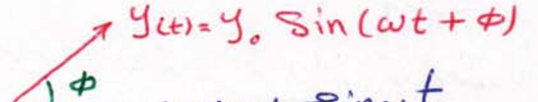
$$x(t) = x_0 \sin\omega t$$

$$y(t) = y_0 \sin(\omega t+\phi)$$

حاصل ضرب $x(t_0)$ $y(t_0)$ را بدست آورید؟

حل:

تفسیر هندسی دو بردار x و y را بصورت زیر می‌توان بیان کرد:



فرض کنید که این دو موج در زمان دلخواه t_0 نمونه برداری شده است و می خواهیم میانگین حاصل ضرب $x(t_0)\, y(t_0)$ را محاسبه کنیم.

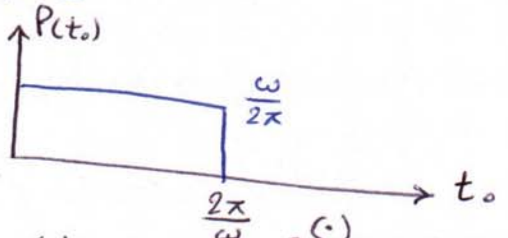
مطابق رابطه مقدار میانگین $E[f(x,y)]$ خواهیم داشت:

$$E[f(x,y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\cdot P(x,y)\, dx\, dy$$

لذا خواهیم داشت

$$E[x(t_0)\, y(t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} x_0 y_0 \sin\omega t_0 \sin(\omega t_0 + \phi) P(t_0) dt_0$$

در این مورد فقط نیاز است که t_0 را مطابق شکل زیر بین صفر تا $\frac{2\pi}{\omega}$ در نظر گرفت



تابع چگالی احتمال برای زمان تصادفی نمونه برداری t_0

به این صورت می توان نوشت،

$$E[x(t_0)\, y(t_0)] = x_0 y_0 \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin\omega t_0 \sin(\omega t_0 + \phi) dt_0$$

$$= x_0 y_0 \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \{\sin^2\omega t_0 \cos\phi + \sin\omega t_0 \cos\omega t_0 \sin\phi\} dt_0$$

$$= \frac{1}{2} x_0 y_0 \cos\phi$$

بنابراین ضریب همبستگی بصورت زیر خواهد بود،

$$\rho_{xy} = \frac{E[xy]}{\sigma_x \sigma_y} = \cos\phi$$

می دانیم که $\sigma_x = \frac{x_0}{\sqrt{2}}$ و $\sigma_y = \frac{y_0}{\sqrt{2}}$ است. بنابراین می توان گفت که این دو موج سینوسی کاملاً هم بسته هستند. اگر اختلاف فاز آن ها صفر یا °۱۸۰ باشد؛ و غیرهمبسته هستند اگر اختلاف فاز بین آن ها °۹۰ یا °۲۷۰ باشد به شکل زیر توجه کنید.

نکته: توجه شود که حاصل ضرب ρ_{xy} معادل ضرب داخلی ضرب دو بردار در فضای بردار است. اگر طول بردارها واحد باشد یا حاصل ضرب طول بردارها نرمال شود، آنگاه مقدار این ضرب داخلی مساوی است با کسینوس زاویه بین دو بردار که همان $\cos\phi$ است و با جواب صفحه قبل انطباق دارد.

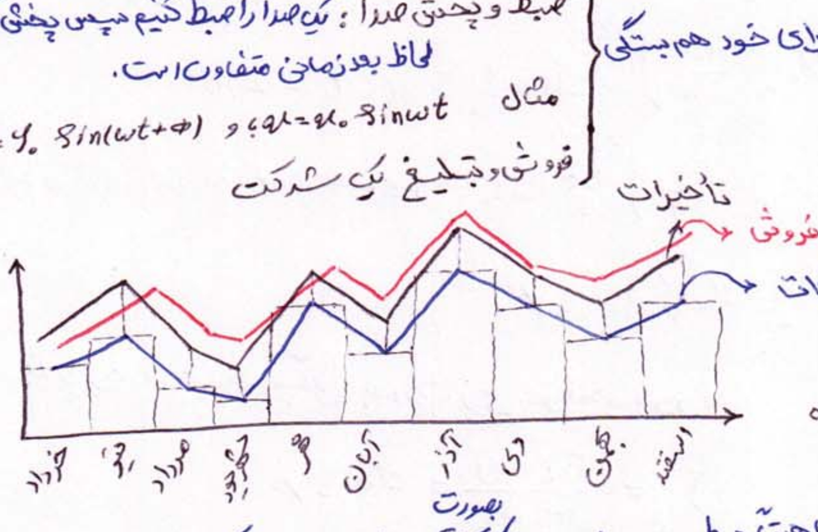
تمرین: صفحه ۳۸ کتاب مقدمه‌ای بر ارتعاشات تصادفی را بخوانید؟

تمرین: محاسبات مربوط به روابط ۳-۱۰ و ۳-۱۱ صفحه ۳۸ کتاب مقدمه‌ای بر ارتعاشات تصادفی دکتر تابش پور را انجام دهید؟

تمرین: بازگشت به قرائت خاص ارائه شده در جلسه اول معادله ۳-۱۲ کتاب مقدمه‌ای بر ارتعاشات تصادفی دکتر تابش پور ص۳۸ را اثبات کنید؟ $\rho_{xy} = \frac{E[xy]}{\sigma_x \sigma_y} = \cos\phi$

تذکر: کلیدی ترین نکته ارتعاشات تصادفی خود هم بستگی می باشد.

تذکر: مصادیقی برای خود هم بستگی
- ضبط و پخش صدا: یک صدا را ضبط کنیم سپس پخش کنیم. فقط از لحاظ بعد زمانی متفاوت است.
- مثال $x = x_0 \sin \omega t$ و $y = y_0 \sin(\omega t + \phi)$
- فروش و تبلیغ یک شرکت



تذکر: می بایست ماهیتاً در طبیعت با پدیده‌ها بصورت تصادفی برخورد کنیم.

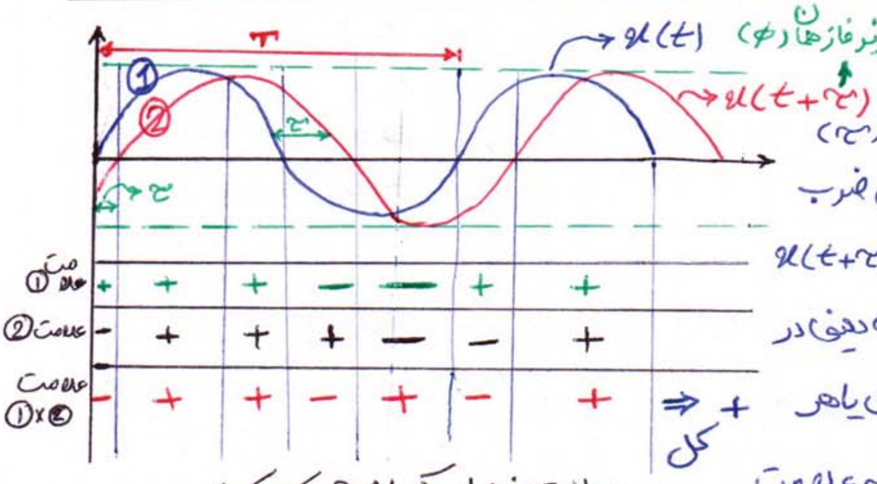
☐ خود هم بستگی:

۳ حالت برای فاصله (شیفت) یک تابع با خودش را می توان متصور شد:
- فاصله کم (τ کوچک)
- فاصله متوسط (τ متوسط)
- فاصله زیاد (τ بزرگ)

* شیفت همان زاویه است.

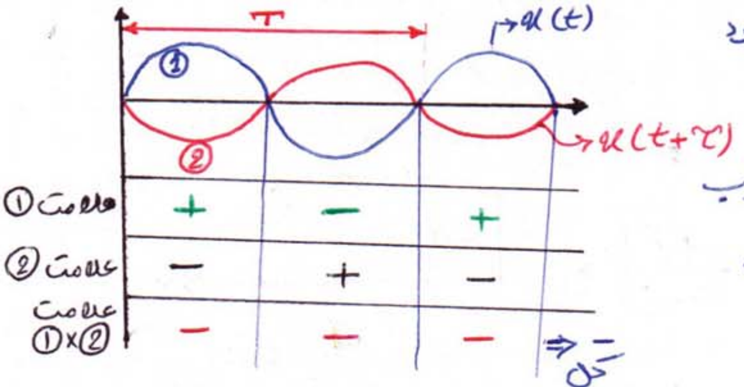
- فاصله کم (τ کوچک):

زمانی که فاصله تو تابع از خودش (τ) کم باشد، علامت تابع حاصل ضرب فرآیند تصادفی $x(t)$ با $x(t+\tau)$ در اکثر لحظات، یکی است یعنی در اکثر مواقع هر دو مثبت یا هر دو منفی هستند. در نتیجه علامت تابع $x(t).x(t+\tau)$ عمده مواقع مثبت است.



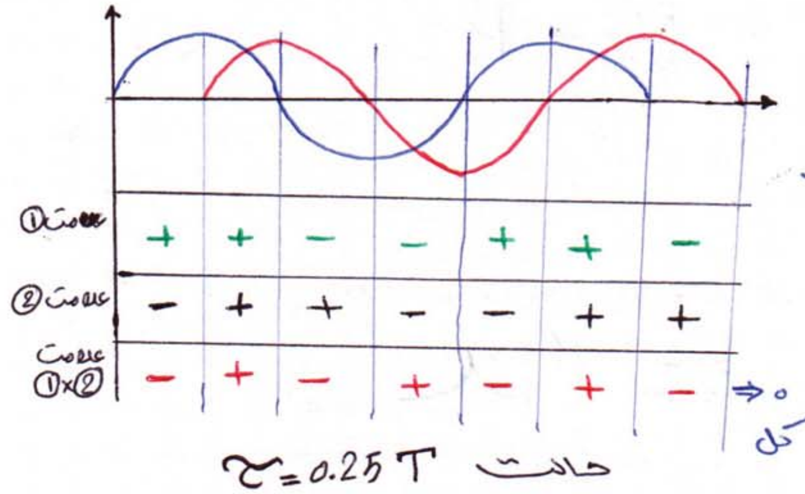
حالت فاصله کم (τ کوچک)

تذکر: درصورتی که به مرور τ (تأخیر فاز) بیشتر شود دو تابع $x(t)$ و $x(t+\tau)$ در فاز کاملاً متقابل قرار می‌گیرد و همواره مختلف العلامت هستند. در نتیجه حاصل ضرب این دو تابع منفی می‌شود.



حالت $\tau = 0.5T$

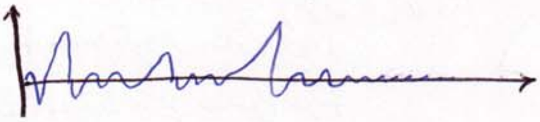
تذکر: بین دو حالت مثبت و منفی، تابع حاصل ضرب مقداری مساوی صفر به خود می‌گیرد.



حالت $\tau = 0.25T$

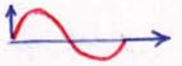
نکته: با دقت در اشکال فوق، ملاحظه می‌شود که پریود سیستم، (محتوای فرکانس) خودش را در تابع خود همبستگی نشان می‌دهد.

ما ماهیتاً در طبیعت با پدیده های تصادفی برخورد می کنیم.



پدیده های تصادفی:

- فضای برداری n بعدی است.
- که n بسیار بزرگ است.
- برای بردارهای پایه بسیاری سازه را تحلیل می کنیم
- هر بردار پایه یک تحریک هارمونیک ساده

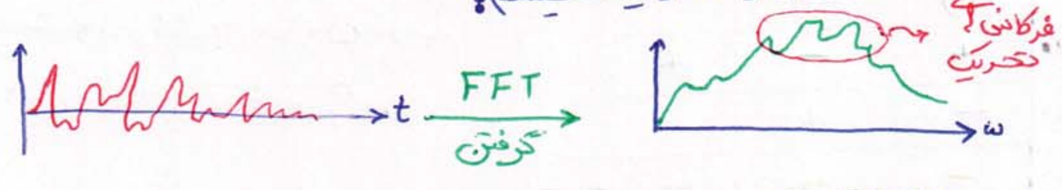


- و غیره

جهت تحلیل سازه به این روش بسیار پیچیده، وقت گیر، غیر اقتصادی و ... می باشد.

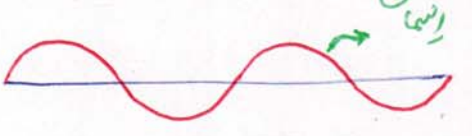
روش ساده محاسبات پدیده های تصادفی:

- روش اول:
- روش همان فضای برداری می باشد.
- بردارهای پایه را در نظر می گیریم.
- FFT گرفتن از تحریک سیستم:



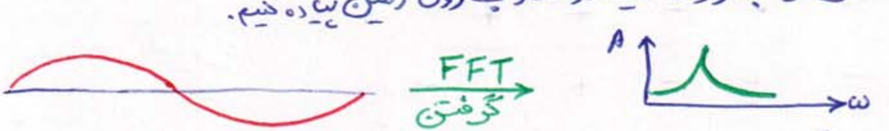
- FFT گرفتن از پاسخ سیستم:

بازی با ریاضی:

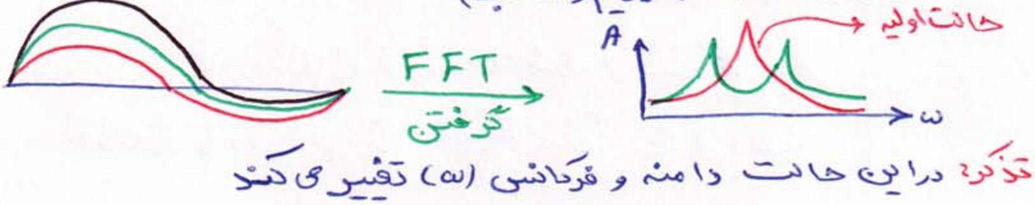


یک ریسمان را روی زمین قرار می دهیم:

۱- ابتدا ریسمان را بصورت یک دوره تناوب روی زمین پیاده کنیم.



۲- قسمت max مثبت را بالا ببریم (طناب)



* تذکر: در این حالت دامنه و فرکانس (ω) تغییر می کند

۳- در این حالت نقاط x را Fixe (ثابت) و قسمت‌های دیگر ریسمان را تغییر دهیم

* تذکر: در این حالت دامنه (A) تغییر کرده و فرکانس (ω) ثابت و بدون تغییر باشد.

☐ چرا محتوای فرکانسی یک پاسخ مهم است؟ چون کل فضا دارای دو مشخصه A (دامنه) و فرکانس (ω) می‌باشد؛ مطابق شکل مقابل

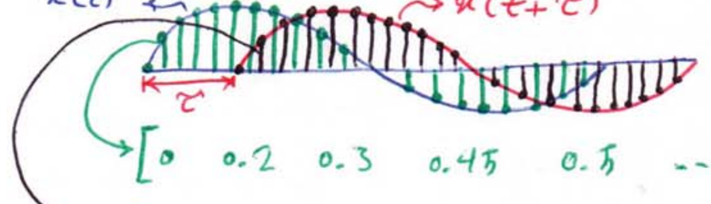
- روش دوم جهت ساده کردن محاسبات پدیده‌های تصادفی:

$$\underbrace{Y(\omega)}_{\text{پاسخ}} = H(\omega)\,\underbrace{X(\omega)}_{\text{تحریک}}$$

تمرین: شرایط فوریه پذیری را بیان کنید؟ (به فصل ۴ کتاب مقدمه‌ای بر ارتعاشات تصادفی مؤلف دکتر تابش‌پور مراجعه نمائید).

مطابق شکل دو موج $x(t)$ و $x(t+\tau)$ صفحه اگر فاصله τ کم باشد.

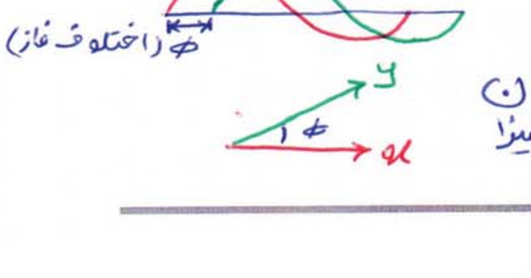
اگر τ کم باشد اختلاف علامت‌ها با هم برابر است.



$[0 \quad 0.2 \quad 0.3 \quad 0.45 \quad 0.5 \quad \ldots]^T$ برای تابع $x(t)$

$[0 \quad 0.2 \quad 0.3 \quad 0.45 \quad 0.5 \quad \ldots]^T$ برای تابع $x(t+\tau)$

خلاصه: دو تابع $x(t)$ و $y(t)$ متناوب را می‌توان بصورت فضای برداری مطابق شکل مقابل تبدیل نمائیم.



هرچه زاویه بین این دو بردار کمتر باشد، میزان

همبستگی آن‌ها بیش‌تر خواهد بود و هرچه مقدار این زاویه بیش‌تر و به ۹۰ نزدیک‌تر باشد میزان هم‌بستگی این دو تابع (بردار) کم‌تر و نسبت به هم مستقل‌تر هستند.

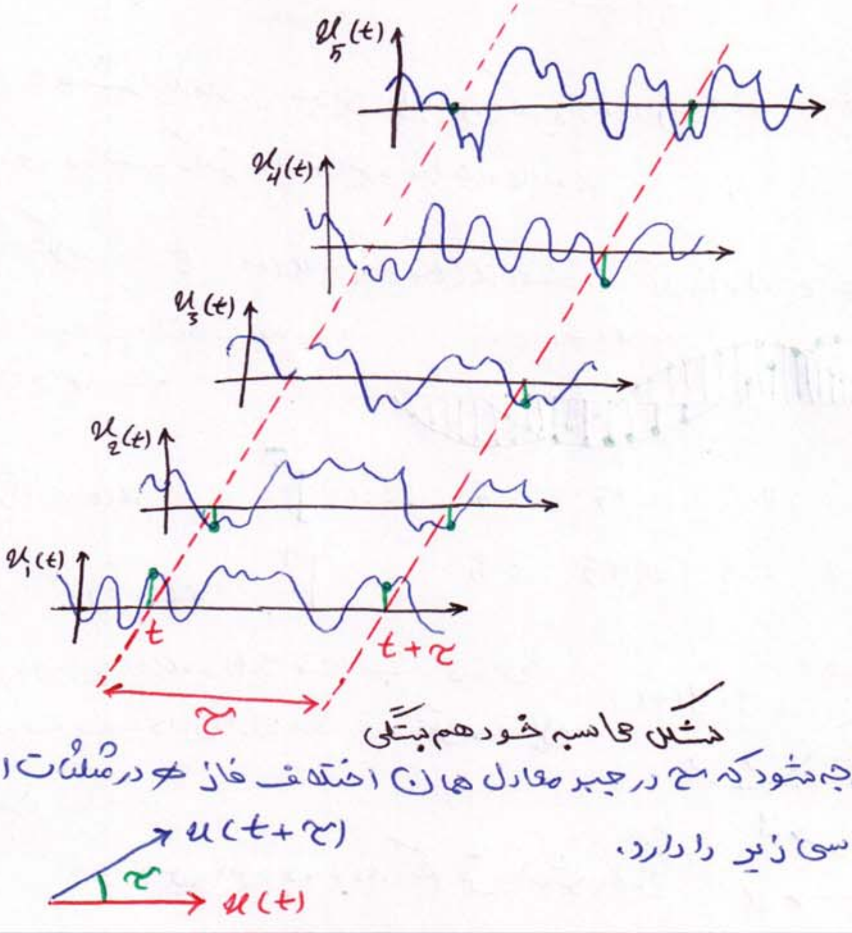
نکته: مقدار $\cos\phi$ نشان دهنده هم‌بستگی دو بردار (تابع) می‌باشد.

نکته: حاصل ضرب دو تابع متناوب هم متناوب می‌باشد.

نکته: محاسبه کردیم که ضریب هم‌بستگی مساوی است با $\cos\phi$ که حاصل محاسبه $E[xy]$ بود. پس $E[xy]$ در فضای برداری هم‌ارز ضرب داخلی می‌باشد.

■ تابع خود هم‌بستگی $R_x(\tau)$:

تابع خود هم‌بستگی برای یک فرآیند تصادفی $x(t)$ بصورت میانگین $x(t)x(t+\tau)$ تعریف می‌شود مطابق شکل زیر است. فرآیند در زمان‌های t و $t+\tau$ نمونه‌برداری می‌شود و مقدار میانگین حاصل ضرب یعنی $E[x(t)\cdot x(t+\tau)]$ برای چند رکورد محاسبه می‌شود.



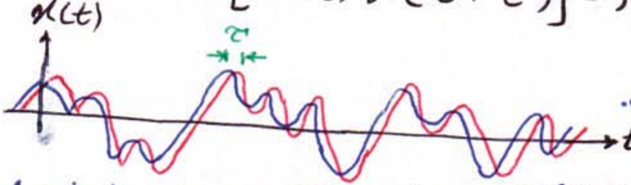
شکل محاسبه خود هم‌بستگی

نکته: توجه شود که τ در جبر معادل همان اختلاف فاز ϕ در مثلثات است. که تفسیر هندسی زیر را دارد.

اگر فرآیند مانا باشد مقدار $E[x(t)x(t+\tau)]$ از زمان t مستقل خواهد بود و فقط به τ بستگی خواهد داشت.

تأخیر فاز (همان ≠ ی باشد)

$$E[x(t)\,x(t+\tau)] = f(\tau) = R_x(\tau)$$



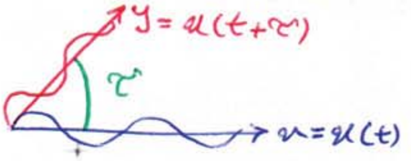
که $R_x(\tau)$ تابع خود هم‌بستگی x(t) است.

نکته: اگر x(t) مانا باشد، میانگین و انحراف معیار مستقل از زمان t خواهند بود لذا خواهیم داشت:

$$E[x(t)] = E[x(t+\tau)] = m$$

$$\sigma_{x(t)} = \sigma_{x(t+\tau)} = \sigma$$

نکته: تفسیر هندسی $E[x(t).x(t+\tau)]$ با فرض بردار پایه در فضای مثلثاتی بصورت مقابل است.



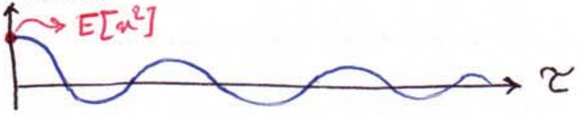
$$\overrightarrow{x(t)}\cdot\overrightarrow{x(t+\tau)} = f(\tau) = \cos\tau$$

نکته: اگر مقدار τ=0 باشد آنگاه خواهیم داشت:

مقدار میانگین مربعات فرآیند

$$\text{if } \tau=0 \Rightarrow E[x(t).x(t+\tau)] = E[x^2] = \sigma^2 \rightarrow \text{واریانس}$$

$$R_x(\tau):\begin{cases}\tau=0 \Rightarrow (\text{بزرگ})\ \text{بیشترین هم‌بستگی بین دو تابع}\\ \tau\to\infty \Rightarrow (0)\ \text{بی‌ربط شده و هیچ ربطی ندارد}\end{cases}$$

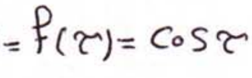


تذکر: اگر مقدار τ کم باشد اختلاف علامت‌ها شدید نمی‌باشد.

تفسیر تابع خود هم‌بستگی در فضای برداری:

حاصل ضرب یک بردار در خودش که به مقدار τ با خودش اختلاف فاز دارد.

$$E[x(t).x(t+\tau)] = f(\tau) = R_x(\tau)$$



تمرین: درخصوص فرمول ۱۳.۳ کتاب ارتعاشات تصادفی دکتر تابش‌پور

$$E[x(t).x(t+\tau)] = f(\tau) = R_x(\tau)$$

بحث شود؟

نکته:

$$R_x(\tau=0) = E[x^2]$$

$$E[x]=0 \Rightarrow \sigma^2 = E[x^2]$$

$$\lim_{\tau\to\infty} R_x(\tau) = 0$$

نکته: ضریب هم بستگی بین دو تابع x و y برابر است با: $\rho=\frac{E[xy]}{\sigma_x\sigma_y}$

حال ضریب هم بستگی یک بردار در خودش که به مقدار τ با خودش اختلاف فاز دارد برابر است با:

$$\rho=\frac{E\left[(x(t)-m)\cdot(x(t+\tau)-m)\right]}{\sigma\cdot\sigma}$$

با ساده سازی کردن این رابطه خواهیم داشت:

$$\rho=\frac{E[x(t)\cdot x(t+\tau)]-m\overbrace{E[x(t)]}^{m}-m\overbrace{E[x(t+\tau)]}^{m}+m^2}{\sigma^2}$$

قبلاً توضیح دادیم که اگر $x(t)$ مانا باشد، میانگین و انحراف معیار مستقل از t (زمان) خواهند بود

$$E[x(t)]=E[x(t+\tau)]=m$$

با جایگذاری در رابطه بالا خواهیم داشت:

$$\rho=\frac{R_x(\tau)-m^2}{\sigma^2}\Rightarrow R_x(\tau)=\sigma^2\rho+m^2$$

خواص تابع خود هم بستگی $R_x(\tau)$:

تذکر: از آنجا که مقادیر حدی ρ مساوی ±1 است. بنابراین خواهیم داشت:

$$-\sigma^2+m^2\leqslant R_x(\tau)\leqslant\sigma^2+m$$ ($R_x(\tau)$ یک تابع کرانه داری باشد)

تذکر: چون با داده هایی سر و کار داریم که محدود هستند لذا مقدار کرانه $R_x(\tau)$ محدودی باشد.

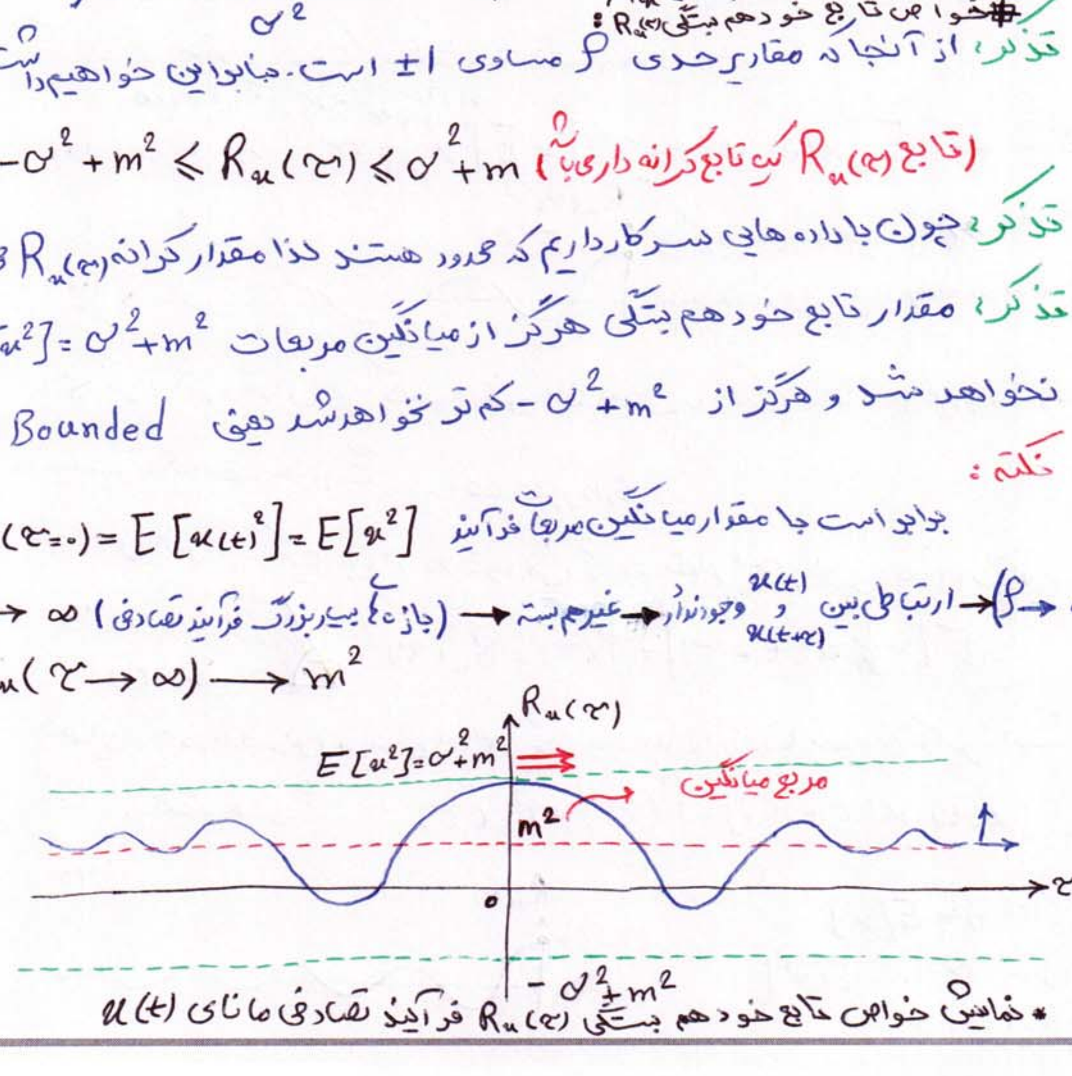
تذکر: مقدار تابع خود هم بستگی هرگز از میانگین مربعات $E[x^2]=\sigma^2+m^2$ بیشتر نخواهد شد و هرگز از $-\sigma^2+m^2$ کم تر نخواهد شد یعنی Bounded است.

نکته:

$R_x(\tau=0)=E\left[x(t)^2\right]=E\left[x^2\right]$ برابر است با مقدار میانگین مربعات فرآیند

$(\rho\to0)\to$ ارتباطی بین $x(t)$ و $x(t+\tau)$ وجود ندارد $\to$ غیرهم بسته $\to$ (بازه‌ی بسیار بزرگ فرآیند تصادفی) $\tau\to\infty$

$$R_x(\tau\to\infty)\longrightarrow m^2$$



* نمایش خواص تابع خود هم بستگی $R_x(\tau)$ فرآیند تصادفی مانای $x(t)$

تذکر: برای یک فرآیند مانا، $R_x(\tau)$ فقط به τ بستگی دارد و هیچ ارتباطی با زمان مطلق t ندارد.

$$R_x(\tau)=E[x(t)\cdot x(t+\tau)]=E[x(t)\cdot x(t-\tau)]=R_x(-\tau)$$

بنابراین $R_x(\tau)$ یک تابع زوج از τ می‌باشد.

■ نکته: واریانس (σ^2) را می‌توان با دو رکورد تفسیر کرد. الف) آماری: پراکندگی را نشان می‌دهد. ب) فیزیکی: انرژی را نشان می‌دهد. تقارن و هم‌زمانی این دو رکورد بسیار مهم است.

نکته: تابع خود هم‌بستگی ($R_x(\tau)$) علاوه بر آنکه خواص فرکانسی فرآیند را به ارث می‌برد شامل اطلاعات مفیدی در خصوص مقادیر واریانس و میانگین مربعات نیز می‌باشد و تمام شرایط فوریه پذیری را دارد.

فصل ۴- کتاب مقدمه‌ای بر ارتعاشات تصادفی (تحلیل فوریه):

تمرین: کل فصل ۴ کتاب مقدمه‌ای بر ارتعاشات تصادفی را بخوانید و با درنظرگرفتن ادبیات گفتمان جلسه اول آن را بازنویسی نمائید.

■ شرایط فوریه پذیری:

- تابع کراندار باشد
- تابع در بی‌نهایت مقدار صفر داشته باشد.

تذکر: اگر تابعی متناوب باشد، خود تابع و مشتق آن تکه‌ای پیوسته باشد می‌توان برای آن سری فوریه نوشت.

تذکر: برای توابعی که متناوب نیست (مثل زلزله) از انتگرال فوریه استفاده می‌کنیم و طول باند را ∞ می‌گیریم.

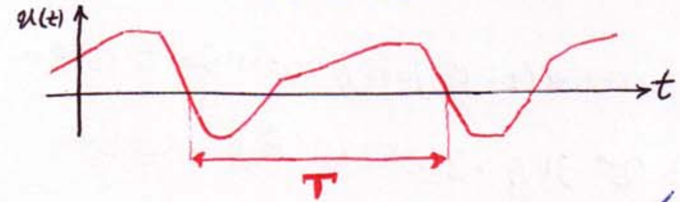
تذکر: میانگین سطح صفر باشد که اینکار با جابجا کردن محور انجام می‌شود.

تذکر: در نقاط ناپیوستگی سری فوریه مقادیر بیشتری از مقدار واقعی به ما می‌دهد که پدیده گیبس نام دارد.

⌗ سری فوریه:

تابع $x(t)$ یک تابع پریودیک با پریود T، برحسب t باشد مطابق شکل

زیر می‌توان آن را بصورت سری نامحدود مثلثاتی (سری فوریه) بیان کرد:



$$x(t)=a_0+a_1\cos\frac{2\pi t}{T}+a_2\cos\frac{4\pi t}{T}+\dots$$
$$+b_1\sin\frac{2\pi t}{T}+b_2\sin\frac{2\pi t}{T}+\dots$$

می‌توانیم $x(t)$ را بصورت زیر بیان کنیم:

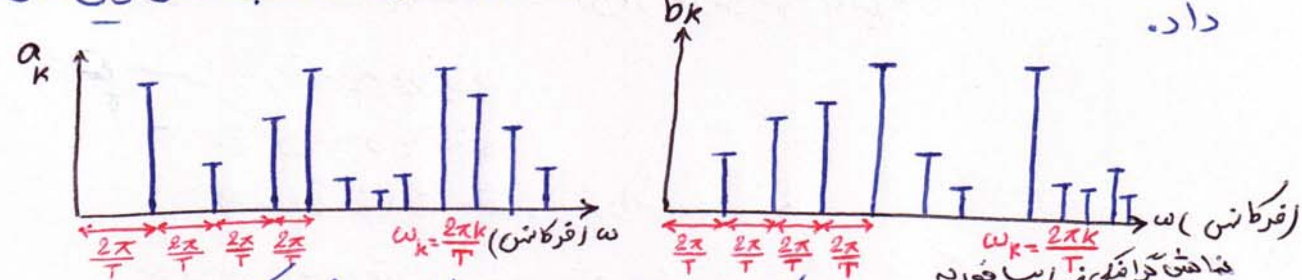
$$x(t)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{a_k\cos\frac{2\pi kt}{T}+b_k\sin\frac{2\pi kt}{T}\right\}$$

که ضرایب a_0، a_k و b_k ضرایب ثابت فوریه هستند:

$$a_0=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}x(t)\,dt$$

$$\underset{k\geq 1}{a_k}=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)\cos\frac{2\pi kt}{T}\,dt\quad;\quad\underset{k\geq 1}{b_k}=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)\sin\frac{2\pi kt}{T}\,dt$$

فرض کنید که مبدأ مختصات در شکل بالا (نمودار $x(t)$) مساوی صفر باشد، در نتیجه a_0 مساوی صفر خواهد بود لذا می‌توان ضرایب a_k و b_k را مطابق شکل زیر نشان داد.



نمایش گرافیکی ضرایب فوریه

محور افقی در اشکال بالا مقادیر فرکانس را نشان می‌دهد. فرکانس هارمونیک kام متناظر با ضریب a_k یا b_k مساوی است با:

$$\omega_k=\frac{2\pi k}{T}$$

فاصله بین دو فرکانس برابر است با:

$$\Delta\omega=\frac{2\pi}{T}$$

تذکر: وقتی پریود T بزرگ باشد، فاصله فرکانس‌ها ($\Delta\omega$) کوچک می‌شود و ضرایب فوریه در شکل (نمایش گرافیکی ضرایب فوریه) بسیار به هم فشرده می‌شوند. در حد، وقتی که $T\to\infty$ این ضرایب به هم می‌چسبند. از آنجا که در این حالت، دیگر $x(t)$ پریودیک نخواهد بود، نمی‌توان آن را با مؤلفه‌های فرکانسی مجزا، تحلیل کرد.

◘ انتگرال فوریه:

نکته: مطابق شکل (نمایش گرافیکی ضرایب فوریه) وقتی که $\Delta\omega$ کوچک باشد ($T\to\infty$) سری فوریه تبدیل به انتگرال فوریه می‌گردد و ضرایب فوریه به توابع پیوسته

تبدیل می‌شوند که تبدیل فوریه نامیده می‌شوند.

با فرض ($a_0=0$) و جایگذاری ضرایب سری فوریه در سری فوریه خواهیم داشت:

$$x(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)\cos\frac{2\pi kt}{T}dt\right\}\cos\frac{2\pi kt}{T}$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)\sin\frac{2\pi kt}{T}dt\right\}\sin\frac{2\pi kt}{T}$$

سپس با جایگذاری $\omega_k=\frac{2\pi k}{T}$ و همچنین ($\Delta\omega=\frac{2\pi}{T}\rightarrow\frac{1}{T}=\frac{\Delta\omega}{2\pi}$) در معادله بالا خواهیم داشت.

$$x(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{\Delta\omega}{\pi}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)\cos\omega_k t\,dt\right\}\cos\omega_k t$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{\Delta\omega}{\pi}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)\sin\omega_k t\,dt\right\}\sin\omega_k t$$

هنگامی که $T\rightarrow\infty$ آنگاه $\Delta\omega\rightarrow d\omega$ و Σ به انتگرال تبدیل می‌شود که حدود آن از $\omega=0$ تا $\omega=\infty$ هستند:

$$x(t)=\int_{\omega=0}^{\infty}\left\{\frac{d\omega}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\cos\omega t\,dt\right\}\cos\omega t$$

$$+\int_{\omega=0}^{\infty}\left\{\frac{d\omega}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\sin\omega t\,dt\right\}\sin\omega t$$

و با قرار دادن:

$$A(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\cos\omega t\,dt$$

$$B(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\sin\omega t\,dt$$

می‌توان نوشت:

$$x(t)=2\int_{0}^{\infty}A(\omega)\cos\omega t\,d\omega+2\int_{0}^{\infty}B(\omega)\sin\omega t\,d\omega$$

$A(\omega)$ و $B(\omega)$ در معادله فوق مؤلفه‌های تبدیل فوریه $x(t)$ هستند و معادله فوق بیان $x(t)$ با انتگرال فوریه یا همان تبدیل معکوس فوریه است.

نکته: تئوری که پشت تحلیل فوریه شرایطی را برای $x(t)$ در نظر می‌گیرد که در معادلات

انتگرال فوریه و مؤلفه‌های تبدیل فوریه $x(t)$ ($A(\omega)$ ، $B(\omega)$) درست باشد.

نکته: برای کاربردهای مهندسی، شرایط هم معمولاً بصورت زیر بیان می‌شود:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\, dt < \infty$$

یعنی تئوری کلاسیک فقط برای توابعی کاربرد دارد که $t \to \infty$، تابع به سمت صفر میل کند.

☐ فرم مختلط تبدیل فوریه:

در محاسبات ارتعاشات تصادفی معادلات انتگرال فوریه و مؤلفه‌های تبدیل فوریه ($A(\omega)$ و $B(\omega)$) را به فرم مختلط می‌توان باز نویسی نمود.

با استفاده از رابطه: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

و با تعریف: $X(\omega) = A(\omega) - i\,B(\omega)$

و با ترکیب مؤلفه‌های تبدیل فوریه $A(\omega)$ و $B(\omega)$ در رابطه فوق داریم:

$$X(\omega) = \underbrace{\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cos\omega t\right\}}_{A(\omega)} - i\,\underbrace{\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\sin\omega t\, dt\right\}}_{B(\omega)}$$

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\{\underbrace{\cos\omega t - i\sin\omega t}_{e^{-i\omega t}}\}\, dt$$

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$ → تبدیل فوریه مختلط $(x(t))$

تذکر: انتگرال فوریه $x(t)$ را می‌توان بصورت زیر نوشت طبق روابط قبلی

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega)\cos\omega t\, d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega)\sin\omega t\, d\omega$$

از آنجا که $A(\omega)$ تابع زوج و $\sin\omega t$ تابعی فرد است بنابراین $A(\omega)\sin\omega t$ تابع فرد می‌باشد در نتیجه خواهیم داشت:

$$\int_{-\infty}^{\infty} A(\omega)\sin\omega t\, d\omega = 0$$

و به طور مشابه داریم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} B(\omega)\cos\omega t\, d\omega = 0$$

بنابراین می توان نوشت:

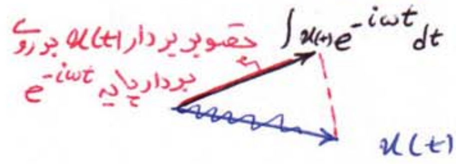
$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}A(\omega)\cos\omega t\,d\omega+\int_{-\infty}^{\infty}B(\omega)\sin\omega t\,d\omega$$

$$+i\int_{-\infty}^{\infty}A(\omega)\sin\omega t\,d\omega-i\int_{-\infty}^{\infty}B(\omega)\cos\omega t\,d\omega$$

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\{A(\omega)-iB(\omega)\}\{\cos\omega t+i\sin\omega t\}d\omega$$

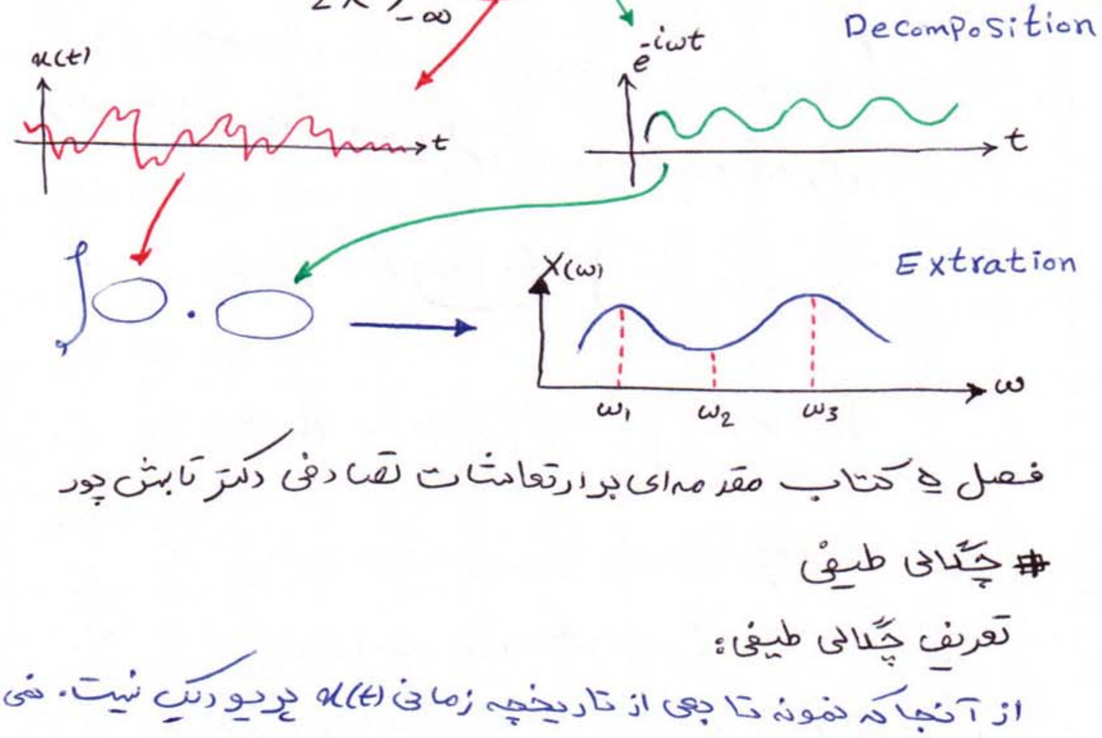
$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)\,e^{i\omega t}\,d\omega$$

☐ تذکر: تفسیر برداری تبدیل فوریه مختلط ($X(\omega)=\int x(t)e^{-i\omega t}dt$) را می توان با توجه به شکل زیر برای دو تابع $\int x(t)e^{-i\omega t}dt$ و $x(t)$ بیان نمود:



می توان گفت $\int x(t)e^{-i\omega t}dt$ تصویر $x(t)$ در امتداد بردار پایه $e^{-i\omega t}$ (در امتداد فرکانس) می باشد.

$$X(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{x(t)}\cdot\underbrace{e^{-i\omega t}}dt$$



فصل ۵ کتاب مقدمه ای بر ارتعاشات تصادفی دکتر تابش پور

چگالی طیفی

تعریف چگالی طیفی:

از آنجا که نمونه تابعی از تاریخچه زمانی $x(t)$ پریودیک نیست. نمی توان آن را با استفاده از سری فوریه گسسته (مجزا) بیان کرد. هم چنین برای فرآیند مانای $x(t)$ شرط زیر بر قرارنیست:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|dt<\infty$$

لذا مشهوری که سبک تحلیل فوریه برای این نمونه قابل استفاده نیست. این مشکل را می‌توان با تحلیل فوریه تابع خود هم‌بستگی $R_x(\tau)$ به جای $x(t)$ رفع کرد.

نکته: تابع خود هم بستگی بطور غیر مستقیم اطلاعات مهمی درباره فرکانس‌ها از فرآیند تصادفی ارائه می‌دهد.

نکته: اگر $x(t)$ و $x(t+\tau)$ هم فاز باشند، $R_x(\tau)$ دارای مقدار بیشینه و اگر در فاز مقابل باشند آنگاه تابع خود هم بستگی، کمینه خواهد بود

نکته: فرکانس‌های ارائه شده در $R_x(\tau)$ برحسب τ نشان دهنده محتوای فرکانسی نمونه تابع فرآیند تصادفی $x(t)$ است.

اگر فرآیند تصادفی $x(t)$ طوری تنظیم شود که میانگین آن صفر باشد $(m=E[x]=0)$ آنگاه به شرطی که $x(t)$ دارای مولفه‌های پریودیک نباشد خواهیم داشت:

$$R_x(\tau \rightarrow \infty)=0$$

و درنتیجه شرط:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|R_x(\tau)|d\tau<\infty$$

برآورده خواهد شد. اکنون می‌توان از روش تبدیل فوریه استفاده کرد و تبدیل فوریه $R_x(\tau)$ را بدست آورد. تبدیل فوریه و معکوس آن برای $R_x(\tau)$ بصورت زیر خواهد بود:

$$S_x(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\underline{R_x(\tau)}\,e^{-i\omega\tau}d\tau$$

$$R_x(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}S_x(\omega)\,e^{i\omega\tau}d\omega$$

تذکر: چون تابع $R_x(\tau)$ کراندار (Bounded) است لذا فوریه پذیری باشد.

$S_x(\omega)$: چگالی طیفی فرآیند $x(t)$ نامیده می‌شود و تابعی از فرکانس زاویه‌ای ω است.

تذکر: توابعی که برحسب فرکانس باشند طیف نامیده می‌شوند.

تذکر: اگر طیف را داشته باشیم می‌توانیم $R_x(\tau)$ را داشته باشیم.

تمرین: چرا به $S(\omega)$ چگالی طیفی گویند؟

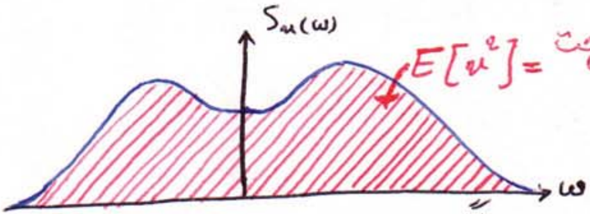
خواص چگالی طیفی:

۱- مهم‌ترین خاصیت $S_x(\omega)$ هنگامی آشکار می‌شود که $\tau=0$. در این حالت خواهیم داشت:

$$R_x(\tau=0)=\int_{-\infty}^{\infty}S_x(\omega)\,d\omega$$

با توجه به خواص $R_x(\tau)$ می‌توان نوشت:

$$R_x(\tau=0)=E\left[x(t)\,x(t+0)\right]=E\left[x^2\right]=\int_{-\infty}^{\infty}S_x(\omega)\,d\omega$$



میانگین مربع x مساوی سطح زیر چگالی طیفی

تذکر: تعریف میانگین مربع x مساوی سطح زیر چگالی طیفی است.

تذکر: واحد $S_x(\omega)$ بصورت واحد $E[x^2]$ تقسیم بر واحد فرکانس است.

نکته: یک پارامتر اساسی در رویکرد آماری به تحریک و پاسخ، جذر میانگین مربعات (RMS) می‌باشد که همان جذر $E[x^2]$ است:

$$RMS=\sqrt{E[x^2]}$$

۲- می‌توانیم چگالی طیفی را همانند تبدیل مختلط فوریه به دو قسمت حقیقی و موهومی نوشت:

$$S_x(\omega)=A(\omega)-i\,B(\omega)$$

و در نتیجه:

$$A(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}R_x(\tau)\cos\omega\tau\,d\tau$$

$$B(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}R_x(\tau)\sin\omega\tau\,d\tau$$

از آنجا که $R_x(\tau)$ تابعی زوج است و $\sin\omega\tau$ تابعی فرد است، پس حاصل ضرب آن‌ها فرد خواهد بود در نتیجه:

$$S_x(\omega)=A(\omega)$$

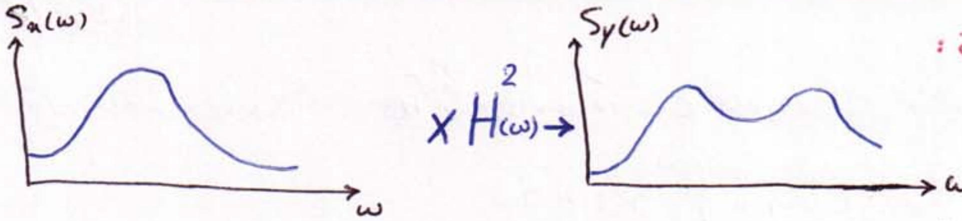
تذکر: لذا این تابع، زوج و حقیقی است. چون $\cos\omega\tau$ تابعی زوج است.

تذکر: از آنجا که $S_x(\omega)$ مساوی میانگین مربعات است، هرگز منفی نخواهد بود.

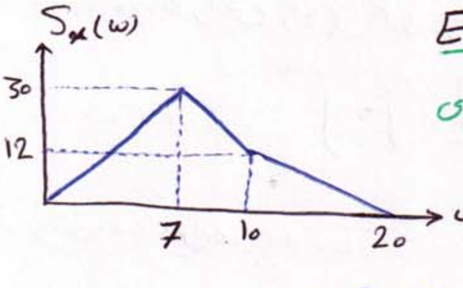
تذکر: خواص چگالی طیفی فرآیند تصادفی مانای $x(t)$ بصورت زیر است:

الف) حقیقی ب) زوج ج) غیر منفی

نکته :



مثال: میانگین مربعات x را بیابید؟ $\underbrace{E[x^2]}_{\text{انرژی}}=?$

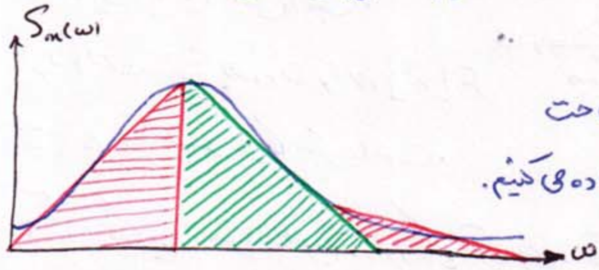


حل: $E[x^2]$ = سطح زیر چگالی طیفی

$$E[x^2]=\frac{30\times7}{2}+\frac{18\times3}{2}+12\times3+\frac{12\times10}{2}=228$$

نکته: توجه شود که x^2 در مکانیک معمولاً متناظر با انرژی است.

نحوه محاسبه مساحت چگالی طیف:



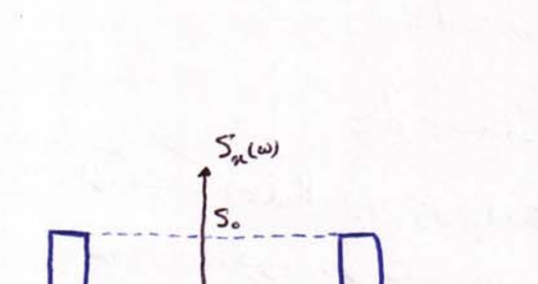
بصورت تقریبی برای محاسبه مساحت سطح زیر طیف از سه مثلث استفاده می‌کنیم.

برای فرآیندهای باند باریک (چگالی طیفی)

تمرین: خواص تابع چگالی طیفی چیست؟

☐ فرآیندهای باند باریک و باند پهن:

- فرآیند باند باریک:



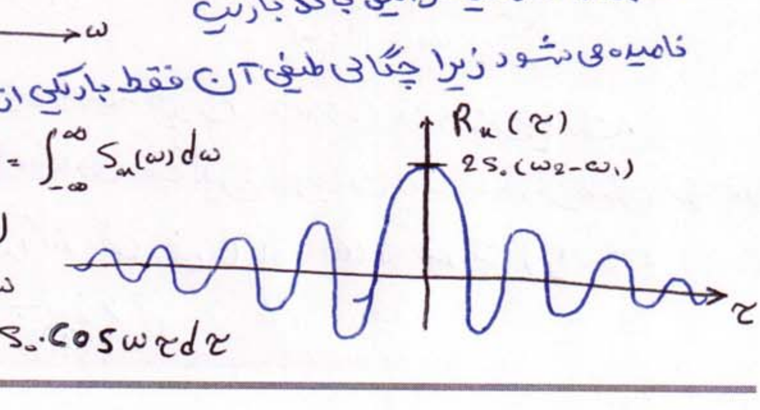
فرآیندی که چگالی طیفی آن طبق شکل مقابل باشد یک فرآیند باند باریک نامیده می‌شود زیرا چگالی طیفی آن فقط باریکی از فرکانس‌ها را شامل می‌شود.

$$\tau=0 \Rightarrow R_x(\tau=0)=E[x^2]=\int_{-\infty}^{\infty}S_x(\omega)\,d\omega$$

$$\Rightarrow E[x^2]=2S_0(\omega_2-\omega_1)$$

$$R_x(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}S_x(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega$$

$$\Rightarrow R_x(\tau)=2\int_{\omega_1}^{\omega_2}S_0\cos\omega\tau\,d\tau$$



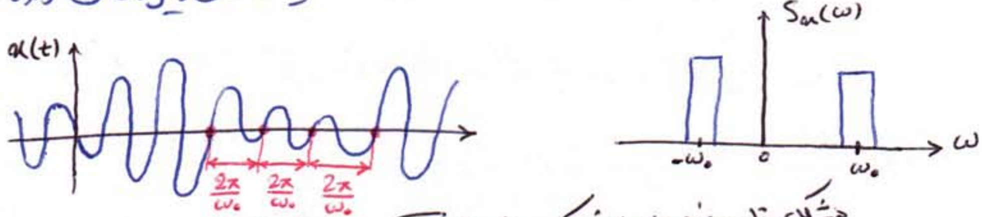
$$\Rightarrow R_x(\tau)=2S_0\left[\frac{1}{\tau}\sin\omega\tau\right]_{\omega_1}^{\omega_2}$$

$$=2S_0(\sin\omega_2\tau-\sin\omega_1\tau)$$

$$=\frac{4S_0}{\tau}\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)\tau\cdot\sin\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right)\tau$$

فرکانس غالب $R_x(\tau)$ برحسب τ مساوی $\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$ است.

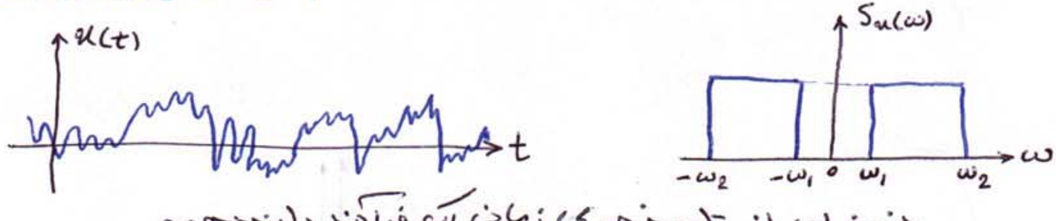
هم‌چنین هنگامی بیشینه است که $\tau=0$ باشد و به صورت یک تابع سینوسی با افزایش τ کاهش می‌یابد. تاریخچه زمانی یک نمونه فرآیند باند باریک در شکل زیر نشان داده شده است.



شکل تاریخچه زمانی یک نمونه فرآیند باند باریک

فرآیند باند پهن:

فرآیند باند پهن به گونه‌ای است که چگالی طیف آن محدوده وسیعی از فرکانس‌ها را می‌پوشاند و تاریخچه‌ی زمانی آن بصورت برهم نهی هارمونیک‌هایی با تمام این فرکانس‌ها است. در شکل زیر نمونه‌ای از تاریخچه‌ی زمانی یک فرآیند باند پهن نشان داده شده است.

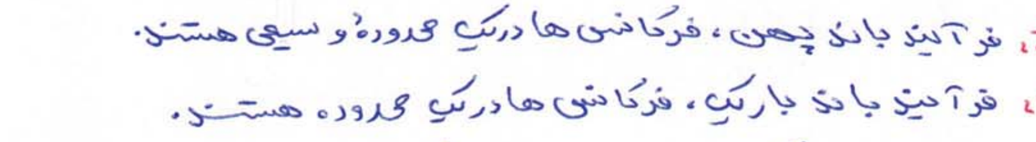


نمونه ای از تاریخچه‌ی زمانی یک فرآیند باند پهن

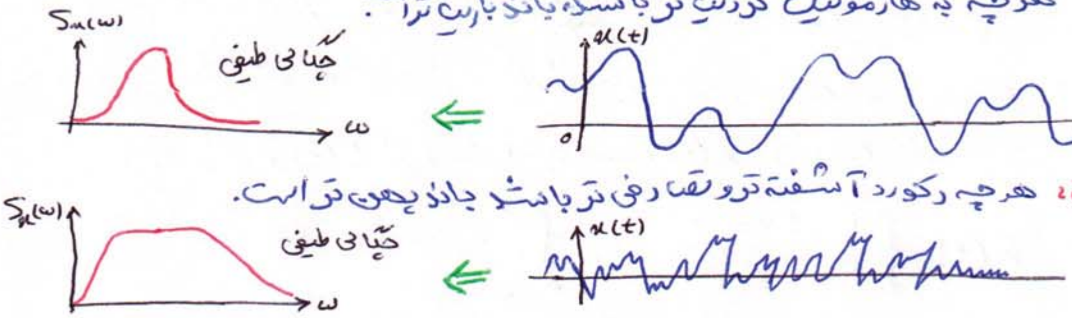
نکته، فرآیند باند پهن، فرکانس‌ها در یک محدوده‌ی وسیعی هستند.

نکته، فرآیند باند باریک، فرکانس‌ها در یک محدوده هستند.

نکته، هرچه به هارمونیک نزدیک‌تر باشد، باند باریک‌تر است.



نکته، هرچه رکورد آشفته‌تر و تصادفی‌تر باشد باند پهن‌تر است.



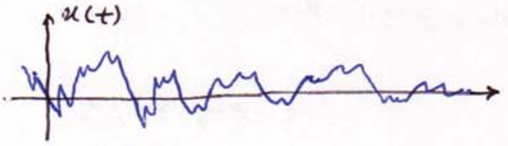
اغتشاش سفید : در حد، هنگامی که باند از $\omega_1=0$ تا $\omega_2=\infty$ توسعه یابد، چگالی طیفی با عنوان «سفید» و تاریخچه‌ی زمانی حاصل «اغتشاش سفید» نامیده می‌شود.

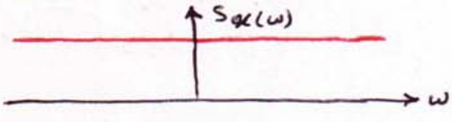
با توجه به معادله $R_x(\tau=0)=E[x^2]=\int_{-\infty}^{\infty}S_x(\omega)d\omega$ مقدار میانگین مربعات فرآیند اغتشاش سفید، نامحدود (بی‌نهایت) خواهد بود

اغتشاش سفید فقط یک مفهوم تئوری است. اما در عمل یک طیف، سفید نامیده می‌شود اگر شامل محدوده‌ی وسیعی از فرکانس‌ها باشد.

با فرض $\omega_1=0$ تابع خود همبستگی بصورت زیر است:

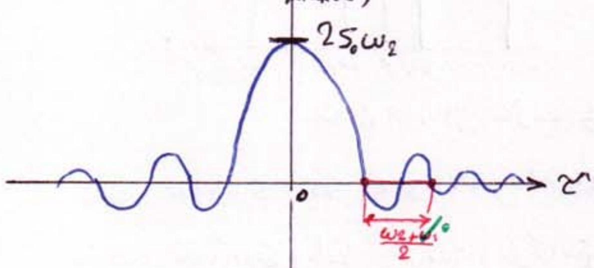
$$R_x(\tau)=\frac{4S_0}{\tau}\cos\frac{\omega_2\tau}{2}\sin\frac{\omega_2\tau}{2}=2S_0\frac{\sin\omega_2\tau}{\tau}$$





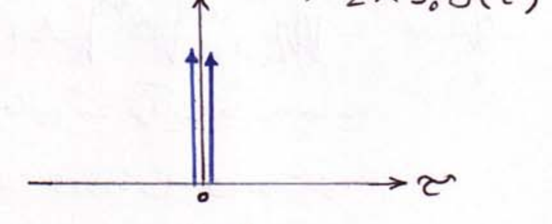
$$\frac{a\sin bx}{x}\quad,\quad\lim_{\substack{x\to 0\\ b\to\infty}}\frac{a\sin bx}{x}$$

$$R_x(\tau)\Big|_{\tau=0}=\lim_{\substack{\tau\to 0\\ \omega_2\to\infty}}2S_0\frac{\sin\omega_2\tau}{\tau}=2S_0\omega_2$$



(الف)

⇒



(ب)

هنگامی که $\omega_2\to\infty$ ($T_2\to 0$)، سیکل‌های مجاور آن چنان بهم فشرده می‌شوند که انگار یک میله با ارتفاع بی‌نهایت و پهنای صفر است. که البته سطح زیر آن محدود و مساوی $2\pi S_0$ است. این رفتار را می‌توان با تابع دلتای دیراک، $\delta(t)$، نشان داد.

$$\delta(t)=\begin{cases}1 & t=0\\ 0 & t\neq 0\end{cases}\qquad\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau)d\tau=1$$

درحالت عمومی تر $\delta(\tau-T)$ غیر از $\tau=T$ همیشه صفر است و :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau-T)f(\tau)d\tau=f(\tau=T)$$

که $f(\tau)$ یک تابع دلخواه پیوسته برحسب τ است. تابع خود همبستگی برای فرآیند اغتشاش سفید مانا بصورت زیر است:

$$R_x(\tau)=2\pi S_0\,\delta(\tau)$$

چگالی طیفی بصورت زیر است:

$$S_x(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}2\pi S_0\,\delta(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau$$

با توجه به خواص تابع دلتای دیراک می توان نوشت: $S_x(\omega)=S_0$

بنابراین مقدار میانگین مربعات برای اغتشاش سفید مساوی صفر است.

تمرین: فرمول پایین صفحه ۶۷ کتاب مقدمه‌ای بر ارتعاشات تصادفی را در Excel یا Matlb رسم کنید.

$$R_x(\tau)=2S_0\left[\frac{1}{\tau}\sin\omega\tau\right]_{\omega_1}^{\omega_2}$$

تمرین: مقدار بیشینه شکل ۵-۳ مطابق با رابطه $R_x(\tau)=\frac{2S_0}{\tau}(\sin\omega_2\tau-\sin\omega_1\tau)$ را محاسبه نمائید؟ (جهت رفع ابهام از قانون هوپیتال استفاده شود)

تمرین: معادلات موجود در شکل ۵-۶ کتاب مقدمه‌ای بر ارتعاشات تصادفی را تفسیر نمائید؟

تمرین: معادله زیر را اثبات نمائید؟ (به تیتر ۵-۳ کتاب مقدمه‌ای بر ارتعاشات تصادفی رجوع شود).

$$S_{\dot{x}}(\omega)=\omega^2 S_x(\omega)$$

چگالی طیفی برای مشتق‌ها یک فرآیند:

اگر $S_x(\omega)$ برای یک فرآیند تصادفی مانای $x(t)$ معلوم باشد، آن‌گاه می‌توانیم $E[x^2]$ را محاسبه کنیم. (سطح زیر منحنی چگالی طیفی). همچنین می‌توانیم چگالی طیفی مشتقات $x(t)$ را تعیین کنیم ($\frac{dx}{dt}=\dot{x}$ و $\frac{d^2x}{dt^2}=\ddot{x}$).

می‌دانیم تابع خود همبستگی بصورت زیر است:

$$R_x(\tau)=E[x(t).x(t+\tau)]$$

با داشتن مجموعه‌ای از $x(t)$ ها، برای میانگین چند رکورد می توان نوشت،

$$R_x(\tau)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{r=1}^{N}x_r(t)\cdot x_r(t+\tau)$$

از تابع بالا نسبت به τ مشتق می گیریم لذا خواهیم داشت،

$$\frac{d}{d\tau}\left\{x_r(t)\,x(t+\tau)\right\}=x_r(t)\frac{d}{d\tau}x(t+\tau)$$

$$=x_r(t)\frac{d}{d(t+\tau)}x_r(t+\tau)\cdot\frac{d(t+\tau)}{d\tau}$$

$$=x_r(t)\,\dot{x}_r(t+\tau)$$

بنابراین خواهیم داشت،

$$\frac{d}{d\tau}\left(R_x(\tau)\right)=E\left[x(t)\cdot\dot{x}(t+\tau)\right]$$

برای یک فرآیند مانا، میانگین چند رکورد از زمان t مستقل است لذا خواهیم داشت،

$$E\left[x(t)\cdot\dot{x}(t+\tau)\right]=E\left[x(t-\tau)\,\dot{x}(t)\right]$$

یا

$$\frac{d}{d\tau}\left\{R_x(\tau)\right\}=E\left[x(t-\tau)\,\dot{x}(t)\right]$$

اکنون دوباره نسبت به τ مشتق بگیریم خواهیم داشت،

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\left\{R_x(\tau)\right\}=-E\left[\dot{x}(t-\tau)\,\dot{x}(t)\right]=-R_{\dot{x}}(\tau)$$

که $R_{\dot{x}}(\tau)$ تابع خود همبستگی $\dot{x}(t)$ است.

با توجه به تعریف انتگرال فوریه می توان نوشت، $R_x(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}S_x(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega$

با مشتق گرفتن از تابع بالا نسبت به τ،

$$\frac{d}{d\tau}\left(R_x(\tau)\right)=\int_{-\infty}^{\infty}i\omega\,S_x(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega$$

و مشتق دوم،

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\left(R_x(\tau)\right)=-\int_{-\infty}^{\infty}\omega^2S_x(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega=-R_{\dot{x}}(\tau)$$

همچنین $R_{\dot{x}}(\tau)$ را می توان بصورت تبدیل معکوس چگالی طیفی $S_{\dot{x}}(\omega)$ نوشت،

$$R_{\dot{x}}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}S_{\dot{x}}(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega$$

لذا با توجه به دو معادله فوق الذکر خواهیم داشت،

$$\boxed{S_{\dot{x}}(\omega)=\omega^2S_x(\omega)}$$

این یک نتیجه بسیار مهم است زیرا $E[\dot{x}^2]$ را می‌توان با داشتن $S_x(\omega)$ محاسبه کرد، بنابراین خواهیم داشت،

$$E[\dot{x}^2]=\int_{-\infty}^{\infty} S_{\dot{x}}(\omega)d\omega=\int_{-\infty}^{\infty}\omega^2 S_x(\omega)d\omega$$

بنابراین بطور مشابه می‌توان نوشت،

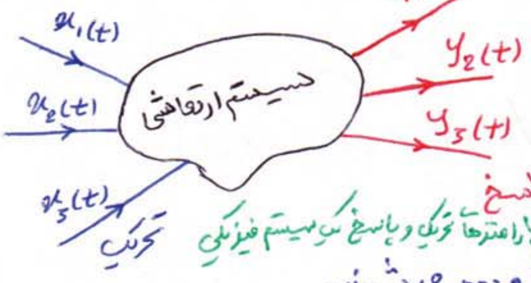
$$E[\ddot{x}^2]=\int_{-\infty}^{\infty} S_{\ddot{x}}(\omega)d\omega=\int_{-\infty}^{\infty}\omega^4 S_x(\omega)d\omega$$

$$\boxed{S_{\ddot{x}}(\omega)=\omega^2 S_{\dot{x}}(\omega)=\omega^4 S_x(\omega)}$$

فصل ٦ کتاب مقدمه‌ای بر ارتعاشات تصادفی، دکتر تابش پور

☐ رابطه پاسخ - تحریک برای سیستم‌های خطی

⌗ پاسخ سیستم ارتعاشی:



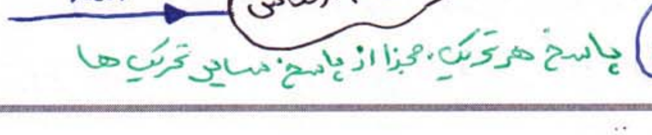
پارامترهای تحریک و پاسخ یک سیستم فیزیکی

فرض کنید تحریک‌های (ورودی) $x_1(t)$، $x_2(t)$ و .... به یک سیستم مطابق شکل مقابل وارد می‌شوند، منجر به پاسخ‌های $y_1(t)$، $y_2(t)$، $y_3(t)$ و ... می‌شوند.

اگر سیستم بصورت خطی باشد معادله دیفرانسیل آن بصورت زیر است،

$$a_n\frac{d^n y_1}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y_1}{dt^{n-1}}+\cdots\cdots+a_1\frac{dy_1}{dt}+a_1+a_0y_1=$$
$$\Big\{b_r\frac{d^r x_1}{dt^r}+b_{r-1}\frac{d^{r-1}x_1}{dt^{r-1}}+\cdots\cdots+b_1\frac{dx_1}{dt}+b_0x_1+$$
$$c_s\frac{d^s x_2}{dt^s}+c_{s-1}\frac{d^{s-1}x_2}{dt^{s-1}}+\cdots\cdots+c_1\frac{dx_2}{dt}+c_0x_2+$$
$$d_t\frac{d^t x_3}{dt^t}+d_{t-1}\frac{d^{t-1}x_3}{dt^{t-1}}+\cdots\cdots+d_1\frac{dx_3}{dt}+d_0x_3+\cdots\Big\}$$

با توجه به خطی بودن سیستم می‌توان فرض کرد پاسخ هر تحریک، مجزا از پاسخ سایر تحریک‌ها است.



پاسخ هر تحریک، مجزا از پاسخ سایر تحریک‌ها

$$m\ddot{y}+c\dot{y}+ky=x(t)$$

معادله کلاسیک سیستم یک درجه آزادی

❖ روش پاسخ فرکانسی:

یک روش کاملاً متفاوت برای تشریح خصوصیات دینامیکی یک سیستم خطی، عبارت است از، تعیین پاسخ تحت یک تحریک سینوسی مانند، $x(t)=x_0 \sin\omega t$

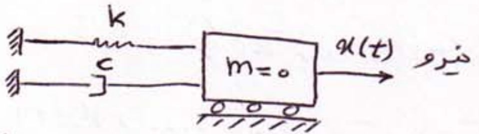
لذا پاسخ سیستم نیز بصورت یک موج سینوسی با فرکانس ω و اختلاف فاز ϕ بصورت زیر است:

$$y(t)=y_0 \sin(\omega t-\phi)$$

فرض می شود اگر تحریکی وجود نداشته باشد آن گاه پاسخ سیستم نیز صفر خواهد بود.

نکته: نسبت دامنه ها $\frac{y_0}{x_0}$ و زاویه فاز ϕ، معرف خصوصیات انتقال یا تابع انتقال سیستم در فرکانس ω هستند.

مثال: نسبت دامنه ها و زاویه فاز را برای شکل زیر تعیین کنید؟



سیستم ساده فنر و میراگر (جسم بدون جرم)

معادله حرکت سیستم:

$$\overset{0}{\cancel{m}}\ddot{y}+c\dot{y}+ky=x(t)$$

هنگامی که $x(t)$ یک موج سینوسی با دامنه ثابت مطابق رابطه $x(t)=x_0 \sin\omega t$ باشد پاسخ خصوصی سیستم

$$y_p=y_0 \sin(\omega t-\phi)$$

با جاگذاری مشتقات $y_p(t)$ در معادله حرکت سیستم بر ابر است با:

$$c\left\{y_0 \omega \cos(\omega t-\phi)\right\}+k\left\{y_0 \sin(\omega t-\phi)\right\}=x_0 \sin\omega t$$

که منجر به معادله زیر می شود:

$$y_0 \sin\omega t\left\{c\omega \sin\phi+k\cos\phi-\frac{x_0}{y_0}\right]+y_0 \cos\omega t\left\{c\omega\cos\phi-k\sin\phi\right\}=0$$

برای برقراری معادله بالا باید داخل آکولادها صفر باشد به این ترتیب نسبت دامنه ها بصورت زیر خواهد بود:

$$\frac{y_0}{x_0}=\frac{1}{\sqrt{(c\omega)^2+k^2}}$$

و زاویه فاز مساوی است با:

$$\phi=\tan^{-1}\frac{c\omega}{k}$$

نکته: به جای فکر روی نسبت دامنه ها و زاویه فاز به عنوان دو کمیت مجزا بهتر است از یک عدد مختلط برای نمایش هر دو مقدار استفاده شود. این عدد مختلط، تابع پاسخ فرکانس

$H(\omega)$ نامیده می‌شود. $H(\omega)$ طوری است که مقدار آن مساوی نسبت دامنه‌ها و حاصل قسمت موهومی تقسیم بر قسمت حقیقی آن مساوی $\tan\phi$ است.

$H(\omega)$ بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$H(\omega)=A(\omega)-iB(\omega)$$

که $A(\omega)$ و $B(\omega)$ توابع حقیقی برحسب ω هستند. مقدار $H(\omega)$ برابر است با:

$$H(\omega)=\sqrt{\left(A_{(\omega)}^{2}+B_{(\omega)}^{2}\right)}=\frac{y_0}{x_0}$$

و:

$$\frac{\text{قسمت موهومی}}{\text{قسمت حقیقی}}=\frac{B(\omega)}{A(\omega)}=\tan\phi$$

می‌توان نوشت:

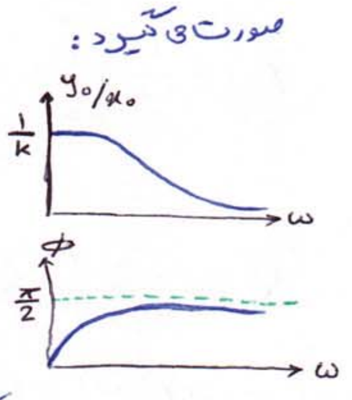
$$x(t)=x_0\sin\omega t=x_0\left\{\text{the Imaginary Part of } e^{i\omega t}\right\}=x_0\,\mathrm{Im}\left(e^{i\omega t}\right)$$

اکنون پاسخ سیستم بصورت زیر خواهد بود:

$$y(t)=x_0\,\mathrm{Im}\left\{H(\omega)\,e^{i\omega t}\right\}$$

اثبات این نکته با جایگذاری معادله $H(\omega)=A(\omega)-iB(\omega)$ در معادله فوق الذکر صورت می‌گیرد:

$$\begin{aligned}y(t)&=x_0\,\mathrm{Im}\left\{A(\omega)-iB(\omega)\right\}\left\{\cos\omega t+i\sin\omega t\right\}\\&=x_0\left\{A(\omega)\sin\omega t-B(\omega)\cos\omega t\right\}\\&=x_0\sqrt{\left(A(\omega)^{2}+B(\omega)^{2}\right)}\,\sin\left(\omega t-\tan^{-1}\frac{B}{A}\right)\\&=y_0\sin(\omega t-\phi)\end{aligned}$$



بنابراین اگر ورودی هارمونیک بصورت زیر باشد:

$$x(t)=x_0\,e^{i\omega t} \quad Ⓐ$$

پاسخ $y(t)$ بصورت زیر خواهد بود:

$$y(t)=H(\omega)\,x_0\,e^{i\omega t} \quad Ⓑ$$

که $H(\omega)$ تابع پاسخ فرکانسی مختلط سیستم است.

نکته: لازم نیست مقدار x_0 در معادلات Ⓐ و Ⓑ حقیقی باشد. مقدار آن دامنه $x(t)$ و مقدار $H(\omega)x_0$ دامنه $y(t)$ است.

Impact : برخورد یک جسم به جسم دیگر (کلمه Impact جنبه برخورد دارد).

Impulse : جنبه تحریک دارد، تحریک زلزله یا یک شتاب به یک جسم را اشاره گویند (زلزله حوزه نزدیک در واقع Impulse می باشد).

رابطه بین توابع پاسخ فرکانسی و پاسخ ضربه :

روش تبدیل فوریه برای تبدیل یک تابع غیر پریودیک به طیف فرکانسی آن ، حلقه واسطه بین تابع پاسخ فرکانسی و تابع پاسخ ضربه است. از آنجا که سیستم در ابتدا در حالت سکون است و با توجه به اینکه بعد از اعمال ضربه ، پاسخ ایجاد شده کاهش می یابد می توان نوشت :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$$

و بنابراین می توان از $x(t) = \delta(t)$ و پاسخ انتقالی $h(t) = y(t)$ تبدیل فوریه گرفت. به این ترتیب رابطه زیر بدست می آید :

$$X_{(\omega)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-i\omega t} dt \quad Ⓐ$$

و :

$$Y_{(\omega)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-i\omega t} dt \quad Ⓑ$$

معادله Ⓐ را می توان بصورت زیر بازنویسی کرد :

$$X_{(\omega)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \, Cos\omega t \, dt - i \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \, Sin\omega t \, dt$$

و با استفاده از خاصیت تابع دلتا انتگرال اول مساوی واحد و انتگرال دوم مساوی صفر خواهد شد لذا خواهیم داشت :

$$X_{(\omega)} = \frac{1}{2\pi}$$

می دانیم وقتی که یک سیستم خطی تحت تحریک هارمونیک با فرکانس ω قرار گیرد آنگاه پاسخ آن نیز دارای همان فرکانس خواهد بود.

بنابراین منطقی است انتظار داشته باشیم که برای یک سیگنال ورودی غیر پریودیک مؤلفه های فرکانس $X(\omega)\,d\omega$ در بازه فرکانسی ω تا $\omega + d\omega$ در تحریک، با مؤلفه های $Y(\omega)\,d\omega$ در همان بازه فرکانسی، متناظر باشد. در این حالت اگر

تحریک هارمونیک بصورت زیر می‌باشد: $x(t) = X_{(\omega)} d\omega \, e^{i\omega t}$

آنگاه پاسخ هارمونیک مربوطه بصورت زیر خواهد بود:

$$y(t) = Y_{(\omega)} \, d\omega \, e^{i\omega t} \quad Ⓐ$$

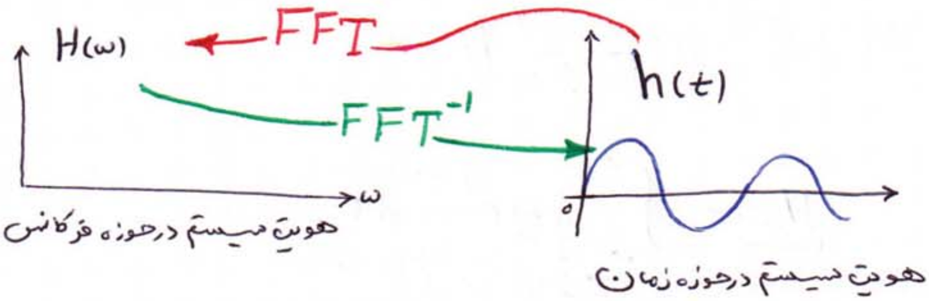
حال با توجه به معادلات $x(t) = x_0 e^{i\omega t}$ و $y(t) = H_{(\omega)} x_0 e^{i\omega t}$ می‌توان نوشت:

$$y_{(t)} = H_{(\omega)} X_{(\omega)} \, d\omega \, e^{i\omega t} \quad Ⓑ$$

حال با مقایسه معادله Ⓐ و Ⓑ به نتیجه زیر می‌رسیم:

$$\boxed{Y_{(\omega)} = H_{(\omega)} \cdot X_{(\omega)}}$$

نکته:



هویت سیستم درحوزه فرکانس

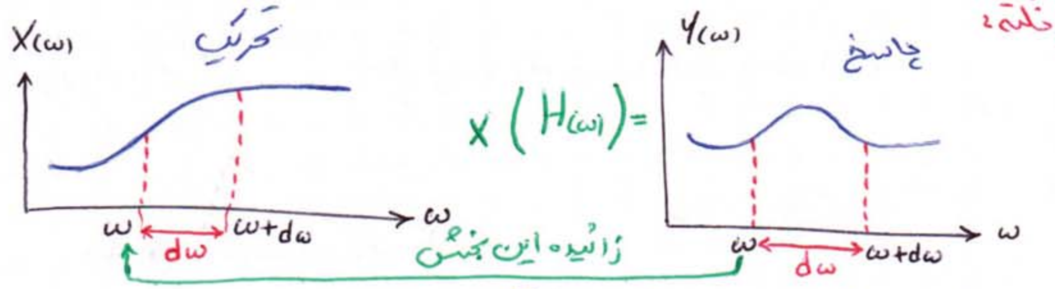
هویت سیستم درحوزه زمان

نکته: دلتای دیراک ($\delta(t)$) تابعی زوج است.

تمرین: چرا $\delta(t)$ عملاً نمونه‌گیری انجام می‌دهد؟
$\int \delta(t-\tau) f(t) d\tau = f(t)$

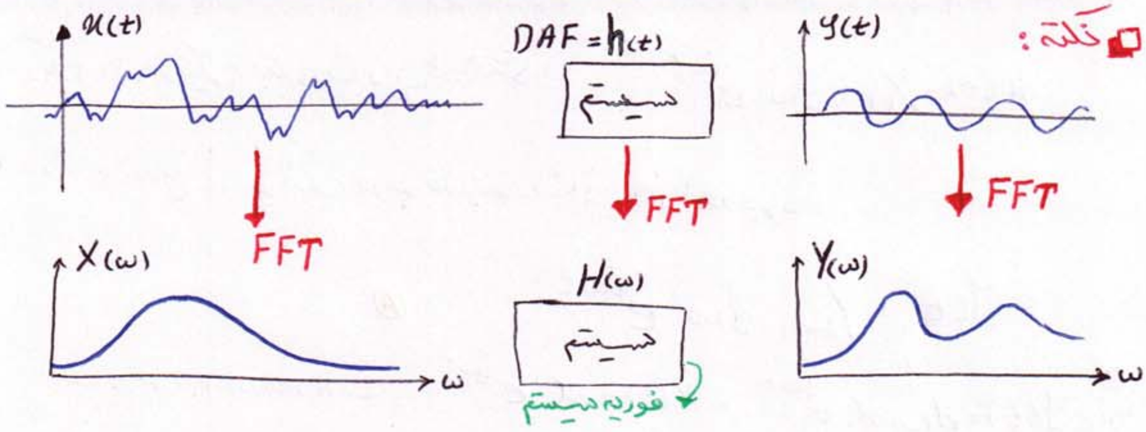
تمرین: اثبات کنید که ($\int \delta(t) \cos\omega t \, dt = \cos 0 = 1$)

نکته:



فرکانس تحریک و پاسخ یکی می‌شود.

☐ نکته :



تمرین: معادله ۶-۲۰ کتاب مقدمه‌ای بر ارتعاشات تصادفی را اثبات کنید؟

$$Y_{(\omega)} = H_{(\omega)} \cdot X_{(\omega)}$$

اگر جا جا بگذاری $X_{(\omega)} = \frac{1}{2\pi}$ و $Y_{(\omega)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, e^{-i\omega t} dt$ در معادله $Y_{(\omega)} = H_{(\omega)}\, X_{(\omega)}$ خواهیم داشت:

$$\frac{1}{\cancel{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\cancel{2\pi}} H_{(\omega)}$$

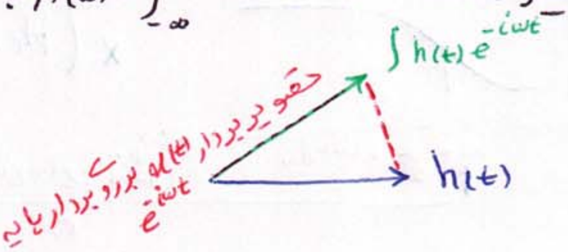
$$\underbrace{H_{(\omega)}}_{\text{هویت سیستم در حوزه فرکانس}} = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{h(t)}_{\text{هویت سیستم در حوزه زمان}} e^{-i\omega t} dt$$

نکته: طبق رابطه بالا می توانیم تفسیر نماییم که: تابع پاسخ فرکانسی، تبدیل فوریه پاسخ ضربه است. توجه شود که تبدیل فوریه معکوس آن را می توان بصورت مقابل نوشت:

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H_{(\omega)}\, e^{i\omega t} d\omega$$

☐ تبدیل فوریه: ضرب داخلی یک تابع در یک هارمونیک با فرکانس ω است.

تفسیر معادله $H_{(\omega)} = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, e^{-i\omega t} dt$ با خوانش جلسه اول:

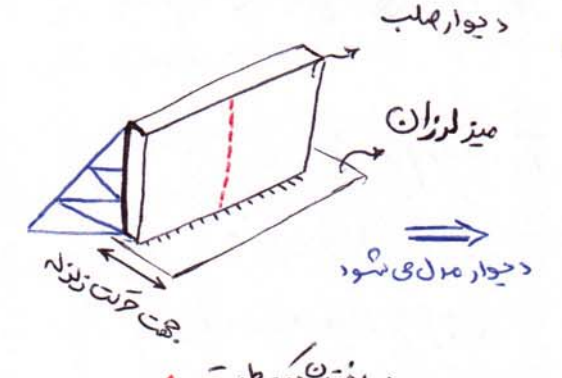


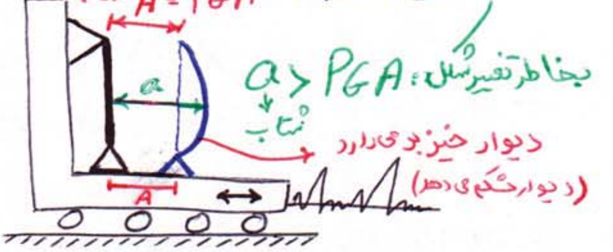
جلسه پنجم ۹۴/۲/۱۸

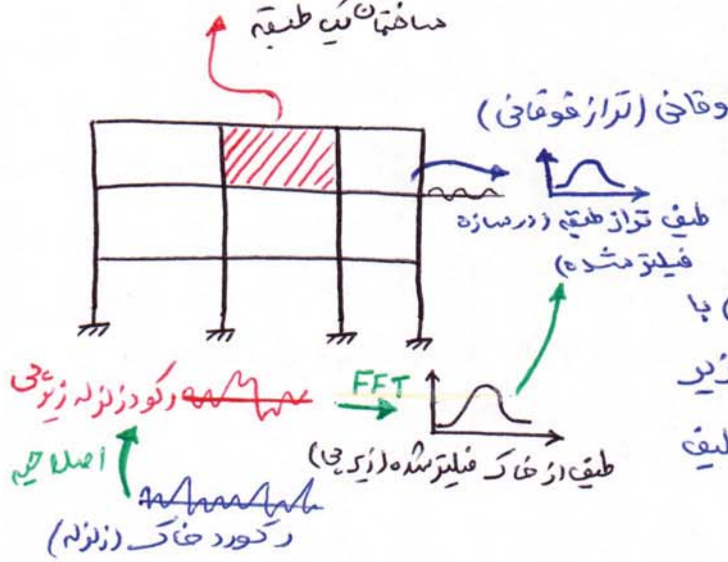
نمونه سوال امتحانی:

الف) سیستم صلب بدون جرم:

بررسی وضعیت کمانش خارج از صفحه دیوار صلب:







در ساختمان چند طبقه پارتیشن طبقه فوقانی (تراز فوقانی) را در خارج صفحه بررسی می‌کنیم؟

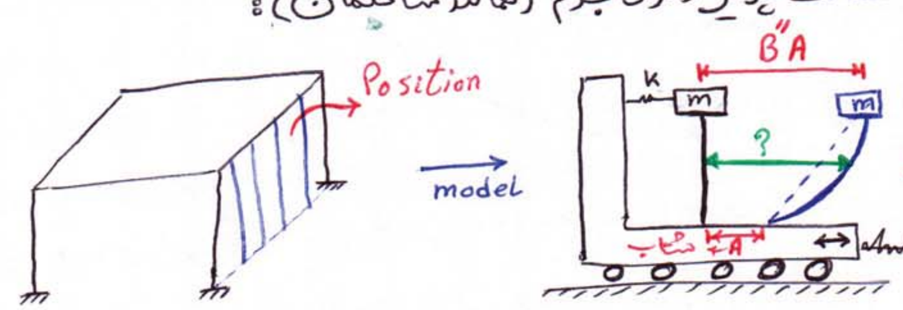
حل:

گام ۱: رکورد زلزله از سنگ بستر (خاک) با اصلاحیه (modify) به زلزله زیر پی تبدیل می‌نماییم و سپس طیف موجود را بدست می‌آوریم.

- با عبور رکورد از خاک به زیر پی اصلاحیه می‌خورد که در ادامه توضیح داده می‌شود.

طیف تراز پی را به طیف تراز طبقه تبدیل می‌شود.

ب) سیستم انعطاف پذیر دارای جرم (همانند ساختمان):



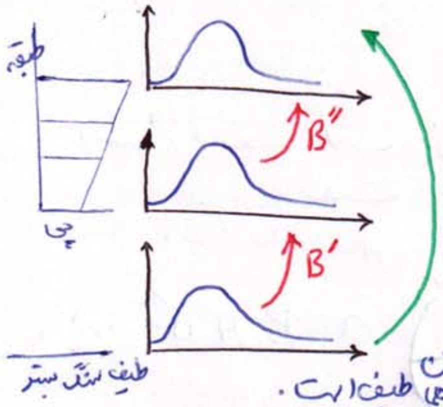
$$\frac{A+B''A}{2} = ?$$

فرض جابجایی بیشینه در وسط پارتیشن است.

نکته:

$\Delta_1 < \frac{1}{2}\Delta_2 \Rightarrow$ صلب

$\Delta_1 > \frac{1}{2}\Delta_2 \Rightarrow$ غیر صلب



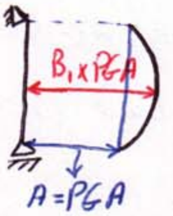
$$B=B'B''$$

تذکر: چنانچه دیوار صلب باشد خطی بودن هم صادق است. اگر دیوار صلب نباشد در نتیجه خطی نمی باشد تغییر شکل ها در رابطه $\frac{A+B''A}{2}$ برقرار نمی باشد.

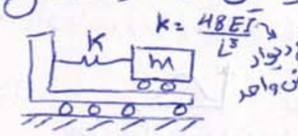
نکته: تجلی طیف در (B Factor) است.

نکته: ابزار بارگذاری های مختلف (زلزله - باد و ...) همان طیف است.

تمرین اختیاری مهم: فرض ۱) سیستم یک طبقه با دیوار صلب ۲) ساختمان منعطف



راهنمایی: برای حل ها تنها یک ستون دو سر مفصل عمل می کنیم.

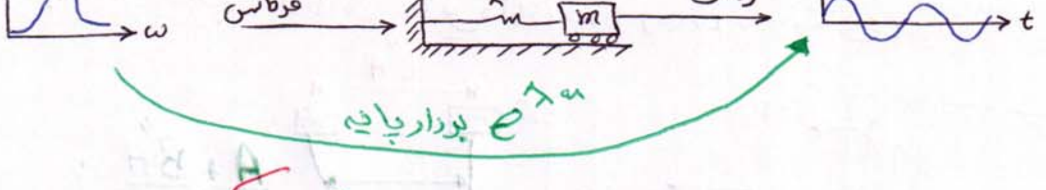


مقطع برای بارگسترده یکنواخت، همان اینرسی و ...

نکته: تفسیر فیزیکی معادله های ٦-۲۱ ، ٦-۲۲ کتاب مقدمه ای بر ارتعاشات تصادفی:

$$H(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, e^{-i\omega t}\, dt \qquad ۲۱-٦$$

$$h(t)=\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega \qquad ۲۲-٦$$



فضای برداری هارمونیک ← نوسانی ← پاسخ { فنر / بازنوسانی

خوانش ریاضی معادله های ٦-۲۱ و ٦-۲۲ :
تبدیل فوریه ضرب داخلی یک تابع در یک هارمونیک با فرکانس ω است.

نمونه سوال امتحانی: معادله $Y(\omega)=H(\omega)\cdot X(\omega)$ را بیان کنید؟ چرا این مزایا و نواقص (نه معایب)

رابطه چندان پراستفاده نمی باشد؟

حل: یک سیستم خطی تحت تحریک دلخواه $x(t)$ قرار می گیرد و $\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|dt<\infty$ است. هدف تعیین پاسخ $y(t)$ است. می توان نوشت:

$$X(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\,e^{-i\omega t}dt$$

و

$$Y(\omega)=H(\omega)\cdot X(\omega)$$

با استفاده از تبدیل فوریه معکوس و با توجه به دو معادله ی بالا می توان نوشت:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}H(\omega)\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\,e^{-i\omega t}dt\right\}e^{i\omega t}d\omega$$

چون رابطه بالا زمان بر و پیچیده است از این روش استفاده نمی شود. (رابطه به درد بخوری نیست)

$y(t)$ رابطه پاسخ سیستم است. معمولاً تعیین انتگرال برحسب ω بسیار مشکل است لذا استفاده از رابطه ی بالا برای تعیین پاسخ در اکثر مواقع، منطقی نیست. بنابراین به سراغ روشی پاسخ ضربه می رویم.

برای حل مسائل ارتعاشی امروزه از رابطه پرکاربرد $S_y(\omega)=H^2_{(\omega)}\cdot S_x(\omega)$ استفاده می شود.

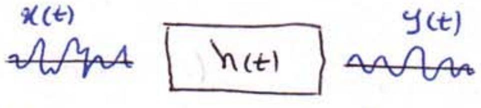
نکته مهم: اگر رابطه $Y_{(\omega)}=H_{(\omega)}\,X_{(\omega)}$ را به توان ۲ برسانیم. $\left\{Y^2_{(\omega)}=H^2_{(\omega)}\,X^2_{(\omega)}\right\}$

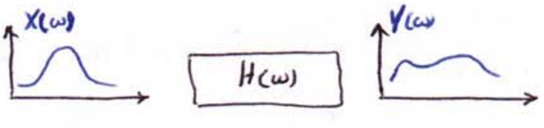
آیا حل می توانیم این رابطه جدید را جایگزین رابطه $\left\{S_y(\omega)=H^2_{(\omega)}\,S_x(\omega)\right\}$ کرد؟

جواب نه. چرا؟

نکته:

حوزه زمان:
از حوزه فرآیند فوریه می گیریم.





حوزه فرکانس

تذکر: $H(\omega)=h(t)$

روش‌های محاسبه پاسخ سیستم :

۱- روش اول : حل معادله دیفرانسیل $m\ddot{y}_{(t)}+C\dot{y}_{(t)}+Ky_{(t)}=x(t)$

۲- روش دوم : از $x(t)$ بایستی FFT بگیریم.

$$Y_{(\omega)}=H_{(\omega)}\cdot X_{(\omega)}\ ,\quad y(t)=Y_{(\omega)}\,d\omega\, e^{i\omega t}$$

$$y(t)=H_{(\omega)}\,X_{(\omega)}\,d\omega\, e^{i\omega t}$$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}H_{(\omega)}\underbrace{X_{(\omega)}}_{\text{زمانی}\downarrow\text{می‌کنیم}}e^{i\omega t}\,d\omega$$

$$X_{(\omega)}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-i\omega t}\,dt$$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}H_{(\omega)}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\,e^{-i\omega t}dt\right\}e^{i\omega t}\,d\omega$$

چون این رابطه هزینه بر و
پیچیده است از این روش استفاده نمی‌شود.

۳- روش سوم : استفاده از پاسخ ضربه (بهترین پاسخ)

بازگشت به جلسه قبل

به علت خطی بودن سیستم می‌توان از اصل برهم‌نهی (super-Position) برای تعیین پاسخ $y(t)$ استفاده کرد.

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t-\tau)\,x(\tau)\,d\tau$$ معادله ۶-۲۴ (ارتعاشات)

بدین صورت می‌توان پاسخ سیستم را تعیین کرد. به این رویکرد در ریاضیات، تلفیق (convolution) و در دینامیک سازه‌ها، انتگرال دوهامل گفته می‌شود.

نکته: تلفیق (Convolution): تلفیق، عملی روی دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ است که منجر به تولید تابع سومی می‌شود که با $(f\times g)_{(x)}$ نشان داده می‌شود.

$$(f\times g)_{(x)}=\int_{-\infty}^{\infty}f(x-y)\,g(y)\,dy$$

این انتگرال در تحلیل سازه‌ها به نام انتگرال برهم نهی (super-Position) است.
این انتگرال مهم‌ترین رابطه برای پاسخ سیستم خطی است. به شرط آن که سیستم Passive باشد. یعنی پاسخ آن فقط به تحریک‌های گذشته (Past) وابسته باشد و ضمناً $h(t)$ سرانجام به سمت تعادل استاتیکی برود یعنی $\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|<\infty$ در آن صورت معادله ، $y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t-\tau)x(\tau)d\tau$ پاسخ سیستم تحت هر تحریک $x(t)$ است که مقدار $|x(t)|$ بین دو مرز مشخص کران‌دار محدود باشد. (صفحه ۹۶ کتاب ارتعاشات)

نکته: روابط :

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{H(\omega)}\underbrace{\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\,e^{-i\omega t}dt\right\}}e^{i\omega t}\underbrace{d\omega} \qquad \text{Ⓘ}$$

و :

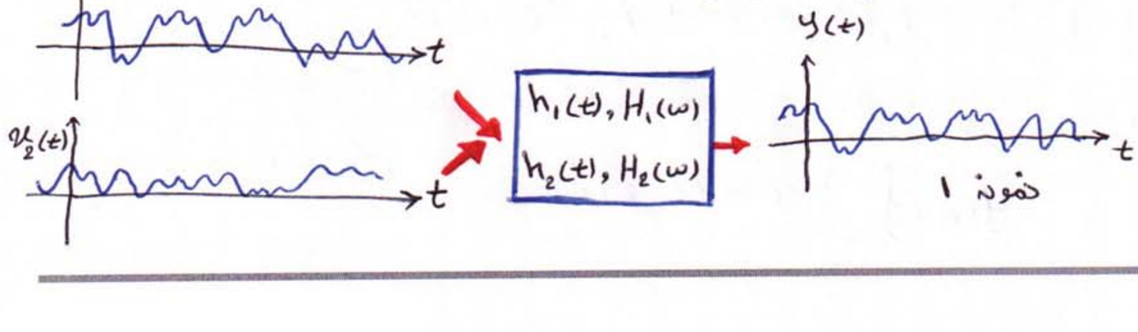
$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\overbrace{h(t-\tau)}\,\overbrace{x(\tau)}\,\overbrace{d\tau} \qquad \text{Ⓘⓘ}$$

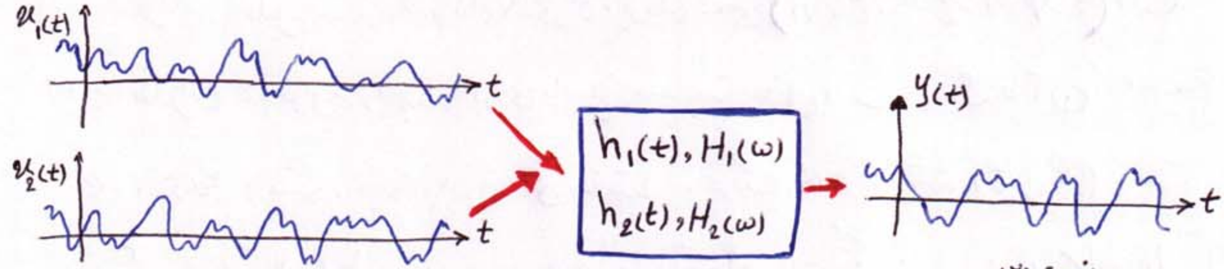
یکی هستند ولی تفاوت آن روابط آن است که رابطه Ⓘ در حوزه فرکانس انتگرال می‌گیرد اما رابطه Ⓘⓘ در حوزه زمان انتگرال می‌گیرد.

فصل ۷ کتاب مقدمه‌ای بر ارتعاشات تصادفی

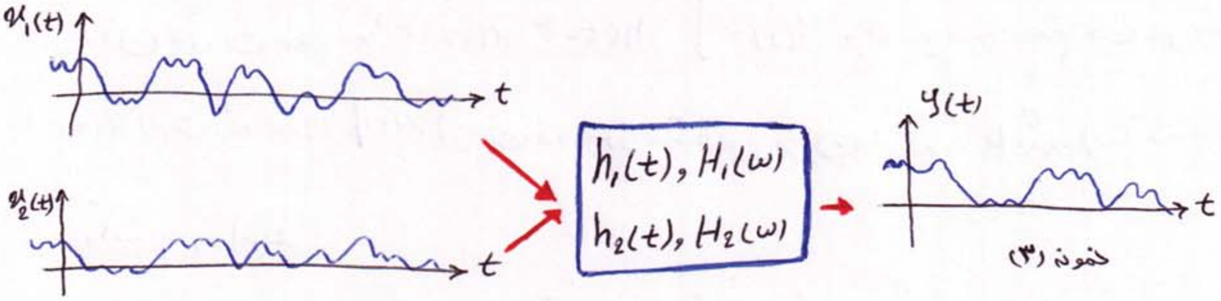
میانگین طیفی پاسخ :

- سطح میانگین: سیگنال‌های تصادفی به یک سیستم (خطی) در انتقال از آن دچار تغییر می‌شوند. مطابق شکل زیر ممکن است یک سیستم دارای دو ورودی $x_1(t)$ و $x_2(t)$ باشد در این شکل برای مثال سه نمونه از ورودی و خروجی مربوطه نمایش داده شده است. شکل: میانگین چندرکورد برای یک سیستم خطی تحت دو تحریک تصادفی





نمونه (۲)



نمونه (۳)

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau \qquad \textcircled{I}$$

با تغییر متغییر $\theta = t - \tau$ مقداری از θ که متناظر با $\tau = -\infty$ است بصورت $\theta = \infty$ خواهد بود و $d\tau$ به $-d\theta$ تبدیل خواهد شد. و $d\tau$ به $-d\theta$ تبدیل خواهد شد و معادله بصورت زیر درخواهد آمد:

$$y(t) = \int_{\infty}^{0} h(\theta)\, x(t-\theta)(-d\theta)$$

یا،

$$y(t) = \int_{0}^{\infty} h(\theta)\, x(t-\theta)\, d\theta$$

روش دیگر برای نمایش با تغییر متغییر $\theta = t - \tau$ می توانیم بصورت زیر معادله $\textcircled{I}$ را بازنویسی کنیم،

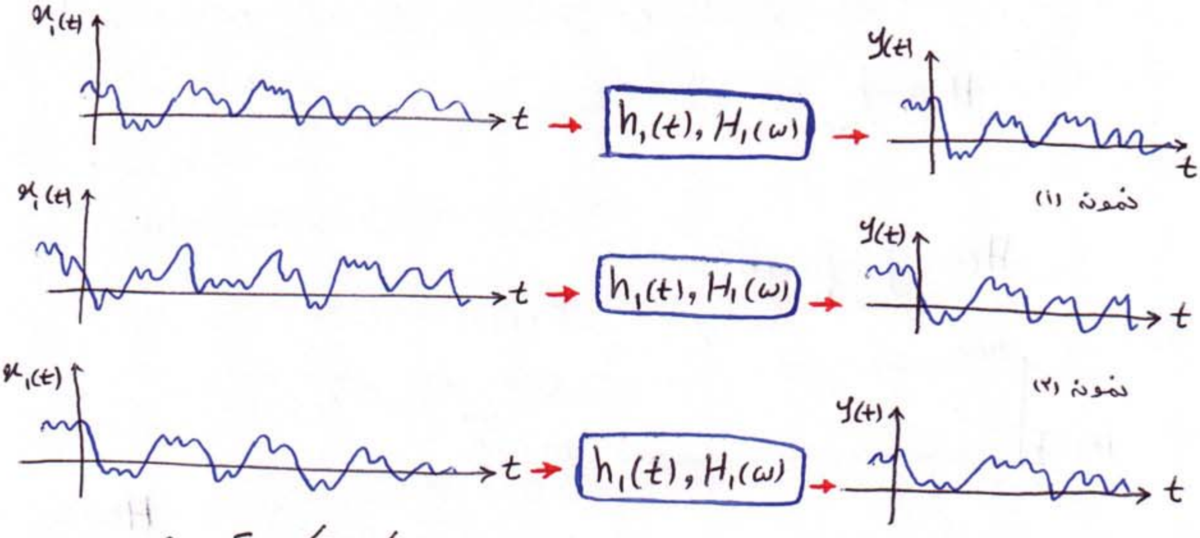
$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta)\, x(t-\theta)\, d\theta \qquad \textcircled{II}$$

لذا براساس معادله $\textcircled{II}$ می توانیم پاسخ این سیستم به صورت زیر است،

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\theta)\, x_1(t-\theta)\, d\theta + \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\theta)\, x_2(t-\theta)\, d\theta$$

برای حالت مطابق شکل صفحه بعد که فقط تک ورودی داریم، پاسخ بصورت مقابل می باشد،

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta)\, x(t-\theta)\, d\theta$$



شکل ، میانگین چند رکورد برای یک سیستم خطی تحت یک تحریک تصادفی

اکنون می توان نوشت ؛

$$E\left[x_1+x_2+x_5+\cdots\right]=E[x_1]+E[x_2]+E[x_3]+\cdots\cdots$$

$$E\left[\sum_{r=1}^{N} X_r\right]=\sum_{r=1}^{N} E[x_r]$$

از رابطه $y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\theta)\,x(t-\theta)\,d\theta$ میانگین می گیریم لذا خواهیم داشت ؛

$$E\left[y(t)\right]=\int_{-\infty}^{\infty} h_1(\theta)\,E\left[x_1(t-\theta)\right]d\theta+\int_{-\infty}^{\infty} h_2(\theta)\,E\left[x_2(t-\theta)\right]d\theta$$

و برای حالتی که فقط یک ورودی وجود دارد ؛

$$E\left[y(t)\right]=\int_{-\infty}^{\infty} h(\theta)\,E\left[x(t-\theta)\right]d\theta$$

باتوجه به مانا بودن فرآیند و مستقل بودن میانگین چند رکورد از زمان $t-\theta$ می توان نوشت ؛

$$E\left[y(t)\right]=E[x_1]\int_{-\infty}^{\infty} h_1(\theta)\,d\theta+E[x_2]\int_{-\infty}^{\infty} h_2(\theta)\,d\theta$$

باتوجه به اینکه میانگین $y(t)$ مستقل از زمان است ؛

$$E[y]=E[x_1]\int_{-\infty}^{\infty} h_1(\theta)\,d\theta+E[x_2]\int_{-\infty}^{\infty} h_2(\theta)\,d\theta$$

و برای حالت یک ورودی می توان نوشت:

$$E[y]=E[x]\int_{-\infty}^{\infty} h(\theta)\,d\theta$$

اکثر مهندسان تمایل دارند که با نگرش فرکانس به پاسخ نگاه کنند تا نگرش پاسخ ضربه با توجه به معادله‌ی زیر:

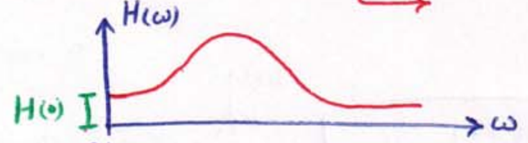
$$H(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\,e^{-i\omega t}\,dt$$

می‌توان نوشت:

خاصیت مهم رابطه بالا $\omega=0$

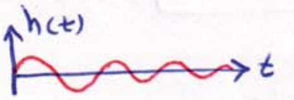
$$H(0)=\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{h(t)\,dt}\rightarrow$$

سطح زیر منحنی $h(t)$



$\omega=0 \Rightarrow$ سازه بسیار انعطاف پذیر

$\omega=\sqrt{\frac{K}{m}}$



$H(0) =$ تابع فرکانس سیستم بسیار نرم

حال با جایگذاری معادله، $H(0)=\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\,dt$ در معادله، $E[y]=E[x_1]\int_{-\infty}^{\infty} h_1(\theta)\,d\theta+E[x_2]\int_{-\infty}^{\infty} h_2(\theta)\,d\theta$ خواهیم داشت:

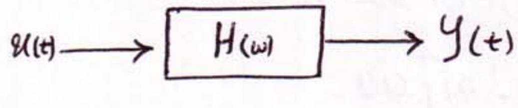
$$\boxed{E[y]=E[x_1]H_1(0)+E[x_2]H_2(0)}$$

حال برای حالت تک ورودی می‌توان نوشت:

$$\boxed{E[y]=E[x]H(0)}$$

رابطه $E[y]=E[x]H(0)$ را برای حالتی که تک ورودی دارد را محاسبه می‌کنیم؟

داریم: $y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\theta)\,x(t-\theta)\,d\theta$



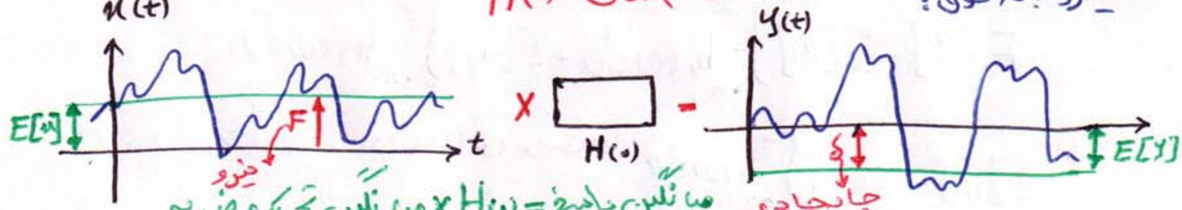
از رابطه بالا میانگین می‌گیریم:

$$E[y(t)]=\int_{-\infty}^{\infty} h(\theta)\,E[x(t-\theta)]\,d\theta$$

با توجه به مانا بودن فرآیند x و مستقل بودن میانگین از زمان $t-\theta$ می‌توان نوشت:

$$E[y]=E[x]\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\theta)\,d\theta}_{H(0)\ \text{فرکانس هم‌سان}} \Rightarrow \boxed{E[y]=E[x]\,H(0)}$$

تفسیر رابطه فوق:

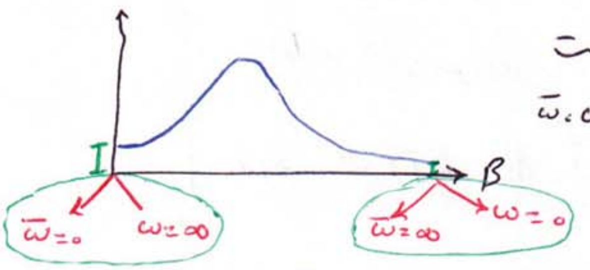


میانگین پاسخ = H(0) × میانگین تحریک ضربه

تمرین: اثبات رابطه $E[y] = E[x]\ H(0)$ را بنویسید؟

تمرین: با داشتن رابطه $Y(\omega) = H(\omega) X(\omega)$ وقتی که مقدار $\omega = 0$ خواهیم داشت

$$Y(0) = H(0) \cdot X(0)$$
$$E(y) = H(0)\, E[x]$$



و در کلاس ارتعاشات به طیف مقابل رسیدیم که نسبت $\beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega}$ در آن برقرار است. که هر بار یکی از ω، $\bar{\omega}$ را ثابت و دیگری را متغیر گرفتیم.

حال در مقدار $H(0)$ این صفر کدام یک از حالت‌های ⬭ می‌باشد.

در این خصوص بحث شود. (یا به عبارتی مقدار $H(0)$ در کدام حالت $\bar{\omega}=0$ یا $\omega=0$ می‌باشد)

این موضوع را با استفاده از بحث ریاضی و فیزیکی بیان نمائید.

تمرین: رابطه $E[y] = H(0) \cdot E[x]$ شما را یاد چه رابطه‌ای می‌اندازد؟

$$\underbrace{E[y]}_{\delta} = \underbrace{H(0)}_{\frac{1}{k}} \cdot \underbrace{E[x]}_{F}$$

این رابطه ما را یاد رابطه $F = k\delta$ می‌اندازد.

حال با توجه به فرمول $E[y] = H(0) \cdot E[x]$ را می‌توانیم بصورت $\boxed{\delta = \frac{F}{k}}$ بیان کنیم.

تمرین: دو تمرین قبل را با هم ترکیب نمائید؟

راهنمایی: یعنی با تضمین تمرین دومی تمرین اولی را اثبات کنیم. بیان کنیم که سیستم سختی محور است یا جرم محور و ...

نکته:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta)\, x(t-\theta)\, d\theta$$ حوزه زمان

$$Y(\omega) = H(\omega) \cdot X(\omega)$$ حوزه فرکانس

$$E[Y] = H(0) \cdot E[x]$$

خود همبستگی :

برای تعیین تابع خود همبستگی y باید $y(t)$ و $y(t+\tau)$ را تعیین کنیم:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\theta)\,x(t-\theta)\,d\theta$$

$$y(t+\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\theta)\,x(t+\tau-\theta)\,d\theta$$

اکنون با میانگین گیری از تابع $y(t)\cdot y(t+\tau)$ می توان نوشت،

$$E[y(t)\,y(t+\tau)]=E\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\theta)\,x(t-\theta)\,d\theta \times \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta)\,x(t+\tau-\theta)\,d\theta\right]$$

یا،

$$E[y(t)\,y(t+\tau)]=E\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\theta_1)\,x(t-\theta_1)\,d\theta_1 \times \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta_2)\,x(t+\tau-\theta_2)\,d\theta_2\right]$$

$$=E\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(\theta_1)\,h(\theta_2)\,x(t-\theta_1)\,x(t+\tau-\theta_2)\,d\theta_1\,d\theta_2\right]$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(\theta_1)\,h(\theta_2)\,E[x(t-\theta_1)\,x(t+\tau-\theta_2)]\,d\theta_1\,d\theta_2$$

با توجه به مانا بودن فرآیند x می توان نوشت،

$$E[\underbrace{x(t-\theta_1)\,x(t+\tau-\theta_2)}]=R_x(\underbrace{\tau-\theta_2+\theta_1})$$

تفاضل روابط سمت چپ

$$(t+\tau-\theta_2)-(t-\theta_1)=\tau-\theta_2+\theta_1$$

بنابراین :

$$R_x(\tau)=E[y(t)\,y(t+\tau)]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(\theta_1)\,h(\theta_2)\,R_x(\tau-\theta_2+\theta_1)\,d\theta_1\,d\theta_2$$

دقت کنید که سمت راست معادله ی بالا مستقل از زمان است یعنی که فرآیند y مانا می باشد.

خلاصه، چگالی طیفی پاسخ مبدل فوریه تابع خود همبستگی ($R_x(\tau)$) می باشد.

تمرین : تیترهای ۷-۳ و ۷-۴ را رو نویسی کرده و جزئیات استخراج و روند فرمول (روابط) این دو تیتر را بنویسید؟

تعیین چگالی طیف پاسخ (بیشتر ۷-۳ کتاب ارتعاشات تصادفی):

اگر از طرفین معادله

$$R_y(\tau)=E\left[y(t)y(t+\tau)\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(\theta_1)h(\theta_2)R_x(\tau-\theta_2+\theta_1)\,d\theta_1\,d\theta_2$$

تبدیل فوریه گرفته شود، تبدیل فوریه سمت چپ همان چگالی طیف پاسخ $S_y(\omega)$ است. لذا تبدیل فوریه سمت راست بصورت زیر بازنویسی می گردد:

$$S_y(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(\theta_1)h(\theta_2)R_x(\tau-\theta_2+\theta_1)\,d\theta_1\,d\theta_2\right\}e^{-i\omega\tau}d\tau$$

با جابجایی انتگرال ها می توان نوشت،

$$S_y(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}h(\theta_1)d\theta_1\int_{-\infty}^{\infty}h(\theta_2)d\theta_2\int_{-\infty}^{\infty}R_x(\tau-\theta_2+\theta_1)e^{-i\omega\tau}d\tau$$

از آخرین انتگرال سمت راست می توان تعیین نمود که:

$$\int_{-\infty}^{\infty}R_x(\tau-\theta_2+\theta_1)e^{-i\omega\tau}d\tau=\frac{e^{i\omega(\theta_1-\theta_2)}}{e^{i\omega(\theta_1-\theta_2)}}\int_{-\infty}^{\infty}R_x(\tau-\theta_2+\theta_1)e^{-i\omega\tau}d\tau$$

$$=e^{-i\omega(\theta_1-\theta_2)}\int_{-\infty}^{\infty}R_x(\tau-\theta_2-\theta_1)e^{-i\omega(\tau-\theta_2+\theta_1)}d(\tau-\theta_2+\theta_1)$$

$$=2\pi e^{i\omega(\theta_1-\theta_2)}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}R_x(\tau')e^{-i\omega(\tau')}d(\tau')$$

$$=2\pi e^{i\omega(\theta_1-\theta_2)}S_x(\omega)$$

اکنون می توان نوشت،

$$S_y(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}h(\theta_1)d\theta_1\int_{-\infty}^{\infty}h(\theta_2)d\theta_2\times 2\pi e^{i\omega(\theta_1-\theta_2)}S_x(\omega)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}h(\theta_1)d\theta_1\,e^{i\omega\theta_1}\int_{-\infty}^{\infty}h(\theta_2)\,d\theta_2\,e^{-i\omega\theta_2}\times S_x(\omega)$$

با توجه به معادله $H(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t)e^{-i\omega t}dt$ می توان نوشت،

$$H(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\theta_2)\,e^{-i\omega\theta_2}d\theta_2$$

و مزدوج مختلط آن بصورت زیر می باشد.

$$H^*_{(\omega)}=\int_{-\infty}^{\infty} h(\theta_1)\, e^{i\omega\theta_1}\, d\theta_1$$

در نتیجه می توان نوشت:

$$S_y(\omega)=H^*_{(\omega)}\, H_{(\omega)}\, S_x(\omega)$$

یا:

$$\boxed{S_y(\omega)=\left|H(\omega)\right|^2 S_x(\omega)}$$

معادله بالا مهم ترین نتیجه ارتعاشات تصادفی است.

تمام تأکیدی که در استفاده از تبدیل فوریه وجود داشت برای رسیدن به این نتیجه بود.

تذکر: چگالی طیفی پاسخ تبدیل فوریه تابع خود همبستگی $(R_y(\tau))$ می باشد.

پاسخ میانگین مربعات:

هنگامی که چگالی طیفی پاسخ تعیین شد می توان مستقیماً با استفاده از معادله زیر پاسخ میانگین مربعات را محاسبه کرد:

$$E[y^2]=\int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega)\, d\omega$$

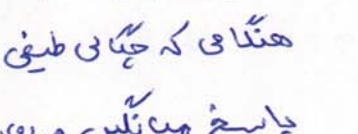
یا:

$$E[y^2]=\int_{-\infty}^{\infty} \left|H(\omega)\right|^2 S_x(\omega)\, d\omega$$

معادله بالا کاربردهای مهندسی زیادی دارد.

#نکات فیزیکی: $S_y(\omega)=\left|H(\omega)\right|^2 S_x(\omega)$

$$R_y(\tau)=\int S_y(\omega)\, e^{i\omega\tau}\, d\omega$$

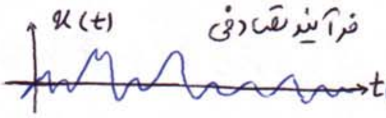


$$\text{if}: \tau=0 \Rightarrow \underbrace{E[y^2]}_{\text{میانگین مربعات}}=R_y(0)=\int S_y(\omega)\, d\omega$$

$$E[y^2]=\sum_{i=1}^{N}\frac{y_i^2}{N}$$

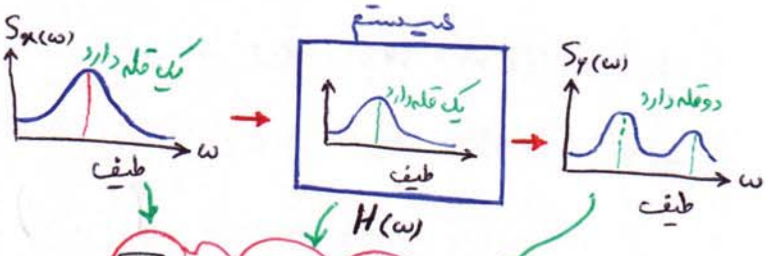
تذکر: میانگین مربعات می شود سطح زیر منحنی چگالی طیفی (همانند پاسخ بار)

نکته:



(زلزله یا ...) $\longrightarrow$ FFT $\xrightarrow{\text{طیف}}$ $X_{(\omega)} \cdot H_{(\omega)} = Y_{(\omega)}$

$R_x(\tau)$ تابع خود هم بستگی (فرآیند تصادفی $x(t)$) $\xrightarrow[\text{می گیریم}]{FFT}$



$$S_x(\omega)\,|H_{(\omega)}|^2 = S_y(\omega)$$

$E[x^2]$ $E[y^2]$

تبدیل فوریه معکوس $S_x(\omega)$ $\Longrightarrow$ $R_x(\tau)$ اتوکولیشن فانکشن

نکته: $E[x^2]$ از جنس انرژی می باشد به شرط آن که جابجایی یا سرعت جابشد. اگر نیرو (force) باشد انرژی محسوب نمی شود.

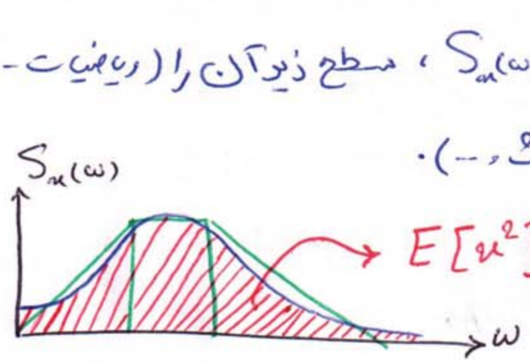
$$S_x(\omega)\ |H(\omega)|^2 = S_y(\omega)$$

$$\text{if } \tau = 0 \Rightarrow \quad E[x^2]\,|H_{(\omega)}|^2 = E[y^2]$$

نکات مهم درخصوص رابطه:

$$S_y(\omega) = \underbrace{|H_{(\omega)}|^2}_{\text{معلوم (سیستم)}}\ \underbrace{S_{x(\omega)}}_{\text{معلوم (چگالی طیفی ورودی)}} \Rightarrow \begin{cases} \text{بار باد} \\ \text{بار موج} \\ \text{بار زلزله (پایانای - تاجیمی آقای)} \end{cases}$$

۱- با معلوم بودن چگالی طیفی تحریک (ورودی) $S_x(\omega)$، مسطح زیر آن را (ریاضیات - هندسه) محاسبه می کنیم. (یا تبدیل مستطیل و مثلث و ...).



$E[x^2] = S_x(\omega)$ مساحت زیر منحنی

Root min Square

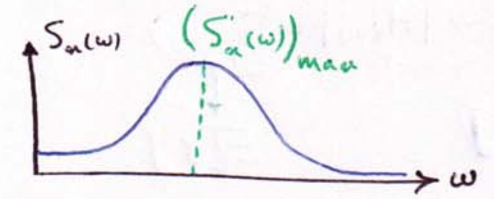
$$E[x^2] \xrightarrow{sqrt} \sqrt{E[x^2]} = \overbrace{Rms}_x = E[x]_{averg}$$

Rms با میانگین $E[x]$ برابر است. پس با داشتن RMS یعنی میانگین تحریک را داریم.

Rms پرکاربردترین کلمه در علم مهندسی و علوم طبیعی می باشد.

تذکر: چون مقدار $E[x]=0$ می باشد برای خلاص شدن از شر $E[x]=0$ از مربعات ($E[x^2]$) استفاده می کنیم. لذا این یکی از اقتص رابطه $Y(\omega)=H(\omega)X(\omega)$ می باشد ($E[x]=0$) لذا با استفاده از $E[x^2]$ در رابطه $|H(\omega)|^2E[x^2]=E[Y^2]$ مرتفع شده است.

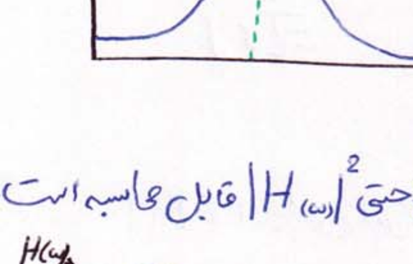
۲- خود چگالی طیفی تحریک ($S_x(\omega)$) محتوای فرکانسی را به ما می دهد.

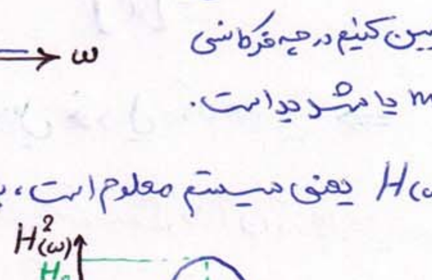


نکته: کل اطلاعات محتوای فرکانسی تحریک را می توانیم بدست آوریم.

نکته: می توانیم تعیین کنیم در چه فرکانسی تحریک max شده است.

۳- چون $H(\omega)$ یعنی سیستم معلوم است، براحتی $|H(\omega)|^2$ قابل محاسبه است. لذا





داریم:

$H_2 > H_1$

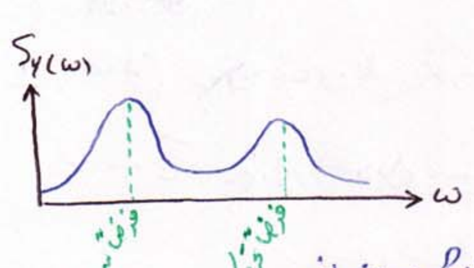
$(\omega_{max})_1=(\omega_{max})_2$

نکته: $H(\omega)$ همان سیستم است. $H(\omega) \overset{\text{همان}}{\equiv}$ سیستم

نکته: در محتوای فرکانسی تفاوتی بین $H(\omega)$ و $H^2(\omega)$ وجود ندارد (یکی می باشد محتوای فرکانسی).

نکته: مقدار دامنه $H(\omega)$ و $H^2(\omega)$ متفاوت است. ولی محتوی تقریباً یکی می باشد.

۴- $S_y(\omega)=|H(\omega)|^2 S_x(\omega)$

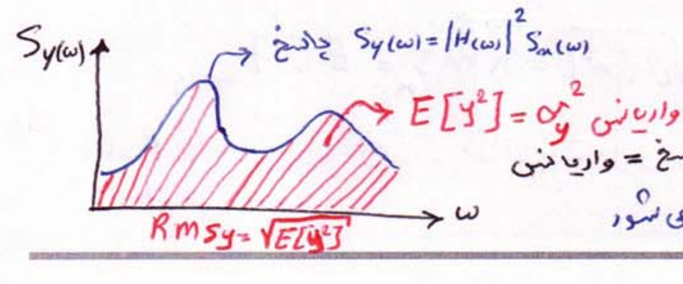


در پاسخ $S_y(\omega)$ هم تحریک هست و هم سیستم وجود دارد.

تذکر: می تواند جای ω سیستم و ω تحریک جابجا شود و ما نمی دانیم.

شکل فوق برخلاف DAF، چگالی است.

۵-



سطح زیر چگالی طیف پاسخ = میانگین مربعات پاسخ = واریانس
که پس از جذر فوق Rms_y حاصل می شود

نکته:

$$S_y(\omega) = |H(\omega)|^2 S_x(\omega) \qquad (1)$$

۳

$$Y(\omega) = H(\omega)\, X(\omega) \qquad (2)$$

از رابطه (۱) جذر می‌گیریم: $\sqrt{S_y(\omega)} = |H(\omega)| \sqrt{S_x(\omega)} \qquad (3)$

از سطح زیر منحنی ($S_y(\omega)$-ω) جذر می‌گیریم: $RMS_y = \sqrt{\int |H(\omega)|^2 S_x(\omega)\, d\omega} \qquad (4)$

$$\Rightarrow RMS_y = \sqrt{S_y(\omega)}$$

تمرین: دو رابطه:

$$Y(\omega) = H(\omega) . X(\omega)$$

و:

$$\sqrt{S_y(\omega)} = H(\omega) . \sqrt{S_x(\omega)}$$

را با هم مقایسه کنید؟

نکته: با معلوم بودن چگالی طیفی تحریک $S_x(\omega)$، سطح زیر منحنی $S_x(\omega)$ را حساب می‌کنیم. ← RMS_x

$$RMS_x = \sqrt{E[x^2]} = \sqrt{\int S_x(\omega)\, d\omega}$$

و نیز می‌دانیم:

$$\underbrace{RMS_y}_{\text{force (نیرو)}} = \underbrace{\boxed{}}_{(\frac{1}{k})} \times \underbrace{RMS_x}_{\Delta\ (\text{جابجایی})}$$

فرض:

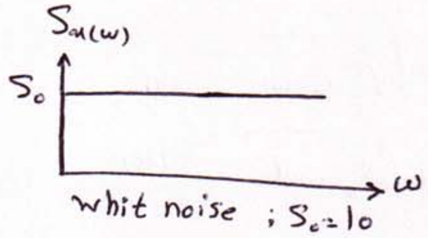
$$\begin{cases} RMS_y = \sqrt{\int |H(\omega)|^2 S_x(\omega)\, d\omega} & \text{(I)} \\ RMS_y = A * RMS_x = A * \sqrt{\int S_x(\omega)\, d\omega} & \text{(II)} \end{cases}$$

حال اگر دو عبارت (I) و (II) را مساوی هم قرار دهیم خواهیم داشت:

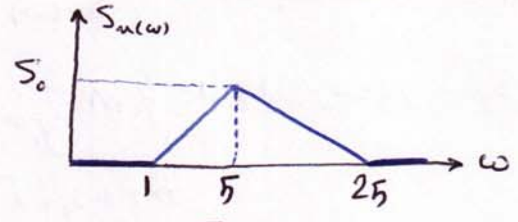
$$\sqrt{\int |H(\omega)|^2 S_x(\omega)\, d\omega} = A . \sqrt{\int S_x(\omega)\, d\omega}$$

تمرین: مقدار A را در رابطه $\sqrt{\int |H(\omega)|^2 S_x(\omega)\, d\omega} = A \sqrt{\int S_x(\omega)\, d\omega}$ را محاسبه نمائید؟

تمرین: یک سیستم یک درجه آزادی با جرم 10^4 kg و پریود طبیعی 0.3 sec موجود است. اگر چگالی طیفی تحریک، $S_{a}(\omega)$، بصورت زیر باشد مطلوب است رسم چگالی طیفی پاسخ و تخمین مناسبی از دامنه پاسخ (Rms).



(A)



$S_0=10$

(B)

تذکر: پریود طبیعی معلوم ← برای محاسبه منحنی؛ یعنی DAF و $H(\omega)$ موجود است.

تذکر: پاسخ در $H^2(\omega)$ ضرب شود.

تولید رکورد مصنوعی

- دلایل متعدد ضرورت بحث در حوزه فرکانس:

در حوزه زمان: پدیده‌ها تصادفی، پیچیده، زمان بر، غیر اقتصادی، غیرقابل پیش بینی
جنبه آماری احتمالاتی، تفسیر نتایج در حوزه زمان سخت و ...

در حوزه فرکانس: حجم محاسبات کم، ارزان، دقت بالا، عدم قطعیت‌ها و ...
خیلی مفید و کارا و تفسیر پذیر

نکته: یکی از مهمترین دلایل لزوم پرداختن به حوزه فرکانس تولید رکورد در حوزه زمان است.

در حوزه زمان نیاز دارد به تولید رکورد تحریک:
- باد ← ۱۰۰٪ تمام رکوردش در حوزه فرکانس Generat می‌شود.
- موج ← ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~
- زلزله
  - قدیم ترها: تولید رکورد براساس فرکانس می‌باشد.
  - امروزه: امروزه به علت فراوانی تاریخچه‌های موجود نیازی به استفاده از زمان نیست (نیازی به استفاده از رکورد مصنوعی نداریم)

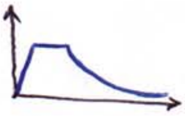
تذکر: حدود $\frac{۲}{۳}$ رکوردهای تحریک از حوزه فرکانس هستند.

کارکرد حوزه فرکانس:

۱- رکورد موجود زلزله

تحلیل لرزه‌ای

طرح لرزه‌ای ← طیف طرح:



نکته: لازم است رکورد موجود را منطبق کنیم با طیف طرح که این کار هم با حوزه فرکانس انجام می‌شود.

۲- کارکرد دیگر حوزه فرکانس، صحت سنجی حوزه زمان است.

ابزار صحت سنجی:
- آزمایش
- محاسبات دستی، با احاطه کامل بر اعداد و ارقام
  - برخی اوقات استاتیک
  - برخی اوقات مقدار ویژه
  - " " " فرکانس

مطالب فوق الذکر جایی‌های استفاده از تولید رکورد زلزله است.

تمرین: به شکل ص ۵۹۸ کتاب مهندسی زلزله مؤلف دکتر تابش پور مراجعه کرده و آن را با دقت بخوانید؟

نحوه تولید رکورد مصنوعی: (Generat (ژنریت) کردن)

در فضای بردارهای هارمونیک ← می‌خواهیم تاریخچه تصادفی تولید کنیم.

(برای باد، موج، زلزله و ...)

$$x(t) = \sum \alpha_i \underline{\cos}(\omega_i t - \theta_i)$$

or

تذکر: بین Sin و Cos فرقی نیست: $x(t) = \sum \alpha_i \underline{\sin}(\omega_i t - \theta_i)$

صورت مسئله: رکورد مصنوعی $\alpha_i, \omega_i, \theta_i = ?$ (چندین بردار پایه را جمع کرده تا رکورد مصنوعی حاصل گردد.)

هدف: تعیین پارامترهای فوق

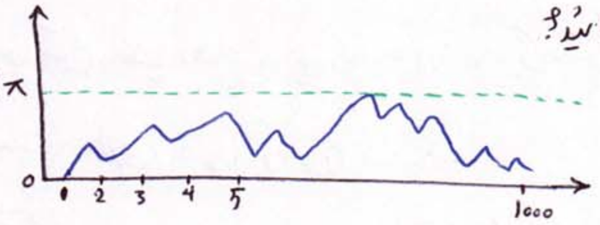
ابزار و روش: استفاده از $S_x(\omega)$

با فرض وجود $S_x(\omega)$ پارامترهای فوق را تعیین می‌کنیم.

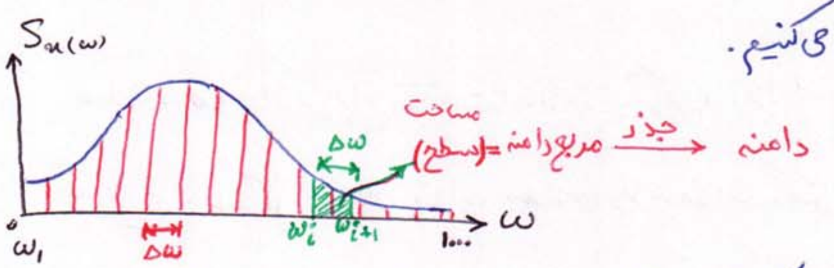
گام اول: توزیع یکنواخت برای چگالی احتمال (θ) فرض می‌کنیم بین ۰، 2π (اختلاف فاز رندوم (Random) بین ۰ تا 2π ، از نرم افزار استفاده می‌کنیم)

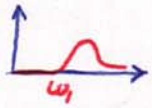
تمرین: با استفاده از نرم افزار MatLb این کار را انجام دهید و نمودار آن را رسم نمائید؟

گام اول اختلاف فاز را بین ۰ تا 2π رندوم (Random) را Generate می‌کنیم.



گام دوم: با توجه به معلوم بودن چگالی طیفی فرآیند (x) ابتدا آن را به تعداد لازم در محور افق تقسیم می‌کنیم.



ω_1: معلوم (کمترین فرکانس در چگالی طیفی) مطابق شکل () ω_1 کمترین ω می‌باشد.

نکته: اینکه مقدار $\Delta\omega$ چند باشد بسیار مهم است. ($\Delta\omega = \frac{\omega}{N}$ ، $N=1$ باشد 1 هارمونیک تولید می‌کند. اگر N تا باشد N هارمونیک تولید می‌شود).

$$\alpha_i = \sqrt{4\, S_x(\omega_i) \cdot \Delta\omega} = 2\underbrace{\sqrt{S_x(\omega_i) \cdot \Delta\omega}}_{\text{دامنه}}$$

مقدار ω_1 را مسئله می‌دهد.

با توجه به معلوم بودن ω_1 مقدار $\Delta\omega$ را خودمان تعیین می‌کنیم و سپس خواهیم داشت:

$$\omega_2 = \omega_1 + \Delta\omega$$
$$\omega_3 = \omega_2 + \Delta\omega = \omega_1 + 2\Delta\omega$$
$$\omega_i = \omega_1 + (i-1)\Delta\omega$$

اکنون مقدار θ_i و ω_i معلوم است. و مقدار α_i ؟

$$\alpha_i = 2\sqrt{S_x(\omega_i) \cdot \Delta\omega} = 2\sqrt{S_x(\omega_i)\left(\frac{\omega_i - \omega_1}{i-1}\right)}$$

تمرین : فرکانس گوشه یا (Corner frequency) و یا فرکانس نایکوئیست (N_q . f_{rg}) چیست؟

تمرین : مقدار ω یعنی تعداد هارمونیک‌ها، چگونه و براساس چه ضابطه‌ای تعیین می‌شوند؟

تمرین : با مراجعه به کتاب یانگ (Yang) فرمول ۴-۱۲ را اثبات و براساس آن رابطه ۴-۱۲ و ۴-۱۴ را اثبات نمائید؟ کتاب (Random Vibration of structures)
C.Y.YANG

تمرین : از فهم تمرین فوق معادله 12.4 ($\langle x^2(t) \rangle = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2} a_n^2$) فلسفه مربع درحوزه فرکانس چیست؟ انرژی

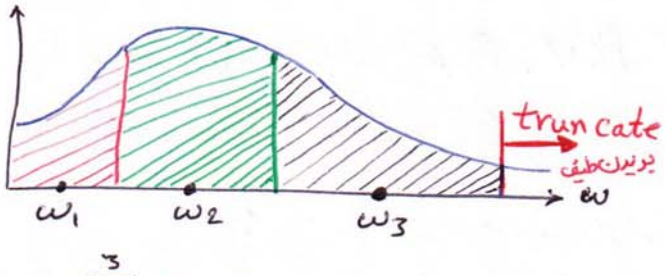
تمرین : معادله 12.4 کتاب Yang ($E[x^2(t)] = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2} a_n^2$) شما را یاد چه می‌اندازد؟ اتحاد پارسوال

تمرین : تفسیر فیزیکی اتحاد پارسوال را بیان نمائید؟ فصل ۱۳ کتاب مهندسی زلزله تمرین ۱۳-۲

تمرین : تبصره-۵ کتاب ارتعاشات تصادفی را با دقت خوانده و فهمیده و یک بار رونویسی کنید؟ با استفاده از این تمرین می‌توانیم مفهوم عدد ۴ را بدست آوریم در رابطه $a_i = \sqrt{4.S_{xx}(\omega_i)\Delta\omega}$

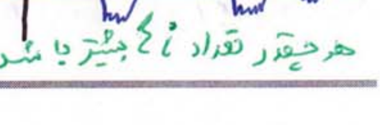
تمرین اختیاری : بعد از آنکه با چگالی طیفی زلزله (کانای - تاجیمی) آشنا شدید یک برنامه matlb برای تولید رکورد تصادفی بنویسید؟

نکته: چگالی طیف:



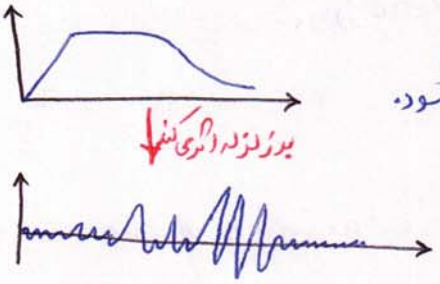
$$x(t) = \sum_{i=1}^{3} a_i \sin(\omega_i - \theta_i) \longrightarrow$$

تخمین خوبی نیست



$$x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \sin(\omega_i - \theta_i)$$

هر چقدر تعداد iها بیشتر باشد دقت جواب تر می باشد (اصطلاحاً مقدار $\sum_{i=1}^{\infty}$ خواست)



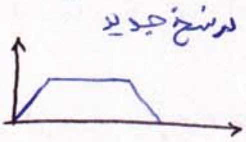
تابع شکل: یک فرم بی بعد است

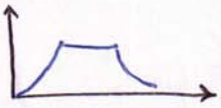
تابع شکل بر زلزله اثر می‌کند تا رکورد زلزله تولید شود.

Generate کردن رکورد زلزله

تابع شکل در Time History ضرب می‌شود.

تمرین: انواع تابع شکل‌های تولید شتاب زلزله در دوران مختلف چه بوده است؟





تمرین: رسم S_a ، S_v و S_d برای رکورد تولید شده؟

نکته: باید به تعداد کافی رکورد تولید شود و تمام آنها در تحلیل تاریخچه زمانی بکار رود و روی max و mean پاسخ‌ها بحث شود. (۷ تا رکورد میانگین، ۳ تا رکورد max) ← فصل ۱۳ کتاب مهندسی زلزله دکتر تاسنب‌چور.

تمرین: تعدادی از نرم افزارهای مشهور تولید رکورد مصنوعی را نام ببرید؟

به عنوان نمونه نرم افزار Simque، Etabs2015

با یک کد ۱۰ تا ۱۲ خطی می‌توان رکورد مصنوعی Generate کرد.

فصل ۱۲ کتاب مهندسی زلزله ⟺ فصل ۹ کتاب مقدمه‌ای بر ارتعاشات تصادفی چادرم

نکته: با داشتن سه پارامتر PGA، PGV و PGD می‌توانیم درک عمیقی از فرکانس‌ها، تحریک و سازه را داشته باشیم و در نتیجه تخمینی از پاسخ را داشته باشیم.

جلسه ٦ مورخ ۹٤،۳،۲

مطالب این قسمت از کتاب ژئوتکنیک لرزه‌ای - کرامر

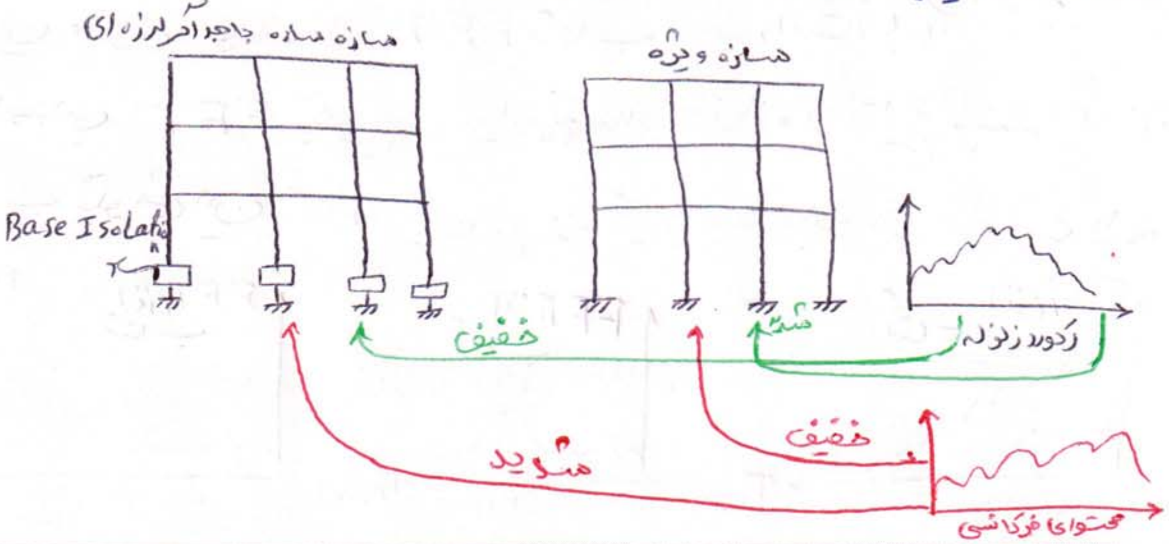
تمرین: تمام مطالب مرتبط با طیف درک برگ A_3 یا A_2 مصور نمایش نمائید؟

نکته: پارامترهای حرکت زمین یا از جنس دامنه یا فرکانس می‌باشد.

پارامترهای حرکت زمین:

- ۱- دامنه
  - جابجایی بیشینه
  - سرعت بیشینه
  - شتاب بیشینه
- ۲- طیف حرکت زمین
  - طیف فوریه
  - طیف توان
  - طیف پاسخ
  - طیف پاسخ جابجایی
  - طیف پاسخ شبه سرعت
  - طیف پاسخ شبه شتاب
  - طیف سه گانه
- ۳- پارامترهای طیفی
  - پریود غالب
  - پهنای باند
  - فرکانس مرکزی
  - ضریب شکل
  - پارامترهای کانای - تاجیمی
  - نسبت (PGV/PGA)

نکته: عدم کفایت پارامترهای دامنه به تنهایی نمی تواند بیانگر شدت زلزله باشد.



برای سازه های ویژه از جبرآگر لرزه ای استفاده نمی‌شود
می بایست جوآگر لرزه ای را روی سازه های سخت اجرا نماییم (سختی زیاد)

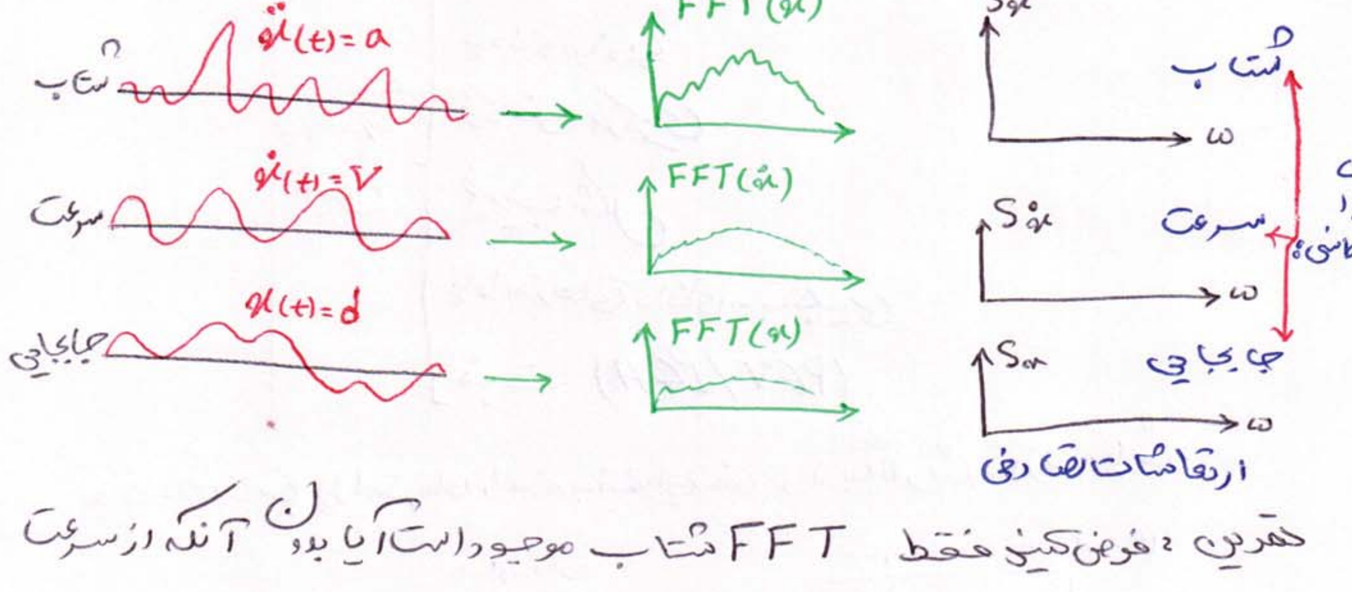
نکته: در تحلیل دینامیکی بایستی به محتوای فرکانسی توجه شود.

نکته: محتوای فرکانسی را می توانیم از FFT گرفتن
شتاب
سرعت
جابجایی
بدست آوریم.

نکته: اگر دو زلزله هم شتاب
0.5g
0.5g
داشته باشیم بایستی به محتوای فرکانسی توجه شود.

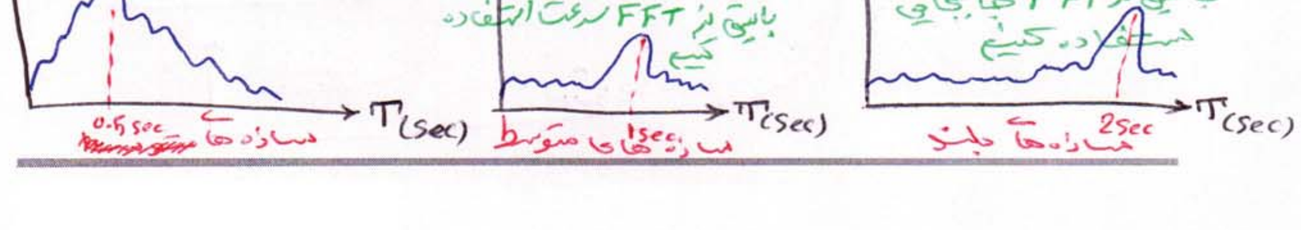
زلزله ① → PGA = 0.5g
زلزله ② → PGA = 0.5g

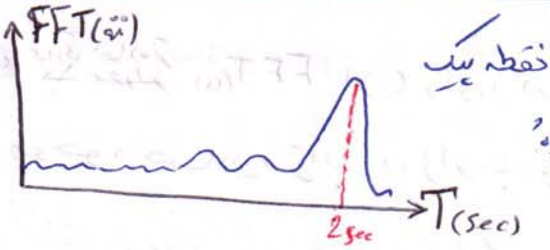
نکته:
- سازه های کوتاه ($\overset{\text{دوره تناوب سازه}}{T} < 0.5$) ← حساس به شتاب
- سازه های متوسط ($0.5 \leq T < 1$) ← حساس به سرعت
- سازه های بلند ($T > 1$) ← حساس به جابجایی



تمرین: فرض کنید فقط FFT شتاب موجود است آیا بدون آنکه از سرعت و جابجایی FFT بگیریم می توانیم با استفاده از نتایج مستخرج از FFT شتاب بگوییم این رکورد برای سازه کوتاه یا بلند مناسب است یا نه؟

نکته:



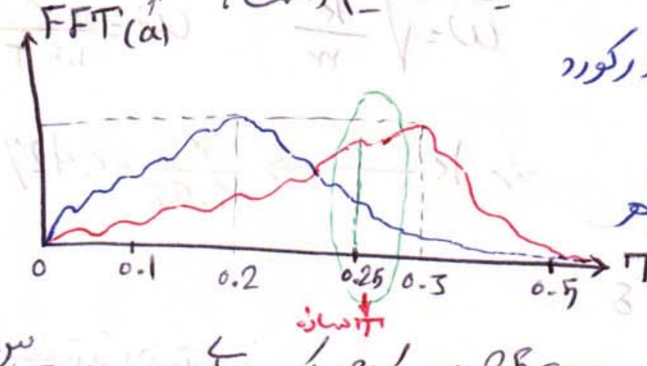


حال با توجه به FFT($\ddot{u}$) شتاب با T نقطه پیک بالا آیا می‌توان گفت حتماً برای سازه بلند خوب است و سازه را به تشدید می برد، جواب نه می باشد چون برای پریود 2sec سازه حساس به جابجایی است پس باید از جابجایی FFT گرفته {FFT(u)} تا به این سوال جواب دهیم. لذا ما از روی FFT($\ddot{u}$) (FFT شتاب) نمی‌توانیم برای پریود 2sec استفاده کنیم.

نکته: سازه کوتاه ← حساس به شتاب

نکته: FFT را می‌توان برحسب T یا ω رسم کرد.

با توجه به FFT شتاب دو رکورد ذیل خواهیم داشت:



- سطح زیر منحنی FFT هر دو رکورد دارای مقدار یکسانی می باشد.
- مقدار پیک FFT(a)(max) برای هر دو رکورد یکی می باشد.

در صورتی که پریود سازه 0.25sec کدام رکورد برای این سازه حساس‌تر است؟

جواب:

نکته: سازه وقتی وارد غیرخطی شود پریود آن کم می‌شود

نکته: $\uparrow K$ $\downarrow T$ or $\downarrow K$ $\uparrow T$

لذا زلزله قرمز (رکورد قرمز) برای سازه‌ای که دارای دوره تناوب 0.25_{sec} است حساس‌تر می باشد. چون اگر سازه به علت تحریک وارد غیرخطی شود پس محتوای فرکانسی که در محتوای ($T= 0.25_{sec}$) دارای فرکانس بیشتر (FFT(a)) باشد.

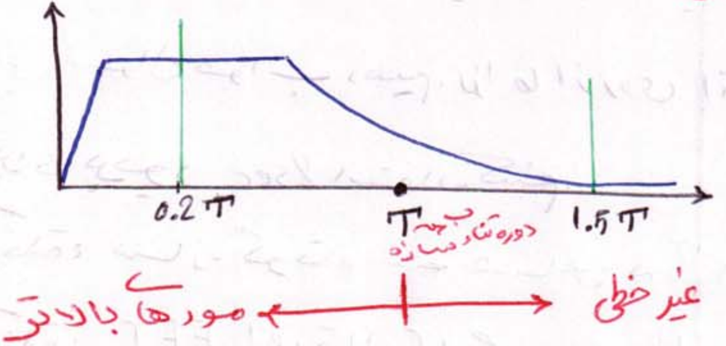
و یا به عبارت ساده تر مقدار FFT(a) آن رکورد در $0.2\,\mathrm{sec}$ بیشتر باشد آن رکورد برای سازه موجود حساس تر است. (از جنس فرکانس گوشه)

نکته: در مقیاس (scale) کردن رکورد چه بازه ای را در نظر می گیرند؟

بازه $0.2T < T < 1.5T$ را در نظر می گیرند.

دوره تناوب سازه

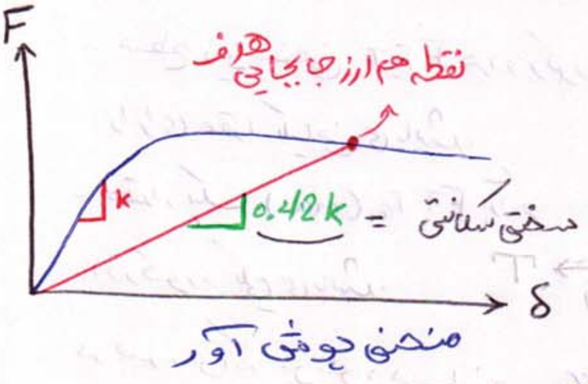
T: دوره تناوب سازه



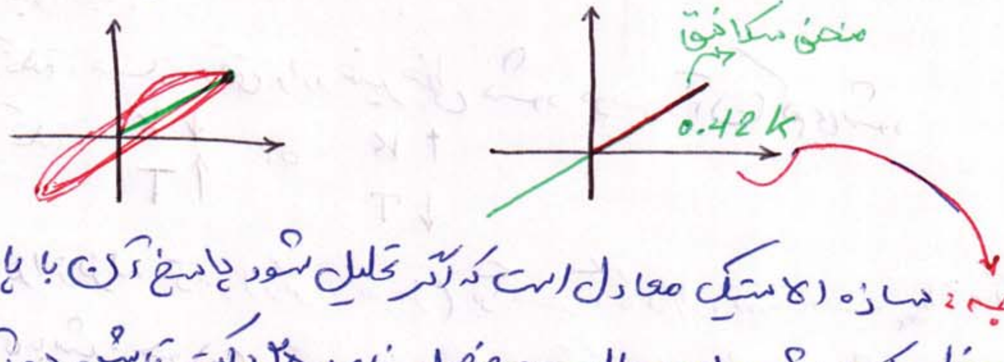
اگر سازه وارد مرحله غیرخطی شود داریم:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega = \frac{2\pi}{1.5T}$$

$$\Rightarrow k \longrightarrow \frac{k}{2.25} = 0.42\% k$$



سختی سکانتی تخمین خوبی از جابجایی هدف به ما می دهد.

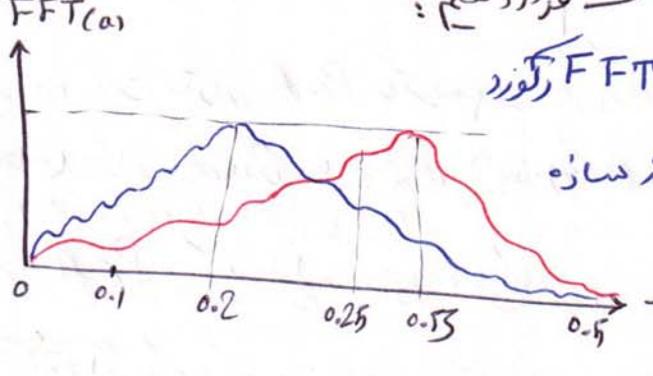


توجه: سازه الاستیک معادل است که اگر تحلیل شود پاسخ آن با پاسخ تحلیل غیرخطی یکی می شود این مطلب در فصل نامه ۲۵ دکتر تاشن جو آمده است.

سوال: در حالتی که مودهای بالاتر مطرح شود یعنی $(0.2T < \boxed{T'} < T)$ باشد چه مطلبی را می توان بیان نمود؟

جواب: در سازه های کوتاه مودهای بالاتر نداریم.

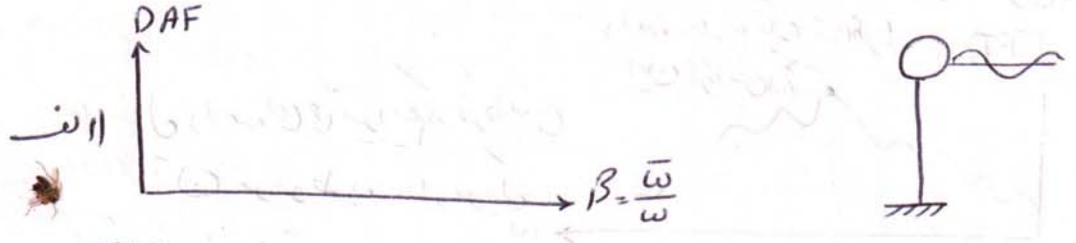
با توجه به بحث FFT شتاب دو رکورد صفحات قبل در چه صورتی می‌توان FFT شتاب رنگ آبی را ملاک قرار دهیم:

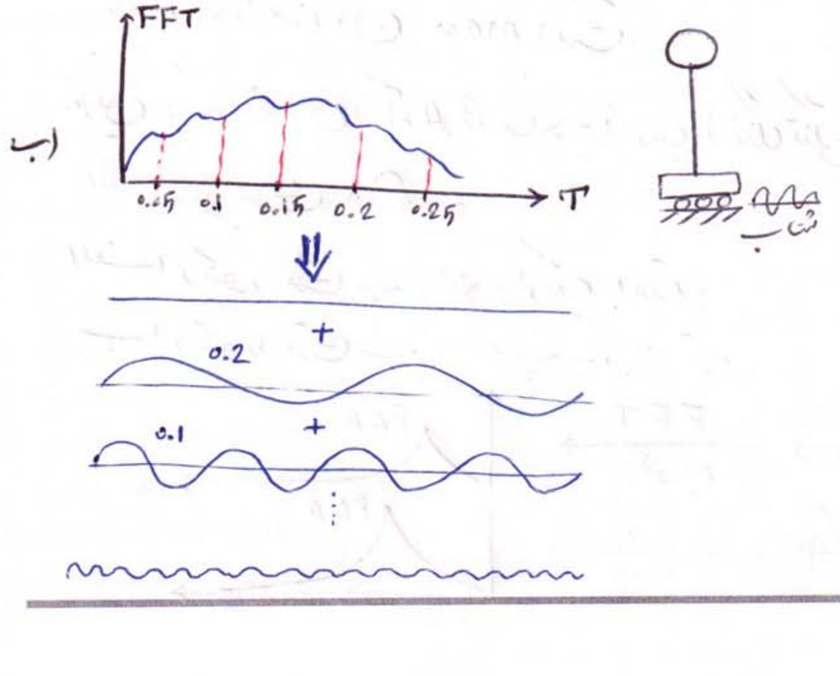


جواب: درصورتی می‌توان FFT رکورد آبی را ملاک قرار دهیم که سازه الاستیک باقی بماند یعنی سازه پاسخی از خود نشان ندهد. در این صورت اصلاً لازم نیست روی پاسخ این سازه بحث شود.

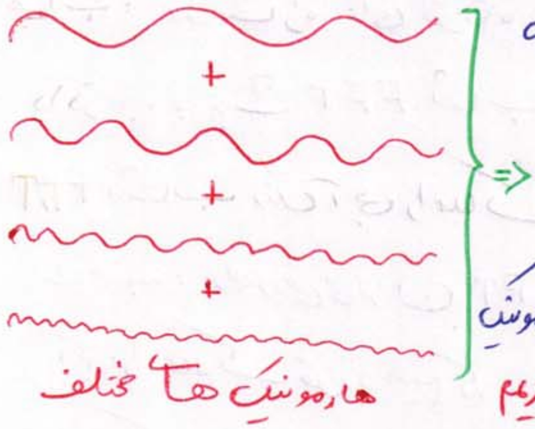
در کتاب غیرخطی دکتر تاسبی پور مطالب این بخش بصورت مفصل بیان شده است.

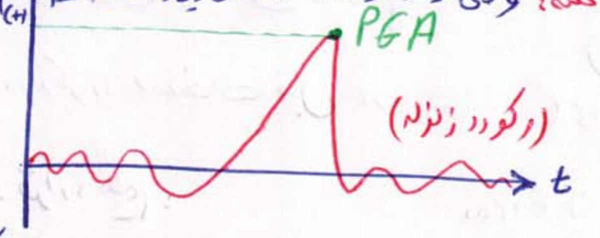
تمرین: تفسیر DAF برای حالت الف درصورتی که مقدار DAF شناور باشد؟





نکته: وقتی یک رکورد مانند شکل زیر داشته باشیم

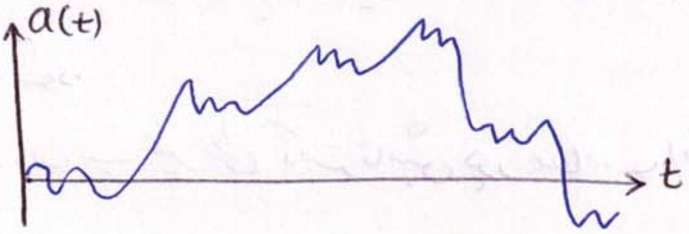




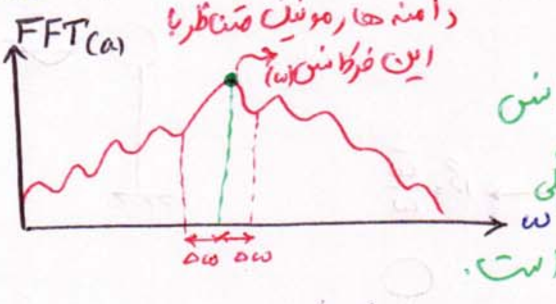
در این حالت مقدار PGA ماکزیمم از هارمونیک های مختلف می باشد که با هم جمع می شوند. (ماکزیمم دامنه هارمونیک ها را با هم جمع کرده ایم)

در PGA به یک دلیلی محتوای فرکانسی وجود دارد.

نکته: اگر یک رکورد زلزله مانند شکل زیر داشته باشیم:



می توانیم شبیه حالت قبلی PGA را بدست آوریم لذا بایستی از رکورد فوق $FFT_{(a)}$ بگیریم خواهیم داشت:

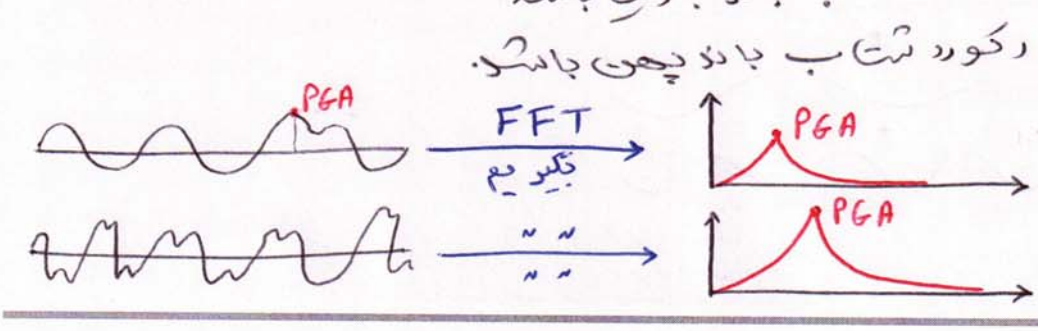


ما دنبال دامنه‌ای می گردیم که فرکانس (ω) آن مربوط به هارمونیکی باشد که دامنه آن max است.

تمرین: در خصوص اینکه PGA ماهیتاً ارتباط تنگاتنگی با محتوای فرکانسی دارد در دو حالت زیر بحث شود:

الف) رکورد شتاب باند باریک باشد.

ب) رکورد شتاب باند پهن باشد.



تذکر: هر چه باند باریک‌تر باشد مقدار PGA در FFT با PGA رکورد زلزله نزدیک‌تر است.

تذکر: هر چه باند پهن‌تر باشد مقدار PGA در FFT با PGA رکورد دورتر است

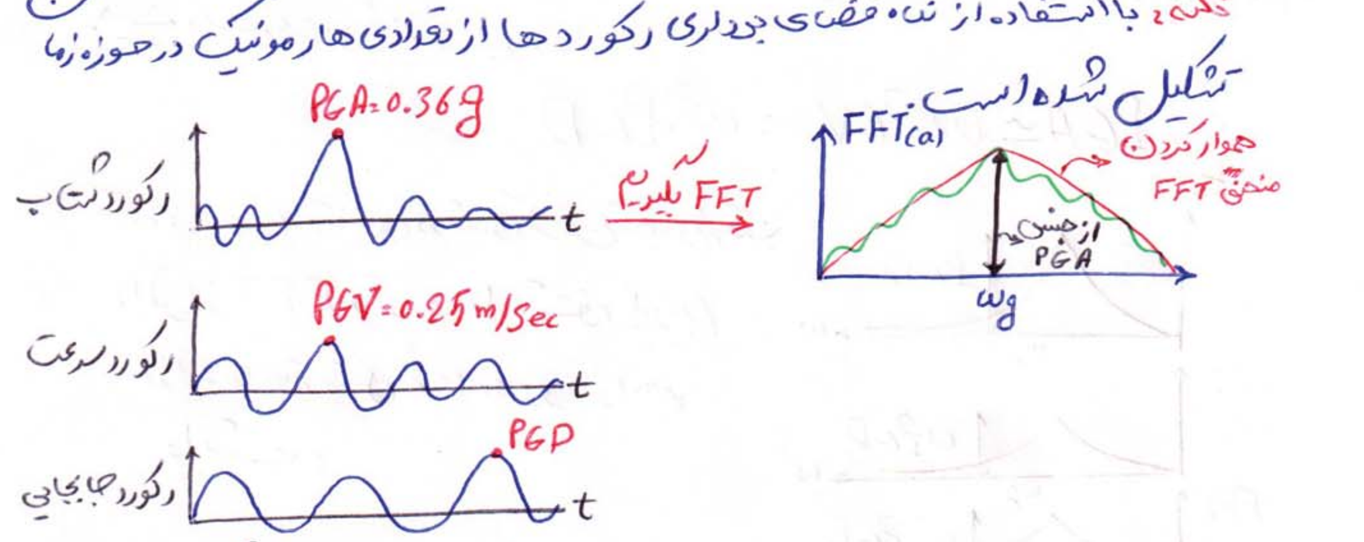
نکته: معمولاً (نه همیشه) حرکت زمین با شتاب بیشینه بالا مخرب‌تر از حرکات با شتاب بیشینه پایین‌تر هستند. شتاب‌های بیشینه خیلی بزرگ که برای مدت زمان بسیار کوتاهی ادامه می‌یابند، خرابی کمتری ایجاد می‌کنند. هرچند شتاب بیشینه پارامتر بسیار مفیدی است. ولی هیچ گونه اطلاعی در مورد محتوای فرکانسی و مدت حرکت بدست نمی‌دهد، درنتیجه برای ارائه خصوصیات دقیق حرکت زمین به داده‌های بیشتری نیاز است.

نکته: برای سازه‌ها یا تاسیساتی که به بارگذاری در محدوده متوسط حساس‌تر است (نظیر سازه‌های بلند یا انعطاف پذیر، پل‌ها و ...) PGV پارامتری دقیق‌تری برای ارزیابی خرابی نسبت به PGA است.

تذکر: می‌توان به روشی ساده، با فرض هارمونیک بودن پاسخ یک ارتباط فرکانسی بین جابجایی بیشینه و سرعت بیشینه برقرار کرد:

$$PGV \simeq \omega PGD$$

نکته: با استفاده از تئوری فضای برداری رکوردها از تعدادی هارمونیک در حوزه زمان تشکیل شده است



حوزه زمان

$D = D_0 \sin \omega_g t$ ω_g، فرکانس غالب حرکت

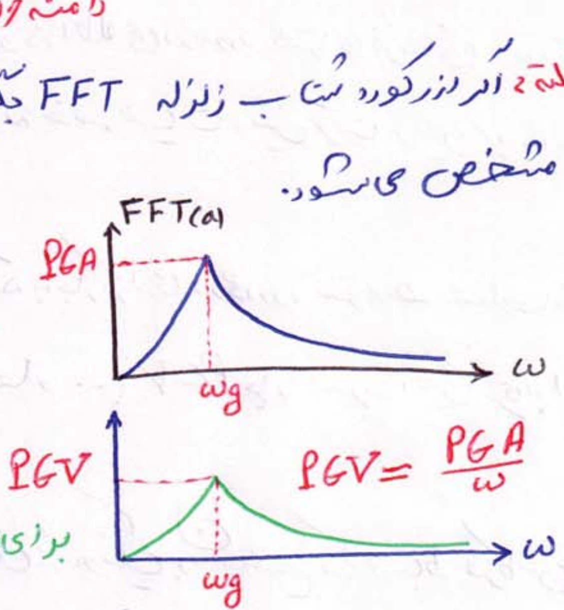
$V = \omega_g D_0 \cos \omega_g t$

در مقادیر دامنه $\left.\begin{array}{ll} S_{\ddot{x}} = \omega^2 S_{x} & \text{نگاشت تصادفی} \\ S_v = \omega^2 S_d & \text{نگاشت زلزله} \end{array}\right\}$ به همان دلیلی که قبلاً بیان شد

حرکت ارتعاشات زمین $PGV \simeq \omega_g \underbrace{PGD}_{\text{دامنه حرکت}}$ می‌باشد.

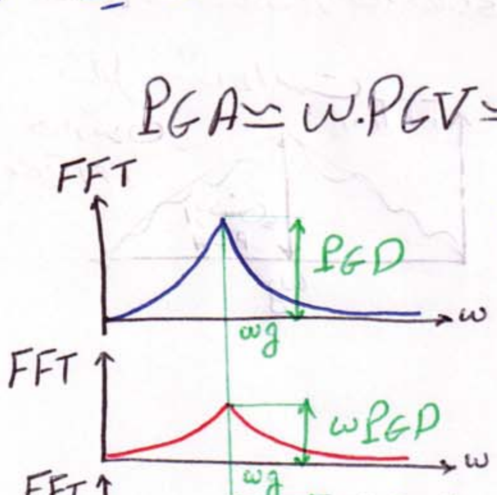
نکته: اگر از رکورد شتاب زلزله FFT بگیریم باند باریک و باند پهن بودن رکورد شتاب مشخص می‌شود.

اگر از رکورد شتاب باند باریک زلزله $\xrightarrow[\text{بگیریم}]{FFT}$



نکته: بطور مشابه، با فرض هارمونیک بودن پاسخ، یک ارتباط فرکانسی بین شتاب بیشینه و سرعت بیشینه وجود دارد:

$$PGA \simeq \omega . PGV \simeq \omega^2 . PGD$$



نکته: محتوای فرکانسی در مشتق گرفتن تغییر می‌کند (اگر از FFT رکوردها مشتق بگیریم) لذا مطابق شکل‌های روبرو خواهیم داشت:

تذکر: در مهندسی معمولاً به شتاب های قائم توجه کمتری نسبت به شتاب های افقی می‌شود.

در کاربردهای مهندسی، معمولاً فرض می‌شود، شتاب بیشینه قائم برابر $\frac{۲}{۳}$ شتاب بیشینه افقی PGA است. اما تحقیقات نشان می دهد که نسبت شتاب افقی به قائم کاملاً متغیر است و مقدار آن در مناطق نزدیکِ منابع زلزله‌های متوسط تا بزرگ، بیشتر از این مقدار و در فواصل زیاد، کمتر است.

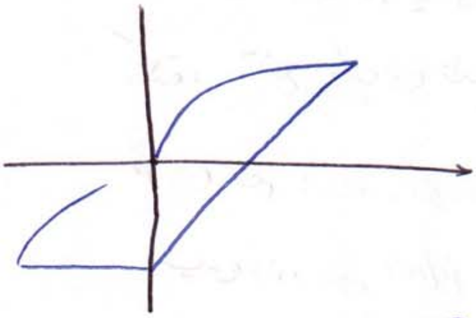
تذکر: تفسیر عبارت { شتاب های بیشینه خیلی بزرگ که برای مدت زمان بسیار کوتاهی ادامه می یابند، خرابی کمتری ایجاد می کنند} را براساس داشته‌های جلسات قبل می توان گفت:

جواب: تفسیر دوگانه β برای DAF

زمانی که مقدار β=0 است مقدار DAF=1 می باشد

لذا در زمانی که β=0 است سازه الاستیک می باشد.

نکته: در حالت غیرخطی



چون پدیده زلزله بصورت رفت و برگشتی می باشد همزمان با پدیده خستگی ایجاد می‌شود و یک اثر مثبت هم دارد و آن این است که بلافاصله در زمانی که سازه می خواهد فرو بریزد مجدد جهت نیرو تغییر می کند.

تمرین اختیاری: روش های هموار سازی طیف ها را بررسی کنید؟

تمرین: معادله $E(\omega)=\frac{1}{2}|A(\omega)|^2$ کتاب ارتعاشات تصادفی (معادله ۹-۱۰) را با استفاده از فیزیک بیان کنید؟

سوال، چگونه می‌شود با استفاده از مفهوم DAF رابطه ۹-۱۳ کتاب ارتعاشات تصادفی ($S_{PV}(\omega) = \omega S_D(\omega) \simeq S_V(\omega)$) را یک بار دیگر اثبات نمود؟

(جزوه کپی شده از کتاب ارتعاشات تصادفی پیوست جزوه)

نکته: طیف شتاب تاریخچه زمانی رکورد زمین = طیف سرعت (بیشترین سرعت سیستم)

$$\text{بیشترین سرعت در سیستم} = \begin{cases} \text{طیف شتاب در آن فرکانس تحریک زمین} \\ \text{or} \\ \text{دامنه تبدیل فوریه شتاب در آن فرکانس تحریک زمین} \end{cases}$$

نکته: برای حالت میرایی مقادیر S_V کمتر و هموارتر می‌شود. (طیف سرعت)

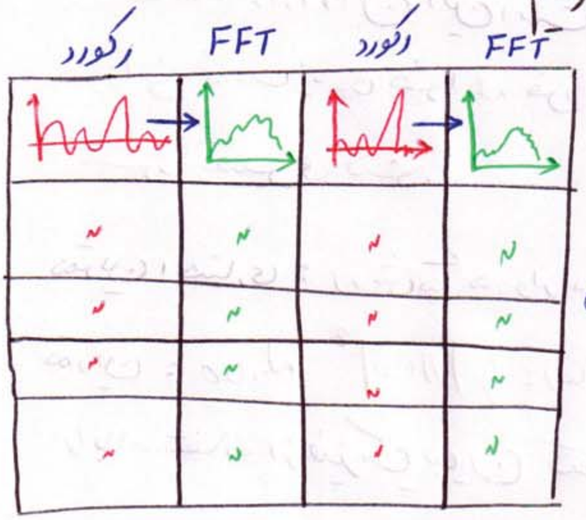
توان طیفی = چگالی طیفی

Spectral Density Function = Power Spectral Density Function

تمرین: با جستجو در اینترنت بیان نمایید که طیف توان با چگالی طیفی با هم متفاوت اند یا نه؟

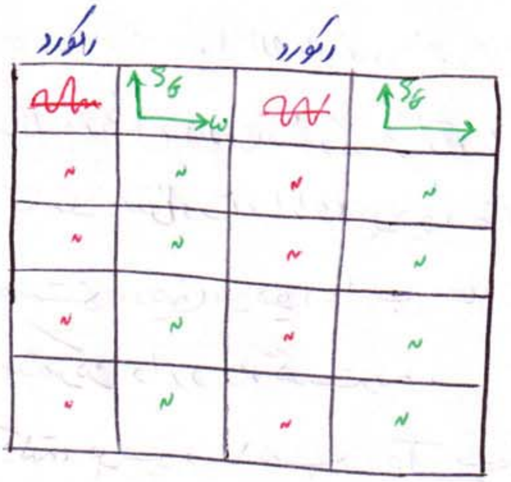
نکته: تابع چگالی طیفی توان = $R_x(\tau)$

تمرین مهم: ده رکورد در نظر می‌گیریم سپس با دستور Sub Plat در متلب آنها را بصورت یک ماتریس $[5\times4]$ ترسیم نمایید؟



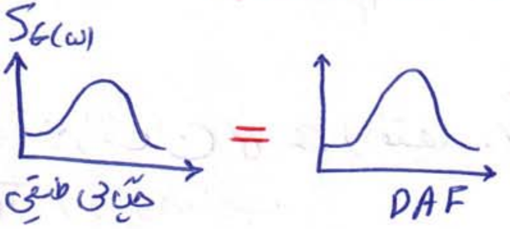
- اگر PGA منفی باشد برای FFT گرفتن می‌بایست آن را در یک منفی ضرب کنیم تا بالای محور نمایش داده شود.
- محورهای افقی و قائم هم مقیاس (scale) در نظر گرفته می‌شوند.

تمرین : طبق ده رکورد تمرین قبلی



$$S_G(\omega_n)=\frac{1}{\pi T_d}\underbrace{a_n}_{\downarrow}^{2}$$

مقدار دامنه سری فوریه شتاب



چگالی طیفی در حوزه فرکانس می باشد (به عبارتی حوزه فرکانس یعنی چگالی طیفی)

تذکر: قضاوت مهندسی: در توصیف این عبارت هم می توان دو برداشت شود:

۱- نظر شخصی یک مهندس مبتنی بر سلیقه و به پشتوانه دانش و تجربه قبلی اش

۲- منطق قابل دفاع براساس تجربیات و دست آوردهای علمی موجود

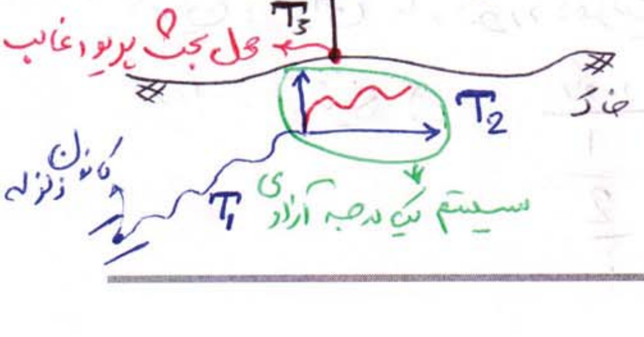
تمرین: پیوست ۲ کتاب مهندسی زلزله دکتر تاشش چوربارتی خوانده شود.

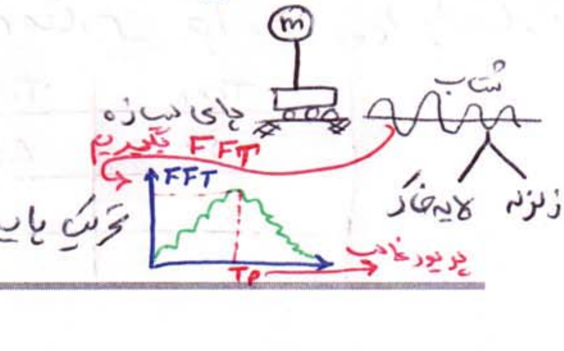
پریود غالب:

یکی از پارامترهای مستقل که هر چند مقداری خام است ولی نمایانگر محتوای فرکانسی حرکت زمین است. پریود غالب Tp می باشد.

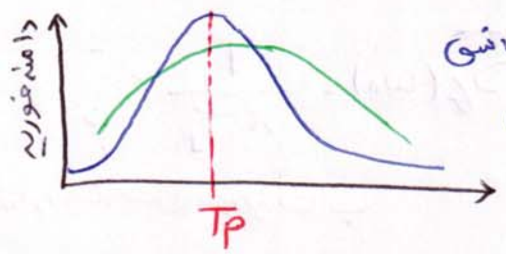
- پریود غالب عبارت است از پریود ارتعاش متناظر با مقدار بیشینه دامنه طیف فوریه

- برای پرهیز از اثرات نامطلوب تک قله های طیف دامنه فوریه، معمولاً پریود غالب از روی طیف هموارشده فوریه بدست می آید.





پریود غالب اطلاعاتی درخصوص محتوای فرکانسی در اختیار می‌گذارد.

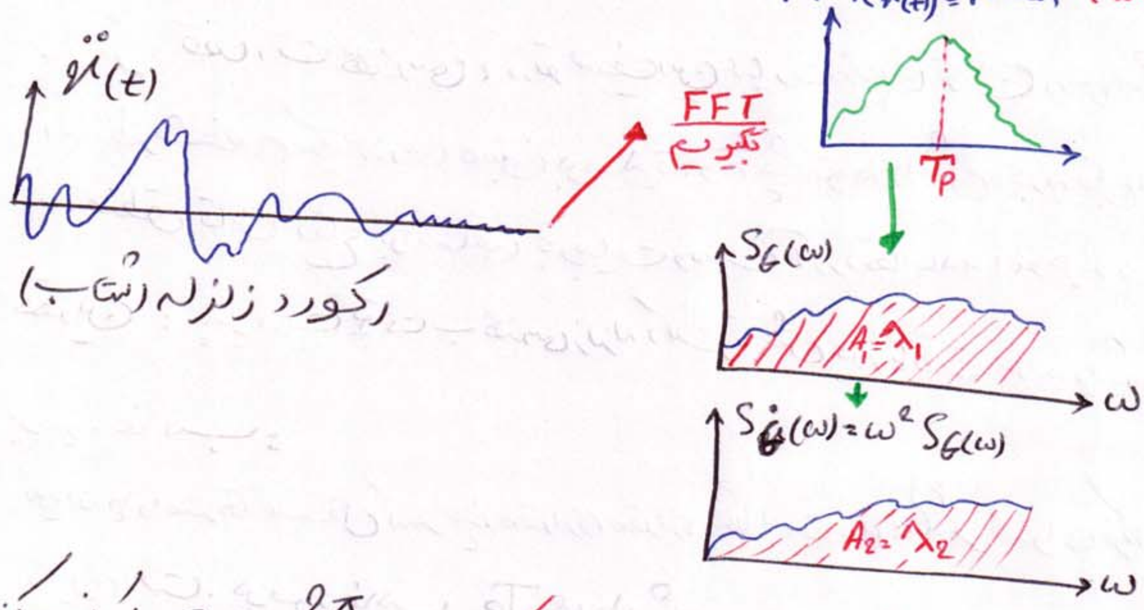


مطابق شکل دیده می‌شود که حرکت با محتوای فرکانسی کاملاً متفاوت، دارای پریود غالب یکسانی هستند، یعنی پریود غالب، حالت متمرکز دارد نه گسترده.

نکته: پریود غالب Tp پهنای باند را نشان نمی‌دهد (نقیصه)

نکته: محتوای فرکانسی
→ Tp پریود غالب
→ پهنای باند

نکته: $FFT(\ddot{x}_{(t)}) = FFT(a)$



فرکانس مرکزی $\Omega = \dfrac{2\pi}{T_{cen}}$ → پریود مرکزی $\Rightarrow T_{cen} = \dfrac{2\pi}{\Omega}$

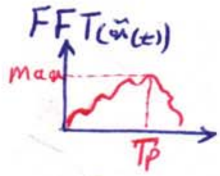
$$\Omega = \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} = \sqrt{\frac{\text{سطح زیر چگالی طیفی مشتق شتاب}}{\text{سطح زیر چگالی طیفی شتاب}}}$$

تمرین: برای ۱۰ رکورد تمرینات قبلی مقادیر Tp و Tcen را کنار هم مقایسه کنید؟

رکورد	Tp	Tcen
1	0.31	0.37
2		⋮
⋮		⋮

چند روش که برای تعیین پریود غالب (T_P) استفاده می‌شود عبارت‌اند از:

۱- مشتق از حوزه زمان $\frac{PGV}{PGD} \longrightarrow T=\frac{2\pi}{\omega}$



۲- از رکورد شتاب $\ddot{u}(t)$ اگر FFT بگیریم مقدار T_P محاسبه می‌شود

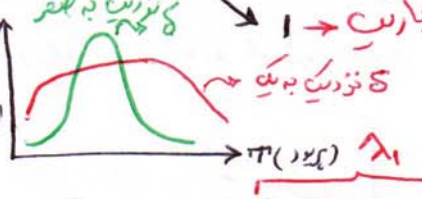
۳- چگالی طیفی $S_G(\omega)$ را حساب کرده و از روی نسبت شتاب طیفی به مشتق شتاب طیفی فرکانس مرکزی تعیین می‌گردد که نزدیک به فرکانس غالب می‌باشد. که به این پریود مرکزی T_{cen} گفته می‌شود.

تمرین: در خصوص median peak acceleration یک صفحه توضیح دهید؟

ضریب شکل (میزان پهن بودن باند):

ضریب شکل، پراکندگی تابع چگالی طیفی توان را حول فرکانس مرکزی نشان می‌دهد.
ضریب شکل، بین صفر تا یک در نوسان است و مقادیر بزرگ‌تر آن متناظر با پهنای باند بزرگ‌تر هستند. این ضریب بی بعد شبیه به پهنای باند است.

$$\delta=\sqrt{\underset{\substack{\downarrow\\ \text{نرمال}}}{1}-\frac{\lambda_1^2}{\lambda_0\lambda_2}} \Rightarrow \delta \begin{cases} 0 \rightarrow \text{باند پهن} \\ 1 \rightarrow \text{باند باریک} \end{cases}$$



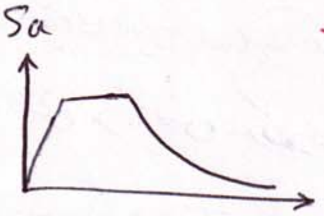
$$\lambda_n=\int_0^{\omega_N}\omega^n S_G(\omega)\,d\omega$$

$$\left.\begin{aligned} n=0 &\Rightarrow \lambda_0=\int S_G(\omega)\,d\omega \\ n=1 &\Rightarrow \lambda_1=\int_0 \omega S_G(\omega)\,d\omega \\ n=2 &\Rightarrow \lambda_2=\int \omega^2 S_G(\omega)\,d\omega \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\Big(\overbrace{\int \omega S_G(\omega)\,d\omega}^{\lambda_1}\Big)^2}{\Big(\underbrace{\int S_G(\omega)\,d\omega}_{\lambda_0}\Big)\Big(\underbrace{\int \omega^2 S_G(\omega)\,d\omega}_{\lambda_2}\Big)}=\begin{cases}0\\1\end{cases}$$

تمرین: بررسی کنید رابطه I مانند

$$\text{(I)}\quad \frac{\left(\int \omega S_g(\omega)\,d\omega\right)^2}{\left(\int S_g(\omega)\,d\omega\right)\left(\int \omega^2 S_g(\omega)\,d\omega\right)} = \left\{\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right.$$

کجاها وجود دارد؟



نکته:

$$\overset{\text{طیف شتاب}}{S_a} = \omega \overset{\text{طیف سرعت}}{S_v} = \omega^2 \overset{\text{طیف جابجایی}}{S_d}$$

$$S_v = \frac{S_a}{\omega}$$

$$S_d = \frac{S_a}{\omega^2}$$

$$\begin{tikzcd} & S_v \\ S_d \arrow[ur, "\omega S_d"] \arrow[dr, "\omega^2 S_d"'] & \\ & S_a \end{tikzcd}$$

فرم نوشتاری رابطه (I) بالای صفحه

$$\frac{(S_v)^2}{S_d \cdot S_a} = \frac{\lambda_1^2}{\lambda_0 \lambda_1}$$

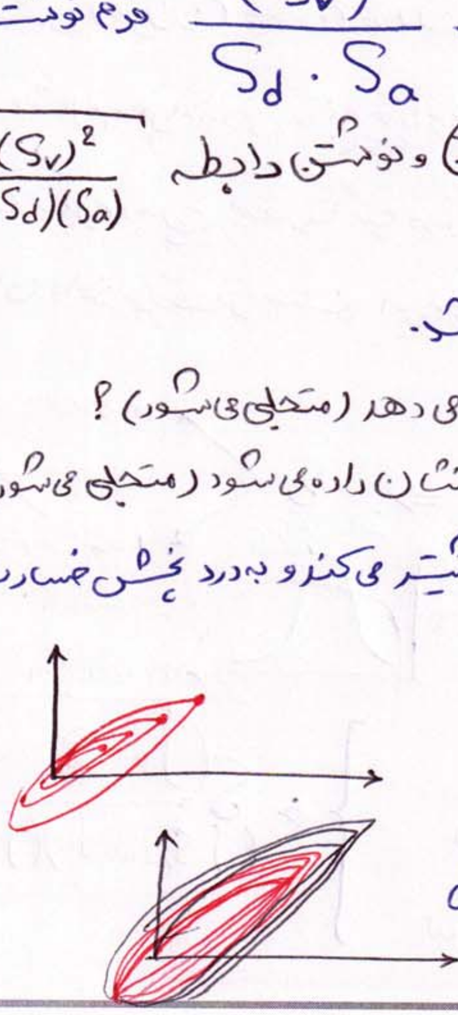
تمرین: با الگوگیری از معادله (I) و نوشتن رابطه $\sqrt{1-\frac{(S_v)^2}{(S_d)(S_a)}}$ نشان دهنده چیست؟

از مبنی پهنای باند می باشد.

سوال: پهنای باند کجاها خودش را نشان می دهد (متجلی می شود)؟

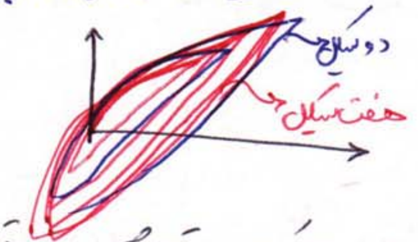
〃 پهنای باند در پاسخ سازه چگونه نشان داده می شود (متجلی می شود)؟

پهنای باند تعداد سیکل های پاسخ را بیشتر می کند و به درد بخش خسارت می خورد.



در سازه های فولادی رنگ قرمز بحرانی تر است (تعداد حرکت غیرخطی بیشتر است.

شاخص خسارت (Damage Index) ارتباط مستقیمی با تعداد سیکل‌های رفت و برگشت دارد بویژه برای سازهٔ بتنی، یعنی در شکل زیر چون رنگ آبی دوتا سیکل غیرخطی بزرگ دارد ولی رنگ قرمز هفت سیکل غیرخطی دارد که مهم می‌باشد.



تمرین مهم: با توجه به مفهوم DAF رابطه (۹-۴۲) کتاب ارتعاشات تصادفی

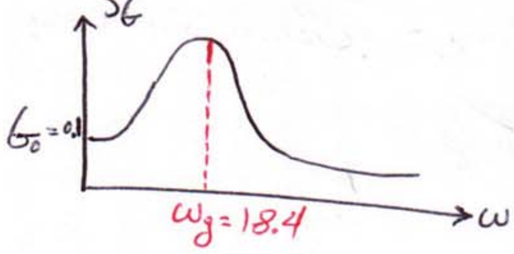
$$S_G(\omega)=G_0\frac{1+\left(2\xi_g(\omega/\omega_g)_0\right)^2}{\left[1-(\omega/\omega_g)_0^2\right]^2+\left[2\xi_g(\omega/\omega_g)_0\right]^2}$$

را چگونه بدست می‌آید؟

راهنمایی: استفاده از کتاب ارتعاشات تصادفی

برای اینکه S_G را بدانیم باسیق برآیند TDAF آن داریم $\left.\begin{matrix} S_a & S_{\ddot{x}} \\ S_v & S_{\dot{x}} \\ S_d & S_x \end{matrix}\right]$ را درک کنیم.

تمرین:



$$\omega_g=\frac{2\pi}{T_g}$$

$$T_g=\frac{2\pi}{18.4}=0.3$$

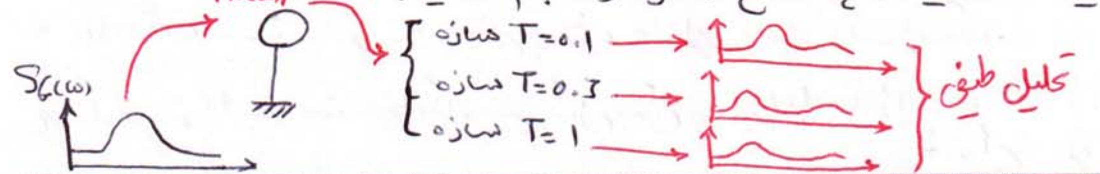
طبق رابطه ۹-۴۳ داریم:

$$S_G(\omega)=G_0\frac{1+a\omega^2}{a^2+b^2}$$

$$a=2\xi_g(\omega/\omega g)_0 \qquad b=1-(\omega/\omega g)_0$$

$$0<\omega<\infty$$

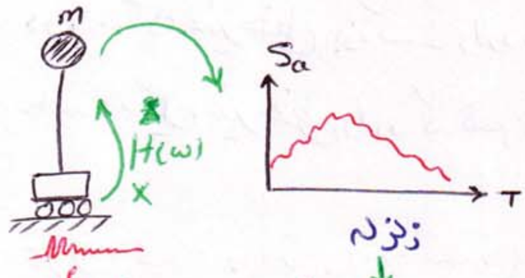
تمرین: مقایسه پاسخ ۳ سازه را انجام دهید؟



۹۴٫۳٫۲۹

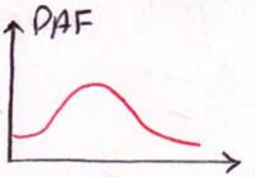
جلسه هفتم

ضریب بازتاب:

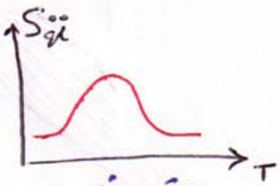


زلزله
↓
در طراحی و یا بارگذاری کاربرد دارد

نوع تحریک: شتاب زلزله
محل تحریک: در پایه



ارتعاشات
↓
ابزار تحلیل، استخراج روش تحلیلی برای طیف زلزله



تصادفی
↓
در تحلیل کاربرد دارد.

بازتاب، پاسخ = H(ω) × تحریک

* طیف پاسخ همان طیف بازتاب است.

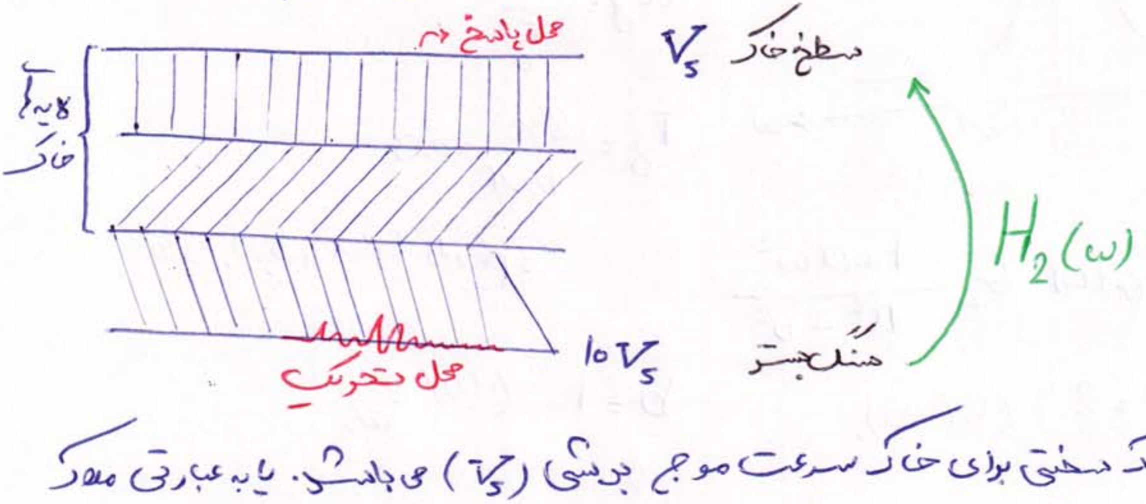
طیف بازتاب ≡ طیف پاسخ
↓ در ادبیات مهندسی — ↓ در ادبیات فارسی

* روش: سیستم را به H(ω) در حوزه فرکانس تبدیل می‌کنیم.

منظور از پایه چیست؟ زمین یا همان سطح خاک می‌باشد.

اکنون یک سوال مطرح است. این حرکت پایه از کجا نشأت گرفته است؟

جواب: حرکت زلزله در سنگ بستر از خاک عبور کرده و مطابق شکل خواهیم داشت:

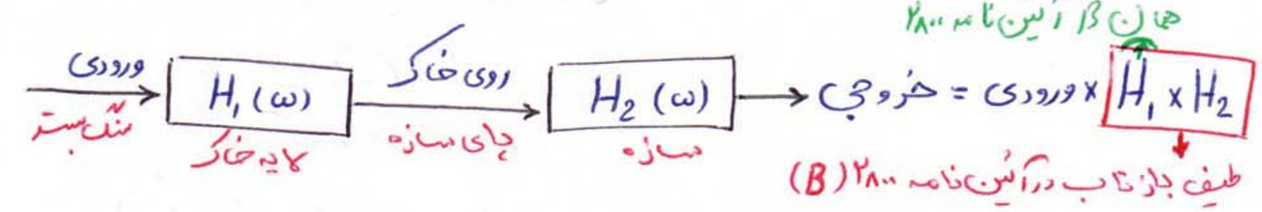


* ملاک سختی برای خاک سرعت موج برشی (V_s) می‌باشد. یا به عبارتی ملاک سختی برای خاک G نیست، بلکه سرعت موج برشی می‌باشد.
* روی سنگ بستر سرعت موج برشی ۱۰ برابر سطح خاک می‌شود.
* سنگ بستر صلب است یعنی اینکه تغییر شکل برشی به لایه بالا ناچیز است. مطابق رابطه زیر

$$\tau = G^{\uparrow} \gamma^{\downarrow}$$

نکته: مطابق شکل صفحه قبل می‌توان خاک را هم مثل قبل - سازه تک درجه آزادی - نگاه کرد بدین صورت که پایه را سنگ بستر در نظر گرفته و بجای سازه لایه‌های خاک رو در نظری گیریم. حال تک $H_2(\omega)$ بدست می‌آوریم که تحریک سنگ بستر را به سطح خاک تبدیل می‌کند.

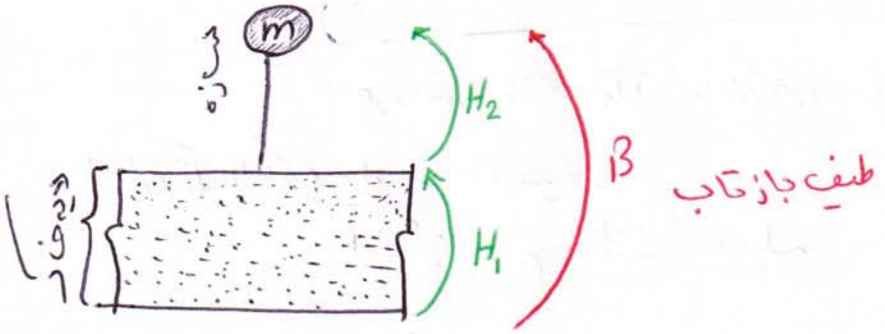
به عبارتی مطابق شکل صفحه قبل شبیه تک سازه است منتهی سازهٔ خاک و در این شکل هم سطح خاک‌ها همان سنگ بستری شود و سیستم لایه‌های خاک می‌باشد.



B : ۲۸۰۰ در استاندارد (طیف بازتاب) $B = H_1 \times H_2 = B_1 \times B_2$

طیف پاسخ سیستم خاک

طیف پاسخ سیستم سازه



B : طیف پاسخ (بازتاب) سیستم خاک و سازه است که اصطلاحاً در آیین نامه ۲۸۰۰ ضریب بازتاب گفته می‌شود.

در ادامه مباحث درس دو مرجع داریم:

[ترجمه هم شده] واکابایاشی Seismic Resistant Design

[ترجمه هم شده] کریمر Geotechnical Earthquake Engineering

kramer

فصول ۳ و ۵ کتاب مهندسی ژئوتکنیک لرزه‌ای کریمر.

تمرین: تفسیر عددی و یا توصیفی (از لحاظ مقادیر و ...) رو برای یک مسئله با استفاده از نرم افزار Seismo signal طرح نمایید، و در خصوص خروجی های آن بحث گردد.

■ فصل پنجم کتاب کریمر (Kraner): انتشار امواج خاک

موج در مرز لایه‌های مختلف، بخشی عبور کرده و بخشی بازتاب پیدا می‌کند.

حل مسائل تعادلی:

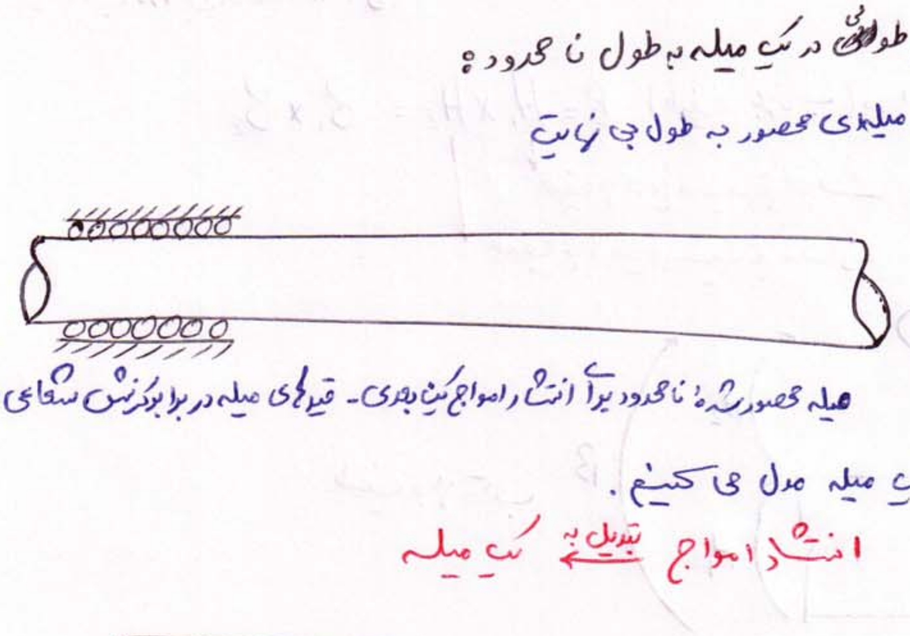
۱- تعیین سیستم مختصات

۲- رسم دیاگرام آزاد

۳- نوشتن معادله تعادل

انتشار امواج طولی در یک میله به طول نامحدود:

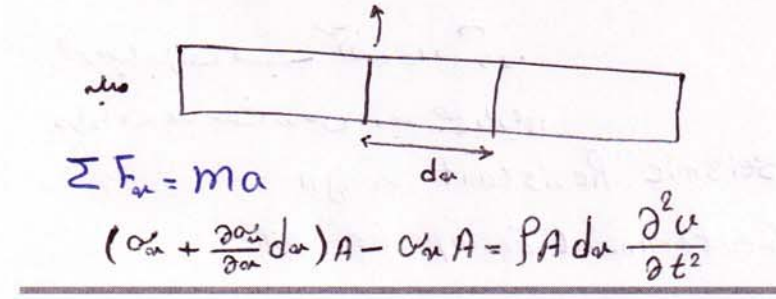
ارتعاش آزاد میله‌ی محصور به طول بی نهایت



میله محصور شده نامحدود برای انتشار امواج یک بعدی. قیدهای میله در برابر کرنش شعاعی با غلتک مشخص شده

امواج P را با یک میله مدل می کنیم.

انتشار امواج $\xleftarrow{\text{تبدیل به}}$ یک میله



$$\Sigma F_x = ma$$

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right) A - \sigma_x A = \rho A \, dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

معادله تعادل دینامیکی المان

مطابق معادله صفحه قبل u تغییرمکان در جهت x می‌باشد. این به سادگی مبین آن است که نیروهای نامتعادل خارجی موثر بر دو انتهای المان (طرف چپ معادله) بایستی مساوی نیروهای داخلی ناشی از اثر شتاب بر جرم المان (طرف راست معادله) باشد. در اینصورت به سادگی معادله یک بعدی حرکت بدست می‌آید:

دانسیته (چگالی)

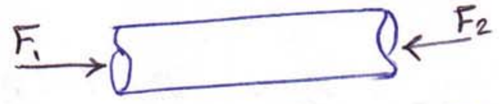
$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

* معادله یک بعدی حرکت مقدار A (سطح مقطع) ندارد چرا در معادله تعادل دینامیکی المان سطح مقطع (A) داریم؛ در واقع در معادله تعادل دینامیکی المان مقطع نداریم بلکه نیرو داریم لذا شبیه معادله یک بعدی حرکت می‌باشد.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \rho \boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}$$

شتاب (مشتق دوم کرنش)

$$\sum F = ma$$



$$F_1 - F_2 = ma \Rightarrow F_1 - F_2 = \rho \overset{dx}{A dx}\, a$$

ولی اگر طرفین معادله فوق را به A تقسیم کنیم تنش بدست می‌آید.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

در این شکل معادله حرکت برای هر رفتار تنش-کرنش متغیر است. ولی مستقیماً حل نمی‌شود. چون تداخل تنش‌ها (طرف چپ معادله با تغییر شکل‌ها (طرف راست معادله) اتفاق می‌افتد. لذا جهت ساده کردن معادله حرکت، طرف چپ آن را می‌توان با استفاده از رابطه تنش-کرنش

برحسب تغییر مکان نوشت. $\sigma_x = M\,\varepsilon_x$ که در آن مدول محدودشدگی $M = \{(1-\nu)/[(1+\nu)(1-2\nu)]\}E$ و رابطه تغییر مکان - کرنش $\varepsilon_x = \partial u/\partial x$ می باشد. این جایگزینی اجازه می دهد که معادله یک بعدی حرکت به شکل آشنای معادله یک بعدی انتشار موج در یک میله محصور در آید:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{M}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

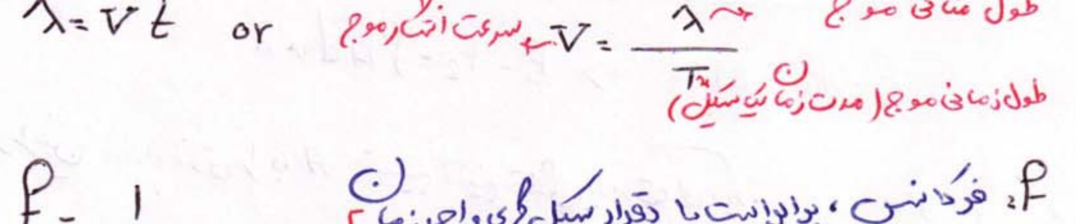
معادله یک بعدی انتشار موج به این شکل نیز قابل ارائه می باشد.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{سرعت انتشار موج}}}{V_p^{\,2}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{or} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{سرعت انتشار موج}}}{V^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \underline{5-10}$$

جواب چنین معادله‌ای بصورت زیر خواهد بود:

$$u(x,t) = f(Vt - x) + g(Vt + x)$$

یک مسأله داریم که در آن مکان و زمان بصورت توام وجود دارد.



$$\lambda = Vt \quad \text{or} \quad V = \frac{\lambda}{T}$$

سرعت انتشار موج ← V

λ → طول مکانی موج

T: طول زمانی موج (مدت زمان یک سیکل)

$$f = \frac{1}{T}$$

f: فرکانس، برابر است با تعداد سیکل‌های واحد زمان

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

ω: فرکانس زاویه‌ای

← در واحد زمان

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

k: عدد موج (تعداد موج): تعداد موج در واحد طول ← در واحد مکان

مثال: اگر طول موجی 20cm باشد در یک متر چند موج خواهیم داشت؟ چه عدد موج خواهیم داشت. $k=5$

$$\boxed{\lambda = vT = \frac{V}{f} = \frac{2\pi}{\omega}V = \frac{2\pi}{k}}$$

طبق رابطه فوق هر دو خاصیت زمانی و مکانی با سرعت به هم مرتبط هستند.

$$\left\{\begin{array}{l}\overset{\text{فرکانس زمانی}}{\omega} = \overset{\text{فرکانس مکانی (عدد موج)}}{k}\,V \\ \underset{\text{طول موج مکانی}}{\lambda} = \underset{\text{طول موج زمانی}}{T}\,V\end{array}\right.$$

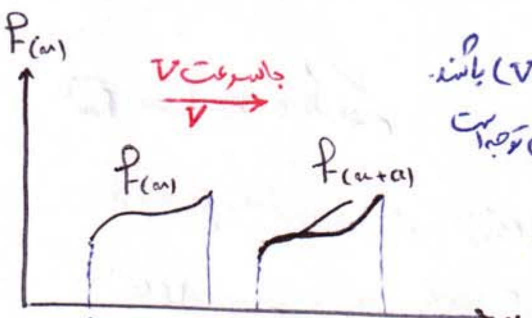
ω: فرکانس زمانی

λ: طول موج مکانی

k: فرکانس مکانی، عدد موج

T: طول موج زمانی.

بررسی $f(vt-x)$, $g(vt+x)$:



f و g می‌توانند توابع اختیاری $(vt-x)$, $(vt+x)$ باشند تا جواب معادله یک بعدی موج را ارضا نمایند. قابل توجه است که قدر مطلق f، مادامی که x با زمان افزایش می‌یابد (در سرعت V) و قدر مطلق g مادامی که x با زمان کاهش می‌یابد ثابت می‌ماند. بنابراین جواب معادله موج مبین تغییرات مکانی $[f(vt-x)]$ است که با سرعت V در جهت مثبت x حرکت نموده و معرف موج دیگری $[g(vt+x)]$ است که با همان سرعت در جهت منفی x حرکت می‌نماید. این جواب همچنین دلالت بر آن دارد که شکل امواج با موقعیت یا زمان، تغییر نخواهد کرد.

تبدیل فرم ریاضی و فیزیکی به هندسی:

$$vt - x = \frac{\omega}{k}t - x = \underbrace{\omega t}_{\text{فرکانس زمانی}} - \underbrace{kx}_{\text{فرکانس مکانی}} \qquad \omega t \equiv kx$$

$$U(x,t)= f(\underbrace{\overset{\text{ثابت}}{V}t}_{\text{زمانی}}-\underbrace{x}_{\text{مکانی}}) + g(Vt+x)$$

لذا خواهیم داشت:

$$U(x,t)= A\cos(\omega t-kx)+B\cos(\omega t+kx)$$

$$\omega t \equiv kx \longrightarrow A\sin\omega t \equiv A\sin kx$$

نکته: ارتعاش زمانی است ولی موج زمانی و مکانی می باشد.

نکته: قوه بصری بشر، طول موج مکانی موج را می تواند درک کند در واقع آنچه را که ما می توانیم ببینیم فرکانس مکانی است. نه پریود.

موج رایلی: از معادلات تنش-کرنش بدست می آید.
موج لاو

☐ میرایی مصالح

material Damping

در مصالح واقعی، بخشی از انرژی الاستیک امواج منتشر شده همیشه تبدیل به حرارت می‌شود. این عمل تبدیل، همواره با کاهش دامنه موج همراه است.

- در الاستیک

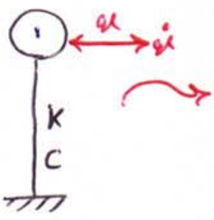
$$\tau = G\underbrace{\gamma}_{\text{تغییرشکل برشی}}$$

- در دینامیک (خاک kelvin-voigt):

$$\tau = \underbrace{G}_{\text{مدول برشی}}\gamma+\eta\frac{\partial\gamma}{\partial t} = G\gamma+\underbrace{\eta}_{\text{ضریب لزجت}}\dot{\gamma}$$

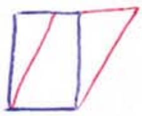
هر چیزی با تغییرشکل ارتباط دارد ← مدول (G)
هر چیزی که با سرعت ارتباط دارد ← لزجت (η)

خاک را بصورت یک سازه یک درجه آزادی مطابق زیر مدل می کنیم لذا داریم:



$$\overset{\text{برش}}{V} = \underset{G}{kx} + \underset{\eta = \xi \rightarrow}{c\dot{x}}$$

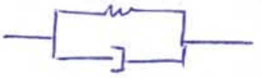
تبدیل به $\xi = 5\%$



خاک را بصورت یک ستون برشی مدل می کنیم.

امواج P که خاک را فشرده می کنند، اهمیت ندارند، ولی امواجی که حرکات رفت و برگشتی دارد از جنس برشی هستند و این بخش از امواج اهمیت دارند.

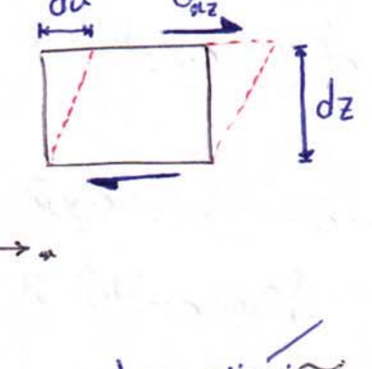
خاک یک ماده ویسکو الاستیک می باشد.

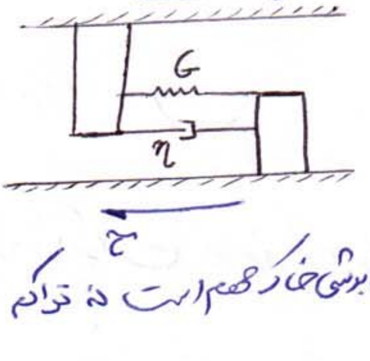


سازه: $f = kx + c\dot{x}$

خاک: $\tau = G\underset{\text{کرنش}}{\gamma} + \eta\dot{\gamma}$ ← نرخ کرنش (kelvin—voigt)

بخشی از توده خاک روی سنگ بستر را مدل می نماییم: (مدل خاک kelvin - voigt)





تذکر: حرکت برشی خاک مهم است نه تراکم

$\tau = G\gamma + 0$ خاک نامیرا

$\tau = G\gamma + \eta\dot{\gamma}$ خاک ویسکوالاستیک ; $\gamma = \frac{\partial u}{\partial z}$

با توجه به نوع تحریک در پایه توده خاک (سنگ بستر)، حرکت خاک ارتعاشی است.

$$\begin{cases}\gamma=\gamma_0 \sin\omega t\\ \dot{\gamma}=\gamma_0\omega \cos\omega t\end{cases}$$

سرعت ایجادشده

$$\tau=G\gamma_0 \sin\omega t+\eta\omega\gamma_0 \cos\omega t$$

دامنه‌ها وابسته به فرکانس هستند به دلیل جمله دوم که ω خارج از Cosωt قرار گرفته است.

تمرین: معادله ۹۱-۵ کتاب مهندسی ژئوتکنیک لرزه‌ای کرمر kramer را اثبات کنید؟

لزجت

فرکانس حرکت سنگ بستر

$$\xi=\frac{1}{4\pi}\frac{\pi\eta\omega\gamma_0^2}{\frac{1}{2}G\gamma_0^2}=\frac{\boxed{\eta}\boxed{\omega}}{2\boxed{G}}$$

معادله: ۹۱-۵

مدول الاستیسیته

نکته: مطابق رابطه ۹۱-۵ میرایی خاک (ξ) وابسته به فرکانس می‌باشد.

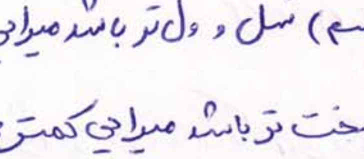
طبق رابطه ۹۱-۵ خواهیم داشت:

۱- طبق رابطه G و ξ مشخص است هرچه خاک (جسم) شل و ول‌تر باشد میرایی بیشتر است.

۲- 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 سخت‌تر باشد میرایی کمتری باشد.

۳- η و ξ هم از یک جنس هستند.

۴- رابطه بین ω و ξ:



$$\omega_1<\omega_2 \Rightarrow \xi_1<\xi_2$$

تمرین: با توجه به کتاب دینامیک سازه‌ها اثبات نمایید که میرایی کلمب مستقل از فرکانس می‌باشد؟

تمرین: معادله ۹۴-۵ کتاب kramer اثبات نمایید؟

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=G\underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}_{\gamma}+\eta\frac{\partial^3 u}{\partial z^2\partial t}$$

سیستم میرا: $\frac{\text{۵-۴۹}}{\text{۲}}$

در کتاب واکا بایاشی (فصل ۹ کتاب مهندسی زلزله) برای حالت نامیرا ($\eta = 0$ معادله صفحه قبل) را حل نموده است.

سیستم نامیرا:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = G \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{G}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad ; \quad C = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

Celerito or V_s (سرعت موج برشی خاک)

معادله را به فرم کلاسیک ریاضی نوشته لذا داریم:

معادله کلاسیک موج:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

☐ برای حل مسائل تعادل طبیعت چهار گام داریم:

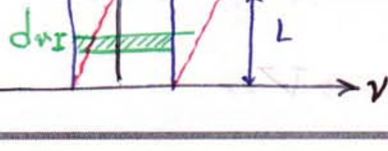
گام ها	استاتیک	مقاومت مصالح	دینامیک جسم صلب	دینامیک جسم انعطاف پذیر
گام ۱) سیستم مختصات	✓	✓	معادل با استاتیک	معادل با مقاومت مصالح
گام ۲) دیاگرام آزاد	دیاگرام آزاد جسم صلب فرض می‌شود ✓	دیاگرام آزاد الاستیک (برای هندسه تغییر شکل یافته ✓		
گام ۳) معادله تعادل	✓ $\sum F = 0$ تعادل	۱- تعادل $\sum F=0$ ✓ ۲- قانون هوک $F=kx$ ۳- سازگاری ← جسم و هندسه	$\sum F=ma$ معادله حرکت	$\sum F=ma$ معادله حرکت
گام ۴) حل معادله تعادل در ریاضی پیشرفته	✓ حل	✓ حل		

☐ فصل نهم کتاب مهندسی زلزله (دانشمند ۲):

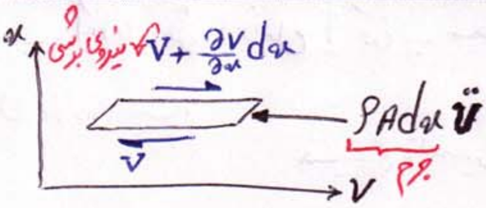
برای حل معادله کلاسیک موج ۴ گام حل مسائل تعادل طبیعت را خواهیم داشت:

- گام اول: سیستم مختصات:

ستون خاک به طول L



- گام دوم : دیاگرام آزاد



(نیروی مخالف)

گام سوم ؛ نوشتن معادله تعادل (حرکت)

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad Ⓘ \;;$$

سرعت انتشار موج: $C=\sqrt{\frac{G}{\rho}}$

همان V چند صفحه قبل

$$\begin{cases} Vt-x \\ Vt+x \end{cases} \overset{\text{هم ارز}}{\equiv} \begin{cases} ct-x \\ ct+x \end{cases}$$

گام چهارم ؛ حل معادله (کلاس ریاضیات پیشرفته مهندسی)

از روش جدایی متغیرها داریم ؛

$$v=\underbrace{\phi(x)}_{\text{مود (قسمت مکانی)}} e^{i\omega t} \qquad Ⓘⓘ$$

- چرا اینجا پاسخ معادله $e^{i\omega t}$ وجود دارد ؟

جواب ؛ چون تحریک، دارای فرکانس ω می‌باشد پس $e^{i\omega t}$ ایجاد می‌شود.

معادله Ⓘⓘ را در معادله دیفرانسیل Ⓘ حرکت قرار می‌دهیم ؛

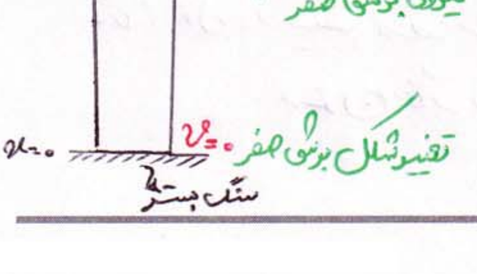
$$\frac{d^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\omega^2}{c^2}\phi=0 \qquad Ⓘⓘⓘ$$

جواب معادله دیفرانسیلی Ⓘⓘⓘ برابر است با ؛

$$\phi=A\cos\frac{\omega}{c}x+B\sin\frac{\omega}{c}x$$

دو مجهول داریم A و B

شرایط حدی (مرزی) ؛ مدل خاک روی سنگ بستر را می‌توان بصورت یک تیر طره در نظر گرفت.



$$\begin{cases} x=0 \longrightarrow v=0 \\ x=L \longrightarrow V=0 \end{cases}$$

با استفاده از شرایط مرزی مقادیر A و B را بدست می آوریم.

$$x=0 \Rightarrow \phi(0) = A\cos 0 + B\sin 0 \longrightarrow A=0$$

$$x=L \Rightarrow V=0 \Rightarrow \frac{\partial\phi(L)}{\partial x}=0 \Rightarrow B\cos\frac{\omega L}{c}=0 \begin{cases} B\neq 0 \\ \cos\frac{\omega L}{c}=0 \rightarrow \frac{\omega L}{c}=(2n-1)\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

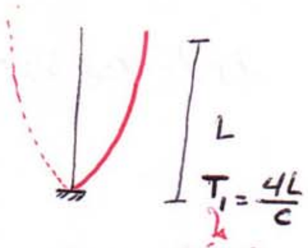
$n=1,2,3,4,....$

در نتیجه:

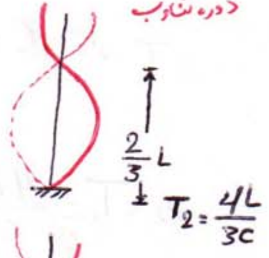
$$\begin{cases} \omega_n = \frac{(2n-1)\pi}{2}\,\frac{c}{L} \\ T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{T_1}{2n-1} \end{cases}$$

شکل مود اول ارتعاش برشی تیر طره (خاک):

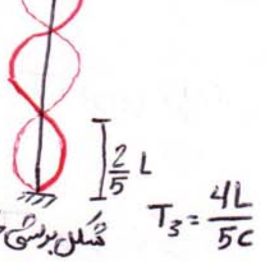
$$\text{if: } n=1 \longrightarrow \frac{\omega L}{c}=\frac{\pi}{2} \longrightarrow \overset{\text{مود اول}}{\omega_1}=\frac{\pi c}{2L} \longrightarrow$$



$$\text{if: } n=2 \longrightarrow \frac{\omega L}{c}=\frac{3\pi}{2} \longrightarrow \omega_2=\frac{3\pi c}{2L} \longrightarrow$$



$$\text{if: } n=3 \longrightarrow \frac{\omega L}{c}=\frac{5\pi}{2} \longrightarrow \omega_3=\frac{5\pi c}{2L} \longrightarrow$$



شکل برشی خاک (مودهای مختلف)

L: ارتفاع ستون خاک است که ثابت است.

C: سرعت انتشار موج ثابت $C=\sqrt{\frac{G}{\rho}}$

پس متناظر با مودهای مختلف ω های مختلف بدست می آید.

مقدار پریود T_2 چه ربطی با T_1 دارد؟ با تقسیم پریود مود اول به عدد ۳ پریود مود دوم حاصل می‌شود. با تقسیم پریود مود اول به عدد ۵ پریود مود سوم حاصل می‌گردد.

پریود خاک:

- پریود مود اول تقسیم بر ۳ ← مود دوم ← $T_2 = \frac{T_1}{3}$
- پریود مود اول تقسیم بر ۵ ← مود سوم ← $T_3 = \frac{T_1}{5}$
- 〃 〃 〃 〃 〃 〃 ۷ ← مود چهارم ← $T_4 = \frac{T_1}{7}$
- 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 ۹ ← مود پنجم ← $T_5 = \frac{T_1}{9}$

$$T_n = \frac{T_1}{(2n-1)}$$

T_n: پریود مود nام

ω_n: فرکانس زاویه‌ای (طبیعی) مود nام لایه سطحی.

* سرعت موج برشی $C = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$ در حدود $100\ m/_{sec}$ می‌باشد کمتر از این مقدار نرم است. و $C = 800\ m/_{sec}$ خیلی سخت است.

مثال: اگر یک لایه خاک نرم به طول $L = 50\ m$ و $C = 150\ m/_{sec}$ مقدار T (پریود) را محاسبه کنید؟

پریود خاک: $T_1 = \frac{4L}{C} = \frac{4 \times 50}{150} = 1.5\ sec$ خاک خیلی نرم

یعنی یک لایه خاک خیلی نرم پریود بالایی دارد ← مانند ساختمان بلند

مثال: اگر یک لایه خاک به طول $L = 30_m$ و $C = 250\ m/_{sec}$ باشد مقدار T (پریود) را محاسبه کنید؟

پریود خاک: $T_1 = \frac{4L}{C} = \frac{4 \times 30}{250} = 0.5\ sec$ خاک خیلی سخت

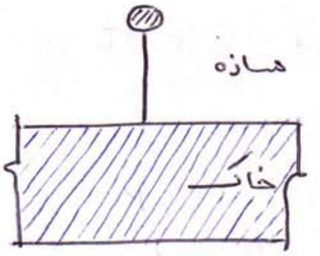
خاک سخت ← مانند ساختمان کوتاه

در ساختمان با همین پریود تشدید رخ می‌دهد.

بخاطر همین است که باید DAF لحاظ شود. ← در ارتعاشات
〃 〃 〃 〃 〃 〃 B (ضریب بازتاب) 〃 〃 ← در زلزله

- چرا ضریب بازتاب در آیین‌نامه‌های لرزه‌ای اهمیت دارد؟ چون تشدید و رزونانس دارد اگر دوره تناوب خاک با دوره تناوب سازه‌ها یکی شود باعث پدیده تشدید می‌گردد.

* توجه شود که پریود خاک در محدوده ساختمان‌های روی آن می‌باشد.



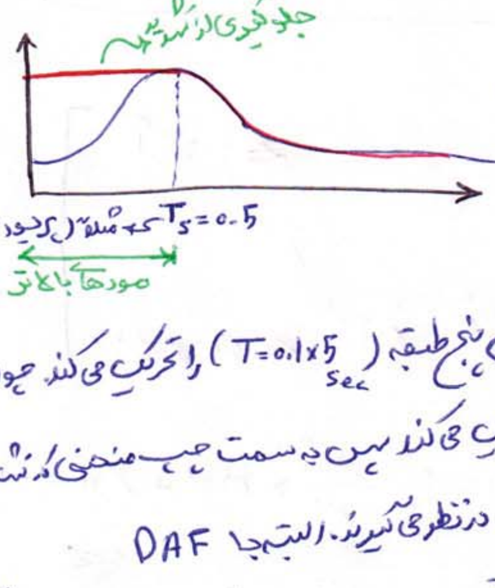
$T = 0.1 - 1.5$ sec

$T = 0.1 - 1.5$ Sec

پریود برای خاک و سازه روی آن از یک جنس می‌باشد.

با توجه به شکل فوق پریود خاک در محدوده ساختمان‌های عمومی روی آن خاک است.

☐ نکته: چرا در طیف آیین‌نامه‌ها (آیین‌نامه ۲۸۰۰) قسمت سمت چپ طیف را بصورت خطی درنظر گرفته می‌شود؟



دلیل اول: جلوگیری از تشدید است، این روش ساده‌ترین روش برای درنظرگرفتن اثر مودهای بالاتر خاک می‌باشد.

خاکی که پریود $\underset{T_s}{0.5_{sec}}$ دارد، یک ساختمان پنج طبقه ($T = 0.1 \times 5_{sec}$) را تحریک می‌کند چون مود دوم ½ و بالاتر، ساختمان‌های دوطبقه و ... را تحریک می‌کند پس به سمت چپ منحنی که نشان دهنده اثر مودهای بالاتر است را بصورت یک خط صاف درنظر می‌گیرند. البته جا DAF

دلیل دوم: دومین دلیل برای شدن خط مستقیم در سمت چپ طیف خاک، محتوای فرکانسی کم برای خاک است. در بستر خاک، برای فرکانس‌های کم، محتوا دارد ولی برای فرکانس‌های زیاد محتوا ندارد. لذا وقتی در DAF ضرب می‌شود، در زیر سازه، خاک باعث می‌شود که برای فرکانس‌های بالاتر بیشتر هم محتوا ایجاد شود. لذا این دومین دلیل برای صاف شدن خط است.

طبق منحنی فوق قسمت کم فرکانس (پریود زیاد) چون DAF حدود یک است پس

همان می ماند ولی در بخش با فرکانس بالا (پریود کم) چون DAF حدود ۱۷ الی ۸ برابر است، محتوای فرکانسی زیاد می شود ولی (Amplitude) پریود غالب تغییر نمی کند چون در همان فرکانس کم می باشد.

$$v = \phi(x)\, e^{i\omega t} \rightarrow ?\cos\omega t + ?\sin\omega t$$

$$\omega_n = (2n-1)\frac{\pi}{2}\frac{c}{L}$$

هارمونیک

ضریب ثابت

$$\text{مود n ام} \quad V_n = \underbrace{\{C_n \cos\omega_n t + D_n \sin\omega_n t\}}_{\text{زمانی (t)}}\ \underbrace{\sin\overset{\rightarrow k}{\frac{\omega_n}{c}}x}_{\text{مکانی}}$$

$$\boxed{v = \sum_{n=1}^{\infty}\{C_n \cos\omega_n t + D_n \sin\omega_n t\}\sin\frac{\omega_n}{c}x}$$

رابطه ارتعاش لایه خاک

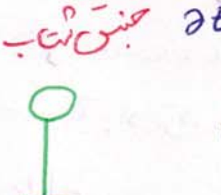
معادله موج:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \Leftarrow \text{آزاد :}$$

تحریک پایه از جنس شتاب

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 v_g}{\partial t^2} \Leftarrow \text{اجباری :}$$

حرکت زمین



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) \xrightarrow[\text{نامیرا}]{\text{شتاب پایه}} m\ddot{x} + kx = -m\ddot{x}_g$$

$$\Rightarrow \underbrace{\boxed{\ddot{x} + \omega^2 x = -\ddot{x}_g}}_{\text{جرم واحد}}$$

نحوه نگارش اجباری

تمرین: با مراجعه به صفحه ۴۳۵ کتاب مهندسی زلزله (دکتر تاشنی چور) معادله موج تحت تحریک اجباری را حل نمائید.

تمرین: اگر بجای تغییرشکل در مود برشی در ستون خاک، تغییرشکل خمشی فرض کنیم، معادله دیفرانسیل تغییرشکل را تشکیل نموده و حل نمایید! (طبق معادله ۱۸-۹ ص ۴۳۶ کتاب مهندسی زلزله دکتر تابش پور)

سوال: موج برشی که در توده خاک به سطح زمین رسیده و به موج سطحی تبدیل شده است چه تاثیری در زیرسازه خواهد گذاشت؟

الان هدف انتقال، نحوه حرکت امواج در توده خاک از زیرشکن بستر به سطح زیرسازه است.

موجی که از توده خاک حرکت کرده و در سطح بصورت لاو و رایلی تبدیل شده است چه تاثیری در سازه دارد. ضرایب آیین نامه به صورتی است که تاثیر اثرات امواج لاو و رایلی راهم در نظر گرفته شده است.

▭ انتشار امواج:
- ۱- هندسی ✗
- ۲- فیزیکی ✓

و

- ۱- تابع هارمونیک ✗
- ۲- تابع دلخواه ✓

مهم است.

- جنس ادبیات الان بصورت فیزیکی است نه هندسی

براساس Notation کتب مختلف داریم:

کتاب کرامر $vt+x, \; vt-x$

کتاب واکایاباشی $t+\frac{x}{c}, \; t-\frac{x}{c}$

$$\Rightarrow \underbrace{\omega t+kx, \; \omega t-kx}_{}$$

رویکرد هندسی (جذاب تر)

- ابزار فیزیکدان ها ریاضی می باشد، و ابزار مهندسین هم فیزیک است و هم ریاضی

معادله موج:

$$\text{زمان} \leftarrow \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \rightarrow \text{مکان}$$

ابزار یک فیزیک‌دان جهت حل معادله موج { ریاضی

" " مهندس " " " " " " } فیزیک ← پاسخ از جنس $wt \pm kx$
ریاضی

ابزار ریاضی جهت حل معادله موج:

مشتق دوم تابع زمان = مشتق دوم تابع مکان

لازم است تابعی داریم که مکان معادل زمان است $f(ct \pm x)$

حل ریاضی بودن درک از فیزیک:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \qquad v = f(ct + x) + g(ct - x)$$

	زمان	مکان
تابع دلخواه:	$5t^2 + 4t$	$5x^2 + 4x$
مشتق اول:	$10t + 4$	$10x + 4$
مشتق دوم:	10	10

اگر زمان را از حوزه مکان ببینیم یک منفی در ct ضرب می‌شود (ct)

پس هر تابعی که متغیر آن از جنس $\left.\begin{matrix} ct + x \\ ct - x \end{matrix}\right\}$ باشد، جواب است.

☐ اگر در معادله موج تغییر متغیر $\frac{x}{c} = X$ ایجاد کنیم داریم:

$$\left.\begin{matrix} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial X^2} \\ t \longrightarrow x_1 \\ X \longrightarrow x_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}$$

$$\left.\begin{matrix} f(x_1 + x_2) \\ f(x_1 \ominus x_2) \end{matrix}\right]$$

چون دو بار مشتق می‌گیریم منفی در منفی مثبت می‌شود.

دو بار مشتق بگیریم معادله موج حاصل می‌گردد.

حال از فیزیک به ریاضی می‌رویم :

$$v = f(ct-x) + g(ct+x) \rightarrow$$ جواب معادله موج

با توجه به توابع f و g در جواب معادله موج می‌توان بیان نمود که با سرعت c به سمت راست و چپ در حرکت می‌باشد.

$$C = \frac{\lambda}{T}$$

$$T_1 = \frac{4L}{C}$$

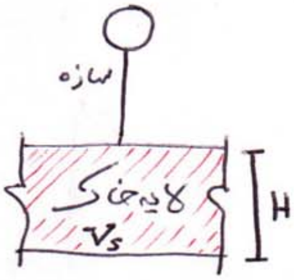
ارتفاع لایه خاک

سرعت موج برشی

$$\Downarrow$$

$$\boxed{T_s = \frac{4H}{V_s}} \Longrightarrow$$

پریود مود اول برای خاک



پریود مود دوم ارتعاش خاک $\Leftarrow \frac{4H}{3V_s}$

نکته: وقتی یک موج از یک محیط به محیط دیگری می‌رسه، اگر با زاویه بیاید، بخشی منعکس شده و با یک زاویه و بخشی با یک زاویه عبور می‌کند. اگر زاویه موج قائم باشد، بخشی عبور کرده و بخشی بر می‌گردد.

تمرین: تیتر ۹-۲-۳ کتاب مهندسی زلزله (دکتر تاشی‌پور) را تا انتهای فصل رونویسی کنید؟

■ ۹-۲-۳ : انتشار موج در جسم یک بعدی

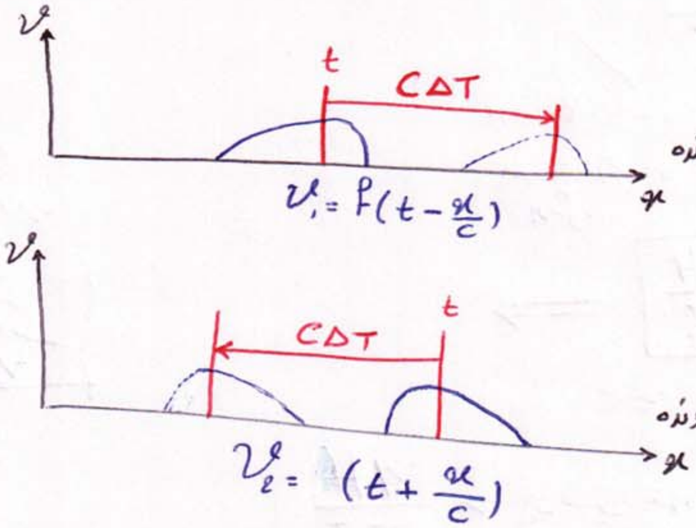
مشاهده شد که ارتعاش برشی یک تیر شبیه معادله انتشار موج است. یک کاربرد مناسب از این تئوری، مطالعه انتشار امواج برشی در محیط خاک

در راستای قائم است. با در نظر گرفتن معادله زیر به عنوان معادله انتشار موج،

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad ; \quad C = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

حل این معادله به صورت زیر فرض می‌شود:

$$v = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right) \qquad Ⓐ \text{ معادله}$$

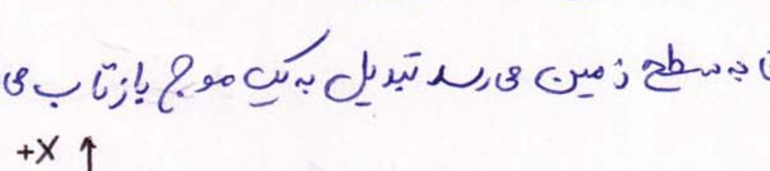


الف) موج تابشی پیش رونده

ب) موج بازتاب پس رونده

انتشار موج (حالت الف، ب)

مطابق شکل انتشار موج، جمله اول سمت راست معادله Ⓐ نشان دهندهٔ انتشار موج به سمت راست است، و جمله دوم به معنی انتشار موج به سمت چپ است. معمولاً به این دو جمله امواج انتشاری پیش رونده و پس رونده می‌گویند. c سرعت انتشار موج است. رابطه بین f و g از روی شرایط مرزی تعیین می‌شود. یک موج تابشی برشی رو به بالا در زمین وقتی به سطح زمین می‌رسد تبدیل به یک موج بازتاب می‌شود مطابق شکل ذیل



بازتاب یک موج در سطح زمین

در سطح زمین ($X=0$)، تنش برشی صفر است یعنی $G\frac{\partial v}{\partial x}=0$ با جایگذاری این شرط در معادله Ⓐ داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\partial g}{\partial t}$$

که این به معنی $g=f$ است، بنابراین:

$$v=f\left(t-\frac{x}{c}\right)+f\left(t+\frac{x}{c}\right) \quad Ⓑ$$

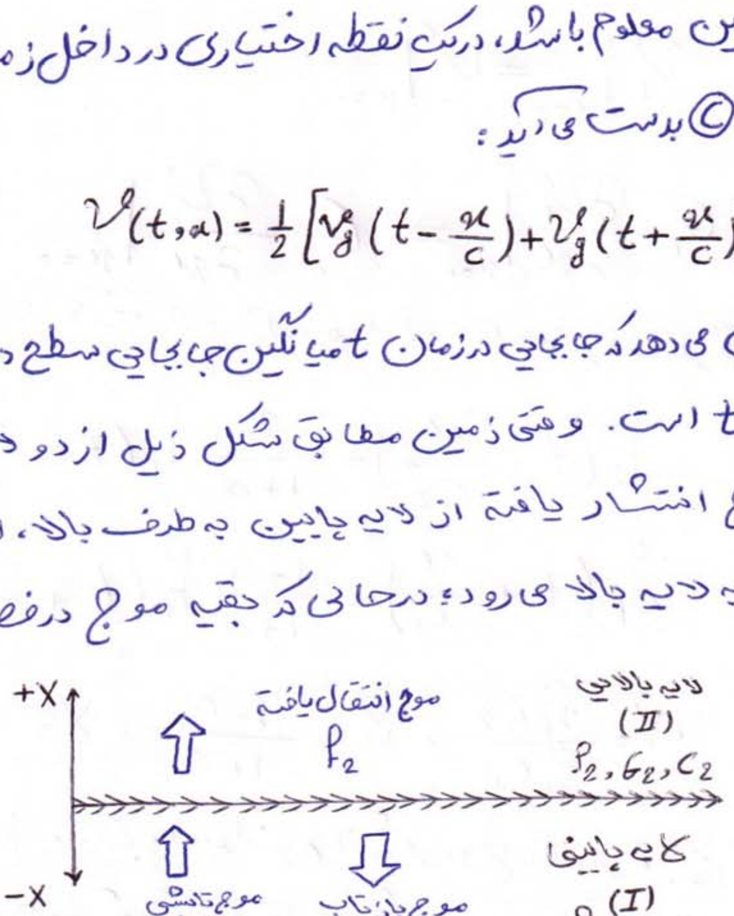
با فرض اینکه تابع موج در روی سطح زمین همان v_g است، داریم:

$$v_g=2\,f(t) \quad Ⓒ$$

یعنی: موج مشاهده شده دو برابر بزرگتر از موج ورودی تابشی است. اگر شکل موج v_g در روی سطح زمین معلوم باشد، در یک نقطه اختیاری در داخل زمین تابع موج از معادلات Ⓑ و Ⓒ بدست می آید:

$$v(t,x)=\frac{1}{2}\left[v_g\left(t-\frac{x}{c}\right)+v_g\left(t+\frac{x}{c}\right)\right]$$

این معادله نشان می دهد که جابجایی در زمان t میانگین جابجایی سطح در زمان $\frac{x}{c}$ زودتر و دیرتر از زمان t است. وقتی زمین مطابق شکل ذیل از دو لایه تشکیل شده است: قسمتی از موج انتشار یافته از لایه پایین به طرف بالا، از فصل مشترک عبور می کند و به لایه بالا می رود، درحالی که بقیه موج در فصل مشترک، بازتاب می کند.



انتقال و بازتاب یک موج در فصل مشترک بین دو لایه زمین

با فرض اینکه چگالی این لایه ها برای لایه پایین و بالا به ترتیب ρ_1 و ρ_2 ، مدول برشی G_1 و G_2 و سرعت انتشار موج C_1 و C_2 باشد، برای امواجی که در این دو لایه انتشار می یابند روابط زیر برقرار است:

$$v_1 = f_1\left(t - \frac{x}{c_1}\right) + g_1\left(t + \frac{x}{c_2}\right) \qquad Ⓐ$$

$$C_1 = \sqrt{\frac{G_1}{\rho_1}}$$

$$v_2 = f_2\left(t - \frac{x}{c_2}\right) \quad ; \; c_2 = \sqrt{\frac{G_2}{\rho_2}} \qquad Ⓑ$$

در فصل مشترک، جابجایی ها و تنش های برشی برای هر دو لایه یکسان است، بنابراین شرایط همسازی و هندسی بصورت زیر خواهد بود:

$$v_1\big|_{x=0} = v_2\big|_{x=0} \qquad Ⓒ$$

$$G_1 \frac{\partial v_1}{\partial x}\Big|_{x=0} = G_2 \frac{\partial v_2}{\partial x}\Big|_{x=0}$$

با جایگذاری معادلات A و B در معادله C و نیز در نظر گرفتن معادله C داریم:

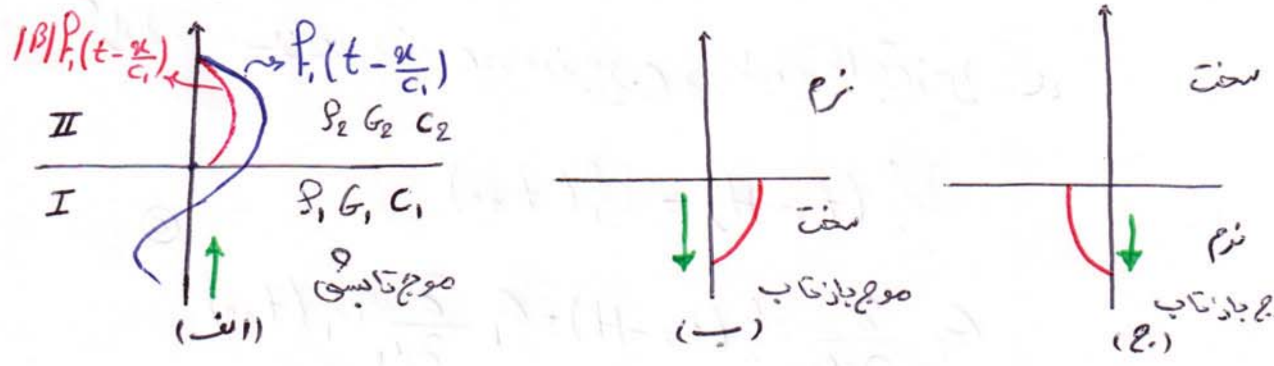
$$f_2\left(t - \frac{x}{c_2}\right) = \frac{2}{1+\alpha} f_1\left(t - \frac{x}{c_1}\right)$$

$$g_1\left(t + \frac{x}{c_1}\right) = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} f_1\left(t + \frac{x}{c_1}\right) \qquad Ⓓ$$

$$\alpha = \frac{\rho_2 C_2}{\rho_1 C_1} \; , \; \beta = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \; ; \; \gamma = \frac{2}{1+\alpha}$$

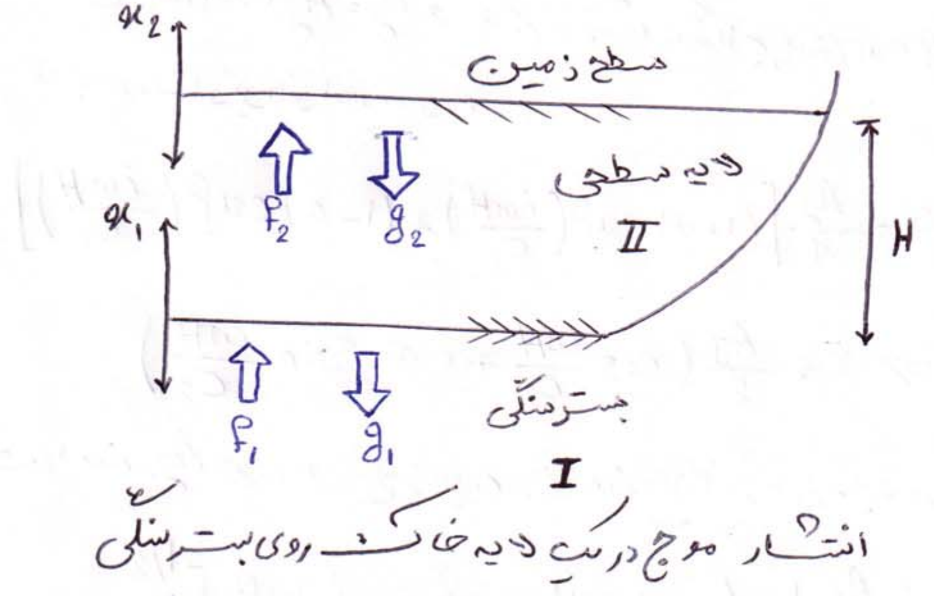
α، β و γ به ترتیب امپدانس انتشار موج، ضریب بازتاب و ضریب انتقال هستند. توجه شود که موج برشی، موج انتقال یافته و موج بازتاب

همگی شکل یکسان دارند. اگر $1<\alpha$ و $1>\beta$ باشد، موج بازتاب نسبت به موج تابشی شکل معکوس دارد (مطابق شکل ذیل).



بازتاب یک موج (الف) انتشار موج تابشی (ب) $\alpha<1$ (ج) $\alpha>1$

اکنون مسأله نشان داده شده در شکل ذیل را در نظر می‌گیریم. در این شکل زمین از یک بستر سنگی (I) و یک لایه سطحی (II) تشکیل شده و می‌خواهیم رابطه بین موج تابشی در لایه (I) و جابجایی حقیقی سطح زمین را بررسی کنیم.



انتشار موج در یک لایه خاک روی بستر سنگی

مطابق رابطه $v(t,x)=\frac{1}{2}\left[v_g(t-\frac{x}{c})+v_g(t+\frac{x}{c})\right]$، شکل موج در نقطه x_2 در لایه سطحی را می‌توان برحسب شکل موج زمین (v_g) نوشت:

$$v_2(t,x_2)=\frac{1}{2}\left[v_g(t-\frac{x_2}{c_2})+v_g(t+\frac{x_2}{c_2})\right] \quad Ⓐ$$

معادله موج در نقطه x_1 در بستر سنگی بصورت زیر است؛

$$v_1(t,x_1)=f_1\left(t-\frac{x_1}{c_1}\right)+g_1\left(t+\frac{x_1}{c_1}\right) \quad Ⓑ$$

شرایط هم‌سازی و هندسی در مرز بین دو لایه مطابق زیر است؛

$$v_2(t,-H)=v_1(t,0) \quad Ⓒ$$

$$G_2\,\frac{\partial}{\partial x_2}v_2(t,-H)=G_1\,\frac{\partial}{\partial x_1}v_1(t,0)$$

مطابق روابط A تا C می‌توان نوشت،

$$f_1(t)=\frac{1}{4}\left[(1+\alpha)v_g\left(t+\frac{H}{c_2}\right)+(1-\alpha)v_g\left(t-\frac{H}{c_2}\right)\right]$$

با استفاده از این معادله، اگر شکل موج در روی سطح زمین مشخص باشد می‌توان شکل موج انتقال یافته از مرز به طرف لایه سطحی را بدست آورد. اگر فرض شود شکل موج در روی سطح $v_g=A_g\exp(i\omega t)$ و موج تابشی به شکل $f_1(t)=\alpha\exp(i\omega t)$ باشد، مقدار α بصورت زیر خواهد بود:

$$\alpha=\frac{A_g}{4}\left[(1+\alpha)\exp\left(\frac{i\omega H}{c_2}\right)+(1-\alpha)\exp\left(\frac{i\omega H}{c_2}\right)\right]$$

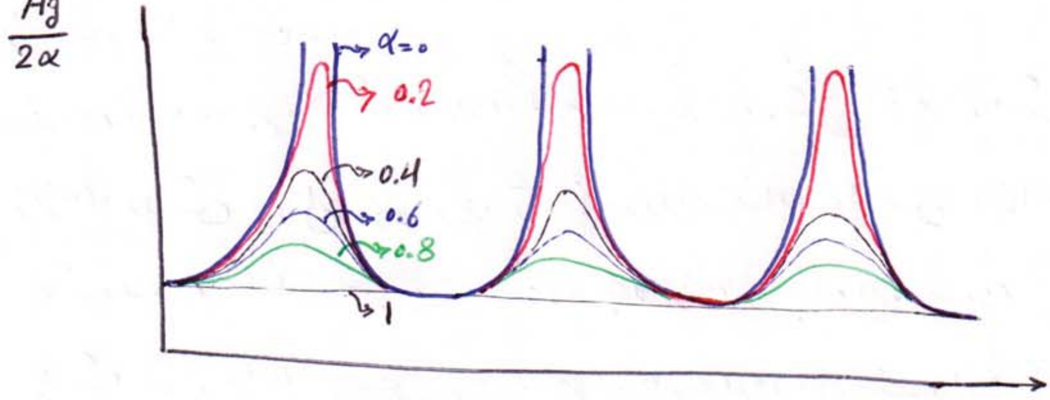
$$\Rightarrow \alpha=\frac{A_g}{2}\left(\cos\frac{\omega H}{c_2}+i\,\alpha\,\sin\frac{\omega H}{c_2}\right)$$

نسبت دامنه A_g در روی سطح زمین با دامنه 2α در مرز، بصورت زیر خواهد بود:

$$\left|\frac{A_g}{2\alpha}\right|=\left(\cos^2\frac{\omega H}{c_2}+\alpha^2\sin^2\frac{\omega H}{c_2}\right)^{-1/2}$$

این نسبت بیانگر تغییر در دامنه موج تابشی است که توسط لایه بالایی به وجود آمده است. در شکل صفحه بعد رابطه بین ω و تقویت را برای

نسبت های مختلف امپدانس α نشان می دهد.

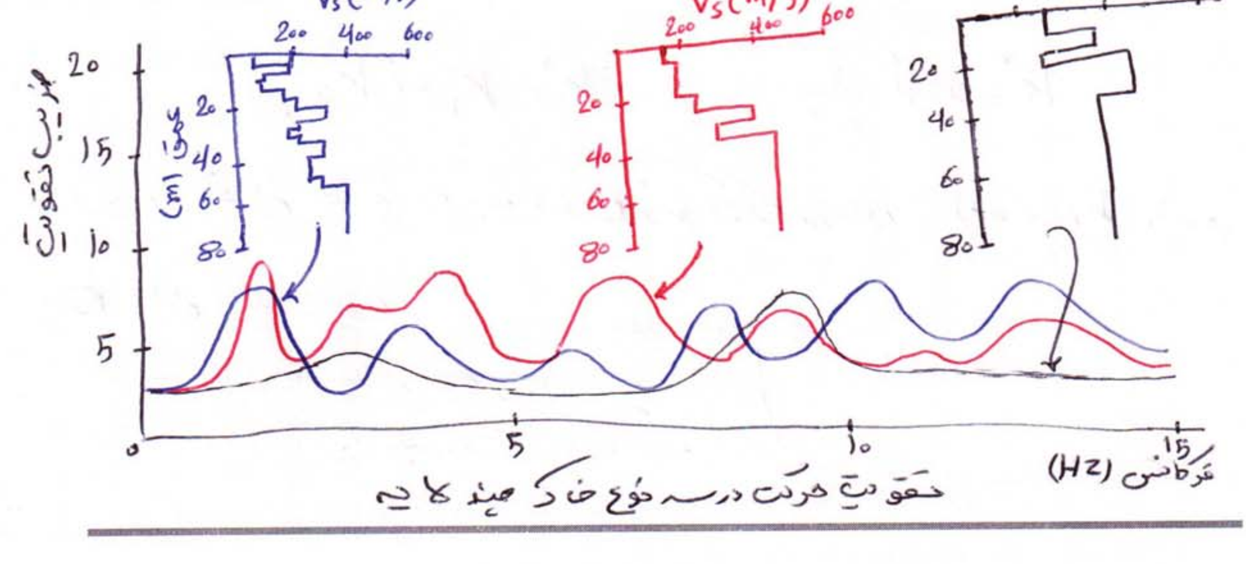


خصوصیات تقویت لایه سطح

هنگامی که فرکانس زاویه ای ω یک موج تناوبی با یکی از فرکانس های زاویه ای طبیعی لایه سطحی یعنی، $\frac{\pi C_2}{2H}$ ، $\frac{3\pi C_2}{2H}$ ، $\frac{5\pi C_2}{2H}$ و ... مساوی شود تشدید به وجود می آید:

که در آن ω_n زاویه ای طبیعی nام لایه سطحی است. پریود طبیعی مساوی است با:

این پریود T_n به عنوان پریود غالب (Predominant Period) نامیده می شود.
در شکل ذیل نشان دهندهٔ خصوصیات تقویت امواج تناوبی در شرایطی است که شکل زمین پیچیده



تقویت حرکت در سه نوع خاک چند لایه

بوده و دارای میرایی نرخ باشد. برای درک روشن‌تر اثر نوع خاک مربوط را به طور مجزا ترسیم نمود.

هنگامی که یک موج تناوبی به جای شکل سینوسی به شکل تصادفی باشد (مانند موج زلزله)، روش تبدیل فوریه می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد. ابتدا موج تصادفی به یک سری مثلثاتی تجزیه می‌شود و بعد برای هر جمله این سری همان روش مورد بحث فوق برای استخراج پاسخ به کار می‌رود. در انتها، با کمک تبدیل فوریه معکوس پاسخ تعیین می‌شود.

☐ تفسیر معادله ۹-۳۸:

$$\left|\frac{A_g}{2\alpha}\right| = \left(\cos^2\frac{\omega H}{C_2} + \alpha^2 \sin^2\frac{\omega H}{C_2}\right)^{-1/2}$$

اکنون که تمرین قبلی را انجام دادیم و از رابطه فوق داریم:

$$\left|\frac{\overset{\rightarrow \text{PGA}}{A_g}}{2\alpha}\right| = \frac{1}{\sqrt{\cos^2\frac{\omega H}{C_2} + \alpha^2 \sin^2\frac{\omega H}{C_2}}}$$

مدول برشی مختلط:

$$G^* = G + i\omega\eta$$

← مدول برشی مختلط

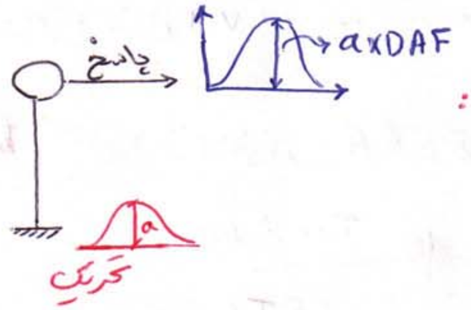
به دو روش می‌توان معادله میرا را حل کرد، به جای معادله هارمونیک می‌توان عدد مختلط حل نمود این عدد مختلط تمام مختصات مربوط را دارد.

$$k^* = \omega\sqrt{\frac{\rho}{G^*}} \quad , \quad k^* = k_1 + i k_2$$

تمرین: فصل هفتم کتاب مهندسی ژئوتکنیک لرزه‌ای (kramer) را مرور نمایید!

☐ تحلیل پاسخ زمین:

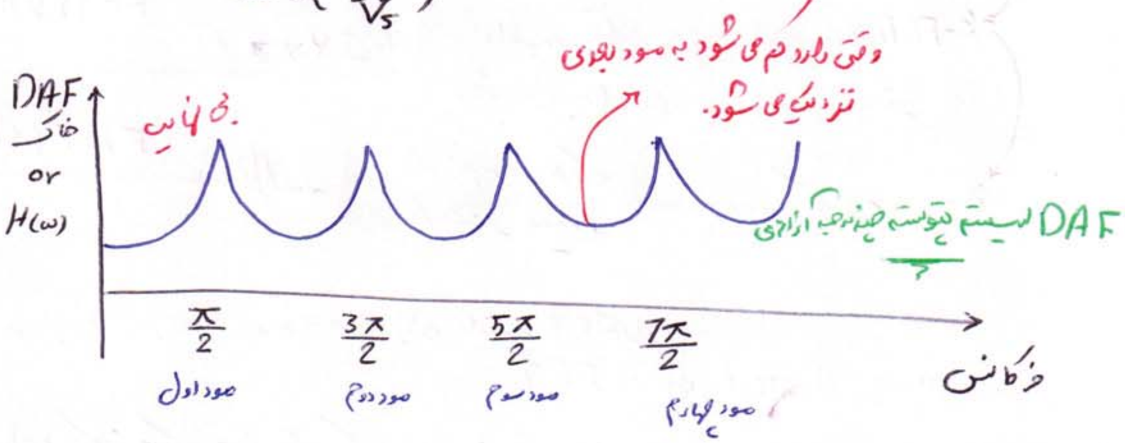
هر چه موج به سمت زمین حرکت می‌کند امتداد آن بصورت قائم می‌شود.



نکته:

سنگ بستر صلب ولی لایه خاک
اگر سنگ بستر صلب باشد،
ولی لایه خاک یکپارچه داشته باشیم
به ارتفاع H و میرایی وجود نداشته
باشد.
معادله ۵-۷ کتاب Kramer

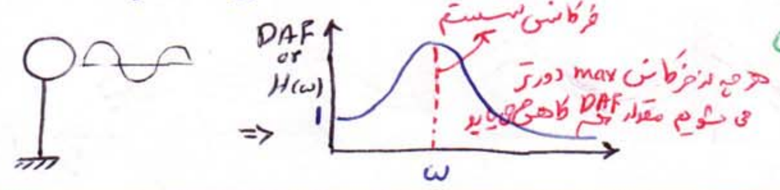
$$DAF_{خاک} = \frac{1}{\cos\left(\frac{\omega H}{V_s}\right)}$$



DAF برای سیستم چند درجه آزادی نامیرا

تفسیر منحنی:

از یک (مقدار ۱) شروع شده، به مقدار max (پیک در بی‌نهایت) رسیده، سپس کم می‌شود مقدار DAF، ولی چون به مود بعدی ارتعاشی نزدیک می‌شود دوباره مقدار DAF افزایش می‌یابد. قابل توجه است که در سیستم یک درجه آزادی کم شدن مقدار DAF ادامه داشته ولی در سیستم‌های پیوسته چند درجه آزادی مقدار DAF به دلیل نزدیک شدن به مود بعدی ارتعاشی دوباره مقدار DAF افزایش می‌یابد.



سیستم یک درجه آزادی
فقط یک مود دارد.

تمرین: مثال ۱-۷ کتاب Kramer (مهندسی ژئوتکنیک لرزه‌ای) را حل کنید؟

☐ کاربرد نرم‌افزار EERA (محاسبه طیف اصلاح شده)

۱- تاریخچه زمانی حرکت ورودی سنگ بستر

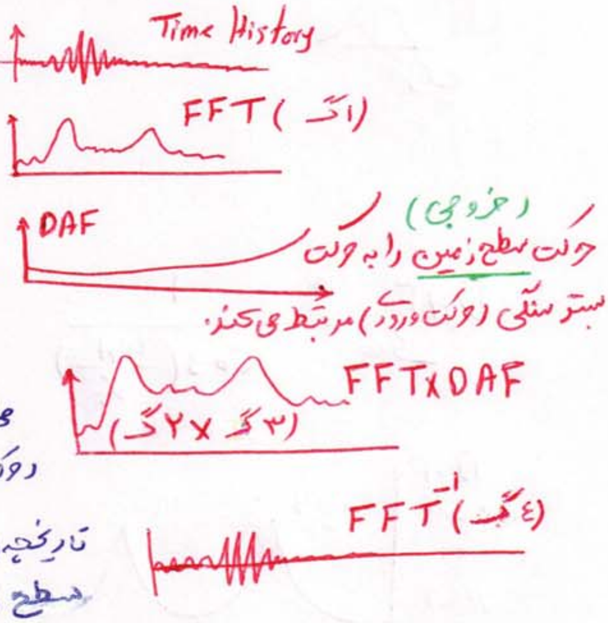
۲- (FFT) محاسبه سری فوریه حرکت بستر سنگی

۳- $DAF = \frac{1}{\cos\left(\frac{\omega H}{V_s}\right)}$ محاسبه تابع تبدیل

حالت نامیرا

۴- FFT×DAF محاسبه سری فوریه حرکت سطح زمین (حرکت خروجی) همانند تابع تبدیل و سری فوریه بستر سنگی (ورودی)

۵- فوریه معکوس ← تاریخچه زمانی حرکت سطح زمین



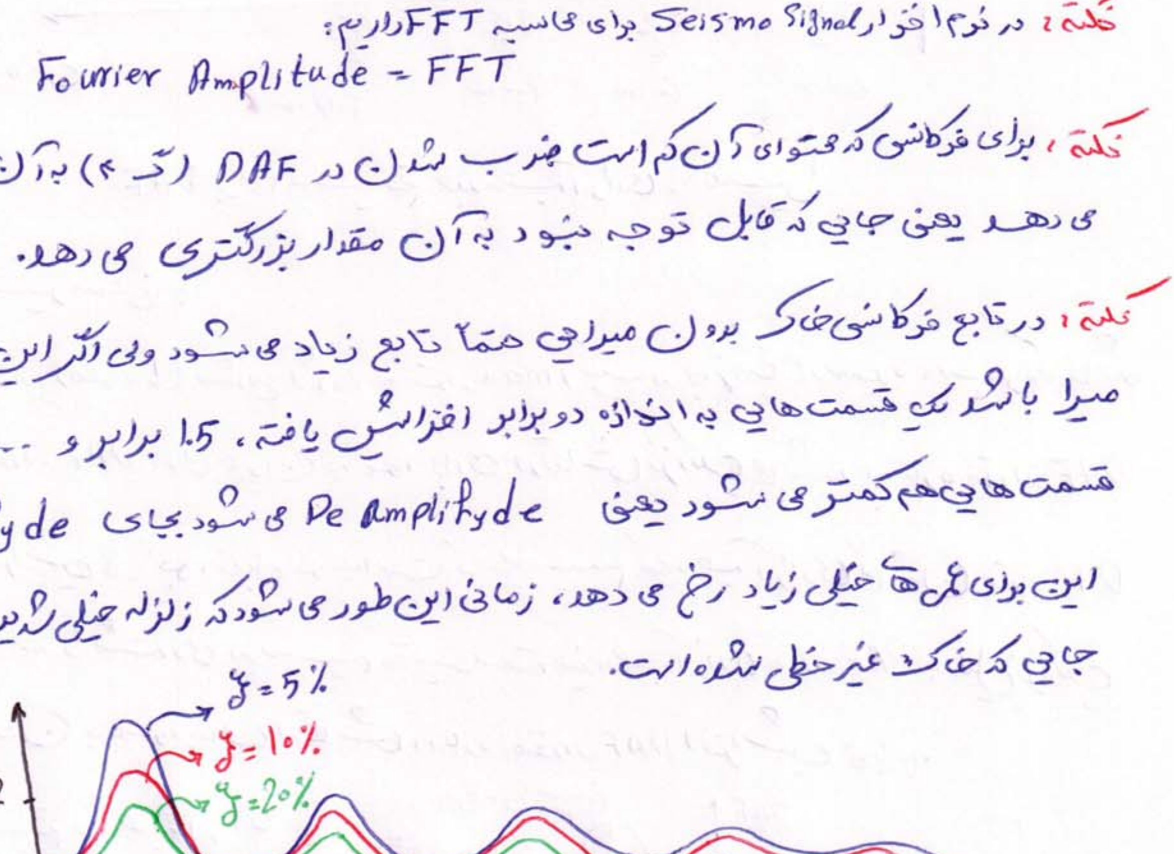
نکته: در نرم‌افزار Seismo Signal برای محاسبه FFT داریم:

Fourier Amplitude = FFT

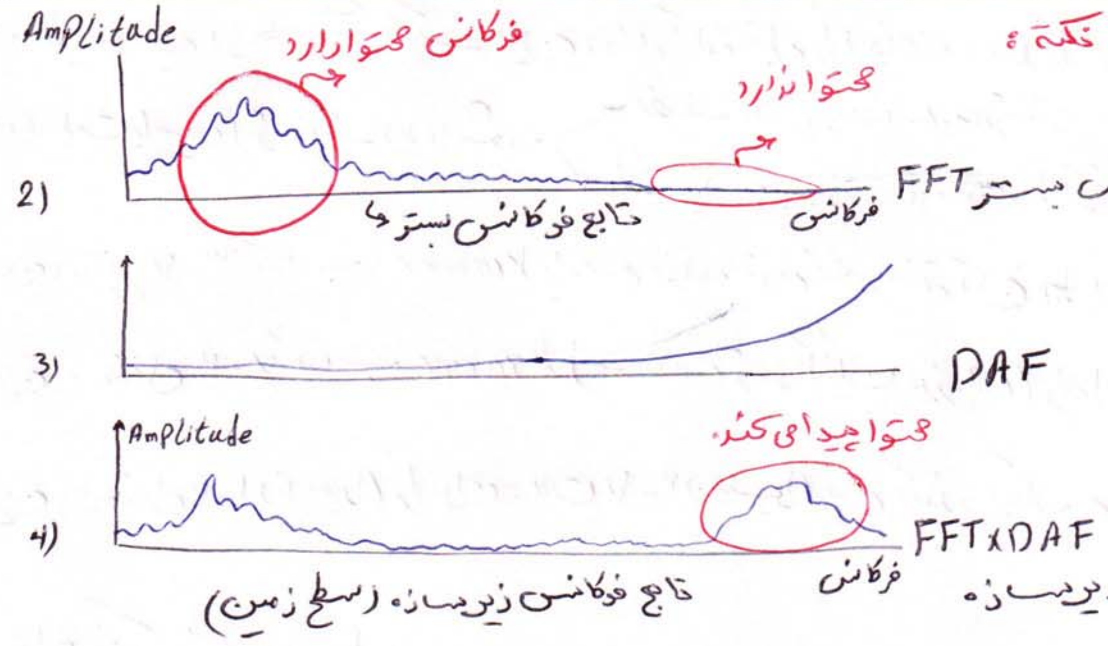
نکته: برای فرکانسی که محتوای آن کم است ضرب شدن در DAF (گ ۳) به آن محتوا می‌دهد یعنی جایی که قابل توجه نبود به آن مقدار بزرگتری می‌دهد.

نکته: در تابع فرکانسی خاک بدون میرایی حتماً تابع زیاد می‌شود ولی اگر این سیستم میرا باشد یک قسمت‌هایی به اندازه دو برابر افزایش یافته، 1.5 برابر و ... یک قسمت‌هایی هم کمتر می‌شود یعنی De Amplifyde می‌شود بجای Amplifyde

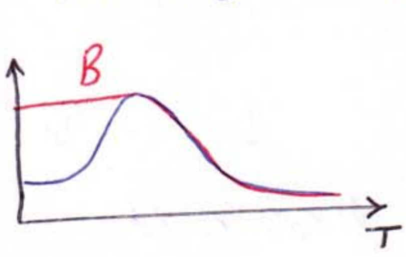
این برای کرنش‌های خیلی زیاد رخ می‌دهد، زمانی این طور می‌شود که زلزله خیلی شدید است. یعنی جایی که خاک غیرخطی شده است.



نکته :



در بستر خاک، برای فرکانس‌های کم، محتوا دارد ولی در زیاد، ندارد وقتی در DAF ضرب می‌شود، در زیرسازه، خاک باعث می‌شود که برای فرکانس‌های بالاتر بستر هم محتوا ایجاد شود.



دلیل دوم برای صاف شدن خط

- قسمت کم فرکانس (پریود زیاد) چون DAF حدود یک است پس همان می‌ماند ولی در بخش با فرکانس بالا (پریود کم)، چون DAF حدود ۷ الی ۸ برابر است، محتوای فرکانس زیاد می‌شود. ولی (Amplitude) پریود غالب تغییر نمی‌کند، چون در همان فرکانس کم است.

نکته : ضریب بازتاب B : { نصف ضریب بازتاب B ← اثر خاک
〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 B ← اثر سازه

- خاک در عمق کم و با رفتار الاستیک، در سرعت بالا فقط تاثیر روی محتوای فرکانس بالا دارد.
ولی
اگر عمق خاک زیاد باشد یا خاک نرم باشد دو کار می‌کند.
شدت زلزله را زیاد می‌کند.
محتوای فرکانسی بالا را اصلاح می‌کند.

نکته: طیف وسیعی از دامنه‌های خاک، این دو کار نکته قبل را انجام می‌دهند لذا به این دو علت بایستی اثر خاک دیده شود.

نصف B (ضریب بازتاب) ← اثر خاک — (دامنه)

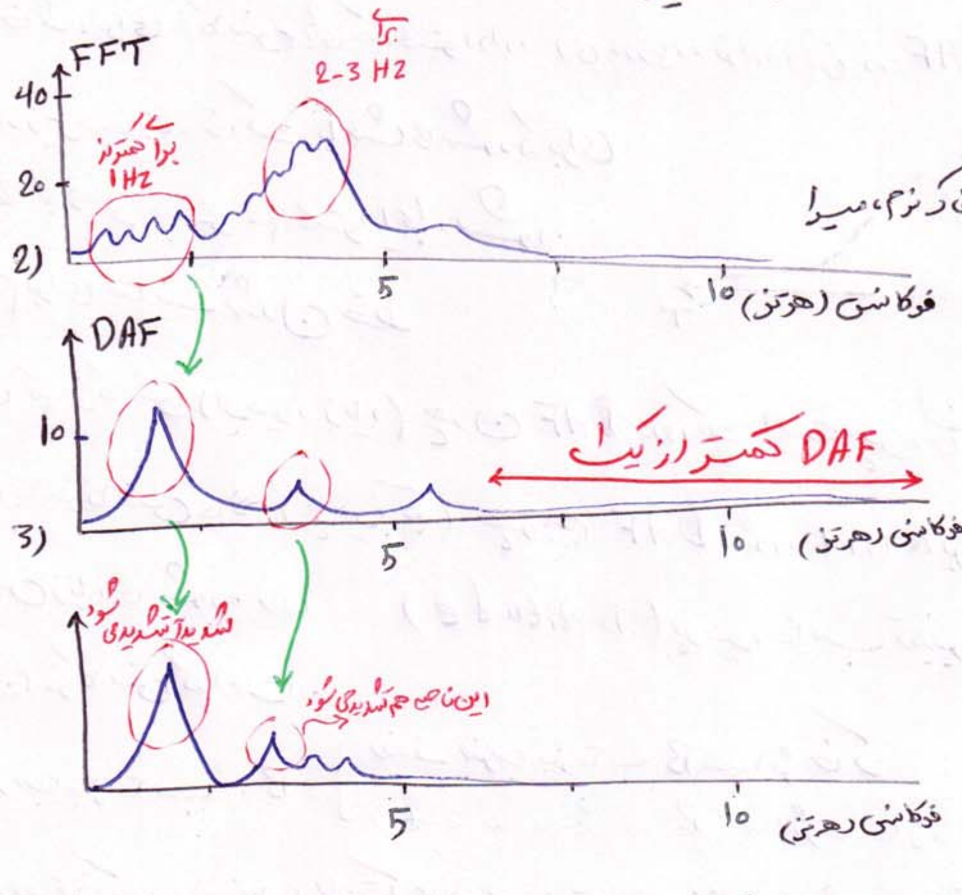
نصف B (ضریب جذب تاب) ← اثر سازه (تأثیر پریود سازه)

تمرین: تابع ۷-۱۳ کتاب Kramer را رسم نموده به نحوی که محور افقی آن KH باشد؟

تمرین: مثال ۲-۷ کتاب Kramer (مهندسی ژئوتکنیک لرزه‌ای) را حل نمایید؟

تمرین: مثال ۷-۱ (نامیرا) را برای حالت ۷-۲ (میرا) حل کنید و برعکس.

■ برای خاک نرم، میرا:



■ برای انتخاب رکورد زلزله (record Selection) چه عواملی مهم می‌باشد؟

برای انتخاب رکورد زلزله سه عامل پریود خاک، پریود زلزله و پریود سازه بسیار مهم است.

رکورد سلیکشن (Record Selection) به چه معناست؟

چه سهمی از فاکتور β (ضریب بازتاب) خاک تکان وجود دارد؟ نصف ضریب بازتاب ($\frac{1}{2}\beta$) در خاک یا به عبارتی متاثر از خاک می‌باشد.

- خاک تقریباً همیشه بازه 0.1 - 0.2.... 1-1.5 را بی تفاوت است یا افزایش می‌یابد.

$\underbrace{0.1 - 0.2 \ldots 1-1.5}_{T = \text{معمول سازه‌ها}}$

■ تفسیر منحنی‌های صفحه قبل:

برای خاک نرم و میرا، در قسمت 1HZ چون در DAF زیادی ضرب می‌شود بسیار تشدید می‌شود و قسمتی از منحنی FFT که محتوای زیادی داشت هم تشدید می‌گردد ولی چون حدود ۳-۲ برابر HZ می‌باشد و در ادامه در DAF زیر یک ضرب می‌شود مقدار آن بسیار کم می‌شود و در نهایت اثر آن روی سطح زمین هم حذف می‌شود. ولی سازه‌های روی این دو شهر بخش اول هستند.

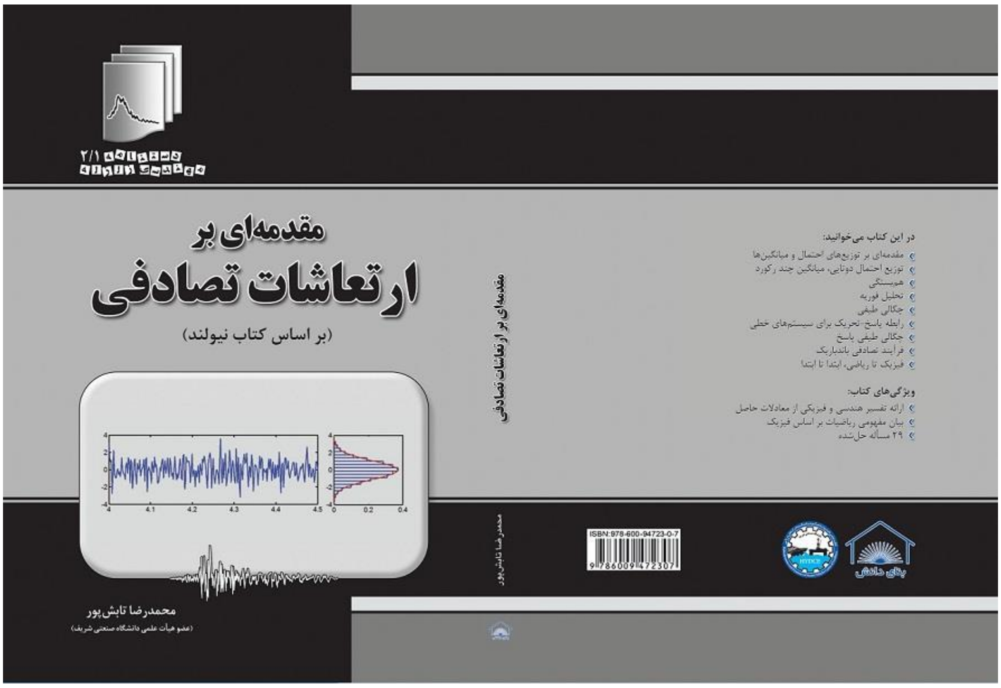
- در نرم افزار EERA خاک را الاستیک فرض نموده ایم (اما در نرم افزار NERA خاک را بصورت غیر الاستیک در نظر گرفته می‌شود.

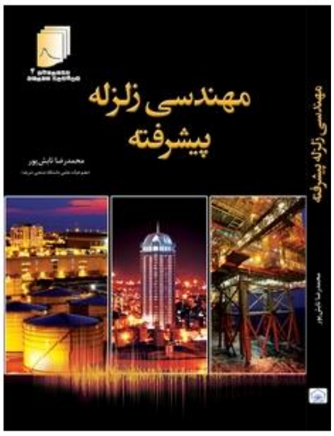
تمرین: تئوری ۸-۳ کتاب دانشمند زلزله ۲ (هندسی زلزله) را بخوانید و آن را مفصلاً براساس مباحث امروز تبیین و تشریح کنید؟

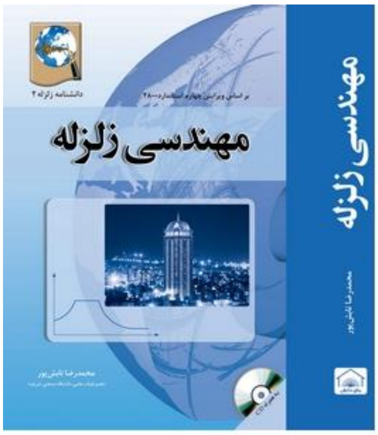
تمرین: فصل ۸ کتاب هندسی زلزله را دقیق بخوانید؟

- تمارین انتهای فصل ۸ کتاب هندسی زلزله بسیار مهم و کاربردی می‌باشند.

مراجع:







دستنامه ۴ + دستنامه ۳ = دانشنامه ۲

دستنامه ۷ + دستنامه ۶ = دانشنامه ۳