www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

فصل اول مقدمه‌ای بر استاتیک

فیزیک مکانیک : علمی است که به بررسی حالت سکون و حرکت اجسام می‌پردازد .

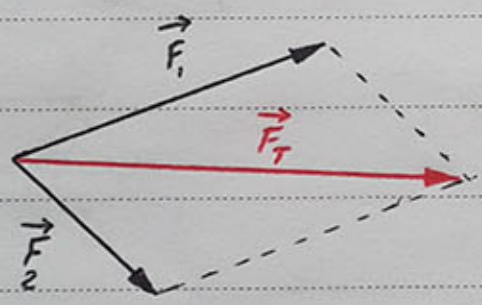
جسم ، مجموعه‌ای از ذرات که قابلیت اندازه‌گیری را عمل فیزیک داشته و دارای حجم و جرم باشد .

ذره ، کوچکترین جزء تشکیل دهنده جسم

- علم مکانیک
  - جسم
    - جامد
      - صلب (تحت تأثیر نیرو تغییر شکل نمی‌دهد)
        - سکون ← استاتیک
        - حرکت ← دینامیک
      - منحرف‌پذیر
    - شاره (سیال)

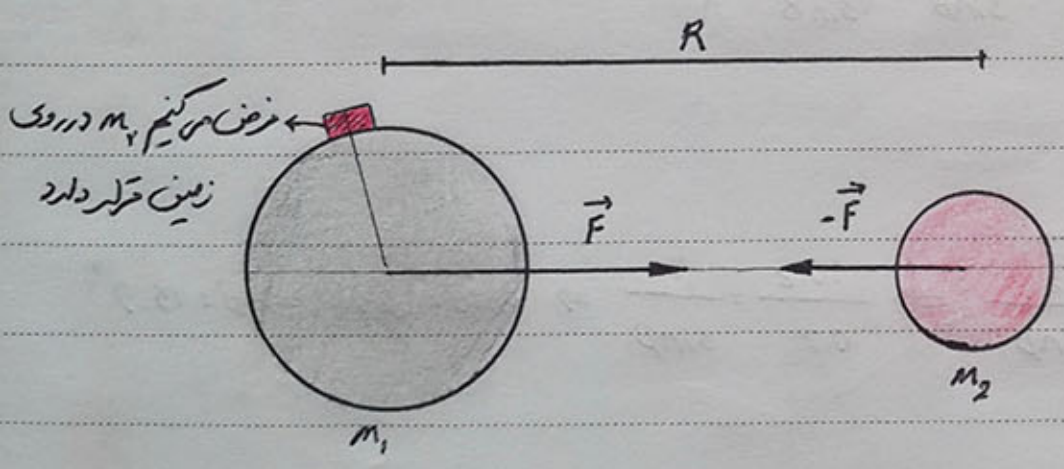
۶ قانون اساسی مکانیک نیوتنی

۱- قانون متوازی الاضلاع



$$\vec{F}_T = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

۲- قانون گرانش



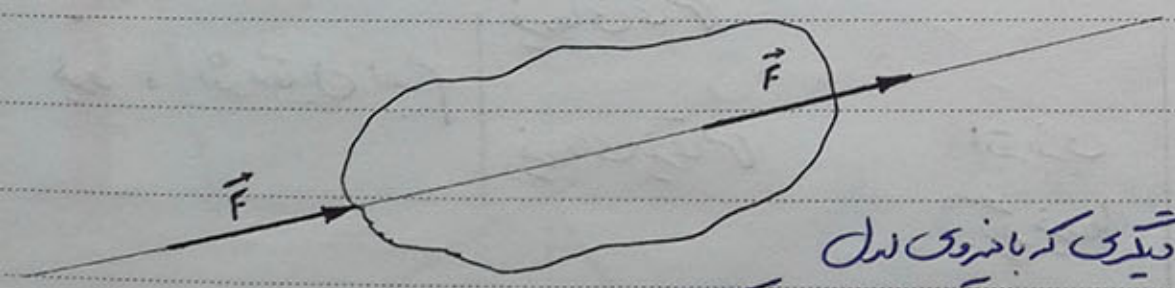
$$\vec{F} = G\frac{m_1 m_2}{R^2} \Rightarrow W = mg$$

۳- قانون اصل قابلیت انتقال

در حالتی است که اجسام صلب باشند

اگر نیرویی وارد بر نقطه‌ای از یک جسم صلب را به وسیله نیروی دیگری که با نیروی اول

از لحاظ مقدار و جهت برابر باشد چنین کنیم وضعیت جسم در حالت تعادل یا حرکت آن تغییر نمی‌کند



www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

4- قانون اول نیوتن

اگر برآیند نیروهای وارده بر جسمی صفر باشد آنگاه جسم حالت سکون و یا حرکت خود را روی خط مستقیم با سرعت ثابت ادامه می‌دهد.

$$\sum \vec{F} = 0$$

5- قانون دوم نیوتن

$$\sum \vec{F} = m.\vec{a}$$

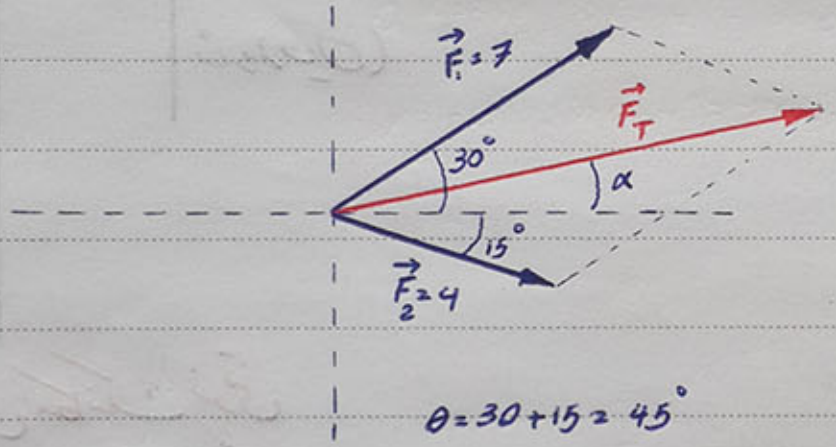
اگر برآیند نیروهای وارده بر جسمی صفر نباشد آنگاه جسم دچار شتاب می‌گردد.

6- قانون سوم نیوتن

برای هر عمل عکس‌العملی است مساوی و خلاف جهت آن

پارامترهایی که علم مکانیک را بسط می‌دهد؛ ① نیرو ② جرم ③ فضا

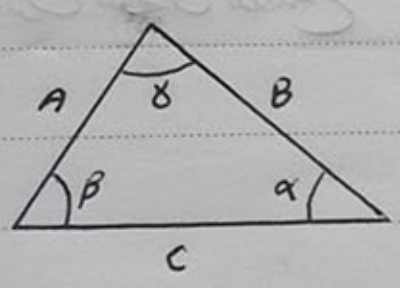
مثال ۱:



$$F_T^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\theta$$

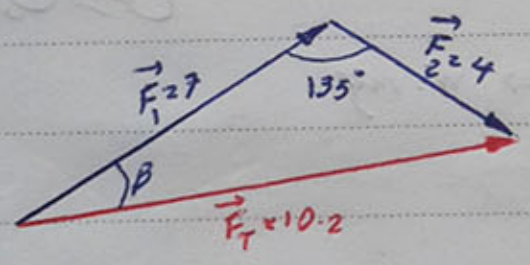
$$\theta = 30 + 15 = 45^\circ$$

$$\Rightarrow F_T^2 = 49 + 16 + 39.2 \Rightarrow \vec{F}_T = 10.2$$



بررسی قانون سینوس‌ها

$$\frac{A}{\sin\alpha} = \frac{B}{\sin\beta} = \frac{C}{\sin\gamma}$$



$$\Rightarrow \frac{\vec{F}_T}{\sin 135^\circ} = \frac{\vec{F}_2}{\sin\beta} \Rightarrow \frac{10.2}{0.7} = \frac{4}{\sin\beta} \Rightarrow \sin\beta = .274 \Rightarrow \beta = 15.9^\circ$$

نیروها

نیرو: اثر متقابل اجسام

طبقه‌بندی نیروها:

- نیروهای تماسی
- نیروهای غیرتماسی

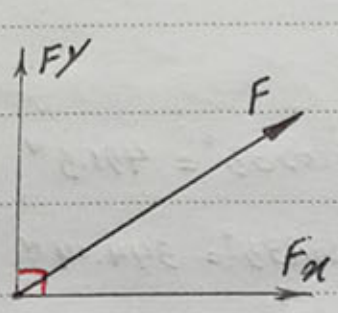
تقسیم‌بندی نیروها:

1) حجمی
2) سطحی
3) طولی
4) متمرکز

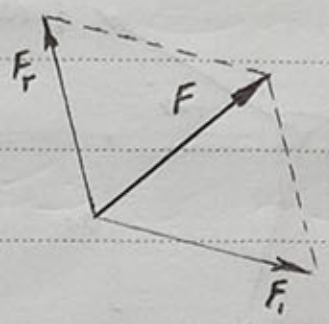
PAPCO

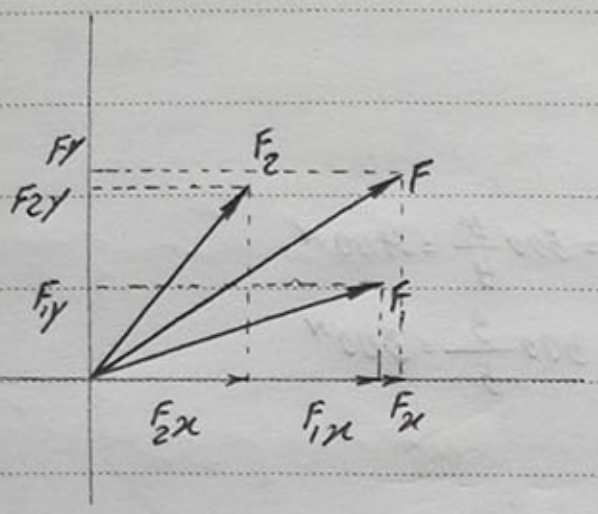
www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

تجزیه نیروها



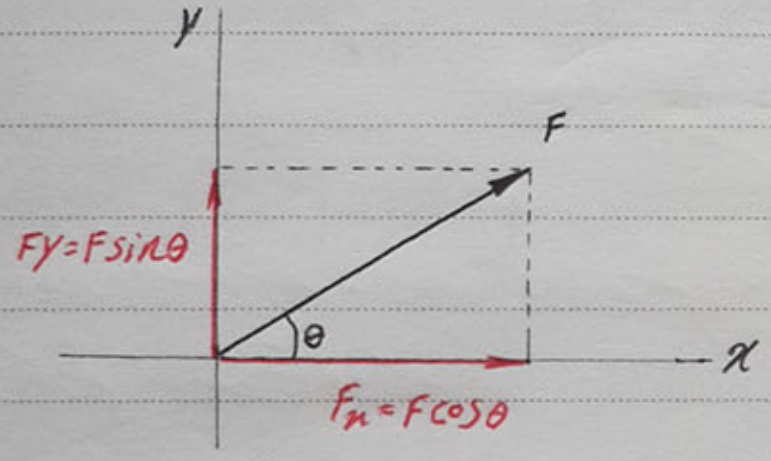
همیشه تجزیه بردارها لزوماً ۹۰° نیست



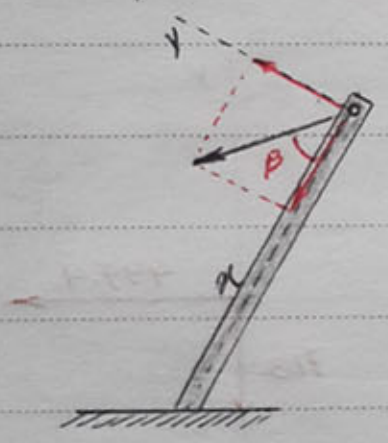


$$F_T = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \quad , \quad \alpha = \tan^{-1}\frac{F_y}{F_x}$$

زمانی که α ≠ 90° باشد

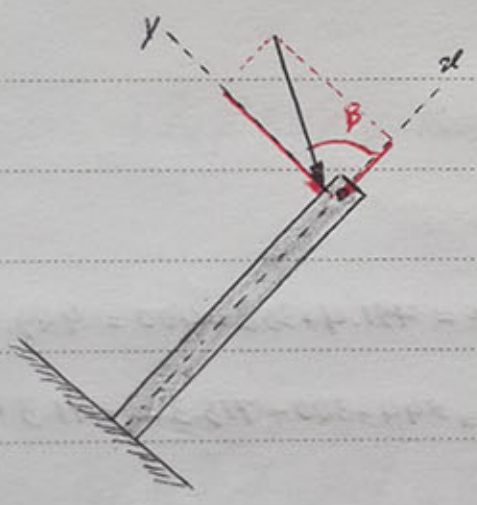


$$F^2 = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \quad , \quad \tan\theta = \frac{F_y}{F_x}$$



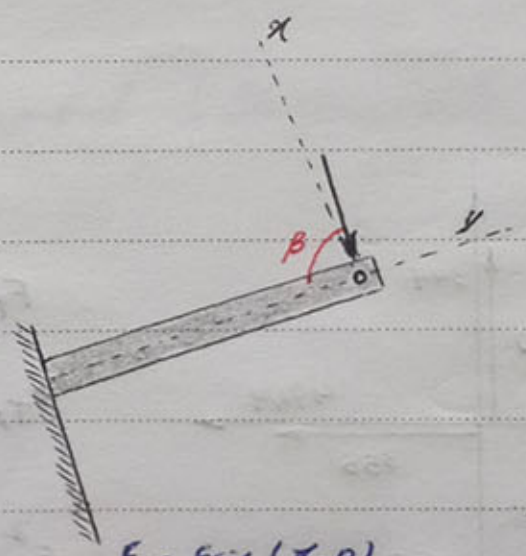
$F_x = F\cos\beta$

$F_y = F\sin\beta$



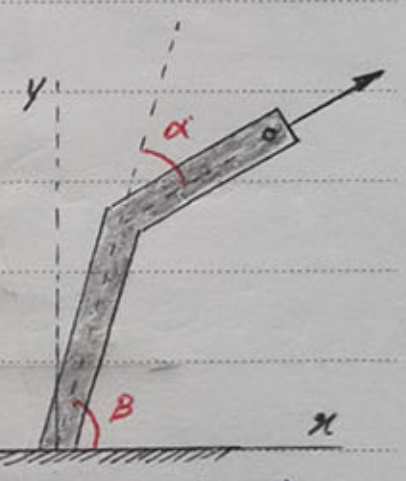
$F_x = F\cos\beta$

$F_y = F\sin\beta$



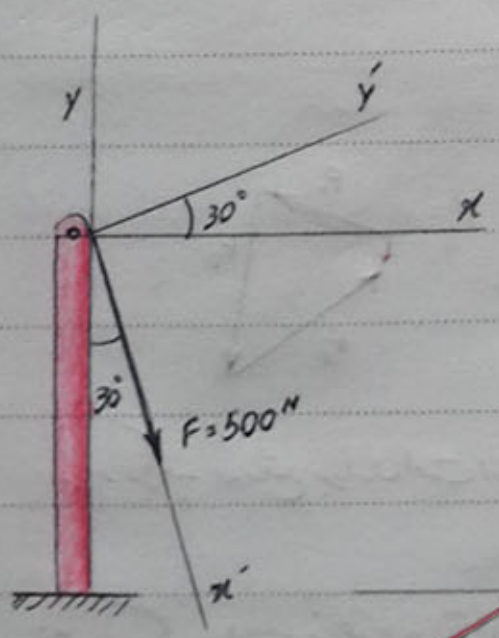
$F_x = F\sin(\pi-\beta)$

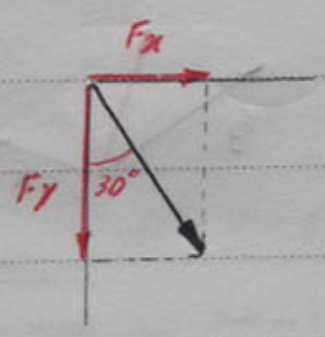
$F_y = F\cos(\pi-\beta)$



$F_x = F\cos(\beta-\alpha)$

$F_y = F\sin(\beta-\alpha)$

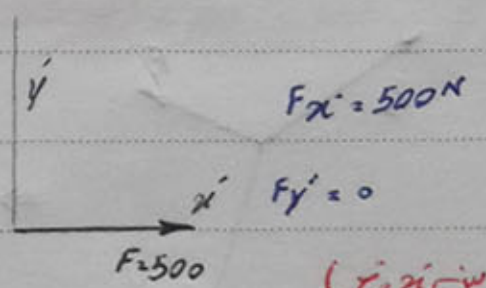




$F_x = F\cos 60^\circ = 250\ N$

$F_y = -F\sin 60 = -433\ N$

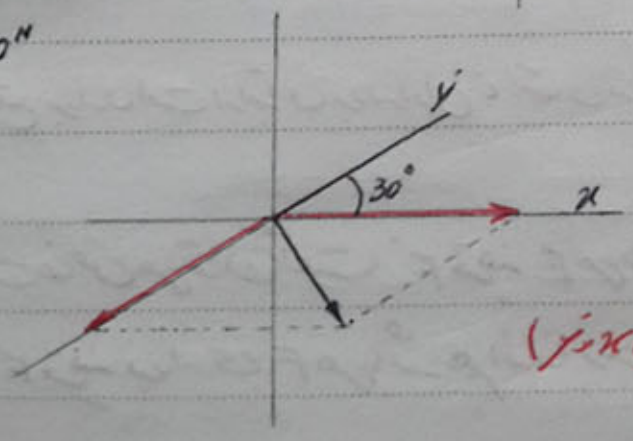
(بین نادرست)

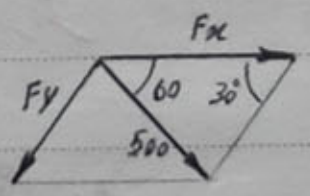


$F_{x'} = 500\ N$

$F_{y'} = 0$

(بین نادرست)



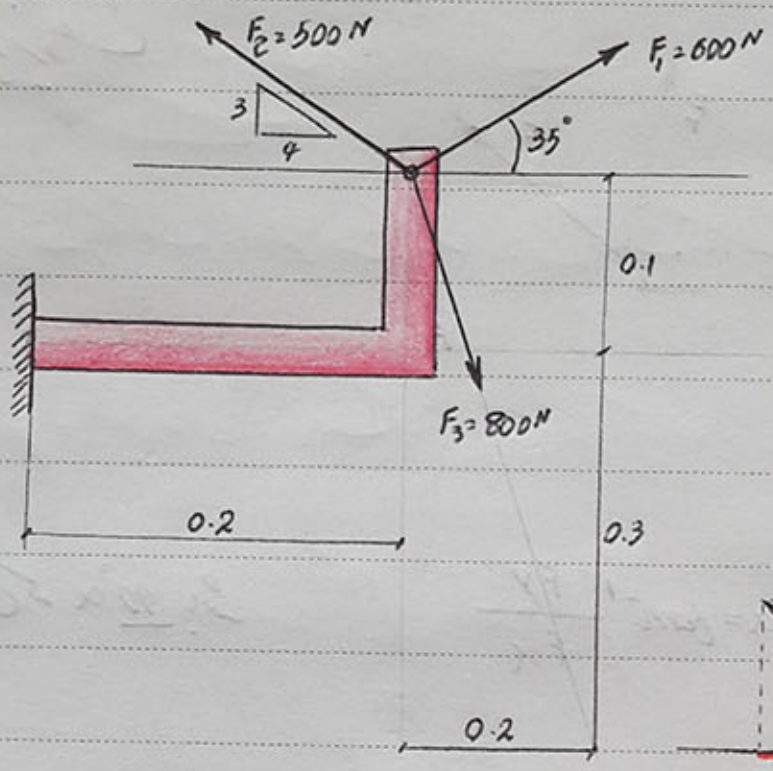


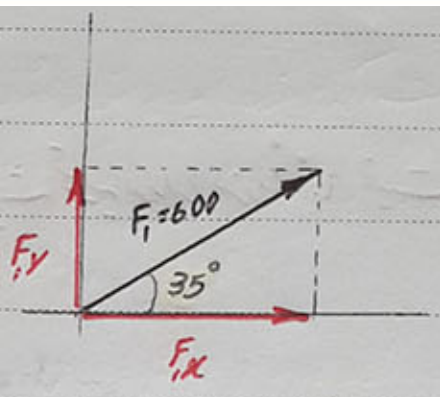
$$\frac{500}{\sin 30^\circ} = \frac{F_y}{\sin 60^\circ} \Rightarrow F_y = 866\ N$$

$$\frac{500}{\sin 30^\circ} = \frac{F_x}{\sin 90} \Rightarrow F_x = 1000\ N$$

(بین نادرست)

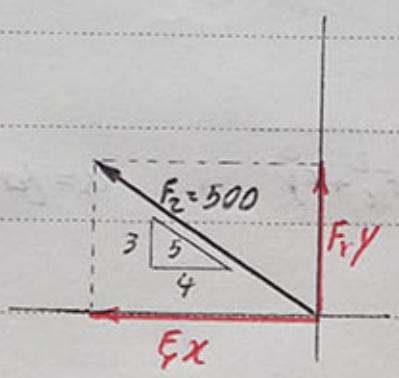
www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران





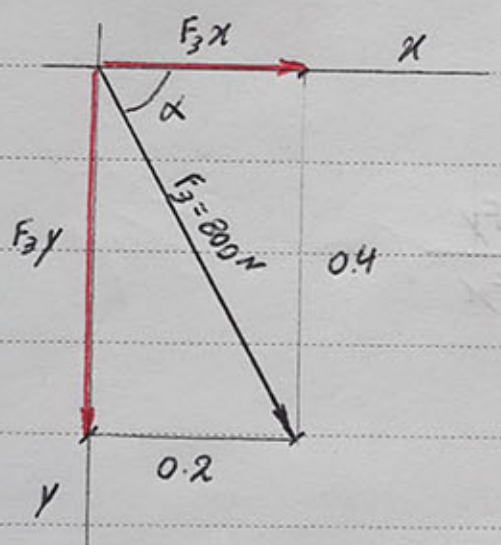
$F_1x = F\cos 35^\circ = 491.5\ N$

$F_1y = F\sin 35^\circ = 344.14\ N$



$F_2x = 500\frac{4}{5} = 400\ N$

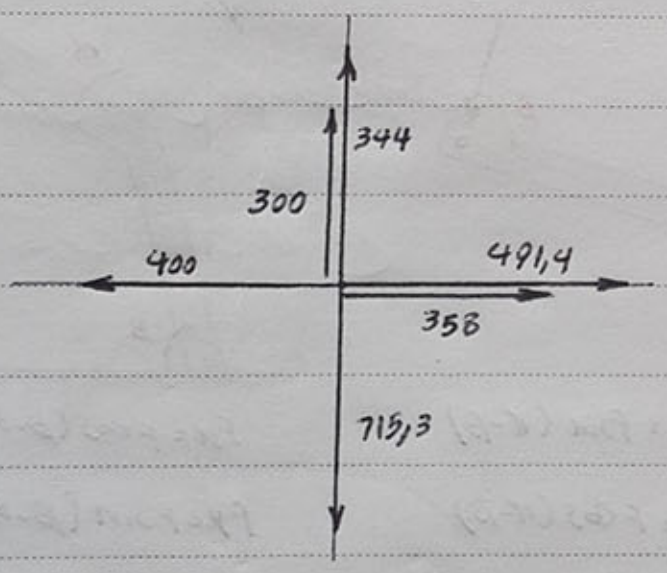
$F_2y = 500\frac{3}{5} = 300\ N$



$\alpha = \tan^{-1}\frac{F_3y}{F_3x} = \frac{0.4}{0.2} = 63.4^\circ$

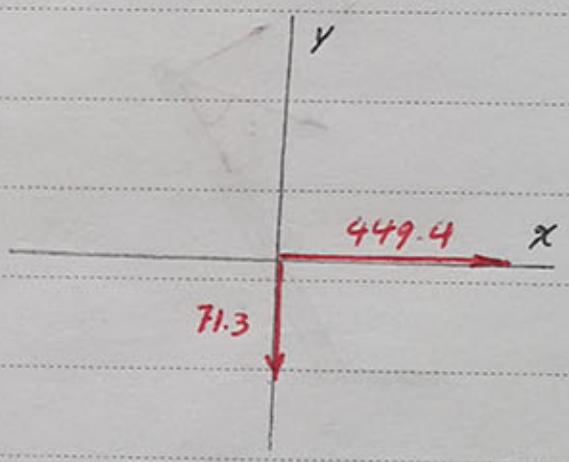
$F_3x = 800\cos 63.4^\circ = 358\ N$

$F_3y = -800\sin 63.4^\circ = -715.3\ N$



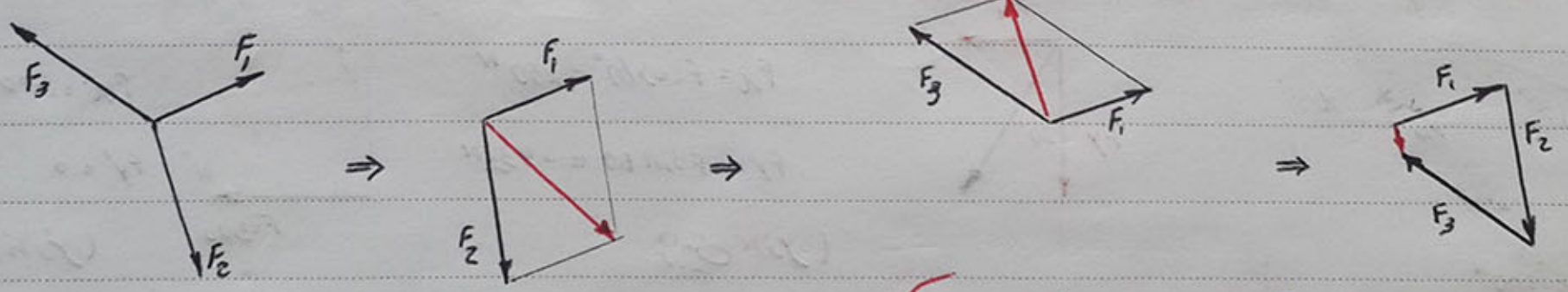
$F_Tx = 491.4 + 358 - 400 = 449.4\ N$

$F_Ty = 344 + 300 - 715.3 = -71.3\ N$



$F_T^2 = \sqrt{(71.3)^2 + 449.4^2} = 455\ N$

$\theta = \tan^{-1}\frac{-71.3}{449.4} = -9^\circ$



بردار برآیند در واقع برداری است که از ابتدای بردار اول تا انتهای بردار آخر

$\alpha = -1 \Rightarrow F = -F'$

فقط در یک حالت خاص می‌توان گفت F' قرینه F می‌باشد ⇐

در این حالت F' قرینه برداری F می‌باشد هم اندازه ولی جهت آن مخالف بردار F می‌باشد.

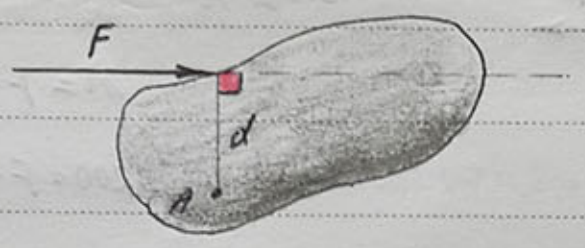
PAPCO

www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

گشتاور - لنگر (Moment)

$\vec{F} = m.\vec{a}$

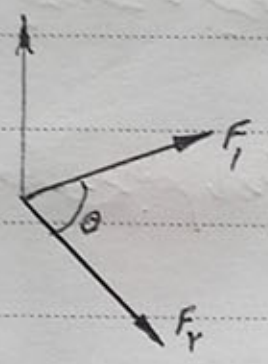
جسم در جهت نیرو شتاب می‌گیرد



$M = F.d$

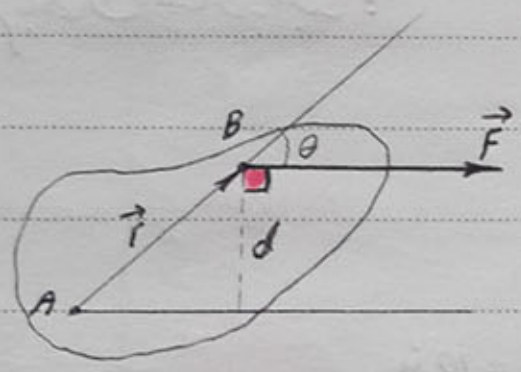
اگر در شکل علاوه بر نیروی اعمال شده تکیه‌گاه یا ... نمی داشته باشیم

گشتاور باعث بوجود آمدن گشتاور در جسم می‌گردد

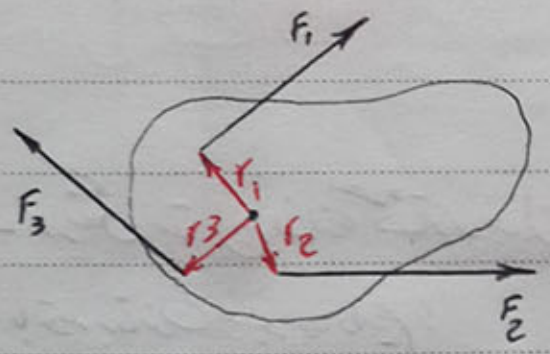


گشتاور برداری است که بر صفحه دو بردار عمود است و اندازه آن از ضرب دو بردار و جهت آن از قانون دست راست تبعیت می‌کند به صورتی که اگر F_2 به F_1 ضرب شود شکل رو به رو جهت بردار می‌باشد ولی اگر F_1 به F_2 ضرب شود جهت آن برعکس خواهد شد.

$|\vec{F_1} \times \vec{F_2}| = |\vec{F_2} \times \vec{F_1}|$ $\quad$ $\vec{F_1} \times \vec{F_2} \neq \vec{F_2} \times \vec{F_1}$ $\quad$ $\vec{F_1} \times \vec{F_2} = F_1 \cdot F_2 \cdot \sin\theta$



$|\vec{r} \times \vec{F}| = r \cdot F \cdot \sin\theta = F \cdot d$ (زمانی که d عمود بر نیرو باشد)

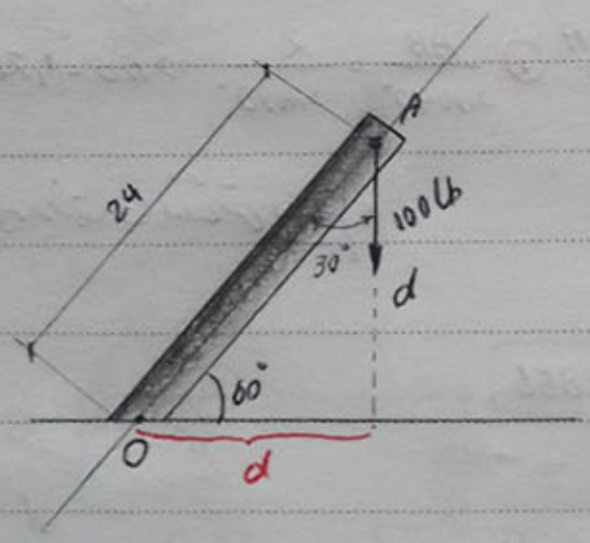


$\vec{r_1} \times \vec{F_1} + \vec{r_2} \times \vec{F_2} + \vec{r_3} \times \vec{F_3} = \vec{r} \times \vec{F}$

① برای بدست آوردن گشتاور هر تا نیرو ابتدا اندازه بردار برآیند را محاسبه کنیم.

② برای بدست آوردن گشتاور هر تا نیرو آنها را تجزیه کنیم و گشتاور را از تجزیه نیروها محاسبه کرد.

- گشتاور نیروی 100 lb حول نقطه O بدست آورید:



① $M = F.d$

$d = 24 \times \cos 60^\circ = 12$

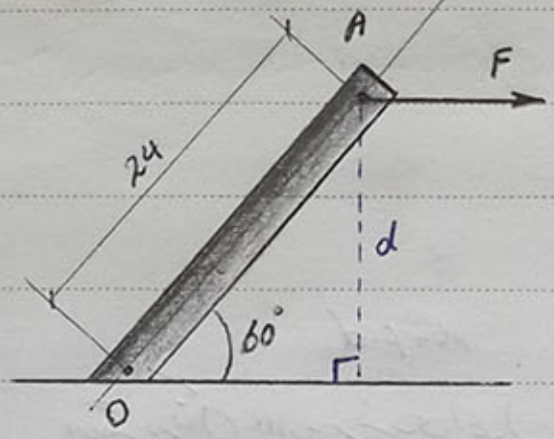
$\Rightarrow M = 100 \times 12 = 1200$ lb.ft

② $M = F.d$

$\Rightarrow M = 100 \times 24 \times \sin 30^\circ = 1200$ lb.ft

www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

- اگر نیروی افقی F را حایگزین کنیم با گشتاور برابر گفته نیرو باید چه مقدار باشد؟

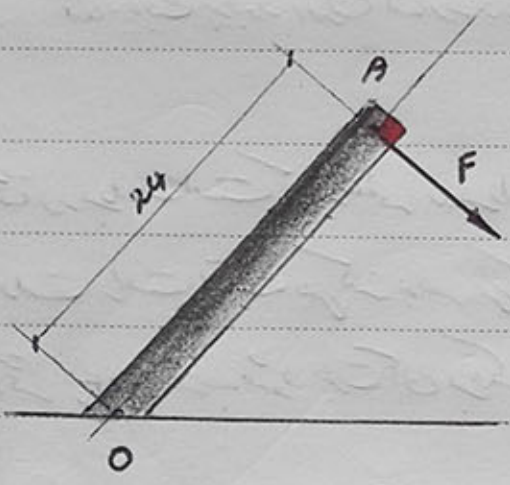


$M = 1200\ lb \cdot ft$

$M = F \cdot d$

$1200 = F \cdot 24 \cdot \sin 30^\circ \Rightarrow F = \frac{1200}{12\sqrt{3}} = 57.7\ lb$

- مقدار نیرو چقدر باشد که بیشترین گشتاور را تولید نماید؟

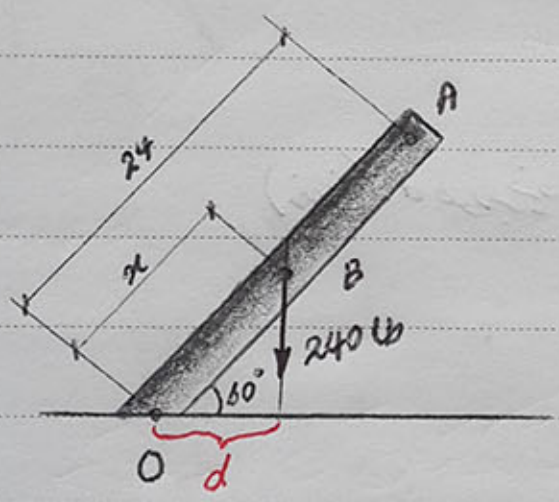


(هنگامی که نیرو عمود بر جسم وارد شود (90°) گشتاور ماکزیمم می‌باشد)

$M = F \cdot d$

$1200 = F \cdot 24 \Rightarrow F = \frac{1200}{24} = 50\ lb$

- فرض کنید در نقطه B نیروی 240 lb بر جسم وارد می‌شود نقطه B در چه فاصله‌ای قرار گیرد که جسم باز همان گشتاور باشد؟

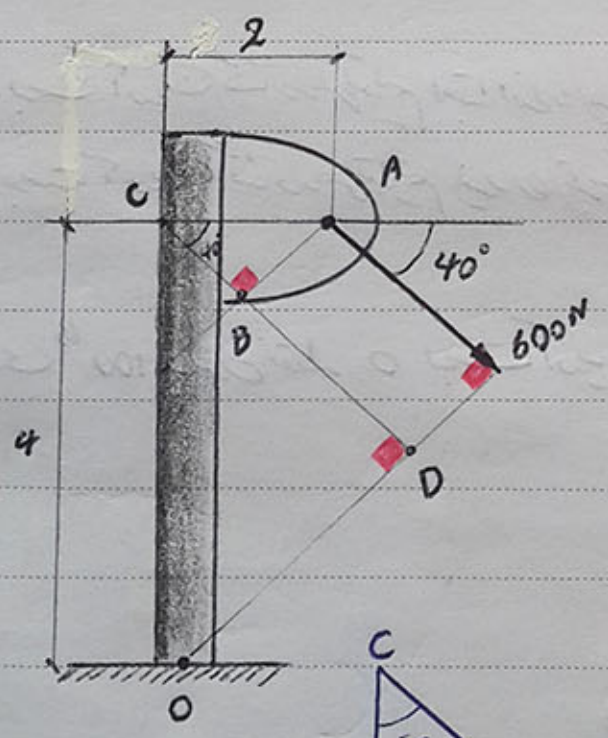


$M = F \cdot d$

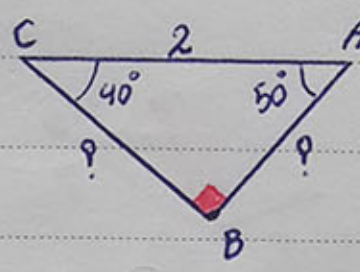
$d = x \cos 60^\circ$

$1200 = 240 \times x \cos 60^\circ \Rightarrow x = \frac{1200}{120} = 10\ in$ (15)

- در شکل مقابل اندازه گشتاور حول نقطه O را محاسبه کنید؟



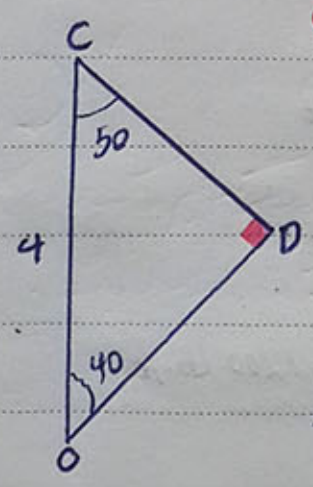
با توجه به قانون سینوس‌ها داریم:



① $\frac{AB}{\sin 40^\circ} = \frac{2}{\sin 90^\circ} \Rightarrow AB = 1,2856$

با توجه به نسبت‌های مثلثاتی داریم:

② $\sin 40^\circ = \frac{AB}{2} \Rightarrow AB = 1,2856$



① $\frac{OD}{\sin 50^\circ} = \frac{4}{\sin 90^\circ} \Rightarrow OD = 3,0642$

② $\sin 40^\circ = \frac{OD}{4} \Rightarrow OD = 3,0642$

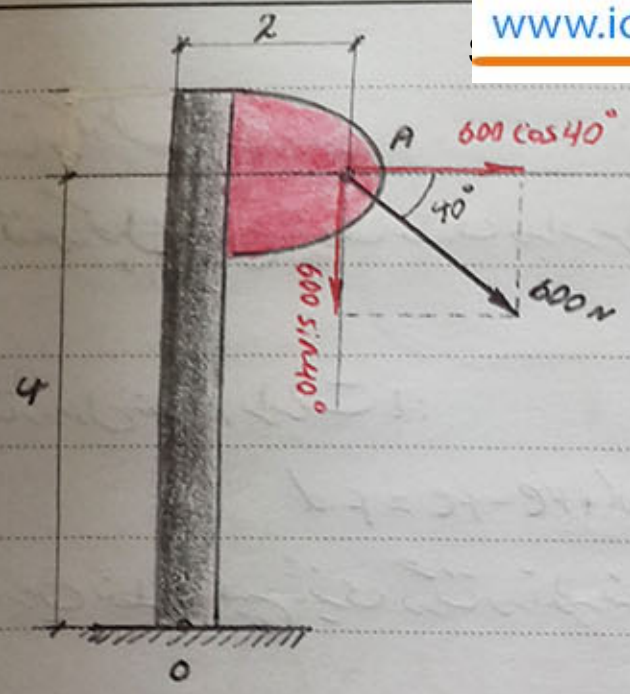
$\Rightarrow$ ① ② $= d = 4,3498$

$\Rightarrow M = F \cdot d \Rightarrow M = 600 \times 4,3498 = 2610\ N/m$

PAPCO

www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

راه حل دوم : نیروها تجزیه می‌کنیم



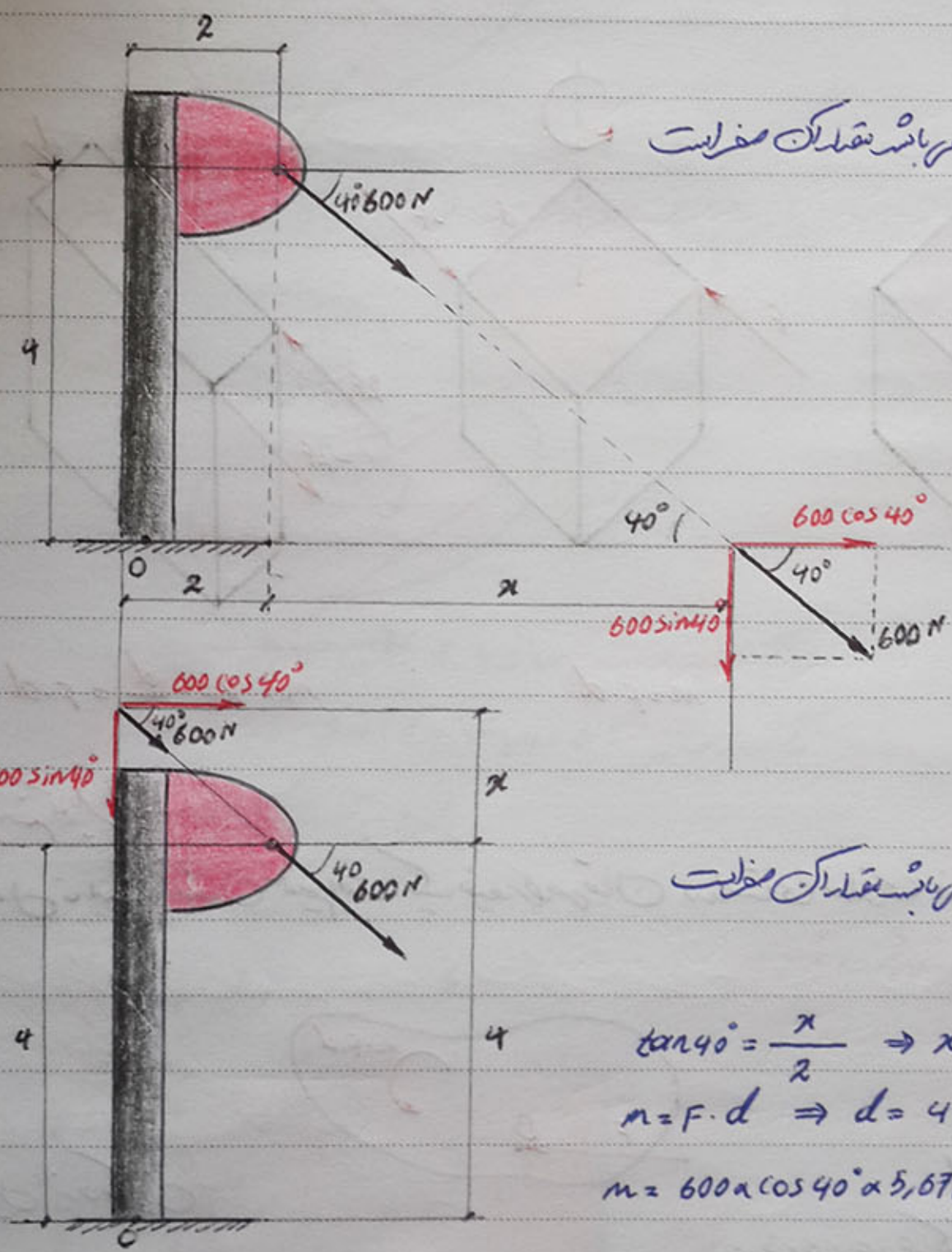
$$M = F.d$$

$$M = 600\cos 40^\circ \times 4 + 600\sin 40^\circ \times 2 = 2610\ N/m$$

راه حل سوم : براساس اصل تانون انتقال نیروی

براین اساس چون نیروی $600\cos 40^\circ$ در راستای گشتاور می‌باشد مقدار آن صفر است

و فقط نیروی $600\sin 40^\circ$ را محاسبه می‌کنیم :



$$\tan 40^\circ = \frac{4}{x} \Rightarrow x = 4.767$$

$$M = F.d \Rightarrow d = 2 + 4.767 = 6.767\ m$$

$$M = 600 \times \sin 40^\circ \times 6.767 \Rightarrow M = 2610\ N/m$$

راه حل چهارم : براساس اصل تانون انتقال نیروی

براین اساس چون نیروی $600\sin 40^\circ$ در راستای گشتاور می‌باشد مقدار آن صفر است

و فقط نیروی $600\cos 40^\circ$ را محاسبه می‌کنیم :

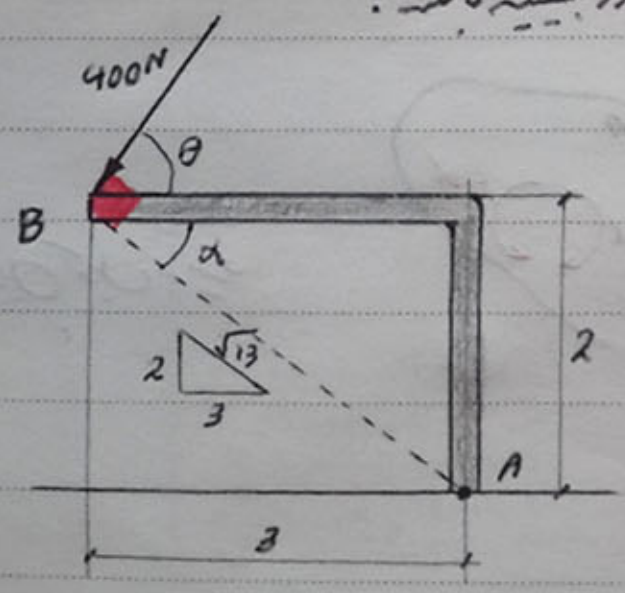
$$\tan 40^\circ = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 1,6782$$

$$M = F.d \Rightarrow d = 4 + 1,6782 = 5,6782\ m$$

$$M = 600 \times \cos 40^\circ \times 5,6782 = 2610\ N/m$$

- در شکل زیر مقدار زاویه θ را طوری بدست آورید که لنگر حاصل از نیروی 400N حول نقطه A بیشینه باشد :

و مقدار این لنگر را بدست آورید :



یعنی بیشترین گشتاور را داریم که زاویه نیرو 90° باشد پس :

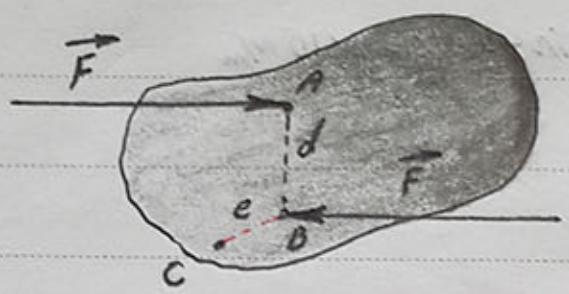
$$M = F.d \Rightarrow M = 400 \times \sqrt{13} = 1440\ N/m$$

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{2}{3} = 33,7^\circ \quad , \quad \theta = 90 - 33.7 = 56.3^\circ$$

www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

گشتاور کوپل : Couple

گشتاور کوپل، زوج نیروی مساوی و موازی است که در خلاف جهت یکدیگر گشتاور تولید شده حاصل نصف دو نیرو × نیرو می‌باشد.

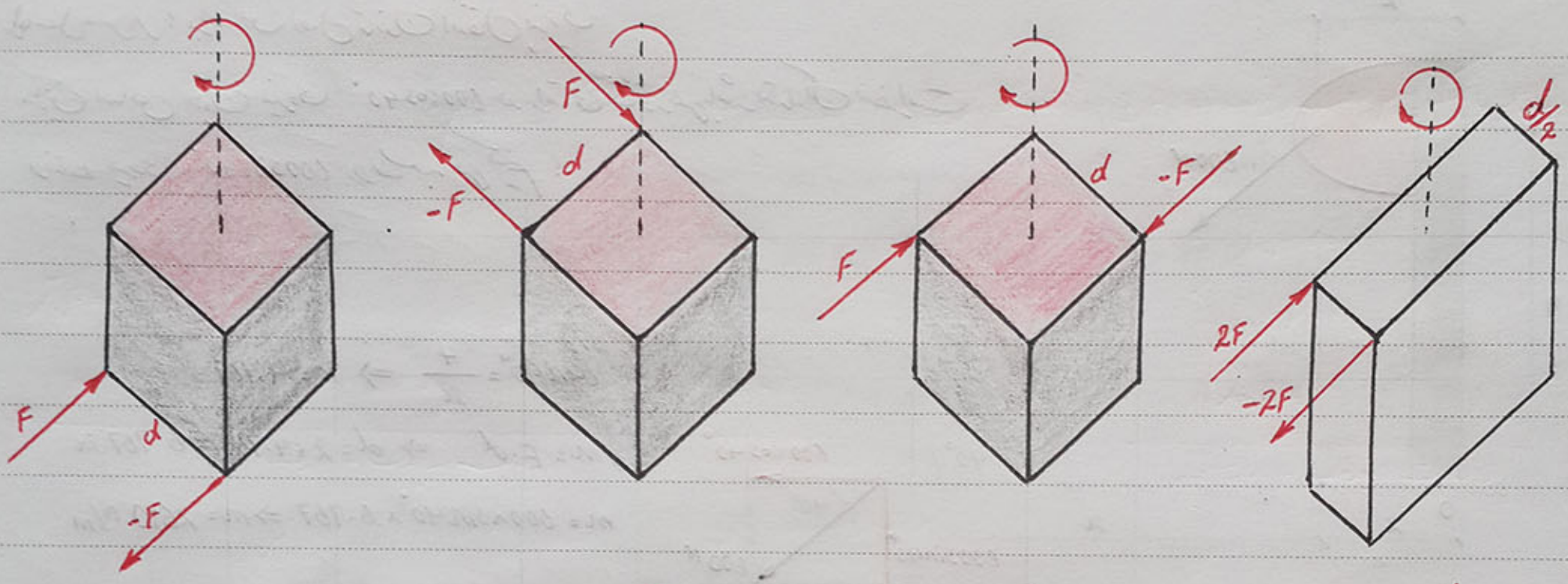


گشتاور حول نقطه A برابر است با:

$$+\circlearrowleft M_A = 0$$

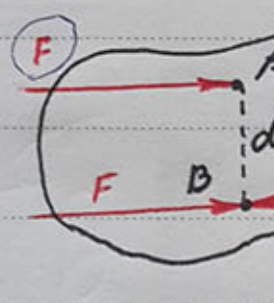
$$F(d+e) - F\cdot e = 0 \Rightarrow Fd + Fe - Fe = F\cdot d$$

بنابراین نقطه e هیچ تأثیری در گشتاور تولید شده ندارد.



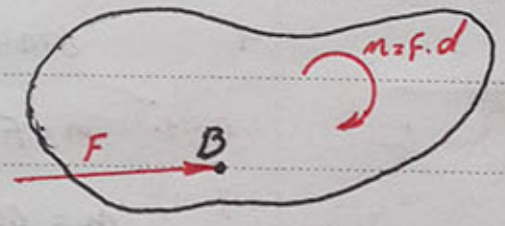
سیستم کوپل نیرو:

اصل قابلیت انتقال تعمیم یافته، یک نیرو را می‌توان همارستای معلوم خود جای کرد به شرط آنکه کوپل آن را نیز جای کرد.

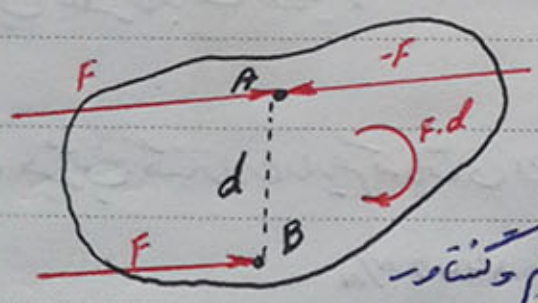


$M = F\cdot d$

دو نیروی F و -F یک کوپل تولید می‌کنند

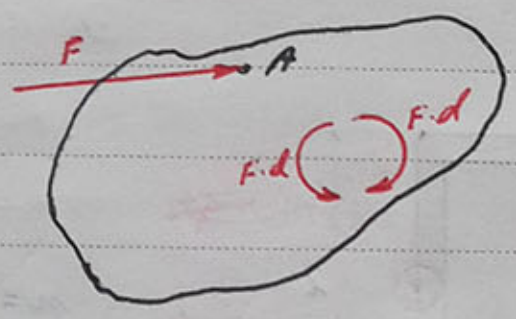


تبدیل نیرو به کوپل



$M = F\cdot d$

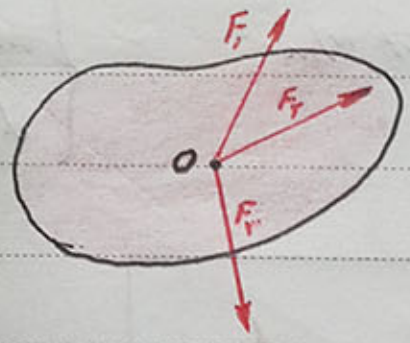
نسبت به نقطه متصد گشتاور می‌گیریم و گشتاور تولید شده باید خلاف گشتاور موجود باشد.



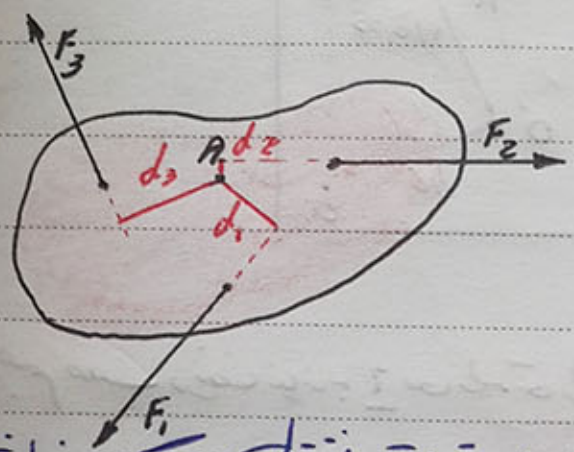
تبدیل کوپل به نیرو

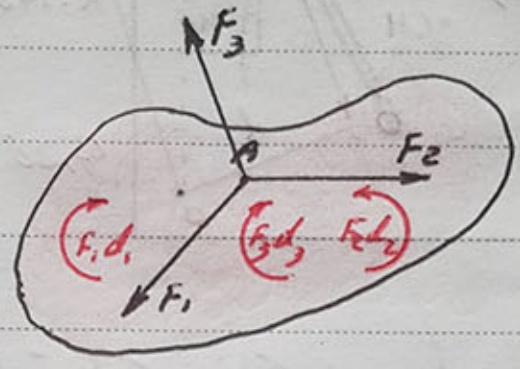
www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

برآیند نیرو:

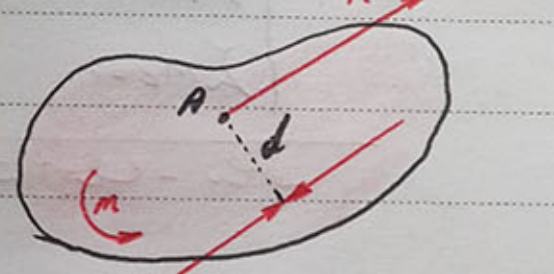


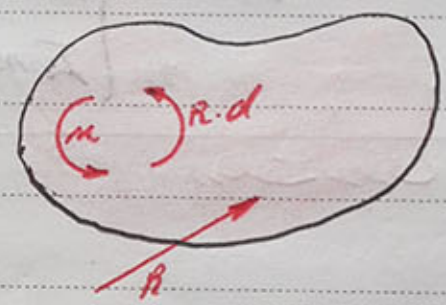
در شکل روبرو چون تمام نیروهم رئیس هر یک به راحتی می‌توانیم با یکی از روشهای مثلث و متوازی الاضلاع یک کنیم و برآیند آنرا بدست آوریم.





ولی اگر سه نیرو هم رئیس نباشند هرچند همگی یک نقطه وصل شده باشند و نیروهای مجهول با اصل تبدیل انتقال جابجا کردن بتوان در شکل دوم تمام نیروها هم رئیس شده‌اند.



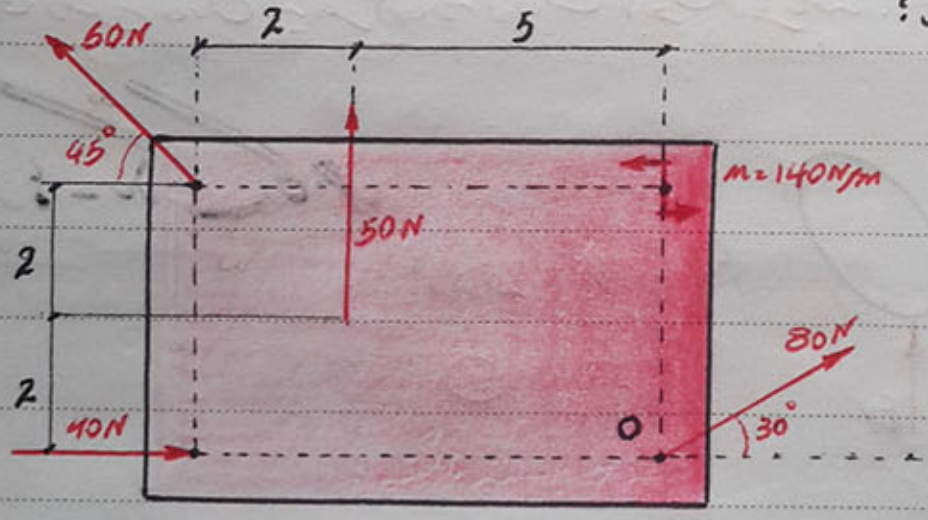


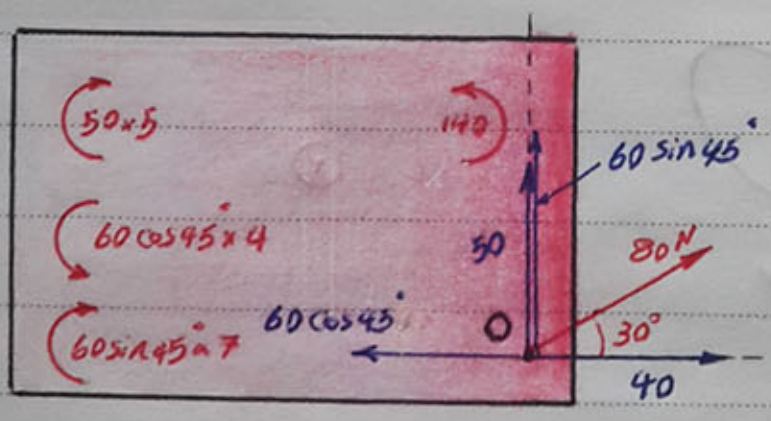
برآیند نیروهای توزیع شده را با عملیات جبری تبدیل به یک گشتاور می‌کنیم.

$\curvearrowleft^{+} \sum M_A = 0 \quad F_2 d_2 - F_3 d_3 - F_1 d_1$

$M - Rd = 0 \quad \Rightarrow d = \frac{M}{R}$

- سیستم کوپل نیروی زیر را شکل را به یک نیرو معادل کنید؛





$\xrightarrow{+} \sum F_x = 0 \quad 40 + 80\cos 30^\circ - 60\cos 45^\circ = 66,85\ N$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad 60\sin 45^\circ + 50 + 80\sin 30^\circ = 132,42\ N$

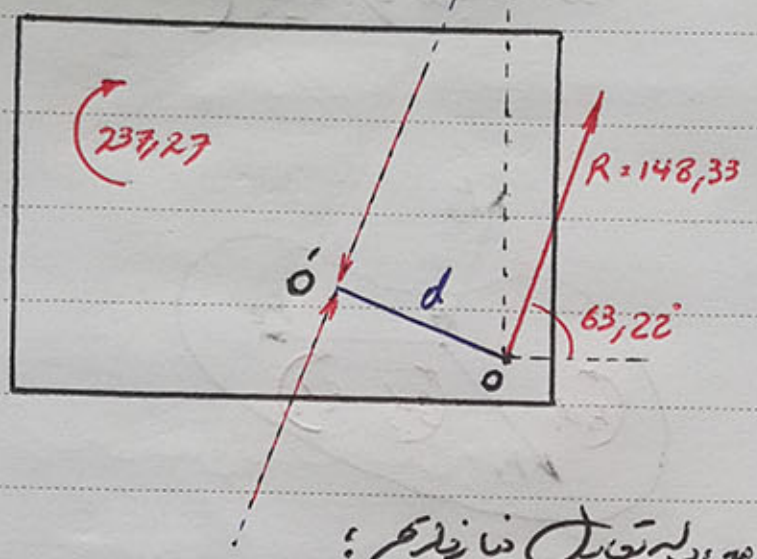
$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 148,33 \quad , \quad \theta = \tan^{-1}\frac{R_y}{R_x} = 63,2^\circ$

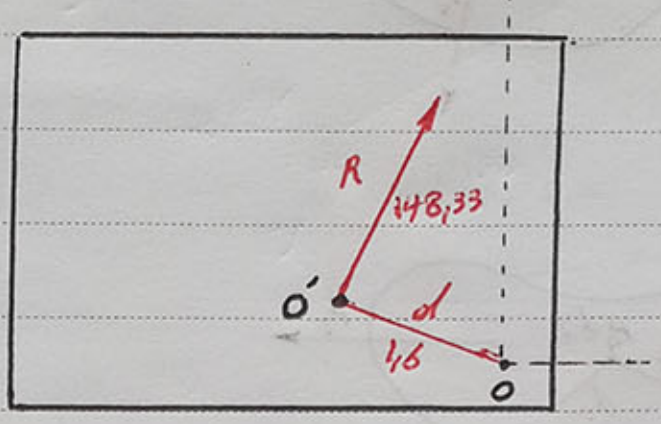
www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

$\overset{+}{\circlearrowleft}\sum M_o = 0$ $\quad 50\times5 + 60\sin45\times7 - 60\cos45\times4 - 140 = 237{,}27\ N/m$

$\begin{cases} M = Rd \ , \ M - Rd = 0 \\ d = \dfrac{M}{R} \Rightarrow \dfrac{237{,}27}{148{,}33} = 1{,}6 \end{cases}$

$R = 148{,}33$, $\theta = 63{,}22^\circ$

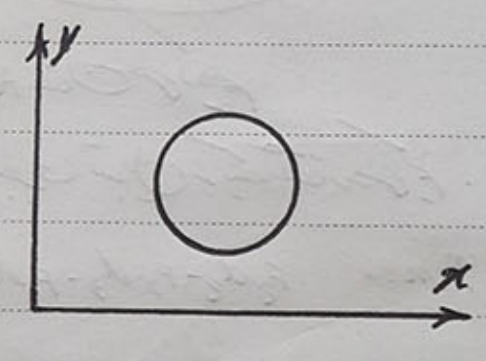




- برای بررسی یک جسم صلب در فضا نیاز به 6 معادله تعادل و در صفحه به 3 معادله تعادل داریم؛

در حالت دوبعدی - در صفحه

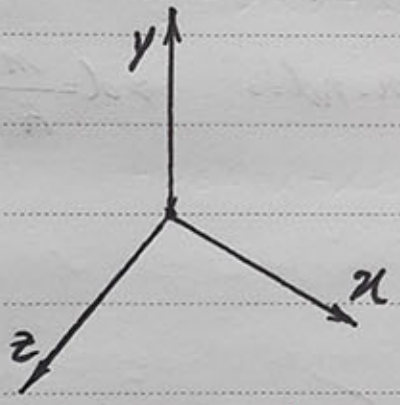
$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_z = 0 \end{cases}$



برای ساکن شدن تعادل باید هر 3 معادله در حالت 2 بعدی صفر باشند.

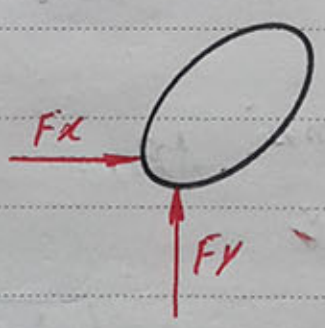
در حالت سه بعدی - در فضا

$\sum F = 0 \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum F_z = 0 \end{cases}$ $\qquad \sum M_x = 0 \begin{cases} \sum M_x = 0 \\ \sum M_y = 0 \\ \sum M_z = 0 \end{cases}$



برای ساکن شدن تعادل باید هر 6 معادله در حالت 3 بعدی صفر باشند.

قید ها - تکیه گاه ها

		تعداد قید
1) قید غلتک (Roller)		①
2) قید مفصل (pin)		②

$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum M = 0 \end{cases}$

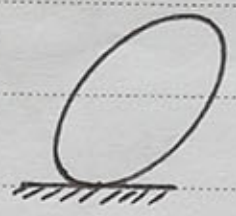
$\sum M = 0$

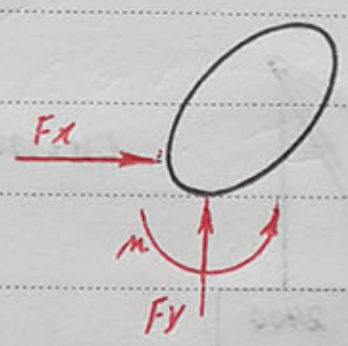
PAPCO

www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

تعداد قید

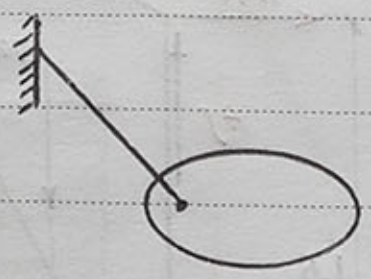
3) قید جلب - قید کامل (fixed) یا گیردار

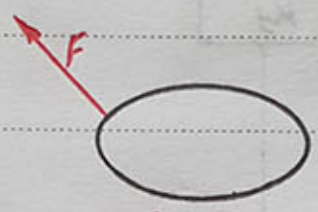




۳

4) قید کابل





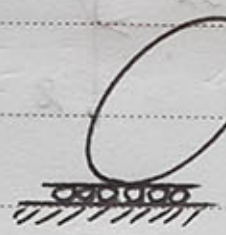
۱

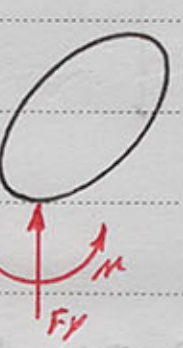
فقط در راستای کابل می‌تواند حرکت کند

5) قید بشری

مفصل بشری

تعریف: گیردار

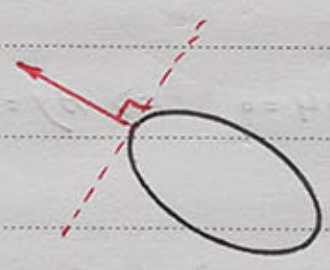




۲

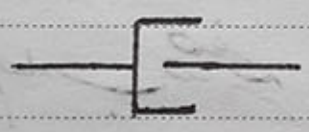
6) قید سوراخ لوبیایی

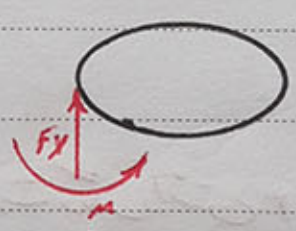
غلاف میله



۱

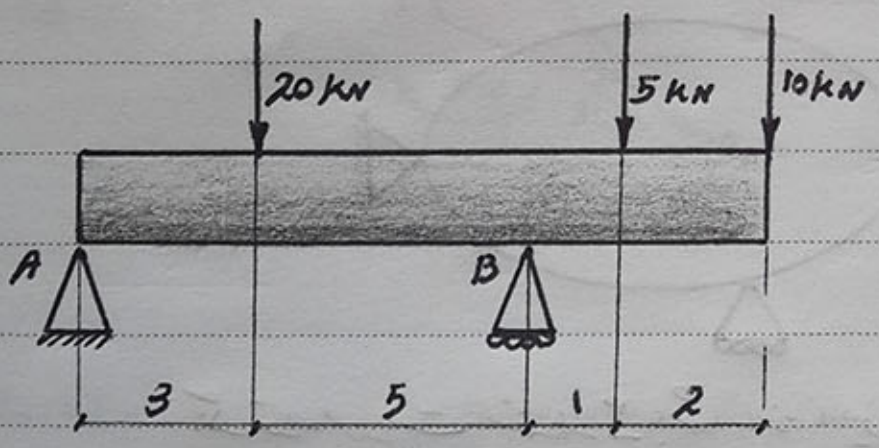
7) قید لنگر

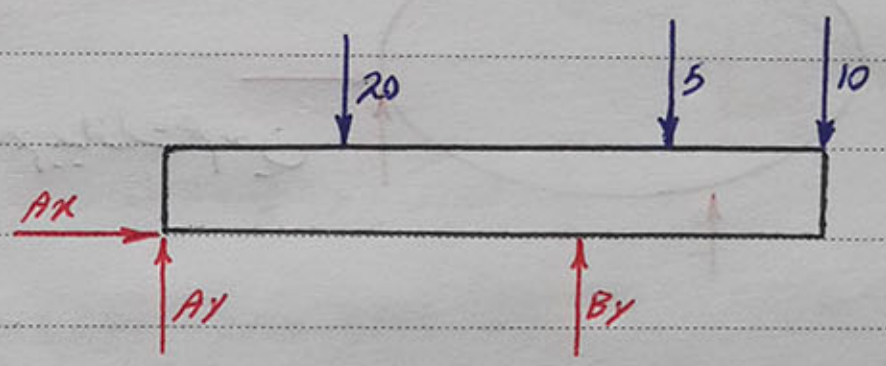




۲

- مطلوبست محاسبه نیروهای تکیه گاهی در تکیه گاه‌ها ؟





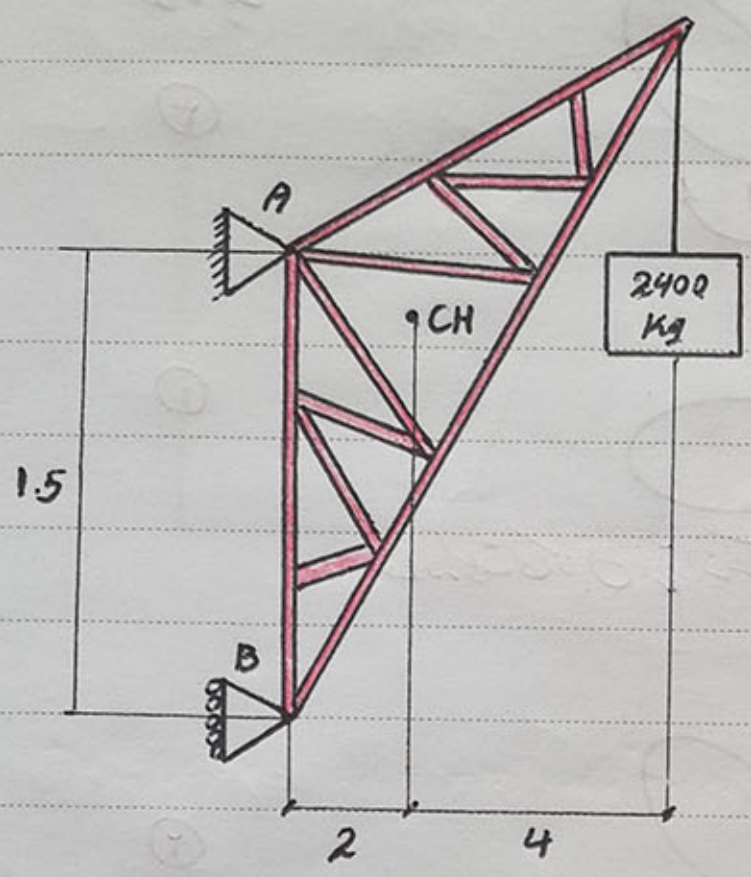
$\pm\rightarrow \sum F_x = 0 \qquad A_X = 0$

$+\uparrow \sum F_Y = 0 \qquad -20-5-10+A_Y+B_Y=0 \Rightarrow -35+26{,}9=A_Y \Rightarrow A_Y = 8{,}1\ KN$

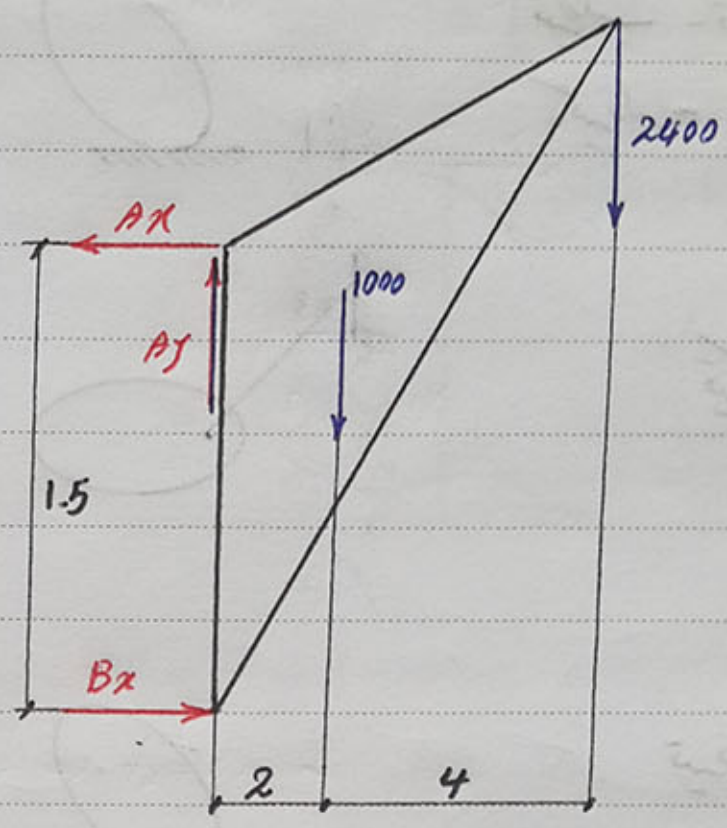
$\overset{+}{\circlearrowleft} \sum M_A = 0 \qquad -20\times3-5\times9-10\times11+B_Y\times8=0 \Rightarrow B_Y = 26{,}9\ KN$

www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

- مطلوبیت خیزهای تکیه‌گاهی در سازه نشان داده شده :



CH = 1000 kg



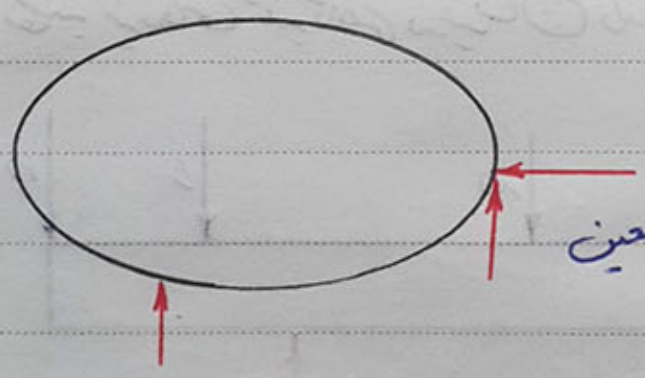
$\xrightarrow{+}\sum F_x = 0 \qquad -A_x + B_x = 0 \qquad \Rightarrow A_x = -107{,}25 \leftarrow$

$+\uparrow\sum F_y = 0 \qquad A_y - 9810 - 23544 = 0 \qquad \Rightarrow A_y = 33{,}35\ kN$

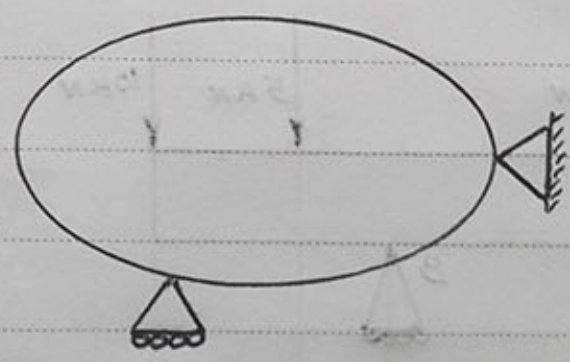
$+\circlearrowleft\sum M_A = 0 \qquad -9810\times 2 - 23544\times 6 + B_x(1{,}5) = 0 \qquad \Rightarrow B_x = 107{,}25\ kN \rightarrow$

شرایط پایداری یک جسم صلب در صفحه

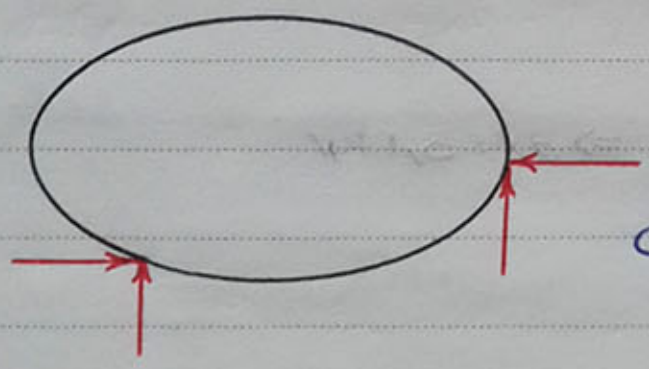
داشتن حداقل ۳ نیروی مجهول که نباید متقارب باشند. - برای داشتن ۳ قید یا یک قید کامل که متقارب نباشند.



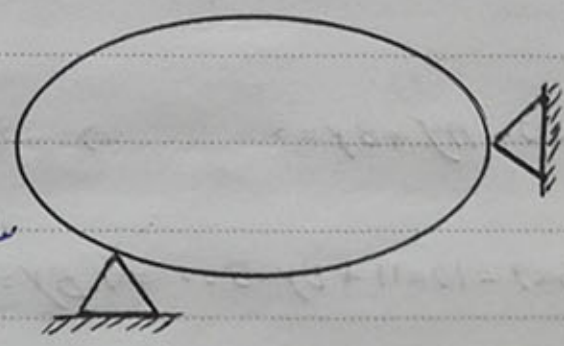
سازه هم پایدار است هم معین



اگر تعداد مجهولات بیشتر از ۳ باشد سازه نامعین است.

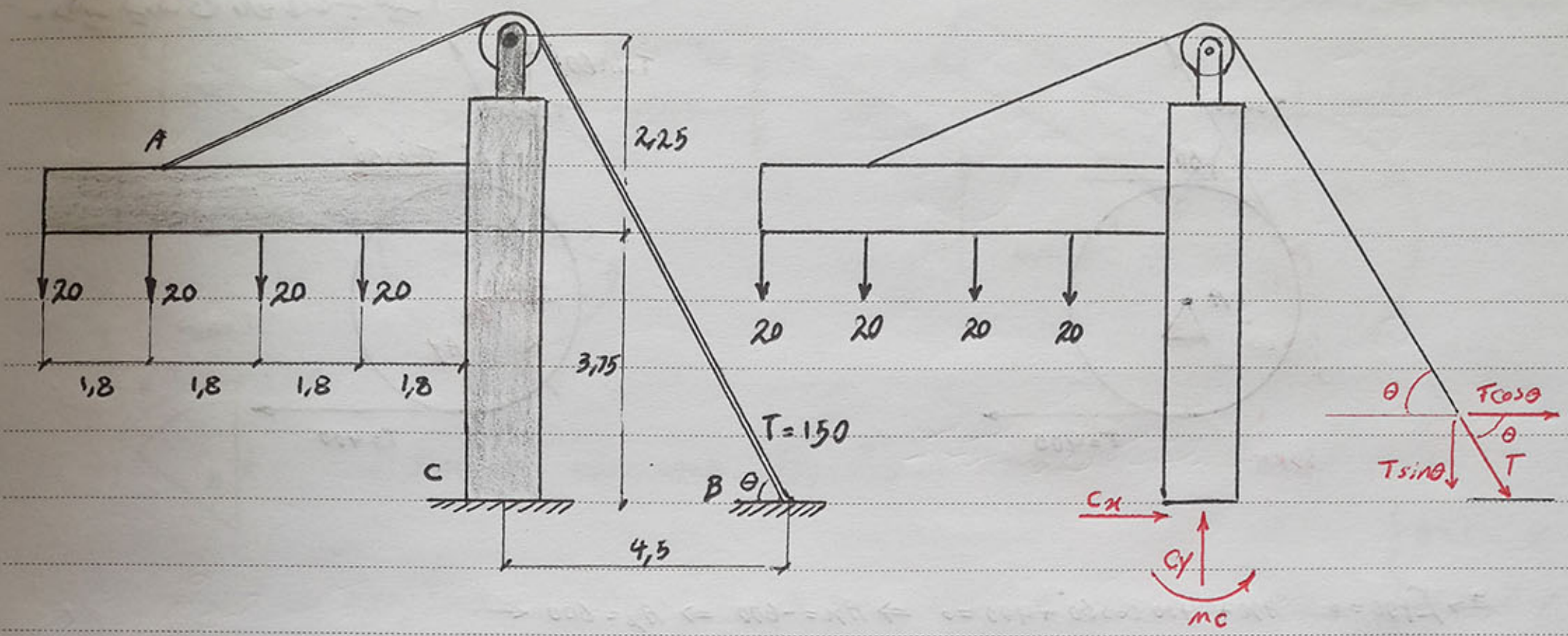


سازه پایدار است ولی نامعین



P4PCO

www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران



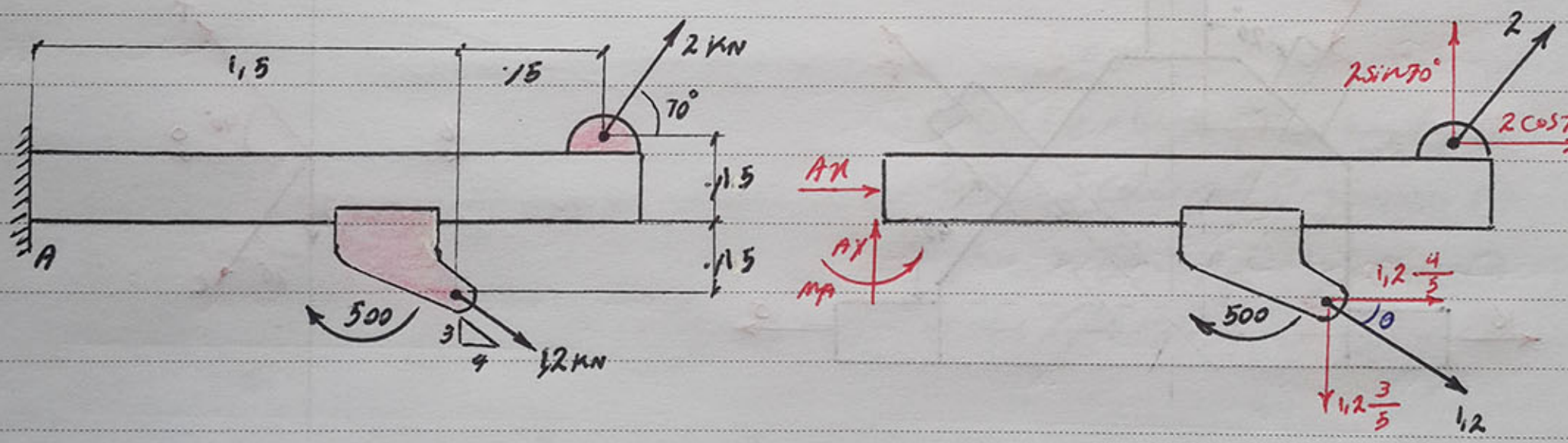
$$\theta = \tan^{-1}\frac{6}{4,5} = 53,130^\circ$$

$$\xrightarrow{+} \sum F_x = 0 \qquad C_x + T\cos\theta = 0 \Rightarrow C_x + 150\cos 53,130^\circ = 0 \Rightarrow C_x = -90 \Rightarrow C_x = 90\ kN \leftarrow$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \qquad -80 + C_y - 150\sin 53,130^\circ = 0 \Rightarrow C_y = 200\ kN$$

(4×20)

$$+\circlearrowleft \sum m_C = 0 \qquad m_C + 20(7,2) + 20(5,4) + 20(3,6) + 20(1,8) - 150\sin 53,130^\circ(4,5) = 0 \Rightarrow m_C = 180\ kNm$$



$$\cos\theta = \frac{4}{5}, \quad \sin\theta = \frac{3}{5}$$

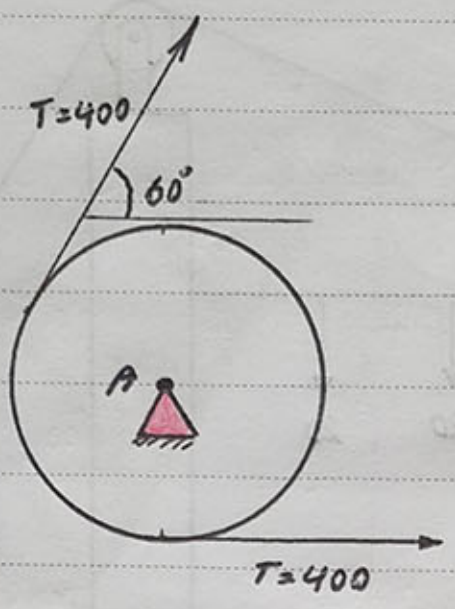
$$\xrightarrow{+} \sum F_x = 0 \qquad A_x + 1,2\frac{4}{5} + 2\cos 70^\circ = 0 \Rightarrow A_x = -1,644 \Rightarrow A_x = 1,644 \leftarrow$$

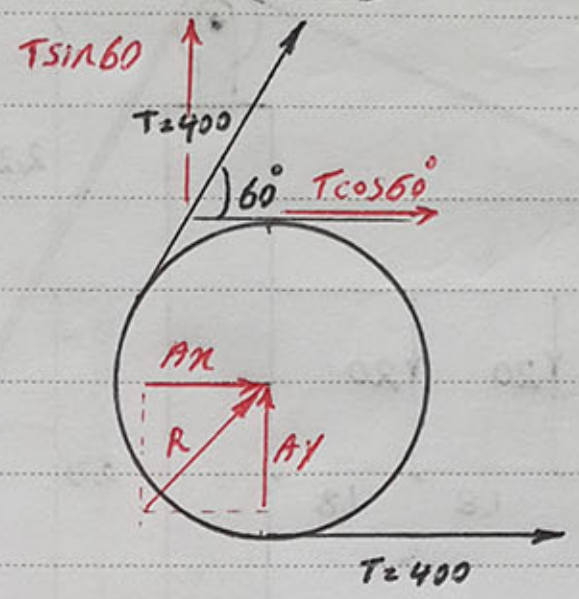
$$+\uparrow \sum F_y = 0 \qquad A_y + 2\sin 70^\circ - 1,2\frac{3}{5} = 0 \Rightarrow A_y = -1,16 \Rightarrow A_y = 1,16 \downarrow$$

$$+\circlearrowleft \sum m_A = 0 \qquad -M_A + 500 - \underbrace{1,2\frac{3}{5}(1,5)}_{1,08} + \underbrace{1,2\frac{4}{5}(,1225)}_{,1216} - \overbrace{2\cos 70^\circ\left(\frac{,15}{2}\right)}^{,1051} + \overbrace{2\sin 70^\circ(2)}^{3,1758} = 0 \Rightarrow M_A = 502,84\ kNm$$

www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

- در کابل نیروهای وارد محاسبه کنید:



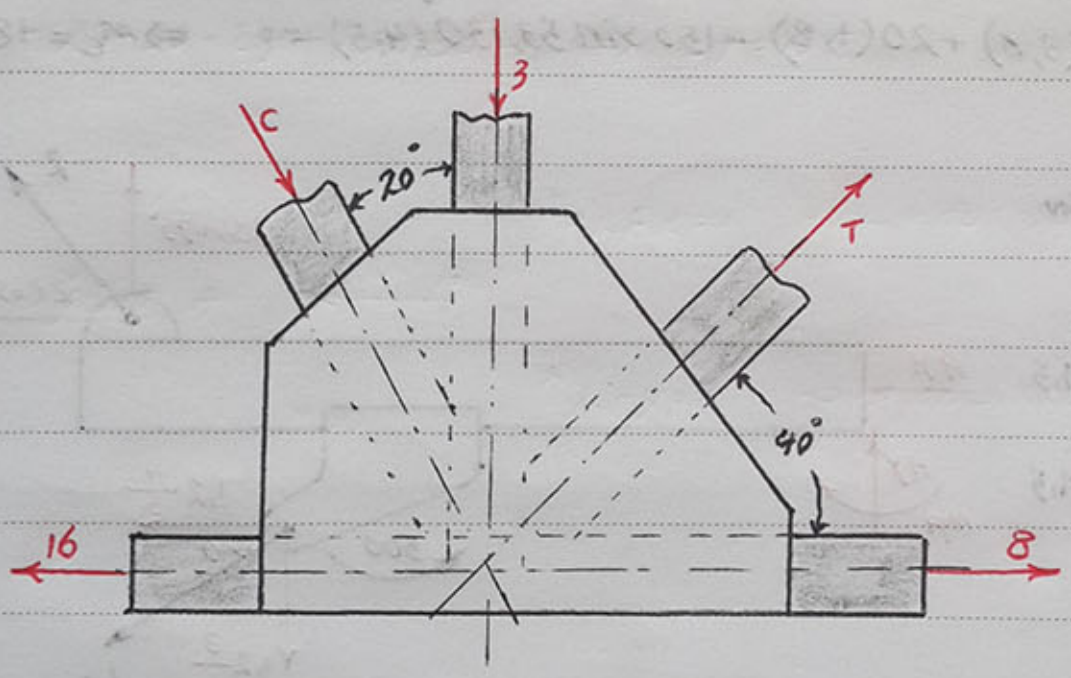


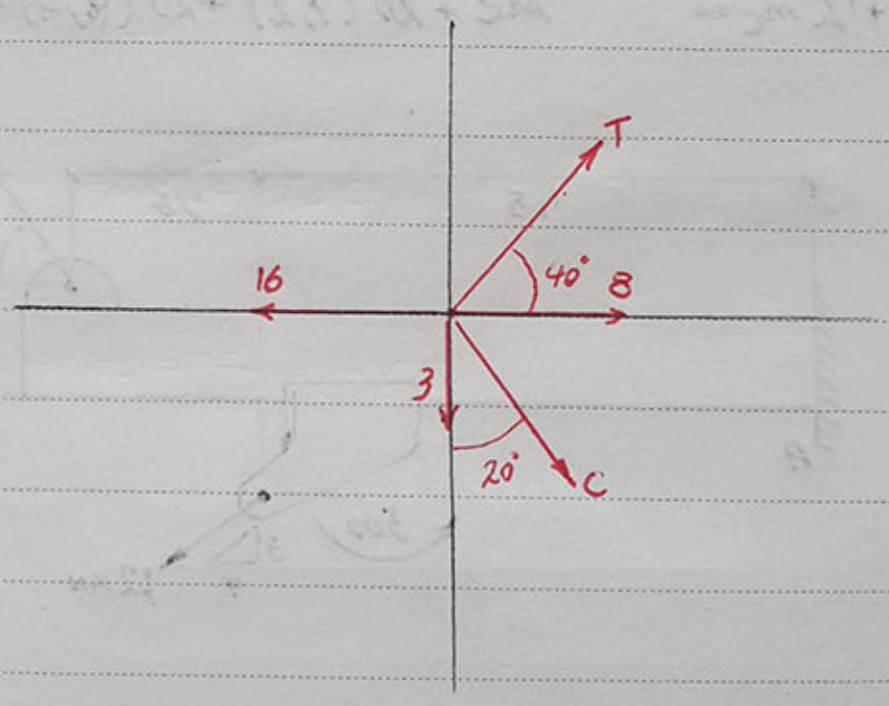
$\pm\rightarrow \sum F_x = 0 \quad A_x + 400\cos 60^\circ + 400 = 0 \Rightarrow A_x = -600 \Rightarrow A_x = 600 \leftarrow$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad A_y + 400\sin 60^\circ = 0 \Rightarrow A_y = -346{,}41 \Rightarrow A_y = 346{,}41 \downarrow$

$R = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \Rightarrow R = \sqrt{600^2 + 346{,}41^2} = 692{,}82\ kN$

- مطلوبست اندازه T و C که همراه با سایر نیروهای نشان داده شده بر مفصل خرپای پل وارد می شوند؛





① $\pm\rightarrow \sum F_x = 0 \quad 8 - 16 + C\sin 20^\circ + T\cos 40^\circ = 0$

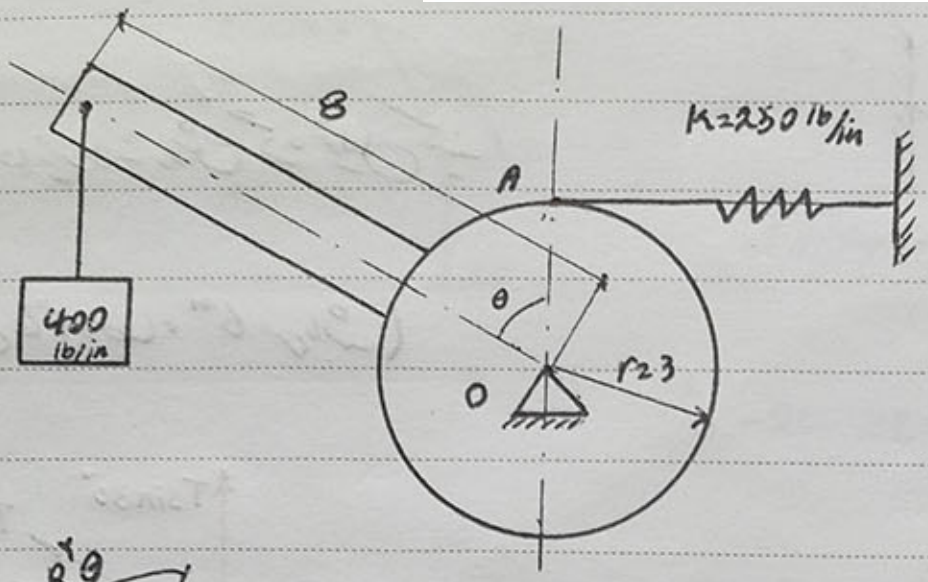
② $+\uparrow \sum F_y = 0 \quad -3 - C\cos 20^\circ + T\sin 40^\circ = 0$

① $\cdot 134\,C + \cdot 176\,T = 8 \Rightarrow C = 3{,}072\ KN$

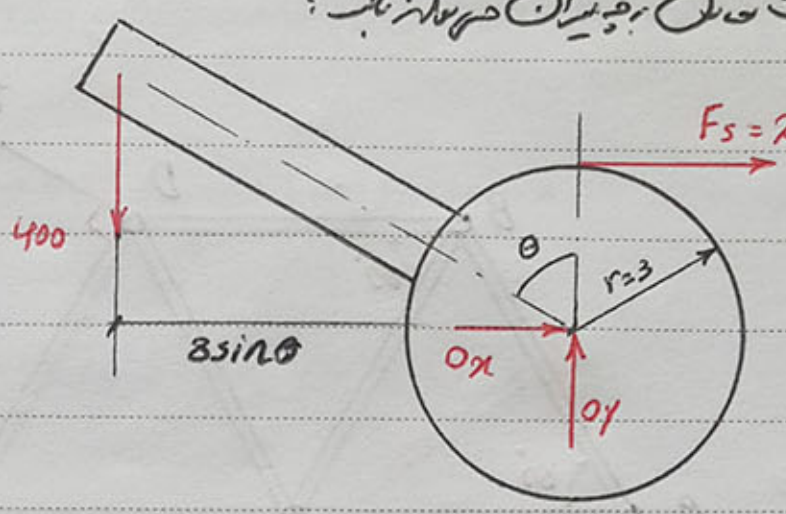
② $-\cdot 193\,C + \cdot 164\,T = 3 \Rightarrow T = 9{,}151\ KN$

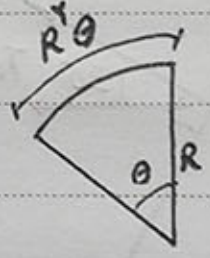
PAPCO

www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران



- زاویه حالت تعادل به چه میزان خواهد بود؟





$+\circlearrowleft \sum M_O = 0 \quad 400\sin\theta \times 8 - 250(3^2)\theta = 0$

$\Rightarrow 3200\sin\theta - 2250\theta = 0 \quad \Rightarrow \sin\theta = \frac{2250}{3200}\theta \quad \Rightarrow \sin\theta = .1703\theta$

$\theta = 0$ ✗

$\theta = 80,3^\circ$ ✓

فصل چهارم ← سازه‌ها ← خرپا

تعریف سازه : هر مجموعه‌ای از عضوهای متصل به هم که برای تحمل یا انتقال نیرو و پایداری در برابر بارهایی که بر آن وارد می‌شود

خرپا : قطعات مستقیم که انتهای آن‌ها به هم متصل شده باشند.

چند فرض مهم در مورد تحلیل و بررسی خرپا

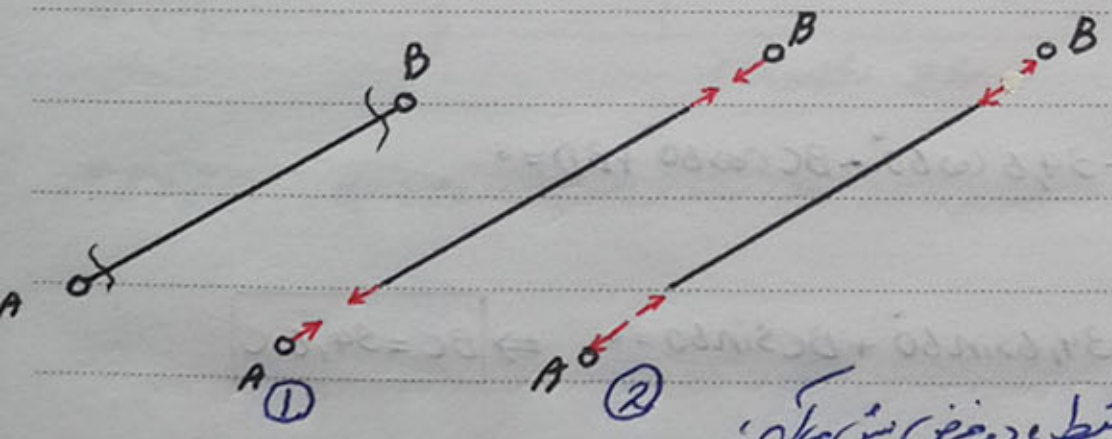
① در تحلیل‌ها از وزن خرپاها صرف‌نظر می‌شود.

② در انتهای مفصل تکیه‌گاهی بعضاً قید دوران دارند.

③ اعضای خرپا مستقیم‌الخط هستند و بار جانبی به طور مستقیم نمی‌گیرند.

④ در تحلیل‌ها باید به یاد داشته باشیم که بارها به نقطه‌ها (گره) وارد می‌شود.

تحلیل خرپا



طبق قانون سوم نیوتن : عمل و عکس‌العمل داریم :

اگر در مفصل A و B موجود باشند وکل را جدا کنیم از مفصل‌های مرتبط، دو فرض پیش می‌آید:

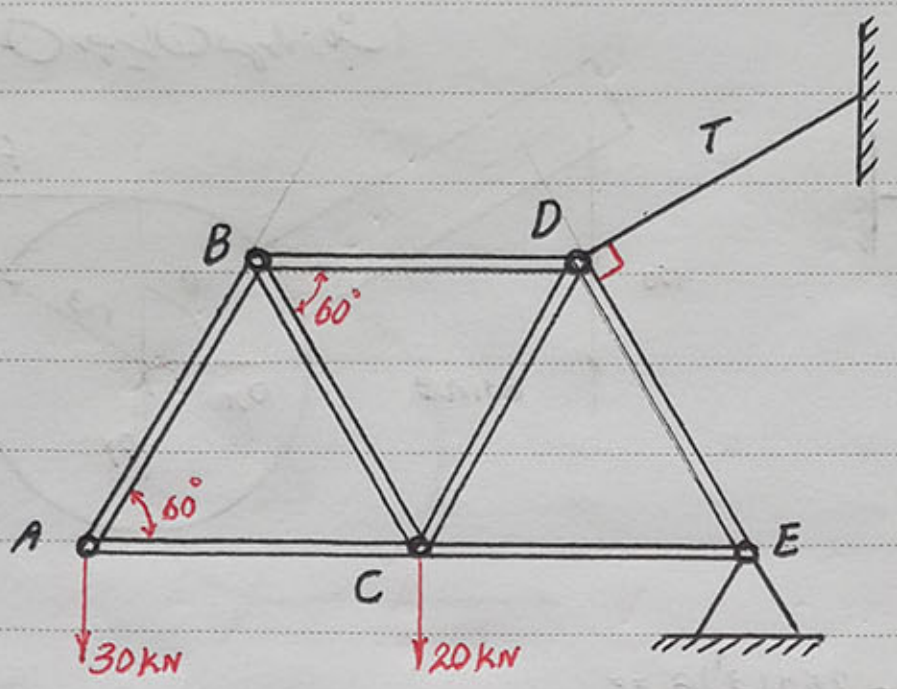
① یا هر دو نیروی کششی هستند (T) در نتیجه در شکل ① داریم :

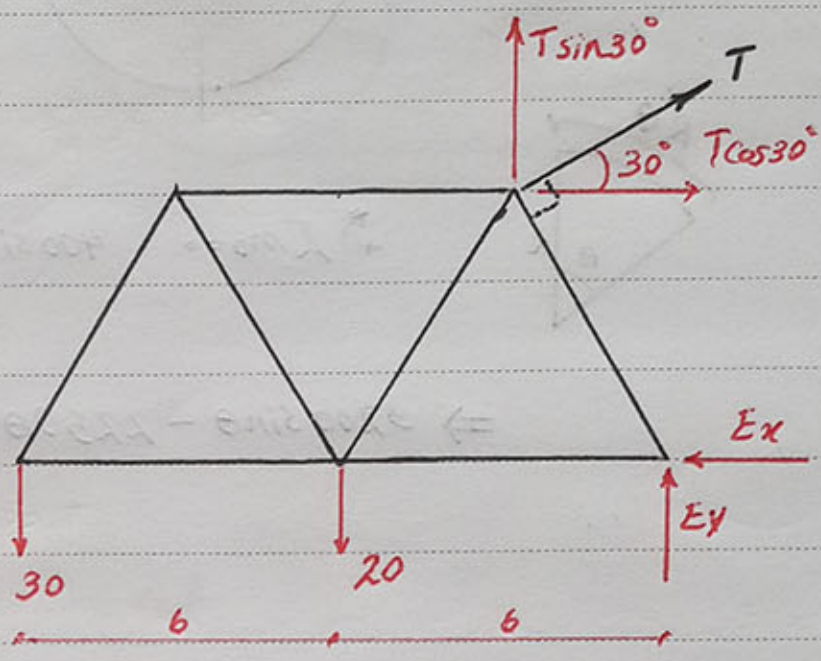
② یا هر دو نیرو فشاری هستند (C) در نتیجه در شکل ② داریم :

www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

- خرپای زیر را به روش گره تحلیل کنید:

(طول عمود وارد = 6m می‌باشد)





$\pm\rightarrow \sum F_x = 0 \quad -E_x + T\cos 30^\circ = 0$

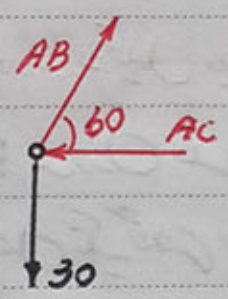
$+\uparrow \sum F_Y = 0 \quad -20 - 30 + E_Y + T\sin 30^\circ = 0$

$+\circlearrowleft \sum M_E = 0 \quad 30\times 12 + 20\times 6 - T\times 6 = 0 \Rightarrow T = 80\ kN$

$-E_x + T\cos 30^\circ = 0 \Rightarrow E_x = 80\cos 30^\circ = \boxed{69{,}28\ kN\ C}$

$-20 - 30 + E_Y + \underbrace{T\sin 30^\circ}_{40} = 0 \Rightarrow \boxed{E_Y = 10\ C}$

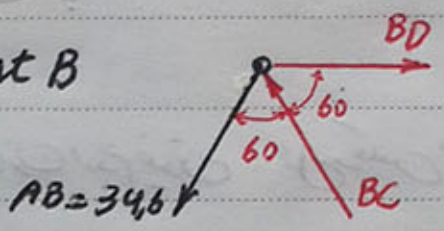
joint A



$\pm\rightarrow \sum F_x = 0 \quad -AC + AB\cos 60^\circ = 0 \Rightarrow \boxed{AC = 17{,}3\ C}$

$+\uparrow \sum F_Y = 0 \quad -30 + AB\sin 60^\circ = 0 \Rightarrow AB = \frac{30}{\cdot 86} = \boxed{34{,}6\ T}$

joint B



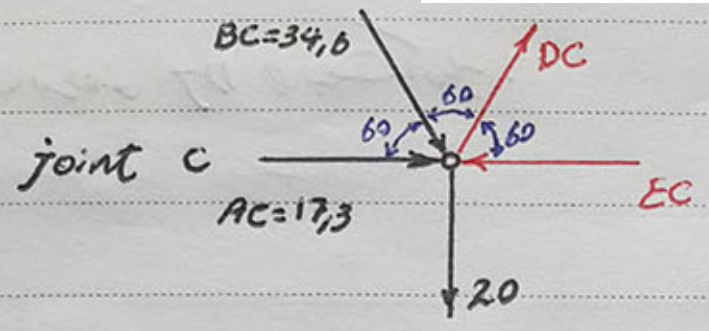
$\pm\rightarrow \sum F_x = 0 \quad -34{,}6\cos 60^\circ - BC\cos 60^\circ + BD = 0$

$+\uparrow \sum F_Y = 0 \quad -34{,}6\sin 60^\circ + BC\sin 60^\circ = 0 \Rightarrow \boxed{BC = 34{,}6\ C}$

$-34{,}6\underbrace{\cos 60^\circ}_{\frac{1}{2}} - 34{,}6\underbrace{\cos 60^\circ}_{\frac{1}{2}} + BD = 0 \Rightarrow \boxed{BD = 34{,}6\ T}$

PAPCO

www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران



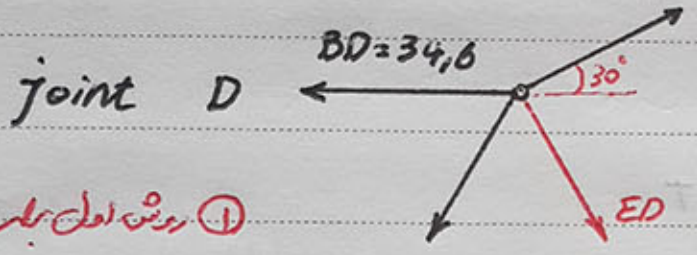
$\pm\rightarrow \sum F_x = 0 \quad 17,3 + 34,6\cos 60^\circ + DC\cos 60^\circ - EC = 0$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad -20 - 34,6\sin 60^\circ + DC\sin 60^\circ = 0$

$-20 - 29,96 + DC\sin 60^\circ = 0 \Rightarrow \boxed{DC = 57,68\ T}$

$34,6 + DC\cos 60^\circ - EC = 0 \Rightarrow \boxed{EC = 63,44\ C}$

$T = 80$

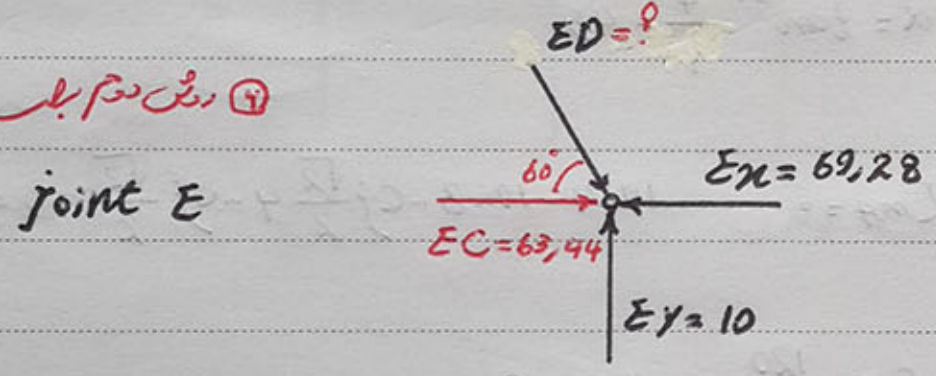


روش اول برای ED ①

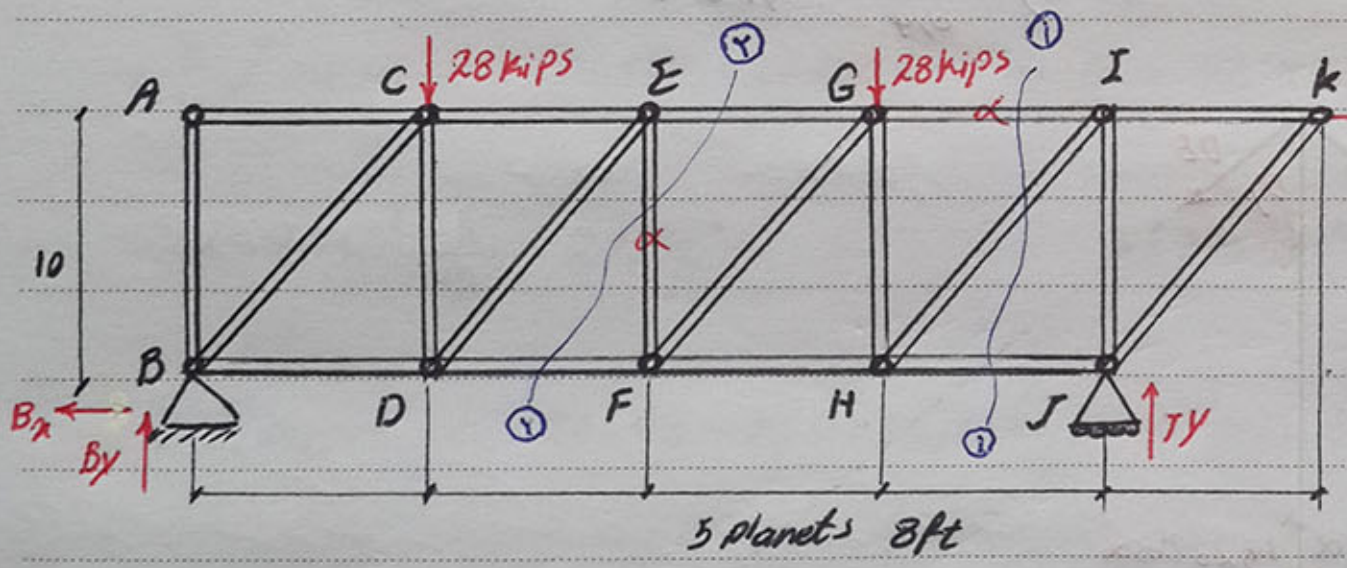
$\pm\rightarrow \sum F_x = 0 \quad -34,6 - 57,68\cos 60^\circ + 80\cos 30^\circ + ED\cos 60^\circ = 0$

$\Rightarrow -34,6 - 28,84 + 69,28 + ED\cos 60^\circ = 0 \Rightarrow ED = \frac{5,84}{0,5} = \boxed{11,68\ T}$

روش دوم برای ED ②



$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad 10 - ED\sin 60^\circ = 0 \Rightarrow \boxed{ED = 11,68\ T}$



- خروجی نیروی تحلیل شده؟
نیروی عضوهای EF و GI چقدر است؟

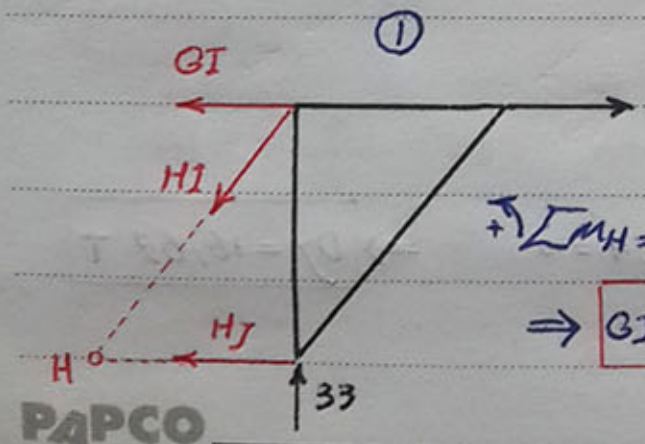
$\pm\rightarrow \sum F_x = 0 \quad 16 - Bx = 0 \Rightarrow Bx = 16\ kips$

$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 \quad -16\times 10 - 28\times 24 - 28\times 8 + Jy\times 32 = 0$

$\Rightarrow Jy = 33\ kips\ T$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad By + 33 - 28 - 28 = 0 \Rightarrow By = 23\ kips\ T$

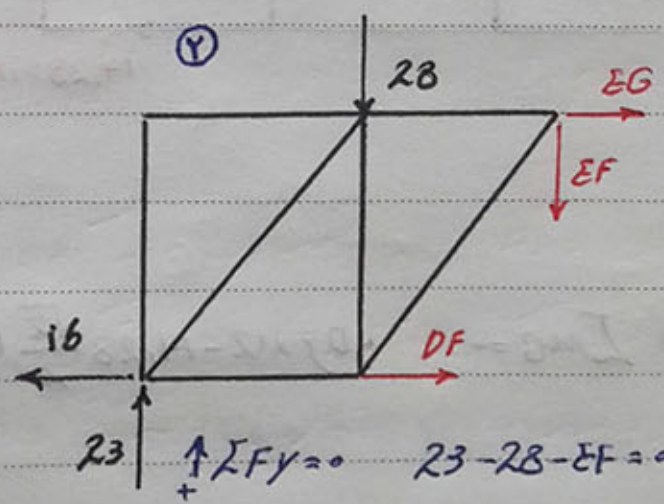
①



$+\circlearrowleft \sum M_H = 0 \quad GI\times 10 - 160 + 33\times 8 = 0$

$\Rightarrow \boxed{GI = 10,4\ C}$

②

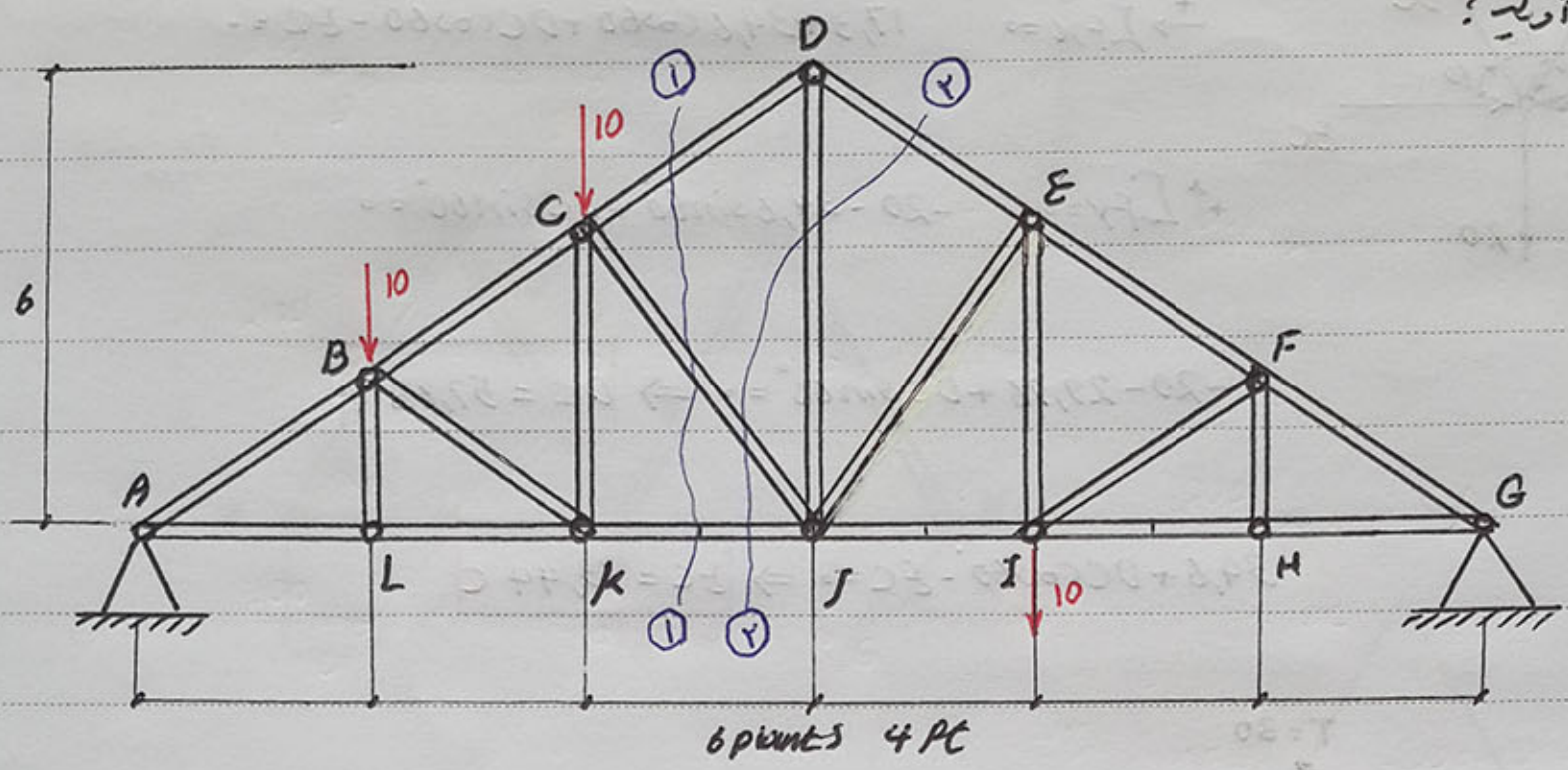


$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad 23 - 28 - EF = 0 \Rightarrow \boxed{EF = 5\ C}$

PAPCO

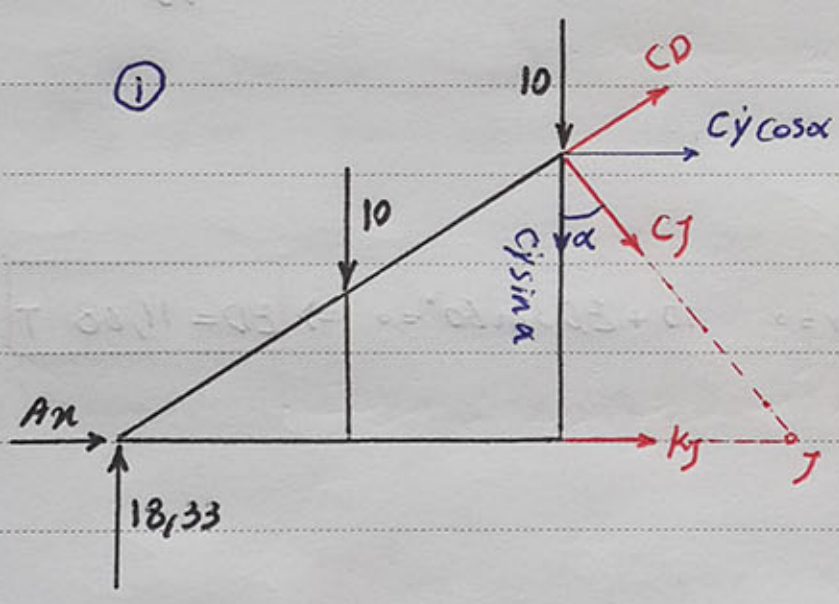
Year . Month . Date .
www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

- نیروی عضو DJ را بدست آورید:



6 points 4 Pt

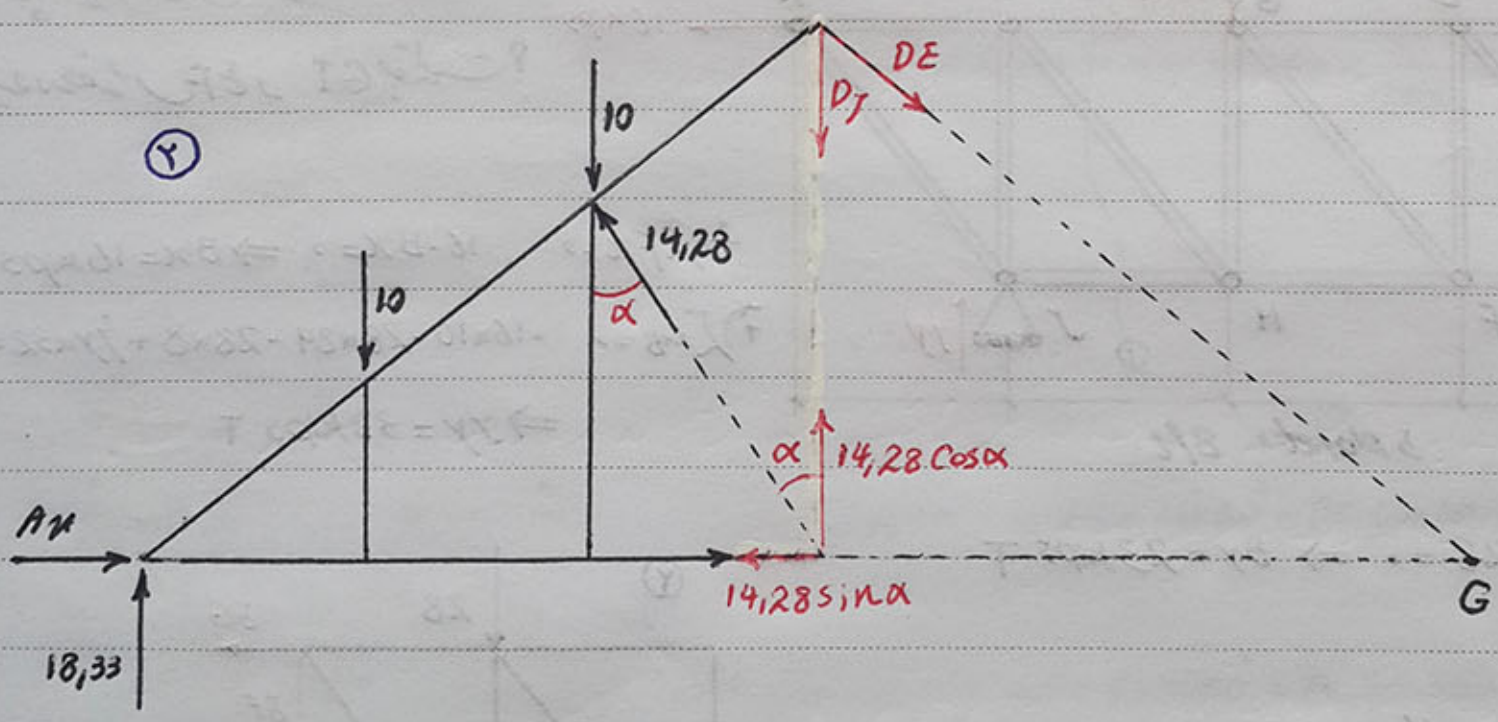
$\curvearrowleft +\Sigma M_B = 0 \quad 10\times20 + 10\times16 + 10\times8 - A_Y\,24 = 0 \Rightarrow A_Y = 18{,}33\ T$



$\alpha = \tan^{-1}\frac{4}{4} = 45^\circ$

$\curvearrowleft +\Sigma M_A = 0 \quad -10\times4 - 10\times8 - Cj\frac{\sqrt{2}}{2}\,4 - Cj\frac{\sqrt{2}}{2}\times8 = 0$

$\Rightarrow Cj = \frac{120}{8{,}4} = 14{,}28\ C$

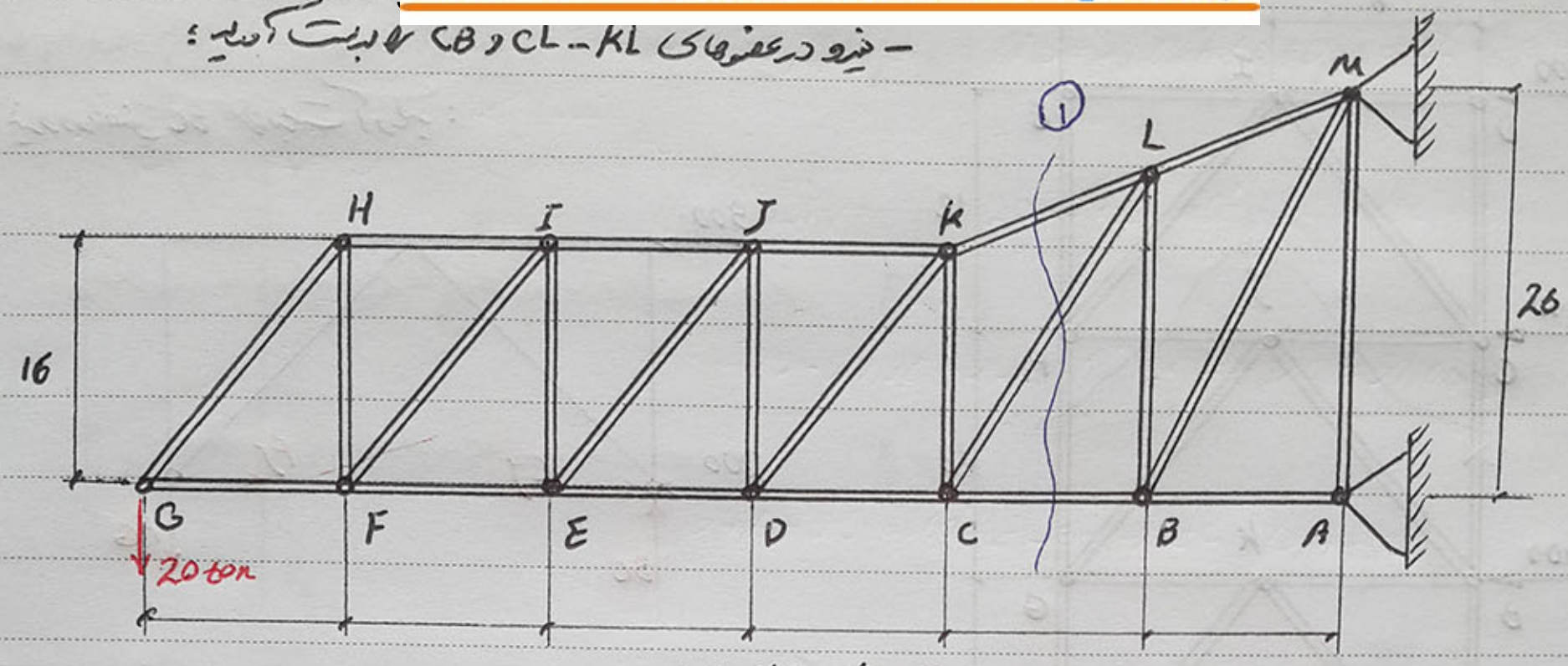


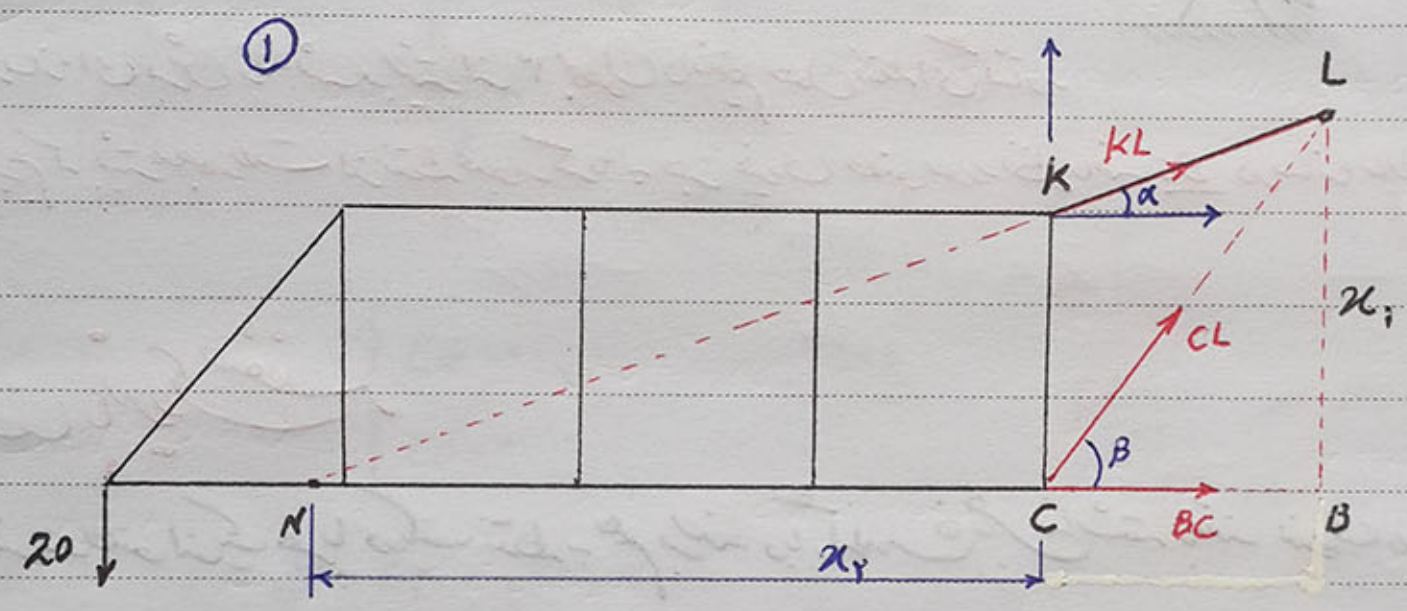
$\curvearrowleft +\Sigma M_G = 0 \quad -D_J\times12 - 14{,}28\frac{\sqrt{2}}{2}12 + 10\times40 + 10\times16 - 18{,}33\times24 = 0 \Rightarrow \boxed{D_J = 16{,}67\ T}$

PAPCO

www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

- نیرو در عضوهای KL ، CL ، BC را بدست آورید:





$+\circlearrowleft \sum M_L = 0$ $\quad BC \times 21 + 20 \times 60 = 0 \Rightarrow$ **$BC = 57{,}14$ C**

$\alpha = \tan^{-1}\frac{5}{12} = 22{,}62^\circ$ $\qquad \beta = \tan^{-1}\frac{21}{12} = 60{,}25^\circ$

$+\circlearrowleft \sum M_C = 0$ $\quad 20 \times 48 - KL \cos 22{,}62^\circ \times 16 = 0 \Rightarrow$ **$KL = 65$ T**

روش اول $\quad +\rightarrow \sum F_x = 0$ $\quad -BC + CL\cos 60{,}25^\circ + KL\cos 22{,}62^\circ = 0 \Rightarrow -57{,}14 + 60 = CL\cos 60{,}25^\circ \Rightarrow$ **$CL = 5{,}76$ C**

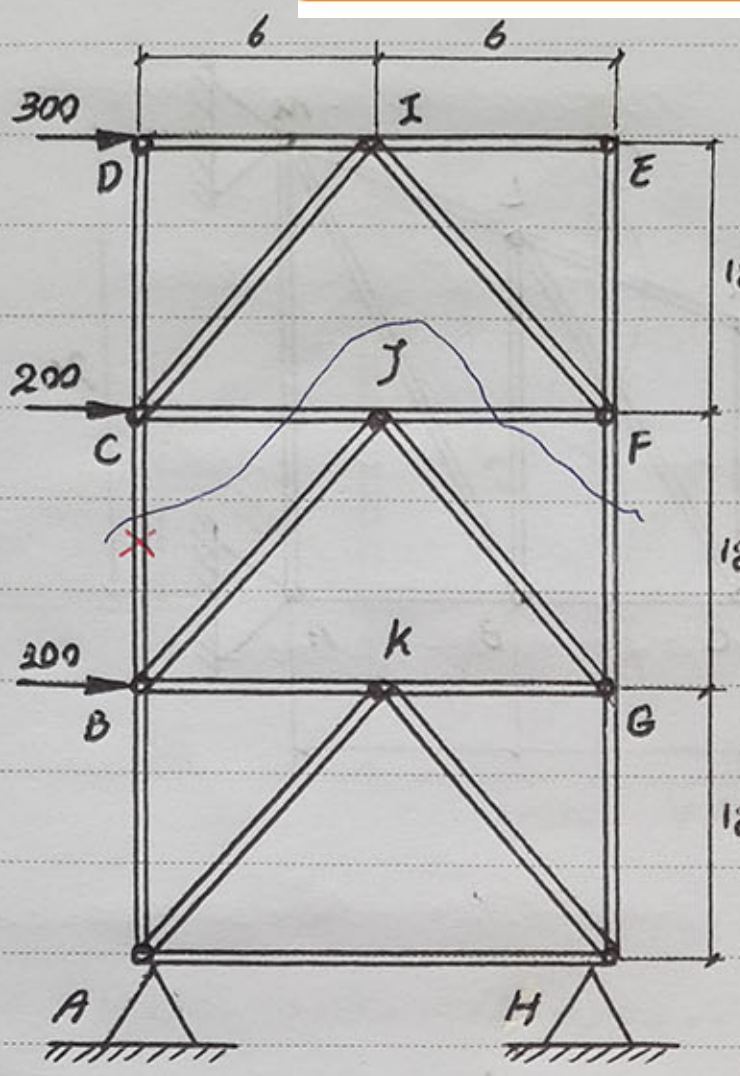
روش دوم

$\tan\alpha = \frac{KC}{x_2} \Rightarrow \tan 22{,}62^\circ = \frac{16}{x_2} \Rightarrow x_2 = 38{,}46$

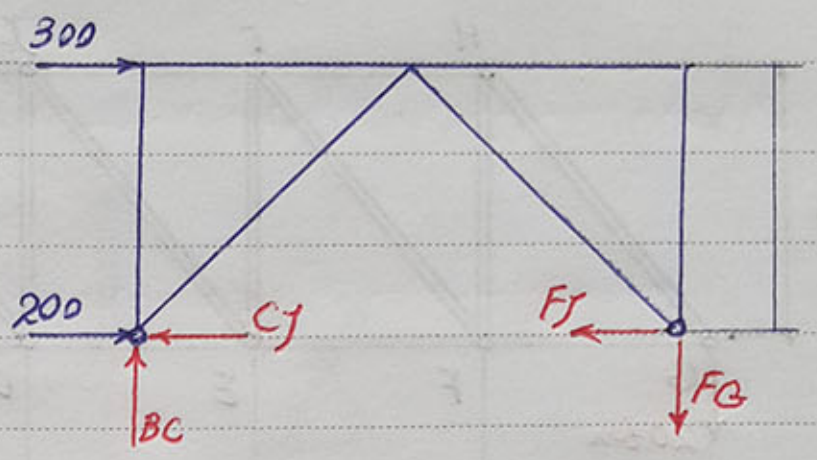
$+\circlearrowleft \sum M_N = 0$ $\quad 20(9{,}57) - CL\sin(60{,}25)\,38{,}46 = 0 \Rightarrow$ **$CL = 5{,}76$ C**

PAPCO

www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران



- نیرو در عضو BC را بدست آورید:



$\overset{+}{\circlearrowleft} \sum M_F = 0 \qquad -300 \times 12 - 12BC = 0 \Rightarrow BC = 300\,T$

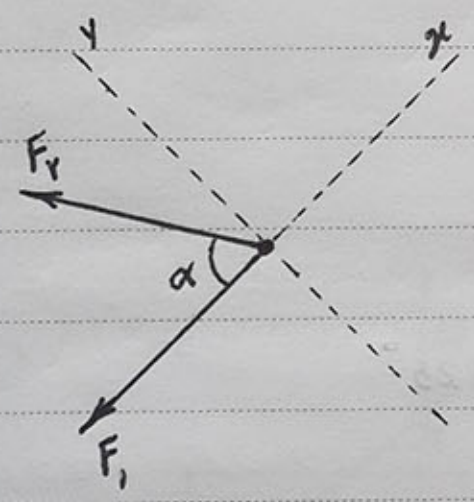
نکته :

اگر در سازه ای برش زده شود بیشتر از ۳ مجهول داشتیم حول نقطه ای گشتاور

میگیریم که بیشتر مجهولات از نقطه عبور کرده یا جز خرپای عضو مورد نظر مانند BC در سازه بالا.

اعضای نیروی صفر

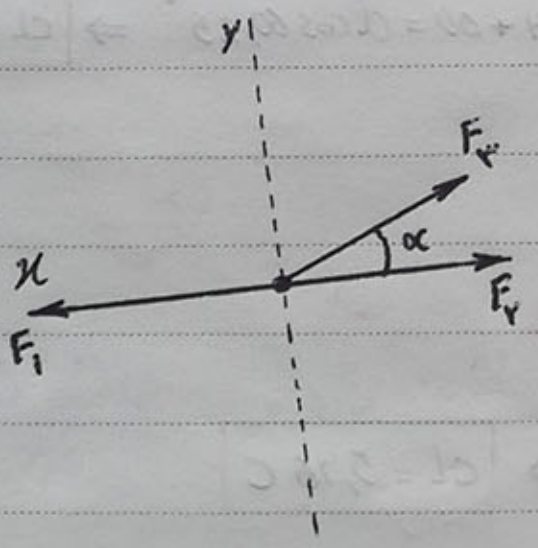
① اگر دو عضو از یک خرپا در یک نقطه به هم برسند و بارگذاری خارجی نداشته باشند نیروی هر دو عضو صفر است:



$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0 \qquad -F_1 - F_2 \cos\alpha = 0 \Rightarrow F_1 = 0$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \qquad F_2 \sin\alpha = 0 \Rightarrow F_2 = 0$

② اگر ۳ تا عضو از یک خرپا در یک نقطه به هم برسند و بارگذاری خارجی نداشته باشند هرگاه دو نیرو روبرو هم باشند (هم راستا) نیروی عضو سوم صفر است و نیروهای هم راستا با هم برابرند:



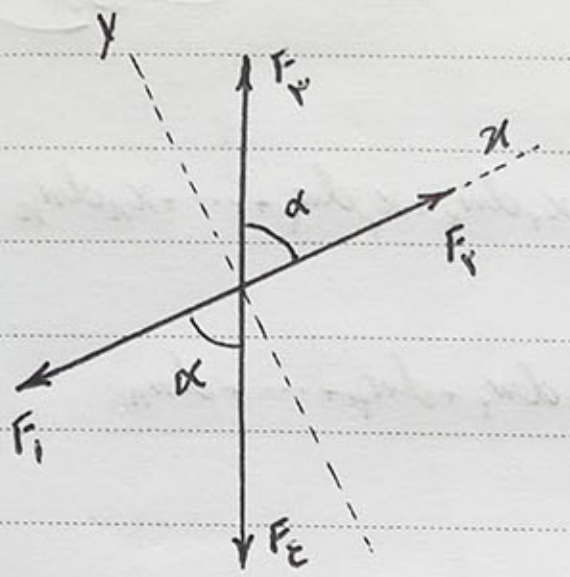
$+\uparrow \sum F_y = 0 \qquad F_3 \sin\alpha = 0 \Rightarrow F_3 = 0$

$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0 \qquad -F_1 + F_2 + F_3 \cos\alpha = 0 \Rightarrow F_1 = F_2$

P4PCO

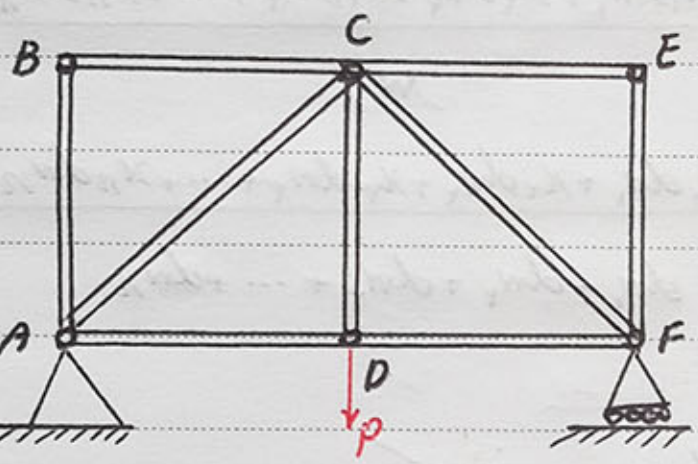
www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

③ ٤ عضو از یک خرپا در یک نقطه باهم متصل باشند و نیروی خارجی هم نداشته باشند و دو به دو هم بر روی هم منطبق باشند نیروی آنها دو به دو باهم برابرند؛



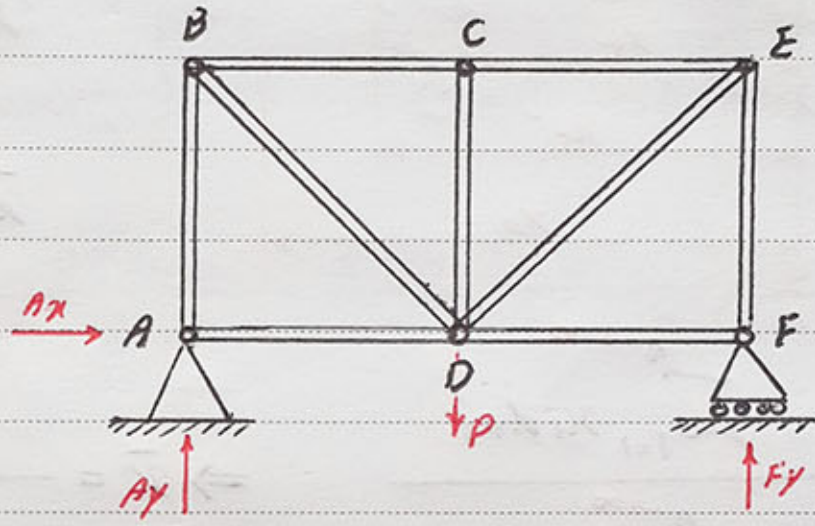
$F_1 = F_2$

$F_3 = F_4$



$\begin{cases} AB = 0 \\ BC = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} CE = 0 \\ EF = 0 \end{cases}$

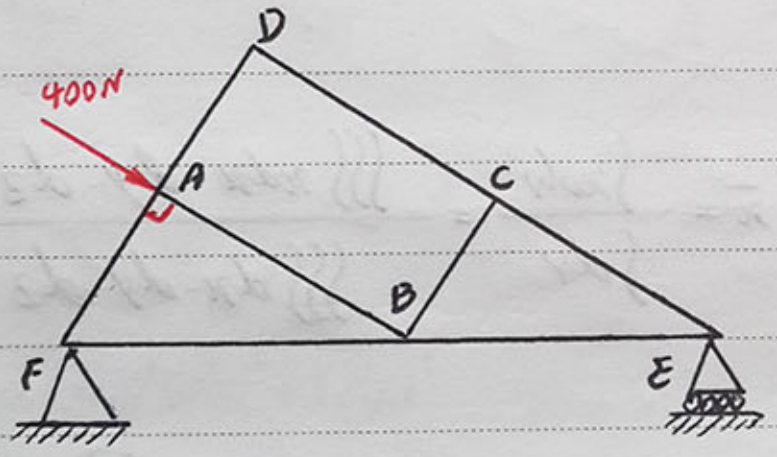
$CD = P$, $AD = DF$



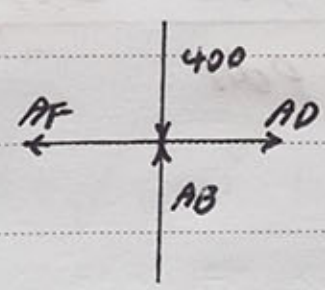
$CD = 0$, $BC = CE$

$Ax = AD$, $Ay = AB$

$DF = 0$, $EF = Fy$



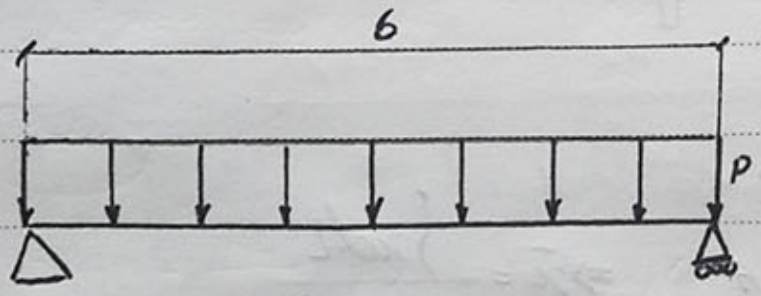
- نیروی در عضو AB را محاسبه نمایید؛



$\pm \rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow AF = AD$

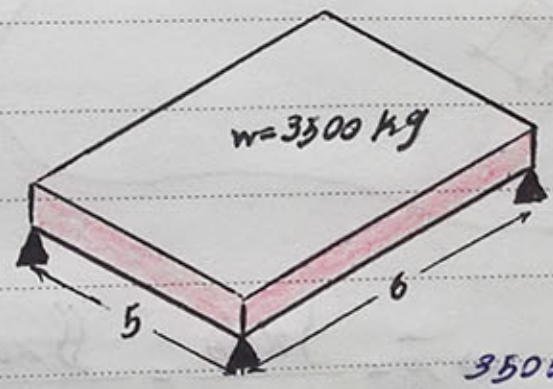
$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad 400 - AB = 0 \Rightarrow AB = 400\ N$

بارهای گسترده و متمرکز خنثی Distributed loads and centraed



$6 \times P =$ وزن ریلی $(3000\ kg)$

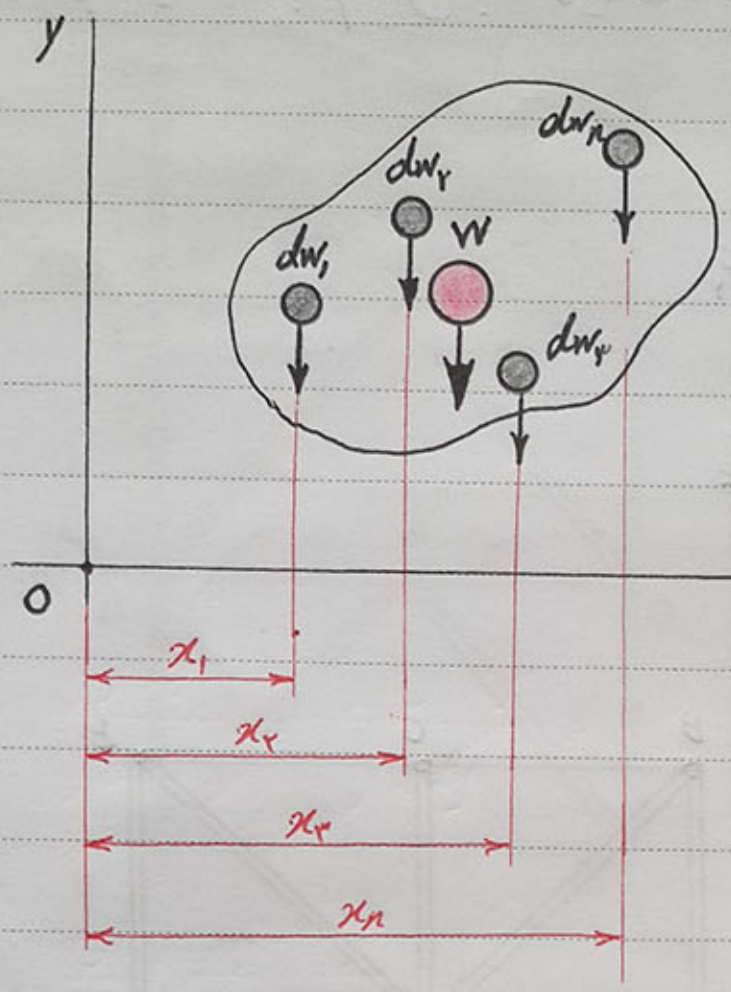
$P = \frac{3000}{6} = 500\ kgf/m$



$w = \frac{3500}{6 \times 5} = 116{,}6\ kgf/m^2$

www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

بردار اولین گشتاور نسبت به مرکز هندسی لحظه



$$\bar{x}W = x_1 dw_1 + x_2 dw_2 + x_3 dw_3 + \cdots + x_n dw_n$$

$$W = dw_1 + dw_2 + dw_3 + \cdots + dw_n$$

$$\bar{x} = \frac{x_1 dw_1 + x_2 dw_2 + x_3 dw_3 + \cdots + x_n dw_n}{W}$$

$$\bar{x} = \frac{x_1 dw_1 + x_2 dw_2 + x_3 dw_3 + \cdots + x_n dw_n}{dw_1 + dw_2 + dw_3 + \cdots + dw_n}$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n\to\infty} x_i dw_i}{\sum_{i=1}^{n\to\infty} dw_i} \qquad \Rightarrow \bar{x} = \frac{\int x\,dw}{\int dw}$$ مرکز وزن

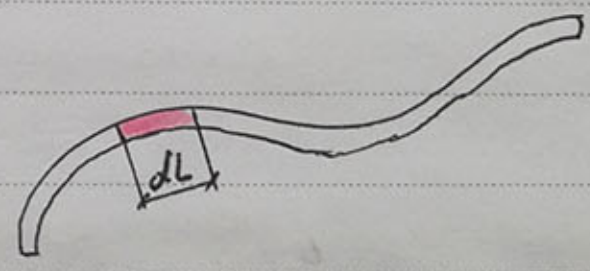
$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{\int x\,dw}{\int dw} \overset{w=mg}{=} \frac{\int x g\,dm}{\int g\,dm} \qquad \Rightarrow \bar{x} = \frac{\int x\,dm}{\int dm}$$ مرکز جرم

$$\bar{x} = \frac{\int x\,dm}{\int dm} \xrightarrow{m=\rho\cdot V} \Rightarrow \bar{x} = \frac{\int x\rho\,dV}{\int \rho\,dV} \xrightarrow{\rho \text{ ثابت}} \bar{x} = \frac{\int x\,dV}{\int dV} = \frac{\iiint x\,dx\cdot dy\cdot dz}{\iiint dx\cdot dy\cdot dz}$$

$V = t\cdot A$

$dV = t\cdot dA$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{\int x\,dA}{\int dA} = \frac{\iint x\,dx\,dy}{\iint dx\,dy}$$



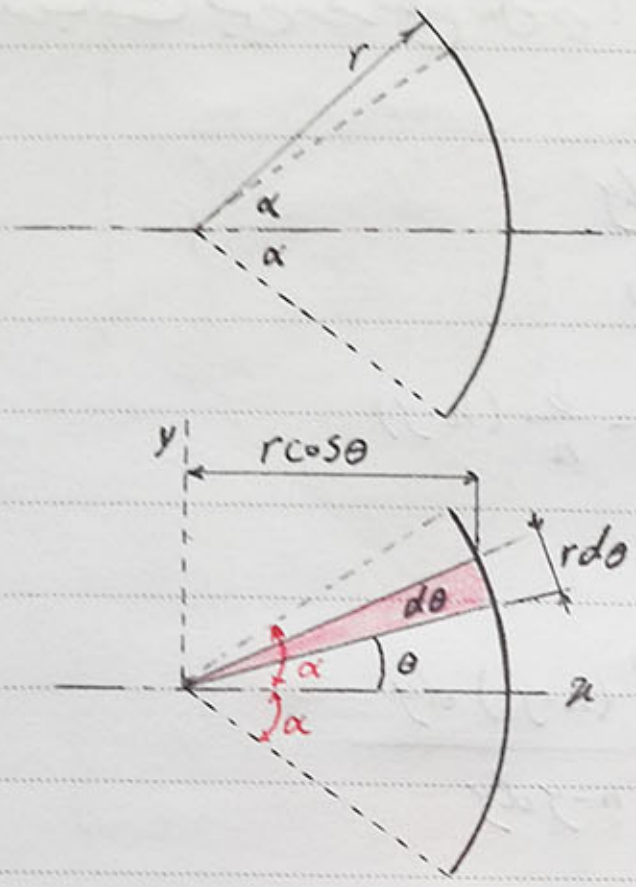
$V = L\cdot A$

$dV = dL\cdot A$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{\int x\,dL}{\int dL}$$

www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

- مطلوب است تعیین مرکز هندسی کمان داده شده مطابق شکل.



با استفاده از مختصات قطبی داریم

$$dL = R\cdot d\theta$$

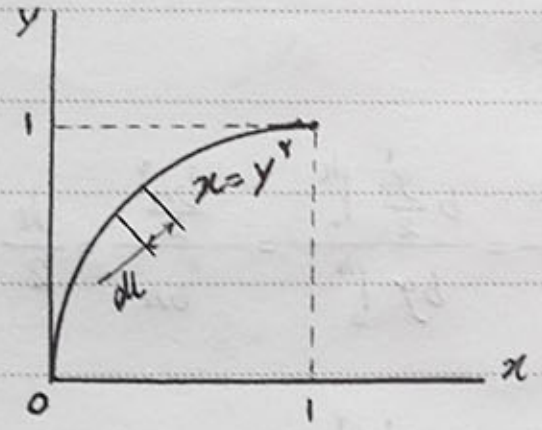
$$x = R\cdot\cos\theta$$

$$\bar{x} = \frac{\int x\,dL}{\int dL} \Rightarrow \bar{x} = \frac{\int R\cdot\cos\theta\cdot R\,d\theta}{\int R\cdot d\theta}$$

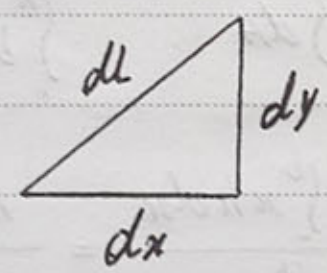
$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{R^2}{R}\cdot\frac{\int_{-\alpha}^{+\alpha}\cos\theta\,d\theta}{\int_{-\alpha}^{+\alpha}d\theta} = \frac{R^2}{R}\cdot\frac{\sin\alpha\Big|_{-\alpha}^{+\alpha}}{\theta\Big|_{-\alpha}^{+\alpha}}$$

$$\Rightarrow \frac{R^2}{R}\cdot\frac{\sin\alpha-\sin\alpha}{\alpha-(-\alpha)} \Rightarrow \bar{x} = \frac{R^2}{R}\times\frac{2\sin}{2\alpha} = \frac{2R^2\sin\alpha}{2R\alpha} = \frac{R\sin\alpha}{\alpha}$$

$\bar{y} = 0$ به دلیل تقارن در محور x



$$\bar{x} = \frac{\int x\,dL}{\int dL} \qquad \bar{y} = \frac{\int y\,dL}{\int dL}$$



$$dL = \sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$$

$$dL = \sqrt{(dx)^2+(dy)^2} \xrightarrow[\text{فاکتورگیری از } dx]{} dL = \sqrt{(dx)^2\cdot\left(1+\frac{dy}{dx}\right)^2} \Rightarrow dL = dx\sqrt{\left(1+\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$dL = \sqrt{(dx)^2+(dy)^2} \xrightarrow[\text{فاکتورگیری از } dy]{} dL = \sqrt{(dy)^2\cdot\left(1+\frac{dx}{dy}\right)^2} \Rightarrow dL = dy\sqrt{\left(1+\frac{dx}{dy}\right)^2}$$

$$x = y^2 \Rightarrow \frac{dx}{dy} = 2y$$

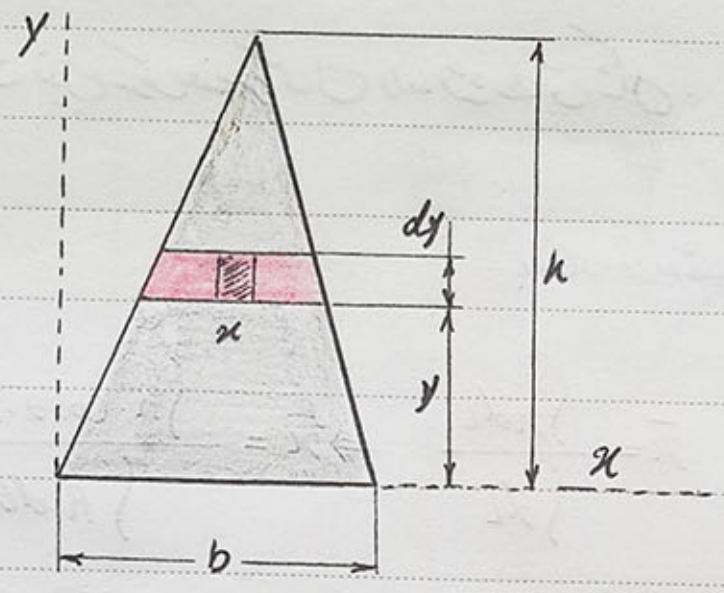
$$\bar{x} = \frac{\int x\,dL}{\int dL} = \frac{\int x\sqrt{\left(1+\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy}{\int\sqrt{\left(1+\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy} = \frac{\int y^2\sqrt{1+4y^2}\cdot dy}{\int\sqrt{1+4y^2}\cdot dy} \Rightarrow \bar{x} = \frac{\int_0^1 y^2\sqrt{1+4y^2}\,dy}{\int_0^1\sqrt{1+4y^2}\,dy} = 0.141$$

$$\bar{y} = \frac{\int y\,dL}{\int dL} = \frac{\int y\sqrt{1+4y^2}\,dy}{\int\sqrt{1+4y^2}\,dy} \Rightarrow \bar{y} = 0.157$$

PAPCO

www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

- مطلوب است تعیین مرکز سطح شکل زیر :



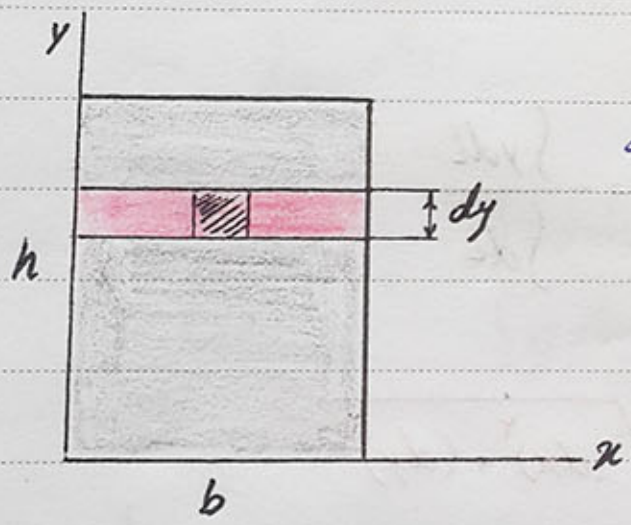
$$dA = dx \cdot dy = x\,dy$$

از تشابه مثلث ها نتیجه می شود

$$\frac{b}{h} = \frac{x}{h-y} \Rightarrow x = \frac{b}{h}(h-y)$$

$$\bar{y} = \frac{\int y\,dA}{\int dA} = \frac{\int xy\,dy}{\int x\,dy} = \frac{\int_0^h \frac{b}{h}(h-y)y\,dy}{\int_0^h \frac{b}{h}(h-y)\,dy} = \frac{\frac{b}{h}\int_0^h (h-y^2)\,dy}{\frac{b}{h}\int_0^h h-y\,dy}$$

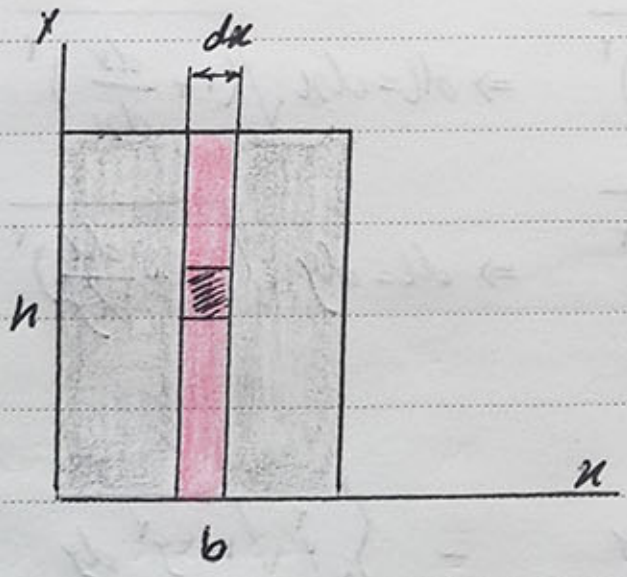
$$\Rightarrow \bar{y} = \frac{\frac{b}{h}\left(\frac{hy^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^h}{\frac{b}{h}\left(hy - \frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^h} = \frac{\frac{b}{h}}{\frac{b}{h}} \frac{\frac{h^3}{6}}{\frac{h^2}{2}} = \frac{\frac{bh^2}{6}}{\frac{bh}{2}} = \frac{h}{3}$$



قسمت هاشور زده $dA = b \cdot dy$

$$\bar{y} = \frac{\int y\,dA}{\int dA} = \frac{\int_0^h y \cdot b \cdot dy}{\int_0^h b \cdot dy} = \frac{b\frac{y^2}{2}\Big|_0^h}{by\Big|_0^h} = \frac{\frac{bh^2}{2}}{bh} = \frac{h}{2}$$

$$dA = h \cdot dx \qquad \bar{x} = \frac{\int x\,dA}{\int dA} = \frac{\int_0^b x\,h\,dx}{\int_0^b h\,dx} = \frac{h\frac{x^2}{2}\Big|_0^b}{hx\Big|_0^b} = \frac{\frac{hb^2}{2}}{hb} = \frac{b}{2}$$



$$dA = h\,dx \;,\; y = \frac{h}{2}$$

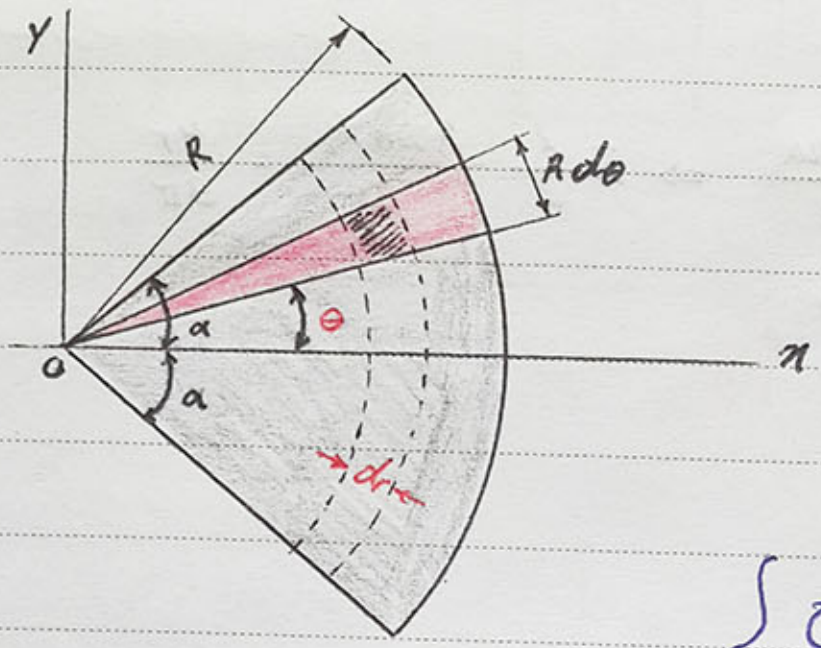
$$\bar{y} = \frac{\int y\,dA}{\int dA} = \frac{\int y\,h\,dx}{\int bh} = \frac{\int_0^h \frac{h}{2}h\,dx}{bh} = \frac{\frac{bh^2}{2}}{bh} = \frac{h}{2}$$

$$dA = h \cdot dx \qquad \bar{x} = \frac{\int x\,dA}{\int dA} = \frac{\int_0^b x\,h\,dx}{\int_0^b h\,dx} = \frac{\frac{bh}{2}\Big|_0^b}{\frac{b}{h}\Big|_0^b} = \frac{b}{2}$$

PAPCO

www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

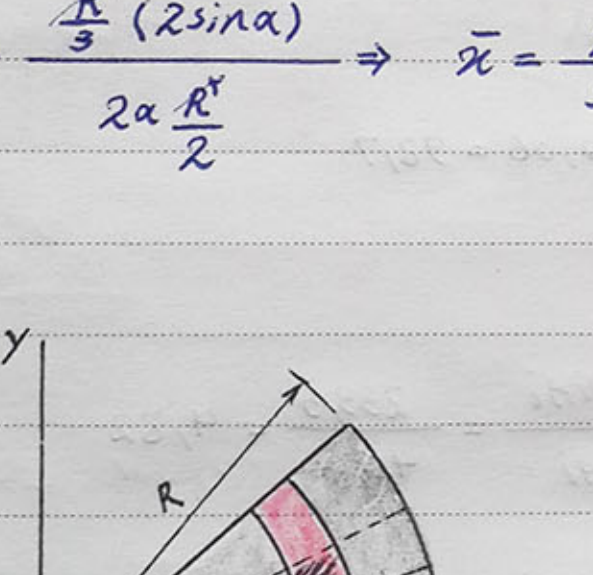
- مطلوب است تعیین مرکز سطح قطاع دایره؛



به دلیل تقارن $\bar{y} = 0$

$$\bar{x} = \frac{\int x\,dA}{\int dA}$$

$$\begin{cases} \text{مرکز سطح } x \Rightarrow x = \frac{2}{3} R\cos\theta \\ dA = R\,d\theta \cdot R/2 = \frac{R^2}{2} d\theta \end{cases}$$



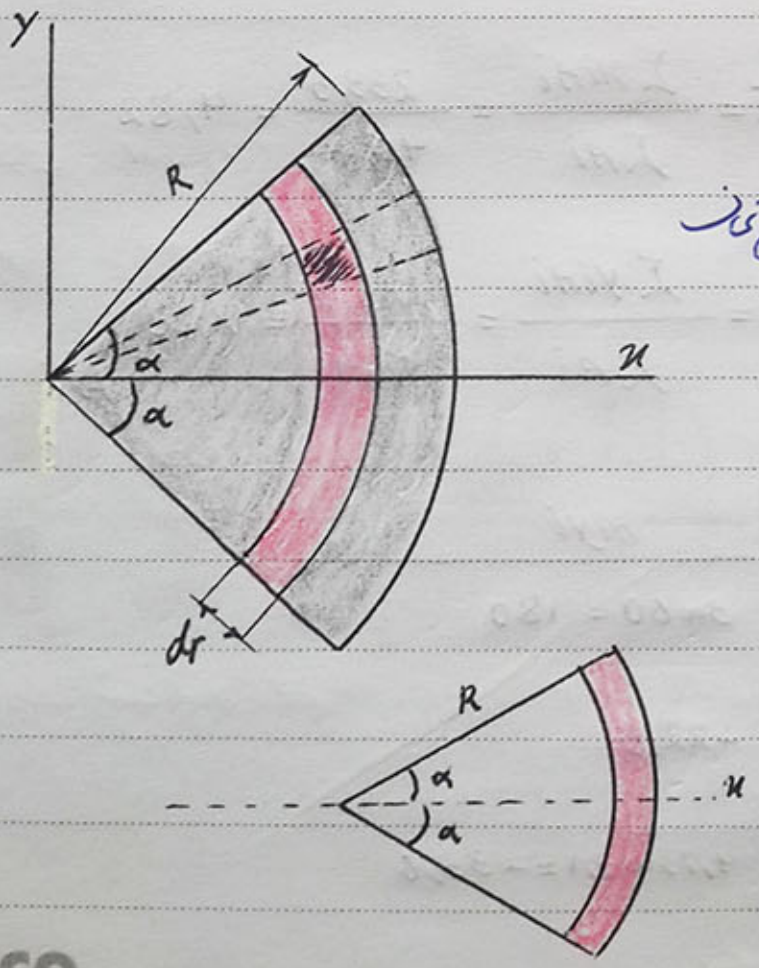
$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{2}{3} R\cos\theta \cdot \frac{R^2}{2} d\theta}{\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{R^2}{2} d\theta} = \frac{\frac{2}{3} R \frac{R^2}{2} \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos\theta\, d\theta}{\frac{R^2}{2} \int_{-\alpha}^{\alpha} d\theta} = \frac{2}{3} \frac{R\sin\alpha}{\alpha}$$

$dA = R \cdot dr \cdot d\theta$

$x = R\cos\theta$

$$\bar{x} = \frac{\int x\,dA}{\int dA} = \frac{\iint R\cos\theta \cdot R \cdot dr \cdot d\theta}{\iint R \cdot dr \cdot d\theta} = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha}\int_{0}^{R} R^2\cos\theta\, dr\, d\theta}{\int_{-\alpha}^{\alpha}\int_{0}^{R} R\, dr\, d\theta} = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{R^2}{3}\cos\theta\, d\theta}{\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{R^2}{2} d\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{R^3}{3}(2\sin\alpha)}{2\alpha\frac{R^2}{2}} \Rightarrow \bar{x} = \frac{2}{3}\frac{R\sin\alpha}{\alpha}$$



به دلیل تقارن $\bar{y} = 0$

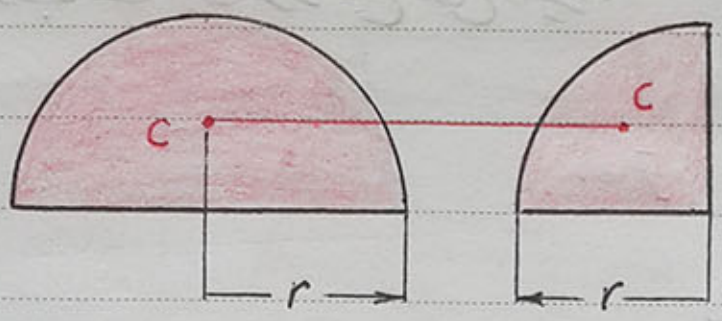
مرکز سطح طبق گلدن $x = \frac{r\sin\alpha}{\alpha}$

$dA = 2\alpha R\,dr$

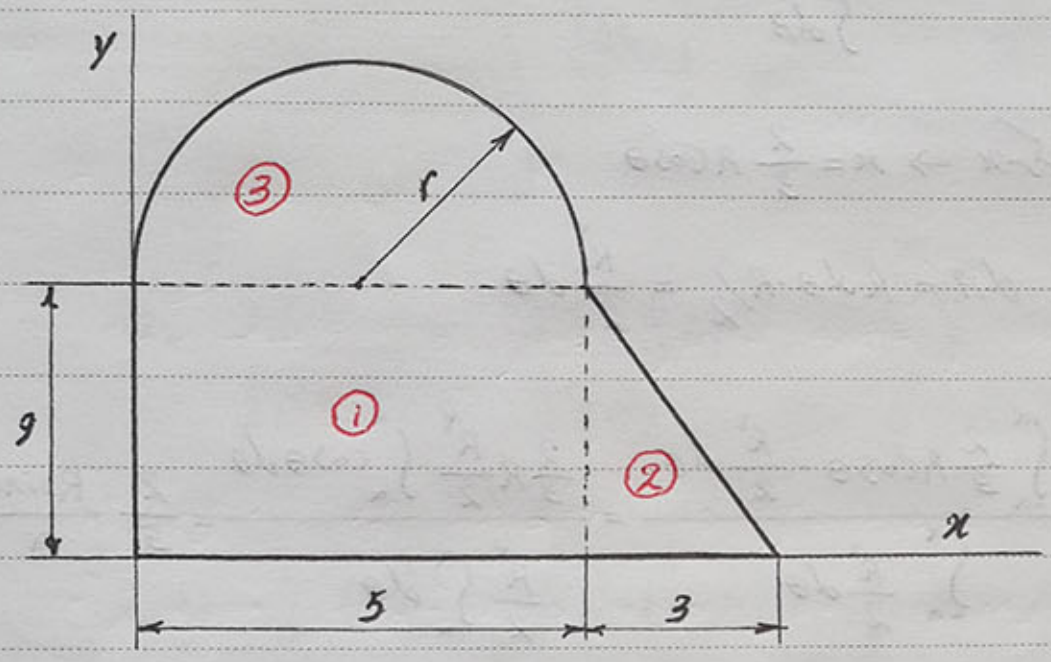
$$\bar{x} = \frac{\int x\,dA}{\int dA} = \frac{\int_0^r r\sin\alpha/\alpha \cdot 2\alpha R\,dr}{\int_0^r 2\alpha R\,dr}$$

$$\Rightarrow \frac{2\sin\alpha \int_0^r R^2\,dr}{2\alpha \int_0^r r\,dr} = \frac{2}{3}\frac{R^3\sin\alpha}{\alpha R^2} = \frac{2}{3}\frac{R\sin\alpha}{\alpha}$$

www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران



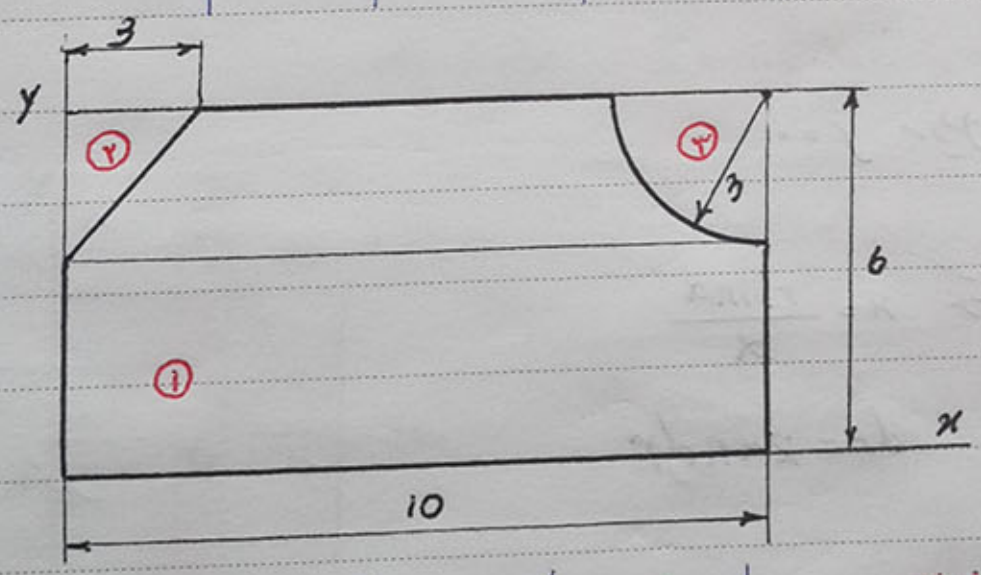
$$\bar{x} = \frac{2}{3}\frac{r\sin\alpha}{\alpha} \Rightarrow \bar{x} = \frac{2}{3}\frac{R\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{4r}{3\pi}$$



$$\bar{x} = \frac{\sum x_i A_i}{\sum A_i} = \frac{218}{68,3} = 3,2$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i} = \frac{344,7}{68,3} = 5,04$$

سطح	A_i	x_i	y_i	$A_i x_i$	$A_i y_i$
①	45	2,5	4,5	$45 \times 2,5 = 112,5$	$45 \times 4,5 = 202,5$
②	13,5	6	3	$13,5 \times 6 = 81$	$13,5 \times 3 = 40,5$
③	9,81	2,5	10,06	$9,81 \times 2,5 = 24,5$	$9,81 \times 10,06 = 98,7$



$$\bar{x} = \frac{\sum x_i A_i}{\sum A_i} = \frac{233,5}{48,4} = 4,82$$

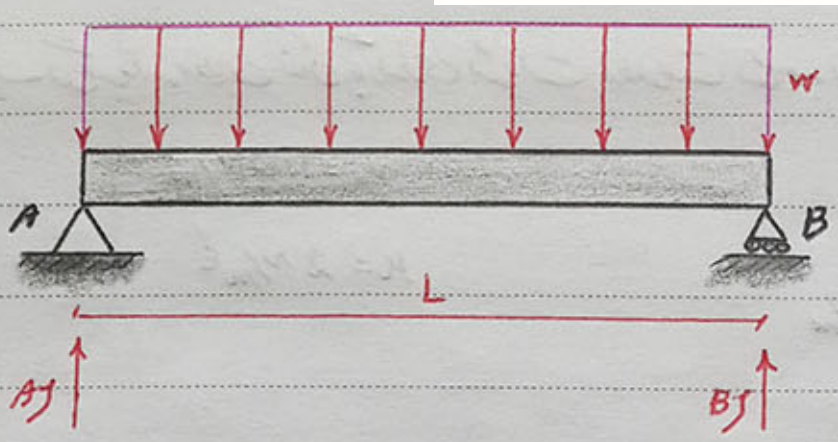
$$\bar{y} = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i} = \frac{123,9}{48,4} = 2,55$$

سطح	A_i	x_i	y_i	$A_i x_i$	$A_i y_i$
①	$10 \times 6 = 60$	5	3	$5 \times 60 = 300$	$3 \times 60 = 180$
②	$3 \times 3/2 = 4,5$	1	5	$1 \times 4,5 = -4,5$	$-22,5$
③	$\frac{\pi r^2}{4} = 7,1$	8,73	4,73	$8,73 \times 7,1 = -62$	$4,73 \times 7,1 = -33,6$

PAPCO

www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

بارهای گسترده



$\xrightarrow{+}\sum F_x = 0$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad A_y + B_y - wL = 0$

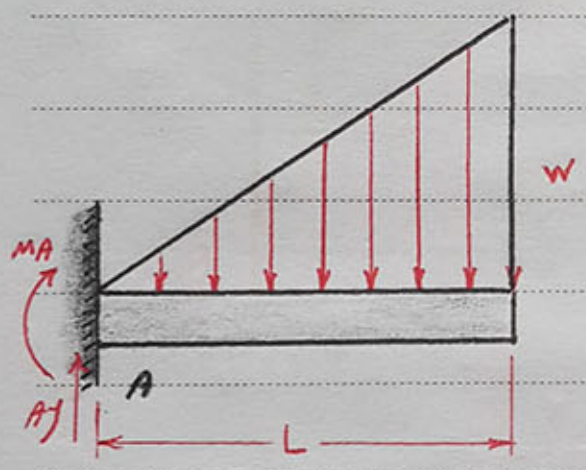
$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \quad B_y L - wL\frac{L}{2} = 0 \quad \Rightarrow B_y = wL/2$

$A_y + B_y - wL = 0 \quad \Rightarrow A_y = wL/2$

نکته : هنگر یک بار گسترده نسبت به یک نقطه (A) برابر است با مساحت بار گسترده ضرب در فاصله مرکز سطح بار گسترده نسبت به نقطه (A)

نکته : بارگذاری به صورت (wL) یک نیروی معادل تنها فقط برای بارگذاری تکیه گاهی مناسب است ولی در مورد نیروهای داخلی روش مناسبی نیست.

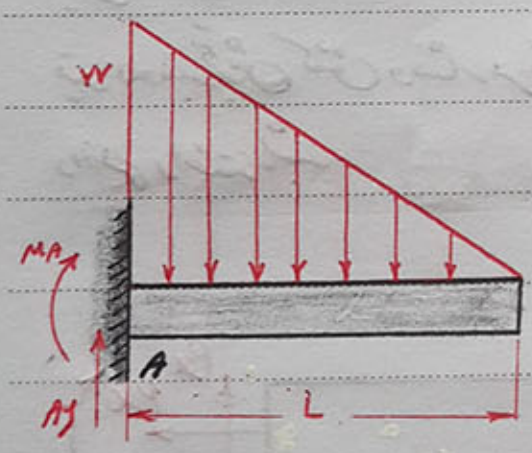
① اشکالی که مساحت آنها را داریم:



$\xrightarrow{+}\sum F_x = 0$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad A_y - \frac{wL}{2} = 0 \quad \Rightarrow A_y = \frac{wL}{2}$

$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \quad -M_A - \frac{wL}{2}\left(\frac{2L}{3}\right) = 0 \quad \Rightarrow M_A = -\frac{wL^2}{3}$

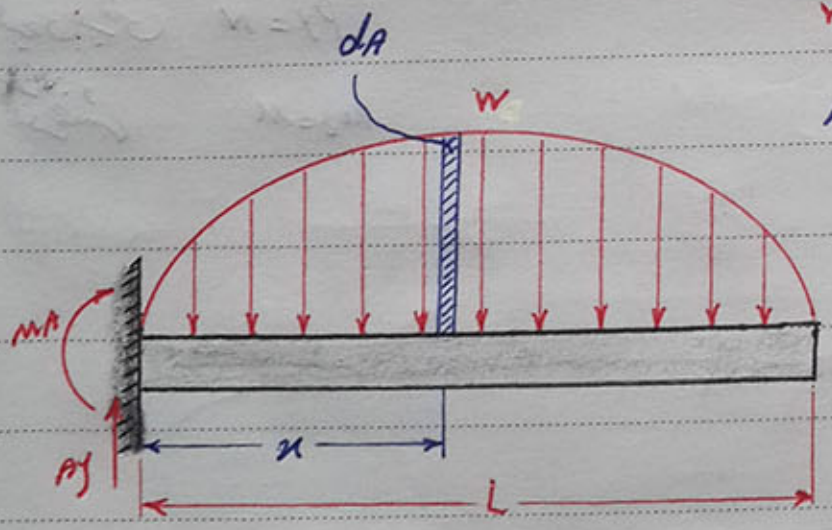


$\xrightarrow{+}\sum F_x = 0$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad A_y - \frac{wL}{2} = 0 \quad \Rightarrow A_y = \frac{wL}{2}$

$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \quad -M_A - \frac{wL}{2}\left(\frac{L}{3}\right) = 0 \quad \Rightarrow M_A = -\frac{wL^2}{6}$

② اشکالی که باید مساحت بارگذاری را محاسبه کرد:



$w = w_0 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$

$A = \int dA = \int w\,dx$

$\Rightarrow \int_0^L w_0 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) = -\frac{w_0 L}{\pi}\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\Big|_0^L$

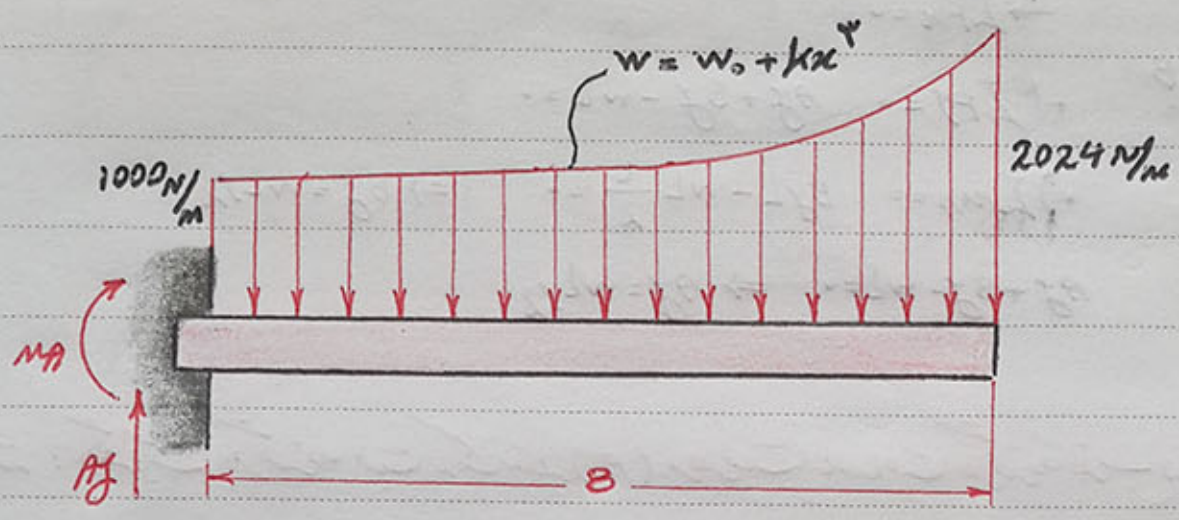
$\Rightarrow -\left(-\frac{w_0 L}{\pi} - \frac{w_0 L}{\pi}\right) = \frac{2w_0 L}{\pi}$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad A_y - \frac{2w_0 L}{\pi} = 0 \quad \Rightarrow A_y = \frac{2w_0 L}{\pi}$

$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \quad -M_A - \frac{2w_0 L}{\pi}\frac{L}{2} = 0 \quad \Rightarrow M_A = -\frac{w_0 L^2}{\pi}$

www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

- تیر یک سر گیردار مطابق شکل بارگذاری شده است مطلوبست محاسبه نیروی تکیه گاهی A :



مقدار بارگسترده : $A = \int dA = \int w\,dx \Rightarrow A = \int_0^8 1000 + 2x^3\,dx = 1000x + \frac{2x^4}{4}\Big|_0^8 = 10048\ N$

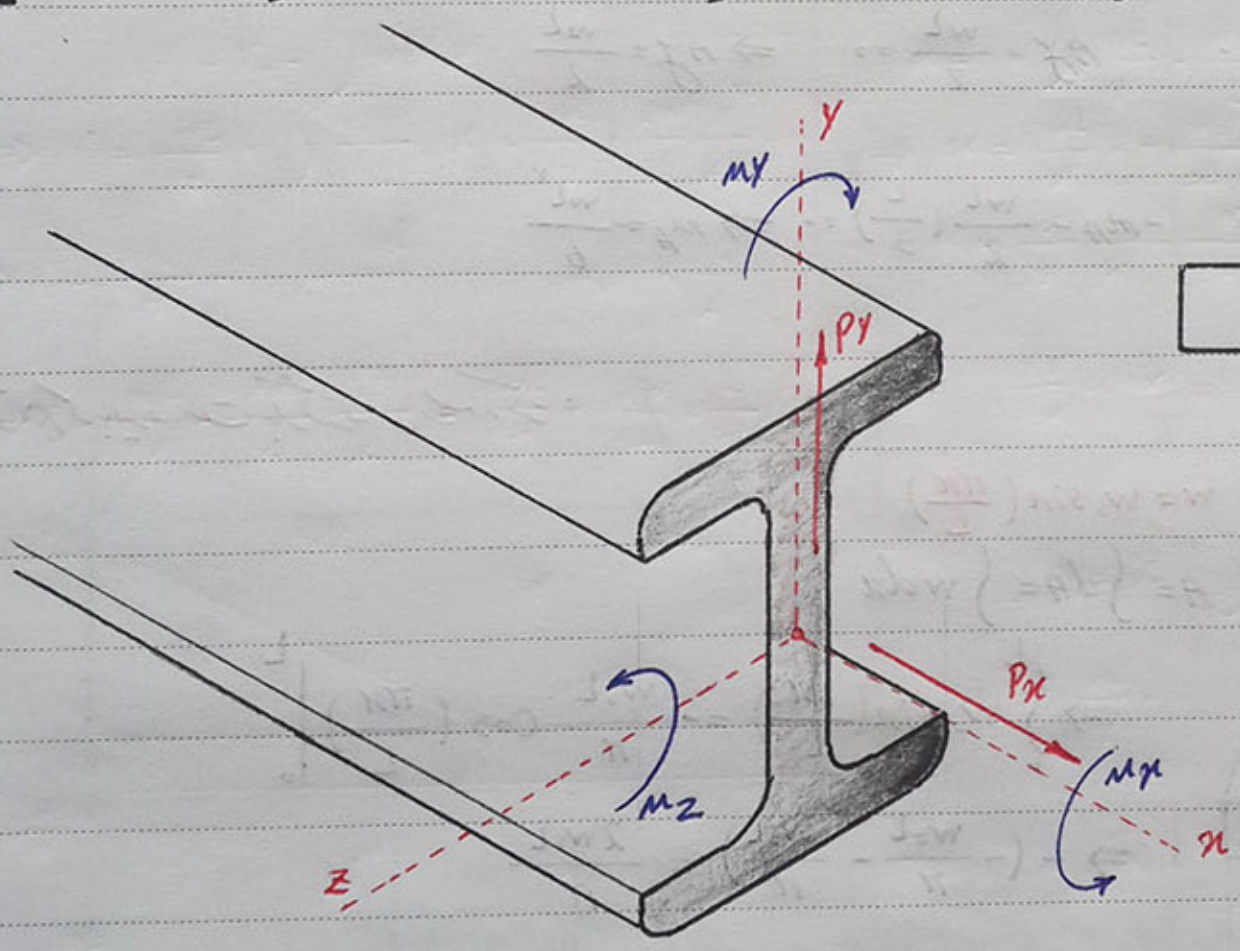
$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad A_y - 10048 = 0 \Rightarrow A_y = 10048\ N$

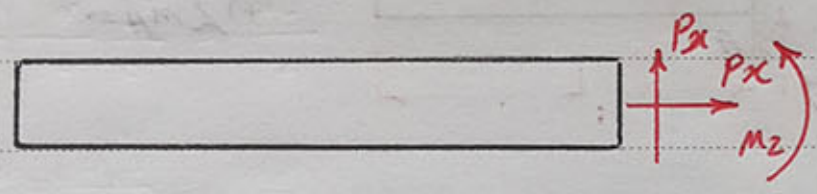
$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \quad -M_A - 10048\,(4,4891) = 0 \Rightarrow M_A = -45106,47\ N$

$$\bar{x} = \frac{\int x\,dA}{\int dA} = \frac{\int x\,w\,dx}{\int w\,dx} = \frac{\int_0^8 x\,(1000+2x^3)}{\int_0^8 (1000+2x^3)} = 4,4891$$

تیرها و تیر دخلی

تیر علاوه بر تحمل کشش و فشار می‌تواند در برابر برش، خمش و پیچش نیز مقاومت کند بنابراین تیرها نسبت به خرپاها در کاربردهای عملی در موقعیت ج نیرو دلخواه دلسته باشند:

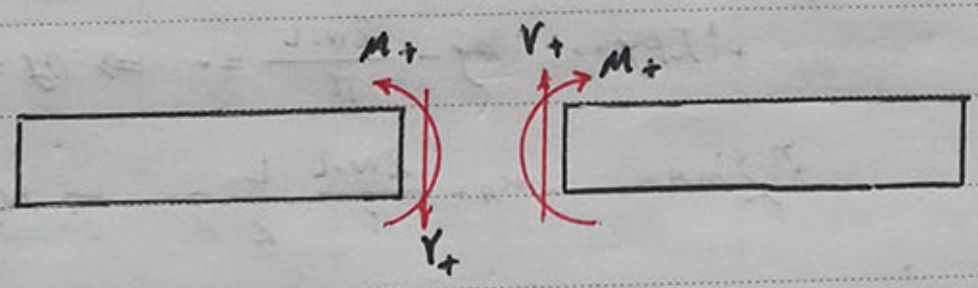




نیروی برشی $P_y = N$

لنگر خمشی $M_z = M$

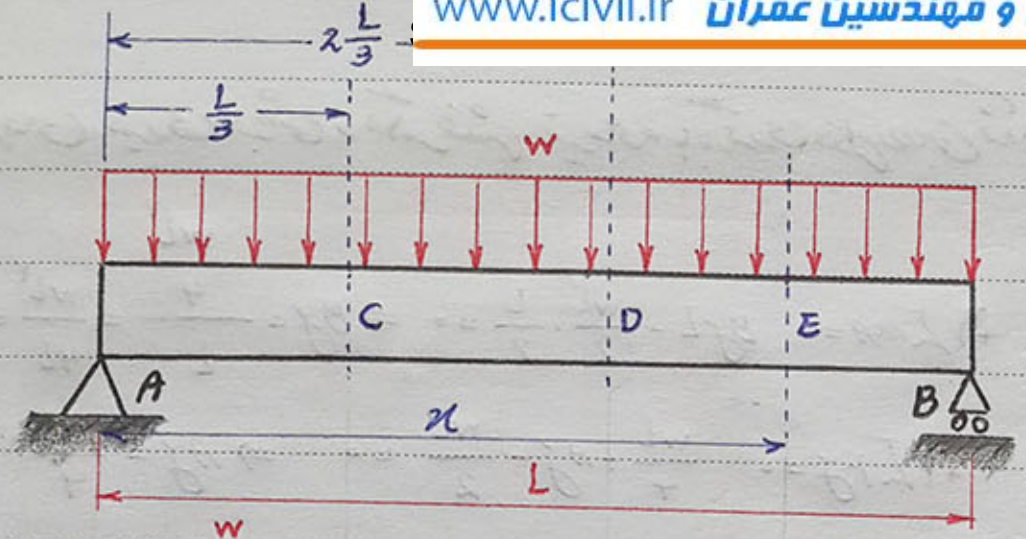
یک تیر در این حالت دارای ۷ و M



P4PCO

www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

- مطلوب است توزیع نیروی برشی و لنگر خمشی در تیر ساده شکل زیر:

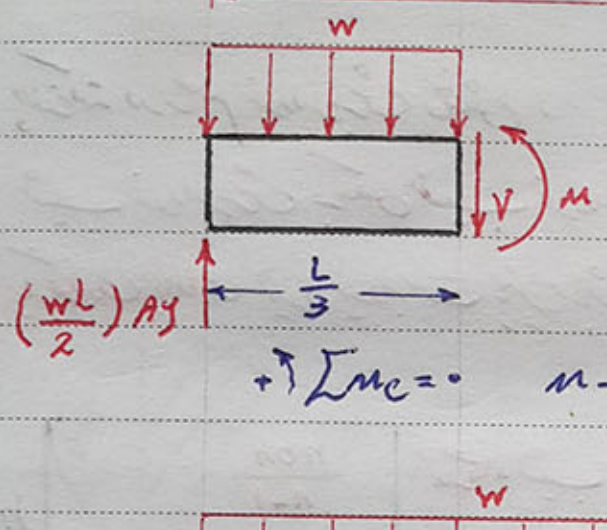


$\pm\rightarrow \sum F_x = 0$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad A_y + B_y - wL = 0$

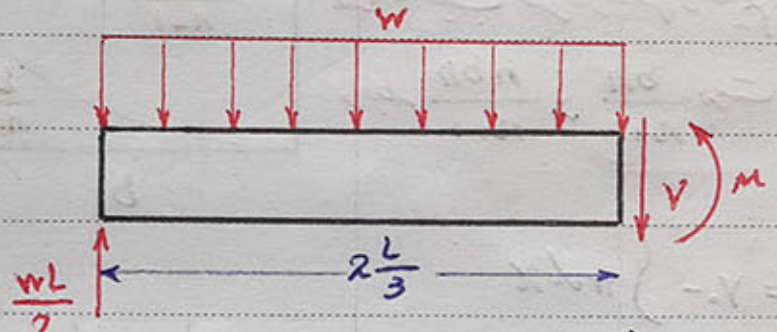
$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \quad B_y L - wL\frac{L}{2} \Rightarrow B_y = \frac{wL}{2}$

$A_y = \frac{wL}{2}$



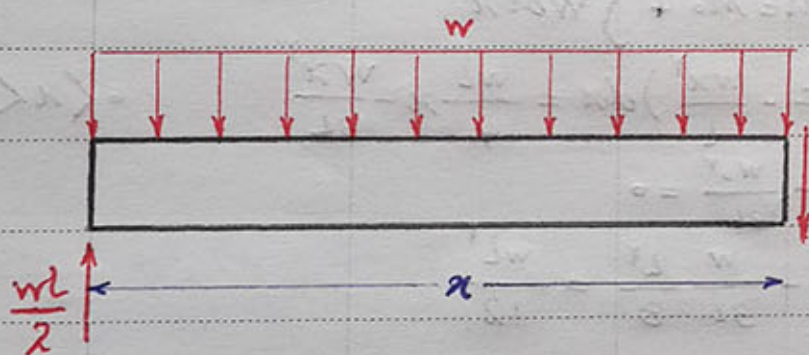
$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad A_y - V - w\frac{L}{3} = 0 \Rightarrow \frac{wL}{2} - \frac{wL}{3} = V \Rightarrow V = \frac{wL}{6}$

$+\circlearrowleft \sum M_C = 0 \quad M - \frac{wL}{2}\times\frac{L}{3} + \frac{wL}{3}\times\frac{L}{6} = 0 \Rightarrow M - \frac{wL^2}{6} + \frac{wL^2}{18} = 0 \Rightarrow M = \frac{3wL^2 - wL^2}{18} = \frac{wL^2}{9}$



$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad A_y - V - w(2\frac{L}{3}) = 0 \Rightarrow \frac{wL}{2} - \frac{2wL}{3} = V \Rightarrow V = -\frac{wL}{6}$

$+\circlearrowleft \sum M_D = 0 \quad M - \frac{wL}{2}\times\frac{2L}{3} + \frac{2wL}{3}\times\frac{L}{3} = 0 \Rightarrow M - \frac{2wL^2}{6} + \frac{2wL^2}{9} = 0 \Rightarrow M = \frac{-12wL^2 + 8wL^2}{36} = -\frac{wL^2}{9}$



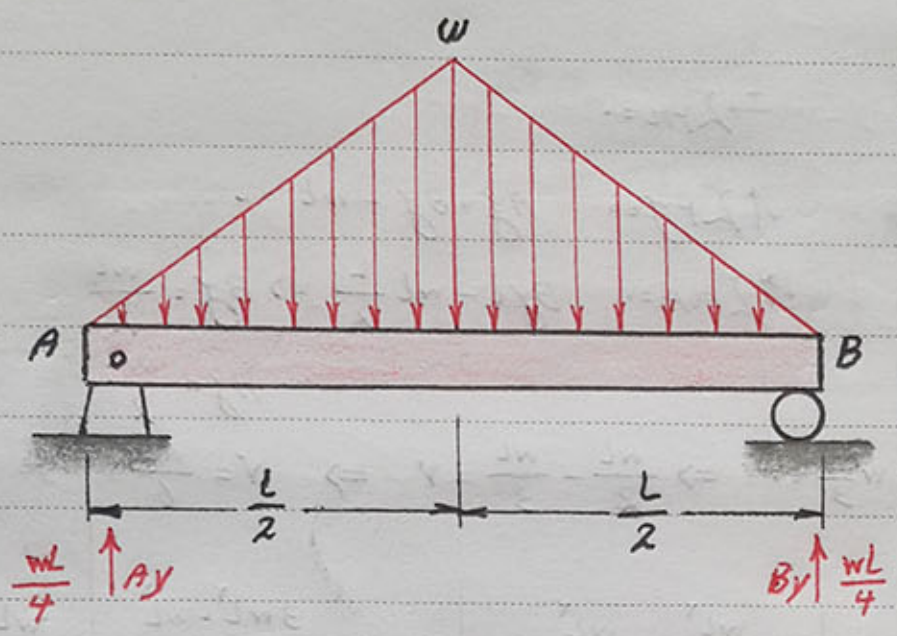
$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad A_y - wx - V = 0 \Rightarrow \frac{wL}{2} - wx - V = 0 \Rightarrow V = \frac{wL}{2} - wx$

$+\circlearrowleft \sum M_E = 0 \quad M - \frac{wL}{2}x - wx\frac{x}{2} = 0 \Rightarrow M - \frac{wLx}{2} + \frac{wx^2}{2} = 0 \Rightarrow M = \frac{wLx}{2} - \frac{wx^2}{2}$

PAPCO

www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

- نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی تیر ساده با بارگذاری خطی مطابق شکل رسم کنید:



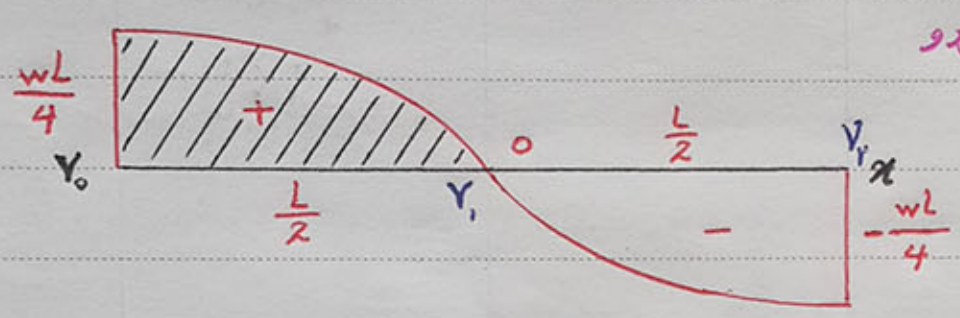
$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \quad B_y L - \frac{wL}{2}\cdot\frac{L}{2} = 0 \Rightarrow B_y = \frac{\frac{wL^2}{4}}{L} = \frac{wL^2}{4L} = \frac{wL}{4}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad \frac{wL}{4} + A_y - \frac{wL}{2} = 0 \Rightarrow A_y = \frac{wL}{4}$$

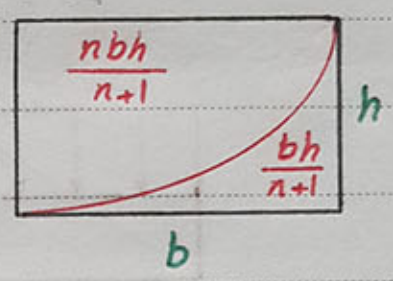
چند نکته در رسم نمودار برش و خمش:

شیب نمودار برش برعکس شیب نمودار بارگذاری می باشد.

بارگذاری بالای تیر رو به سمت پایین باشد منفی خمش منفی است.



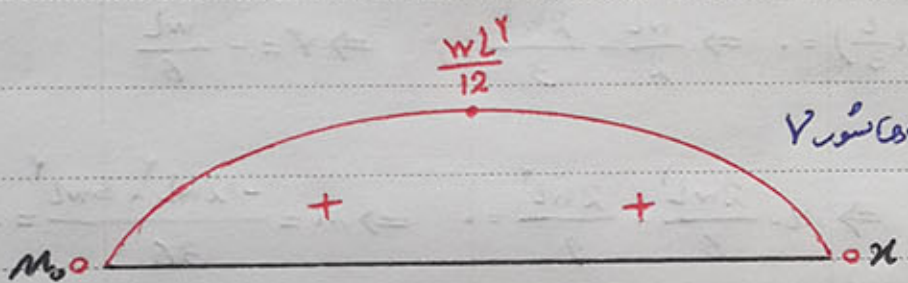
هرگاه شیب صفر در شکل داشتیم مساحت آن از دو رابطه $\frac{bh}{n+1}$ و $\frac{nbh}{n+1}$ بدست می آید.



$$V = V_0 - \int w\,dx$$

$$V_1 = \frac{wL}{4} - \frac{wL}{4} = 0 \quad , \quad V_2 = 0 - \frac{wL}{4} = -\frac{wL}{4}$$

مساحت قسمت های شود V $\quad \frac{wL}{4}\times\frac{L}{2}\times\frac{2}{3} = \frac{2wL^2}{24} = \frac{wL^2}{12}$



$$M = M_0 + \int V\,dx$$

$$V_1 = V_0 - \int w\,dx$$

$$\Rightarrow V_1 = \frac{wL}{4} - \int \frac{2w}{L}\cdot x = \frac{wL}{4} - \frac{2w}{L}\frac{x^2}{2}$$

$$\Rightarrow V_1 = \frac{wL}{4} - 0 = \frac{wL}{4} \qquad 0 < x < \frac{L}{2}$$

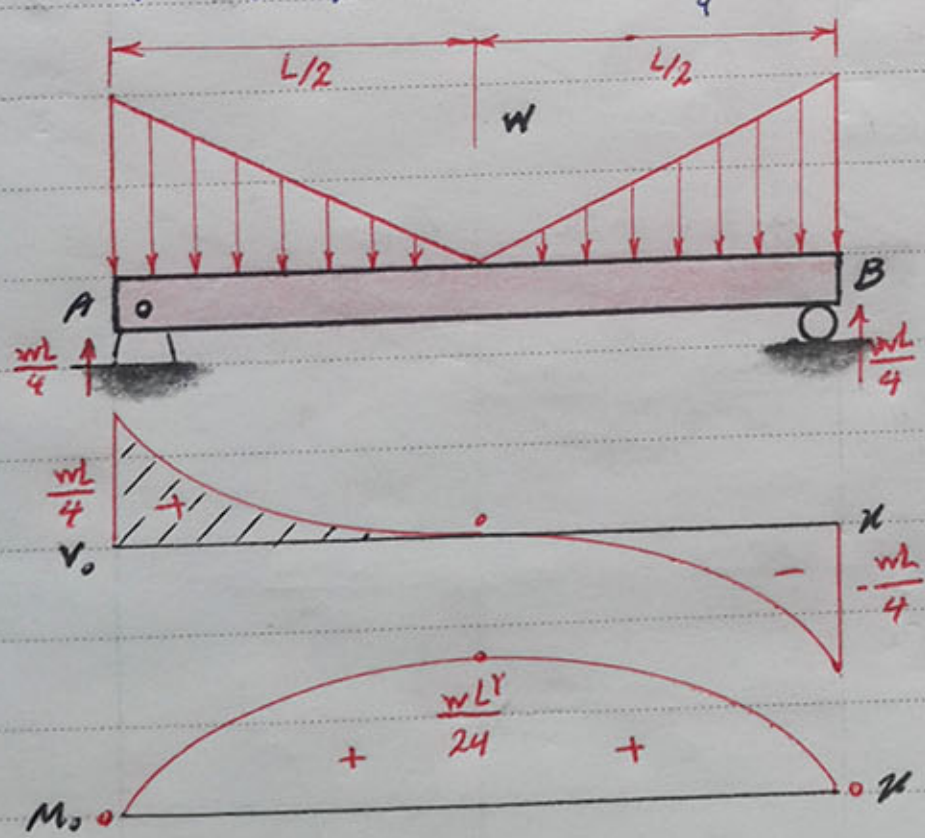
$$\Rightarrow V_1 = \frac{wL}{4} - \frac{2w}{L}\frac{\frac{L^2}{4}}{2} = \frac{wL}{4} - \frac{2w}{L}\times\frac{L^2}{8} = 0$$

$$M = 0 + \int\left(\frac{wL}{4} - \frac{wx^2}{L}\right)dx = \frac{wL}{4}x - \frac{wx^3}{3L} \qquad 0 < x < \frac{L}{2}$$

$$\Rightarrow M = \frac{wL}{4}\cdot 0 - \frac{w\cdot 0^3}{3L} = 0$$

$$M = \frac{w}{4}\frac{L}{2} - \frac{w}{3L}\frac{L^3}{8} = \frac{wL^2}{12}$$

$$\frac{dV}{dx} = -w \Rightarrow \frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{dw}{dx}$$



$$V = V_0 - \int w\,dx$$

$$\Rightarrow \frac{wL}{4} - 0 = \frac{wL}{4} \quad , \quad \frac{wL}{4} - \frac{wL}{4} = 0 \qquad 0 < x < \frac{L}{2}$$

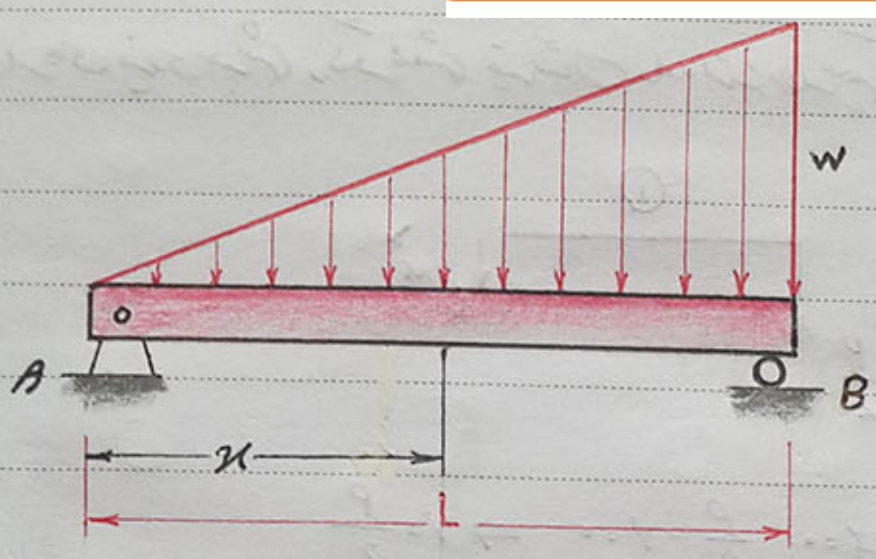
$$0 - \frac{wL}{4} = -\frac{wL}{4}$$

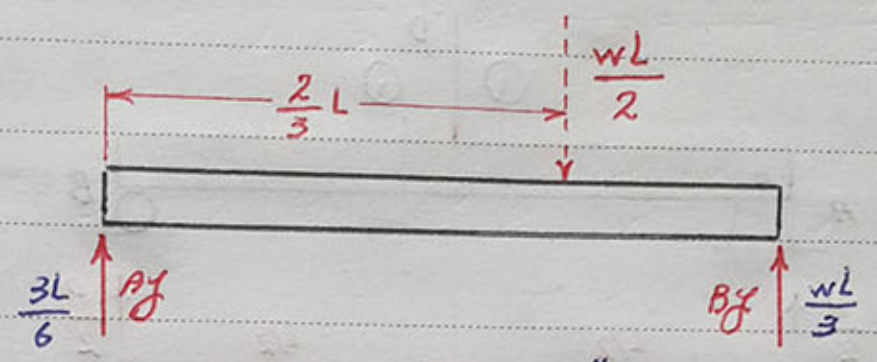
$$M = M_0 + \int V\,dx$$

مساحت قسمت های $M \Rightarrow \frac{wL}{4}\times\frac{L}{2}\times\frac{1}{3} = \frac{wL^2}{24}$

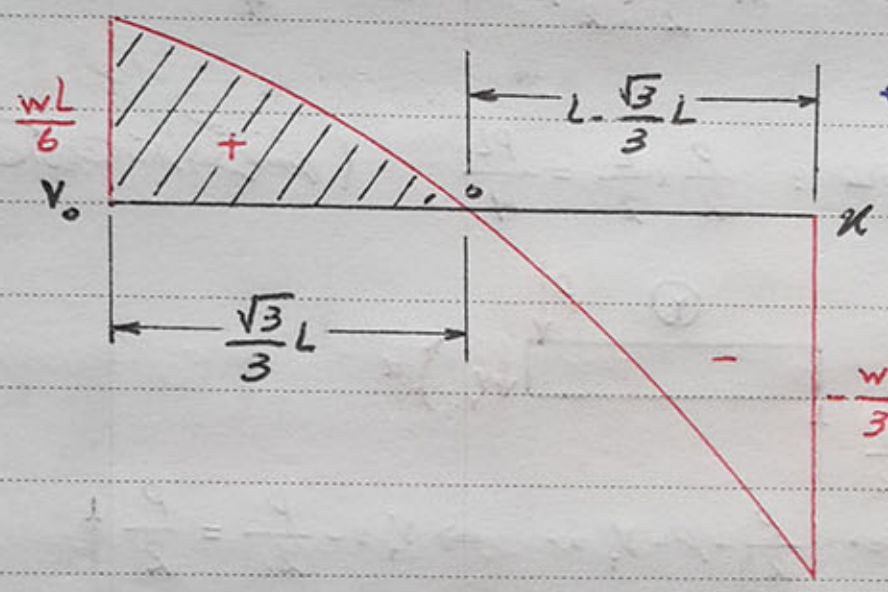
P4PCO

www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

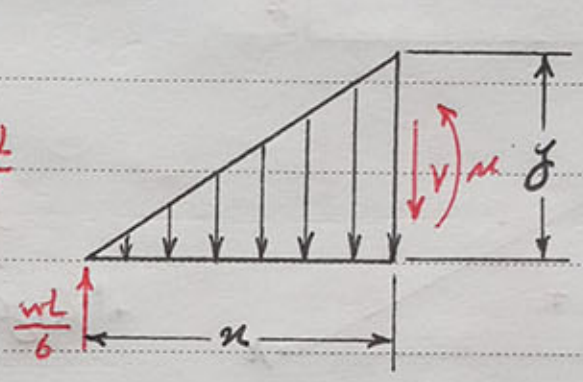




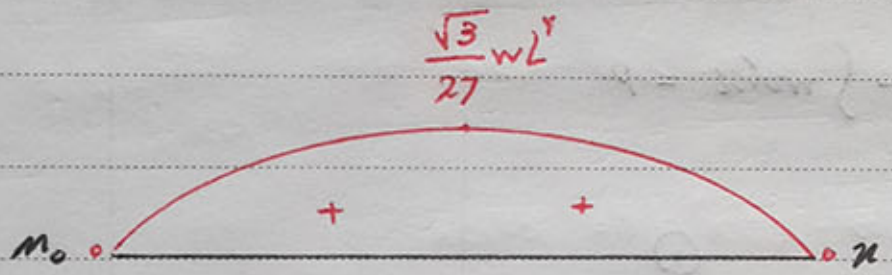
$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \quad B_y L - \frac{wL}{2} \times \frac{2L}{3} \Rightarrow B_y = \frac{\frac{2wL^2}{6}}{L} = \frac{2wL^2}{6L} = \frac{wL}{3}$$



$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad \frac{wL}{3} - \frac{wL}{2} + A_y = 0 \Rightarrow A_y = \frac{-2wL+3wL}{6} = \frac{wL}{6}$$



$$\frac{w}{L} = \frac{y}{x} \Rightarrow y = \frac{wx}{L}$$



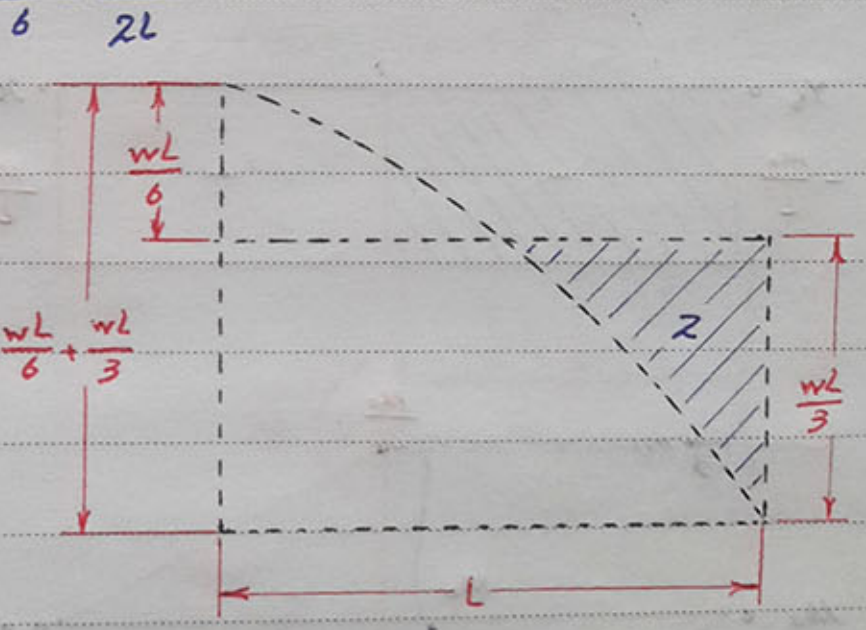
$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad \frac{wL}{6} - \left(\frac{wx}{L} \cdot \frac{x}{2}\right) - V = 0 \Rightarrow \frac{wL}{6} - \frac{wx^2}{2L} - V = 0$$

$$\frac{wL}{6} = \frac{wx^2}{2L} \Rightarrow \frac{L}{6} = \frac{x^2}{2L} \Rightarrow x^2 = \frac{2L^2}{6} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{L^2}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}L} = \frac{\sqrt{3}L}{3}$$

مساحت سهمی: $\frac{2}{3} \times \frac{wL}{6} \times \frac{\sqrt{3}L}{3} = \frac{2\sqrt{3}wL^2}{54} = \frac{\sqrt{3}}{27}wL^2$

$$V = V_0 - \int w\,dx \Rightarrow V = \frac{wL}{6} - \int \frac{wx}{L}\,dx \Rightarrow V = \frac{wL}{6} - \frac{wx^2}{2L}$$

$$\frac{wL}{3} + \frac{wL}{6} = \frac{wL}{2} \Rightarrow \frac{2}{3} \times \frac{wL}{2} \cdot L = \frac{2wL^2}{6} = \frac{wL^2}{3}$$



مساحت مثلث + مساحت سهمی $-\frac{wL^2}{3}$ (مساحت بیت کلی) = 2 مساحت

$$\frac{\sqrt{3}}{27}wL^2 + \left(\frac{wL}{3} \cdot L\right) - \frac{wL^2}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{27}wL^2$$

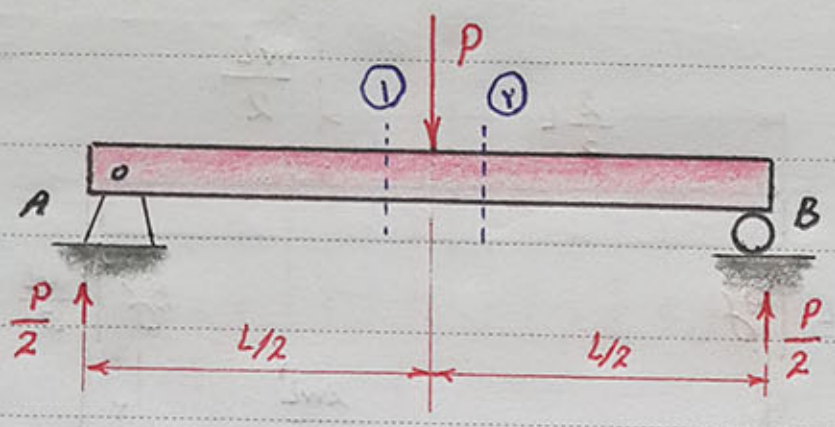
↓ L

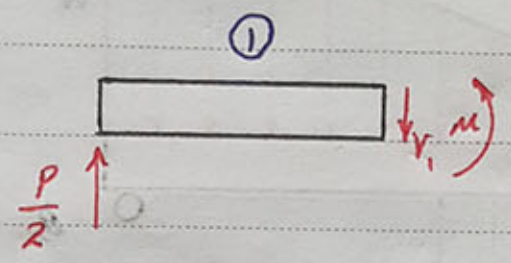
$$M = M_0 + \int V\,dx$$

$$M = \frac{\sqrt{3}}{27}wL^2 + \int \frac{wL}{6} - wx^2/2L \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{27}wL^2 + \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}L}^{L} \frac{wL}{6} - \frac{wx^2}{2L} = -\frac{\sqrt{3}}{27}wL^2$$

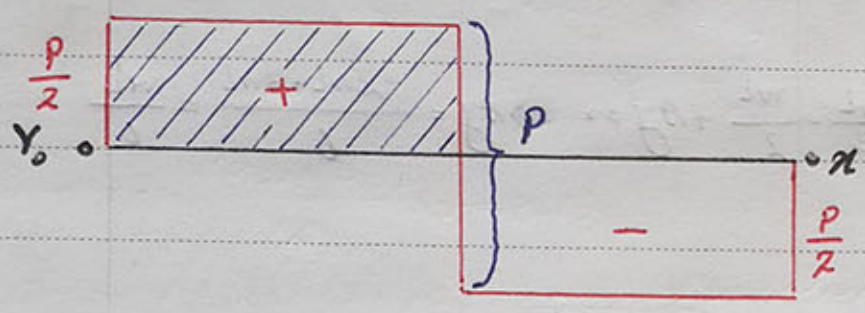
www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

- نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی تیرهای زیر را رسم کنید :





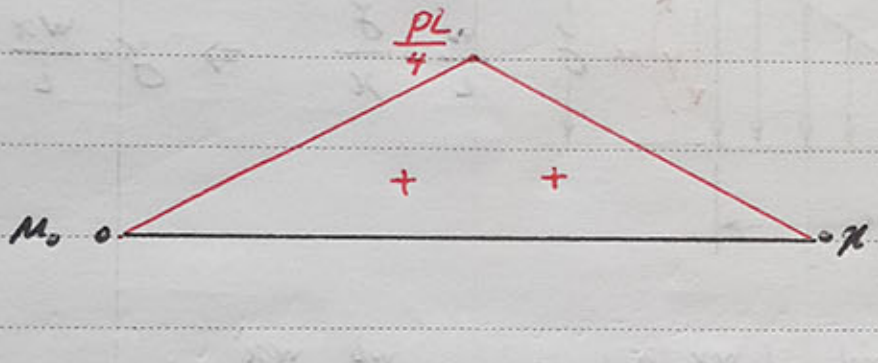
$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad \frac{P}{2} - V = 0 \Rightarrow V = \frac{P}{2}$

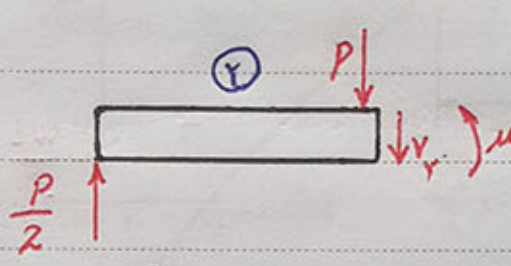


$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \quad M - \frac{P}{2}\left(\frac{L}{2}\right) = 0 \Rightarrow M = \frac{PL}{4}$

یا

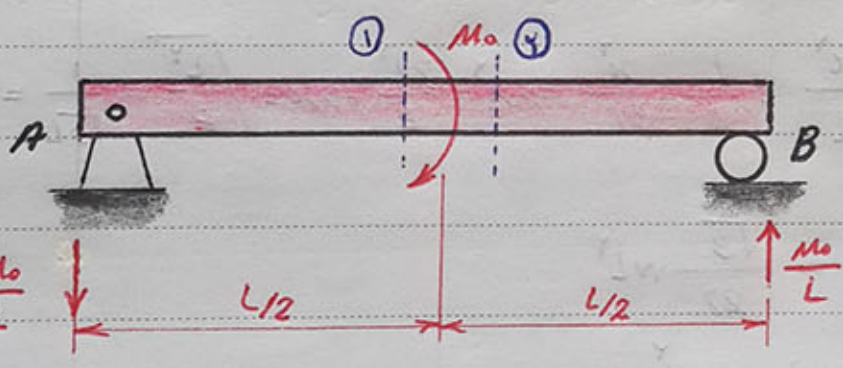
(نمودار / بدست آوردن نقطه لنگر خمشی) مساحت سطح هاشور : $\frac{P}{2} \times \frac{L}{2} = \frac{PL}{4}$

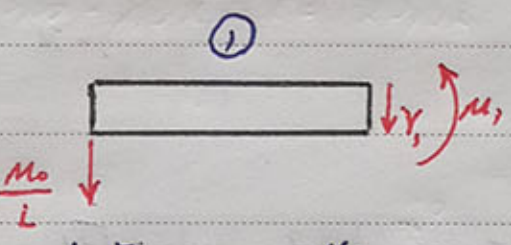




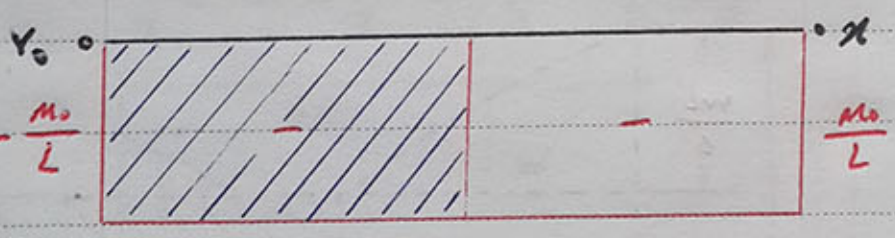
$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad \frac{P}{2} - P - V_2 = 0 \Rightarrow V_2 = -\frac{P}{2} = \frac{P}{2}\uparrow$

$V = V_0 - \int w\,dx = P$



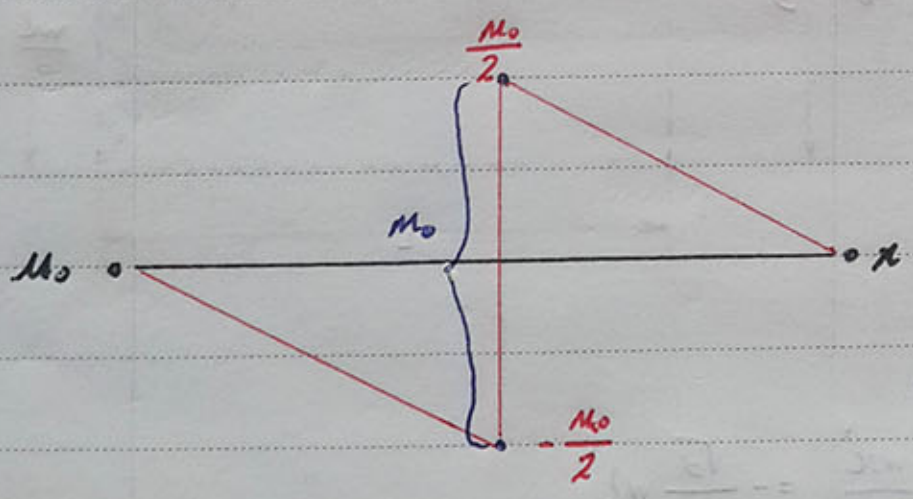


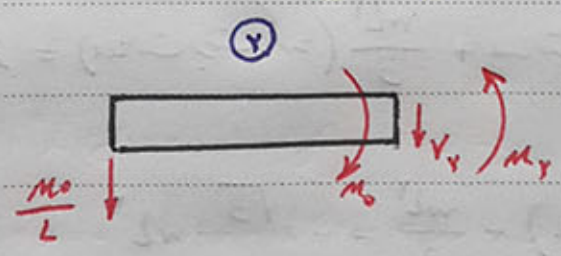
$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad -\frac{M_0}{L} - V_1 = 0 \Rightarrow V_1 = -\frac{M_0}{L}$



$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \quad M + \frac{M_0}{L} \times \frac{L}{2} = 0 \Rightarrow M = \frac{-M_0}{2}$

مساحت سطح هاشور : $-\frac{M_0}{L}\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{M_0}{2}$





$\uparrow \sum F_y = 0 \quad -\frac{M_0}{L} - V_1 = 0 \Rightarrow V_1 = -\frac{M_0}{L}$

$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \quad M_1 - M + \frac{M_0}{L}\left(\frac{L}{2}\right) = 0 \Rightarrow M_1 = M_0 - \frac{M_0}{L} = \frac{M_0}{L}$

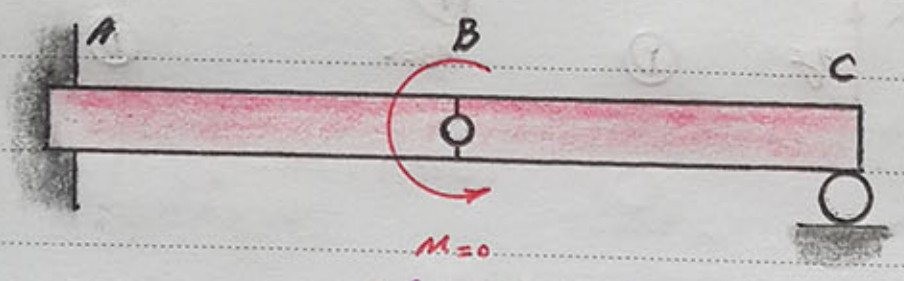
PAPCO

www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

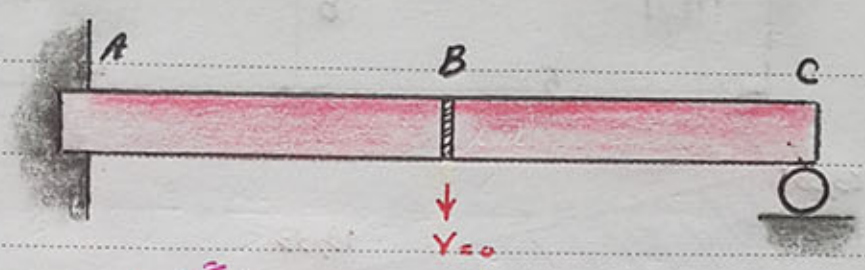
تیرها با معادلات شرطی

می دانیم که در استاتیک تیری که بیش از ۳ مجهول داشته باشد ما نمی توانیم آن را تحلیل کنیم و یا به عبارت دیگر تیر نامعین می باشد برای اینکه

این حالت در استاتیک به صورت قابل تحلیل برگردد مانند معادله ای برای حل آن اضافه می کنیم:



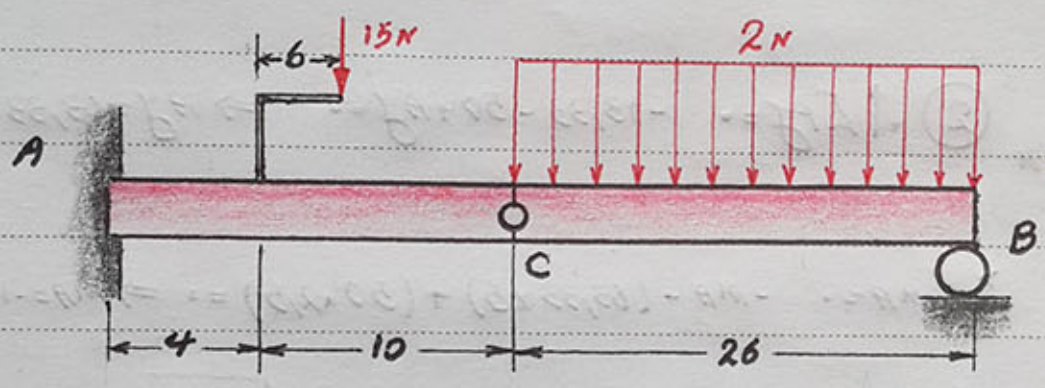
مفصل داخلی خمشی

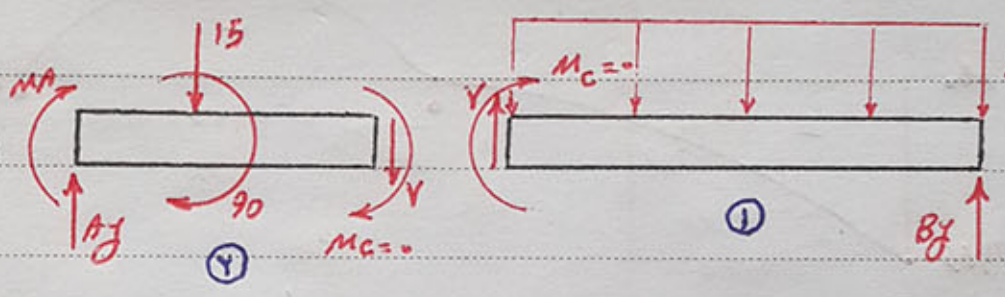


مفصل داخلی برشی - مفصل نوزنه گیردار

علاوه بر ۳ معادله تعادل برای تحلیل تیر یک معادله شرطی هم داریم و می دانیم مقدار آن معادله شرطی برابر صفر است ($M=0$ یا $V=0$)

- نمودارهای نیروی برشی و خمشی تیر زیر را رسم می کنیم:

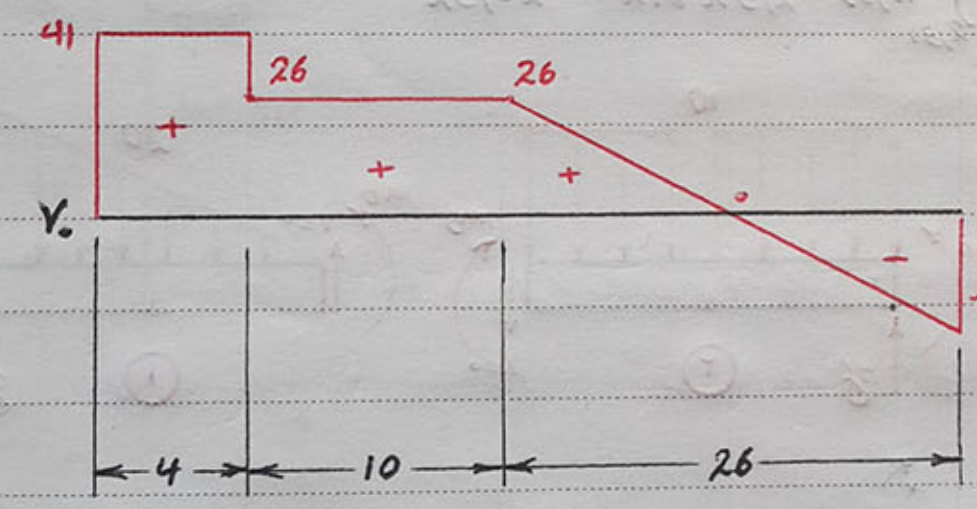




①

$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 \quad -V \times 26 + 2 \times 26 \left(\frac{26}{2}\right) = 0 \Rightarrow V = 26\ N$

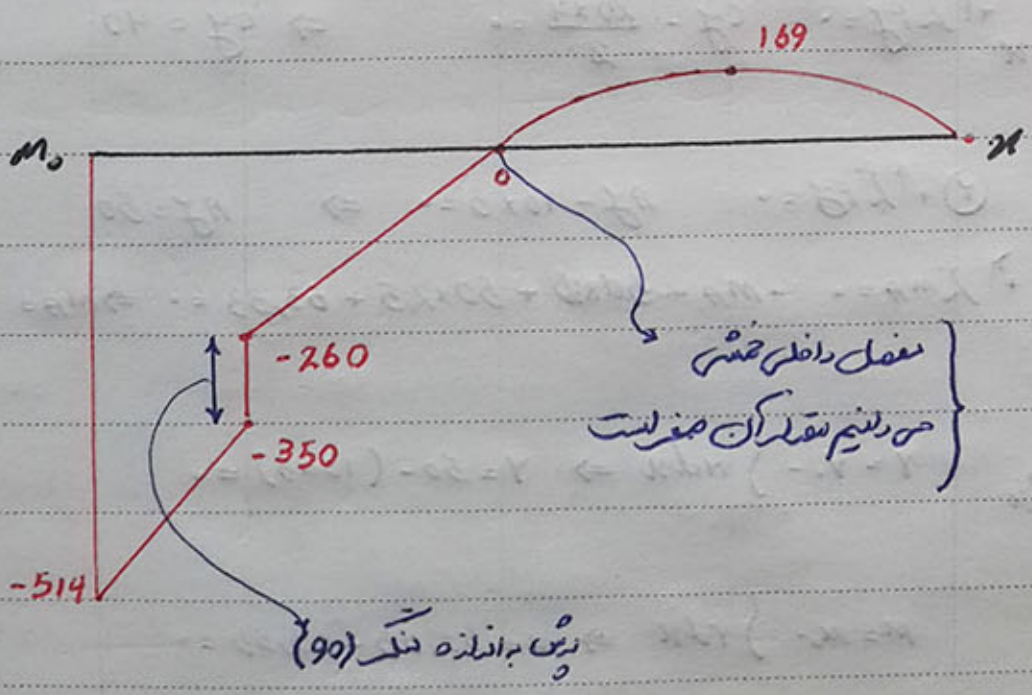
$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad 26 + B_y - 52 = 0 \Rightarrow B_y = 26\ N$

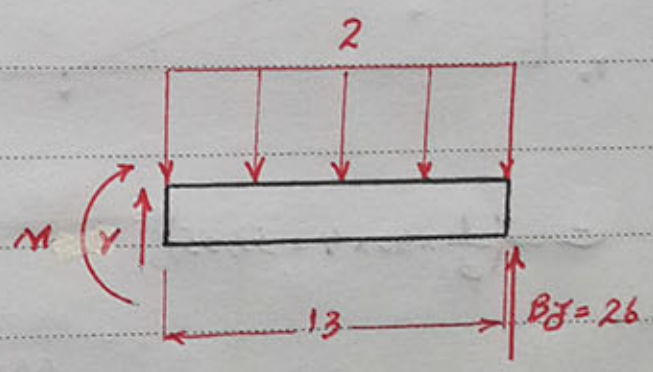


②

$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad -26 - 15 + A_y = 0 \Rightarrow A_y = 41\ N$

$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \quad -M_A - (15 \times 4) - 90 - (26 \times 14) = 0 \Rightarrow M_A = -514$



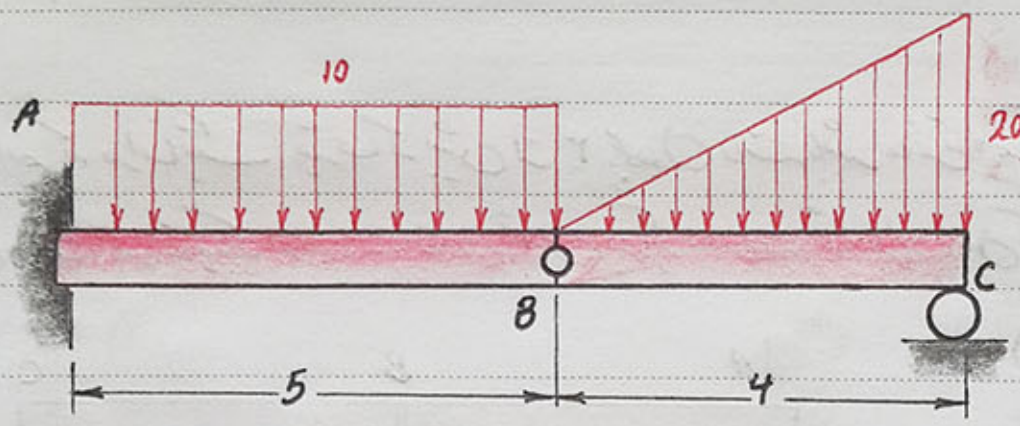


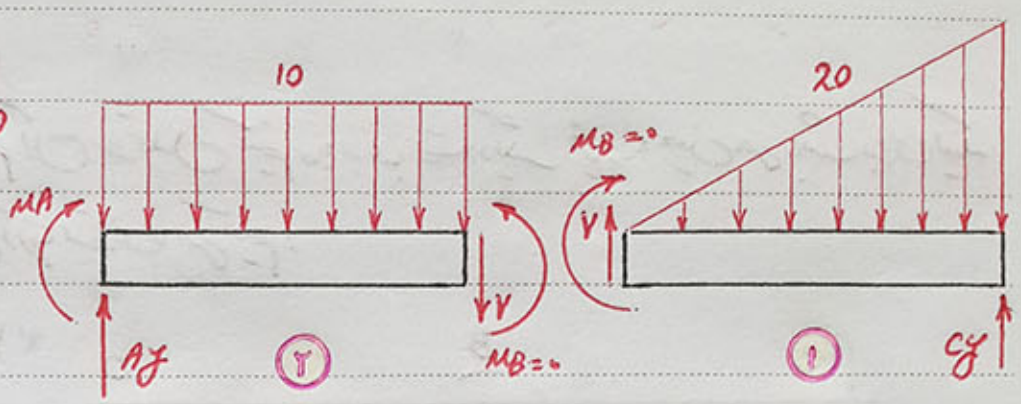
$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad 26 - (2 \times 13) + V = 0 \Rightarrow V = 0$

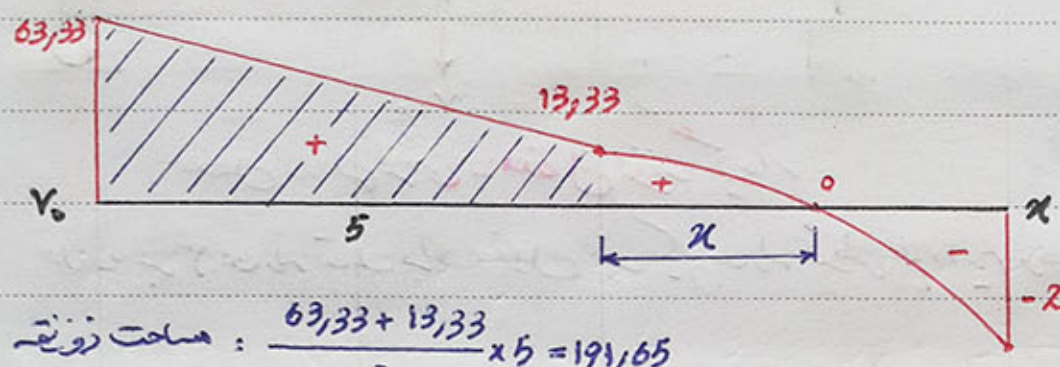
یا

$V = V_0 - \int w\,dx \Rightarrow V = 26 - 26 = 0$

www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران



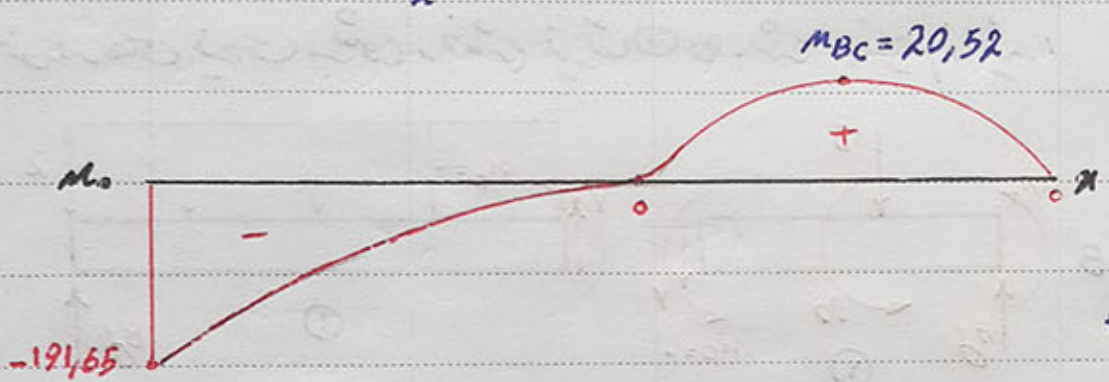




مساحت ذوزنقه : $\frac{63,33+13,33}{2}\times 5 = 191,65$

① $+\circlearrowleft \sum M_C = 0 \quad \left(\frac{20\times 4}{2}\times\frac{4}{3}\right) - V(4) = 0 \Rightarrow V = 13,33N$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad 13,33 + C_y - \left(\frac{20\times 4}{2}\right) = 0 \Rightarrow C_y = 26,67N$

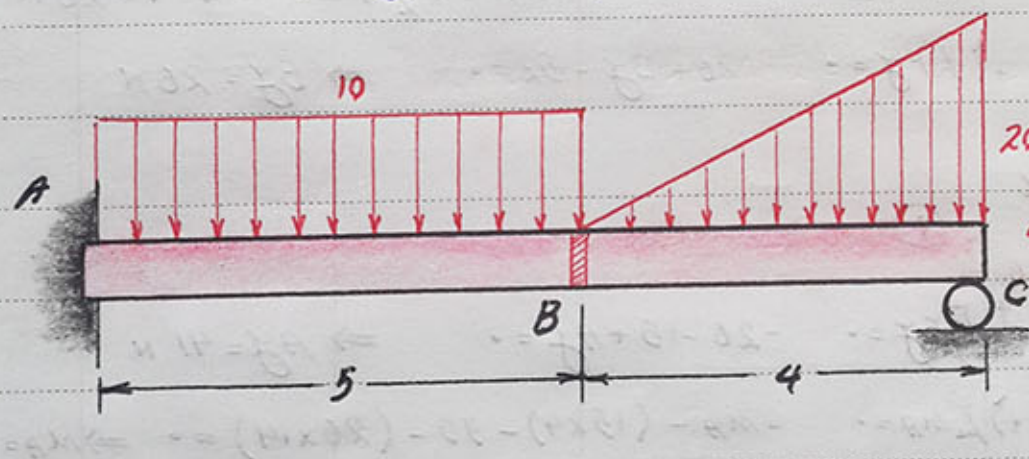


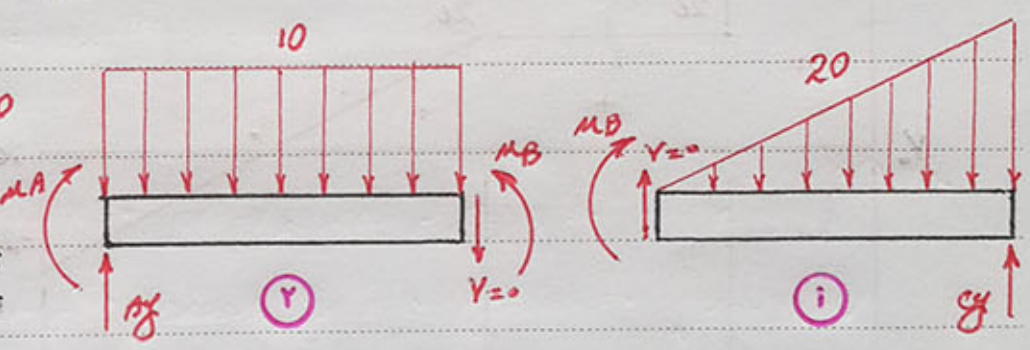
② $+\uparrow \sum F_y = 0 \quad -13,33 - 50 + A_y = 0 \Rightarrow A_y = 63,33N$

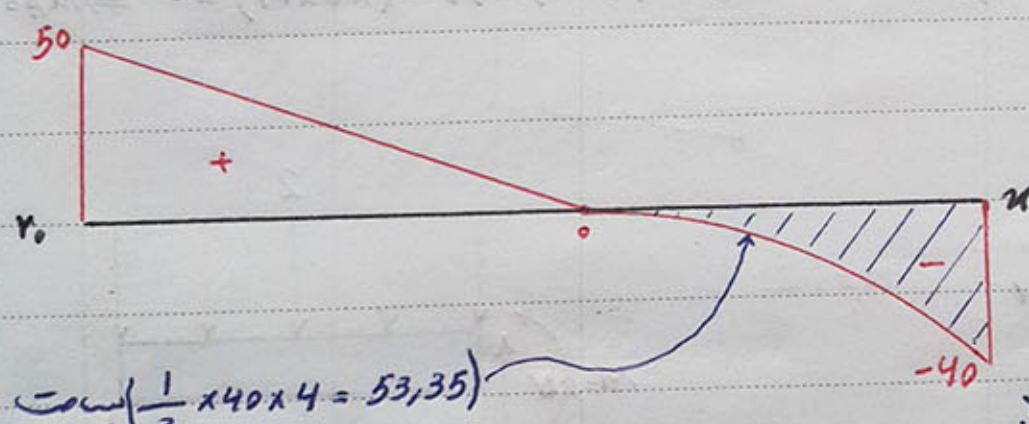
$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \quad -M_A - (63,33\times 5) + (50\times 2,5) = 0 \Rightarrow M_A = -191,65$

$V = V_0 - \int w\,dx \Rightarrow V = 13,33 - \int_0^x 5x\,dx = 13,33 - 5x^2/2 = 0 \Rightarrow V = 13,33 - 2,5x^2 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{13,33}{2,5}} = 2,31$

M_{BC} برای بدست آوردن نقطه : $\frac{2}{3}\times 13,33\times 2,31 = 20,52$ ، $5 = \int_{2,31}^{4} 13,33 - 2,5x^2\,dx = -20,52$







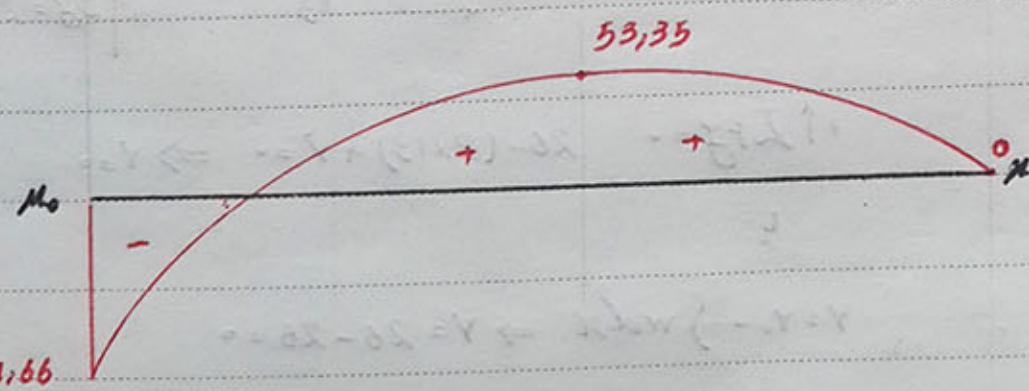
$+\circlearrowleft$

① $\sum M_C = 0 \quad -M_B + \frac{20\times 4}{2}\left(\frac{4}{3}\right) = 0 \Rightarrow M_B = 53,33$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad C_y - \frac{20\times 4}{2} = 0 \Rightarrow C_y = 40$

② $+\uparrow \sum F_y = 0 \quad A_y - 10\times 5 = 0 \Rightarrow A_y = 50$

$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \quad -M_A - 50\times 2,5 + 53,33 = 0 \Rightarrow M_A =$



$V = V_0 - \int w\,dx \Rightarrow V = 50 - (10x5) = 0$

$M = M_0 - \int V\,dx \Rightarrow M = 53,33 - 53,33 = 0$

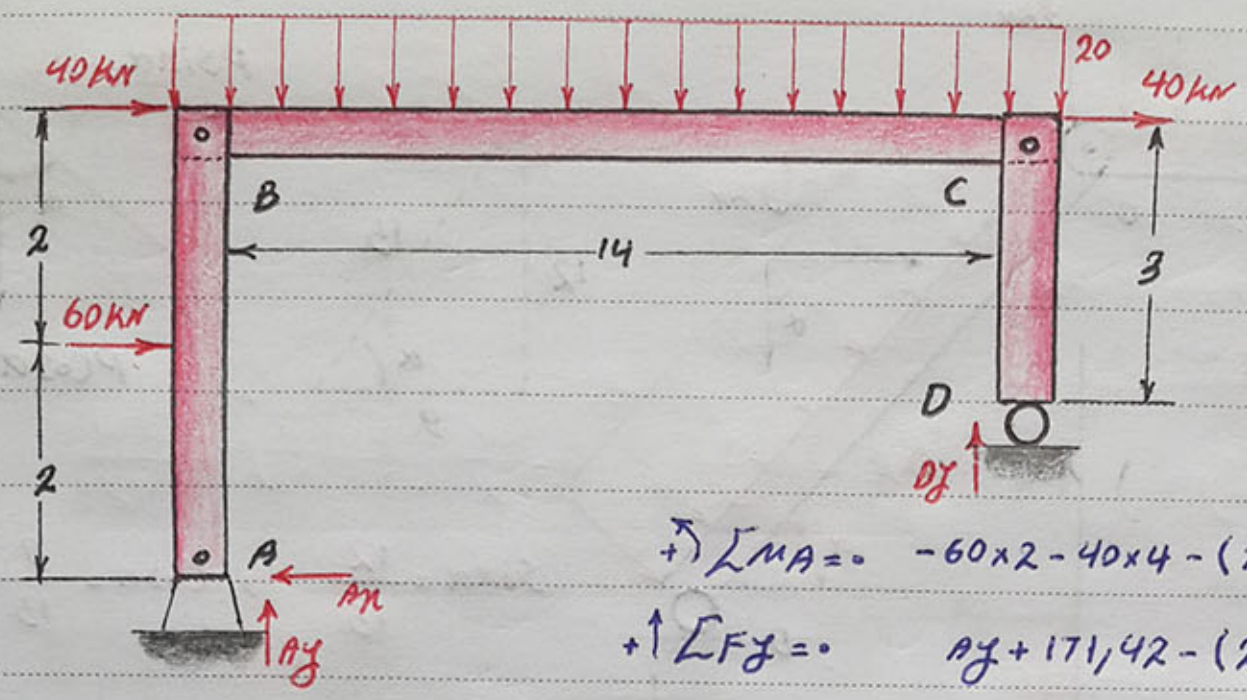
PAPCO

www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

نمودار برشی و خمشی در قابها

« در قابها معمولاً نیروی محوری هم وجود دارد »

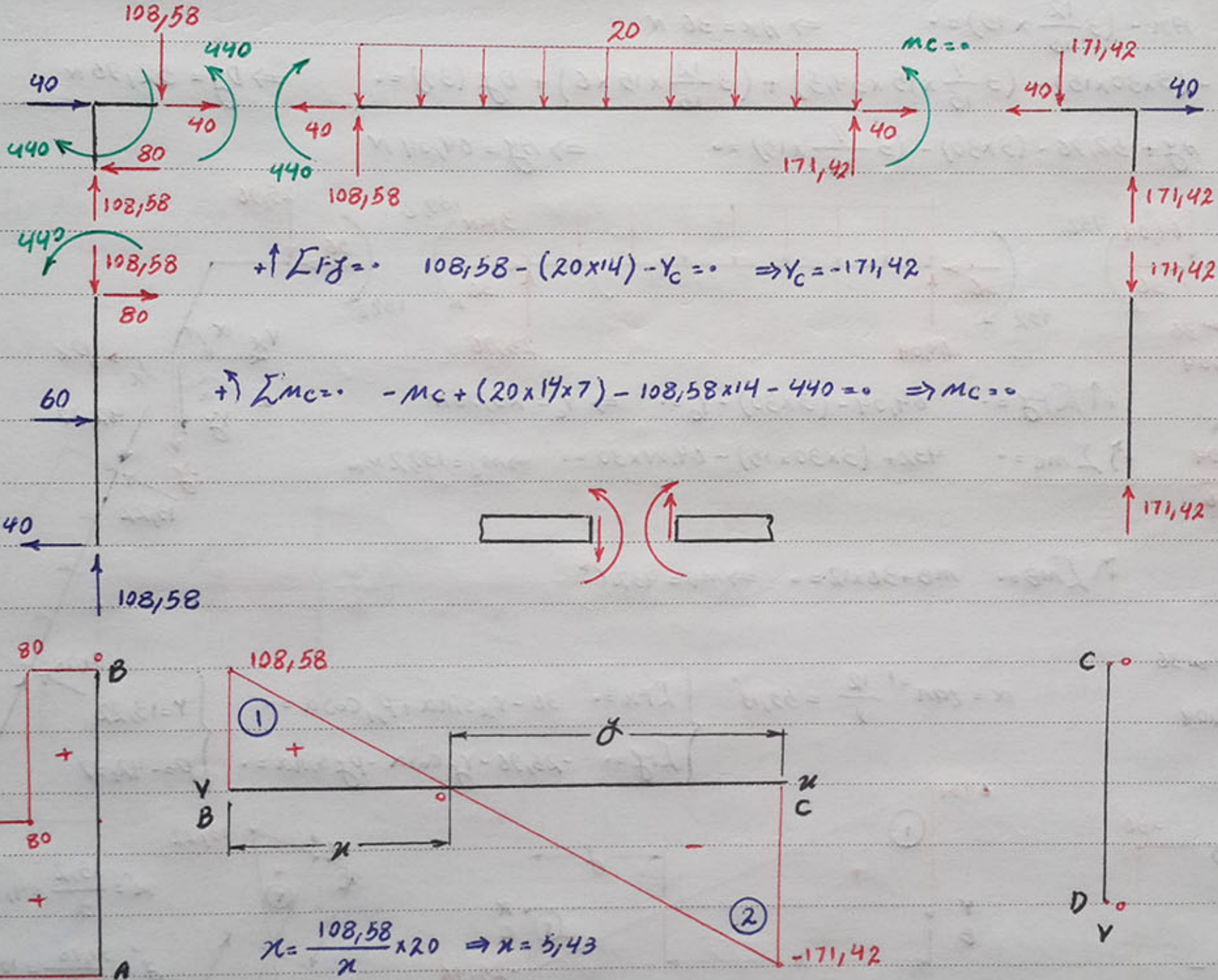
- مطلوبست نمودار برشی و لنگر خمشی برای قاب داده شده :



$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \quad -60\times2 - 40\times4 - (20\times14\times7) - 40\times4 + D_y\times14 = 0 \quad \Rightarrow D_y = 171,42$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad A_y + 171,42 - (20\times14) = 0 \quad \Rightarrow A_y = 108,58$

$\pm\rightarrow \sum F_x = 0 \quad A_x + 60 + 40 + 40 = 0 \quad \Rightarrow A_x = -140 = 140 \leftarrow$



$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad 108,58 - (20\times14) - Y_C = 0 \quad \Rightarrow Y_C = -171,42$

$+\circlearrowleft \sum M_C = 0 \quad -M_C + (20\times14\times7) - 108,58\times14 - 440 = 0 \quad \Rightarrow M_C = 0$

$x = \frac{108,58}{x}\times20 \quad \Rightarrow x = 5,43$

$y = \frac{171,42}{y}\times20 \quad \Rightarrow y = 8,57$

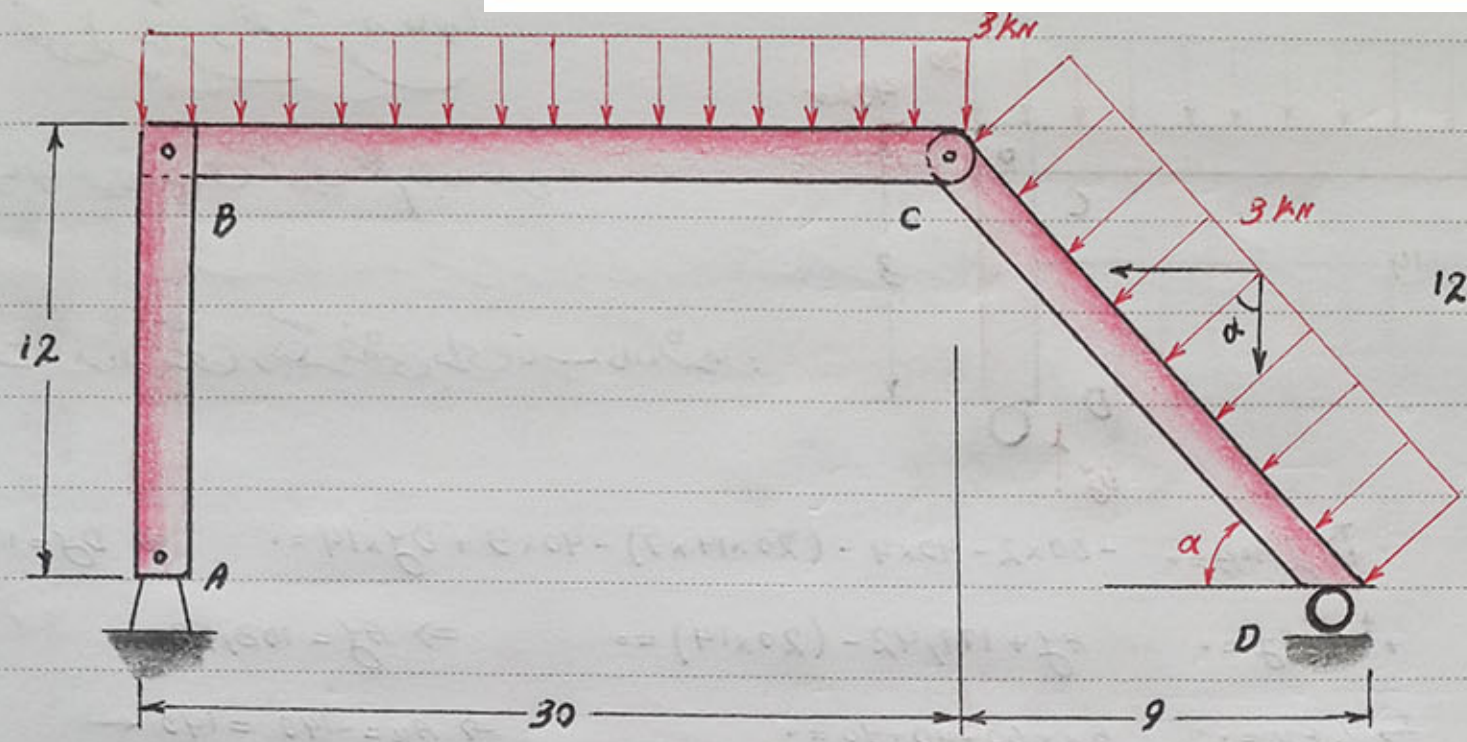
① مساحت

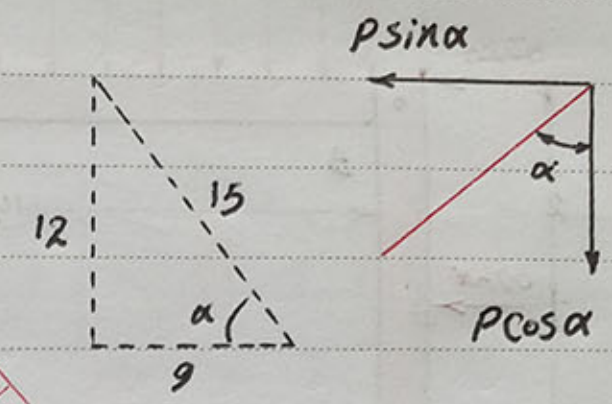
$\frac{108,58\times5,43}{2} = 294,8$

② مساحت

$\frac{171,42\times8,57}{2} = 734,8$

www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران



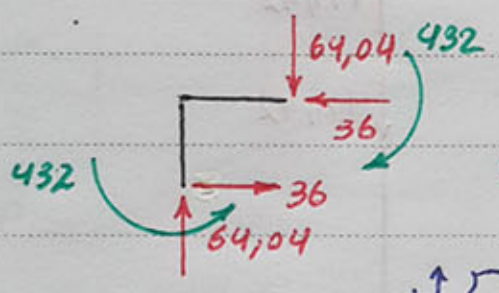


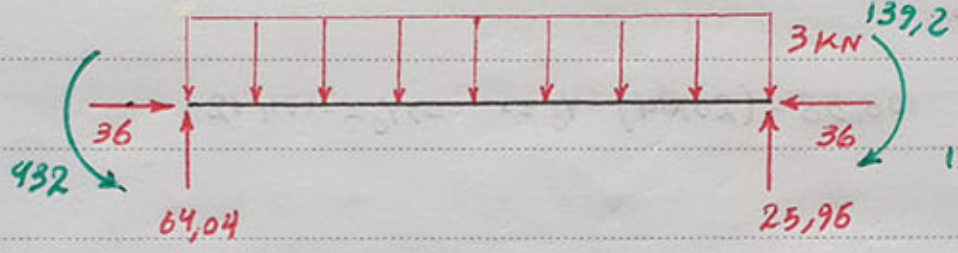
$\sin\alpha = \frac{12}{15}$, $\cos\alpha = \frac{9}{15}$

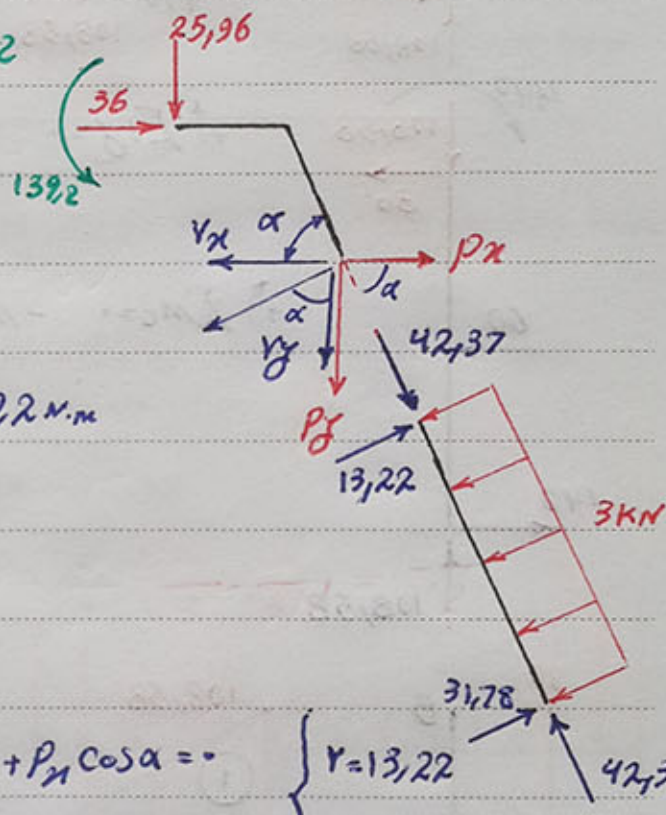
$\pm\rightarrow \sum F_x = 0 \quad A_x - (3\frac{12}{15} \times 15) = 0 \quad \Rightarrow A_x = 36\ N$

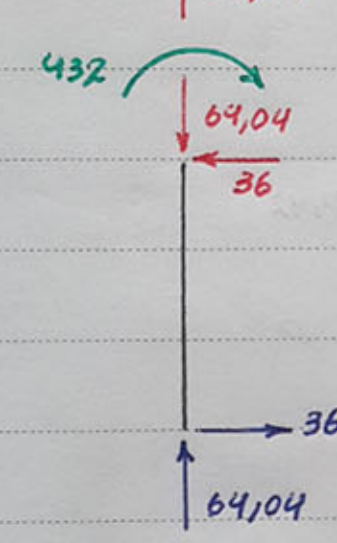
$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \quad -(3\times30\times15) - (3\frac{9}{15}\times15\times34{,}5) + (3\frac{12}{15}\times15\times6) + D_y(39) = 0 \quad \Rightarrow D_y = 52{,}96\ N$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad A_y + 52{,}96 - (3\times30) - (3\frac{9}{15}\times15) = 0 \quad \Rightarrow A_y = 64{,}04\ N$







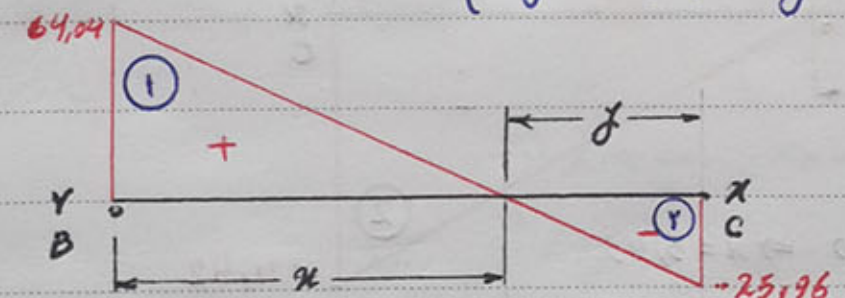


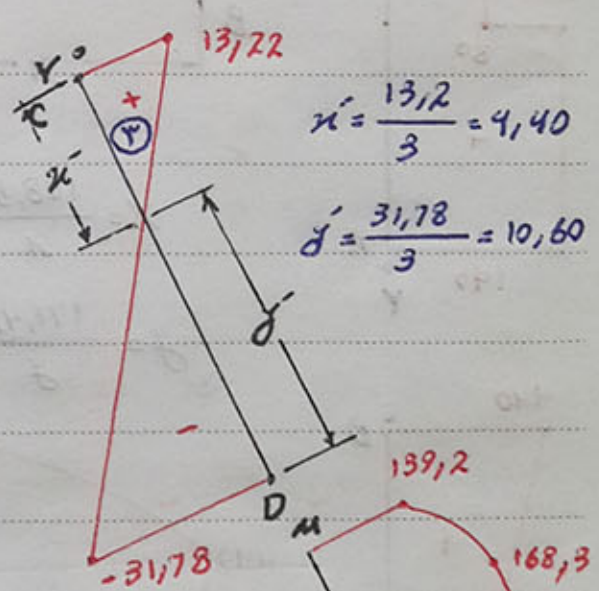
$+\circlearrowleft \sum M_C = 0 \quad 432 + (3\times30\times15) - 64{,}04\times30 = 0 \quad \Rightarrow M_c = 139{,}2\ N.m$

$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 \quad M_B + 36\times12 = 0 \quad \Rightarrow M_B = 432\ \circlearrowright$

$\alpha = \tan^{-1}\frac{12}{9} = 53{,}13^\circ$

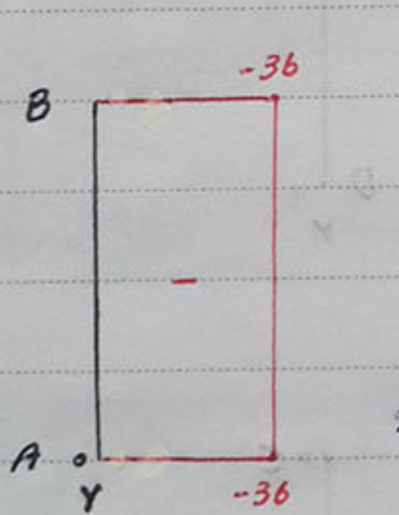
$\begin{cases} \sum F_x = 0 & 36 - V_x\sin\alpha + P_x\cos\alpha = 0 \\ \sum F_y = 0 & -25{,}96 - V_y\cos\alpha - P_y\sin\alpha = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} V = 13{,}22 \\ P = 42{,}37 \end{cases}$





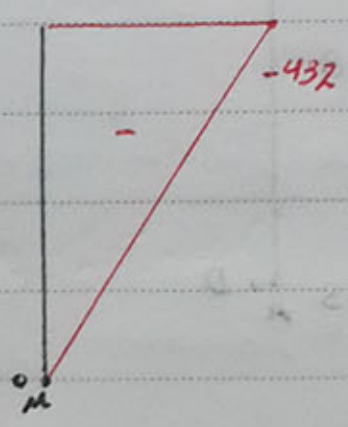
$x' = \frac{13{,}2}{3} = 4{,}40$

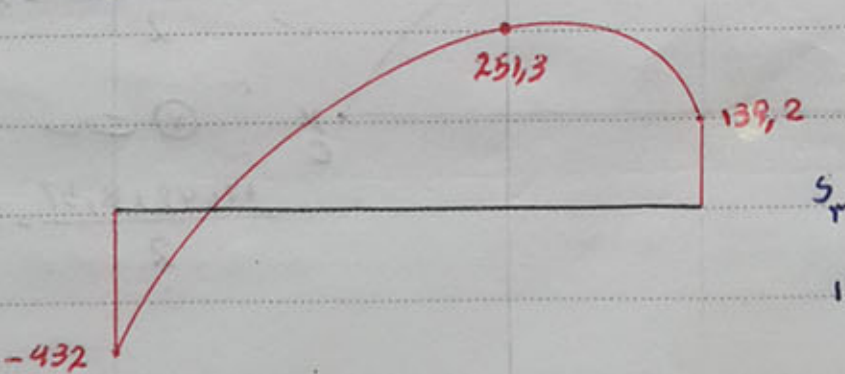
$y' = \frac{31{,}78}{3} = 10{,}60$



$x = \frac{64{,}04}{3} = 21{,}34$ $\qquad y = \frac{25{,}96}{3} = 8{,}66$

$S_1 = \frac{64{,}04\times21{,}34}{2} = 683{,}3$ $\qquad S_2 = \frac{25{,}96\times8{,}66}{2} = 112{,}4$





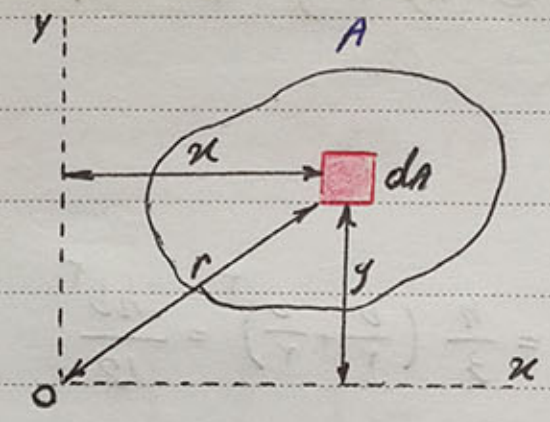
$S_2 = \frac{13{,}22\times4{,}40}{2} = 29{,}1$

$139{,}2 + 29{,}1 = 168{,}3$

PAPCO

www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

لنگر لختی = ممان اینرسی

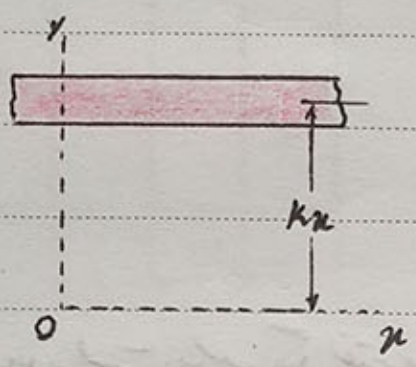


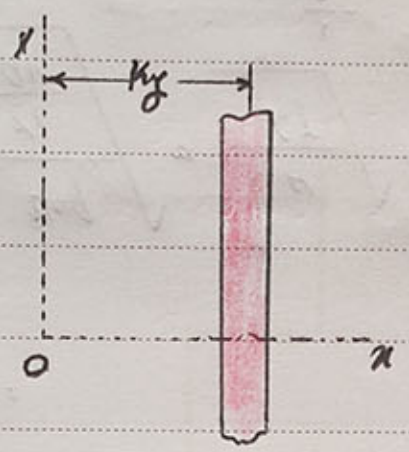
$$I_x = \int y^2 dA$$

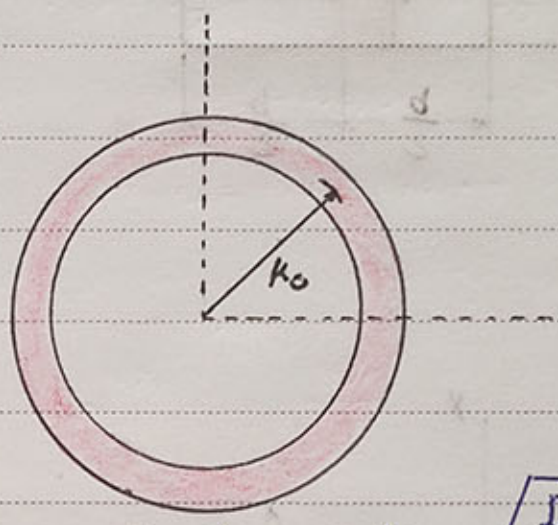
$$I_y = \int x^2 dA$$

$$I_O = \int r^2 dA$$

سطح A را در نظر گرفته (در صفحه xy) طبق تعریف، لنگرهای لختی جزء dA حول محورهای x و y به ترتیب عبارتند از:





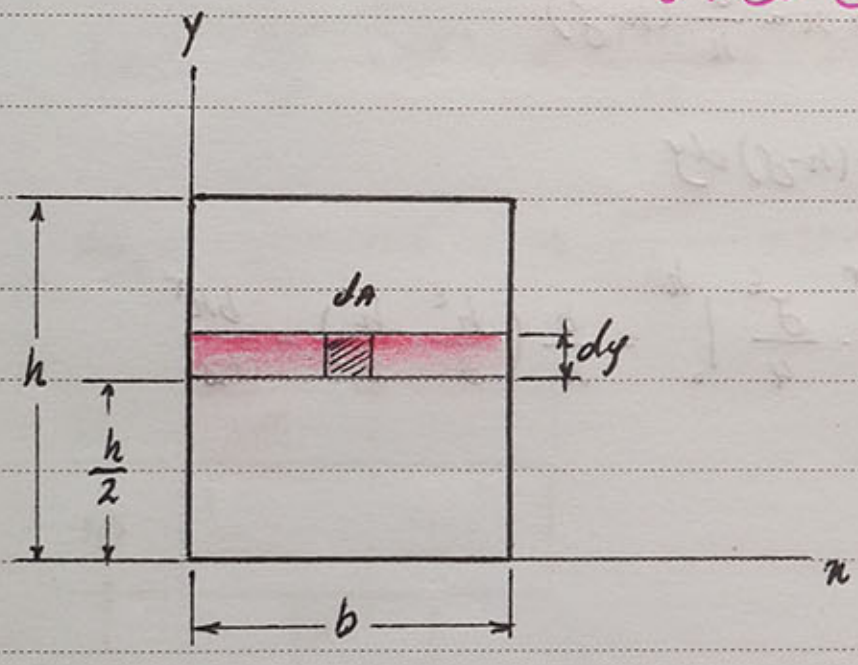


$$I_x = k_x^2 \cdot A \Rightarrow k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$$

$$I_y = k_y^2 \cdot A \Rightarrow k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

$$I_O = k_O^2 \cdot A \Rightarrow k_O = \sqrt{\frac{I_O}{A}}$$

طبق تعاریف، لنگر شتاب حول محور x و شعاع چرخش یا شعاع ژیراسیون سطح حول محور x عبارتند از:



- مطلوبست محاسبه I_x شکل زیر:

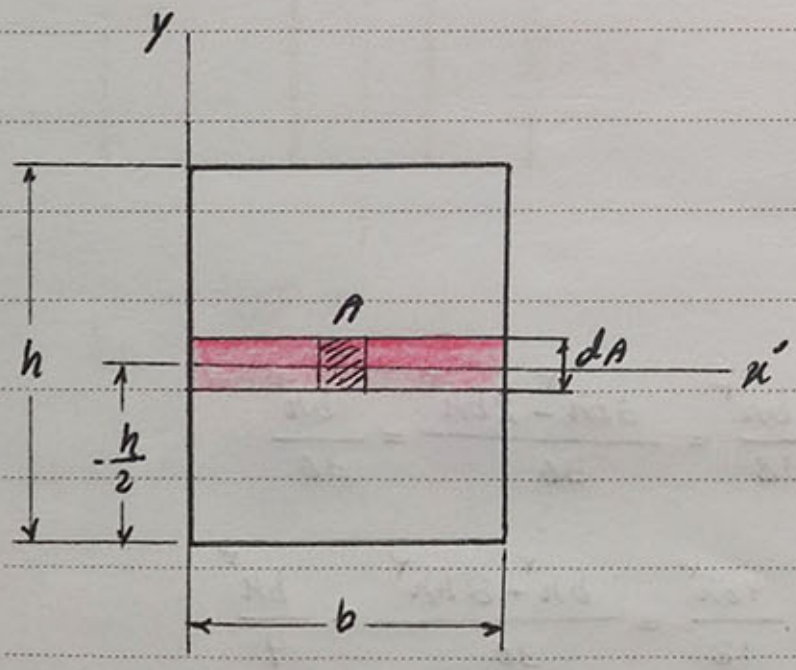
$$I_x = \int y^2 dA$$

$$dA = b \cdot dy$$

$$I_x = \int_0^h y^2 (b \cdot dy) = b \frac{y^3}{3} \Big|_0^h = b \frac{h^3}{3} - 0 = \frac{bh^3}{3}$$

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{\frac{bh^3}{3}}{b \cdot h}} = \frac{\sqrt{3}\,h}{3}$$

- مطلوبست محاسبه $I_{x'}$ شکل زیر:



$$I_{x'} = \int y^2 dA$$

$$dA = b \cdot dy$$

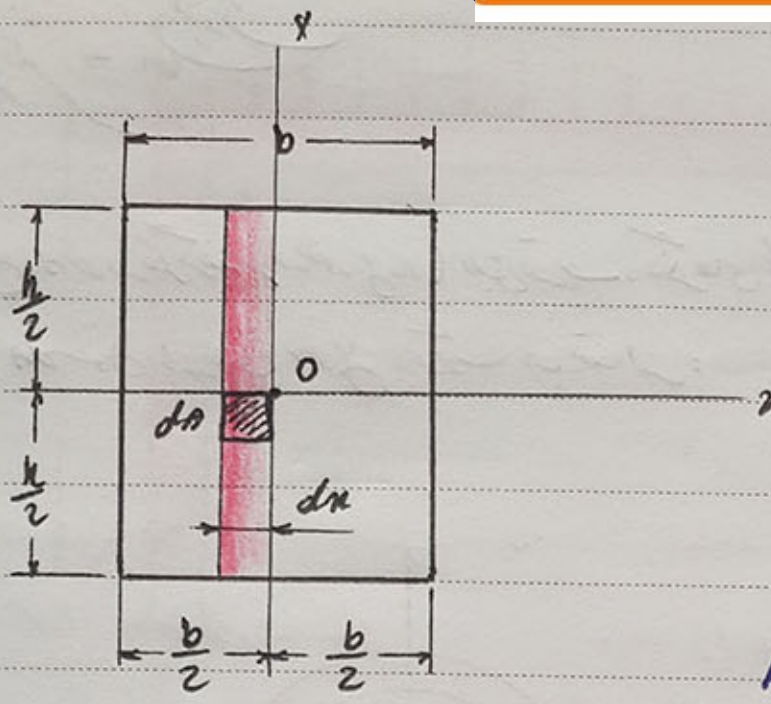
$$I_{x'} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 (b \cdot dy) = b \frac{y^3}{3} \Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{b}{3} \left(\frac{h}{2} + \frac{h}{2}\right)^3 = \frac{bh^3}{12}$$

$$k_{x'} = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{\frac{bh^3}{12}}{b \cdot h}} = \frac{\sqrt{3}\,h}{6}$$

P4PCO

www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

- مطلوب است محاسبه I_y و k_y شکل مقابل:



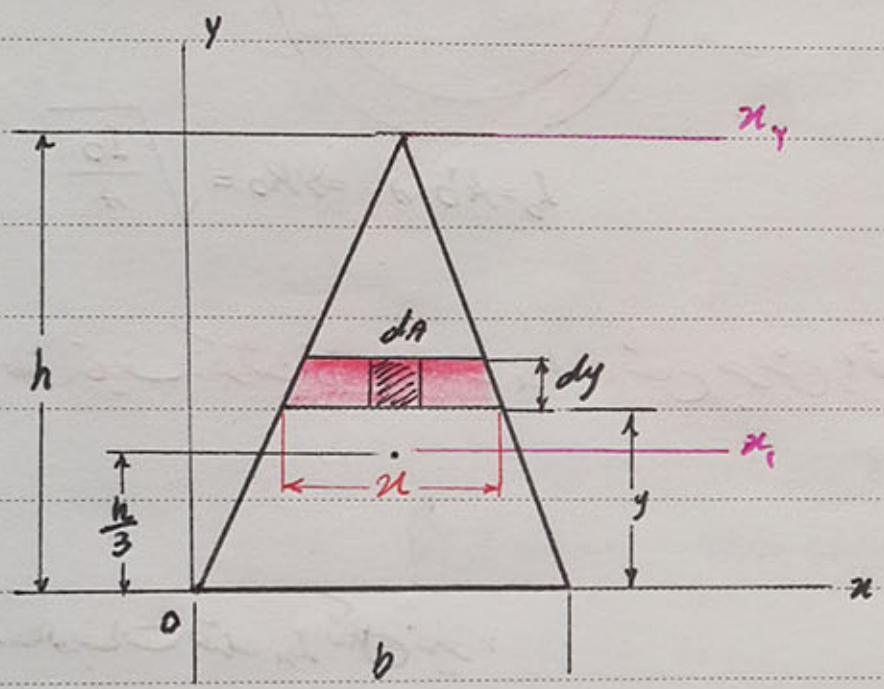
$$I_y = \int x^2 dA$$

$$dA = h \cdot dx$$

$$I_y = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} x^2 (h\,dx) = h\frac{x^3}{3}\Big|_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} = \frac{h}{3}\left(\frac{b}{2}+\frac{b}{2}\right)^3 = \frac{hb^3}{12}$$

$$k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{\frac{hb^3}{12}}{b\cdot h}} = \frac{\sqrt{3}b}{6}$$

- مطلوب است محاسبه ممان لختی مقطع حول محور x_1 و x_2:



$$I_x = \int y^2 dA$$

$$dA = x\,dy$$

$$\frac{b}{h} = \frac{x}{h-y} \Rightarrow x = \frac{b}{h}(h-y)$$

$$I_x = \int_0^h y^2 \cdot \frac{b}{h}(h-y)\,dy$$

$$I_x = \frac{b}{h}\cdot\frac{hy^3}{3}\cdot\frac{y^4}{4}\Big|_0^h = \frac{b}{h}\left(\frac{h^4}{3}-\frac{h^4}{4}\right) = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_{x_1} = \int y^2 dA$$

$$dA = x\,dy = \frac{b}{h}(h-y)\,dy$$

(1) $$I_{x_1} = \int_{-\frac{h}{3}}^{\frac{2h}{3}} y^2 \cdot \frac{b}{h}(h-y)\,dy = \frac{b}{h}\cdot\left(\frac{hy^3}{3}-\frac{y^4}{4}\right)\Big|_{-\frac{h}{3}}^{\frac{2h}{3}} = \frac{bh^3}{36}$$

با استفاده قضیه محورهای موازی داریم

(2) $$I_x = I_{\bar{x}} + Ad^2 \Rightarrow I_{x_1} = I_{\bar{x}} + Ad^2$$

$$I_{x_1} = \frac{bh^3}{12} + \frac{bh}{2}\left(-\frac{h}{3}\right)^2 = \frac{bh^3}{12} - \frac{bh^3}{18} = \frac{3bh^3 - 2bh^3}{36} = \frac{bh^3}{36}$$

$$I_{x_2} = I_{\bar{x}} + Ad^2 \Rightarrow I_{x_2} = \frac{bh^3}{36} + \frac{bh}{2}\left(\frac{2h}{3}\right)^2 = \frac{bh^3}{36} + \frac{4bh^3}{18} = \frac{bh^3 + 8bh^3}{36} = \frac{bh^3}{4}$$

PAPCO

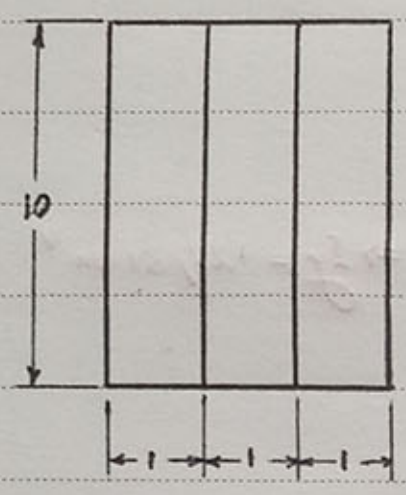
www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

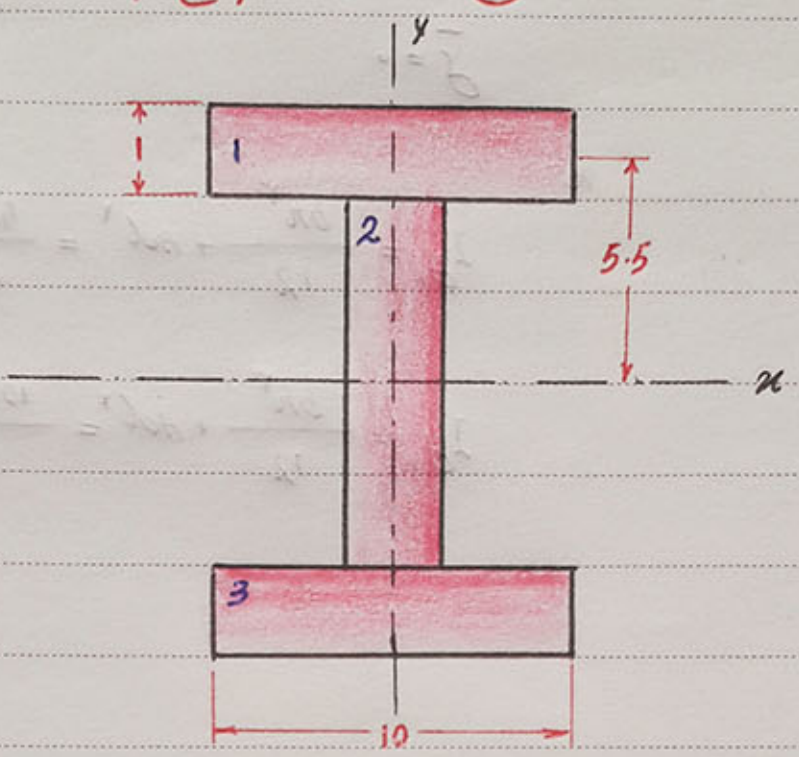
محاسبه ممان اینرسی سطوح مرکب

① مرکز سطح جسم تعیین شود

② ممان اینرسی تمام سطح نسبت به مرکز سطح جسم

③ ممان اینرسی ها با هم جمع شوند





$$I_{x_1} = \frac{bh^3}{12} + Ad^2$$

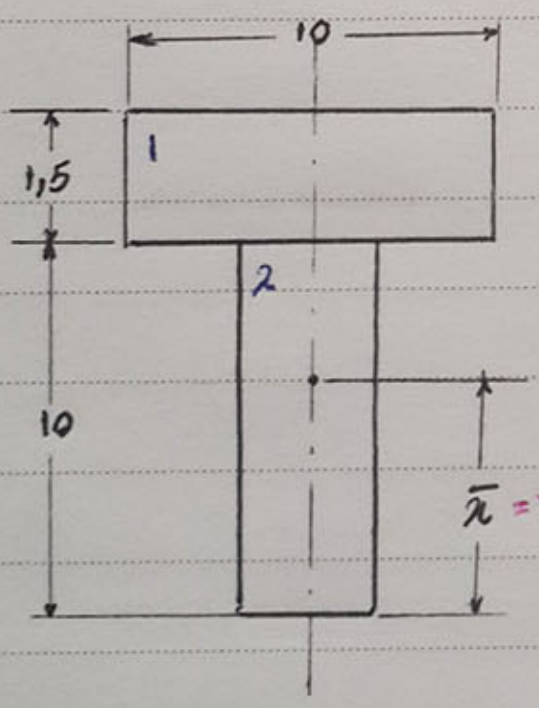
$$I_{x_1} = \frac{10 \times 1^3}{12} + 10 \times 1 \,(5{,}5)^2 = 303{,}33 \text{ cm}^4$$

$$I_{x_2} = \frac{bh^3}{12} + Ad^2 \Rightarrow \frac{1 \times 10^3}{12} + 0 = 83{,}33 \text{ cm}^4$$

$$I_{x_3} = \frac{bh^3}{12} + Ad^2 \Rightarrow \frac{10 \times 1^3}{12} + 10 \times 1 \,(5{,}5)^2 = 303{,}33 \text{ cm}^4$$

$$\Rightarrow I_x = I_{x_1} + I_{x_2} + I_{x_3}$$

$$\Rightarrow I_x = 303{,}33(2) + 83{,}33 = 689{,}99 \text{ cm}^4$$



شکل	A_i	x_i	$A_i x_i$
1	$10 \times 1{,}5 = 15$	10,75	$15 \times 10{,}75 = 161{,}25$
2	$1{,}5 \times 10 = 15$	5	$15 \times 5 = 75$
	30	—	236,25

$$\bar{x} = \frac{\int \bar{x}\, dA}{\int dA} = \frac{236{,}25}{30} = 7{,}87 \text{ cm}$$

$$I_{x_1} = \frac{bh^3}{12} + Ad^2$$

$$\Rightarrow I_{x_1} = \frac{10 \times 1{,}5^3}{12} + 10 \times 1{,}5 \,(2{,}88)^2 = 127{,}22 \text{ cm}^4$$

$$I_{x_2} = \frac{bh^3}{12} + Ad^2$$

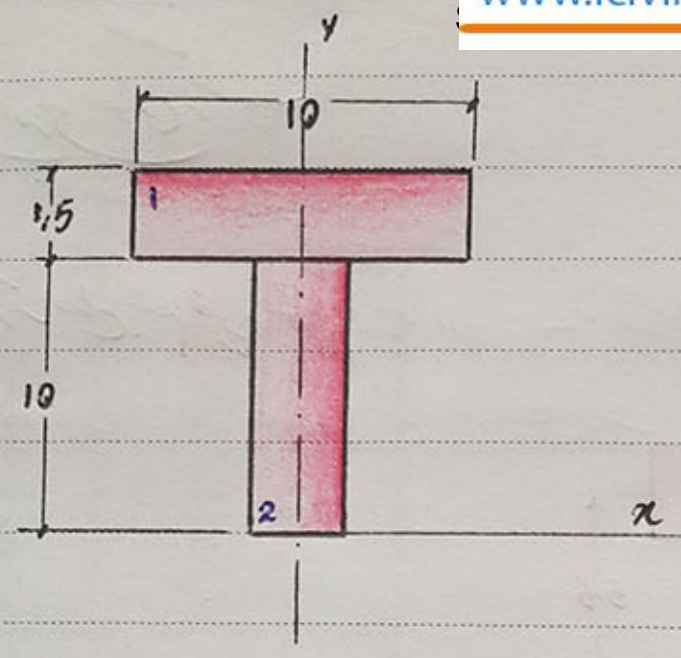
$$\Rightarrow I_{x_2} = \frac{1{,}5 \times 10^3}{12} + (10 \times 1{,}5)(2{,}87)^2 = 248{,}55 \text{ cm}^4$$

$$\Rightarrow I_x = I_{x_1} + I_{x_2}$$

$$\Rightarrow I_x = 127{,}22 + 248{,}55 = 375{,}77 \text{ cm}^4$$

PAPCO

www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران



- مطلوب است I_y شکل مقابل:

چون شکل نقابل حول محوری قرینه هر بشه پس داریم:

$$\bar{y} = 0$$

$$I_{y_1} = \frac{bh^3}{12} + Ad^2 = \frac{1,5 \times 10^3}{12} + 0 = 125\ cm^4$$

$$\Rightarrow I_y = 127,81\ cm^4$$

$$I_{y_2} = \frac{bh^3}{12} + Ad^2 = \frac{10 \times 1,5^3}{12} + 0 = 2,81$$

PAPCO