بسمه تعالی

نام جزوه: دینامیک ماشین

نام استاد: دکتر اسلامی

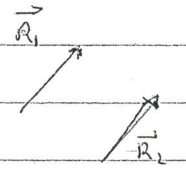
دانشگاه: صنعتی امیرکبیر

Unit II

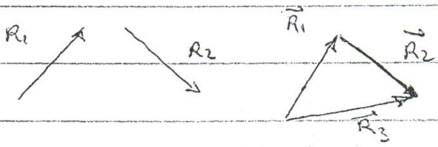
Velocity Analysis of Linkages

objective 1 : تعریف بردارها و خواص آن ها:

۱- دو بردار مساوی $\vec{R_1} = \vec{R_2}$

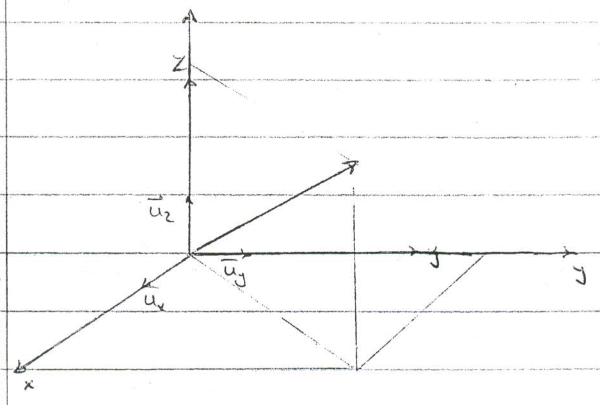


۲- جمع دو بردار



$$\vec{R_1} + \vec{R_2} = \vec{R_3}$$

۳- بردار برحسب مولفه ها:



$$\vec{R} = x\bar{u}_x + y\bar{u}_y + z\bar{u}_z$$

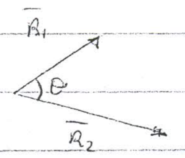
$$\bar{R} = r\bar{u}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\bar{U} = \frac{x}{r}\bar{u}_x + \frac{y}{r}\bar{u}_y + \frac{z}{r}\bar{u}_z$$

۴- حاصلضرب داخلی (Dot product)

$$R_1 . R_2 = R_1 R_2 \cos\theta$$



۵- حاصلضرب خارجی (cross product)

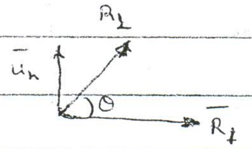
$$\vec{R}_1 \times \vec{R}_2 = \vec{R}_3$$

$$\bar{R}_1 \times \bar{R}_2 = \begin{vmatrix} \bar{u}_x & \bar{u}_y & \bar{u}_z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

$$\bar{R}_1 = x_1\bar{u}_x + y_1\bar{u}_y + z_1\bar{u}_z$$

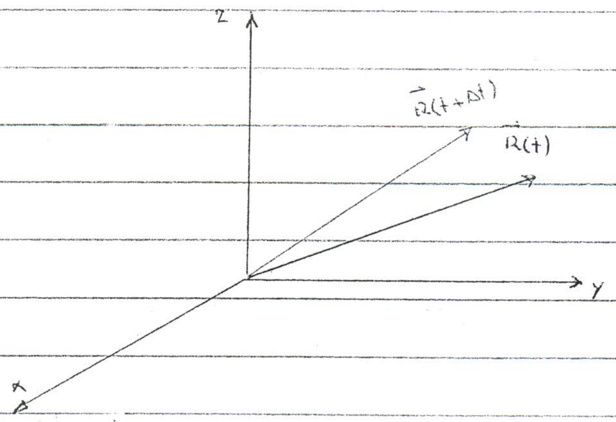
$$\bar{R}_2 = x_2\bar{u}_x + y_2\bar{u}_y + z_2\bar{u}_z$$

$$\bar{R}_1 \times \bar{R}_2 = R_1 R_2 \sin\theta \, \bar{u}_n$$



۶- مشتق یک بردار نسبت به زمان:

$$\vec{R} = \vec{R}(t) \Rightarrow \frac{d\vec{R}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{R}(t+\Delta t) - \vec{R}(t)}{\Delta t}$$

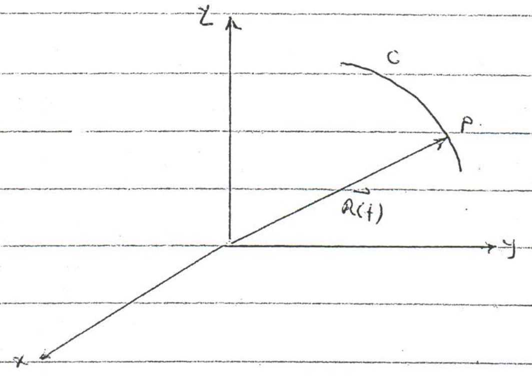


objective 2 — تعیین سرعت یک ذره نسبت به متغیرهای مسیر:

مشتق بردار مکان نسبت به زمان سرعت یا (velocity) است

2 بنابر تعریف velocity یک ذره متحرک در فضا عبارت است از مشتق position vector نسبت

بر زمان



$$\vec V = \frac{d\vec R}{dt}\Big)_{xyz}$$

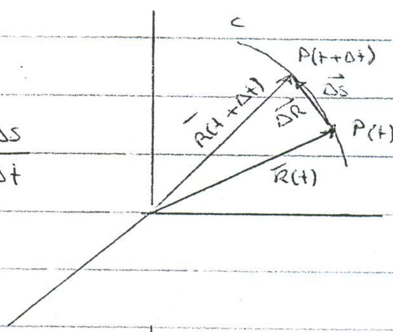
از سیستم کوردینات برحسب متغیرهای مسیر (cordinate systems in term of path variable) زمانی استفاده

می‌کنیم که یک ذره‌ی متحرک روی مسیری که معادله مسیر نسبت به کوردینات xyz معلوم باشد در حال حرکت است.

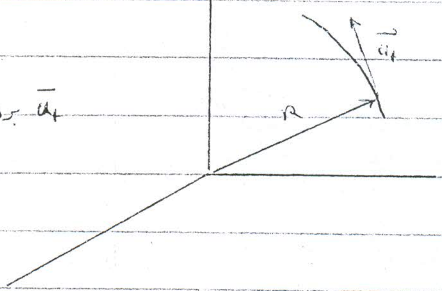
بنابه تعریف سرعت ذره‌ی P برابر است با $\vec V = \frac{d\vec R}{dt}\Big)_{xyz}$ یا برابر است با:

$$\vec V = \frac{d\vec R}{dt}\Big)_{xyz} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec R(t+\Delta t) - \vec R(t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec R}{\Delta t} = \lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ \Delta s}} \frac{\Delta \vec R}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t}$$



$$= \frac{ds}{dt} \cdot \text{بردار واحد}$$

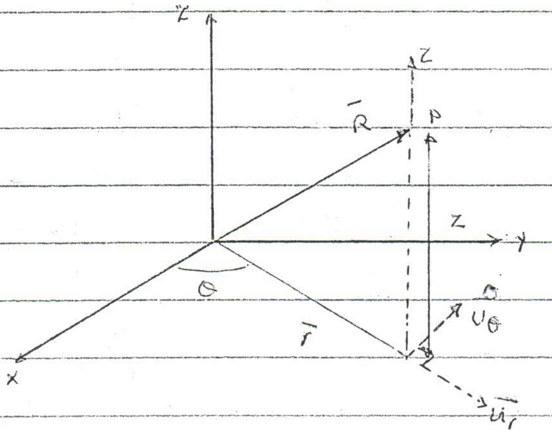


$\vec u_t$ بردار واحد مماس بر مسیر در جهت حرکت است

$$\boxed{\vec V = \frac{d\vec R}{dt} = \frac{ds}{dt}\vec u_t}$$

محور مختصات استوانه‌ای :

از این محور مختصات زمانی استفاده می‌کنیم که ذره‌ای بر روی مسیر دایره‌ای حرکت نماید و دارای حرکت دورانی باشد.



$$\vec R = \bar r \vec u_r + z\vec u_z$$

بنابر تعریف velocity ذره‌ی P برابر است با: $0 < \theta < 2\pi$

$$\bar V = \frac{d\bar R}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar r \vec u_r + z\vec u_z) = \frac{d\bar r}{dt}\vec u_r + \bar r\frac{d\bar u_r}{dt} + \frac{dz}{dt}\vec u_z$$

$$+ z\frac{d\bar u_z}{dt}$$

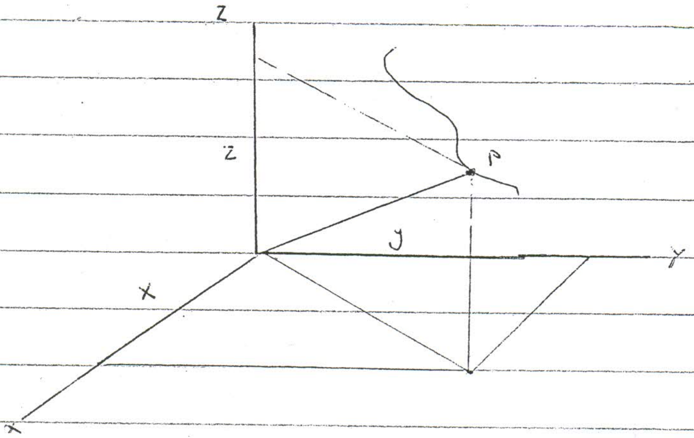
از دینامیک : $\frac{d\bar u_r}{dt} = \dot\theta d\theta$

$$\frac{du_z}{dt} = 0$$

$$\boxed{\bar V = \dot r \vec u_r + r\dot\theta \vec u_\theta + \dot z \vec u_z}$$

Part III : سرعت در مختصات xyz

سیستم در مختصات xyz مفروض است :



$$\bar{R} = x\bar{u}_x + y\bar{u}_y + z\bar{u}_z \Rightarrow V = \frac{dR}{dt} = \dot{x}\bar{u}_x + \dot{y}\bar{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z$$

objective 3 :

کاربرد اعداد مختلط :

یک عدد مختلط را به شکل زیر نمایش داده می شود :

$R = re^{j\theta}$

r = magnitute

θ = argument

$j = \sqrt{-1}$

$$R = \underbrace{r(\cos\theta}_{\text{real part}} + \overbrace{j\sin\theta)}^{\text{imaginary part}}$$

برای عدد مختلط زیر :

$R = a + jb$

$r = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{b}{a}$

جمع اعداد کمپلکس :

$$R_1 = r_1 e^{J\theta_1}$$
$$R_2 = r_2 e^{J\theta_2}$$

$$R_1 + R_2 = r_1 e^{J\theta_1} + r_2 e^{J\theta_2} = r_1 \cos\theta_1 + J r_1 \sin\theta_1 + r_2 \cos\theta_2 + J r_2 \sin\theta_2$$

$$= \underbrace{(r_1 \cos\theta_1 + r_2 \cos\theta_2)}_{\text{Real}} + J\underbrace{(r_1 \sin\theta_1 + r_2 \sin\theta_2)}_{\text{imaginary}}$$

منطبق بر جمع بردارها است.

تفریق اعداد کمپلکس :

$$R_1 - R_2 = (r_1 \cos\theta_1 - r_2 \cos\theta_2) + J(r_1 \sin\theta_1 - r_2 \sin\theta_2)$$

منطبق بر تفریق بردارها است.

حاصلضرب اعداد کمپلکس :

$$R_1 \cdot R_2 = r_1 e^{J\theta_1} \cdot r_2 e^{J\theta_2} = r_1 r_2 e^{J(\theta_1 + \theta_2)}$$

منطبق بر هیچ نوع ضرب برداری (داخلی و خارجی) نمی باشد.

تقسیم اعداد کمپلکس :

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{r_1 e^{J\theta_1}}{r_2 e^{J\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{J(\theta_1 - \theta_2)}$$

مشتق اعداد مختلط :

$$R = re^{j\theta} \Rightarrow \frac{dR}{dt} = \dot{r}e^{j\theta} + jr\dot{\theta}e^{j\theta}$$

منطبق بر مشتق بردارها است.

در بردارها $\bar{R} = r\bar{u}_r$ و $v = \dot{r}\bar{u}_r + r\dot{\theta}\bar{u}_\theta$ با مقایسه با مشتق اعداد مختلط :

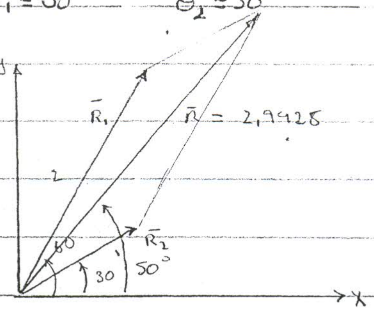
$$\frac{dR}{dt} = \dot{r}e^{j\theta} + jr\dot{\theta}e^{j\theta} \qquad \bar{u}_r = e^{j\theta}$$

$$\bar{u}_\theta = je^{j\theta}$$

مثال : حالت مختلط و برداری را حل کنید :

$r_1 = 2 \qquad r_2 = 1$

$\theta_1 = 60^\circ \qquad \theta_2 = 30^\circ$



اگر بردار بودند

اگر مختلط باشند

$R_1 = 2e^{j60} \qquad R_2 = 1e^{j30}$

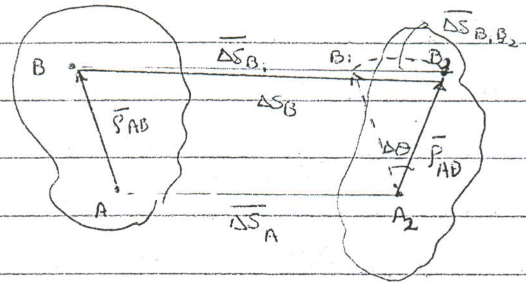
$$R_1 + R_2 = 2\cos 60 + j2\sin 60 + 1\cos 30 + j\sin 30$$

$$= (2\cos 60 + \cos 30) + j(2\sin 60 + \sin 30) = 1{,}866 + j2.232 = R_3$$

$$r_3 = \sqrt{1{,}866^2 + 2{,}232^2} = 2{,}9928$$

$$\theta_3 = \tan^{-1}\frac{2{,}232}{1{,}866} = 50^\circ$$

objective 9: تعیین رابطه بین سرعت دو نقطه از یک جسم صلب



pure translation حالتی است که سرعت همه ی نقاط یکسان باشد

طبق قضیه chasler هر حرکت کلی یک جسم صلب برابر است با یک pure translation به علاوه ی یک pure rotation .

از روی شکل : $\overline{\Delta S}_B = \overline{\Delta S}_{B_1} + \overline{\Delta S}_{B_1B_2}$

$$\overline{\Delta S}_B = \overline{\Delta S}_A + \overline{\Delta S}_{B_1B_2} \Rightarrow \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{\Delta S}_B}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{\Delta S}_A}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{\Delta S}_{B_1B_2}}{\Delta t}$$

$$\overline{V}_B = \overline{V}_A + \overline{\omega} \times \overline{\rho}_{AB} \quad (a) \qquad \omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$\overline{V}_B = \overline{V}_A + \overline{V}_{B/A} \quad (b)$$

$$\overline{V}_{B/A} = \overline{\omega} \times \overline{\rho}_{AB} \quad (c)$$

رابطه ی (b) یک مثلث برداری است

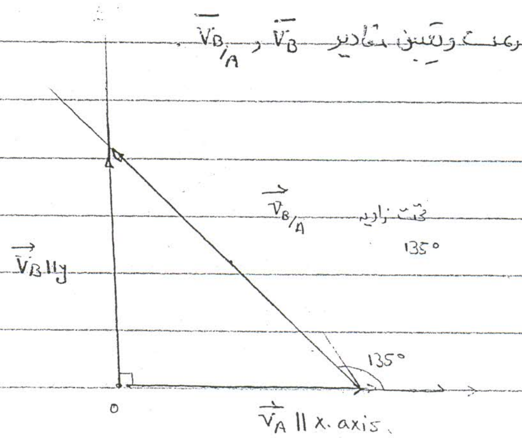
مثال: از یک جسم صلب اطلاعات زیر معلوم است:

1. $\vec{V_A}$ برابر $20\ in/s$ موازی محور x

2. $\vec{V_B}$ موازی محور y حرکت می‌کند

3. $\vec{V}_{B/A}$ تحت زاویه 135° با محور x حرکت می‌کند

مطلوب است ترسیم دیاگرام سرعت و تعیین مقادیر $\vec{V_B}$ و $\vec{V}_{B/A}$



1. مبدأ o و مقیاس مناسبی انتخاب می‌کنیم — $1in = 10\ in/sec$

2. سرعت $\vec{V_A}$ را از مبدأ o رسم می‌کنیم

3. سرعت نقطه B:

$$\vec{V_B} = \vec{V_A} + \vec{V}_{B/A}$$

چون از مثلث برداری بالا $\vec{V_A}$ معلوم و $\vec{V_B} \parallel y_{axis}$ و $\vec{V}_{B/A}$ تحت زاویه 135° نسبت به x_{axis} می‌باشد لذا مثلث برداری قابل ترسیم است.

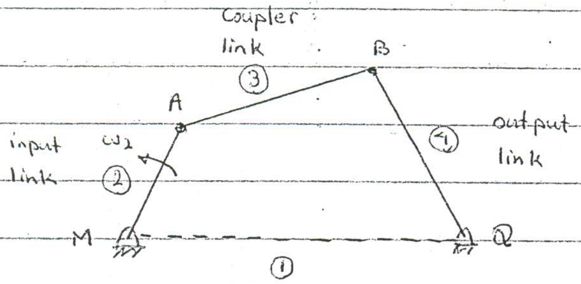
4. با استفاده از مقیاس:

$$\begin{cases} V_B = 20\ in/sec \\ V_{B/A} = 20\sqrt{2}\ in/sec \end{cases}$$

Objective 5

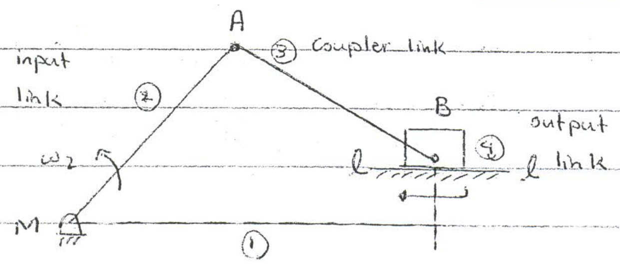
مکانیزم های چارمیله ای ساده:

هدف: سرعت دورانی ساده را با انتخاب ابعاد مناسب به یک حرکت دلخواه را بدست آوریم.

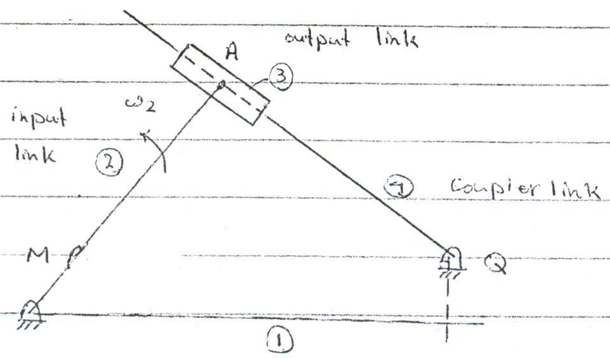


Four-bar linkage system

هدف: با سرعت دورانی ساده و با انتخاب ابعاد مناسب حرکت خطی دلخواه را بدست می آوریم.

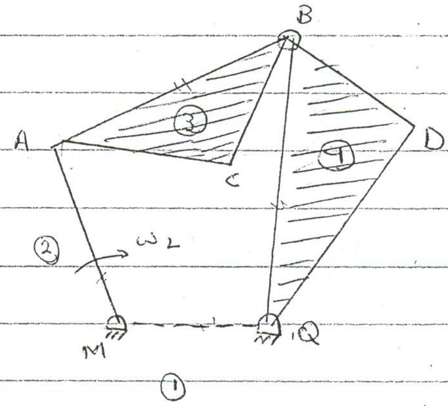


Slider crank Mechanism



Inverted slider crank Mechanism

مثال : مطلوب است ترسیم دیاگرام سرعت مکانیزم چهار میله ای زیر



$MA = 4''$

$AB = 8''$

$QB = 5{,}5''$

$MQ = 5''$

$\omega_2 = 94{,}2 \ \text{rad/sec}$

ترسیم :

1- مبدا Q_v و مقیاس مناسب انتخاب می کنیم $\quad 1\text{in} \ \underline{\ 10 \ \text{ft/sec}\ }$

2- سرعت نقطه A $\quad \vec{V}_A = \vec{V}_M + \vec{V}_{A/M}$

$V_A = MA \cdot \omega_2 = 94.2 \times 4 = 376{,}8 \times \frac{1}{12} = 31{,}4 \ \text{ft/sec} \ \perp MA$

3- سرعت نقطه B $\quad \vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{B/A}$

چون $V_{B/A}$ عمود بر AB و V_B عمود بر QB می باشد

لذا مثلث برداری قابل ترسیم است.

4- با استفاده از مقیاس

$V_{B/A} = 20 \ \text{ft/sec}$

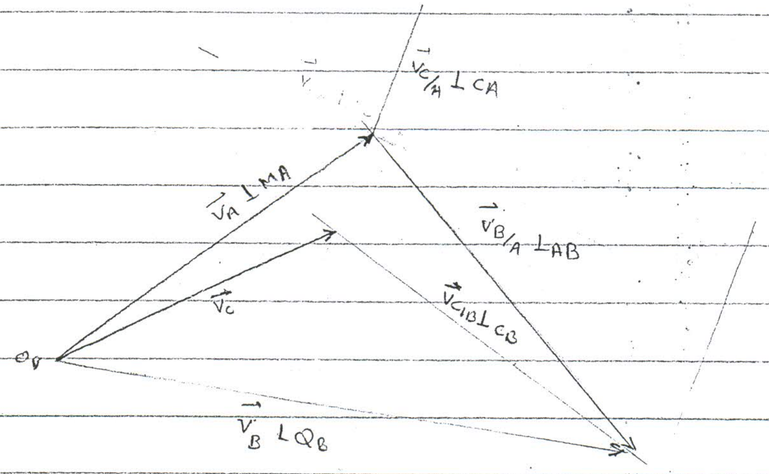
$V_B = 34 \ \text{ft/sec}$

5- سرعت دورانی میله های 3 و 4

$\omega_3 = \frac{V_{B/A}}{AB} = \frac{20}{8} \times 12 = 30 \ \text{rad/sec}$ ساعتگرد

$\omega_4 = \frac{V_B}{QB} = \frac{34}{5{,}5} \times 12 = 74{,}2 \ \text{rad/sec}$ ساعتگرد

V



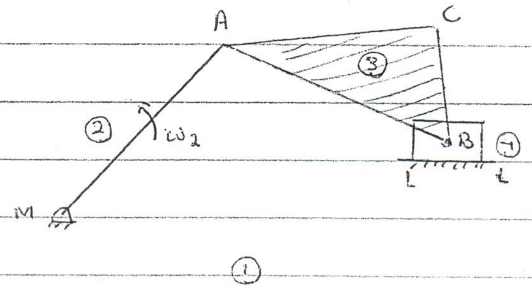
5: سرعت نقطه C :

$$\vec V_C = \vec V_A + \vec V_{C/A}$$

$$\vec V_C = \vec V_B + \vec V_{C/B}$$

چون $\vec V_{C/A}$ عمود بر CA و $\vec V_{C/B}$ عمود بر BC می باشد لذا از تلاقی دو معادله برداری بالا $\vec V_C$ پیدا شد

مثال: مطلوبست دیاگرام سرعت یک slider crank Mechanism



MA = 2"

AB = 3"

AC = 1.5"

n_2 = 600 rpm

1- مبدا O_V و مقیاس مناسب انتخاب میکنیم   1in → 5.23 ft/sec

2- سرعت نقطه A : $\omega_2 = \frac{2\pi n_2}{60} = \frac{2\pi \times 600}{60} = 62.8$ rad/sec

$$\vec V_A = \vec V_M + \vec V_{A/M} \Rightarrow V_{A/M} = \omega_2 \times AM = 62.8 \times \frac{2}{12} = 10.46 \ \text{ft/sec} \perp MA12$$

3- سرعت نقطه B : $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{B/A}$

چون $\vec{V}_{B/A}$ عمود بر $\vec{AB}$ و $\vec{V}_B$ موازی LL است لذا مثلث برداری قابل ترسیم است

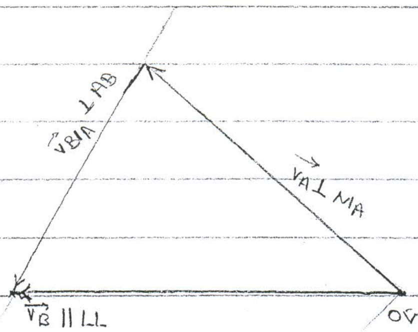
4- با استفاده از مقیاس

$V_B = 10,46 \ ft/sec$

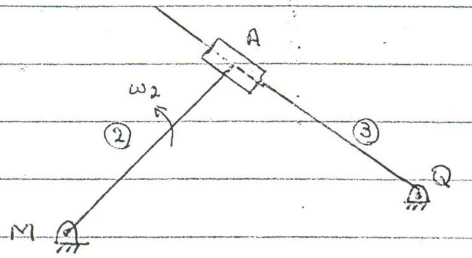
$V_{B/A} = 6,54 \ ft/sec$

5- سرعت دورانی میله (3)

$\omega_3 = \frac{V_{B/A}}{AB} = \frac{6,54}{3} \times 12 = 26,16 \ rad/sec$ ساعت)



inverted slider crankk — مثال : مطلوب است ترسیم دیاگرام سرعت مکانیزم



$MA = 2''$

$MQ = ۴/۱''$

$n_2 = 600\ rpm$

$Q_A = 3''$

ترسیم :

۱ـ مبدأ O_V و مقیاس مناسب انتخاب می‌کنیم — $1in = 5.23\ ft/sc$

۲ـ سرعت نقطه A روی میله ② (A_2)

$$\vec{V}_{A_2} = \vec{V}_M + \vec{V}_{A_2/M}$$

$$V_{A_2/M} = AM \cdot \omega_2 = \frac{2}{12} \times \frac{2\pi 600}{60} = 10{,}46\ ft/sec \perp AM$$

3ـ سرعت نقطه A_3 (نقطه A روی میله‌ی ③) :

$$\vec{V}_{A_3} = \vec{V}_{A_2} + \vec{V}_{A_3/A_2}$$

چون $\vec{V}_{A_3} \perp QA$ و $\vec{V}_{A_3/A_2} \parallel AQ$ می‌باشد لذا مثلث برداری قابل ترسیم است.

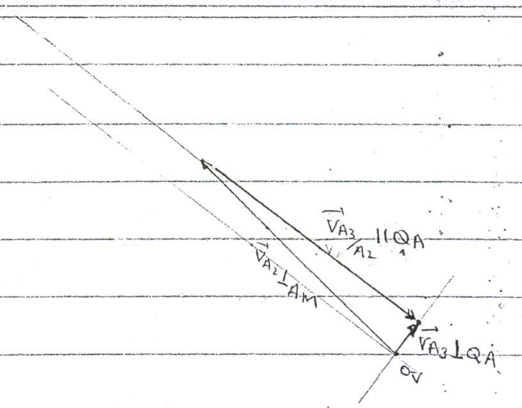
۴ـ پس مقیاس :

$V_{A_3/A_2} =$ ۰/۰

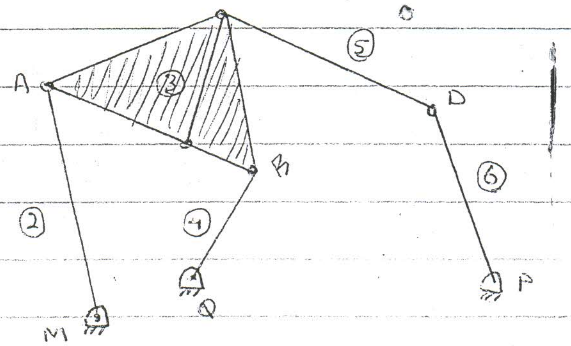
$V_{A_3} = /6 \times 5{,}23$

5 سرعت دورانی میله 3 :

$$\omega_3 = \frac{V_{A_3}}{QA} = \frac{/6 \times 5{,}23 \times 12}{3} = 12.55\ rad/sec$$ (ساعتی)



مثال: مطلوب است ترسیم دیاگرام سرعت مکانیزم ۶ میله‌ای:



MA = 2"

PD = 2"

$n_2 = 900\ rpm$

ترسیم:

۱. مبدای O_V و مقیاس مناسب انتخاب می‌کنیم 1in = 5.23 ft/sec

2. سرعت نقطه‌ی A: $\omega_2 = \frac{2\pi n_2}{60} = \frac{2\pi 900}{60} = 94.2 \frac{rad}{sec}$

$\vec{V}_{A_2} = \vec{V}_M + \vec{V}_{A_2/M}$

$\vec{V}_{A/M} = AM \cdot \omega_2 = 2 \times \frac{94.2}{12} = 15.7\ ft/sec \perp AM$

3. سرعت نقطه‌ی B: $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{B/A}$

چون $\vec{V}_{B/A} \perp BA$ و $\vec{V}_B \perp QB$ می‌باشد لذا مثلث برداری قابل ترسیم است.

$\vec{V_C} = \vec{V_A} + \vec{V_{C/A}}$ 4- سرعت نقطه‌ی C

$\vec{V_C} = \vec{V_B} + \vec{V_{C/B}}$

چون $\vec{V_{C/A}} \perp AC$ و $\vec{V_{C/B}} \perp BC$ و $\vec{V_A}$ و $\vec{V_B}$ معلوم می‌باشند لذا از تلاقی دو معادله‌ی بالا $\vec{V_C}$ بدست می‌آید

5- سرعت نقطه‌ی D $\quad \vec{V_D} = \vec{V_C} + \vec{V_{D/C}}$

چون $\vec{V_D} \perp PD$ و $\vec{V_{D/C}} \perp DC$ لذا مثلث برداری قابل رسم است.

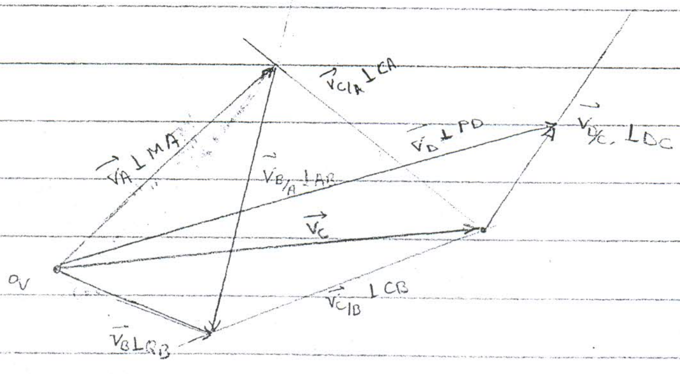
6- از مقیاس:

$\omega_3 = \frac{V_{B/A}}{AB} = 5,23 \times \frac{۲,۹}{۱,۹ \times 12} = 62,8 \ rad/sec$ ساعت

$\omega_4 = \frac{V_B}{QB} = 5,23 \times \frac{2,6 \times 12}{1,75} = 93,6 \ rad/sec$ ساعت

$\omega_5 = \frac{V_{D/C}}{DC} = 5,23 \times \frac{۰,6 \times 12}{2,1} = 17,9 \ \frac{rad}{sec}$ مثلثاتی

$\omega_6 = \frac{V_D}{PD} = 5,23 \times \frac{3,3 \times 12}{2} = 103,55$ ساعت

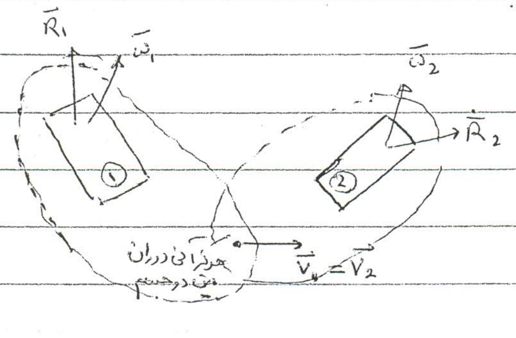


objective 7 :

تعیین مرکز آنی دوران :

مرکز آنی دوران بین دو جسم صلب عبارت است از نقطه‌ای در دو جسم یا در امتداد فرضی دو جسم قرار گرفته و

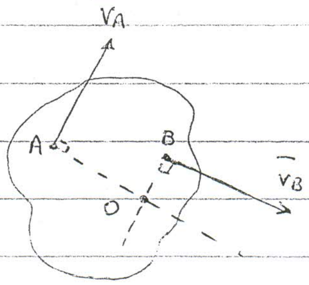
velocity آن بین دو جسم در آن نقطه یکسان باشد



حالت خاص : مرکز آنی دوران یک جسم و زمین :

چون velocity زمین صفر فرض می‌شود مرکز آنی دوران جسم و زمین عبارت است از نقطه‌ای در دو جسم

یا در امتداد فرضی آن قرار گرفته و velocity آن صفر می‌باشد



O : مرکز آنی دوران بین جسم و زمین

اگر جسمی حرکت انتقالی داشته باشد مرکز آنی دوران آن در

بی‌نهایت قرار دارد.

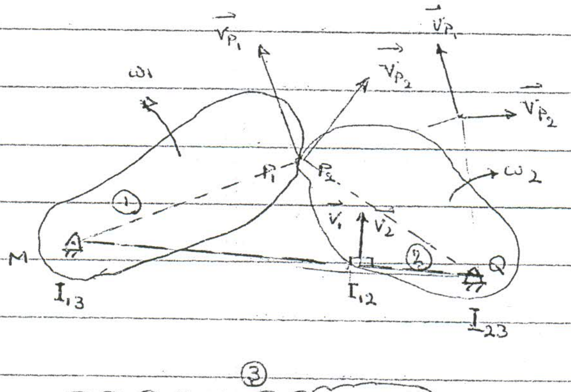
تعداد کل مراکز آنی دوران بین n جسم برابر است با :

$$N = \frac{n(n-1)}{2}$$

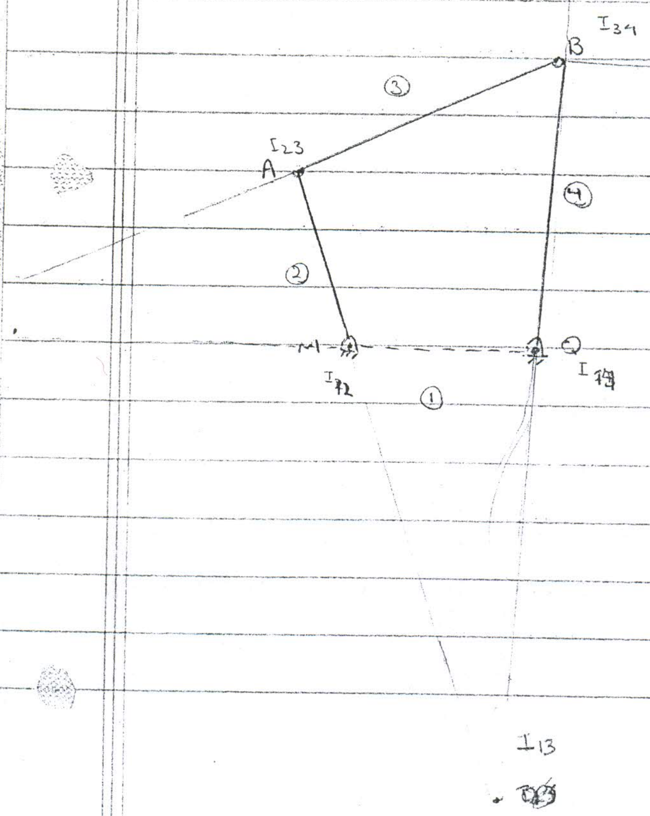
Kennedy's Theorem

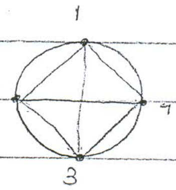
هر سه جسم صلب نسبت به هم مجموعاً دارای سه مرکز آنی دوران می باشند که روی یک خط مستقیم قرار دارند

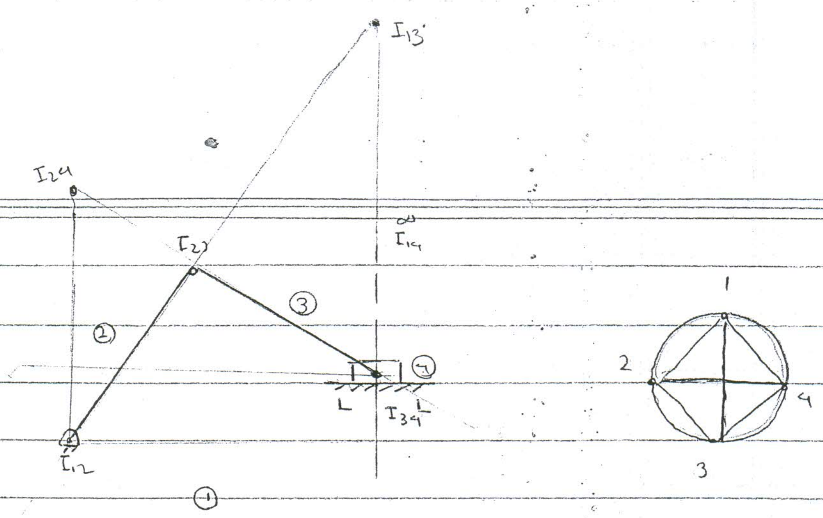
اثبات :



$$\overline{I_{13}I_{12}} \times \omega_1 = \overline{I_{12}I_{23}} \times \omega_2$$







I_{13}
I_{24}
I_{23}
I_{14}
3
2
4
L
I_{34}
I_{12}
1
1
2
4
3

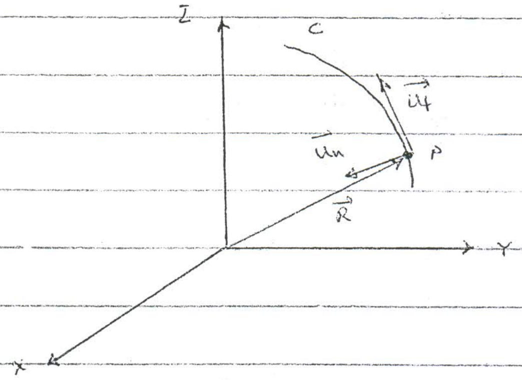
Unit III : Acceleration Analysis of Linkages :

objective 1 : تعریف شتاب در گورهای مختصات مختلف :

: Velocity بنا به تعریف $\qquad \vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt}\Big)_{xyz}$

: Acceleration و تعریف $\qquad \vec{A} = \frac{d^2\vec{R}}{dt^2}\Big)_{xyz}$

Part I : شتاب در گور مختصات بر حسب متغیرهای مسیر



$$\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt}\Big)_{xyz}$$

$$\vec{V} = \frac{ds}{dt}\,\vec{u}_t$$

$$\vec{A} = \frac{d^2R}{dt^2} = \frac{d^2s}{dt^2}\,\vec{u}_t + \frac{ds}{dt}\,\frac{d\vec{u}_t}{dt}$$

$$\frac{d\vec{u}_t}{dt} = \frac{d\vec{u}_t}{ds}\,\frac{ds}{dt}$$

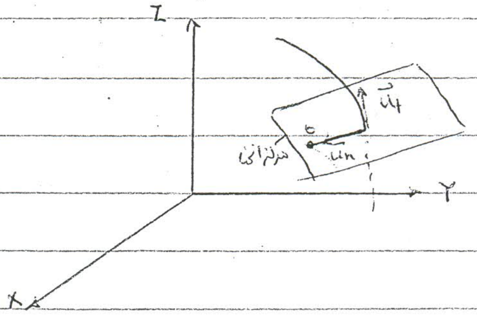
از دینامیک داریم :

$$\frac{d\vec{u}_t}{ds} = \frac{\vec{u}_n}{\rho}$$

لذا داریم :

$$\vec{A} = \frac{d^2s}{dt^2}\,\vec{u}_t + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{\vec{u}_n}{\rho}$$

ρ شعاع انحنا و $\vec{u}_n$ بردار یکه در جهت مرکز انحنا است و همه در osculating plane قرار دارند 20



Part II : شتاب در مختصات استوانه‌ای

$$\vec{A} = \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \frac{d\vec{V}}{dt}$$

$$\vec{V} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z$$

$$\vec{A} = \ddot{r}\vec{u}_r + \dot{r}\frac{d\vec{u}_r}{dt} + \dot{r}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r\ddot{\theta}u_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} + \ddot{z}\vec{u}_z$$

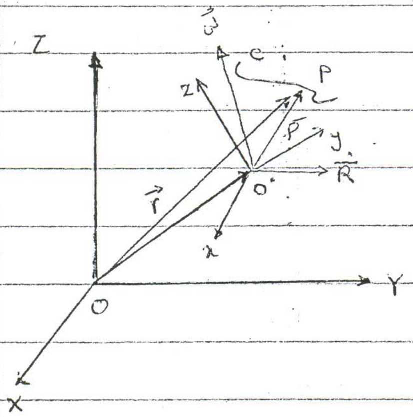
$$\vec{A} = (\ddot{r}\vec{u}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{r}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - r\dot{\theta}^2\vec{u}_r + \ddot{z}\vec{u}_z)$$

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{u}_\theta \qquad \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{u}_r$$

$$\vec{A} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{u}_\theta + \ddot{z}\vec{u}_z$$

Parts III, IV, V : شتاب ذره در دو محور مختصات :

فرض کنید ذره‌ی متحرک P در داخل محور مختصات xyz در حال حرکت است. محور مختصات xyz متحرک دارای حرکت کلی $\vec{R}$ و $\vec{\omega}$ نسبت به محور مختصات اینرسی XYZ می باشد



می‌خواهیم سرعت و شتاب مطلق ذره‌ی P را در محور مختصات مطلق XYZ تعیین کنیم.

$\vec{R}$ = بردار موقعیت مرکز مختصات xyz در XYZ.

$\vec{r}$ = بردار موقعیت ذره‌ی P در XYZ.

همواره رابطه‌ی برداری زیر برقرار است:

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{\rho}$$

همواره مشتق رابطه‌ی بالا نسبت به زمان در مختصات اینرسی XYZ برقرار است:

$$\left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{XYZ} = \left.\frac{d\vec{R}}{dt}\right)_{XYZ} + \left.\frac{d\vec{\rho}}{dt}\right)_{XYZ} \qquad (a)$$

چون ρ در مختصات متحرک xyz که جلب تعریف شده لذا مشتق آن در مختصات اینرسی XYZ نسبت به زمان گرفته شده لذا داریم:

$$\left.\frac{d\vec{\rho}}{dt}\right)_{XYZ} = \left.\frac{d\vec{\rho}}{dt}\right)_{xyz} + \vec{\omega}\times\vec{\rho} \qquad (b)$$

در معادله‌ی (a) قرار می‌دهیم:

$$\left.\frac{dr}{dt}\right)_{XYZ} = \left.\frac{d\vec{R}}{dt}\right)_{XYZ} + \left.\frac{d\vec{\rho}}{dt}\right)_{xyz} + \vec{\omega}\times\vec{\rho}$$

و یا داریم:

$$\vec{V}_{XYZ} = \dot{\vec{R}} + \vec{V}_{xyz} + \vec{\omega}\times\vec{\rho}$$

برای محاسبه‌ی شتاب از سرعت نسبت به زمان مشتق می‌گیریم:

$$\frac{d\vec V_{XYZ}}{dt}\Big)_{XYZ} = \frac{d\dot{\vec R}}{dt}\Big)_{XYZ} + \frac{d\vec V_{xyz}}{dt}\Big)_{XYZ} + \frac{d\vec\omega}{dt}\Big)_{XYZ}\times\vec\rho + \vec\omega\times\frac{d\vec\rho}{dt}\Big)_{XYZ} \quad (c)$$

چون $\vec V_{xyz}$ و $\vec\rho$ در مختصات متحرک xyz تعریف می‌شوند ولی مشتق آن‌ها نسبت به زمان در مختصات ایـنجا گرفته شده ولذا :

$$\frac{d\vec V_{xyz}}{dt}\Big)_{XYZ} = \frac{d\vec V_{xyz}}{dt}\Big)_{xyz} + \vec\omega\times\vec V_{xyz}$$

$$\frac{d\vec\rho}{dt}\Big)_{XYZ} = \frac{d\vec\rho}{dt}\Big)_{xyz} + \vec\omega\times\vec\rho$$

در رابطه‌ی (c) قرار می‌دهیم :

$$\frac{d\vec V_{XYZ}}{dt}\Big)_{XYZ} = \frac{d\dot{\vec R}}{dt}\Big)_{XYZ} + \underbrace{\frac{d\vec V_{xyz}}{dt}\Big)_{xyz}}^{\vec a_{xyz}} + \vec\omega\times\vec V_{xyz} + \frac{d\omega}{dt}\Big)_{XYZ}\times\vec\rho$$

$$+\ \vec\omega\times\underbrace{\frac{d\vec\rho}{dt}\Big)_{xyz}}_{\vec V_{xyz}} + \vec\omega\times(\vec\omega\times\vec\rho)$$

بنابراین :

$$\vec A_{XYZ} = \ddot{\vec R} + \vec A\big)_{xyz} + 2\vec\omega\times\vec V_{xyz} + \dot{\vec\omega}\times\vec\rho + \vec\omega\times(\vec\omega\times\vec\rho)$$

در معادلات فوق :

$\vec V_{XYZ}$: سرعت ذره در مختصات مطلق XYZ

$\vec A_{XYZ}$: شتاب ذره در مختصات مطلق XYZ

$\dot{\vec R}$: سرعت مرکز مختصات متحرک xyz در مختصات مطلق XYZ

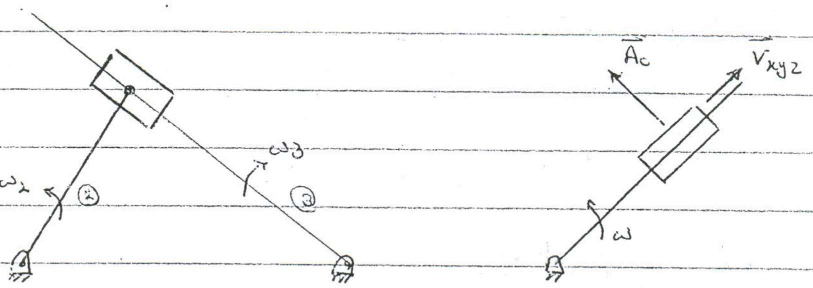
$\ddot{\vec R}$: شتاب مرکز مختصات متحرک xyz در مختصات مطلق XYZ

$\vec V_{xyz}$: سرعت ذره P در مختصات متحرک xyz

$\vec a_{xyz}$: شتاب ذره P در مختصات متحرک xyz

Coriolis acceleration : $2\vec\omega\times\vec V_{xyz}$

و زمانی بوجود می‌آید که جسم دارای دوران باشد و همزمان سرعت خطی هم داشته باشد



جهت شتاب کوریولیس از قانون دست راست بدست می‌آید

objective 2

کاربرد اعداد مختلط:

$$R = re^{j\theta} \Rightarrow \frac{dR}{dt} = \dot{r}e^{j\theta} + jr\dot{\theta}e^{j\theta}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{u}_r = e^{j\theta}$$

$$v = \dot{r}\bar{u}_r + r\dot{\theta}\bar{u}_\theta \qquad \bar{u}_\theta = je^{j\theta}$$

حال برای بدست آوردن شتاب دوباره از رابطه‌ی بالا مشتق می‌گیریم:

مشتق دوم اعداد مختلط:

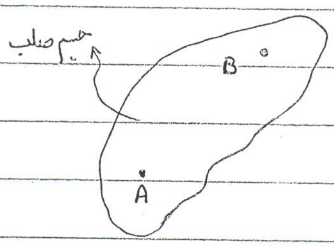
$$\frac{d^2R}{dt^2} = \ddot{r}e^{j\theta} + j\dot{r}\dot{\theta}e^{j\theta} + j\dot{r}\dot{\theta}e^{j\theta} + jr\ddot{\theta}e^{j\theta} - r\dot{\theta}^2e^{j\theta}$$

$$\frac{d^2R}{dt^2} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)e^{j\theta} + j(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})e^{j\theta}$$

objective 3

شتاب بین دو نقطه از یک جسم صلب

ثابت شد: $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_{AB}$



از رابطه‌ی سرعت نسبت به زمان مشتق می‌گیریم:

$$\left.\frac{d\vec{V}_B}{dt}\right)_{xyz} = \left.\frac{d\vec{V}_A}{dt}\right)_{xyz} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{\rho}_{AB} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_{AB})$$

و یا:

$$\vec{A}_B = \vec{A}_A + \underbrace{\dot{\vec{\omega}} \times \vec{\rho}_{AB} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_{AB})}_{\vec{A}_{B/A}}$$

لذا داریم:

$$\boxed{\vec{A}_B = \vec{A}_A + \vec{A}_{B/A}}$$

که:

$$\vec{A}_{B/A} = \underbrace{\dot{\vec{\omega}} \times \vec{\rho}_{AB}}_{\vec{A}^t_{B/A}} + \underbrace{\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_{AB})}_{\vec{A}^r_{B/A}}$$

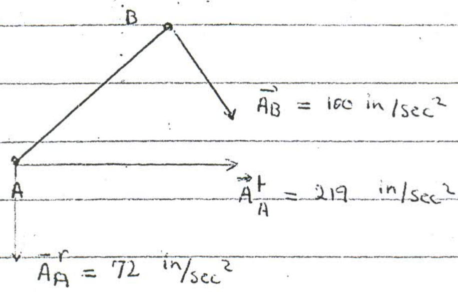
زیرا:

$$\vec{A}^t_{B/A} = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{\rho}_{AB} \quad \perp AB$$

$$\vec{A}^r_{B/A} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_{AB}) \quad \parallel AB$$

همواره مقدار $A^r_{B/A}$ مشخص است اما ابتدا رسم دیاگرام سرعت

مثال 3: از جسم صلب AB شتاب نقاط A و B در شکل نشان داده شده‌اند دیاگرام شتاب را رسم کنید



AB = 1 in

ترسیم:

1- مبدأ O_A در مقیاس مناسب را رسم می‌کنیم: $1in = 50\ in/sec^2$

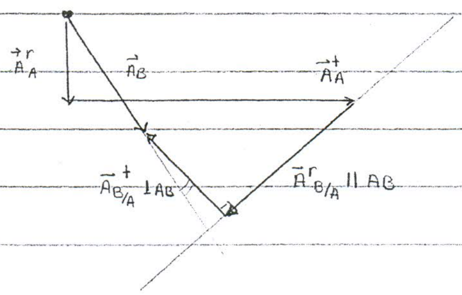
2- شتاب نقطه B:

$$\vec{A}_B = \vec{A}_A + \vec{A}_{B/A}$$

برحسب مؤلفه‌ها

$$\vec{A}_B = \vec{A}^r_A + \vec{A}^t_A + \vec{A}^r_{B/A} + \vec{A}^t_{B/A}$$

چون $\vec{A}^r_{B/A}$ موازی AB و $\vec{A}^t_{B/A}$ عمود بر AB می‌باشند لذا چند ضلعی برداری قابل ترسیم است:



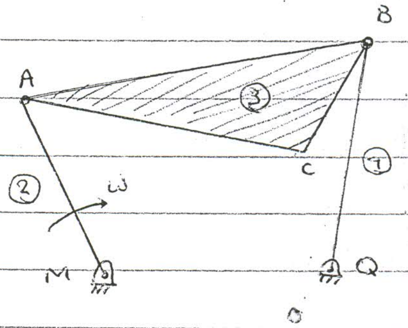
3. شتاب زاویه‌ای میله AB (مثلثاتی)

$$\alpha_{AB} = \frac{A^t_{B/A}}{AB} = \frac{96}{1} = 96\ rad/s^2$$

objective 5

روش ترسیم دیاگرام شتاب مکانیزم ها

مثال ۵: مکانیزم چهارمیله‌ای زیر مفروض است؛ مطلوب است ترسیم دیاگرام شتاب.



$MA = 4''$

$AB = 8''$

$QB = 5.5''$

$MQ = 5''$

$\omega_2 = 94.2 \ rad/sec$

$\alpha_2 = 0$

$\omega_3 = 30 \ rad/s$

$\omega_4 = 74.2 \ rad/s$

ترسیم:

۱. مبدا O_A و مقیاس مناسب انتخاب می‌کنیم. $1in = 1000 \ ft/sec^2$

۲. شتاب نقطه A:

$$\vec{A}_A = \vec{A}_M + \vec{A}_{A/M} = \vec{A}^r_{A/M} + \vec{A}^t_{A/M}$$

$$A^r_{A/M} = MA \times \omega_2^2 = \frac{4}{12} \times (94.2)^2 = 2960 \ ft/sec^2 \parallel AM$$

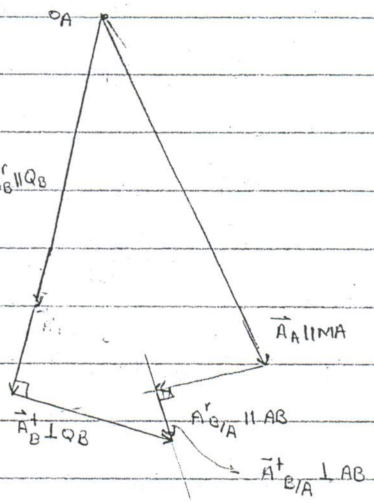
۳. شتاب نقطه B:

$$\vec{A}_B = \vec{A}_A + \vec{A}_{B/A} \Rightarrow \vec{A}^r_B + \vec{A}^t_B = \vec{A}_A + \vec{A}^r_{B/A} + \vec{A}^t_{B/A} \quad (a)$$

$$A^r_B = BQ \times \omega_4^2 = \frac{5.5}{12} \times (74.2)^2 = 2520 \ ft/sec^2 \parallel QB$$

$$A^r_{B/A} = AB \times \omega_3^2 = \frac{8}{12} \times 30^2 = 600 \ ft/sec \parallel AB$$

چون $\vec{A}^t_B$ عمود بر QB و چون $\vec{A}^t_{B/A}$ عمود بر AB می‌باشد لذا چندضلعی بردارها قابل ترسیم است:

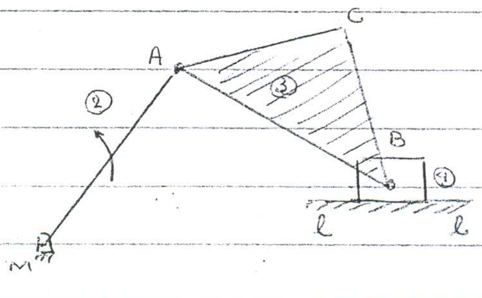


۴: با توجه به مقیاس داریم : جواب $\vec{A}^t_B$ و $\vec{A}^t_{B/A}$ با توجه به معادله a معلوم رسم می‌شود جواب آن‌ها با توجه به مقیاس معلوم می‌شود

$$\alpha_3 = \frac{A^t_{B/A}}{AB} = \frac{120}{8/12} = 180 \ rad/sec^2$$ ساعت   ۵: شتاب دورانی :

$$\alpha_4 = \frac{A^t_B}{QB} = \frac{1150}{5,5/12} = 2510 \ rad/sec^2$$ ساعت

مثال: مطلوب است رسم دیاگرام شتاب مکانیزم slider-crank :



$MA = 2''$

$AB = 3''$

$AC = 1,5''$

$\omega_2 = 62,8$ rps

$\omega_3 = 26,16$ rps

$\alpha_2 = 0$

ترسیم :

۱- مبدا O_A و مقیاس مناسب انتخاب می‌کنیم : $1\,in = 200\ Ft/sec^2$

2- شتاب نقطه A :

$$\vec A_A = \cancel{\vec A_M} + \vec A_{A/M} = \vec A^r_{A/M} + \cancel{\vec A^t_{A/M}}$$

$$A^r_{A/M} = AM \cdot \omega_2^{\,2} = \frac{2}{12}\times 62.8^2 = 657.6\ \frac{Ft}{sec^2} \parallel MA$$

3- شتاب نقطه B :

$$\vec A_B = \vec A_A + \vec A_{B/A} = \vec A_A + \vec A^r_{B/A} + \vec A^t_{B/A} \quad (a)$$

چون $\vec A_B$ موازی ll و $\vec A^t_{B/A}$ عمود بر AB می‌باشد لذا چند ضلعی برداری قابل ترسیم است.

$$A^r_{B/A} = AB\times\omega_3^{\,2} = \frac{3}{12}\times(26.16)^2 = 171\ Ft/sec^2 \parallel AB$$

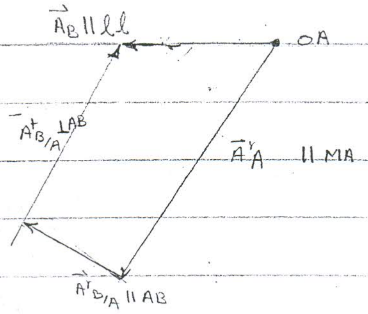
۴- از مقیاس :

$A_B = 397\ Ft/sec^2$

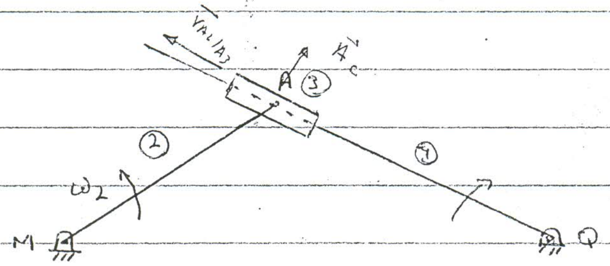
$A^t_{B/A} = 496\ Ft/sec^2$

جهت $\vec A_B$ و $\vec A^t_{B/A}$ از معادله (a) معلوم می‌شود.

$$\alpha_3 = \frac{A^t_{B/A}}{AB} = \frac{496}{3/12} = 1985\ rad/sec^2$$ مثلثاتی



مثال ۵: مطلوب است ترسیم دیاگرام شتاب مکانیزم زیر.



$MA = 2''$

$MQ = 4.1''$

$\omega_2 = 62.8$ rps

$V_A = 10.46$ ft/sec

$V_{A_2/A_3} = 9.93$ fps

$QA = 3''$

$\alpha_2 = 0$

ترسیم:

۱. مبدا O_A و مقیاس مناسب انتخاب می کنیم. 1 in = 150 fps

[illegible]

۲. شتاب نقطه A:
$$\vec{A}_{A_2} = \vec{A}_M + \vec{A}_{A_2/M} = \vec{A}^r_{A_2/M} = MA\,\omega_2^2$$
$$= \frac{2}{12} \times (62.8)^2 = 657 \ \text{fps}^2 \parallel MA$$

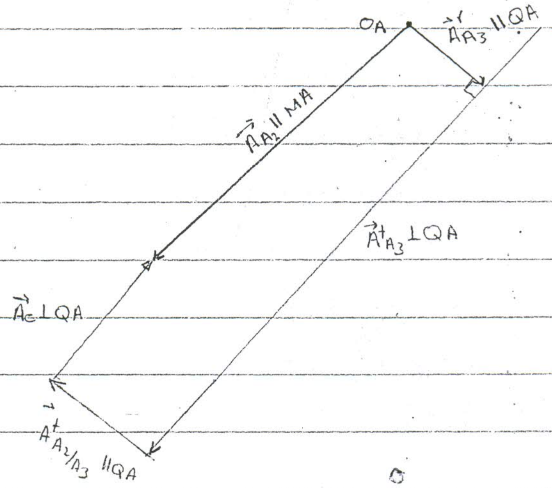
۳. شتاب

$$\vec{A}_{A_2} = \vec{A}_{A_3} + \vec{A}_{A_2/A_3} + \vec{A}_c = \vec{A}^r_{A_3} + \vec{A}^t_{A_3} + \vec{A}^r_{A_2/A_3} + \vec{A}^t_{A_2/A_3} + \underbrace{\vec{A}_c}_{2\vec{\omega}_3 \times \vec{V}_{A_2/A_3}}$$

$\vec{A}^r_{A_2/A_3}$ را برابر صفر در نظر گرفته و A^t آن را برابر شتاب نسبی

چون $\vec{A}^t_{A_2}$ عمود بر QA و $\vec{A}^t_{A_2/A_3}$ موازی با QA می باشند لذا چند ضلعی برداری قابل ترسیم است:

$$A^r_{A_3} = QA\,\omega_3^2 = \frac{3}{12} \times (12.55)^2 = 39.9 \ \text{ft/sec}^2 \parallel QA$$
$$A_c = 2\omega_3 \times V_{A_2/A_3} = 2 \times 12.55 \times 9.93 = 249 \ \text{ft/sec}^2 \perp QA$$



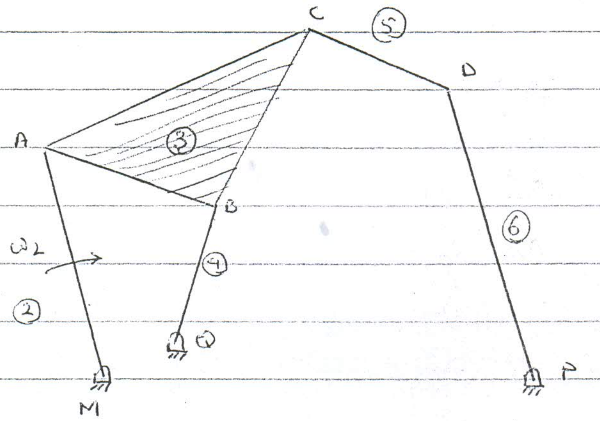
۴- ازمقیاس:

$A^{t}_{A_3} = 857 \ \text{Ft/sec}^2$

$A^{t}_{A_2/A_3} =$

5. شتاب دورانی میله 3:
$\alpha_3 = \dfrac{A^{t}_{3}}{QA} = \dfrac{857}{3/12} = 3428 \ \text{rad/sec}^2$ مثلثاتی

مثال:



$\omega_2 = 79.2 \ \text{rps}$

$V_A = 15.7 \ \text{Fps}$

$\omega_3 = 62.8 \ \text{rps}$

$\omega_4 = 93.6 \ \text{rps}$

$\omega_5 = 17.9 \ \text{rps}$

$\omega_6 = 103.55$

31.

رسم:

۱- مبدأ O_A و مقیاس مناسب انتخاب می‌کنیم. $1\,in = 500\ ft/sec^2$

2- شتاب A

$$\vec{A}_A = \vec{A}_M + \vec{A}_{A/M} = \vec{A}'_{A/M}$$

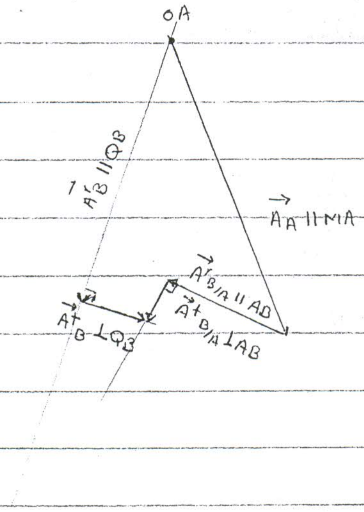
$$A'_{A/M} = MA \times \omega_2^2 = \frac{2}{12} \times (99.2)^2 = 1479\ ft/sec^2 \parallel MA$$

3- شتاب نقطه B

$$\vec{A}^t_B + \vec{A}'_B = \vec{A}_A + \vec{A}^r_{B/A} + \vec{A}^t_{B/A}$$

$$A^r_B = QB\,(\omega_4)^2 = \frac{1.75}{12} \times (93.6)^2 = 1278\ ft/sec^2 \parallel QB$$

$$A^r_{B/A} = AB \times (\omega_3)^2 = \frac{1.88}{12} \times (62.8)^2 = 618\ ft/sec^2 \parallel AB$$

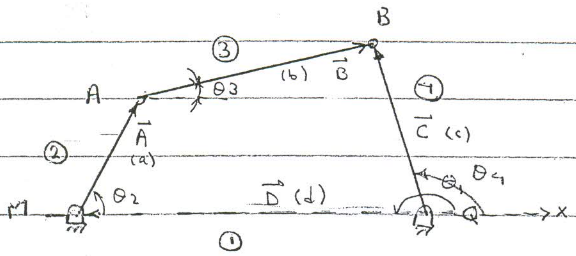

OA
A'B II QB
AA II MA
A'B/A II AB
A+B ⊥ QB
A+B/A ⊥ AB

Unit III

Displacement velocity and Acceleration Analysis of Linkage Using Analytical Methods.

objective 1

تحلیل مکانیزم چهارمیله‌ای



همواره در حین حرکت مکانیزم بالا رابطه‌ی برداری زیر برقرار است:

$$\vec{D} + \vec{A} + \vec{B} - \vec{C} = 0$$

در نمایش با اعداد کمپلکس:

$$D = de^{j\theta_1}$$
$$A = ae^{j\theta_2}$$
$$B = be^{j\theta_3}$$
$$C = ce^{j\theta_4}$$

لذا داریم:

$$de^{j\theta_1} + ae^{j\theta_2} + be^{j\theta_3} - ce^{j\theta_4} = 0$$

با تفکیک معادله‌ی بالا به سمت حقیقی و موهومی:

$$d\cos\theta_1 + a\cos\theta_2 + b\cos\theta_3 - c\cos\theta_4 = 0$$

$$d\sin\theta_1 + a\sin\theta_2 + b\sin\theta_3 - c\sin\theta_4 = 0$$

نجعل θ_1 مساويا 180° :

$$\begin{cases} -d + a\cos\theta_1 + b\cos\theta_2 - c\cos\theta_4 = 0 \\ a\sin\theta_2 + b\sin\theta_3 - c\sin\theta_4 = 0 \end{cases}$$

$$\left[-d + a\cos\theta_2 - c\cos\theta_4\right]^2 = (b\cos\theta_3)^2$$

$+$

$$\left[a\sin\theta_2 - c\sin\theta_4\right]^2 = (-b\cos\theta_3)^2$$

$$d^2 + a^2\cancel{\cos^2\theta_2} + c^2\cancel{\cos^2\theta_4} - 2da\cos\theta_2 + 2dc\cos\theta_4 - 2ac\cos\theta_2\cos\theta_4 = b^2\cos^2\theta_3$$

$$a^2\cancel{\sin^2\theta_2} + c^2\cancel{\sin^2\theta_4} - 2ac\sin\theta_2\sin\theta_4 = b^2\cos^2\theta_3$$

$$d^2 + a^2 - b^2 + c^2 - 2ad\cos\theta_2 + 2dc\cos\theta_4 - 2ac\{\cos\theta_2\cos\theta_4 +$$

$$\sin\theta_2\sin\theta_4) = 0$$

$$K_1\cos\theta_4 - K_2\cos\theta_2 + K_3 = \cos(\theta_2 - \theta_4)$$

$$K_1 = d/a$$

$$K_2 = d/c$$

$$K_3 = \frac{a^2 - b^2 + c^2 + d^2}{2ac}$$

$$\sin\theta_4 = \frac{2\tan\theta_4/2}{1 + \tan^2\theta_4/2} \qquad \cos\theta_4 = \frac{1 - \tan^2\theta_4/2}{1 + \tan^2\theta_4/2} \; : \tan\theta/2 \text{ بفرض}$$

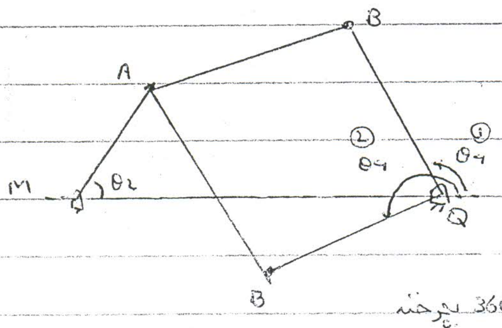
$$A\tan^2\frac{\theta_4}{2} + B\tan\frac{\theta_4}{2} + C = 0$$

$$A = \cos\theta_2 + K_3 - K_2 - K_2\cos\theta_3 \qquad K_1 = \frac{d}{a}$$

$$B = -2\sin\theta_2 \qquad K_2 = \frac{d}{c}$$

$$C = K_1 + K_3 - (1+K_2)\cos\theta_2 \qquad K_3 = \frac{a^2-b^2+c^2+d^2}{2ac}$$

$$\tan\frac{\theta_4}{2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2-4ac}}{2A}$$



working space : $B^2-4ac \geq 0$

به دلیل این که دو شکل مختلف برای شروع حرکت داریم

به همین دلیل ± داریم

working space برای θ_2 است.

هر دو Link MA و BQ می‌توانند 360 بچرخند

در صورتی که طول این دو میله باهم و AB و MQ باهم برابر باشد.

محاسبه‌ی رابطه‌ی سرعت:

از معادله‌ی تغییر مکان نسبت به زمان مشتق می‌گیریم:

$$de^{j\theta_1} + ae^{j\theta_2} + be^{j\theta_3} - ce^{j\theta_4} = 0$$

مشتق رابطه‌ی بالا نسبت به زمان:

37 $$aj\omega_2 e^{j\theta_2} + bj\omega_3 e^{j\theta_3} - cj\omega_4 e^{j\theta_4} = 0$$

با تفکیک داریم:

$$\begin{cases} -a\omega_2 \sin\theta_2 - b\omega_3 \sin\theta_3 + c\omega_4 \sin\theta_4 = 0 \\ a\omega_2 \cos\theta_2 + b\omega_3 \cos\theta_3 - c\omega_4 \cos\theta_4 = 0 \end{cases}$$

دو معادله دو مجهول ω_3 و ω_4 :

$$\omega_3 = \frac{a\omega_2}{b} \frac{\sin(\theta_4-\theta_2)}{\sin(\theta_3-\theta_4)}$$

$$\omega_4 = \frac{a\omega_2}{c} \cdot \frac{\sin(\theta_2-\theta_3)}{\sin(\theta_4-\theta_3)}$$

محاسبه‌ی روابط شتاب:

از رابطه‌ی سرعت نسبت به زمان مشتق می‌گیریم:

$$aj\alpha_2 e^{j\theta_2} - a\omega_2^2 e^{j\theta_2} + bj\alpha_3 e^{j\theta_3} - b\omega_3^2 e^{j\theta_3} - cj\alpha_4 e^{j\theta_4}$$

$$+ c\omega_4^2 e^{j\theta_4} = 0$$

با تفکیک داریم:

$$-a\alpha_2 \sin\theta_2 - a\omega_2^2 \cos\theta_2 - b\alpha_3 \sin\theta_3 - b\omega_3^2 \cos\theta_3 + c\alpha_4 \sin\theta_4$$

$$+ b\omega_4^2 \cos\theta_4 = 0$$

$$a\alpha_2 \cos\theta_2 - a\omega_2^2 \sin\theta_2 + b\alpha_3 \cos\theta_3 - b\omega_3^2 \sin\theta_3 - c\alpha_4 \cos\theta_4$$ 38

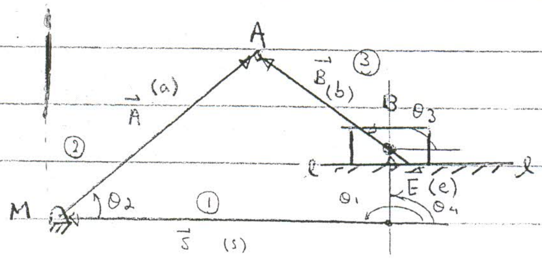
$+ \, C\omega_4^2 \sin\theta_4 = 0$

حال برای معادله داریم:

$$\alpha_3 = \frac{CD - AF}{AE - BD}$$

$$\alpha_4 = \frac{CE - BF}{AE - BD}$$

آنالیز تغییر مکان مکانیزم slider_crank :



برحسب اعداد مختلط:

$$\vec{S} + \vec{A} - \vec{B} - \vec{E} = 0 \Rightarrow Se^{j\theta_1} + ae^{j\theta_2} - be^{j\theta_3} - ee^{j\theta_4} = 0$$

با تفکیک داریم:

$$S\cos\theta_1 + a\cos\theta_2 - b\cos\theta_3 - e\cos\theta_4 = 0$$

$$S\sin\theta_1 + a\sin\theta_2 - b\sin\theta_3 - e\sin\theta_4 = 0 \qquad \theta_1 = 0 \, , \, \theta_4 = 90$$

$$\begin{cases} -S + a\cos\theta_2 - b\cos\theta_3 = 0 \\ a\sin\theta_2 - b\sin\theta_3 - e = 0 \end{cases}$$

39

$$(-S_1 + a\cos\theta_2)^2 = (b\cos\theta_3)^2 \Rightarrow S^2 + a^2\cos^2\theta_2 - 2Sb\cos\theta_2 = b^2\cos^2\theta_3$$

$$(-e + a\sin\theta_2)^2 = (b\sin\theta_3)^2 \Rightarrow e^2 + a^2\sin^2\theta_2 - 2ea\sin\theta_2 = b^2\sin^2\theta_3$$

$$LS^2 + MS + N = 0 \qquad L = 1$$

$$M = -2a\cos\theta_2$$

$$N = a^2 + e^2 - b^2 - 2ae\sin\theta_2$$

$$S_{1,2} = \frac{-M \pm \sqrt{M^2 - 4LN}}{2L}$$

$$\sin\theta_3 = \tfrac{1}{b}\left[a\sin\theta_2 - e\right] \Rightarrow \theta_3 = \sin^{-1}\tfrac{1}{b}\left[a\sin\theta_2 - e\right]$$

محاسبه‌ی سرعت :

$$\dot{S}je^{j\theta_1} + a\omega_2 j e^{j\theta_2} - bj\omega_3 e^{j\theta_3} = 0$$

$$\dot{S}\cos\theta_1 - a\omega_2\sin\theta_2 + b\omega_3\sin\theta_3 = 0$$

$$\theta_1 = 180$$

$$\dot{S}\sin\theta_1 + a\omega_2\cos\theta_2 - b\omega_3\cos\theta_3 = 0$$

$$\begin{cases} -\dot{S} - a\omega_2\sin\theta_2 + b\omega_3\sin\theta_3 = 0 \\ a\omega_2\cos\theta_2 - b\omega_3\cos\theta_3 = 0 \end{cases}$$

$$\omega_3 = \frac{a\omega_2}{b}\,\frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_3}$$

$$\dot{S} = a\omega_2\,\frac{\sin(\theta_3-\theta_2)}{\cos\theta_3}$$

محاسبه‌ی شتاب‌ها

$$\ddot{S}e^{J\theta_1} + aJ\alpha_2 e^{J\theta_2} - a\omega^2 e^{J\theta_2} - bJ\alpha_3 e^{J\theta_3} + b\omega_3^2 e^{J\theta_3} = 0$$

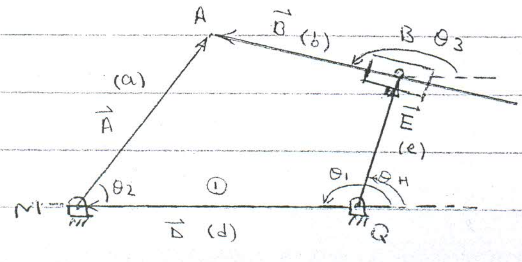
با تبدیل داریم:

$$\begin{cases} \ddot{S}\overset{-\ddot{S}}{\cos\theta_1} - a\alpha_2\sin\theta_2 - a\omega^2\cos\theta_2 + b\alpha_3\sin\theta_3 + b\omega_3^2\cos\theta_3 = 0 \\ \ddot{S}\overset{0}{\sin\theta_1} + a\alpha_2\cos\theta_2 - a\omega^2\sin\theta_2 - b\alpha_3\cos\theta_3 + b\omega_3^2\sin\theta_3 = 0 \end{cases}$$

$$\alpha_3 = \frac{a\alpha_2\cos\theta_2 - a\omega_2^2\sin\theta_2 + b\omega_3^2\sin\theta_3}{b\cos\theta_3}$$

$$\ddot{S} = \left[-a\alpha_2\sin\theta_2 - a\omega_2^2\cos\theta_2 + b\alpha_3\sin\theta_3 + b\omega_3^2\cos\theta_3\right\}$$

آنالیز تغییر مکان مکانیزم Inverted slider crank :



$$\vec{D} + \vec{A} - \vec{B} - \vec{E} = 0$$

برحسب ابعاد لینک :

$de^{j\theta_1} + ae^{j\theta_2} - be^{j\theta_3} - ee^{j\theta_4} = 0$ $\qquad \theta_1 = 180$

$\theta_3 + 90 + 180 - \theta_4 = 360$

$d\cos\theta_1 + a\cos\theta_2 - b\cos\theta_3 - e\cos\theta_4 = 0$ $\qquad \theta_3 - \theta_4 = 90^\circ$

$\theta_3 = 90 + \theta_4 \Rightarrow \omega_3 = \omega_4$

$d\sin\theta_1 + a\sin\theta_2 - b\sin\theta_3 - e\sin\theta_4 = 0$ $\qquad \alpha_3 = \alpha_4$

$-d + a\cos\theta_2 - b\cos\theta_3 - e\cos\theta_4 = 0$

$a\sin\theta_2 - b\sin\theta_3 - e\sin\theta_4 = 0$

$$\begin{cases} -d + a\cos\theta_2 - e\cos\theta_4 + b\sin\theta_4 = 0 \\ a\sin\theta_2 - e\sin\theta_4 - b\cos\theta_4 = 0 \end{cases}$$

$$b = \frac{a\sin\theta_2 - e\sin\theta_4}{\cos\theta_4}$$

$$\sin\theta = \frac{2\tan\theta/2}{1+\tan^2\theta/2} \qquad \cos\theta = \frac{1-\tan^2\theta/2}{1+\tan^2\theta/2}$$

$$K_1\tan\frac{\theta_4}{2} + K_2\tan\frac{\theta_4}{2} + K_3 = 0$$

$$\tan\theta_4/2 = \frac{-K_2 \pm \sqrt{K_2^2 - 4K_1K_3}}{2K_1}$$

$K_1 = d - e - a\cos\theta_2$

$K_2 = 2a\sin\theta_2$

$K_3 = a\cos\theta_2 - d - e$

رابطه‌ی سرعت :

$$a j\omega_2 e^{j\theta_2} - \dot{b} e^{j\theta_3} - b j\omega_3 e^{j\theta_3} - e j\omega_4 e^{j\theta_4} = 0$$

$$\begin{cases} -a\omega_2 \sin\theta_2 - \dot{b}\cos\theta_3 + b\omega_3 \sin\theta_3 + e\omega_4 \sin\theta_4 = 0 & \omega_3 = \omega_4 \\ a\omega_2 \cos\theta_2 - \dot{b}\sin\theta_3 - b\omega_3 \cos\theta_3 - e\omega_4 \cos\theta_4 = 0 & \theta_3 = 90 + \theta_4 \end{cases}$$

$$\omega_4 = \omega_3 = \frac{a\omega_2}{b}\sin(\theta_2 - \theta_4)$$

$$\dot{b} = \frac{a\omega_2}{b}\left[b\cos(\theta_4 - \theta_2) - e\sin(\theta_4 - \theta_2)\right]$$

رابطه‌ی شتاب :

$$a j\alpha_2 e^{j\theta_2} - a\omega_2^2 e^{j\theta_2} - \ddot{b} e^{j\theta_3} - \dot{b} j\omega_3 e^{j\theta_3} + \dot{b} j\omega_3 e^{j\theta_3} - b j\alpha_3 e^{j\theta_3}$$

$$+ b\omega_3^2 e^{j\theta_3} - e j\alpha_4 e^{j\theta_4} + e\omega_4^2 e^{j\theta_4} = 0 \qquad \theta_3 = 90 + \theta_4$$

$$-a\alpha_2 \sin\theta_2 - a\omega_2^2 \cos\theta_2 - \ddot{b}\cos\theta_3 + 2\dot{b}\omega_3 \sin\theta_3 + b\alpha_3 \sin\theta_3 + b\omega_3^2 \cos\theta_3$$

$$+ e\alpha_4 \sin\theta_4 + e\omega_4^2 \cos\theta_4 = 0$$

$$a\alpha_2 \cos\theta_2 - a\omega_2^2 \sin\theta_2 - \ddot{b}\sin\theta_3 - 2\dot{b}\omega_3 \cos\theta_3 - b\alpha_3 \cos\theta_3 + b\omega_3^2 \sin\theta_3$$

$$- e\alpha_4 \cos\theta_4 + e\omega_4^2 \sin\theta_4 = 0$$

$$\alpha_4 = \frac{AF - CD}{AE - BD}$$

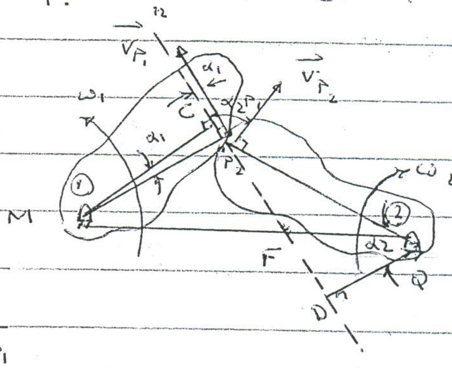
$$\ddot{b} = \frac{CE - BF}{AE - BD}$$

Unit V

Fundamental of uniform Rotary Transmission

بنابه تعریف نسبت سرعت بین دو جسم :

$$SR = \frac{\omega_2}{\omega_1} =$$



از روی شکل داریم :

$$V_{P_1} = MP_1 \cdot \omega_1 \implies \omega_1 = \frac{V_{P_1}}{MP_1}$$

$$V_{P_2} = QP_2 \cdot \omega_2 \implies \omega_2 = \frac{V_{P_2}}{QP_2}$$

لذا داریم :

$$\text{Speed ratio}: \ SR = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{V_{P_2} \cdot MP_1}{V_{P_1} \cdot QP_2}$$

می‌خواهیم که حرکت ما به صورت uniform منتقل شود :

باید جهت نرمال سرعت های مساوی باشد در جهت t می‌توانند مساوی نباشند که در این صورت لغزش داریم.

برای تماس دو جسم در حین انتقال سرعت در راستای نقطه تماس :

$$V_{P_1}^{n} = V_{P_2}^{n}$$

خطوط QD و MC را بر خط نرمال مشترک nn عمود می‌کنیم :

شرط تماس $V_{P_1}^n = V_{P_1}\cos\alpha_1 = V_{P_2}^n = V_{P_2}\cdot\cos\alpha_2$

از روی شکل : $QP_2 = \dfrac{QD}{\cos\alpha_2}$

$MP_1 = \dfrac{MC}{\cos\alpha_1}$

لذا : $SR = \dfrac{\omega_2}{\omega_1} = \dfrac{V_{P_2}\, MP_1}{V_{P_1}\, QP_2} = \dfrac{V_{P_2}\cos\alpha_2\, MC}{V_{P_1}\cos\alpha_1 \cdot QD}$

با رعایت شرط تماس :

$$SR = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{MC}{QD}$$

در مثلث QDF و MCF بنا بر زوایای مساوی متشابه اند لذا :

$$\boxed{SR = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{MC}{QD} = \frac{MF}{QF} = \frac{FC}{FD}}$$

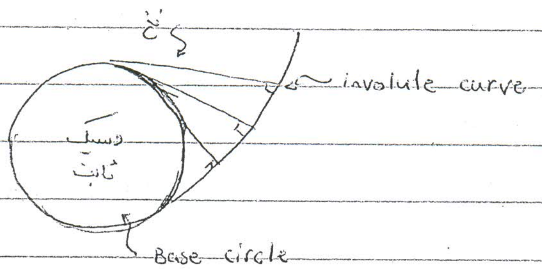
اگر نقطه F کوچکترین ارتعاشی در آن باشد SR دارای ارتعاش است و اگر مطلق ثابت باشد SR به

صورت uniform انتقال می یابد

* ثابت کردیم اگر نرمال مشترک خط المرکزین را در یک نقطه قطع کند آن نقطه باید مطلق ثابت باشد.

منحنی اینولوت : (involute curve)

عبارت است از مکان هندسی انتهای یک نخ که از روی یک دیسک ثابت باز می‌شود.



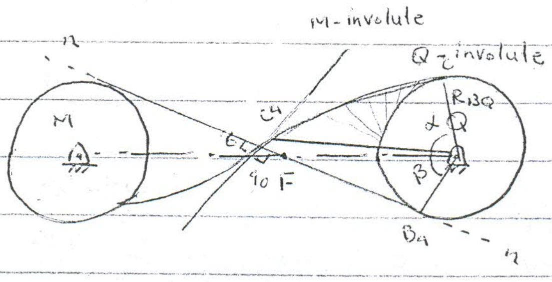
منحنی اینولوت دارای خواص زیر است :

1. در هر نقطه از منحنی شعاع انحنا طول نخ باز شده است

2. مرکز انحناء هر نقطه از منحنی محل تماس نخ باز شده با دیسک است

3. همواره امتداد نخ باز شده در نقطه‌ای مورد نظر عمود بر پروفیل منحنی involute است.

اثبات ثابت بودن نقطه‌ی F :



تنها جائی که می‌توان از آن در عمود بر مماس مشترک دو منحنی رسم کرد نقطه‌ی F روی خط مرکز مشترک دو دیسک است

۴۶

اثبات منحنی involute :

از روی شکل طول قوس دایره Q از نقطه C تا B_4 :

$$\overset{\frown}{CB_4} = R_{BQ}(\alpha+\beta)$$

با توجه به خاصیت منحنی اینولوت :

$$\overset{\frown}{CB_4} = C_4B_4$$

از روی شکل :

$$\tan\beta = \frac{C_4B_4}{R_{BQ}} = \frac{R_{BQ}(\alpha+\beta)}{R_{BQ}} \Rightarrow$$

$$\tan\beta = \alpha+\beta \Rightarrow \boxed{\alpha = \tan\beta - \beta = \mathrm{Inv}(\beta)}$$

Unit VI

Gear Tooth Technology :

objective 1 :

1. Base circale : (دایره مبنا)

عبارت است از دایره ی نامرئی روی چرخدنده که منحنی involute

دندانه ها از روی آن ساخته شده است .

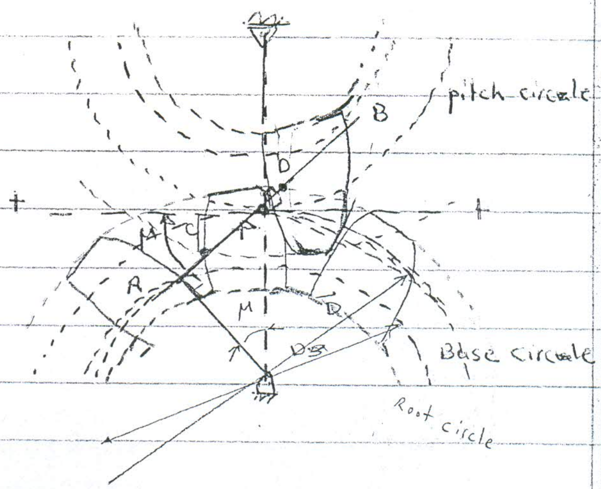
2. Pitch circale

عبارت است از دایره ی معادل یک دیسک

به طوری که در چرخدنده ی درگیر دایره ی گام شان

با یکدیگر مماس باشند این دایره روی چرخدنده

نامرئی می باشد



3. Root circale

عبارت است از دایره ی مرئی روی چرخدنده که از انتهای ریشه ها می گذرد

4. Addendum circle

عبارت است از دایره‌ی فرضی روی چرخ‌دنده که از ابتدای ریشه‌ها می‌گذرد

5. Pitch point

عبارت است از نقطه‌ی تماس دو دایره Pitch circle.

6. Addendum (سردنده یا)

عبارت است از سردنده یا منطقه بین دو دایره Addendum و Pitch از یک دندانه

7. Deddendum

عبارت است از ته‌دنده یا منطقه بین دو دایره Pitch و root از دندانه

8. clearance

عبارت است از فاصله‌ی شعاعی بین دایره Addendum یک چرخ‌دنده تا دایره root چرخ‌دنده درگیر

9. working Depth

عبارت است از عمق عمل یا فاصله‌ی شعاعی بین دو دایره Addendum دو چرخ‌دنده درگیر و یا برابر است

Addendum + Deddendum منهای clearance.

10. Tooth Face

عبارت است قسمتی از سطح دندانه که دارای منحنی involute می باشد. این قسمت محصور

است بین دایره‌ی Base و Addendum

11. Tooth thickness

عبارت است از ضخامت طول قوس روی دایره pitch از یک سطح دندانه تا نقطه‌ی مقابل

دندانه یا طول قوس بین دو pitch point گوشه.

12. Tooth flank

عبارت است از قسمتی از دندانه که دارای منحنی involute نمی باشد. این قسمت

محصور بین دایره Base و root یک چرخدنده است.

13. line of action

۱. مماس مشترک دو دایره Base است
۲. ~~[illegible]~~ مکان هندسی نقاط تماس بین دو چرخدنده‌ی درگیر روی این خط قرار دارد
۳. در نقطه‌ی تماس بین دو دندانه عمود بر profile منحنی های involute است
۴. امتداد نیروی انتقالی بین دو چرخدنده‌ی درگیر روی این خط قرار می گیرد
۵. از pitch point می گذرد

14. Pressure angle

عبارت است از زاویه بین خط عمل و مماس مشترک بین دایره Pitch . توجه می شود که امتداد نیروی انتقالی بین دو چرخ دنده درگیر روی خط عمل می باشد.

15. circular pitch

عبارت است از طول قوس روی دایره ی گام از یک نقطه روی یک دندانه تا نقطه نظیر روی دندانه دیگر

$$P_C = \frac{\pi D}{N}$$ N: تعداد دندانه ها

16. Base pitch

عبارت است از طول قوس روی دایره Base از یک نقطه روی یک دندانه تا نقطه ی نظیر روی دندانه دیگر

$$P_B = \frac{\pi D_B}{N}$$ D_B: قطر دایره Base

از روی شکل داریم: $R_B = R_P \cos\phi$

$$R_B = \frac{\pi D_B}{N} = \frac{\pi D \cos\phi}{N} \Rightarrow P_B = P_C \cos\phi$$

17. Diametral pitch

بنابر تعریف عبارت است از عددی که برای استاندارد کردن چرخ دنده ها از آن استفاده می شود و برابر

است یا :

$$P_D = \frac{N}{D}$$

$$P_D = \frac{1}{m_o}$$

که مدول عبارت است از استاندارد چرخ دنده ها در استاندارد اروپایی یا آمریکایی

قانون مهم : دو چرخ دنده درگیر باید دارای Diametral pitch یکسان باشند

اگر از چرخ دنده بالایی یک دنده رد شود از پایینی هم باید یک دنده رد شود پس باید P_c های آن ها مساوی باشد

بنابراین :

$$P_{c_1} = P_{c_2} \Rightarrow \frac{\pi D_1}{N_1} = \frac{\pi D_2}{N_2} \Rightarrow \frac{D_1}{N_1} = \frac{D_2}{N_2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{P_{D_1}} = \frac{1}{P_{D_2}} \Rightarrow P_{D_1} = P_{D_2}$$

قانون درگیری چرخ دنده

از تعریف circular pitch داریم :

$$P_c = \frac{\pi D}{N} = \frac{\pi}{N/D} = \frac{\pi}{P_D} \Rightarrow P_c P_D = \pi$$

18. Angle of action

عبارت است از زاویه ی مرکزی روی چرخ دنده بین نقطه ی شروع و نقطه ی خاتمه درگیری بین دو چرخ دنده درگیر.

اگر شعاع دایره گام دو چرخ دنده درگیر مساوی نباشند ، زاویه درگیری بین دو چرخ دنده درگیر با هم متفاوت است

19. Pitch angle

عبارت است از زاویه‌ی مرکزی circular pitch درصورتی که pitch angle زیاد شود نیروی بیشتری را منتقل می‌کند.

20. Interfrence

عبارت است از شرایطی که یک سطح اینولوت با یک سطح غیر اینولوت بین دو چرخ دنده درگیر تماس حاصل کند.

این شرایط در جعبه دنده‌های نو و کارکرده به صورت زیر اتفاق می‌افتد:

۱. جعبه دنده‌های نو: چنانچه در جعبه دنده‌های نو در حین کارکرد روغن جعبه دنده گرم شود و سر و صدا در حین کارکرد بوجود آید، جعبه دنده ارتعاش نماید و در نهایت جعبه دنده قفل کند علت آن تداخل بین چرخ دنده‌ها می‌باشد. اگر از دقت تراش چرخ دنده اطمینان وجود دارد باید استحکام خمشی محور چرخ دنده‌ها را چک نمود چون ممکن است در حین انتقال قدرت زیاد تماس در سمت Flank برقرار شده باشد.

۲. جعبه دنده‌های کارکرده: این نوع جعبه دنده‌ها مدت زمانی بدون هیچ یک از مشکلات فوق کار کرده‌اند. تداخل به صورت گرم شدن روغن جعبه دنده خود را نشان می‌دهد.

21. Undercut

چنانچه بنا بر ~~...~~ نصب غلط چرخ دنده‌ها در داخل جعبه دنده، تماس در قسمت Flank برقرار شود می‌توان

سطح دندانه را بین دایره‌ی Base و دایره root تراش داد به طوری که تماس از بین می‌رود این عمل را

undercut می‌گویند که باعث تضعیف استحکام خمشی دنده‌ها می‌گردد

22. Contact Ratio

بنا به تعریف نسبت تماس عبارت است از تعداد دندانه درگیرین دو چرخ دنده‌ی درگیر

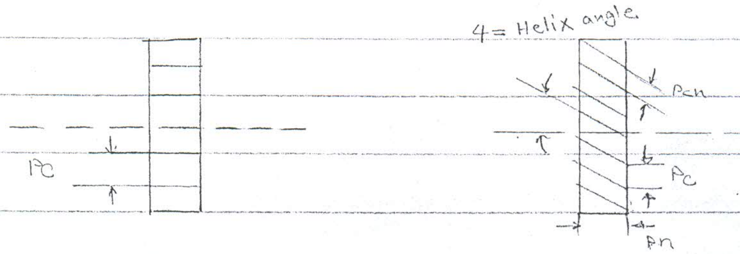
$$GR = \frac{\text{Angel of action}}{\text{Pitch angle}} \stackrel{?}{=} \frac{CD}{P_c \cos\psi}$$ - اثبات در امتحان

حل ؟

23. path of Contact = CD

عبارت است از بخشی از خط عمل که مکان هندسی واقعی نقاط تماس بین دو چرخ دنده درگیر باشد. این قسمت

بخشی از خط عمل محصور بین دو دایر Addendum دو چرخ دنده‌ی درگیر است.



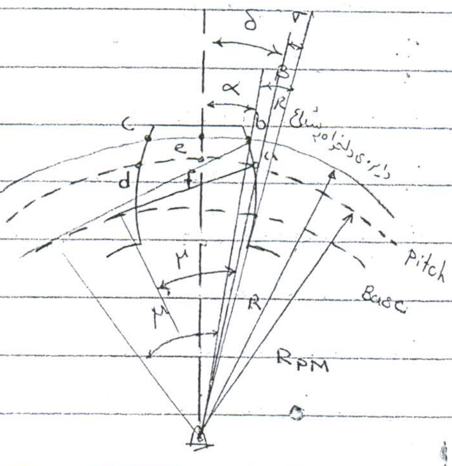
Spure

Hellical gear

$P_C \cdot P_D = \pi$

$P_{CN} \cdot P_{DN} = \pi$

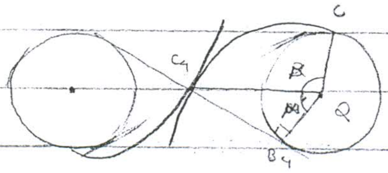
محاسبه‌ی ضخامت دندانه در شعاع دلخواه R :



$$\alpha = \widehat{eMb} = \frac{t_{bc}}{2R}$$

$$\delta = \widehat{fMa} = \frac{t_{ad}}{2R_{PM}}$$

حال از تعریف منحنی involute استفاده می‌کنیم



$$\beta = Inv\,\mu'$$

$$\beta = Inv\,\mu' = \tan\mu' - \mu'$$

$$\nu = Inv\,\mu = \tan\mu - \mu$$

حال از روی شکل داریم :

$$\alpha + \beta = \delta + \nu \Rightarrow \frac{t_{bc}}{2R} + Inv\,\mu' = \frac{t_{ad}}{2R_{PM}} + Inv\,\mu$$

$$t_{bc} = 2R\left(\frac{tad}{2R_{PM}} + Inv\,\mu - Inv\,\mu'\right)$$

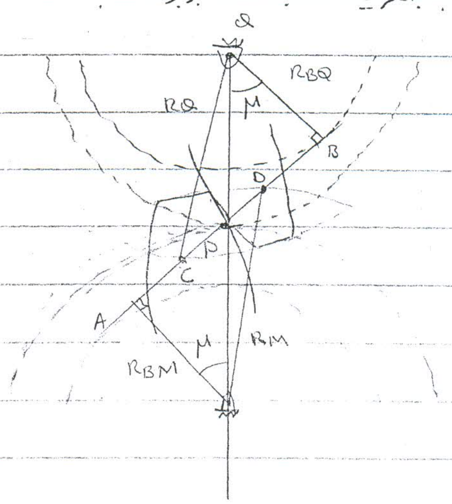
ضخامت دندانه در شعاع R .

Part II محاسبه نسبت تماس :

بنابه تعریف نسبت تماس برابر است با :

$$CR = \frac{\text{Angle of action}}{\text{pitch angle}}$$

$$\theta = \frac{CD}{P_c \cos\mu}$$



$$CD = CP + PD$$

$$CP = BC - BP$$

از روی شکل داریم :

$$BC^2 = R_Q^2 - R_{BQ}^2$$

$$BP = R_{PQ} \sin\mu$$

$$PD = AD - AP$$

$$AD^2 = R_M^2 - R_{BM}^2$$

$$AP = R_{PM} \sin\mu$$

$$\text{Path of contact} = CD = (BC - BP) + (AD - AP)$$

$$CD = \sqrt{R_Q^2 - R_{BQ}^2} + \sqrt{R_M^2 - R_{BM}^2} - (R_{PQ} + R_{PM})\sin\mu$$

Add شعاع دوایر — Base — Pitch

$$CR = \frac{\sqrt{R_Q^2 - R_{BQ}^2} + \sqrt{R_M^2 - R_{BM}^2} - (R_{PQ} + R_{PM})\sin\mu}{P_c \cos\mu}$$

با استفاده از استاندارد R_M و R_Q بدست می آید به عنوان مثال برای چرخ دنده ی 20°

شعاع دوایر Addendum — شعاع دوایر Pitch

$$R_M = R_{PM} + \frac{1}{P_D}$$ دایره ی Full Depth:

$$R_Q = R_{PQ} + \frac{1}{P_D}$$

objective 3: تعیین شرایط تداخل

قبل از ساخت یک جفت چرخ دنده درگیری توان چک نمود که آیا در چرخ دنده بعد از ساخت تداخل خواهند

داشت یا خیر اطلاعات مورد نیاز عبارتند از:

N_1

N_2

μ

$$P_D = \frac{N}{D}$$

با داشتن مقادیر فوق:

$$P_D = \frac{N_1}{D_1} = \frac{N_2}{D_2}$$

لذا

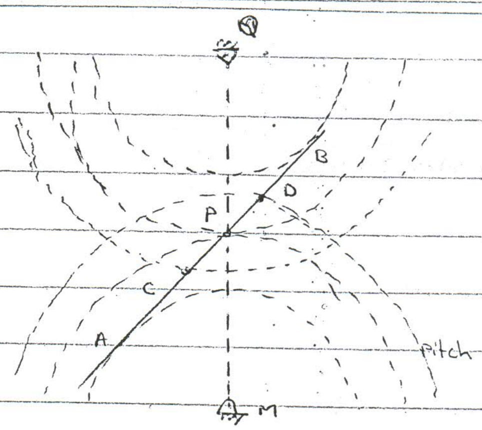
$$2 \times R_{PM} = D_1 = \frac{N_1}{P_D} \qquad D_2 = \frac{N_2}{P_D} = R_{PQ} \times 2$$

و فاصله ی بین دو مرکز

$$C = R_{PM} + R_{PQ} = MQ$$

شعاع دوایر Base

$$R_{BQ} = R_{PQ}\cos\mu \qquad R_{BM} = R_{PM}\cos\mu$$



با رسم دوایر Base رسم مماس های آن ها، خط عمل AB رسم می شود.

با رسم شعاع دوایر Addendum

$$R_M = R_{PM} + \frac{1}{P_D}$$

$$R_Q = R_{PQ} + \frac{1}{P_D}$$

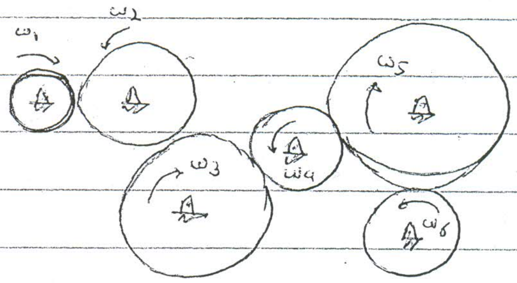
path of contact (CD) بدست می آید.

اگر چنانچه نقاط C و D بین نقاط A و B قرار گیرند تداخل نخواهیم داشت.

57

Unit VII Design of Gear Train

1. Simple Gear Train



بنابر تعریف نسبت سرعت در جعبه دنده برابر است با:

$$SR = \frac{\omega_6}{\omega_1}$$

$$\frac{\omega_6}{\omega_1} = \frac{\omega_6}{\omega_5} \cdot \frac{\omega_5}{\omega_4} \cdot \frac{\omega_4}{\omega_3} \cdot \frac{\omega_3}{\omega_2} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

چون سرعت خطی بین چرخ دنده ها یکسان است لذا:

$$R_1\omega_1 = R_2\omega_2 = \dots$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{R_1}{R_2}$$

لذا از روابط بالا داریم:

$$SR = \frac{R_5}{R_6} \times \frac{R_4}{R_5} \times \frac{R_3}{R_4} \times \frac{R_2}{R_3} \times \frac{R_1}{R_2} \Rightarrow \boxed{SR = \frac{\omega_6}{\omega_1} = \frac{R_1}{R_6}}$$

چون طبق قانون درگیری بین دو چرخ دنده باید Diametral pitch یکسان باشد:

$$P_D = \frac{N}{D} = \frac{N}{2R} = \frac{N_1}{2R_1} = \frac{N_2}{2R_2} = \frac{N_3}{2R_3} = \dots = \frac{N_6}{2R_6}$$

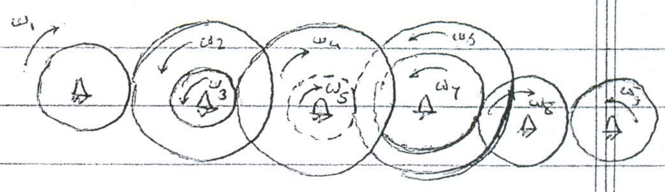
حال داریم:

$$\frac{R_1}{R_6} = \frac{N_1}{N_6}$$

لذا:

$$\boxed{SR = \frac{\omega_6}{\omega_1} = \frac{R_1}{R_6} = \frac{N_1}{N_6}}$$

2. Compound Gear Train



بنابراین نسبت جعبه دنده برابر است با

$$SR = \frac{\omega_9}{\omega_1}$$

$$SR = \frac{\omega_9}{\omega_8} \cdot \frac{\omega_8}{\omega_7} \cdot \cancel{\frac{\omega_7}{\omega_6}} \cdot \frac{\omega_6}{\omega_5} \cdot \cancel{\frac{\omega_5}{\omega_4}} \cdot \frac{\omega_4}{\omega_3} \cdot \cancel{\frac{\omega_3}{\omega_2}} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

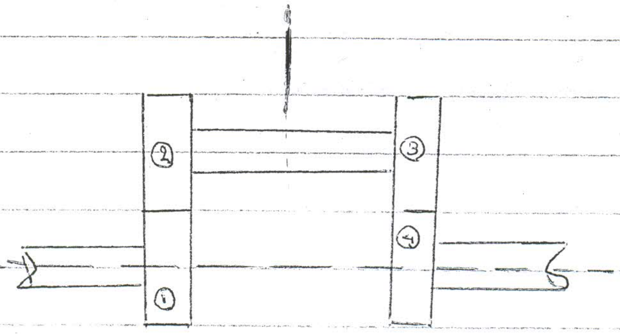
$$SR = \frac{\omega_9}{\omega_1} = \frac{\omega_9}{\omega_7} \cdot \frac{\omega_6}{\omega_5} \cdot \frac{\omega_4}{\omega_3} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

$$\boxed{SR = \frac{\omega_9}{\omega_1} = \frac{R_7}{R_9} \cdot \frac{R_5}{R_6} \cdot \frac{R_3}{R_4} \cdot \frac{R_1}{R_2}}$$

لذا حال داریم:

$$\boxed{SR = \frac{\omega_9}{\omega_1} = \frac{\text{Driver حاصلضرب شعاع دوایر گام چرخ دنده های}}{\text{Driven حاصلضرب شعاع دوایر گام چرخ دنده های}}}$$

3. Inverted compound Gear Train



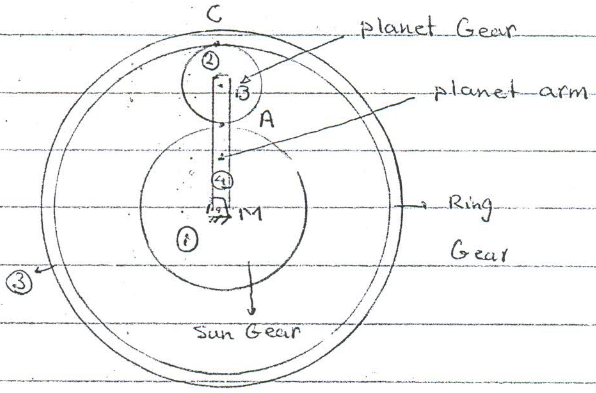
بنابراین نسبت سرعت ها برابر است با:

$$SR = \frac{\omega_4}{\omega_1}$$

$$SR = \frac{\omega_4}{\omega_3} \cdot \frac{\omega_3}{\omega_2} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_1} \Rightarrow SR = \frac{\omega_4}{\omega_1} = \frac{\omega_4 \omega_2}{\omega_3 \omega_1}$$

$$\boxed{SR = \frac{\omega_4}{\omega_1} = \frac{R_3 R_1}{R_4 R_2}}$$

4. Planatary Gear Train



$\vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{V}_{A/B}$ | از روی شکل روی Planet :

$\vec{V}_C = \vec{V}_B + \vec{V}_{C/B}$ | از روی شکل روی Planet :

$\vec{V}_{C/B} = -\vec{V}_{A/B}$ * ۲

داریم : $\vec{V}_{C/B} = \vec{V}_C - \vec{V}_B$

$\vec{V}_{A/B} = \vec{V}_A - \vec{V}_B$

$\vec{V}_C - \vec{V}_B = \vec{V}_B - \vec{V}_A$

قدر مطلق : $V_C = R_3 \omega_3$ روی Ring

$V_B = (R_1 + R_2)\, \omega_4$ روی Planet arm

$V_A = R_1 \omega_1$ Sun روی

$$R_3 \omega_3 - (R_1 + R_2)\omega_4 = -R_1 \omega_1 + (R_1 + R_2)\omega_4$$

$$\Longrightarrow \boxed{R_1 \omega_1 + R_3 \omega_3 = 2(R_1 + R_2)\omega_4}$$

سه حالت در نظر می‌گیریم :

1. Sun Gear is fixed : $\omega_1 = 0$

input : planet arm

output : Ring

$$\boxed{SR = \frac{\omega_3}{\omega_4} = \frac{2(R_1 + R_2)}{R_3}}$$

2. Planet arm is fixed : $\omega_4 = 0$

input : Sun

output : Ring

$$\boxed{SR = \frac{\omega_3}{\omega_1} = -\frac{R_1}{R_3}}$$ Reverse gear

3. Ring is fixed : $\omega_3 = 0$

input : Sun

output : planet arm

65

$$\boxed{SR = \frac{\omega_4}{\omega_1} = \frac{R_1}{2(R_1 + R_2)}}$$

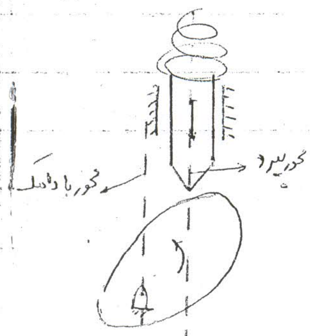
Unit VIII : Cams and Followers

دارای سه سیستم است :

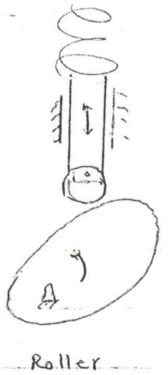
1. Cams
2. Followers
3. Motion programs

انواع پیرو (Followers) :

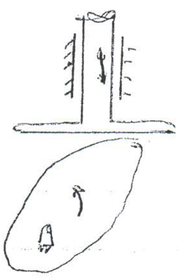
اگر سرعت بالا باشد پیروی Jam اتفاق می افتد و بادامک از کار می افتد



Knifel edge Followers

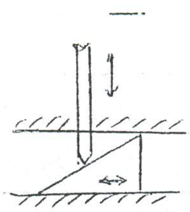


Roller Follower

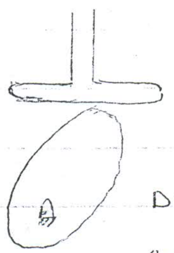


Flat Face Follower

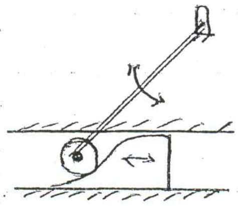
انواع بادامک ها :



wedge cam

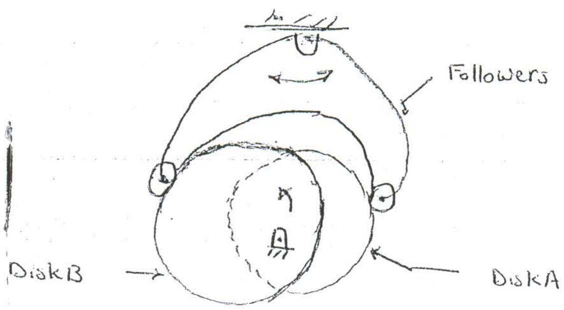


Disk cam

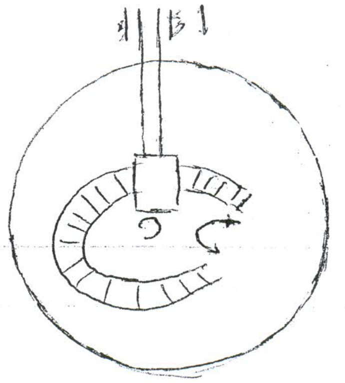


wedge
cam with osclating Followers

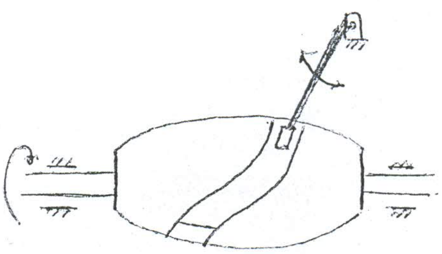
اگر سرعت دورانی بادامک بسیار زیاد باشد از این نوع بادامک استفاده می‌شود.



Conjugate
Cam



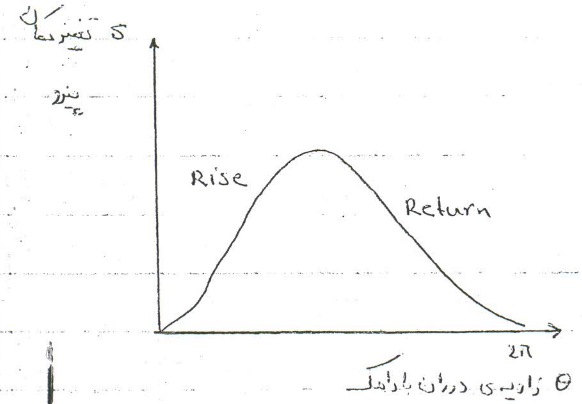
Spiral Cam
with translating
Followers



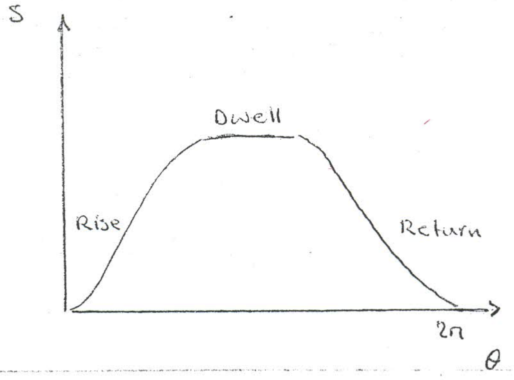
globoidal
Cam

انواع Motion program

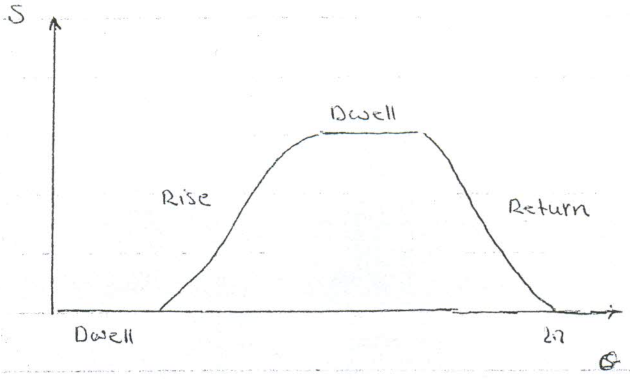
برنامه‌ای که باید بادامک حرکت را به پیرو منتقل کند



R_R Motion program



R_D_R Motion program



D_R_D_R Motion program

objective 3:

نحوه ساخت کانتور بادامک با داشتن Motion programe و سیستم پیرو

فرض کنید سیستم بادامک و پیرو معلوم است. با داشتن Motion p می توان کانتور بادامک را رسم و آن را

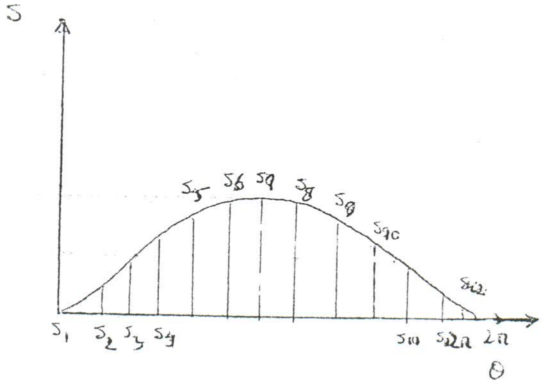
در کارگاه ساخت:

مثال:

فرض کنید بادامک از نوع دیسک و پیرو از نوع Roller Follower و Translating و هم مرکز با مرکز

بادامک می باشند.

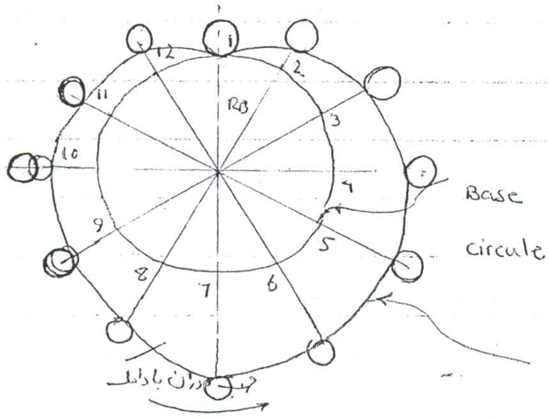
Motion program مطابق شکل زیر داده شده است.



۱- ابتدا دایره ی Base بادامک را تعیین می کنیم و شعاع آن را R_B می نامیم.

۲. Motion program را به تعداد تقسیمات مساوی تقسیم می کنیم (12 قسمت) و ارتفاع هر قسمت را

S_i می نامیم



۳- دایره‌ی Base را به همان تعداد تقسیم می‌کنیم و در خلاف جهت حرکت بادامک شماره گذاری می‌کنیم.

۴- موقعیت Roller پیرو را در ۱۲ قسمت روی دایره‌ی Base از فرمول زیر مشخص نموده و دایره‌ی پیرو را مشخص می‌کنیم:

$$r_i = R_B + S_i + r_f$$

r_f برابر با شعاع پیرو یعنی شعاع Roller آن است برای این منظور ابتدا باید Min شعاع انحناء Mp را محاسبه نموده و r_f را طوری انتخاب نمود که کوچکتر از Min شعاع انحناء Mp باشد.

۵- پرش ۱۲ دایره Roller، کانتور بادامک است.

Unit IX Motion Programs

اگر S تغییر مکان پیرو و θ زاویه‌ی دوران بادامک داریم :

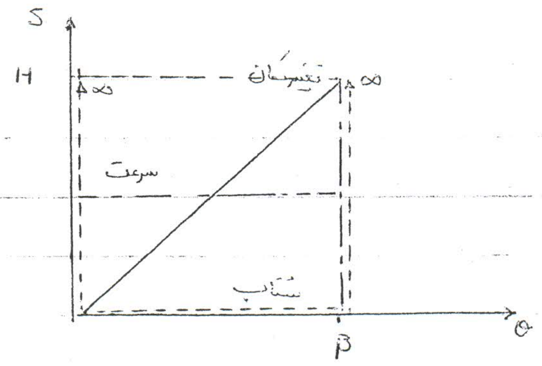
$$V = \frac{ds}{dt} = \text{سرعت پیرو}$$

$$a = \frac{d^2 s}{dt^2} = \text{شتاب پیرو}$$

$$J = \frac{d^3 s}{dt^3} = \text{تکان (jerk)}$$

هرگاه jerk یک سیستم را min کنیم آن سیستم Comfort تری باشد

1- Constant velocity Motion programs



در ابتدا و انتها شتاب بی‌نهایت است .

$S = c\theta$ معادله تغییر مکان

$\theta = \beta$

$S = H$

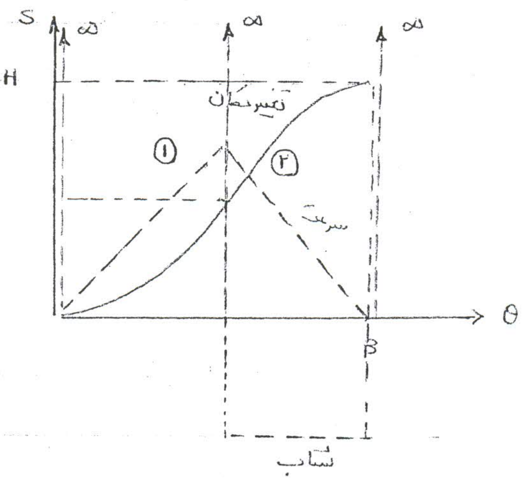
$$\Rightarrow H = c\beta \Rightarrow c = \frac{H}{\beta} \Rightarrow \boxed{S = H\frac{\theta}{\beta}}$$ تغییر مکان

$$V = \frac{ds}{dt} = H\frac{\omega}{\beta} \qquad \text{سرعت}$$

$$a = 0$$

این سیستم به علت اینکه در ابتدا و انتهای Rise شتاب بی‌نهایت است با توجه به جرم پیرو نیروی بی‌نهایت به پیرو منتقل شده که غیر قابل قبول است برای سرعت های بالا.

2. Constant accelration Motion program.



در سه نقطه جرک بی‌نهایت داریم.

$$S = C\theta^2 \qquad 0 \leq \theta \leq \beta/2$$

$$\theta = \beta/2$$

$$S = H/2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{H}{2} = C\beta^2 \Rightarrow C = \frac{2H}{2\beta^2} \Rightarrow \boxed{S = \frac{2H}{\cancel{2}}\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^2}$$

$V = \dfrac{4H}{\beta^2}\,\omega\theta$ سرعت

$a = \dfrac{4H}{\beta^2}\,\omega^2$

$S = C_1\theta^2 + C_2\theta + C_3 \qquad \beta/2 \leq \theta \leq \beta$

$\theta = \beta \qquad \theta = \beta \qquad \theta = \beta/2$

$S = H \qquad V = 0 \qquad V_2 = V_1$

$C_1 = \dfrac{-2H}{\beta^2} \qquad C_2 = \dfrac{4H}{\beta} \qquad C_3 = -H$

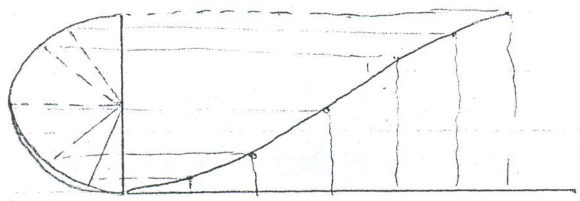
$S = H\left[1 - 2\left(1 - \dfrac{\theta}{\beta}\right)^2\right]$

$V = \dfrac{ds}{dt} = 4H\omega/\beta \left[1 - \theta/\beta\right]$

$a = \dfrac{d^2s}{dt^2} = \dfrac{-4H\omega^2}{\beta^2}$

این سیستم نیز برای شتاب‌های کم قابل استفاده است.

3. Simple Harmonic Motion program..



معادله منحنی هارمونیک ساده

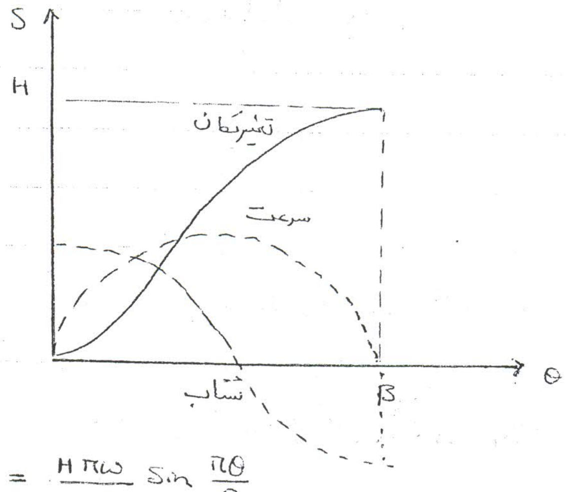
$S = C(1 - \cos\varphi)$

$\varphi = \dfrac{\pi\theta}{\beta} \qquad C = \dfrac{H}{2}$

15

برای حرکت بادامک پیرو

$$S = \frac{H}{2}\left(1 - \cos\frac{\pi\theta}{\beta}\right)$$ تغییر مکان



$$V = \frac{ds}{dt} = \frac{H\pi\omega}{2\beta}\sin\frac{\pi\theta}{\beta}$$

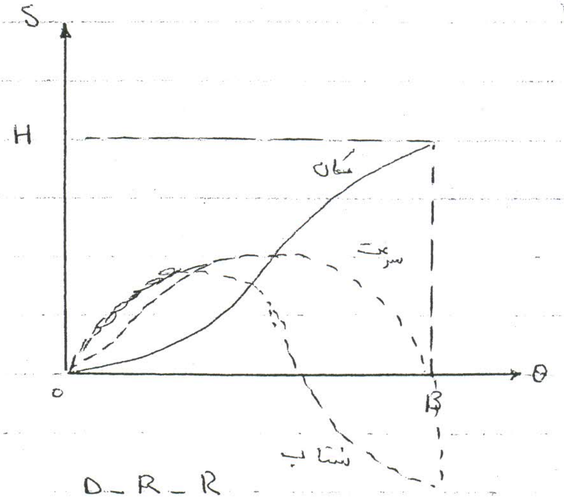
$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{H}{2}\left(\frac{\pi\omega}{\beta}\right)^2\cos\frac{\pi\theta}{\beta}$$

4- Modified harmonic Motion programs.

$$S = \frac{H}{2}\left[\left(1 - \cos\frac{\pi\theta}{\beta}\right) - \frac{1}{4}\left(1 - \cos\frac{2\pi\theta}{\beta}\right)\right]$$

$$V = \frac{ds}{dt} = \frac{H\pi\omega}{2\beta}\left(\sin\frac{\pi\theta}{\beta} - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi\theta}{\beta}\right)$$

$$a = \frac{H}{2}\left(\frac{\pi\omega}{\beta}\right)^2\left(\cos\frac{\pi\theta}{\beta} - \cos\frac{2\pi\theta}{\beta}\right)$$



D_R_R

در این حالت سرعت نه شتاب نه جرک هیچکدام بی‌نهایت نیست.

5. polynomical Motion programs

شرایط مورد نیاز :

$\theta = 0$	$\theta = 0$	$\theta = 0$
$S = 0$	$V = 0$	$a = 0$
$\theta = \beta$	$\theta = \beta$	$\theta = \beta$
$S = H$	$V = 0$	$a = 0$

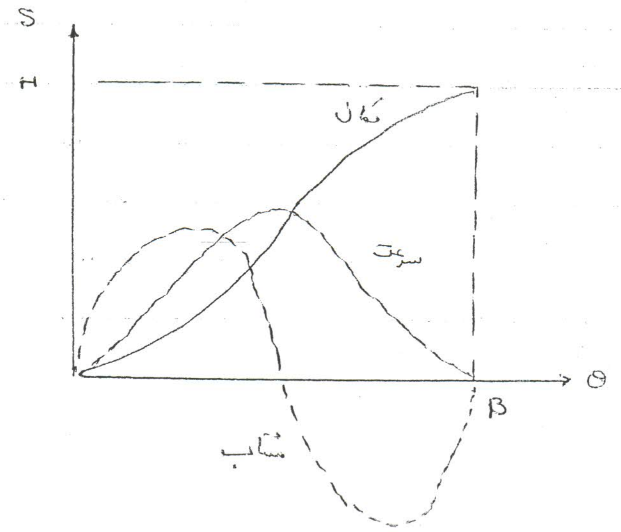
$$S = D_0 + D_1\theta + D_2\theta^2 + D_3\theta^3 + D_4\theta^4 + D_5\theta^5$$

$$V = D_1\omega + 2D_2\omega\theta + 3D_3\theta^2\omega + 4D_4\theta^3\omega + 5D_5\theta^4\omega$$

77 $$a = \underline{\theta_1} + 2D_2\omega^2 + 6D_3\omega^2\theta + 12D_4\omega^2\theta^2 + 20D_5\omega^2\theta^3$$

$$\left.\begin{array}{l}\theta=0\\ S=0\end{array}\right\} \Rightarrow D_0=0 \qquad \left.\begin{array}{l}\theta=0\\ V=0\end{array}\right\} \Rightarrow D_1=0 \qquad \left.\begin{array}{l}\theta=0\\ a=0\end{array}\right\} \Rightarrow D_2=0$$

$$D_3=\frac{10H}{\beta^3} \qquad D_4=-15\frac{H}{\beta^4} \qquad D_5=\frac{6H}{\beta^5}$$



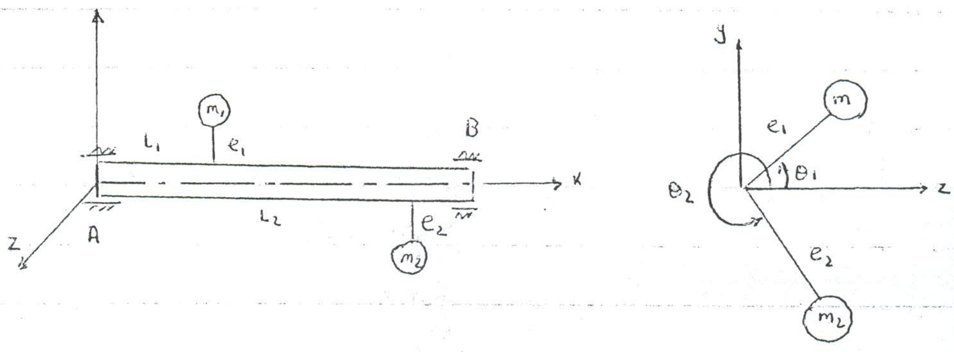
Balancing of Rotating shafts

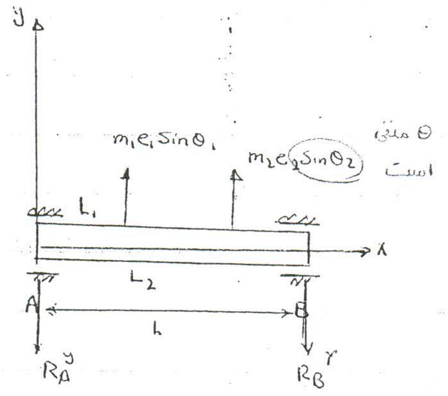
تعادل استاتیکی و دینامیکی در محورها:

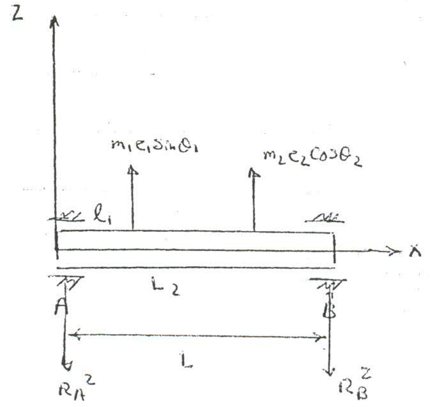
تعادل استاتیکی حول محور ساکن زمانی اتفاق می افتد که نیروهای گریز از مرکز معادل حاصل از خود را خنثی کند.

فرض کنید محور دوار AB که روی دو یاتاقان A و B قرار دارد، دارای تعدادی جرم خارج از مرکز در فواصل مختلف می باشد. به عنوان مثال فرض کنید محور دارای دو جرم خارج از مرکز $(m_1, e_1, l_1, \theta_1)$ و $(m_2, e_2, l_2, \theta_2)$ می باشد. در اثر دوران محور، عکس العمل نیروهای گریز از مرکز، جرم های خارج از مرکز روی یاتاقان های A و B اعمال نموده و در یاتاقان را چنانچه تعادل ننمائیم از بین می برد.

هدف: بالانس محور دوار فوق روی یاتاقان های A و B می باشد.







در صفحه x-y :

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -R_A^y + m_1 e_1 \sin\theta_1 + m_2 e_2 \sin\theta_2 - R_B^y = 0$$

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow m_1 e_1 \sin\theta_1 l_1 + m_2 e_2 \sin\theta_2 l_2 - R_B^y l = 0$$

از دو معادله بالا R_B^y , R_A^y محاسبه می‌شود

در صفحه x-z :

$$\Sigma F_z = 0 \Rightarrow -R_A^z + m_1 e_1 \cos\theta_1 + m_2 e_2 \cos\theta_2 - R_B^z = 0$$

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow -m_1 e_1 \cos\theta_1 L_1 - m_2 e_2 \cos\theta_2 L_2 + R_B^z L = 0$$

از دو معادله‌ی قبل هم R_A^z و R_B^z محاسبه می‌شود

$$R_A = \sqrt{{R_A^y}^2 + {R_A^z}^2} = m_A e_A$$

$$\tan\theta_A = \frac{R_A^y}{R_A^z} \Rightarrow \theta_A = \tan^{-1}\frac{R_A^y}{R_A^z}$$

بنابراین: با اعمال جرم در محل یاتاقان A جرم و با زاویه‌ی مناسب در شعاع مناسب قرار می‌دهیم.

$$R_B = \sqrt{{R_B^y}^2 + {R_B^z}^2} = m_B e_B$$

$$\tan\theta_B = \frac{R_B^y}{R_B^z} \Rightarrow \theta_B = \tan^{-1}\frac{R_B^y}{R_B^z}$$