جزوه دینامیک ماشین

استاد مشکینی

فصل اول : مقدمات و مفاهیم اساسی

(فصل اول ۲ ساعت)

سینماتیک ماشین :

مطالعه و تجزیه و تحلیل راجع به حرکت نسبی اجزاء ماشین شامل تجزیه و تحلیل مکان ، سرعت و شتاب

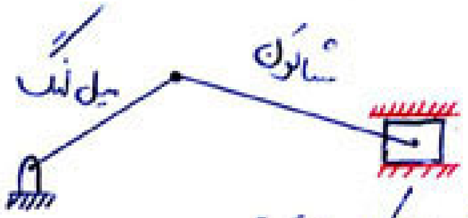
دینامیک ماشین :

مطالعه و بررسی نیروهای وارد بر اجزاء یک ماشین و حرکات ناشی از این نیروها

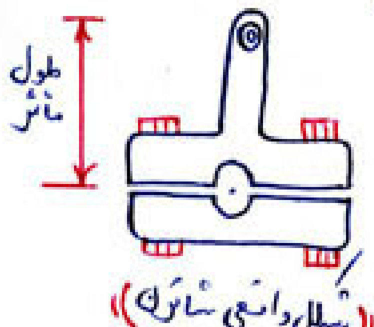
نمودار سینماتیکی : (Kinematic diagram)

نموداری است که در آن تجرید یا انتزاعی از یک اهرم رسم می شود که در حرکت آن مکانیزم مؤثرند.

مثال: نمودار سینماتیکی یک موتور احتراق داخلی



هنگامی که نمودار سینماتیکی اهرمی رسم می شود در واقع از شکل واقعی آن اطلاعاتی در دست نیست. لذا هر نقطه از یک صفحه می تواند ذره ای از آن اهرم باشد.

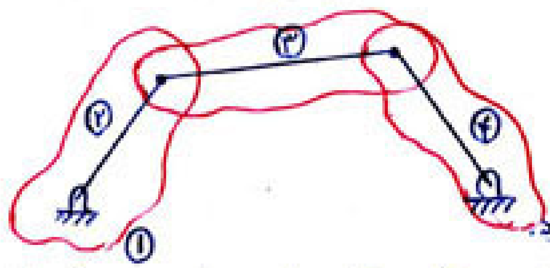


(شکل واقعی شاتون)

اهرم : (Link)

✓ اهرم ساده ترین عضو از یک مکانیزم است که با اتصال آن به اعضاء مجاور به نحوی که این اعضاء بتوانند نسبت به هم جابه جا شوند، کار یا عمل خاصی انجام می شود. شکل هندسی اهرم ها از اهمیت نمی باشد و طول شاتون، فاصله بین پین ها است.

مثال:



این مکانیزم دارای ۴ اهرم است.

تکیه گاه زمین خود یک اهرم محسوب می شود.

✓ عضوی که حرکت یا سکون آن تأثیری در حرکت نداشته باشد و یا صرفاً ساده کننده باشد، عضو حساب نمی شود.

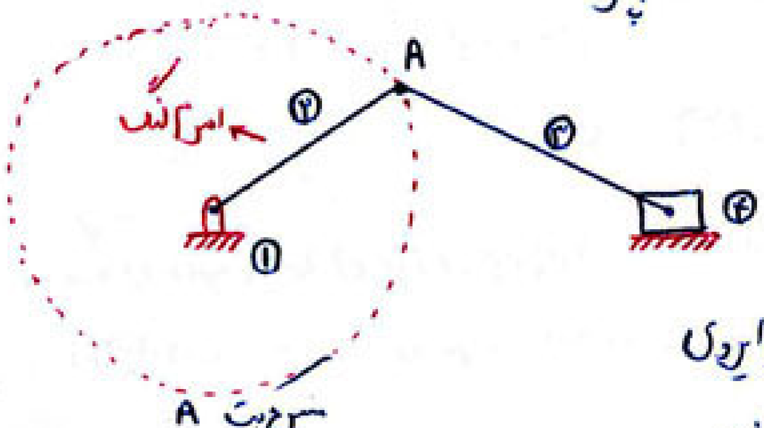
انواع اهرم:

- اهرم پایه: دستگاه مختصات مرجع به آن وصل بوده و حرکت سایر اهرم‌ها نسبت به آن تحلیل می‌شود. (زمین)
- اهرم ورودی: معمولاً متصل به اهرم پایه بوده و تمهیدات سینماتیکی به آن وارد می‌شود.
- اهرم خروجی: معمولاً متصل به اهرم پایه بوده و تمهیدات سینماتیکی از آن گرفته می‌شود.
- اهرم رابط: اهرم مابین اهرم ورودی و اهرم خروجی را اهرم رابط گویند.

انواع اهرم از لحاظ دامنه نوسان (حرکت):

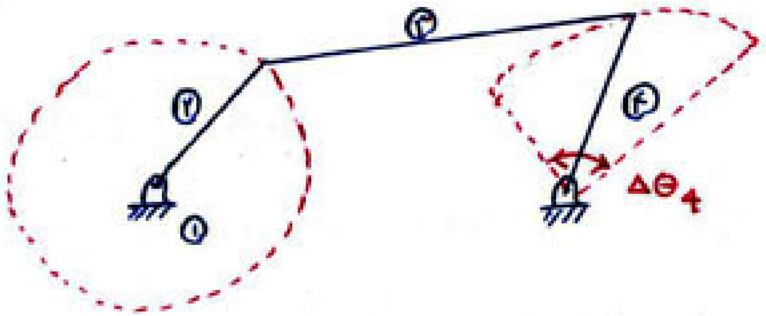
- اهرم لنگ (Crank):

اهرمی است که بتواند در خلال حرکت به میزان 360° بچرخد.



- اهرم اسب یا راکر Rocker (رقصنده):

اهرمی که در خلال حرکت بتواند بخشی از یک مسیر دایروی و یا به عبارت دیگر زاویه‌ای کمتر از 360° نوسان کند.



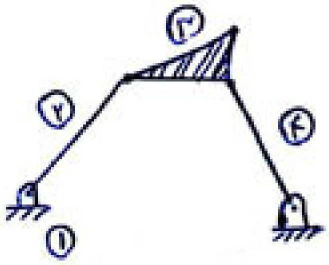
به ازای چرخش کامل اهرم ۲ (Crank) اهرم ۴ (Rocker) فقط در بازه $\Delta\Theta_4$ نوسان می‌کند.

اهرم ساده و اهرم مرکب:

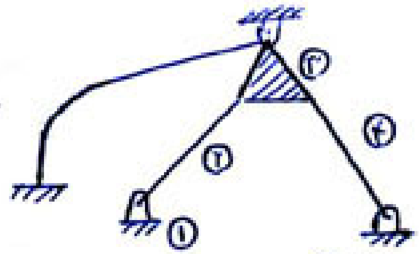
- اگر اهرمی حداکثر ۲ مفصل داشته باشد آن اهرم را اهرم ساده گویند (Simple link)
- اگر اهرمی بیش از ۲ مفصل داشته باشد آن اهرم را اهرم مرکب گویند (Complex link)

* مفصل: محل اتصال دو اهرم که بتوانند نسبت بهم جابجا شوند.

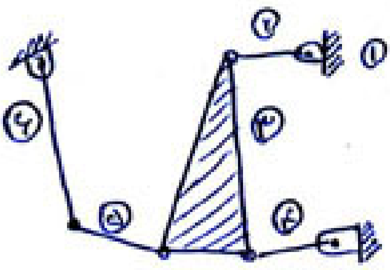
مثال: اهرمهای ساده و مرکب را مشخص نمایید:



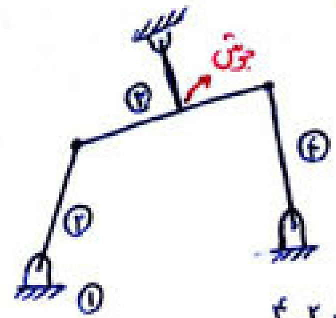
اهرمهای ساده: ۱-۲-۳-۴
اهرمهای مرکب: —



اهرمهای ساده: ۲، ۴
اهرمهای مرکب: ۱-۳



اهرمهای ساده: ۲و۴و۵و۶
اهرمهای مرکب: ۱و۳



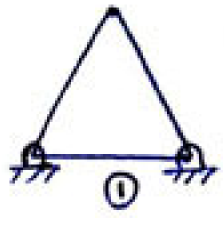
اهرمهای ساده: ۲و۴
اهرمهای مرکب: ۱و۳

(ولی بعدها خواهیم خواند که به دلیل اینکه درجه آزادی این مجموعه (=۱-) است این مجموعه حرکت ندارد و کل آن زمین یا اهرم ثابت محسوب می‌شود.)

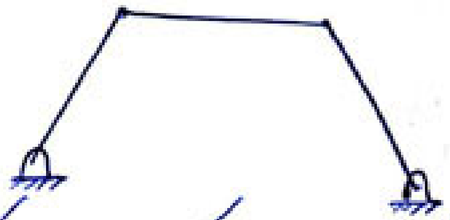
زنجیرهٔ سینماتیکی (Kinematic chain):

- یک زنجیره سینماتیکی عبارت است از یک مجموعه میله‌های صلب که ضمن اتصال با یکدیگر می‌توانند دارای حرکت نسبی باشند. اگر یکی از میله‌ها ثابت باشد و حرکت یکی دیگر از میله‌ها باعث حرکت سایر میله‌ها گردد به نحوی که حرکت و وضعیت آن میله‌ها قابل پیش‌بینی باشد به آن زنجیره سینماتیکی مقید یا معین گویند. همچنین اگر یکی از میله‌ها ثابت باشد و با حرکت یکی دیگر از میله‌ها حرکت و وضعیت سایر میله‌ها قابل پیش‌بینی نباشد به آن زنجیره سینماتیکی غیر مقید می‌گویند.

- در تعریفی دیگر اگر حرکت یکی از میله‌ها هیچگونه حرکتی در سایر میله‌ها ایجاد نکند به آن مجموعه دیگر زنجیره سینماتیکی گفته نمی‌شود و یک سازه است. (مثل مثال زیر)

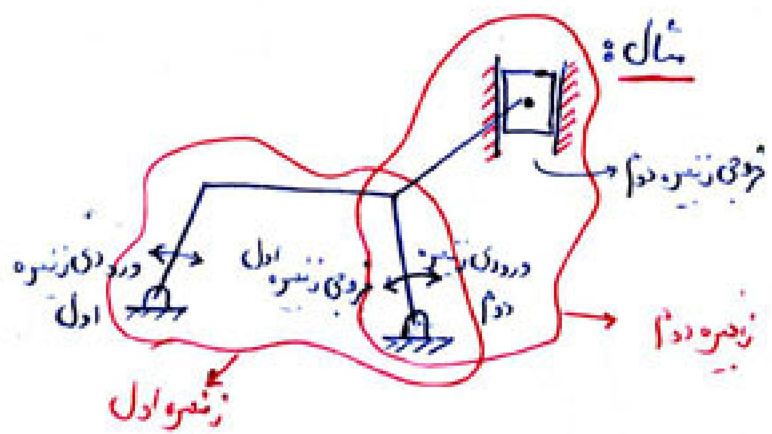


یک مکانیزم (زنجیره سینماتیکی مقید) ممکن است از چندین زنجیره سینماتیکی حاصل شود. به نحوی که خروجی زنجیره اول، ورودی زنجیره دوم باشد و ....



مکانیزم ۴ میله‌ای : یک زنجیره سینماتیکی مقید

مثال:



مکانیزم ۴ میله‌ای

یک زنجیره سینماتیکی مقید با چهار عضو (شامل عضو ثابت یا زمین)، عضو ورودی، عضو خروجی و عضو رابط با یک درجه آزادی

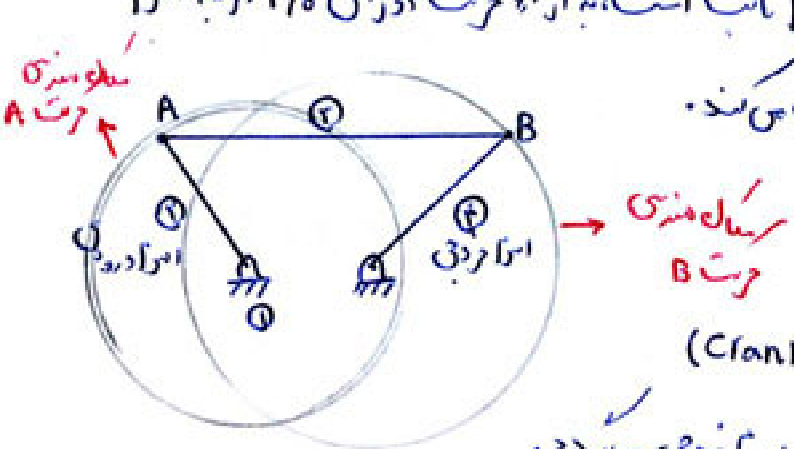
رابطه گراشف: $L+S<P+Q$ (Large: L، Small: S)

تفسیر گراشف: اگر در زنجیره ۴ میله‌ای مجموع طول کوچکترین و بزرگترین عضو از مجموع طول دو عضو دیگر کوچکتر باشد آن مکانیزم، مکانیزم گراشف است.

انواع حرکت در مکانیزم‌های ۴ میله‌ای:

* زنجیره یا مکانیزم لنگ-لنگ (Double crank)

در این مکانیزم کوتاه‌ترین عضو به عنوان میله یا عضو ثابت است، (به شرط مکانیزم گراشف) به ازای یک حرکت دوران ۳۶۰ درجه عضو ورودی، عضو خروجی نیز به میزان ۳۶۰° نوسان می‌کند.



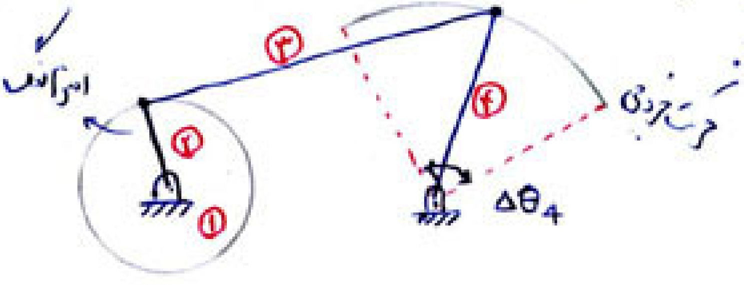
* زنجیره یا مکانیزم لنگ-اسلب (Crank-Rocker)

در این زنجیره حرکت ورودی لنگ است، حرکت اسلب عضو خروجی می‌گردد.

در این مکانیزم کوتاه‌ترین عضو می‌تواند عضو ورودی باشد.

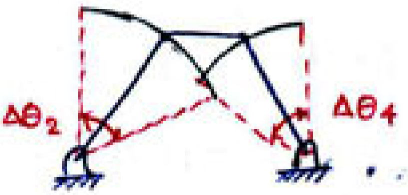
یا «کوتاه‌ترین عضو، عضو لنگ است»

به شرط مکانیزم گراشف



* زنجیره یا مکانیزم اسک-اسک (Double Rocker)

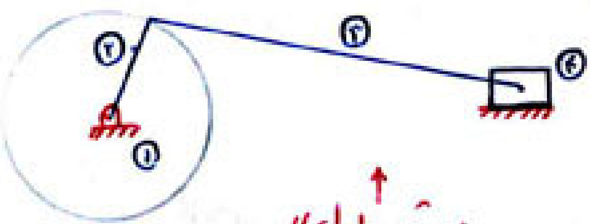
زنجیره ای است که اهرمهای ورودی و خروجی می توانند در زاویه ای کمتر از 360° نوسان نمایند.



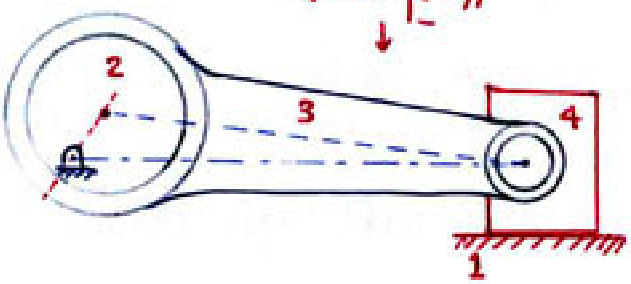
در این مکانیزم ما در اغلب موارد، کوتاهترین اهرم، اهرم رابط است.
در صورت گراشفی بودن مکانیزم

* زنجیره یا مکانیزم لنگ-لغزنده (Slider - crank)

اگر در مکانیزم لنگ-لنگ، اهرم خروجی را با یک لغزنده تعویض نماییم آنگاه مکانیزمی حاصل می شود که برای تبدیل حرکت دورانی به انتقالی و برعکس می توان از آن استفاده نمود. کاربرد آن در موتورهای دیزل و بنزینی و سیستم های کمپرسور هوا می باشد.



«سیستم معادل»



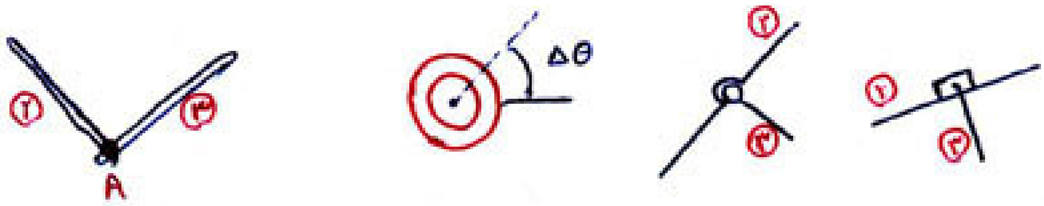
اتصالات سینماتیکی و انواع آن (Joint or Pairing Element)

تعریف مفصل: مفصل محل اتصال دو عضو (اهرم) است که می توانند نسبت به هم جابجا شوند و دارای انواع مختلفی می باشند که از آن جمله موارد زیر را می توان نام برد:

1- مفصل لولایی یا پین: (Revolute)

مفصلی است بین دو اهرم به قسمی که جابجایی و حرکت نسبی آن از طریق یکی از دو اهرم که اساس محاسبات قرار می گیرد برابر است و درجه آزادی آن یک می باشد و اجازه جابجایی زاویه ای دو اهرم ($\Delta\theta$) را نسبت به یکدیگر می دهد.

مثال :



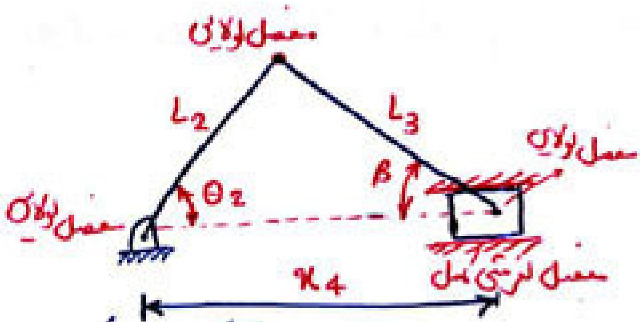
۲- مفصل لغزشی کامل : (Pure Sliding)

در یک مکانیزم لغزشی کامل زمانی حادث می گردد که اعضاء در امتداد مماس مشترک نقطه تماس دارای حرکت نسبی باشند. به عبارت دیگر مفصل لغزشی کامل مفصلی است بین دو جسم به نحوی که موقعیت یکی از اجسام (اعضا) توسط یک کمیت نسبت به جسم یا اجزا دوم مشخص می شود.

در یک مکانیزم با تماس مستقیم موقعی لغزش پدید می آید که نقطه تماس در امتداد خط المرکزین قرار نگرفته باشد.

در تعریفی دیگر بیان می گردد که اگر دو جسم نسبت به هم سرعت زاویه ای (ω) نداشته باشند حرکت لغزشی کامل می باشد.

مثال :



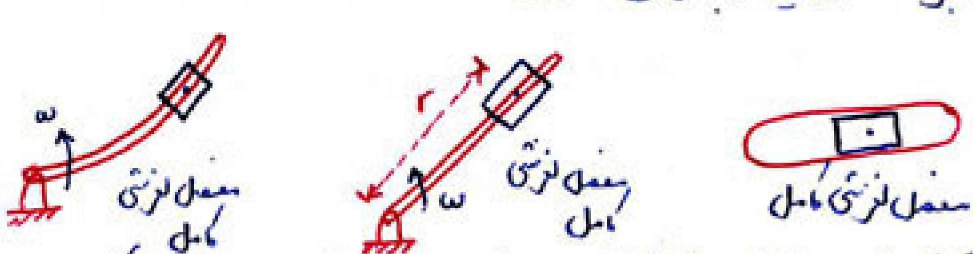
$$x_4 = x_{4/1} = L_2 \cos\theta_2 + L_3 \cos\beta$$

$$\text{where: } \frac{\sin\beta}{L_2} = \frac{\sin\theta_2}{L_3}$$

ملاحظه می شود که با معلوم بودن θ_2، جابجایی، سرعت و شتاب عضو 4 نسبت به عضو 1 با یک کمیت که همان θ_2 است مشخص می گردد.

✓ نکته : مفاصل لغزشی کامل جزء مفاصل یک درجه آزادی هستند.

مثال :



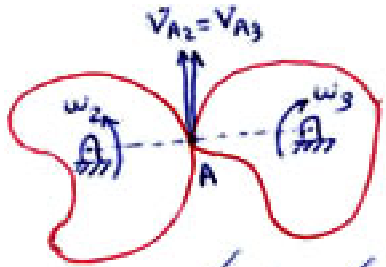
به دلیل عدم وجود ω (سرعت زاویه ای)، و فقط با داشتن مقدار r می توان سرعت و شتاب را محاسبه کرد.

۳- مفصل غلتشی کامل (Rolling Joint):

برای داشتن مفصل و تماس غلتشی سرعتهای خطی اعضاء در نقطه تماس می بایست با یکدیگر یکسان بوده که ضرورتاً

نقطه تماس می‌بایست بر روی خط المرکزین واقع بوده باشد.

البته قرار داشتن نقطه تماس بر روی خط المرکزین امری ضروری است ولی کافی نمی‌باشد. زیرا فقط ممکن است در یک لحظه خاص مفصل غلتشی باشد و در سایر لحظات این شرایط برقرار باشد. به شکل زیر توجه شود.

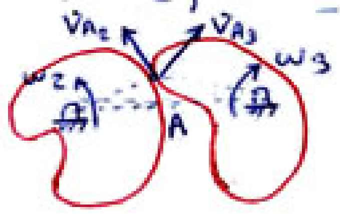


ملاحظه می‌گردد که تماس شرایط یک مفصل غلتشی برقرار است:

۱- نقطه تماس در خط واصل بین مراکز (خط المرکزین) واقع است.

۲- مقدار و جهت سرعت دو نقطه در نقطه تماس از دو جسم برابر است.

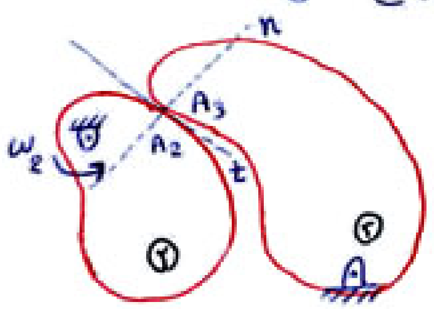
ولی مفصل فوق غلتشی خالص نیست زیرا فقط شرایط فوق در یک لحظه حاکم می‌باشد.



(ملاحظه می‌گردد که در لحظه بعد شرایط فوق حاکم نیست)

۴- مفصل لغزشی - غلتشی

اگر مفصل بین دو جسم که سرعت زاویه‌ای آنها نسبت به هم صفر نباشد و همچنین از نوع غلتشی نیز نباشد، آن مفصل از نوع غلتشی، لغزشی است.



در چنین مواقعی برای تعیین موقعیت یک عضو نسبت به عضو دیگر به دو کمیت نیاز است.

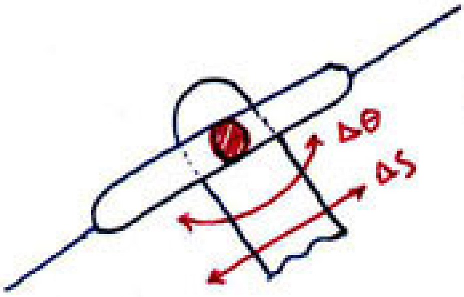
در این مفاصل در نقطه تماس سرعت نسبی ناشی از لغزش وجود دارد ($\vec{V}_{A_2/A_3} = \vec{V}_{A_2} - \vec{V}_{A_3}$)

برای تعیین سرعت زاویه‌ای عضو ۳ نیاز به تعیین V_{A_3} و V_{A_2/A_3} می‌باشد.

با توجه به این اصل که دو جسم در محل تماس در هم فرو نمی‌روند می‌توان جهت V_{A_2/A_3} را تعیین نمود. بدین منظور دستگاه n-t را در محل تماس رسم می‌نماییم. واضح است که مؤلفه n سرعت همدیگر را خنثی می‌کنند، بنابراین فقط سرعت در راستای t وجود دارد که تفاضل سرعت‌های V_{A_2} و V_{A_3} باعث لغزش می‌گردد.

چرخ‌دنده‌ها و اتصال چنگالی (Fork Joint) در زمره مفصل لغزشی-غلتشی هستند.

اتصال چنگالی:

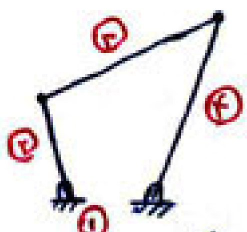


پین درون شیار هم اجازه لغزش (ΔS) و هم اجازه چرخش ($\Delta\theta$) دارد.

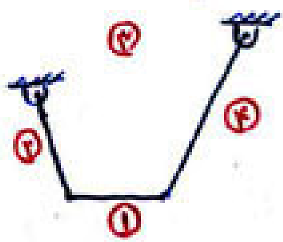
وارونش سینماتیکی یا برگردان:

با ثابت قرار دادن میله‌ای دیگر از یک زنجیره سینماتیکی مشخص می‌توان یک سازوکار دیگر به دست آورد که به این عمل برگردان سازوکار می‌گویند.

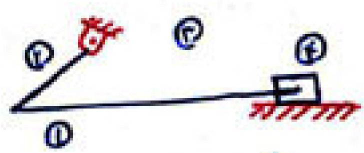
به عبارت دیگر هرگاه دستگاه مختصات مرجع روی اجزا n ام نصب گردیده و حرکات دیگر اجزا نسبت به آن بررسی شود، سازوکار جدید را وارونش یا برگردان n ام سازوکار اصلی می‌خوانند، مثلاً در شکل‌های زیر برگردان سازوکار ۴ میله‌ای و سازوکار لنگ لغزنده قابل مشاهده می‌باشد.



«سازوکار اصلی»



«وارونش سوم»



در برگردان یک سازوکار این نکته مهم و قابل ذکر است که حرکت نسبی بین میله‌ها به هیچ وجه تغییر نمی‌کند.

به عنوان مثال در سازوکار لنگ لغزنده اگر میله ۲ به اندازه زاویه θ در جهت گردش عقربه‌های ساعت گردش نماید، میله ۴ در امتداد خطی مستقیم بر روی میله ۱ به مقدار معینی به طرف راست حرکت خواهد کرد. این مطلب بدون توجه به اینکه کدام میله ثابت است صادق خواهد بود.

حرکت در صفحه :

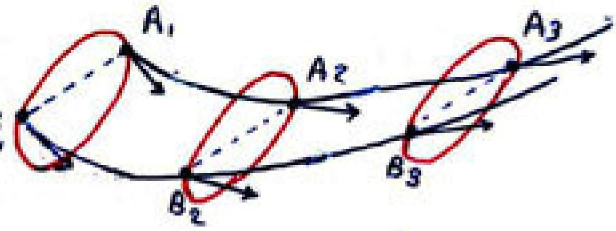
✓ حرکت : تغییر وضعیت یک جسم (ذره مادی یا جسم صلب) نسبت به جسم دیگر که در طی زمان را حرکت گویند.

✓ حرکت صفحه ای :

موقعی یک جسم دارای حرکت در صفحه خواهد بود که تمام نقاط آن در صفحاتی موازی با یک صفحه مبنا حرکت نمایند. این صفحه مبنا را صفحه حرکت می نامند. حرکت در صفحه می تواند یکی از سه نوع انتقالی، دورانی و ترکیب انتقالی و دورانی باشد.

✓ حرکت انتقالی :

اگر جسمی طوری حرکت کند که تمام خطوط مستقیم واقع بر جسم همواره وضعیت های موازی همدیگر داشته باشند، جسم دارای انتقال خواهد بود.



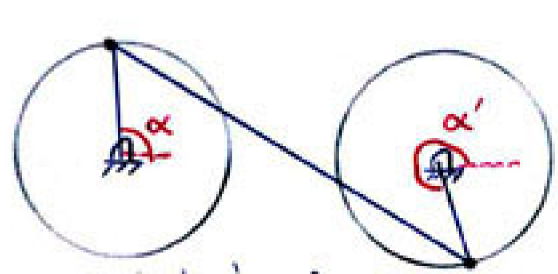
$$\overline{A_1B_1} \parallel \overline{A_2B_2} \parallel \overline{A_3B_3}$$

$$\vec{V}_A = \vec{V}_B = F(t)$$ (به طور مشابه برای تمام نقاط)

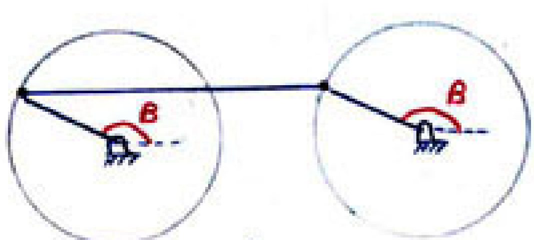
اگر مسیر حرکت تمام نقاط جسم صلب، مشابه و همزمان باشد به این معنی که مسیر همه نقاط یک شکل بوده و در هر لحظه معین روی موقعیتهای متناظر از آن شکل ها واقع باشند، حرکت را جزء دسته حرکت انتقالی می نامیم.

اگر مسیر مذکور، خط باشد آن را راست خط (مستقیم الخط) و در غیر این صورت خمیده خط (منحنی الخط) می نامند.

مثال : کدام یک از شکلهای زیر حرکت انتقالی را نمایش می دهند؟



« مسیرهای مشابه - غیر همزمان »
حرکت غیر انتقالی



« مسیرهای مشابه - همزمان »
حرکت انتقالی خمیده خط

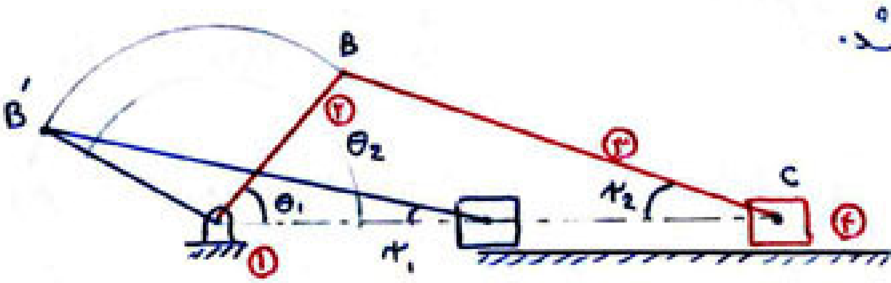
حرکت دورانی یا چرخشی :

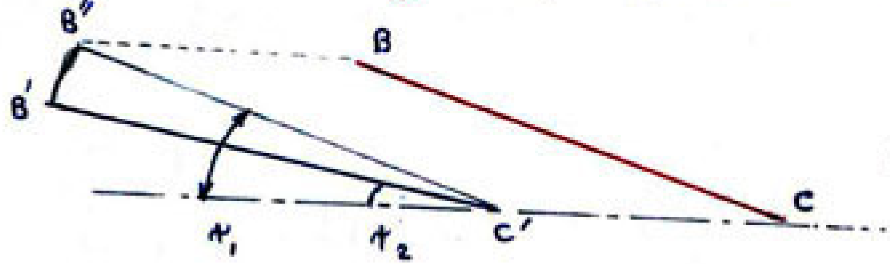
حرکتی است صفحه‌ای که در آن فاصله هر نقطه از جسم صلب در تمام طول چرخه حرکت از یک خط مستقیم (موسوم به محور دوران یا محور چرخش) یکسان و مقداری ثابت است و نقاط واقع بر روی جسم مسیر دایره‌ای را حول آن طی می‌کنند. سرعت نقاطی از جسم صلب که بر روی محور چرخش قرار دارند صفر است.

به عنوان مثال در مکانیزم لنگ - لغزنده، حرکت لنگ یک حرکت دورانی است.

انتقال و دوران :

ترکیبی از حرکت انتقالی و حرکت دورانی را حرکت کلی صفحه‌ای می‌گویند که اغلب قطعات ماشینها دارای حرکتی مرکب از انتقال و دوران می‌باشد. برای مثال حرکت میله رابط موجود در مکانیزم لنگ - لغزنده را ملاحظه نمایید. حرکت عضو ۲ دورانی و حرکت عضو ۴ خطی می‌باشد. اما حرکت عضو ۳ (میله رابط) می‌تواند ترکیبی از حرکت دورانی و حرکت خطی (انتقالی) باشد.





ملاحظه می‌گردد که حرکت از BC به B′C′ شامل دو قسمت می‌باشد:

- حرکت انتقالی از BC به B″C′ به اندازه $\overline{CC'}$
- حرکت دورانی از B″C′ به B′C′ به اندازه زاویه $\psi_1 - \psi_2$

✓ نکته : دو نوع حرکت دیگر به نامهای حرکت مارپیچ و حرکت کروی نیز وجود دارد که در دسته حرکات صفحه‌ای نمی‌باشد.

(مراجعه به صفحه ۱۳ - دینامیک ماشین مارتین) بازدید

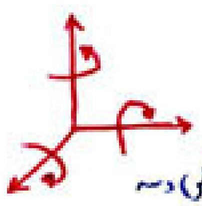
فصل دوم : درجه آزادی (Degree of Freadom)

تعریف کلی درجه آزادی :

طبق تعریف درجه آزادی برابر است با تعداد محورهای مختصات مستقل که برای تعریف حرکت نیاز است منهای تعداد روابط مانع (مقید کننده) که باعث مقید شدن آن حرکت می شوند.

به عبارت دیگر تعریف درجه آزادی عبارت است از تعداد متغیرهای (پارامترهای) مستقل یا کمترین پارامترهای مستقل که برای تعیین وضعیت جسم مورد نیاز است.

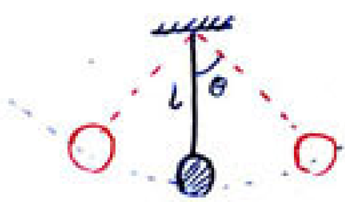
تذکر ۱ : ذره در صفحه دارای ۲ (حداکثر) درجه آزادی و در فضا دارای ۳ (حداکثر) درجه آزادی می باشد. زیرا اندازه ذره ناچیز است و در نتیجه چرخش آن دور خودش مهم نیست.



(سه جابجایی خطی و سه جابجایی زاویه ای)

تذکر ۲ : جسم صلب در صفحه ۳ (حداکثر) درجه آزادی و در فضا ۶ (حداکثر) درجه آزادی دارد.

مثال : درجه آزادی را تعیین نمایید.



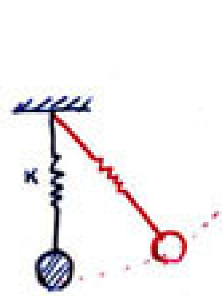
معادله نوسان : $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$

یک معادله دو متغیره است که نشان می دهد که یک متغیر حذف می شود. اگر دستگاه مختصات x و y داشته باشیم درجه آزادی برابر است با:

درجه آزادی = ۲ - ۱ = ۱

در دستگاه قطبی نیز تنها متغیر θ وضعیت جسم را بیان می کند.

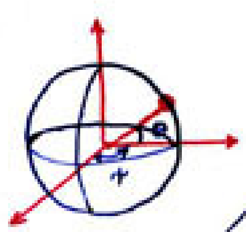
مثال : درجه آزادی را تعیین نمایید.



با وجود فنر k طول L ثابت نیست و معادله محدود کننده وجود ندارد.

درجه آزادی : ۲ - ۰ = ۲

مثال : درجه آزادی را تعیین نمایید.



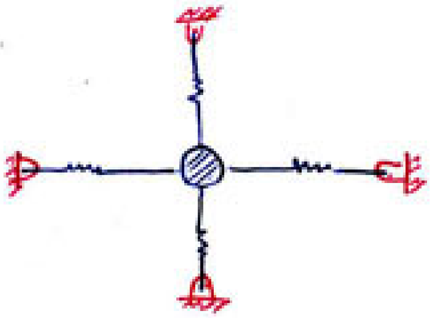
(کره توخالی)

- در دستگاه x و y و z یک معادله مقید وجود دارد: $x^2+y^2+z^2=r^2$

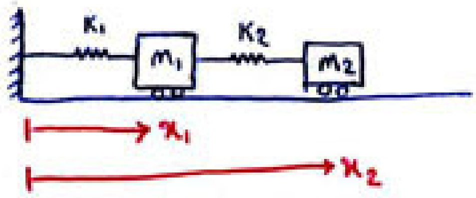
درجه آزادی : ۳ - ۱ = ۲

- در دستگاه r و θ و φ ، شعاع r محدود و θ و φ وضعیت جسم را تعیین می کنند.

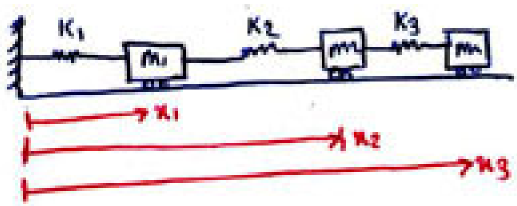
مثال: درجه آزادی شکلهای زیر را تعیین کنید. (در صفحه)



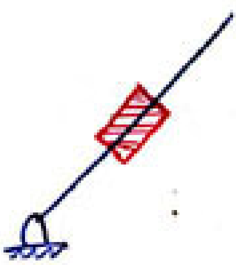
(رابطه مانع نداریم و درجه آزادی برابر ۲ می باشد)



مسئله دارای ۲ درجه آزادی است. اگر یکی از دو جسم را بگیریم دیگری مستقل از آن حرکت می کند.

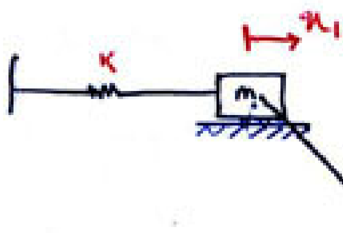


هر کدام از ۳ جرم با یک مختصه x حرکت می کنند و در نتیجه ۳ درجه آزادی داریم.



دو درجه آزادی دارد.

(تغییر r و تغییر θ) یا (x و y)

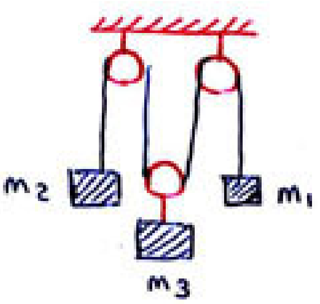


دو درجه آزادی دارد.

یکی حرکت جرم m_1 (x) و دیگری نوسان آونگ (θ)

اگر جسم الاستیک باشد هر ذره آن ۳ درجه آزادی دارد و به دلیل اتصال حرکت ذرات نسبت به هم تعداد ∞ ذره با ۳ درجه آزادی وجود دارد که ∞ درجه آزادی بوجود می آید. لذا کلیه اجسام الاستیک را جهت بررسی و تحلیل صلب درنظر می گیریم با احتساب 6 درجه آزادی در فضا.

- در سیستم طناب و قرقره درجه آزادی عبارت است از (تعداد جرمها - تعداد طنابها)



مثال: درجه آزادی = ۲ <= ۱ طناب - 3 جرم

چون ۲ درجه آزادی دارد می تواند ۲ ورودی دلخواه نیز داشته باشد

P-13

درجه آزادی در زنجیره سینماتیکی :

درجه آزادی یک زنجیره سینماتیکی عبارت است از تعداد حداقل پارامترهای مستقل که برای تعیین وضعیت اعضای یک زنجیره سینماتیکی نسبت به بدنه یا پایه مورد نیاز باشد. به عبارت دیگر تعداد ورودی‌های مورد نیاز جهت قرار دادن یک مکانیزم در وضعیت خاص را درجه آزادی گویند.

درجه آزادی یک سازوکار (مکانیزم) را می‌توان با استفاده از تعداد اعضا و تعداد و نوع اتصالات به کار رفته تعیین نمود. به این منظور از رابطه گروبلر (Grubler) استفاده می‌گردد:

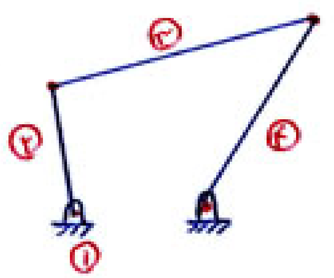
$$\boxed{DoF = 3(n-1) - 2F_1 - F_2}$$

n : تعداد اعضای مکانیزم

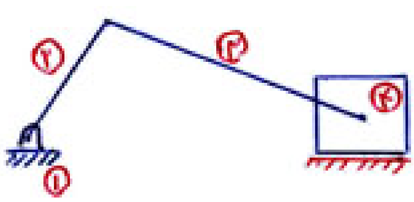
F_1 : تعداد مفاصل یک درجه آزادی شامل مفاصل لولایی، لغزشی یا غلتشی

F_2 : تعداد مفاصل دو درجه آزادی شامل مفاصل لغزشی-غلتشی

مثال: درجات آزادی مکانیزم‌های زیر را تعیین کنید:

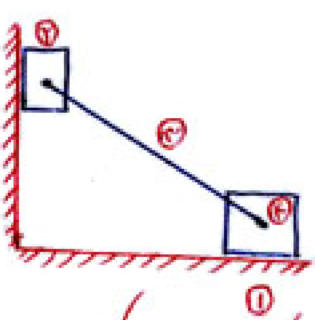


$$\begin{cases} n = 4 \\ F_1 = 4 \text{ (لولا)} \\ F_2 = 0 \end{cases} \qquad DoF = 3(4-1) - 2\times 4 - 0 = 9 - 8 = 1$$



$$\begin{cases} n = 4 \\ F_1 = 3 \text{ (لولا)} + 1 \text{ (لغزنده)} = 4 \\ F_2 = 0 \end{cases}$$

$$DoF = 3(4-1) - 2\times 4 - 0 = 9 - 8 = 1$$



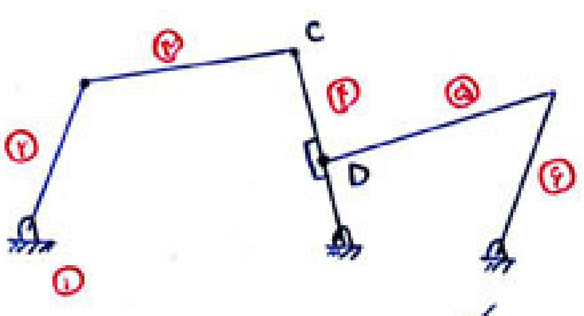
« مکانیزم بیضی نگار »

$n = 4$

$F_1 = 2 \text{ (لولا)} + 2 \text{ (لغزنده)} = 4$

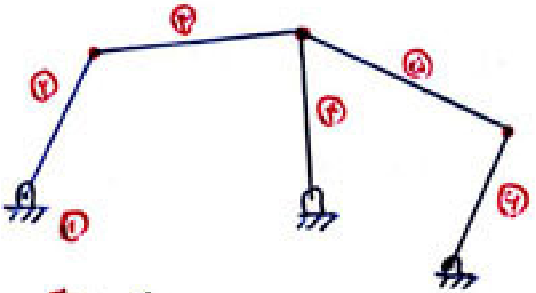
$F_2 = 0$

$$DoF = 3(4-1) - 2\times 4 - 0 = 9 - 8 = 1$$



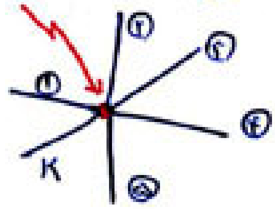
$$\begin{cases} n = 6 \\ F_1 = 7 \\ F_2 = 0 \end{cases} \qquad DoF = 3(6-1) - 2\times 7 - 0 = 1$$

حال فرض کنید C و D بر هم منطبق شده اند

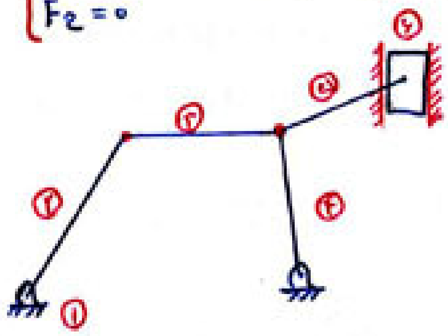


✓ نکته مهم: هرگاه K عضو در یک نقطه لولا شده باشند آن لولا یک لولای چندگانه خوانده می شود و معادل (K-1) لولای ساده می باشد

(K-1) لولا

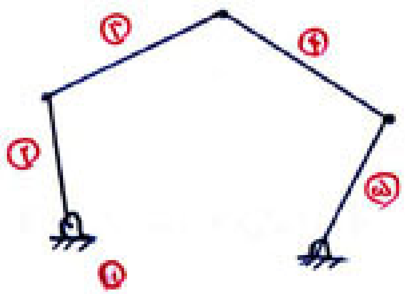


$$\begin{cases} n = 6 \\ F_1 = 7 \\ F_2 = 0 \end{cases} \qquad DoF = 3(6-1) - 2\times 7 - 0 = 1$$



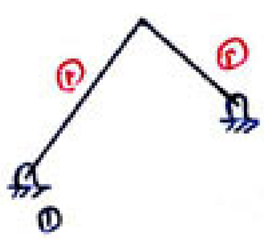
$$\begin{cases} n = 6 \\ F_1 = 7 \\ F_2 = 0 \end{cases} \qquad DoF = 3(6-1) - 2\times 7 - 0 = 1$$

✓ لغزنده چه به صورت مماس با یک سطح دیگر باشد چه با دو سطح در مجموع یک مفصل لغزشی از نوع F_1 محسوب می شود



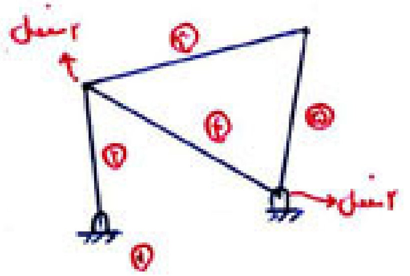
$$\begin{cases} n = 5 \\ F_1 = 5\ (\text{لولا}) \\ F_2 = 0 \end{cases} \qquad DoF = 3(5-1) - 2\times 5 - 0 = 2$$

✓ مکانیزم ۲ درجه آزادی است و جهت حرکت نیاز به ۲ ورودی دارد.



$$\begin{cases} n = 3 \\ F_1 = 3 \\ F_2 = 0 \end{cases} \qquad DoF = 3(3-1) - 2\times 3 - 0 = 0$$

زمانی که یک مکانیزم دارای درجه آزادی صفر باشد یعنی مجموعه صلب و نامتحرک بوده یا اصطلاحاً سازه نامیده می شود



$$\begin{cases} n = 5 \\ F_1 = 6 \\ F_2 = 0 \end{cases}$$

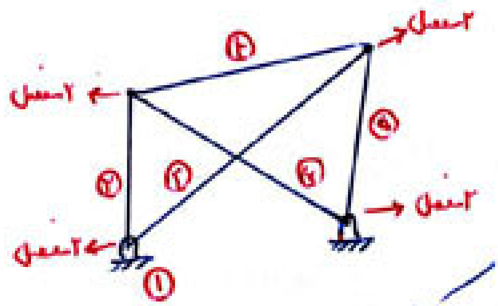
$$DoF = 3(5-1) - 2(6) - 0 = 0$$

سازه معین
(صلب)

نکته: به ازاء هر میله یا اهرمی که به سازه معلومی اضافه گردد، سه درجه آزادی افزایش می‌یابد و به ازاء هر لولایی که به سازه افزوده شود، دو درجه آزادی کاسته می‌شود.

- در نهایت افزودن هر اهرم دو مفصلی به سازه باعث کاهش یک درجه آزادی می‌گردد. $((3(1) - 2\times 2 = -1))$

در مثال بالا افزایش یک اهرم به سازه ۴ میله‌ای باعث کاهش درجه آزادی از 1 به صفر گردید.



$$\begin{cases} n = 6 \\ F_1 = 8 \\ F_2 = 0 \end{cases}$$

$$DoF = 3(6-1) - 2\times 8 = -1$$

سازه نامعین
(دارای یک درجه فوق صلب)

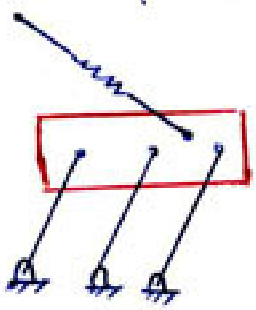
- یعنی سازه نامعین فوق نه تنها حرکت نمی‌کند بلکه اگر یک میله را هم برداریم باز هم حرکتی نداریم.

استثنا:

۱- رابطه گروبلر در مورد سازه‌هایی که قسمتی از آن را می‌توان توسط اهرم‌های موازی جایگزین و معادل نمود، صادق نیست.

۲- اگر افزودن عضو یا اتصال جدید تأثیری در حرکت نداشته باشد، یعنی با حذف آن اهرم یا عضو یا مفصل همچنان حرکت قبلی امکان‌پذیر باشد در این صورت دستور گروبلر دیگر درست نخواهد بود.

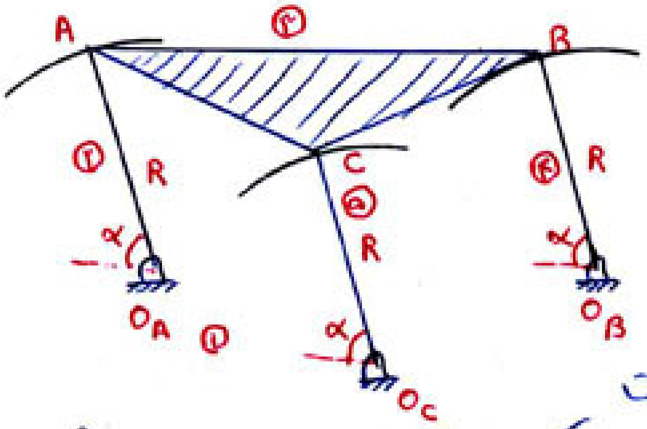
مثال:



در مکانیزم روبرو حذف هر یک از میله‌ها تأثیری در حرکت ندارد و قابل حذف هستند.

$$DoF = 3(4-1) - 2\times 4 - 0 = 1$$

مثال :



$n = 5$

$F_1 = 6$

$F_2 = 0$

$$DoF = 3(5-1) - 2(6) = 0$$

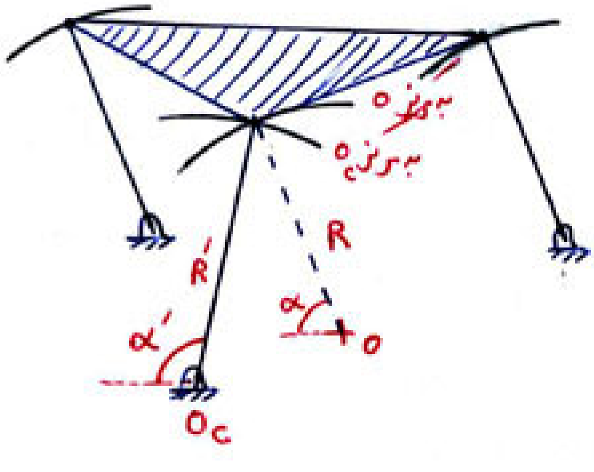
(غیر واقعی)

مکانیزم فوق، مکانیزم موازی الاضلاع می باشد و چون حرکت تمامی نقاط روی میله بازوی ۴ یک حرکت انتقالی است ؛ بنابراین مسیر حرکت همه نقاط این بازو، دایره ای به شعاع R می باشد و اگر لینک متحرکی به مکانیزم که سبب گردد مسیر نقطه ای از این بازو، همین دایره باشد، یک قید اضافی و زائد بوده، و قابل حذف می باشد. مثلاً بازوی ۵ سبب می گردد تا نقطه C روی مسیر اولیه خود (در حالتی که بازوی ۵ وجود نداشته) باقی بماند. بنابراین وجود این بازو (بازوی ۵) زائد و قابل حذف است.

با حذف این بازو داریم :

$$\begin{cases} n = 4 \\ F_1 = 4 \\ F_2 = 0 \end{cases} \qquad DoF = 3(4-1) - 2\times 4 - 0 = 1$$

اما درصورتی که طول بازوی ۵ کمی بلندتر یا کوتاهتر باشد $(R \pm \varepsilon)$ یا زاویه α کمی کمتر یا بیشتر باشد $(\alpha \pm \varepsilon)$ آنگاه نقطه C وادار به حرکت روی مسیر دایروی جدیدی می شود که با مسیر دیکته شده توسط مکانیزم موازی الاضلاع متفاوت بوده و با توجه به اینکه یک نقطه واحد نمی تواند روی دو دایره مختلف حرکت کند، پس سازوکار قفل می شود.



$n = 5$

$F_1 = 6$

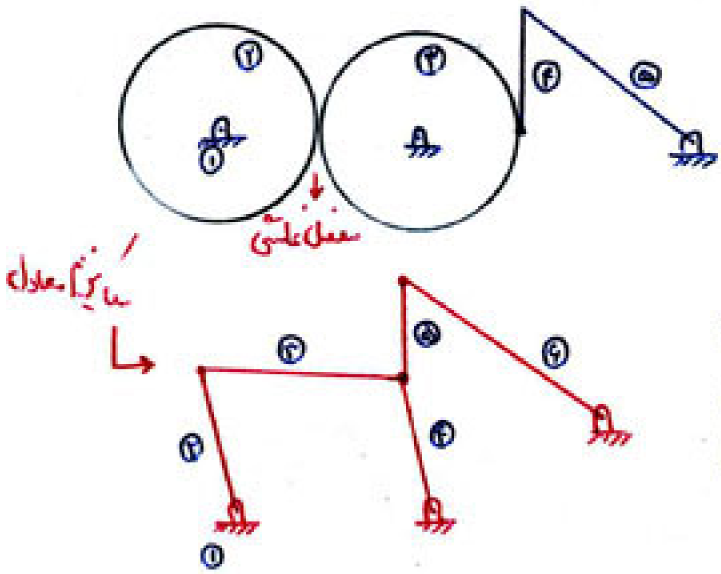
$F_2 = 0$

$$DoF = 3(5-1) - 2\times 6 = 0$$

(واقعی)

(سازه صلب)

مثال:



$n=5$
$F_2=6$
$F_2=0$

$$DoF=3(4)-2(6)=0$$

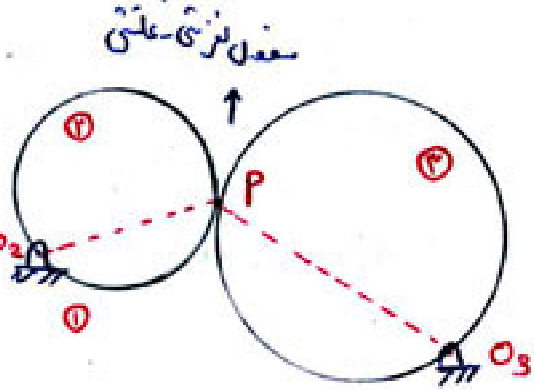
(غیر واقعی)

$n=6$
$F_2=7$
$F_2=0$

$$DoF=3(5)-2(7)=1$$

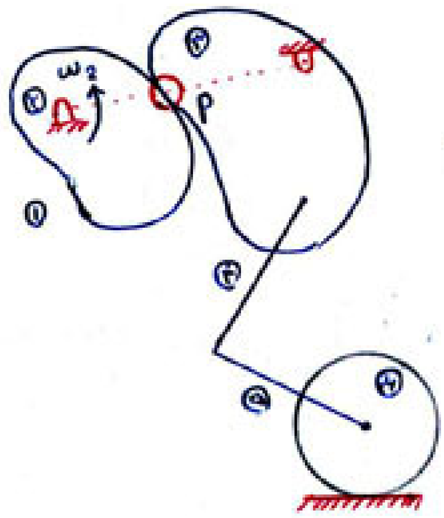
(واقعی)

مثال: درجه آزادی مکانیزم های زیر را تعیین کنید.



$n=3$
$F_1=2$
$F_2=1$

$$DoF=3(2)-2(2)-1=1$$



$n=6$
$F_1=6$
$F_2=1$

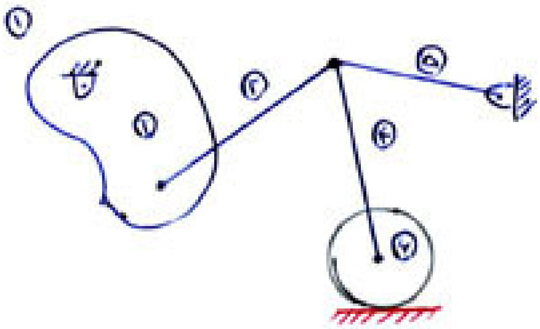
$$DoF=3(5)-2(6)-1=2$$

✓ نکته: با وجودی که $V_{P_3}=V_{P_2}$ ولی در نقطه تماس بعد از این وضعیت برقرار نیست و مفصل لغزشی غلتشی است.

✓ نکته: هر جسم که روی زمین قرار دارد (جسم غلتان و گرد) چنانچه بی لغزش باشد و اطلاعاتی از حرکت آن در دست باشد نسبت به زمین یک مفصل غلتشی به حساب می آید.

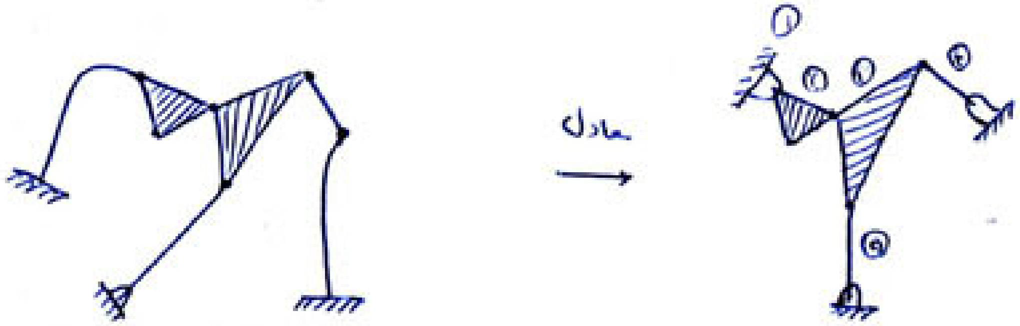
تکلیف:

(۱)



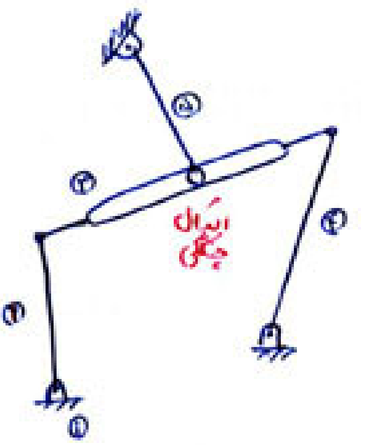
$$\begin{cases} n = 6 \\ F_1 = 7 \\ F_2 = 0 \end{cases} \qquad DoF = 3(5) - 2(7) = 1$$

(۲)



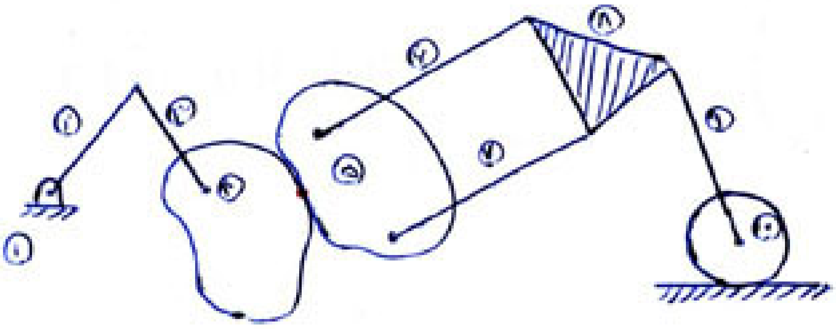
$$\begin{cases} n = 5 \\ F_1 = 6 \\ F_2 = 0 \end{cases} \qquad DoF = 3(4) - 2(6) = 0$$

(۳)



$$\begin{cases} n = 5 \\ F_1 = 5 \\ F_2 = 1 \end{cases} \qquad DoF = 3(4) - 2(5) - 1 = 1$$

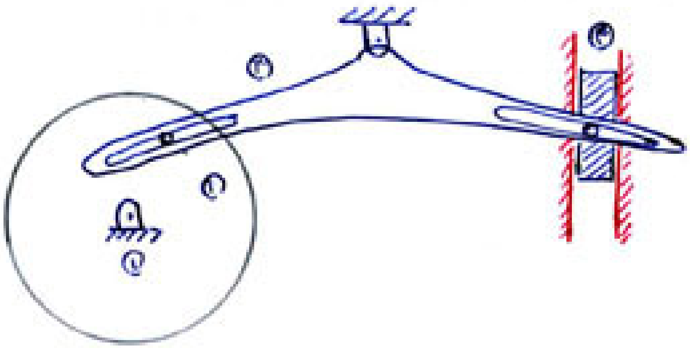
(۴)



$$\begin{cases} n = 10 \\ F_1 = 10 + 1 \\ F_2 = 0 \end{cases} \qquad DoF = 3(9) - 2(11) = 5$$

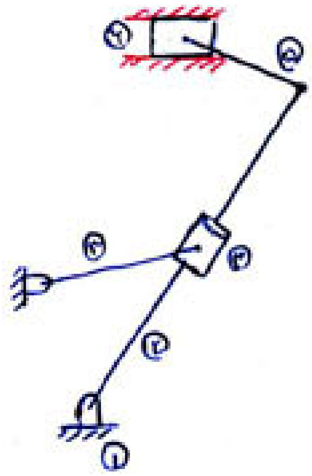
با توجه به اینکه بین اعضای ۵ و ۴ یک مفصل وجود دارد و قضاوتی در مورد لغزشی یا غلتشی بودن نمی‌توان انجام داد در اثر
دوران دو عضو ۴ و ۵ مشخص نیست فرض می‌شود که مفصل غلتشی است.

(۵)



$$\begin{cases} n = 4 \\ F_1 = 3 \\ F_2 = 2 \end{cases} \qquad DoF = 3(3) - 2(3) - 2 = 1$$

6



$$\begin{cases} n=6 \\ F_1=7 \\ F_2=0 \end{cases} \qquad DoF = 3(5)-2(7)=1$$

تسمه به عنوان اتصال پوششی (wrapping Pair)

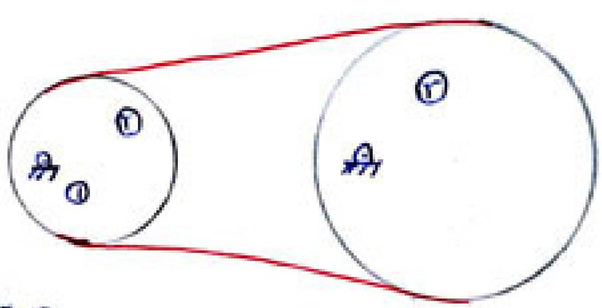
یک سیم، تسمه، زنجیر و یا هر عضو انعطاف پذیر و بدون قابلیت تغییر طول که دو اهرم بدون تماس مستقیم را به هم وصل می‌کند، یک اتصال دو درجه آزادی می‌باشد را اتصال پوششی گویند. یک درجه آزادی حرکت جسم حول محل تماس اتصال و یک درجه دیگر انتقال منحنی الخط (دوران سیم دار) حول محل دیگر تماس اتصال می‌باشد.

پس از نوع F_2 می‌باشد.

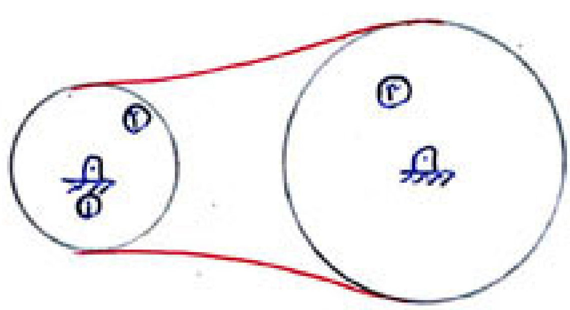
اگر در مکانیزم ثابت بودن طول تسمه تضمین شود یک اتصال F_2 در نظر گرفته می‌شود و در غیر این صورت دو اتصال F_2 در نظر گرفته می‌شود.

تسمه در شمارش اعضا لحاظ نمی‌گردد (قرارداد)

مثال: درجه آزادی دو مکانیزم زیر را تعیین کنید.



$$\begin{cases} n=3 \\ F_1=2 \\ F_2=2 \end{cases} \qquad DoF = 3(2)-2(2)-2=0$$



$$\begin{cases} n=3 \\ F_1=2 \\ F_2=1 \end{cases} \qquad DoF = 3(2)-2(2)-1=1$$

✓ نکته: مفصل بین دو چرخنده یا محل اتصال و تماس دو چرخنده یک مفصل لغزشی غلتشی با دو درجه آزادی از نوع F_2 محسوب می‌شود.

فصل سوم : مراکز آنی (Centers)

(مدل آسانی)

اصطلاح مرکز آنی برای نشان دادن مرکز دوران یک جسم در هر لحظه مورد استفاده قرار می‌گیرد و به شکل زیر تعریف می‌شود :

تعریف ۱) مرکز آنی نقطه‌ای واقع بر یک جسم بوده که عضو دیگری به طور دائم یا لحظه‌ای حول آن دوران می‌نماید.

تعریف ۲) مرکز آنی نقطه‌ای مشترک واقع بر دو جسم می‌باشد که در سرعتهای آنها چه از نظر مقدار و چه از نظر امتداد و جهت با هم برابر یکسان می‌باشد و در آن نقطه سرعت نسبی بین دو جسم مورد نظر صفر است.

- مرکز آنی چرخش بین دو جسم ملحق شامل m و n را با I_{mn} یا I_{nm} نمایش می‌دهند.

- برای یک مکانیزم که شامل n عضو باشد، تعداد مرکز آنی از رابطه زیر حاصل می‌شود :

$$N = \frac{n(n-1)}{2}$$

- مراکز چرخش می‌توانند آنی (Instantaneous) و یا دائم (Permanent) باشند. در موردی که محل مرکز چرخش، نسبت به دو جسم تغییر نکند آن را آنی در دوران مورد دائم گویند.

مراکز آنی بر دو نوع‌اند : ۱- مراکز آنی اولیه (Primery centers)

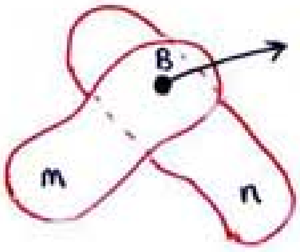
۲- مراکز آنی ثانویه (secondry centers)

- موقعیت مراکز چرخش اولیه با توجه به هندسه مکانیزم معلوم بوده و نیازی به این فرآیند اثباتی نیست، اما موقعیت مراکز چرخش ثانویه با توجه به موقعیت مراکز چرخش اولیه و انجام فرآیندهای اثباتی معلوم می‌شود.

- هر دو نوع مرکز چرخش اولیه و ثانویه می‌توانند دائم یا آنی باشند.

۱) مرکز آنی در مفصلهای پینی (لولایی)

اگر دو جسم به هم لولا شده باشند، در آن نقطه سرعت دو جسم ملحق با هم برابر است و آن نقطه مرکز آنی چرخش می‌باشد.

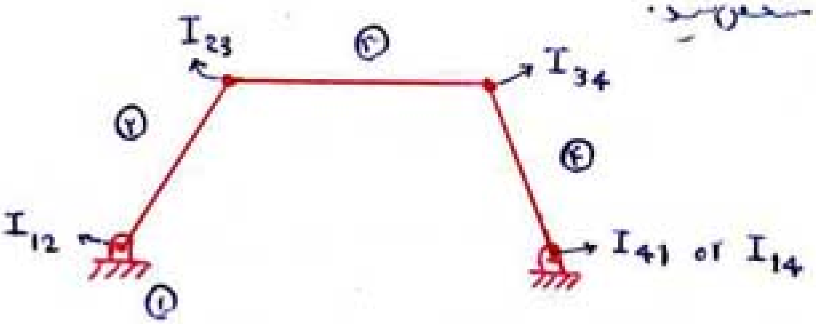


$$(\vec{V_B})_n = (\vec{V_B})_m$$

$$\hookrightarrow \; I_{mn} = B$$

یعنی نقطه مفصل همان مرکز آنی اولیه چرخش می باشد.

مثال: مراکز آنی چرخش از نوع پین در شکل زیر را مشخص کنید.

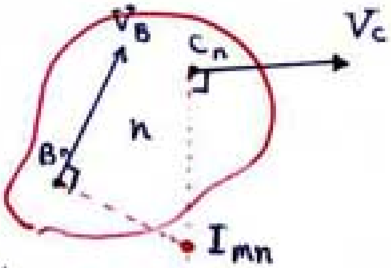


$$N = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{4(3)}{2} = 6$$

از 6 مرکز آنی برای مثال ما، تعداد ۴ عدد مرکز آنی اولیه از نوع لولایی یا پینی می باشد.

۲) مرکز آنی جسم صلبی که امتداد سرعت خطی دو نقطه آن معلوم باشد:

اگر راستای سرعت دو نقطه از یک جسم صلب معلوم باشد و آن دو راستا موازی نباشند با رسم دو عمود بر راستاهای معلوم در محل برخورد آن دو عمود می توان مرکز آنی دوران آن جسم را مشخص کرد.

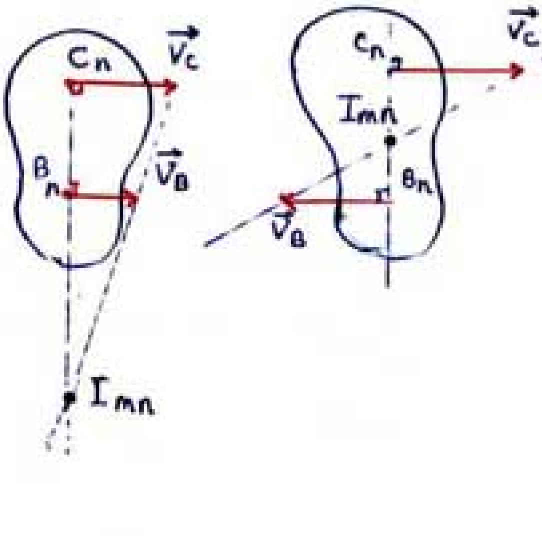


$$\vec{V_c} = \vec{\omega_n} \times \vec{IC} \qquad \vec{V_c} \perp \vec{IC}$$

$$\vec{V_B} = \vec{\omega_n} \times \vec{IB} \qquad \vec{V_B} \perp \vec{IB}$$

(زمین m)

اگر راستای سرعت دو نقطه از یک جسم صلب معلوم و آن دو راستا موازی باشند، در این صورت پس از خارج نمودن یک عمود بر راستای سرعت دو نقطه، انتهای سرعت دو نقطه را به هم وصل کرده تا مرکز چرخش از تقاطع دو خط فوق حاصل گردد.



$$\vec{V_c} = \vec{\omega_n} \times IC$$

$$\vec{V_B} = \vec{\omega_n} \times IB$$

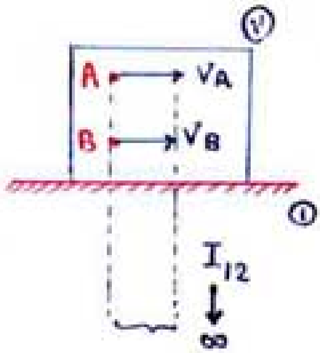
(زمین m)

$$\omega_n = \frac{|\vec{V_c}|}{IC} = \frac{|\vec{V_B}|}{IB}$$

۳) مرکز آنی یک جسم لغزنده

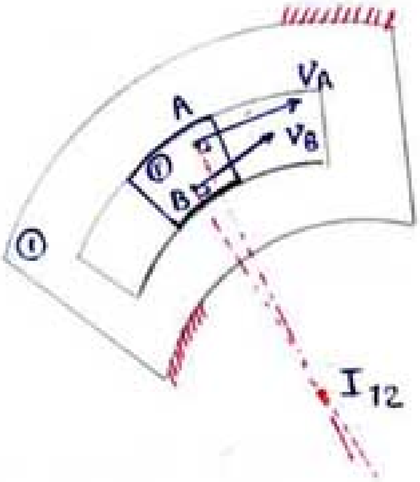
اگر حرکت بین دو جسم از نوع لغزش کامل باشد در آن صورت ممکن است یکی از حالات زیر اتفاق افتد:

الف) لغزش در امتداد مسیری مستقیم:



با توجه به اینکه سرعت دو نقطه از جسم ($\vec{V}_A$ و $\vec{V}_B$) مشخص و برابر است.
لذا رسم دو عمود بر امتداد این دو بردار دو خط موازی است
که فرض می شود دو خط موازی همدیگر را در بی نهایت قطع می کنند.
لذا مرکز آنی دوران در بی نهایت و عمود بر سطح لغزش است.

$V = r\omega \Rightarrow \omega = \frac{V}{r}\ ,\ r \to \infty \Rightarrow \omega = 0$ (جسم لغزش کامل دارد)

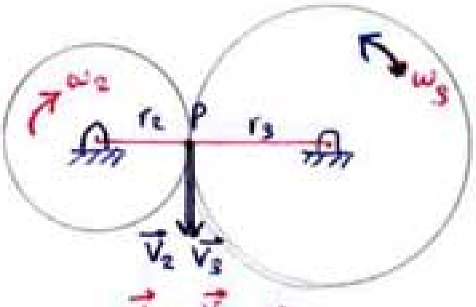


ب) لغزش در امتداد مسیر منحنی:

با توجه به مسیر منحنی شکل و وجود یک مرکز آنی دوران در بی نهایت نیست بلکه در مرکز انحنای مسیر می باشد.

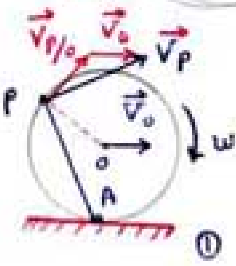
۴) مرکز آنی یک جسم غلتان

اگر یک جسم بدون لغزش روی جسم دیگری بغلتد، (جسم دیگری تواند ساکن یا متحرک باشد) آنگاه به دلیل اینکه سرعت در نقطه تماس از دو جسم برابر است و سرعت نسبی برای نقاط محل تماس صفر می باشد، بنابراین نقطه تماس خود مرکز آنی سرعت این دو جسم نسبت به هم است.



$$\vec{V}_2 = \vec{V}_3 \Rightarrow r_2\omega_2 = r_3\omega_3$$

$$\vec{V}_{2/3} = 0 \Rightarrow I_{23} = P$$



$$\vec{V}_P = \vec{V}_{P/o} + \vec{V}_o$$

$I_{12} = A$ (مرکز آنی دوران)

سرعت در نقطه P یا o یا ... را می توان نسبت به نقطه A بررسی کرد. لذا در نقطه تماس

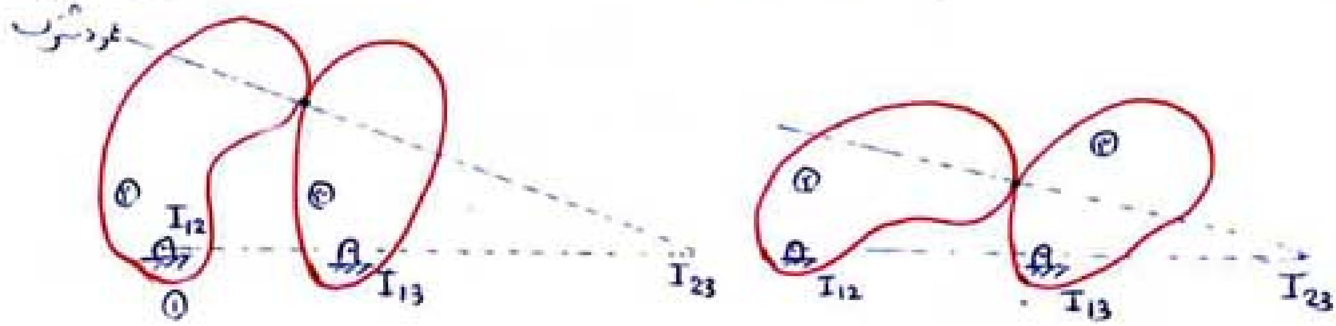
۵) مرکز آنی در تماس لغزشی - غلتشی

اگر تماس بین دو جسم از نوع غلتشی-لغزشی باشد در آن صورت برای تعیین مرکز آنی آن دو جسم نسبت به هم به شرح زیر عمل می‌کنیم:

الف) مرکز یا مراکز آنی دو جسم نسبت به قطعه ۱ را پیدا می‌کنیم.

ب) عمود مشترک دو سطح در نقطه تماس را رسم می‌کنیم.

پ) محل تلاقی عمود مشترک با رابط بین مراکز بین دو جسم نسبت به قطعه ۱، مرکز آنی دو جسم نسبت به یکدیگر است.



I_{23} می‌تواند جزئی از جسم ۲ یا ۳ نیز باشد.

قضیه کندی : (Arnhold Kennedy)

بنا بر قضیه کندی سه قطعه که نسبت به یکدیگر دارای حرکت نسبی (صفحه‌ای) می‌باشند، دارای سه مرکز آنی بوده که هر سه در یک راستا می‌باشند. یعنی اگر سه جسم صلب m و n و k داشته باشیم، با معلوم بودن I_{nK} و I_{mK} می‌توان گفت مرکز سوم یعنی I_{nm} روی خط واصل بین دو مرکز قبلی قرار دارد. (مثال شکل بالا)

روش دیاگرام دایره برای جایابی مراکز آنی ثانویه

یکی از روشهای تعیین مراکز آنی ثانویه روش دایره می‌باشد که به ترتیب زیر عمل می‌کنیم.

۱- ابتدا دایره‌ای به شعاع دلخواه رسم می‌کنیم و به n قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم. (n تعداد اعضای مکانیزم است)

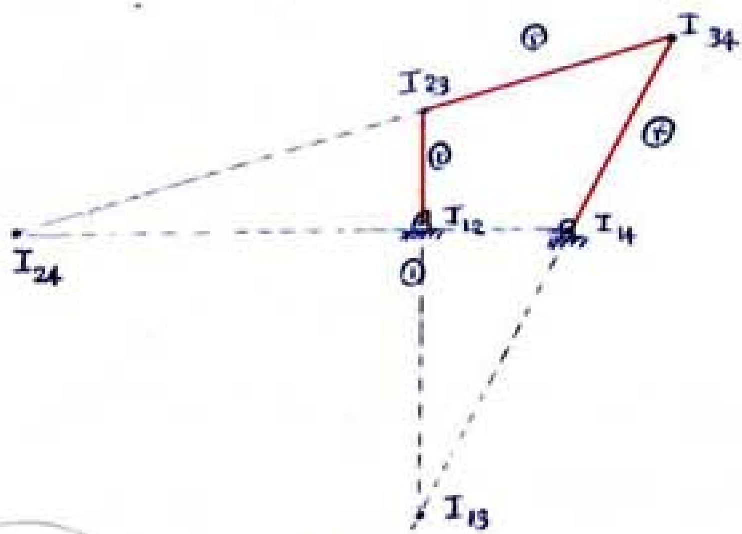
۲- به هر گره یک شماره داده می‌شود که معرف یک جسم صلب با همان شماره خواهد بود.

۳- رابطه بین هر دو گره (دو شماره) معرف یک مرکز آنی (مرکز چرخش) است. اگر این مرکز از نوع اولیه باشد آن را با خط پر و اگر مرکز مربوط مجهول باشد (ثانویه) آن را با خط نقطه‌چین مشخص می‌کنیم.

۴- برای تعیین مراکز آنی ثانویه، هر دو مثلثی را در نظر می‌گیریم که در هر یک ضلع نقطه‌چین مشترک و دو ضلع دیگر آنها پر باشد.

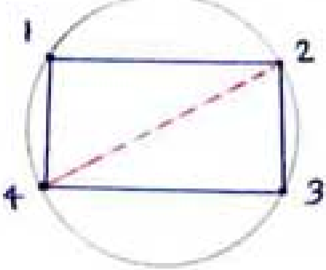
۵- بر اساس قضیه کندی، محل مرکز آنی ثانویه را بدست می‌آوریم و پس از تعیین آن خط‌چین مربوط را با خط پر بر روی دایره نمایش می‌دهیم.

مثال: کلیه مراکز آنی مکانیزم زیر را تعیین کنید.



$$N=\frac{n(n-1)}{2}=\frac{4(3)}{2}=6$$

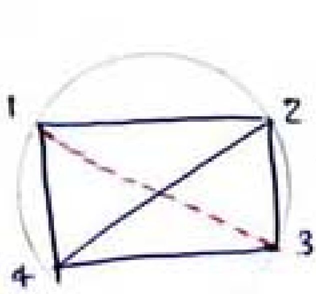
از مجموع ۶ مرکز آنی تعداد ۴ عدد مراکز آنی اولیه شامل می‌باشند. جهت تعیین ۲ مرکز آنی ثانویه از روش دایره استفاده می‌کنیم.



جهت بدست آوردن مرکز آنی ثانویه I_{24} از دو مثلث $\overset{\triangle}{234}$ و $\overset{\triangle}{214}$ استفاده می‌کنیم.

از مثلث $\overset{\triangle}{234}$ امتداد مراکز آنی اولیه I_{23} و I_{34} را بهم وصل می‌کنیم.

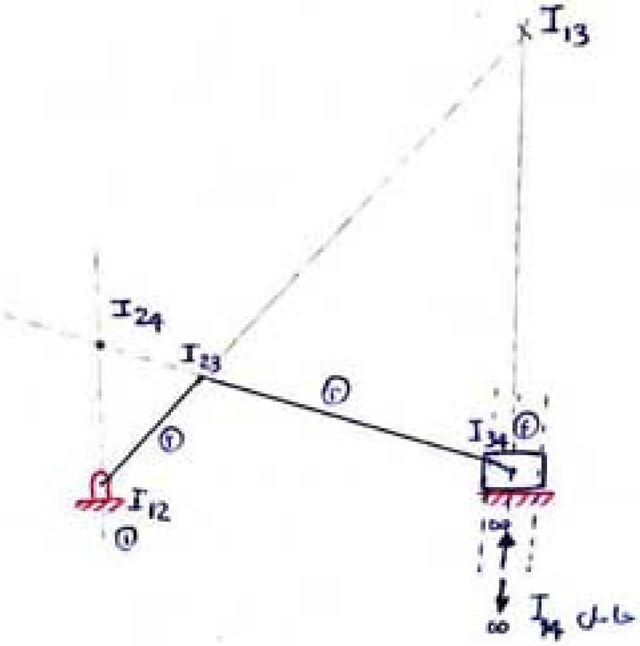
از مثلث $\overset{\triangle}{214}$ امتداد مراکز آنی اولیه I_{12} و I_{14} را به هم وصل می‌کنیم.



محل تقاطع دو خط I_{24} را به ما نشان می‌دهد و خط 24 را پر (کامل) می‌کنیم.

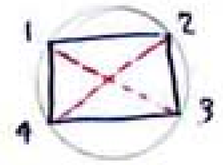
به همین ترتیب I_{13} را از دو مثلث $\overset{\triangle}{123}$ و $\overset{\triangle}{143}$ بدست می‌آوریم.

مثال: تمامی مراکز آنی مکانیزم را نشان دهید.



$$N=\frac{n(n-1)}{2}=6$$

4 مرکز آنی اولیه هستند که I_{12} و I_{23} و I_{34} در مفاصل است و I_{14} در راستای عمود بر لغزنده و در بی‌نهایت است.



$I_{31} \rightarrow \overset{\Delta}{123}$ و $\overset{\Delta}{143}$

$I_{24} \rightarrow \overset{\Delta}{214}$ و $\overset{\Delta}{432}$

برای $\overset{\Delta}{214}$ می‌بایست I_{12} و I_{14} را به هم وصل کنیم و برای این کار، از محل I_{12} به صورت عمود به سمت بی‌نهایت رسم می‌کنیم.

« توضیحی از کاربرد مراکز آنی دوران در این مثال »:

فرض کنید ω_2 معلوم باشد. ω_3 و ω_4 را محاسبه کنید:

با ترسیم مراکز آنی و مشخص نمودن محل آنها می‌دانیم که I_{23} نقطه‌ای است که سرعت دو جسم 2 و 3 نسبت به آن یکسان است.

از جسم ۲ $\quad V_{I_{23}}=(I_{12}-I_{23})\,\omega_2$

از جسم ۳ $\quad V_{I_{23}}=(I_{13}-I_{23})\,\omega_3$

$$\Rightarrow \omega_3=\frac{I_{12}-I_{23}}{I_{13}-I_{23}}\,\omega_2$$

حال با توجه به اینکه I_{23} بین I_{13} و I_{12} است لذا ω_3 در خلاف جهت ω_2 است.

ضمناً چون طول $\overline{I_{12}-I_{23}}$ از طول $\overline{I_{13}-I_{23}}$ کمتر است $\longleftarrow$ $\omega_2>\omega_3$

به طور کلی می‌توان اینطور تعریف کرد:

$$\omega_{\text{متحرک}}=\frac{\text{فاصله مرکز آنی محرک نسبت به قطعه ثابت تا مرکز آنی محرک نسبت به متحرک}}{\text{فاصله مرکز آنی متحرک نسبت به قطعه ثابت تا مرکز آنی محرک نسبت به متحرک}}\cdot\omega_{\text{محرک}}$$

با ترتیب فوق برای ω_4 داریم:

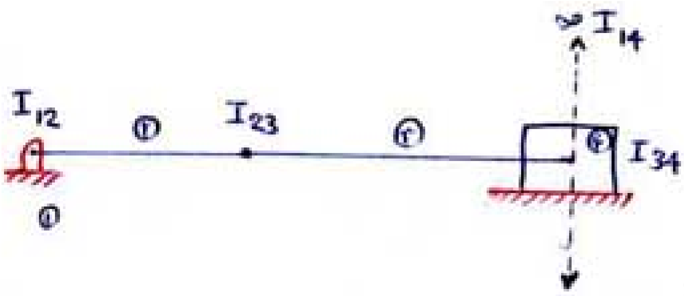
$$\omega_4=\frac{I_{12}-I_{24}}{I_{14}-I_{24}}\,\omega_2 \Rightarrow \omega_4=0$$

به سمت ∞

جسم 4 فقط لغزش دارد که کاملاً صحیح است.

* نکته: اگر مرکز آنی دو جسم نسبت به هم مابین مراکز آنی هر دو جسم نسبت به قطعه ثابت باشد، در آن صورت جهت ω محرک خلاف جهت ω متحرک است. و اگر مابین نباشد ω محرک و متحرک هم سو می‌باشد.

مثال: در مکانیزم ذیل در حالت ذیل مراکز آنی را مشخص کنید.



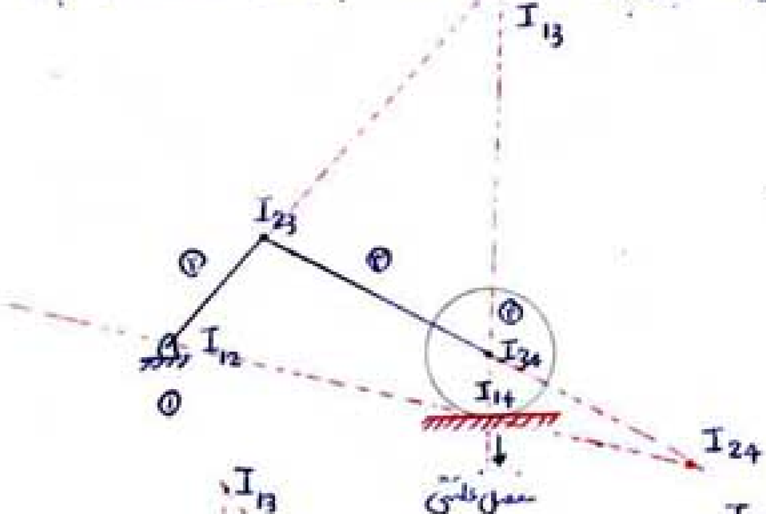
ابتدا دایره شکل ذیل را رسم می‌کنیم و از اضلاع مثلث‌ها استفاده می‌کنیم.

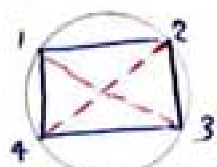
$I_{13} \rightarrow \overset{\Delta}{123}$ و $\overset{\Delta}{143}$

$I_{24} \rightarrow \overset{\Delta}{214}$ و $\overset{\Delta}{432}$

ملاحظه می‌گردد که I_{13} منطبق بر I_{34} و I_{24} منطبق بر I_{12} خواهد افتاد. پس در حالت‌های خاص برخی از مراکز چرخش بر هم منطبق می‌شوند.

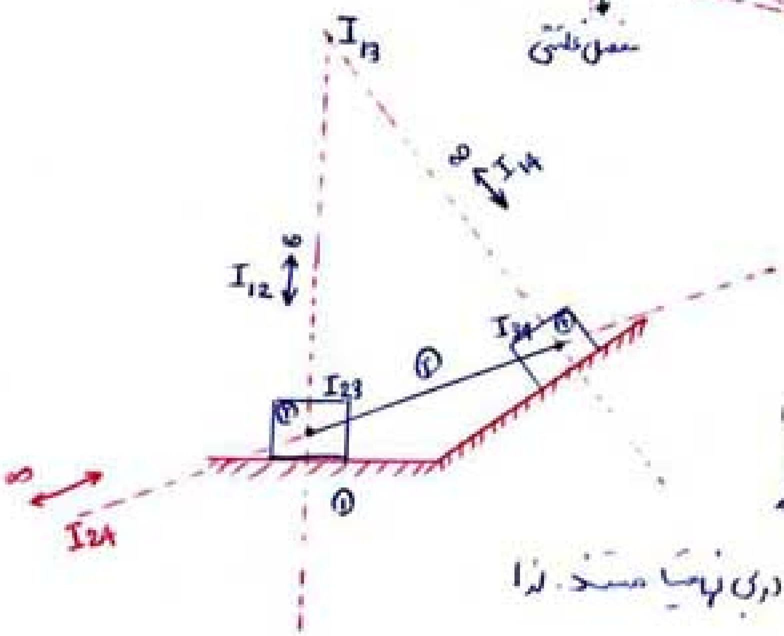
مثال: کلیه مراکز آنی مکانیزم زیر را تعیین کنید.





$I_{24} \rightarrow \overset{\Delta}{214}$ و $\overset{\Delta}{234}$

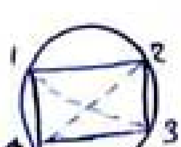
$I_{13} \rightarrow \overset{\Delta}{123}$ و $\overset{\Delta}{143}$



مثال: کلیه مراکز آنی مکانیزم زیر را تعیین کنید.

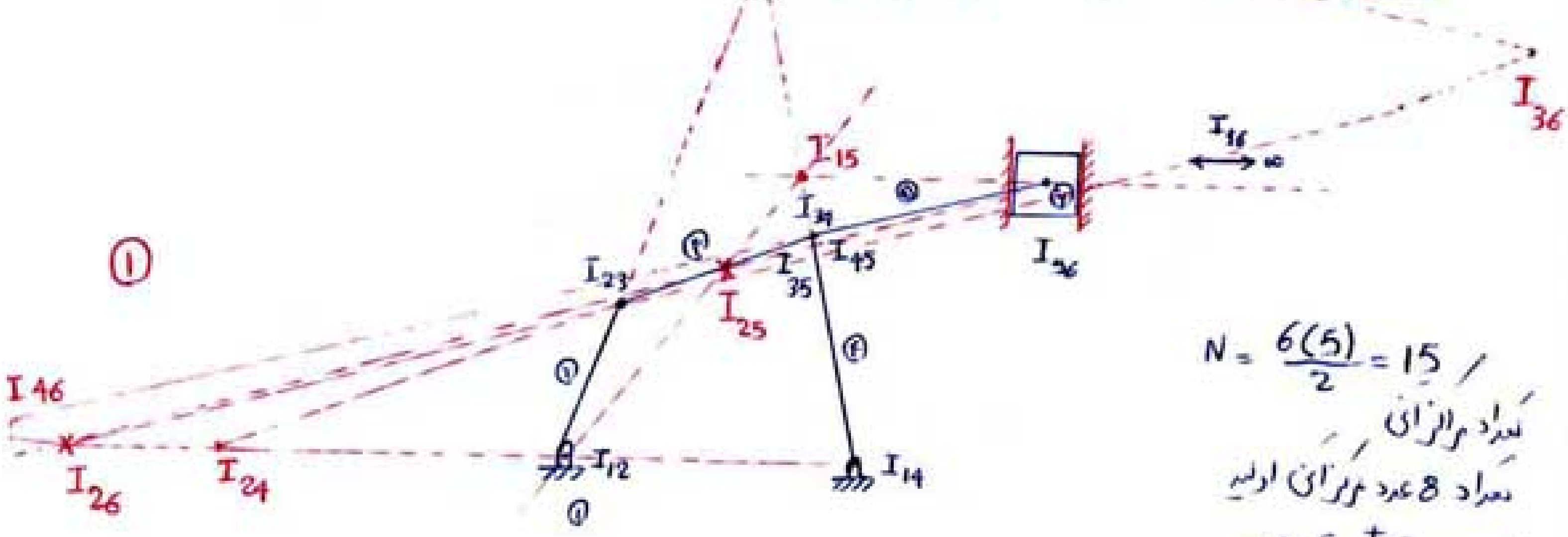
$I_{13} \rightarrow \overset{\Delta}{123}$ و $\overset{\Delta}{143}$

$I_{24} \rightarrow \overset{\Delta}{412}$ و $\overset{\Delta}{432}$



مکان I_{24} در امتداد میله ۳ است. از طرفی I_{14} و I_{12} در بی‌نهایت هستند. لذا I_{24} در امتداد میله ۳ در بی‌نهایت است.

تکلیف ۱ : مراکز آنی تمامی دوران‌ها را تعیین کنید



۱

$$N = \frac{6(5)}{2} = 15$$

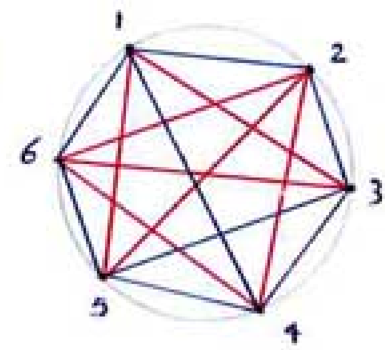
تعداد مراکز آنی

تعداد 8 عدد مرکز آنی اولیه

+

تعداد 7 عدد مرکز آنی ثانویه

برای پیدا کردن ۷ مرکز آنی ثانویه ابتدا از آنهایی شروع می‌کنیم که ۲ مثلث کامل را بتوان برای آنها یافت.



$I_{13} \rightarrow \overset{\Delta}{123}$ و $\overset{\Delta}{143}$

$I_{15} \rightarrow \overset{\Delta}{165}$ و $\overset{\Delta}{145}$

$I_{24} \rightarrow \overset{\Delta}{234}$ و $\overset{\Delta}{214}$

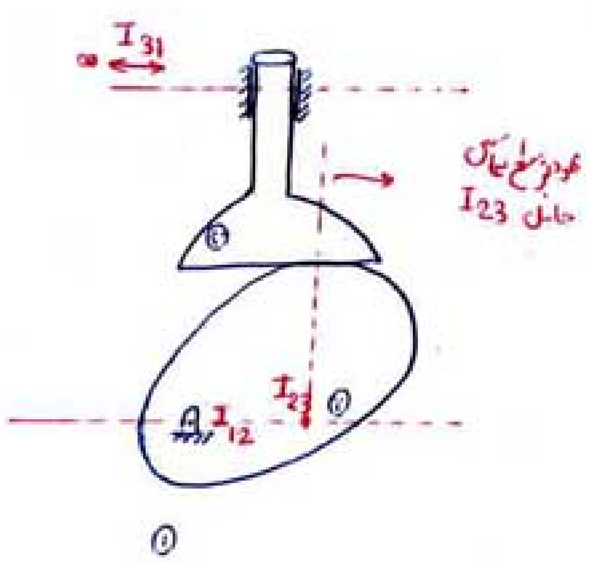
$I_{25} \rightarrow \overset{\Delta}{235}$ و $\overset{\Delta}{245} \longrightarrow$ روی یک خط می‌افتند $\xrightarrow{\text{۲ مثلث دیگر}}$ $\overset{\Delta}{235}$ و $\overset{\Delta}{215}$

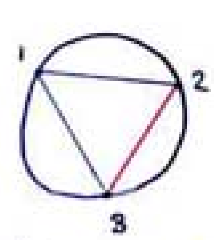
$I_{26} \rightarrow \overset{\Delta}{216}$ و $\overset{\Delta}{256}$

$I_{36} \rightarrow \overset{\Delta}{316}$ و $\overset{\Delta}{326}$

$I_{46} \rightarrow \overset{\Delta}{456}$ و $\overset{\Delta}{416}$

۲



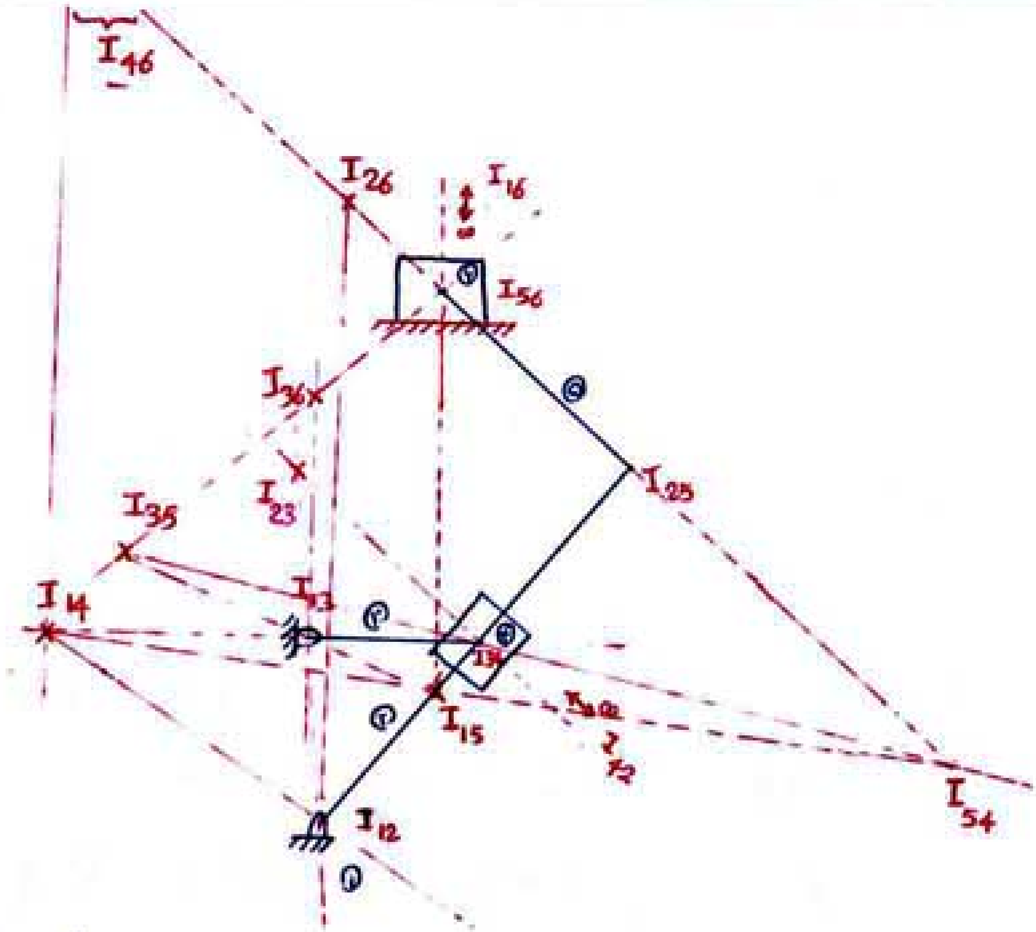


$I_{23} \rightarrow \overset{\Delta}{213}$ و

عمود بر سطح تماس

$$N = \frac{3(2)}{2} = 3$$

P-29



③

$I_{15} \rightarrow \overset{\triangle}{125}$ و $\overset{\triangle}{165}$

$I_{26} \rightarrow \overset{\triangle}{612}$ و $\overset{\triangle}{652}$

$I_{14} \rightarrow \overset{\triangle}{124}$ و $\overset{\triangle}{134}$

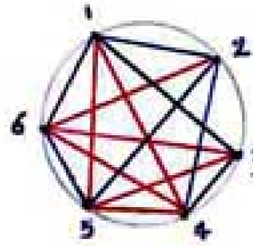
$I_{54} \rightarrow \overset{\triangle}{415}$ و $\overset{\triangle}{425}$

$I_{46} \rightarrow \overset{\triangle}{416}$ و $\overset{\triangle}{456}$

$I_{35} \rightarrow \overset{\triangle}{345}$ و $\overset{\triangle}{315}$

$I_{36} \rightarrow \overset{\triangle}{356}$ و $\overset{\triangle}{316}$

$I_{23} \rightarrow \overset{\triangle}{213}$ و $\overset{\triangle}{243}$

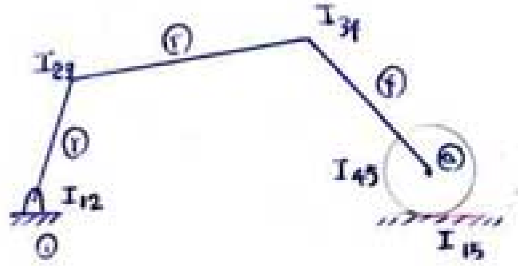


$N = \frac{6(5)}{2} = 15$

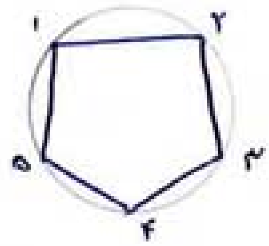
7 ← مراکز آنی اولیه

8 ← مراکز آنی ثانویه

مثال: کلیه مراکز آنی مکانیزم زیر را تعیین کنید.



$$N=\frac{5(4)}{2}=10$$



ملاحظه می‌گردد ۵ مرکز آنی اولیه مشخص و ۵ مرکز آنی دیگر ثانویه و غیر مشخص هستند.

دیده می‌شود که اگر مسأله ۲ درجه آزادی باشد، الزاماً می‌بایست اطلاعاتی غیر از محل مراکز آنی اولیه در دست باشد، زیرا در غیر این صورت مسأله غیر قابل حل است.

اطلاعات اضافی: $\frac{\omega_2}{\omega_5}=0.5$ و ω_2 و ω_5 خلاف جهت هم حرکت می‌کنند.

پس ابتدا I_{25} را با استفاده از اطلاعات تکمیلی به دست می‌آوریم. پس از مشخص شدن تعداد کافی از موقعیت مراکز آنی سایر مراکز آنی ثانویه را به دست می‌آوریم.

I_{25} روی خط واصل I_{12} و I_{15} است.

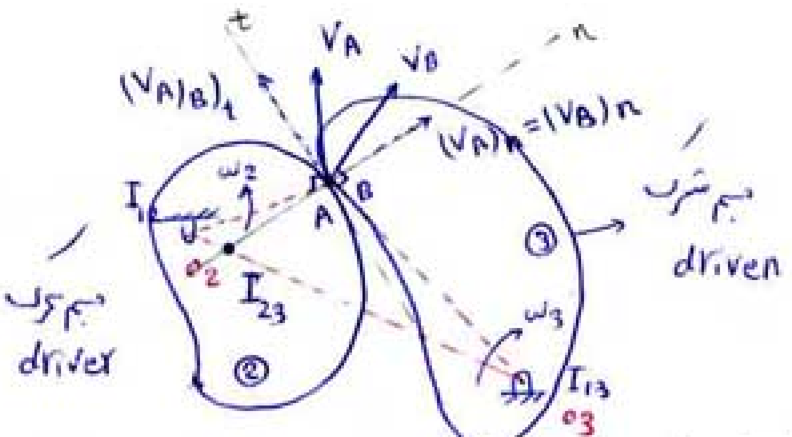
$$\frac{\omega_2}{\omega_5}=\frac{I_{15}-I_{25}}{I_{12}-I_{25}}=\frac{1}{2}$$

پس از تعیین این مراکز آنی، سایر مراکز آنی قابل تعیین هستند.

حرکت لغزشی-غلتشی :

بیشتر گفته شد به مفصلی هم لغزش و هم غلتش را توامان داشته باشد، مفصل لغزشی-غلتشی نامیده می شود مانند اتصال چنگالی، یا به عبارت دیگر مفصلی که در تمام لحظات شرایط غلتش خالص بودن را نداشته باشد می تواند لغزشی-غلتشی باشد. منظور از مفصل حالت کلی در تمام لحظات است و منظور از حرکت بررسی وضعیت در لحظه‌ای خاص است. پس یک مفصل لغزشی-غلتشی در زمان‌های مختلف می تواند نوع حرکت متفاوتی را از خود نشان دهد :

حالت اول :



ملاحظه می گردد که حرکت از نوع لغزشی غلتشی است و با فرض معلوم بودن ω_2 و همچنین پیدا کردن مرکز آنی I_{23} و در دو طرف بودن نقطه I_{23} مابین I_{12} و I_{13} است جهت ω_2 و ω_3 خلاف هم می باشد.

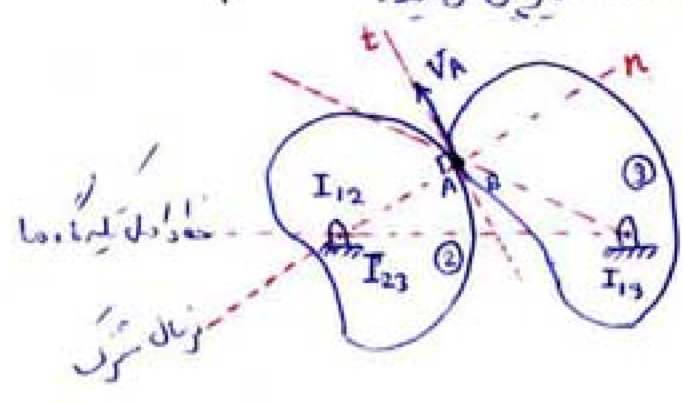
$$\omega_3 = \frac{(I_{12}-I_{23})}{(I_{13}-I_{23})}\cdot\omega_2$$

* با توجه به نسبت فاصله مراکز آنی می توان تشخیص داد که کدام عضو سریع‌تر است یا کندتر

I_{23} نمی تواند روی I_{13} بیفتد زیرا به ازای ω_2 مقدار ω_3 برابر ∞ می شود.

I_{23} می تواند روی I_{12} بیفتد و در آن صورت حالت لغزشی پیش می آید.

حالت دوم :



$(V_A)_n=0 \Rightarrow (V_B)_n=0$

$\downarrow$

$V_B=0$ و $(V_B)_t=0$

از آنجا که $(V_A)_n$ ، مؤلفه عمودی در سرعت‌ها هم برابرند، لذا $(V_A)_n=(V_B)_n=0$ به همین دلیل

$V_B=0$ و یا $\omega_3=0$ پس در این لحظه جسم 3 کاملاً ساکن است. از آنجا که لغزش تابع رابطه

$(\vec{V}_{A/B})_t=(\vec{V}_A)_t-(\vec{V}_B)_t$ است در این لحظه به دلیل صفر شدن $(\vec{V}_A)_t$ (به علاوه مقدار $\vec{V}_A$) ، لغزش حداکثر

مقدار شده، و لذا حرکت بین دو جسم به صورت لغزش کامل می‌شود.

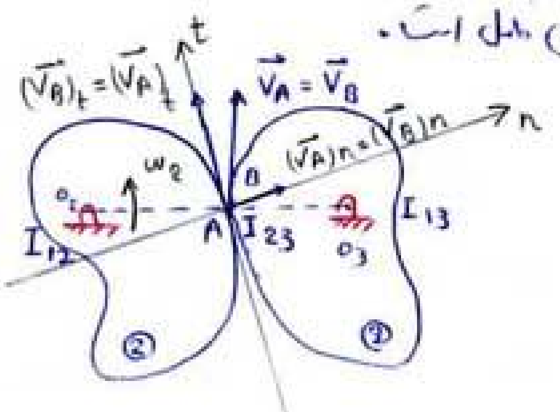
دقیقاً مانند حالتی که جسم روی زمین می‌لغزد. (جسم ۳ زمین می‌شود و جسم ۲ لغزنده)

پس در این حالت (لحظه) حرکت لغزشی کامل می‌باشد ولی معمولاً همراه لغزش غلتشی است.

حالت سوم:

اگر حالتی در حین حرکت دو جسم به وجود آید که در آن دو جسم نسبت به یکدیگر بر سطح تماس دو جسم

منطبق شود در آن صورت حرکت دو جسم هم از نوع غلتشی کامل است.



داریم: $(\vec{V}_B)=(\vec{V}_A)$

از آنجا که $(\vec{V}_B)_n=(\vec{V}_A)_n$

لذا $(\vec{V}_B)_t=(\vec{V}_A)_t$

$\leftarrow \quad (\vec{V}_{A/B})=(\vec{V}_A)_t-(\vec{V}_B)_t=0$

فصل چهارم: بررسی جابجایی در مکانیزمها

در بررسی جابجایی اهرمها یا ذره‌ای از یک اهرم معمولاً موقعیتی از یک مکانیزم را در نظر گرفته می‌شود که اصطلاحاً فاز نام دارد.

یک مکانیزم در طول یک سیکل حرکت خود از فازهای مختلفی عبور می‌کند که ممکن است مورد نظر باشند، لذا در بررسی جابجایی یک اهرم یا ذره‌ای از آن لازم است تا فازهای مختلف حرکت بررسی شوند. برای منظور روشهای مختلفی وجود دارد که از آن جمله می‌توان موارد زیر را نام برد:

۱- روش ترسیمی

۲- روش جبری

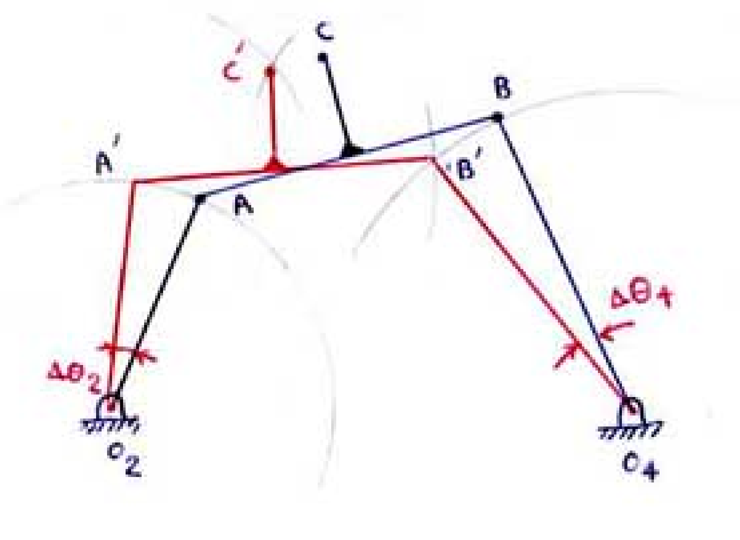
۳- روش برداری (قطبی)

۱- روش ترسیمی

روشی است که از طریق آن می‌توان موقعیت ذره یا اهرمی را از فازی خاص از یک حرکت بدست آورد.

مثال: در مکانیزم زیر اگر اهرم ② به میزان $\Delta\theta_2$ (ccw) بچرخد در آن صورت در این حالت ترتیب از اهرمهای دیگر و نیز موقعیت ذره c از اهرم ③ را بیابید.

counter clockwise

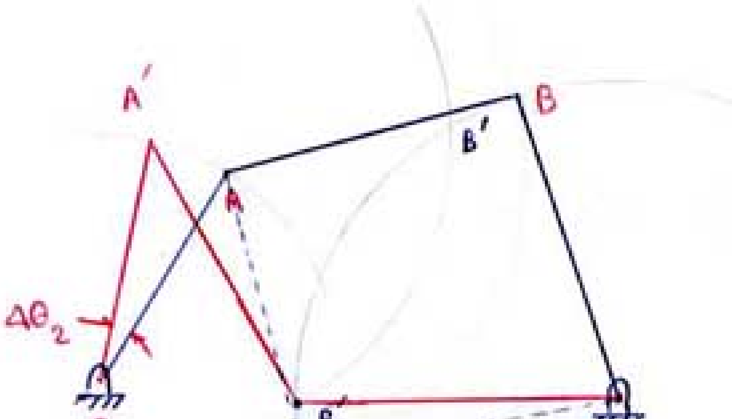


توجه شود که مسئله یک درجه آزادی است و با داشتن $\Delta\theta_2$ بقیه موارد قابل محاسبه اند.

مراحل کار:

- به اندازه O_2A پرگار را از نقطه O_2 می زنیم و با توجه به زاویه $\Delta\theta_2$ داده شده موقعیت A' حاصل می گردد.
- به اندازه O_4B پرگار را از O_4 می زنیم تا مکان هندسی نقطه B بدست آید.
- از A' به اندازه AB کمانی می زنیم تا مکان هندسی مسیر حرکت B را قطع کند و این نقطه را B' می نامیم.
- با وصل کردن A' به B' موقعیت جدید مکانیزم مشخص می گردد.
- از C تا A و B یک فاصله وجود دارد، بنابراین در مکان جدید از A' و B' با طولهای AC و BC می زنیم و محل تقاطع نقطه C است، از آن به $A'B'$ عمود می کنیم.

نکته: به ازای زاویه $\Delta\theta_2$ حالت دیگری نیز ممکن است اتفاق بیفتد. به شکل زیر توجه شود.



به ازای $\Delta\theta_2$ ورودی می توان دو موقعیت $A'B'$ و $A'B'_1$ بوجود آید که هر دو امکان پذیر است.

از دو موقعیت اول یکی قابل قبول است که به حالت قبل نزدیک تر باشد. از آنجا که مکانیزم ابتدا از نقطه B' می گذرد لذا همان مکانیزم اولی آغاز شده قابل قبول است.

اگر مکانیزم در حالت $O_2AB_1O_4$ به عنوان حالت ابتدایی باشد آنگاه مکانیزم $O_2A'B'_1O_4$ حالت نزدیک تر و قابل قبول می بود.

نکته:

۱- اگر دایره رسم شده به مرکز جدید A (شکل A') بر مسیر حرکت B مماس شود، در این صورت منحنی الحاقی حرکت اهرم ② به سمت چپ مشخص خواهد شد. تحت چنین شرایطی مکانیزم ایستاده و شروع به حرکت در جهت عکس می‌نماید.

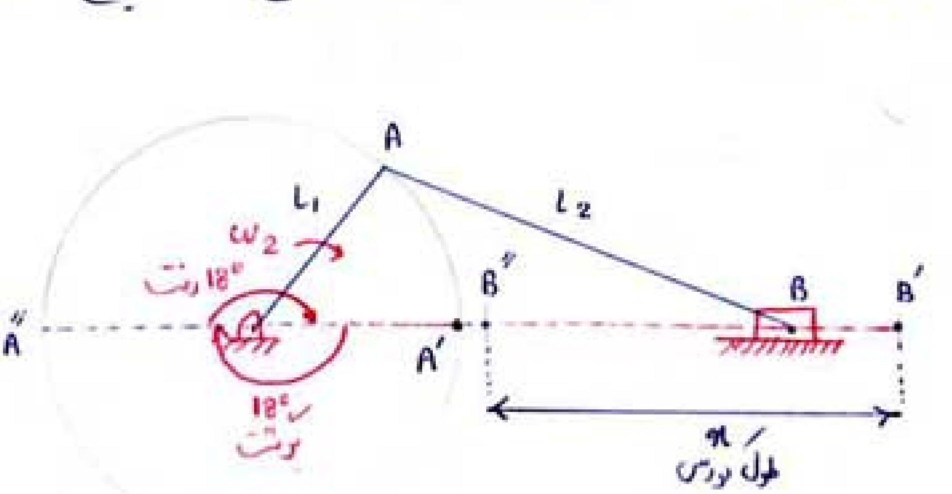
۲- اگر دایره رسم شده به مرکز جدید A (شکل A') مسیر حرکت B را قطع نکند، این بدان معنی است که آن موقعیت برای آن مکانیزم وجود ندارد.

- مکانیزم‌های بازگشت سریع (Quick Return mechanism)

از مکانیزم‌های با بازگشت سریع عموماً در ماشین‌های ابزار مثل صفحه تراش و اره‌های الکتریکی استفاده می‌گردد. این مکانیزم یعنی ثابت بودن سرعت زاویه‌ای لنگ، قادر است ابزار برش ماشین را که دارای حرکت رفت و آمدی است خیلی آرام به جلو برده ولی سریع به عقب برگرداند.

به طور کلی مکانیزم‌هایی هستند که نسبت زمان رفت به زمان بازگشت اهرم خروجی به موقعیت اولیه بزرگتر از یک باشد.

مثال: با فرض سرعت ثابت برای اهرم ② (اهرم ورودی) آیا مکانیزم از نوع بازگشت سریع است یا خیر؟



$$x = L_1 \cos\theta_2 + L_2 \cos\beta$$

$$v = \dot{x} = -L_1 \dot{\theta}_2 \sin\theta_2 - L_2 \dot{\beta} \sin\beta$$

ملاحظه می‌گردد سرعت بلوک ثابت نیست.

از رابطه $\Delta\theta_2 = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega t$ ، $\alpha = 0$ اگر ω ثابت باشد آنگاه

داریم $\Delta\theta_2 = \omega t$

$$(\Delta\theta_2)_{\text{رفت}} = \omega \cdot t$$

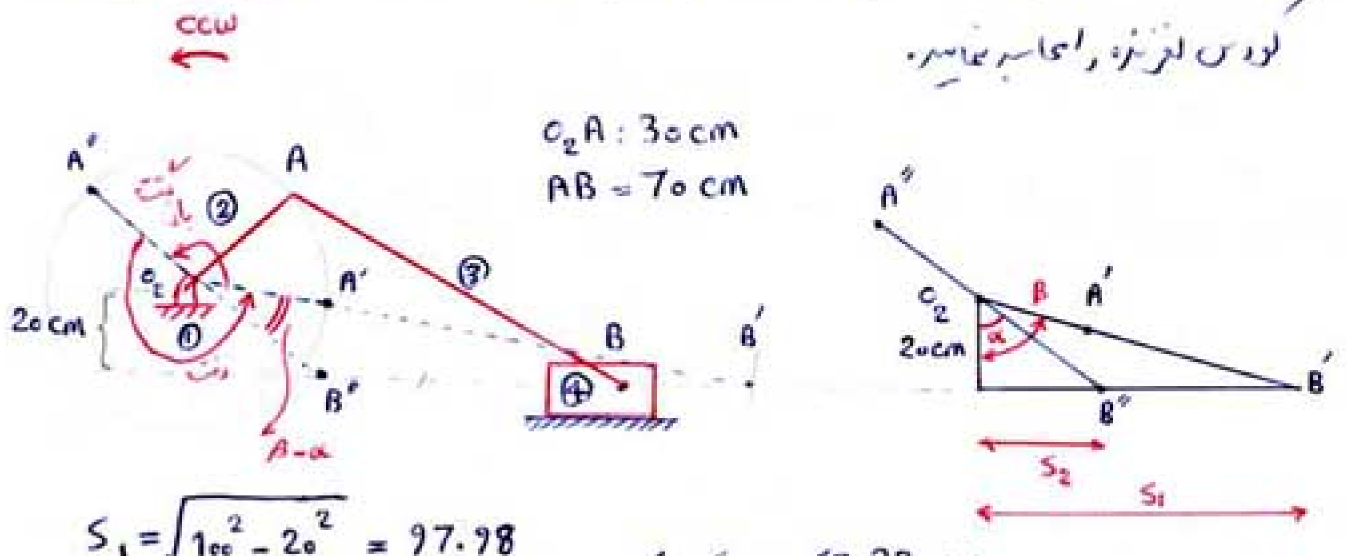
$$(\Delta\theta_2)_{\text{برگشت}} = \omega \cdot t \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta\theta_{2\,\text{رفت}}}{\Delta\theta_{2\,\text{برگشت}}} = \frac{t_{\text{رفت}}}{t_{\text{برگشت}}}$$

بنابراین با توجه به اینکه زاویه 180° رفت و 180° برگشت آنگاه $\frac{t_{\text{رفت}}}{t_{\text{برگشت}}} = 1$ و مکانیزم از نوع بازگشت سریع نیست.

مثال: آیا مکانیزم زیر بازگشت سریع است یا خیر؟ نسبت زمان رفت به برگشت را بیابید. همچنین طول کورس لغزنده را محاسبه نمایید.

$O_2A : 30\,cm$

$AB = 70\,cm$



$$S_1 = \sqrt{100^2 - 20^2} = 97.98$$

$$S_2 = \sqrt{40^2 - 20^2} = 34.64$$

$$S_2 - S_1 = 63.33\ cm$$

طول کورس لغزنده

$$\tan\alpha = \frac{34.64}{20} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

$$\tan\beta = \frac{97.78}{20} \Rightarrow \beta = 78.46^\circ$$

$$\beta - \alpha = 18.46^\circ$$

زاویه چرخش رفت $= 180^\circ + 18.46 = 198.46$

زاویه برگشت $= 180^\circ - 18.46 = 161.54$

$$\frac{t_{\text{رفت}}}{t_{\text{برگشت}}} = \frac{\Delta\theta_{\text{رفت}}}{\Delta\theta_{\text{برگشت}}} = \frac{198.46}{161.54} = 1.23$$

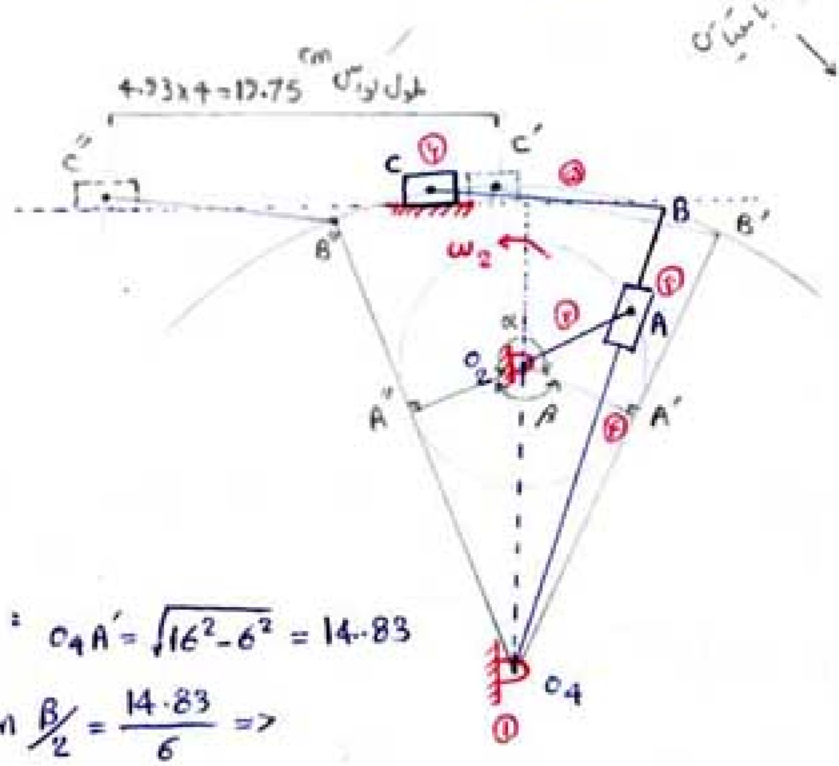
پس مکانیزم بازگشت سریع است.

تکلیف ۴: برای مکانیزم زیر که در یک دستگاه تراش کاربرد دارد، مشخص کنید: الف) آیا مکانیزم بازگشت سریع است؟
ب) محاسبه طول کورس و ج) نسبت زمان رفت به زمان برگشت؟

مرحله براده برداری ←

به صورت گرافیکی با مقیاس

$O_2O_4 = 16\text{ cm}$
$O_2A = 6\text{ cm}$
$O_4B = 26\text{ cm}$
$BC = 12\text{ cm}$
فاصله C تا $O_4 = 25\text{ cm}$
مقیاس $1\text{ cm} = 4\text{ cm}$



$\overset{\Delta}{O_2A'O_4}$: $O_4A' = \sqrt{16^2-6^2} = 14.83$

$$\tan\frac{\beta}{2} = \frac{14.83}{6} \Rightarrow$$

$$\frac{\beta}{2} = 67.97 \Rightarrow \beta = 135.95$$

$$\alpha = 360 - \beta = 224.05$$

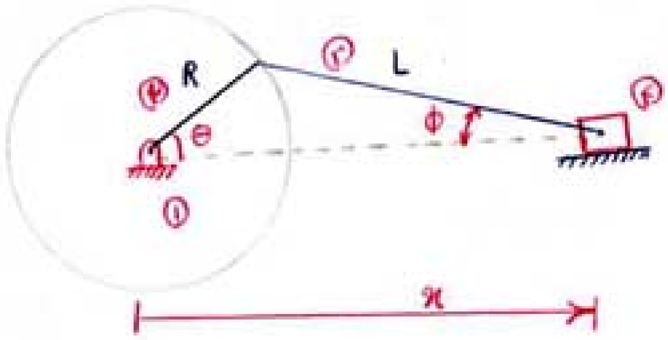
$$\frac{t_{\text{رفت}}}{t_{\text{برگشت}}} = \frac{\Delta\theta_{\text{رفت}}}{\Delta\theta_{\text{برگشت}}} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{224.05}{135.95} = 1.64$$

مکانیزم بازگشت سریع است.

۲- روش جبری

روشی است که در آن از عبارات ریاضی برای تعیین موقعیت یک اهرم یا ذره‌ای از یک اهرم استفاده می‌شود.
با بدست آوردن معادلات جبری می‌توان جابجایی، سرعت و شتاب اهرمهای مختلف را معین نمود.

مثال ۵: با در نظر گرفتن مکانیزم لنگ لغزنده در شکل زیر، معادلات مربوط به جابجایی، سرعت و شتاب لغزنده را به صورت تابعی از R و L و θ و ω بدست آورید. (فرض: ω ثابت است)



$$x = R\cos\theta + L\cos\phi \quad ①$$

$$\frac{dx}{dt} = -R\sin\theta\,\frac{d\theta}{dt} - L\sin\phi\,\frac{d\phi}{dt} \quad ②$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad ③$$

$$\frac{\sin\theta}{L} = \frac{\sin\phi}{R} \Rightarrow \sin\phi = \frac{R}{L}\sin\theta \quad ④ \qquad \phi = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{R}{L}\sin\theta\right) \quad ⑤$$

با مشتق گیری از ④ $\Rightarrow \cos\phi\,\dfrac{d\phi}{dt} = \dfrac{R}{L}\cos\theta\,\dfrac{d\theta}{dt} \Rightarrow \dfrac{d\phi}{dt} = \dfrac{R\omega\cos\theta}{L\cos\phi}$ ⑥

با جایگزینی ۳، ۴ و ۶ در ② $\Rightarrow V = \dfrac{dx}{dt} = -R\omega\left[\sin\theta + \cos\theta\tan\phi\right]$ ⑦

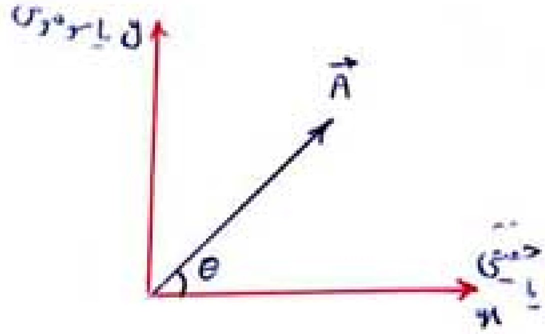
با مشتق گیری از ⑦ $\quad A = \dfrac{d^2x}{dt^2} = -R\omega\left[\cos\theta\,\dfrac{d\theta}{dt} - \sin\theta\tan\phi\,\dfrac{d\theta}{dt} + \cos\theta \times \dfrac{1}{\cos^2\phi} \times \dfrac{d\phi}{dt}\right]$

$$\Rightarrow A = -R\omega^2\left[\cos\theta + \frac{R\cos^2\theta}{L\cos^3\phi} - \sin\theta\tan\phi\right]$$

۳- روش برداری (دقیق)

در این روش هر یک از اعضا به صورت برداری تعریف می‌شود سپس با استفاده از عبارات جمع یا تفریق برداری مجهولات مسئله (طوری) که در مثال بعد گفته خواهد شد تعیین می‌شوند.

قبل از ذکر مثال لازم به توضیح است که چنانچه برداری به بزرگی A در جهتی مطابق شکل زیر باشد، آن بردار را می توان به یکی از صورت های زیر نوشت.

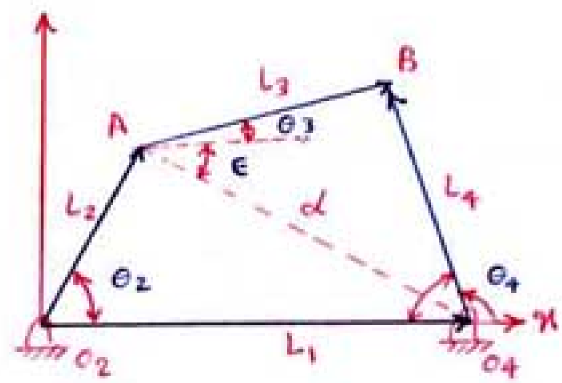


$$\vec{A} = Ae^{i\theta}$$

or

$$\vec{A} = A(\cos\theta + i\sin\theta)$$

مثال: در شکل زیر موقعیت مربوط به اهرم های 3 و 4 را برحسب موقعیت اهرم 2 بیابید.



$$L_1 = L_1 e^{i(0)}$$

$$L_2 = L_2 e^{i(\theta_2)}$$

$$L_3 = L_3 e^{i(\theta_3)}$$

$$L_4 = L_4 e^{i(\theta_4)}$$

$$d = de^{i\epsilon}$$

از قبل می دانیم که اندازه d معلوم و وابسته به مقدار θ_2 می باشد و مجهول نیست:

✓ $$d^2 = L_1^2 + L_2^2 - 2L_1L_2\cos\theta_2$$

با توجه به شکل داریم:

$$\vec{L_2} + \vec{d} = \vec{L_1}$$

$$L_2e^{i\theta_2} + de^{i\epsilon} = L_1 \quad \text{or} \quad L_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) + d(\cos\epsilon + i\sin\epsilon) = L_1$$

$$\Rightarrow (L_2\cos\theta_2 + d\cos\epsilon) + i(L_2\sin\theta_2 + d\sin\epsilon) = L_1$$

Real component : $L_2\cos\theta_2 + d\cos\epsilon = L_1 \Rightarrow d\cos\epsilon = L_1 - L_2\cos\theta_2$ ①

imaginary component : $L_2\sin\theta_2 + d\sin\epsilon = 0 \Rightarrow d\sin\epsilon = -L_2\sin\theta_2$ ②

از تقسیم ۲ بر ۱ داریم $\Rightarrow \quad \tan\epsilon = \dfrac{-L_2\sin\theta_2}{L_1 - L_2\cos\theta_2} \Rightarrow \epsilon = \tan^{-1}\left(\dfrac{+L_2\sin\theta_2}{L_2\cos\theta_2 - L_1}\right)$

همچنین با توجه به شکل داریم: $\vec{d} + \vec{L_4} = \vec{L_3}$

$$d e^{i\epsilon} + L_4 e^{i\theta_4} = L_3 e^{i\theta_3} \Rightarrow$$

$$(d\cos\epsilon + L_4\cos\theta_4) + i(d\sin\epsilon + L_4\sin\theta_4) = L_3\cos\theta_3 + iL_3\sin\theta_3$$

Real Component: $d\cos\epsilon + L_4\cos\theta_4 = L_3\cos\theta_3$ ۳

imaginary component: $d\sin\epsilon + L_4\sin\theta_4 = L_3\sin\theta_3$ ۴

از تقسیم ۴ بر ۳ داریم: $\tan\theta_3 = \dfrac{d\sin\epsilon + L_4\sin\theta_4}{d\cos\epsilon + L_4\cos\theta_4} \Rightarrow \theta_3 = \tan^{-1}\left(\dfrac{d\sin\epsilon + L_4\sin\theta_4}{d\cos\epsilon + L_4\cos\theta_4}\right)$

همچنین داریم: $\vec{L_2} + \vec{L_3} - \vec{L_1} = \vec{L_4}$ یا $\vec{L_2} + \vec{L_3} - \vec{L_4} = \vec{L_1}$

$$L_2 e^{i\theta_2} + L_3 e^{i\theta_3} - L_1 = L_4 e^{i\theta_4}$$

$$L_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) + L_3(\cos\theta_3 + i\sin\theta_3) - L_1 = L_4(\cos\theta_4 + i\sin\theta_4)$$

Real Component: $L_2\cos\theta_2 + L_3\cos\theta_3 - L_1 = L_4\cos\theta_4$ ۵

imaginary component: $L_2\sin\theta_2 + L_3\sin\theta_3 = L_4\sin\theta_4$ ۶

از تقسیم ۶ بر ۵ داریم: $\tan\theta_4 = \left(\dfrac{L_2\sin\theta_2 + L_3\sin\theta_3}{L_2\cos\theta_2 + L_3\cos\theta_3 - L_1}\right) \Rightarrow \theta_4 = \tan^{-1}\left(\dfrac{L_2\sin\theta_2 + L_3\sin\theta_3}{L_2\cos\theta_2 + L_3\cos\theta_3 - L_1}\right)$

اکنون θ_2 و ϵ برحسب θ_2 و حل θ_3 و θ_4 در یک دستگاه ، کلیه معادلات بدست می‌آیند.

فصل پنجم : بررسی سرعت در مکانیزمها

(فصل ۵ و ۶ مارتین)

به منظور تعیین سرعت ذره‌ای از یک اهرم یا سرعت زاویه‌ای اهرمی خاص از یک مکانیزم، روشهای مختلفی وجود دارد که از آن جمله می‌توان موارد زیر را نام برد :

۱- روش مرکز آنی

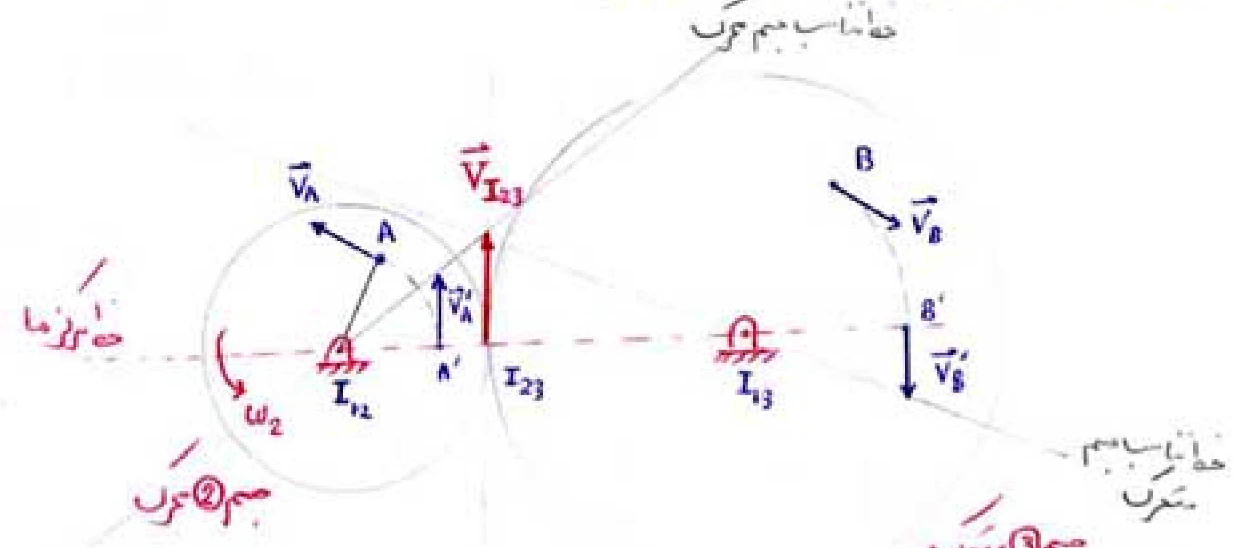
۲- روش مؤلفه

۳- روش خط موازی

۴- روش سرعت نسبی

۱- روش مرکز آنی

از این روش هم برای تعیین سرعت زاویه‌ای و هم تعیین سرعت خطی ذره‌ای از یک اهرم استفاده می‌شود. اگر در مکانیزم سرعت ذره‌ای مانند A از جسم محرک معلوم باشد، می‌توان به شرح زیر سرعت ذره‌ای مانند B از جسم متحرک را مشخص نمود.



مراحل انجام کار :

۱- مراکز آنی جسم محرک نسبت به زمین (I_{12})، متحرک نسبت به زمین (I_{13}) و محرک نسبت به متحرک (I_{23}) را یافته و به طور مستقیم متصل کنید. این سه مرکز روی یک خط راست قرار دارند که همان خط مرکزها می‌باشد.

۲- از نقطه A که سرعت آن معلوم است به مرکز I_{12} کمانی رسم می‌کنیم به طوری که نقطه A و به تناسب آن سرعت V_A روی خط مرکزها منطبق شود. (A' و V'_A)

۳- از I_{12} به نوک V'_A خطی رسم می‌کنیم تا خط تناسب سرعت جسم محرک حاصل شود

۴- از I_{23} عمودی بر خط مرکزها رسم می‌کنیم تا خط تناسب جسم محرک را قطع کند، بدین ترتیب $V_{I_{23}}$ حاصل شود

۵- از I_{13} به نوک $V_{I_{23}}$ خطی رسم می‌کنیم تا خط تناسب جسم 3 (متحرک) حاصل شود.

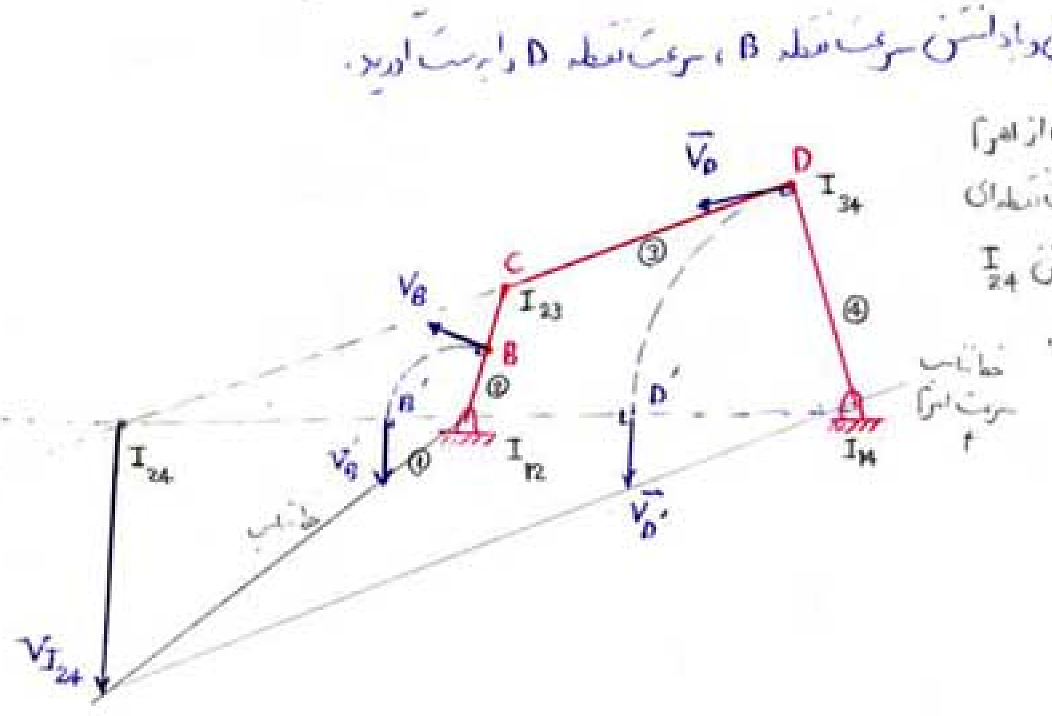
۶- از مرکز I_{13} کمانی رسم می‌کنیم تا نقطه B را روی خط مرکزها منتقل کند (B')

۷- از B' عمودی بر خط مرکزها رسم کرده تا خط تناسب سرعت جسم متحرک را قطع کند، بدین ترتیب V'_B حاصل می‌شود.

۸- مجدداً به مرکز I_{13} کمانی رسم و $\vec{V'_B}$ از نقطه B' را به $\vec{V_B}$ در نقطه B منتقل می‌کنیم.

* نکته: در این مسائل در برگرداندن‌ها رعایت دقیق زاویه و مقیاس الزامیست.

مثال : با توجه به شکل و دانستن سرعت نقطه B، سرعت نقطه D را بدست آورید.



چون می‌خواهیم سرعت نقطه‌ای از اهرم 4 را با توجه به معلوم بودن سرعت نقطه‌ای از اهرم 2 بدست آوریم، لذا یافتن I_{24} الزامیست.

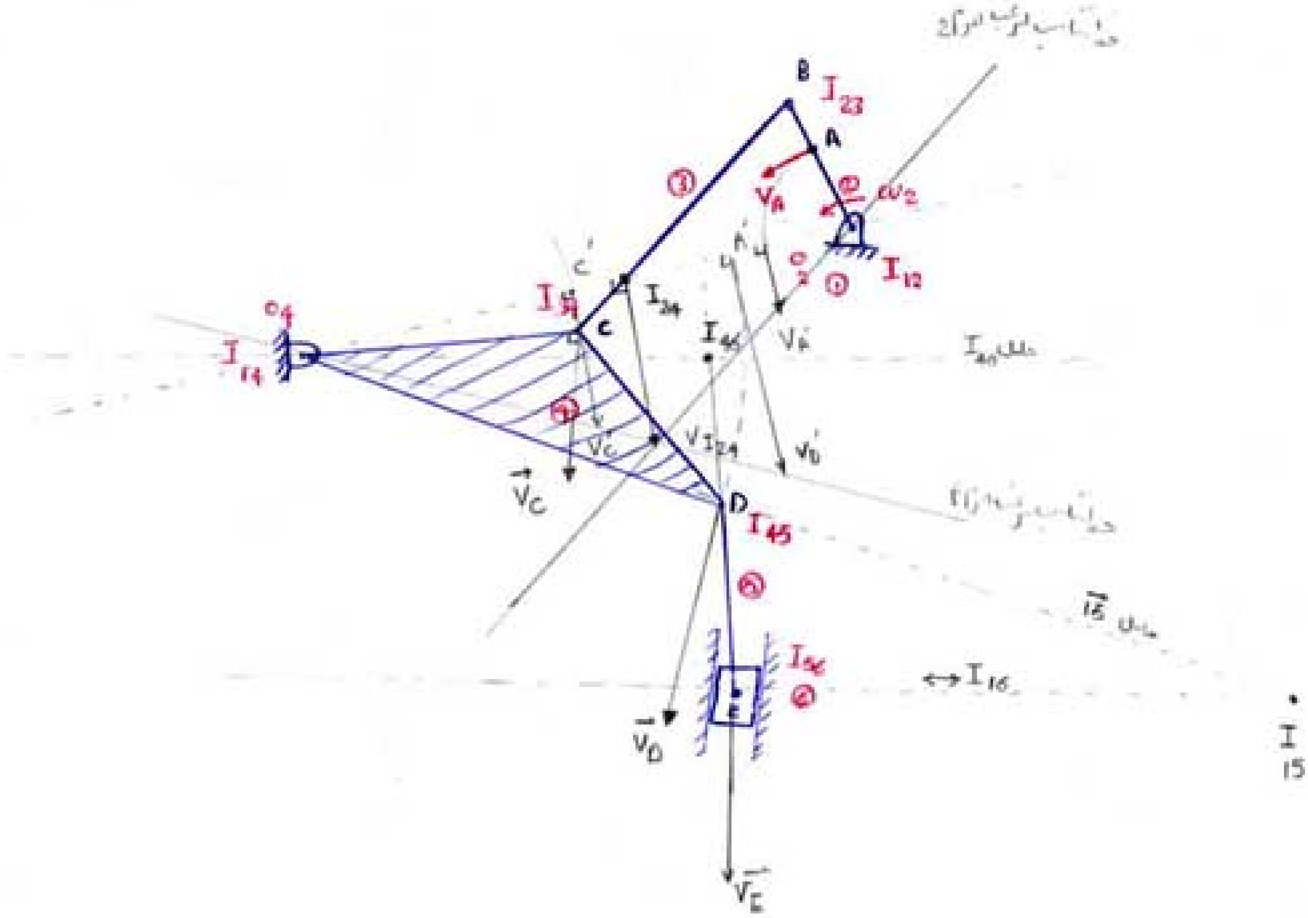
P-43

تکلیف: در مکانیزم زیر اگر سرعت زاویه‌ای اجزا ② معلوم باشد، مطلوبست

الف) تعیین سرعت ذره A از این اجزا

ب) سرعت ذره C از اجزا 4 با استفاده از روش مرکز آنی

ج) تعیین سرعت خطی اجزا 5 با معلوم بودن سرعت نقطه A



الف) $\vec{V}_A = (\overline{O_2A})\,\omega_2$

ب) جهت تعیین سرعت $\vec{V}_C$ از روش مرکز آنی استفاده می‌کنیم:

ج) جهت محاسبه $\vec{V}_E$ چند راه وجود دارد که یکی از آنها را بیان می‌کنیم.

جهت محاسبه سرعت $\vec{V}_D$ ... محاسبه $\vec{V}_E$ ... پیدا کردن مرکز I_{15} با استفاده از $\overset{\triangle}{164}$ و $\overset{\triangle}{456}$

$$\vec{V}_E = \frac{I_{15}-E}{I_{15}-I_{45}}\,\vec{V}_D$$

الف: با توجه به مکانیزم زیر مطلوبست تعیین کلیه مراکز آنی. اگر $V_A = 635 \frac{mm}{s}$ و جهت چرخش ω_2 در جهت خلاف عقربه‌های ساعت باشد، V_D را به روش مراکز آنی تعیین کنید.

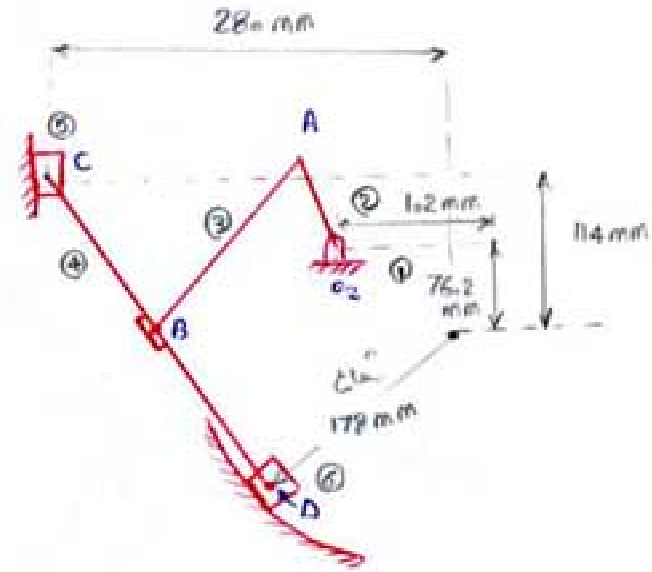
(حل صفحه ۲۹۲ مابیتون)

$O_2A = 76.2$ mm

$AB = 178$ mm

$CD = 305$ mm

$CB = 152$ mm



۲- روش مؤلفه (component method)

تجزیه و تحلیل سرعت مکانیزمها به وسیله مؤلفه‌ها عبارت است از تجزیه سرعت به مؤلفه‌های مناسب به طوری که بتوان از روی آنها اتصال دو دو لینک‌های مختلف مکانیزم را بررسی نمود.

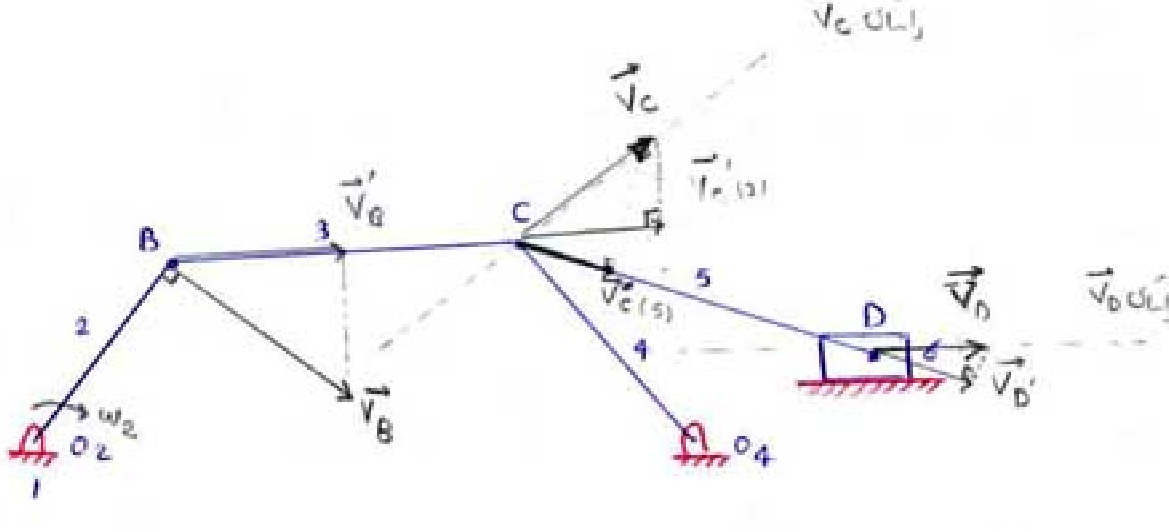
حالت اول: اگر سرعت ذره‌ای مانند A از جسم صلبی معلوم باشد و راستای سرعت ذره‌ای دیگر مانند B از همان جسم نیز معلوم باشد می‌توان برای تعیین V_B به شرح زیر عمل کرد:

۱- ابتدا مؤلفه سرعت V_A را بر رابط دو ذره تصویر می‌کنیم ($\vec{V}_A'$)

۲- $\vec{V}_B' = \vec{V}_A'$ در نقطه B را انتخاب می‌کنیم.

۳- عمود از نوک $\vec{V}_B'$ برای بردار رسم کرده تا راستای سرعت B را قطع کند، بدین ترتیب $\vec{V}_B$ حاصل می‌شود.

مثال: با معلوم بودن w_2 سرعت نقاط C و D را بدست آورید.



حالت دوم: اگر سرعت ذره‌ای مانند A و B از جسم صلبی معلوم باشد و بخواهیم سرعت ذره‌ای مانند C را که از آن چیزی نمی‌دانیم را تعیین کنیم به شرح زیر عمل می‌کنیم:

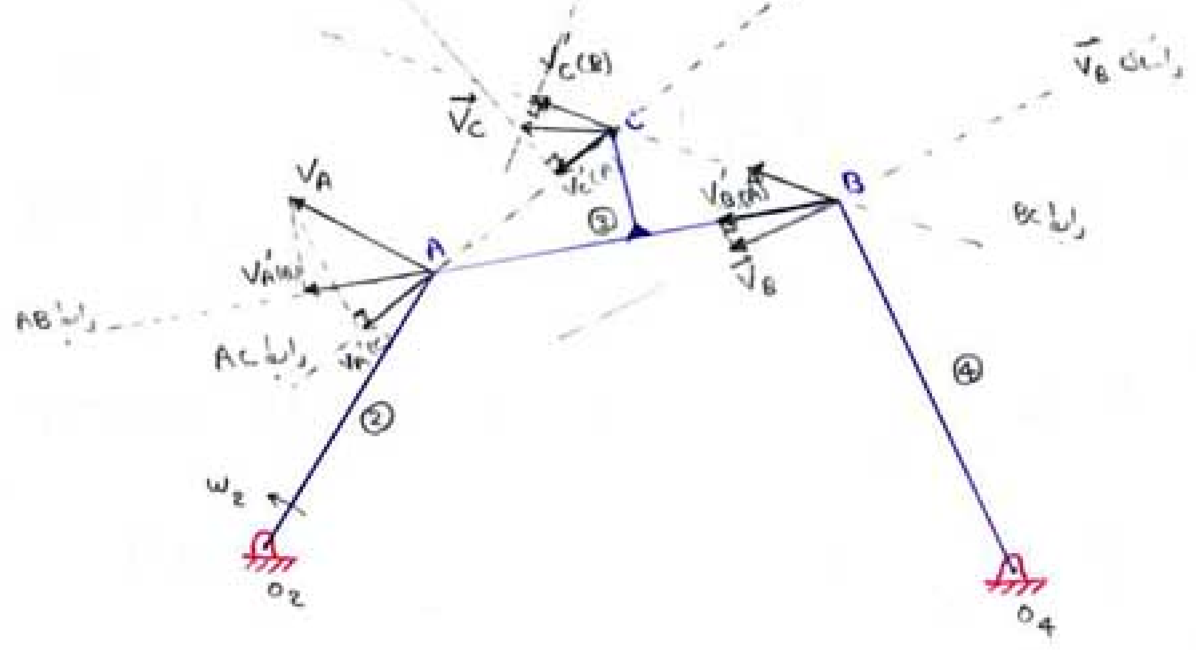
۱- مؤلفه سرعت V_A را بر رابط AC تصویر می‌کنیم. (V_A')

۲- مؤلفه سرعت V_B را بر رابطه BC تصویر می‌کنیم (V'_B)

۳- V'_B و V'_A را به نقطه C انتقال داده و عمود بر هر دو رسم کرده، امتداد $\vec{V}''_C$ حاصل می‌شود.

نه برآیند برداری !!

مثال: با معلوم بودن ω_2 سرعت نقطه C از عضو 3 را بیابید.



حالت سوم: اگر سرعت ذره‌ای مانند A و B از عضو صلبی معلوم باشد و بخواهیم سرعت ذره‌ای مانند C روی رابط AB را بیابیم از روش زیر استفاده می‌کنیم.

۱- مؤلفه سرعت $\vec{V}_B$ را عمود بر رابط AB می‌یابیم.

۲- مؤلفه سرعت $\vec{V}_A$ را عمود بر رابط AB می‌یابیم.

۳- خطی از نوک V''_A و V''_B رسم کرده تا در نقطه D با خط مورد نظر (AB) برخورد کند.

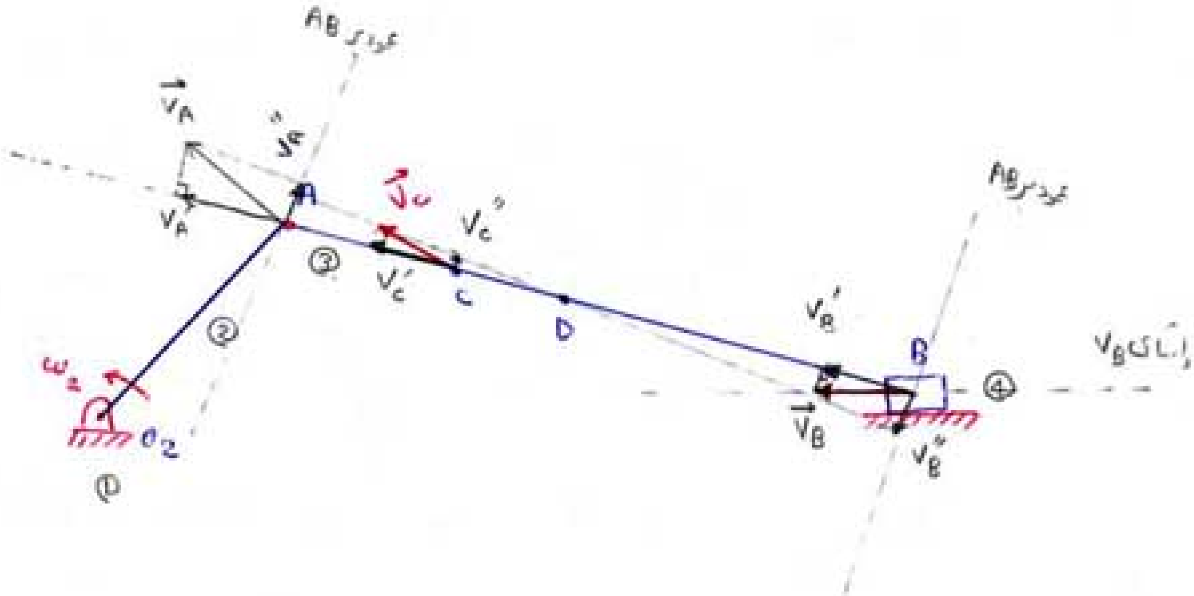
۴- از نقطه C عمود بر AB رسم کرده تا خط حاصل از بند ۳ را قطع کند ($\vec{V}''_C$ حاصل می‌شود)

۵- $\vec{V}'_C$ را از $\vec{V}'_A$ می‌یابیم.

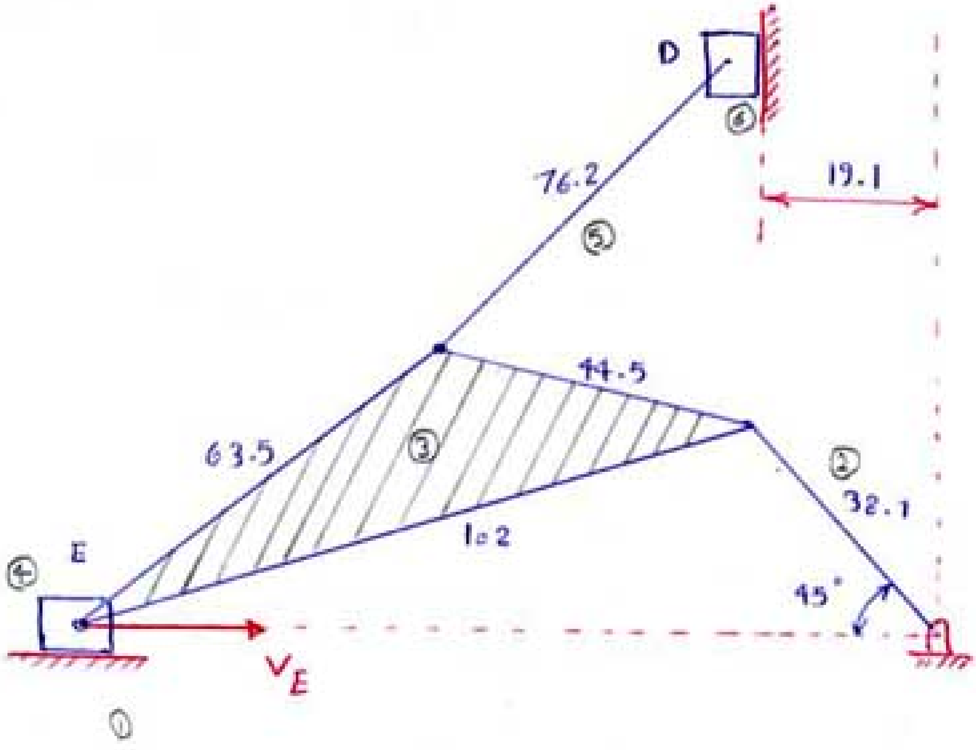
۶- جمع برداری $\vec{V}'_C$ و $\vec{V}''_C$ مقدار $\vec{V}_C$ را معین می‌کند.

P-47

مثال: با معلوم بودن ω_2 سرعت نقطه C را تعیین کنید.



تکلیف: سرعت نقطه E در شکل زیر برابر $4.57\ \frac{m}{s}$ می باشد. با استفاده از روش مؤلفه سرعت زاویه‌ای ω_2 و سرعت $\vec{V}_D$ را بیابید.



۳- روش خط موازی

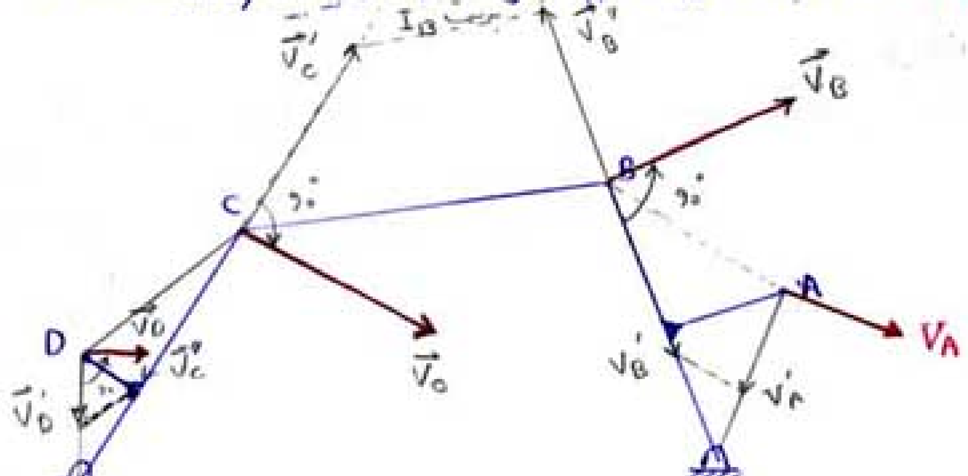
اگر دو ذره A و B بر جسم صلبی واقع باشند و سرعت جسم A معلوم و راستای رابط آن ذرات به مرکز آنی دوران آن جسم نسبت به تکیه‌گاه معلوم باشد (به محل دقیق نقطه مرکز آنی نیازی نیست) می‌توان به روش زیر سرعت نقطه B را یافت.

۱- بردار $\vec{V}_A$ را به اندازه ۹۰ درجه می‌چرخانیم تا بر رابط آن ذره و مرکز آنی سرعت تکیه‌گاه واقع گردد. (V'_A به دست می‌آید)

۲- از نوک $\vec{V}'_A$ موازی خط AB رسم کرده تا رابط ذره B و مرکز آنی جسم نسبت به تکیه‌گاه را در B' قطع کند.

۳- $\vec{V}'_B$ را ۹۰ درجه بچرخانید (خلاف جهت چرخش قبلی) تا $\vec{V}_B$ حاصل شود.

مثال: با معلوم بودن سرعت V_A سرعت V_D را بیابید. (روش خط موازی)



۴- روش سرعت نسبی

روش سرعت نسبی بدان دلیل حائز اهمیت است که بدین وسیله می‌توان به طور همزمان سرعت ذرات و یا سرعت زاویه‌ای اجسام را پیدا نمود. همانطور که می‌دانیم اگر دو ذره بر جسم صلبی قرار داشته باشند می‌توان نوشت:

$$\vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{V}_{A/B} \qquad (1)$$

و به جای $\vec{V}_{A/B}$ در رابطه می‌توان نوشت:

$$\vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB} \qquad (2)$$

که راستای آن عمود بر خط رابط AB و مقدار آن برابر $\overline{AB}\omega$ می‌باشد.

رابطه (2) زمانی صادق است که A و B متعلق به یک جسم صلب باشند.

مراحل انجام کار:

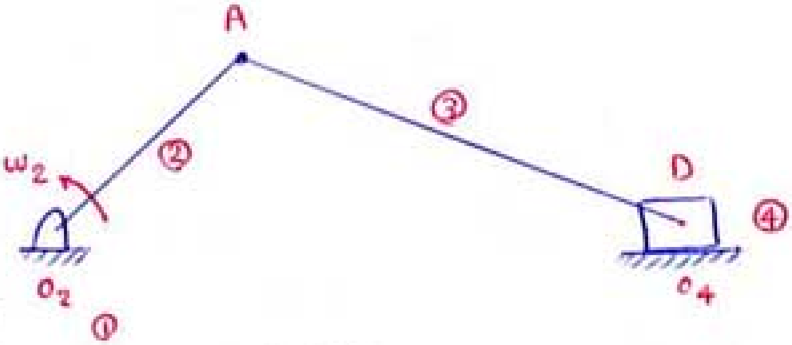
۱- ابتدا نقطه‌ای را به عنوان قطب سرعت در صفحه مشخص می‌کنیم.

۲- از قطب سرعت برداری هم‌سنگ $\vec{V}_B$ رسم می‌کنیم تا نقطه B بدست آید.

۳- می‌دانیم $\vec{V}_{A/B} = \overline{AB}\omega$ عمود بر $\overline{AB}$ است. در جهت عمود بر $\overline{AB}$ از نوک A و متناسب با جهت ω و به بزرگی $\overline{AB}\omega$ رسم می‌کنیم و نقطه بدست آمده را A می‌نامیم.

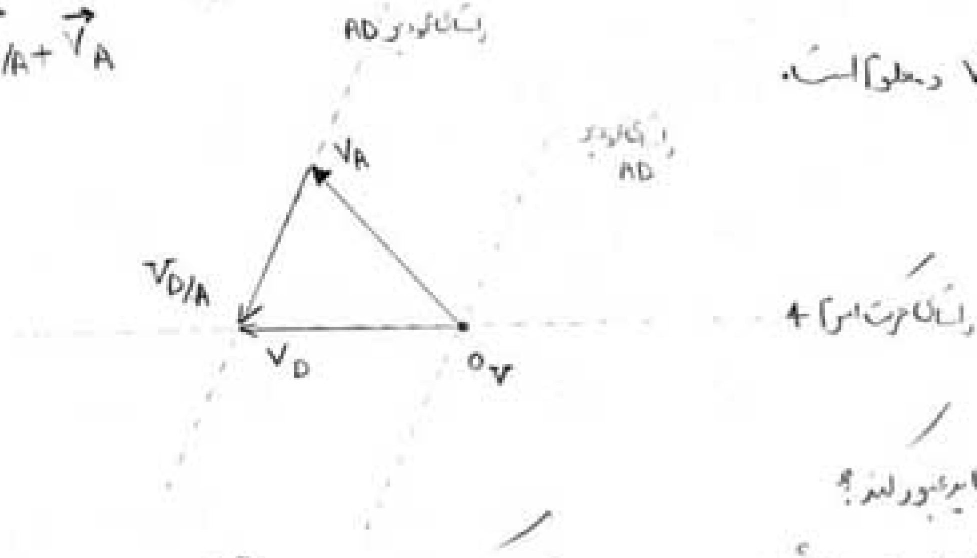
۴- رابط O_p به A سرعت $\vec{V}_A$ است.

مثال: در مکانیزم زیر با معلوم بودن ω_2 با استفاده از روش سرعت نسبی سرعت زاویه‌ای اهرم 3 و سرعت لولای شماره 4 را بیابید.



$$\overset{\checkmark -}{\vec{V}_D} = \overset{\checkmark -}{\vec{V}_{D/A}} + \overset{\checkmark \checkmark}{\vec{V}_A}$$

$V_A = \overline{O_2A}\,\omega_2$ معلوم است.



سرعت لینک 4 ← $\vec{V}_D$

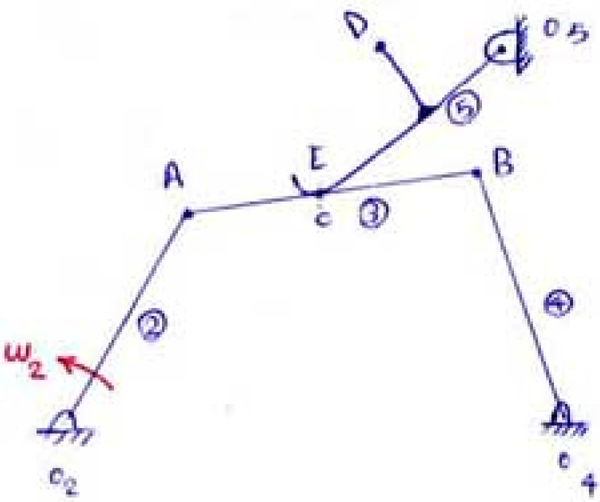
سرعت زاویه‌ای ω_3 ← $\omega_3 = \dfrac{V_{D/A}}{\overline{AD}}$

سوال:

چرا $\vec{V}_D$ الزاماً از O_V باید عبور کند؟

دقت شود که هر برداری که از O_V رسم شود سرعت مطلق و هر برداری بین دو نقطه بر نمودار قطب سرعت باشد، سرعت نسبی بین آن دو نقطه است.

مثال ۸: در مکانیزم زیر اگر سرعت زاویه‌ای اهرم 2 معلوم باشد، سرعت دورانی D از اهرم 5 را بیابید.



D در واقع روی اهرم ⑤ می‌باشد.

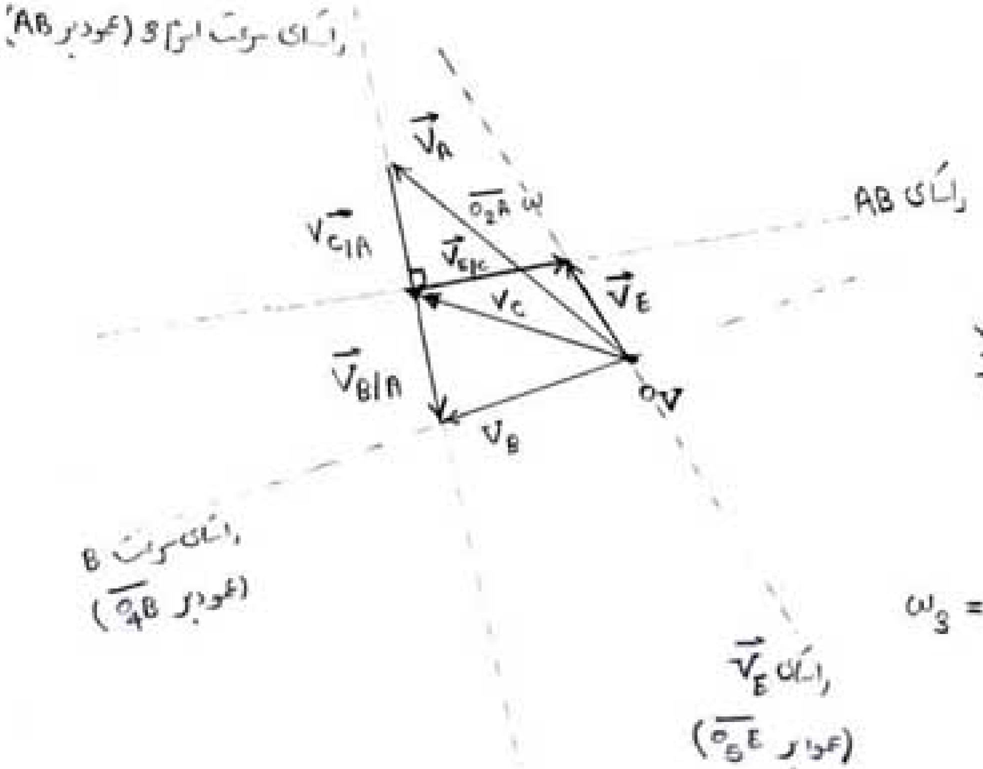
با داشتن ω_5 و با معلوم بودن فاصله $\overline{O_5D}$ سرعت $\vec{V}_D$ تعیین می‌گردد.

پس هدف تعیین ω_5 است که جهت بدست آوردن آن محاسبه سرعت V_E الزامی است.

مفصل بین اهرم 5 و اهرم 3 یا مکان نقاط E و C از چه نوعی است؟

چون راستای خط المرکزین از محل تماس نمی‌گذرد مفصل لغزشی-غلتشی است. پس

$$\vec{V}_E = \vec{V}_{E/C} + \vec{V}_C$$



برای A:

اندازه: $V_A = \overline{O_2A}\,\omega_2$

جهت عمود بر $\overline{O_2A}$

برای AB:

$$\overset{\checkmark\checkmark}{\vec{V}_A} + \overset{-\checkmark}{\vec{V}_{B/A}} = \overset{-\checkmark}{\vec{V}_B}$$

با معلوم شدن $\vec{V}_{B/A}$ داریم $\omega_3 = \dfrac{\vec{V}_{B/A}}{\overline{AB}}$

به این ترتیب برای نقطه C داریم:

$$\overset{\checkmark\checkmark}{\vec{V}_A} + \overset{\checkmark\checkmark}{\vec{V}_{C/A}} = \overset{--}{\vec{V}_C}$$

با توجه به معلوم بودن $\vec{V}_A$ و $\vec{V}_{C/A}$ اندازه $\vec{V}_C$ معلوم می‌شود.

می‌دانیم که با توجه به لغزشی-غلتشی بودن مفصل بین E و C اندازه سرعت نسبی در راستای خط مماس یعنی راستای AB است.

$$\overset{\checkmark-}{\vec{V}_E} = \overset{\checkmark-}{\vec{V}_{E/C}} + \overset{\checkmark\checkmark}{\vec{V}_C}$$

با معلوم شدن $\vec{V}_E$ داریم $\omega_5 = \dfrac{\vec{V}_E}{\overline{O_5E}}$

اندازه: $\underline{V_D = \overline{O_5D}\,\omega_5}$ ساعتگرد CW است.

فصل ششم : بررسی شتاب در مکانیزم‌ها

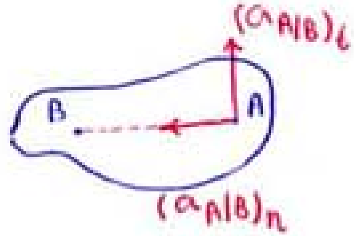
(فصل ۷ مارتین)

اگر دو ذره مانند A و B در جسم صلبی قرار داشته باشند در آن صورت رابطه بین شتاب آن دو ذره به صورت زیر است :

$$\vec{a}_{A/B} + \vec{a}_B = \vec{a}_A$$

$$(\vec{a}_{A/B})_n + (\vec{a}_{A/B})_t + \vec{a}_B = \vec{a}_A$$

برای شتاب ۲ مؤلفه عمودی و مماسی به شکل زیر تعریف می‌شوند :

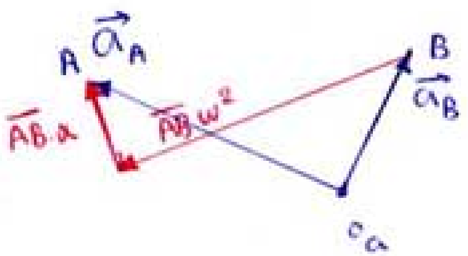


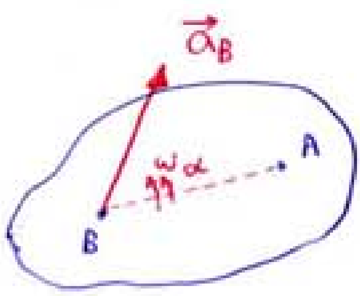
$(\vec{a}_{A/B})_n = \overline{AB}\,\omega^2$ از A به سمت B

$(\vec{a}_{A/B})_t = \overline{AB}\cdot\alpha$ عمود بر $\overline{AB}$

پس اگر در جسم صلبی شتاب نقطه‌ای مانند B معلوم باشد و سرعت و شتاب زاویه‌ای آن جسم صلب نیز مشخص باشد، برای تعیین شتاب ذره‌ای مانند A به شرح زیر عمل می‌کنیم.

۱- نقطه‌ای را به عنوان قطب شتاب (O_a) انتخاب می‌کنیم و تمام بردارهای مطلق شتاب از این نقطه رسم می‌شوند و خطوط بین سایر نقاط در دیاگرام شتاب نشان دهنده شتاب‌های نسبی بین دو نقطه مذکور است.





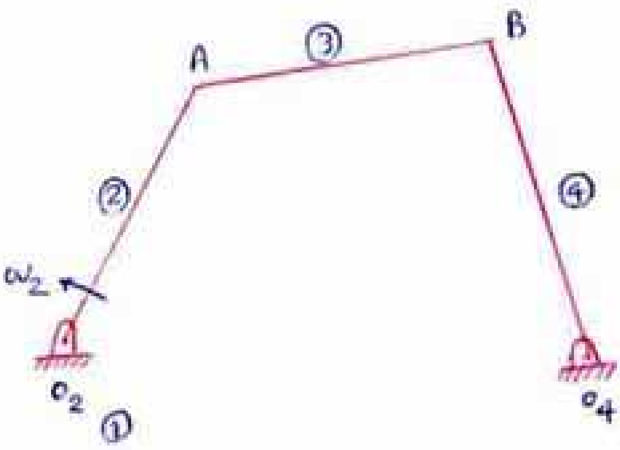
۲- از قطب شتاب برداری هم شکل $\vec{a}_B$ رسم نموده و انتهای آن را B می نامیم.

۳- از نقطه B بردار $(a_{A/B})_n$ را به بزرگی $\overline{AB}\,\omega^2$ و از A به سمت B رسم می کنیم.

۴- از نوک این بردار $(a_{A/B})_t$ برداری به بزرگی $AB\alpha$ رسم می کنیم و انتهای آن را A می نامیم.

۵- رابط o_a به انتهای بردار مذکور (نقطه A) معرف شتاب A است. ($\vec{a}_A$)

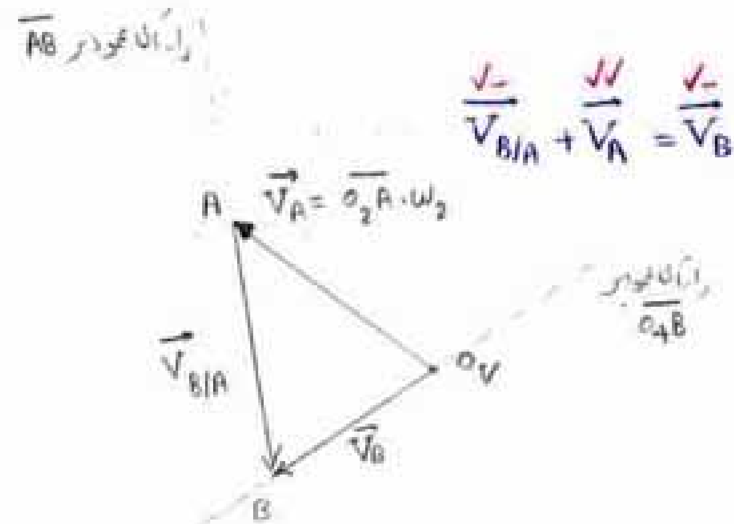
مثال: در مکانیزم زیر اگر سرعت زاویه ای عضو 2 ثابت و برابر ω_2 باشد، شتاب زاویه ای عضو ۴ را بیابید.



حل: روش سرعتها:

برای عضو 3 داریم:

$$\vec{V}_{B/A} + \vec{V}_A = \vec{V}_B$$



$$\omega_3 = \frac{V_{B/A}}{\overline{AB}} \quad cw \quad \text{معلوم}$$

$$\omega_4 = \frac{V_B}{\overline{o_4B}} \quad ccw \quad \text{معلوم}$$

روش شتاب ها:

برای عضو 3 داریم:

$$\vec{a}_{B/A} + \vec{a}_A = \vec{a}_B$$

$$(\vec{a}_{B/A})_t + (\vec{a}_{B/A})_n + (\vec{a}_A)_t + (\vec{a}_A)_n = (\vec{a}_B)_n + (\vec{a}_B)_t$$

P-55

$$(\vec{a}_{B/A})_t = \overline{AB} \cdot \alpha_3 \qquad \text{عمود بر } AB$$

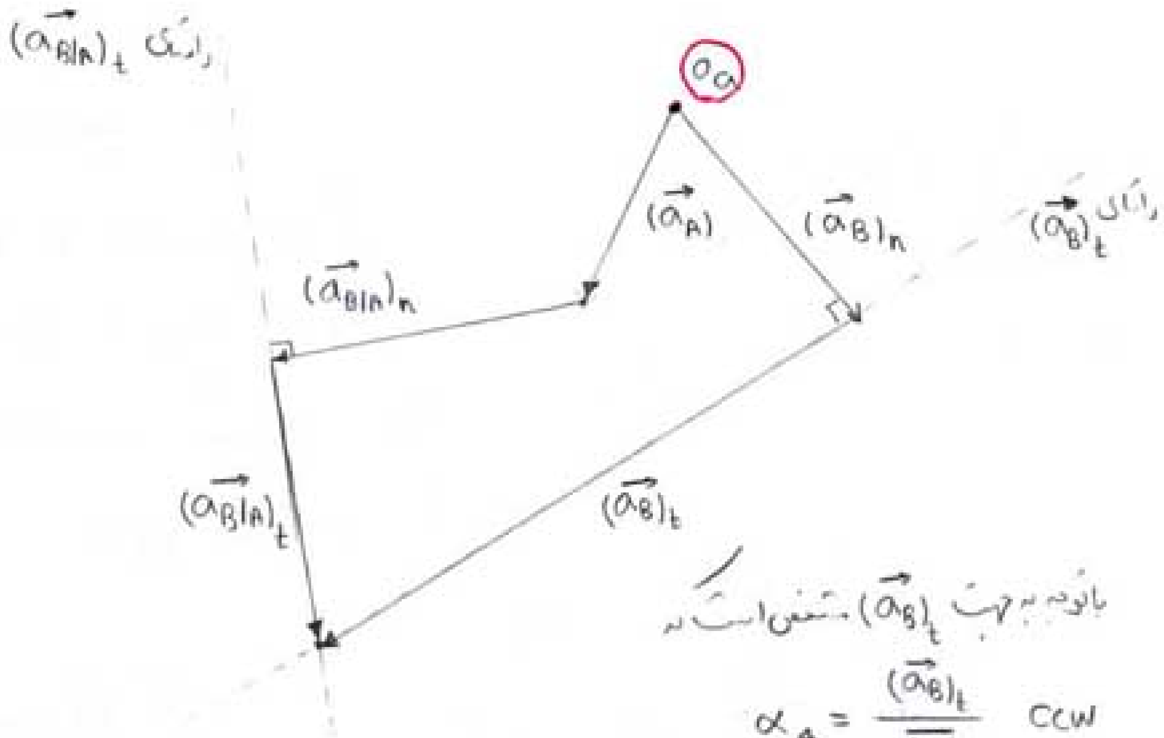
$$(\vec{a}_{B/A})_n = \overline{AB} \cdot \omega_3^2 \qquad \text{حامل از } (A \text{ به } B)$$

$$(\vec{a}_A)_t = \overline{O_2A} \cdot \alpha_2 = 0$$

$$(\vec{a}_A)_n = \overline{O_2A} \cdot \omega_2^2 \qquad \text{حامل از } (O_2 \text{ به } A)$$

$$(\vec{a}_B)_t = \overline{O_4B} \cdot \alpha_3 \qquad \text{عمود بر } \overline{O_4B}$$

$$(\vec{a}_B)_n = \overline{O_4B} \cdot \omega_4^2 \qquad \text{حامل از } (O_4 \text{ به } B)$$

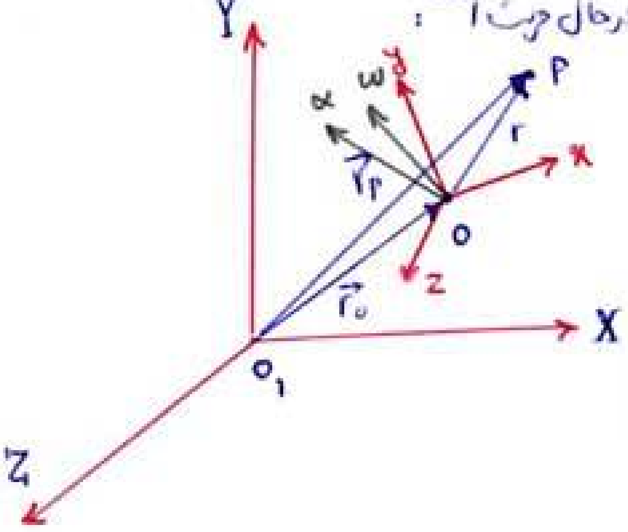


با توجه به جهت $(\vec{a}_B)_t$ مشخص است که

$$\alpha_4 = \frac{(\vec{a}_B)_t}{\overline{O_4B}} \quad \text{CCW}$$

شتاب کریولیس :

فرض کنید نقطه P در فضای سه بعدی در حال حرکت است :



✓ محور مختصات ثابت : X-Y-Z

✓ محور مختصات متحرک : x-y-z (دوران + انتقال)

✓ بردارهای یکه در امتداد x و y و z : $\hat{i}$ و $\hat{j}$ و $\hat{k}$

✓ مبدا مختصات ثابت : O_1

✓ مبدا مختصات متحرک : O

✓ موقعیت ذره P نسبت به محور متحرک : $\vec{r}$

✓ موقعیت ذره P نسبت به محور ثابت : $\vec{r}_P$

✓ موقعیت مبدا مختصات متحرک نسبت به مبدا مختصات ثابت : $\vec{r}_o$

✓ سرعت و شتاب زاویه ای محور مختصات متحرک : $\vec{\omega}$ و $\vec{\alpha}$

نکته : وقتی محورهای مختصات دارای حرکت می باشد آنگاه مشتق زمانی $\hat{i}$ و $\hat{j}$ و $\hat{k}$ صفر نمی شود.

$$\vec{r}_P = \vec{r}_o + \vec{r} \qquad (1)$$

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

به دلیل دوران مانند x و y و z همچنین $\hat{i}$ و $\hat{j}$ و $\hat{k}$ نسبت به زمان تغییر می کنند.

$$\vec{V}_P = \frac{d\vec{r}_P}{dt} = \frac{d\vec{r}_o}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt}$$

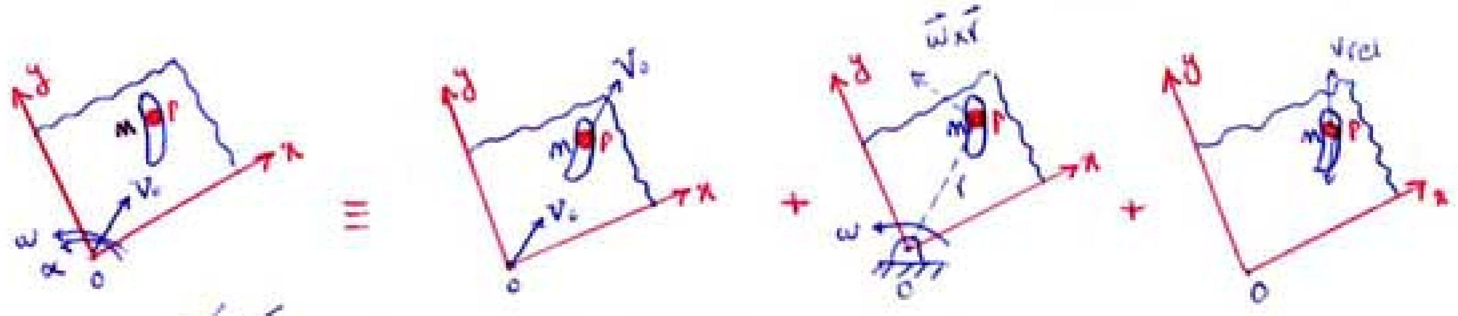
$$\vec{V}_P = \vec{V}_o + \frac{d}{dt}(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})$$

$$\vec{V}_P = \vec{V}_o + \underbrace{(\dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k})}_{\vec{V}_{P/oxyz} = V_{Reletiv} = \vec{V}_{rel}} + (x\dot{\hat{i}} + y\dot{\hat{j}} + z\dot{\hat{k}})$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{\hat{i}} &= \vec{\omega} \times \hat{i} \\ \dot{\hat{j}} &= \vec{\omega} \times \hat{j} \\ \dot{\hat{k}} &= \vec{\omega} \times \hat{k} \end{aligned}\right\} \rightarrow \quad \vec{V}_P = \vec{V}_o + \vec{V}_{rel} + \vec{\omega} \times (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})$$

$$\vec{V}_P = \vec{V}_o + \vec{V}_{rel} + \vec{\omega} \times \vec{r} \qquad (2)$$

توجیه فیزیکی رابطه (2) :



حرکت کلی

انتقال با سرعت $\vec{V}_0$ (P در روی صفحه ثابت است)

دوران حول O (P در روی صفحه ثابت است)

P در روی صفحه با سرعت V_{rel} حرکت می‌کند (صفحه ثابت است)

$$\vec{V}_m = \vec{V}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{V}_P = \vec{V}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{V}_{rel}$$

$$\vec{V}_{P/m} = \vec{V}_P - \vec{V}_m = \vec{V}_{rel}$$

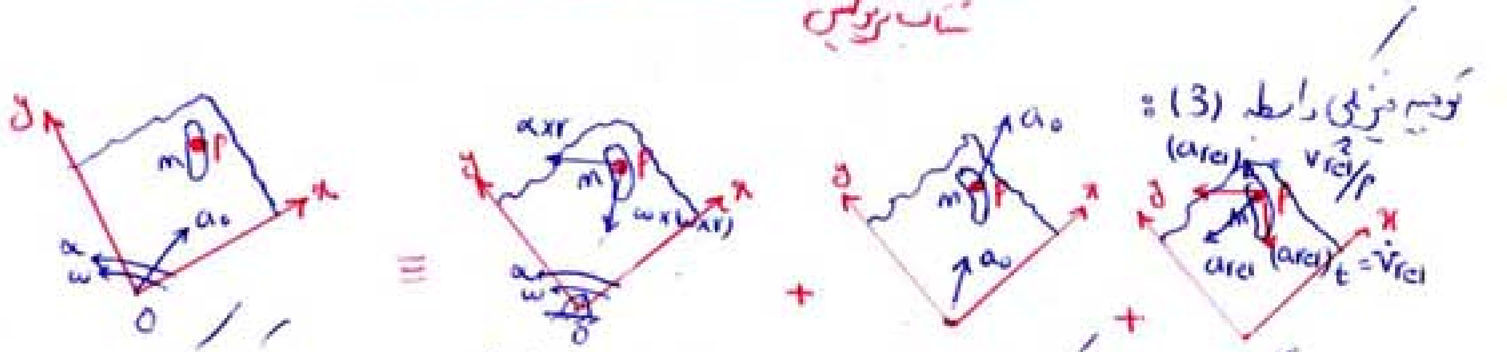
برای محاسبه شتاب ذره P از رابطه ② نسبت به زمان مشتق می‌گیریم :

$$\vec{a}_P = \frac{d\vec{V}_P}{dt} = \frac{d\vec{V}_0}{dt} + \frac{d}{dt}\overbrace{(\dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k})}^{V_{rel}} + \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r})$$

$$\vec{a}_P = \vec{a}_0 + \underbrace{(\ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k})}_{\vec{a}_{rel}} + \underbrace{(\dot{x}\dot{\hat{i}} + \dot{y}\dot{\hat{j}} + \dot{z}\dot{\hat{k}})}_{\omega \times \vec{V}_{rel}} + \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{\vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{V}_{rel}}$$

$$\vec{a}_P = \vec{a}_0 + \vec{a}_{rel} + \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \underbrace{2\vec{\omega} \times \vec{V}_{rel}}_{\text{شتاب کوریولیس}} \qquad (3)$$

توجیه فیزیکی رابطه (3) :



حرکت کلی

دوران حول O (P ثابت)

حرکت انتقالی با a_0 (P ثابت)

صفحه ثابت و P متحرک

جمله شتاب کوریولیس ظاهر شده، پس توجیه فیزیکی ندارد. اگر جسم روی سیم دیگری که ω دارد حرکت کند شتاب کوریولیس داریم.

$$\vec{a}_m = \vec{a}_o + \vec{\alpha}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

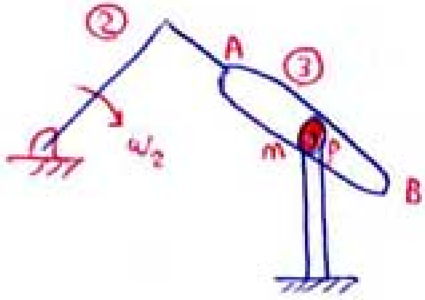
$$\vec{a}_p = \vec{a}_o + \vec{\alpha}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) + \vec{a}_{rel} + 2\vec{\omega}\times\vec{v}_{rel}$$

$$\vec{a}_{P/m} = \vec{a}_p - \vec{a}_m = \vec{a}_{rel} + 2\vec{\omega}\times\vec{v}_{rel}$$

روشهای دیگری نیز جهت بررسی شتاب وجود دارد که در اینجا مورد بررسی قرار نمی‌گیرند. از جمله روش ترسیمی هارتمن و رابطه اویلر-ساواری (Euler-Savary)

چند نکته مهم:

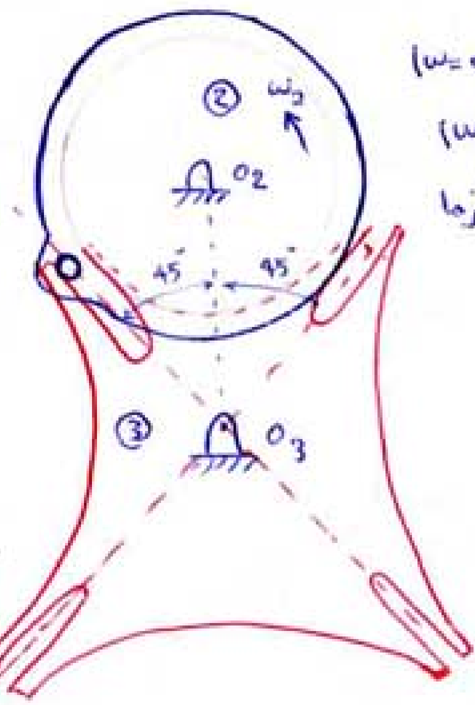
۱-



شتاب کوریولیس داریم برابر است با

$2\omega_3 \times v_{rel}$

۲- هرجا ω یا v_{rel} صفر شود شتاب کوریولیس هم صفر است. مثل چرخ ژنوا در سه حالت زیر: (نکته تئوری)



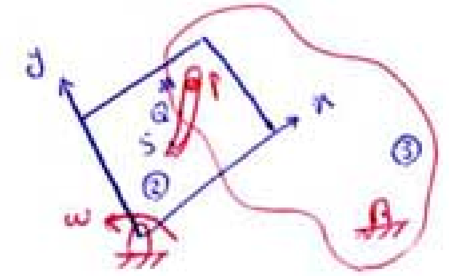
۱- موقع ورود پین به شیار ($\omega_3=0$)

۲- موقع خروج پین از شیار ($\omega_3=0$)

۳- موقعی که پین در راستای خط مرکزها قرار می‌گیرد ($\vec{v}_{rel}=0$)

۳- اگر حرکت در صفحه در نظر گرفته شود جهت شتاب کوریولیس به صورت زیر تعیین می‌شود

« جهت سرعت نسبی را ۹۰ درجه در جهت چرخش ω می‌چرخانیم »



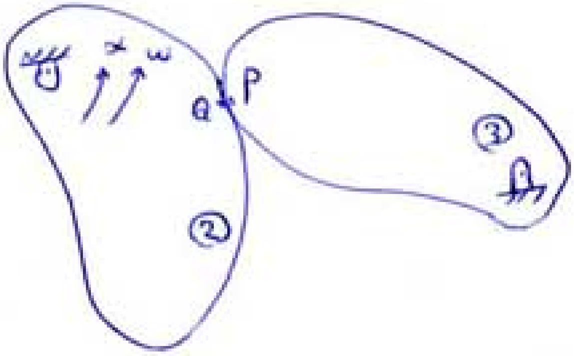
۴- نقطه P عضوی از عضو 3 است و در لحظه اول در محل m با Q عضو 2 می باشد.

$2\,\vec{\omega}_2 \times \vec{V}_{rel}$ شتاب کوریولیس

(ω_2 محرک نه ω_3 متحرک!!)

اما

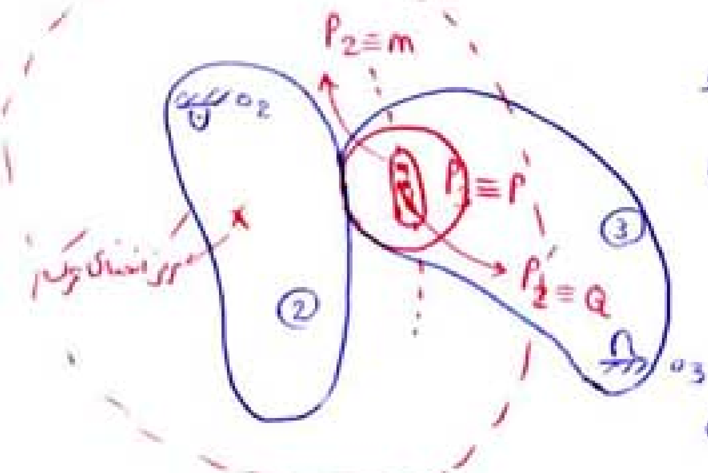
نقطه P و Q نسبت به هم $\vec{V}_{rel}$ دارند و جسم محرک دارای ω_2 است اما شتاب کوریولیس از رابطه $2\vec{\omega}_2 \times \vec{V}_{P/Q}$ حاصل نمی شود، زیرا نقطه P از جسم 3 و نقطه Q از جسم 2 دائما عوض می شوند. در صورتی که باید P یک نقطه ثابت از عضو 3 باشد.



راه حل :

در محل تماس دو جسم ② و ③ یک مرکز انحنا به سطح تماس دو جسم (از جسم ② محرک است و دایره روی ③ در نظر گرفته می شود). جسم ② را بزرگتر فرض می کنیم به طوری که شامل روی آن است به مرکز انحنا روی آن حرکت می کند.

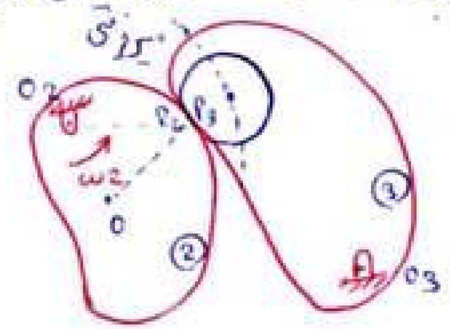
منطبق با انحنای جسم محرک از آن مرکز انحنا رسم می کنیم.



مرکز انحنای نقطه مطلوب یعنی P است. نقاط Q و m محل تماس نقطه P در دو لحظه یاد شده با جسم 2 است.

$2\cdot\vec{\omega}_2 \times \vec{V}_{P_3/P_2}$: شتاب کوریولیس

مثال: در مکانیزم زیر اگر سرعت زاویه‌ای عضو ② ثابت و برابر ω_2 باشد، شتاب زاویه‌ای عضو ③ را بیابید.



ابتدا باید سرعت V_{P_3/P_2} را حساب کنیم:

$$\overset{\checkmark -}{\vec V_{P_3/P_2}} = \overset{\checkmark -}{\vec V_{P_3}} - \overset{\checkmark\checkmark}{\vec V_{P_2}}$$

$\vec V_{P_3/P_2}$: مماس بر سطح تماس یا در جهت t

$\vec V_{P_3}$: عمود بر $\overline{O_3P_3}$

$\vec V_{P_2}$: عمود بر $\overline{O_2P_2}$

راستای V_{P_3/P_2} (مماس در راستای t)

راستای $\vec V_{P_3}$ عمود بر $\overline{O_3P_3}$

$$\omega_3 = \frac{|\vec V_{P_3}|}{\overline{O_3P_3}} \quad cw$$

بررسی شتاب‌ها:

$$\vec a_{P_3/P_2} = \vec a_{P_3} - \vec a_{P_2} = \vec a_{rel} + 2\vec\omega_2 \times \vec V_{rel}$$

$$\overset{\checkmark -}{(\vec a_{P_3})_t} + \overset{\checkmark\checkmark}{(\vec a_{P_3})_n} = \cancel{(\vec a_{P_2})_t} + \overset{\checkmark\checkmark}{(\vec a_{P_2})_n} + \overset{\checkmark -}{(\vec a_{rel})_t} + \overset{\checkmark\checkmark}{(\vec a_{rel})_n} + 2\vec\omega_2 \times \vec V_{rel}$$

$(\vec a_{P_3})_t$: $\overline{O_3P_3}\cdot\alpha_3$ — عمود بر $\overline{O_3P_3}$

$(\vec a_{P_3})_n$: $\overline{O_3P_3}\,\omega_3^2$ — از P_3 به O_3

$(\vec a_{P_2})_t$: $O_2P_2\cdot\alpha_2 = 0$

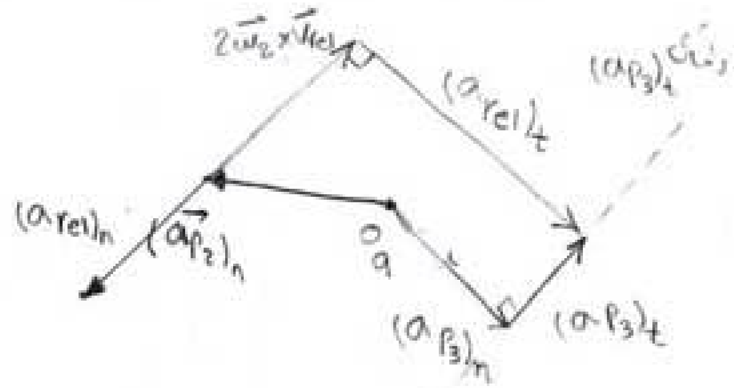
$(\vec a_{P_2})_n$: $O_2P_2\cdot\omega_2^2$ — از P_2 به O_2

$(\vec a_{rel})_t$: $\dot V_{rel}$ — مماس بر V_{rel} (یا در جهت t)

$(\vec a_{rel})_n$: $\dfrac{|\vec V_{rel}|^2}{\overline{OP_2}}$ — از P_2 به سمت O

$2\vec\omega_2\times\vec V_{rel}$ — مقدار معلوم و جهت (با چرخش V_{rel} به میزان ۹۰ درجه در جهت ω_2 و از O به سمت P_2)

راستای $(a_{rel})_t$ مماس بر V_{rel}



$$\alpha_3 = \frac{|\vec a_{P_3}|_t}{\overline{O_3P_3}} \quad cw$$

فصل هفتم: مکانیزم‌های معادل

هنگامی که تجزیه و تحلیل شتاب یک مکانیزم تماسی مستقیم مورد نظر باشد، مسئله را می‌توان با جایگزین نمودن یک مکانیزم چند میله‌ای معادل، ساده‌تر نمود.

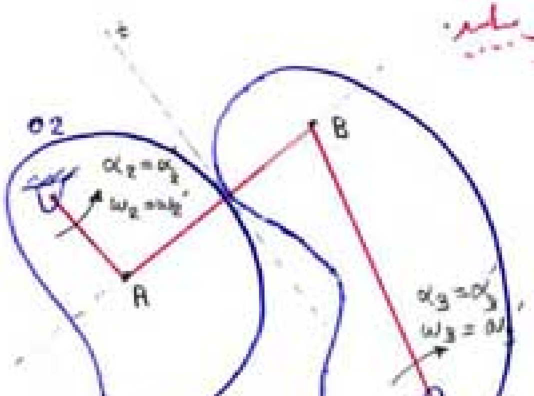
یک مکانیزم معادل، مکانیزمی است که سرعت و شتاب زاویه‌ای عضو محرک و متحرک به طور لحظه‌ای برابر اعضای محرک و متحرک مکانیزم اولیه باشد.

روش کار:

در مکانیزم‌های تماس مستقیم ابتدا عمود مشترک دو سطح را در محل تماس رسم می‌کنیم. بر روی این عمود مشترک مراکز انحنای دو سطح را مشخص می‌کنیم. از مرکز دوران جسم محرک به مرکز انحنای آن و از مرکز دوران جسم متحرک به مرکز انحنای آن متصل می‌کنیم. مکانیزم حاصل را مکانیزم معادل می‌نامند.

مثال: مکانیزم‌های معادل را در شکل‌های زیر بیابید.

1)



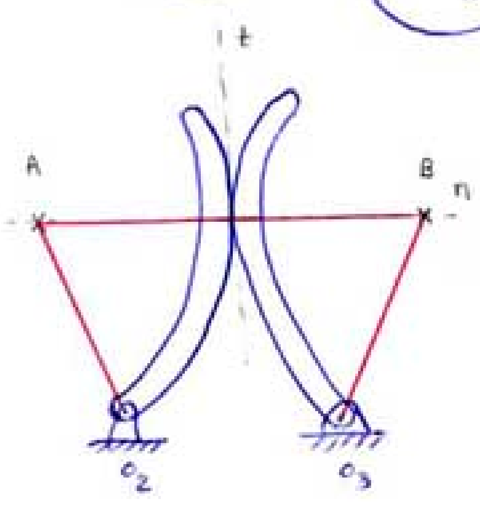
مکانیزم معادل: O_2ABO_3

دیگر شتاب نسبی نداریم و تحلیل مسئله ساده‌تر می‌شود.

$\alpha_2=\alpha_2'$ و $\alpha_3=\alpha_3'$

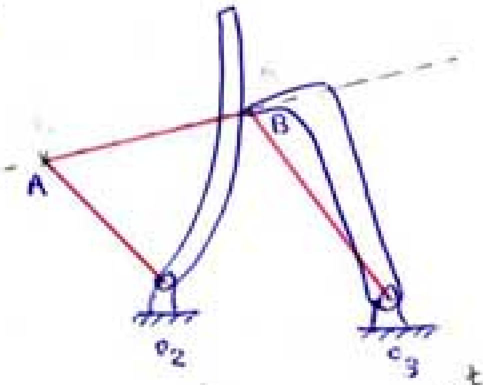
$\omega_2=\omega_2'$ و $\omega_3=\omega_3'$

2)



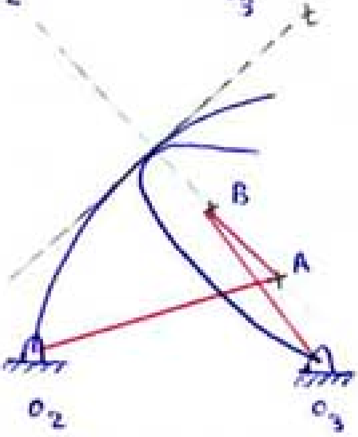
مکانیزم معادل: O_2ABO_3

3)



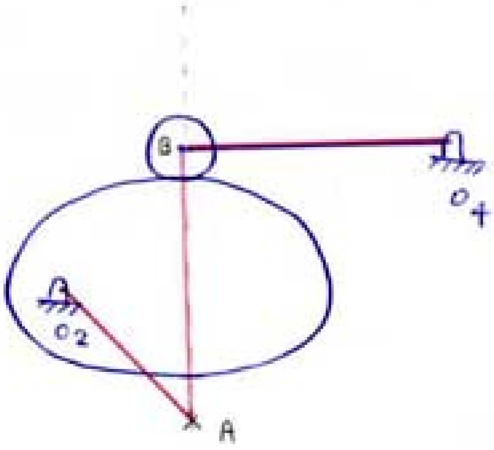
سازکار معادل : O_2ABO_3

4)

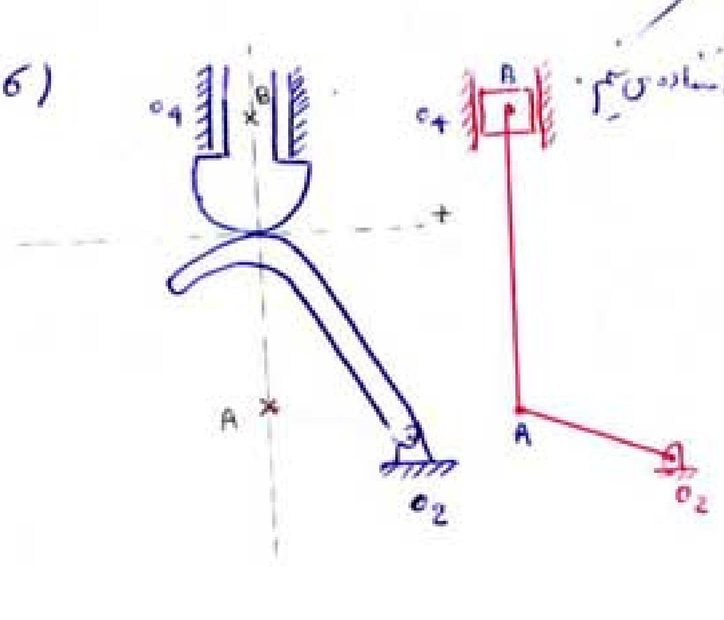


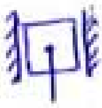
سازکار معادل : O_2ABO_3

5)



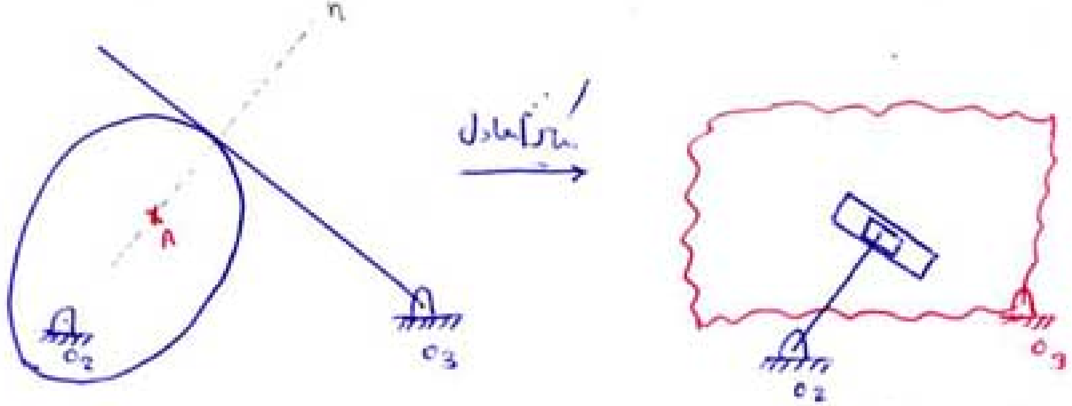
6)



اگر حرکت را لغزش داشتیم به جای آن از  استفاده می‌کنیم.

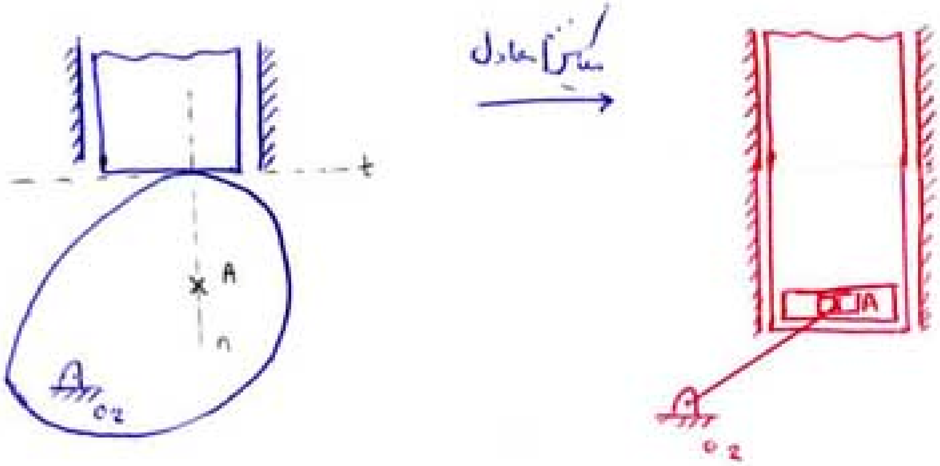
سازکار معادل : O_2ABO_4

7)

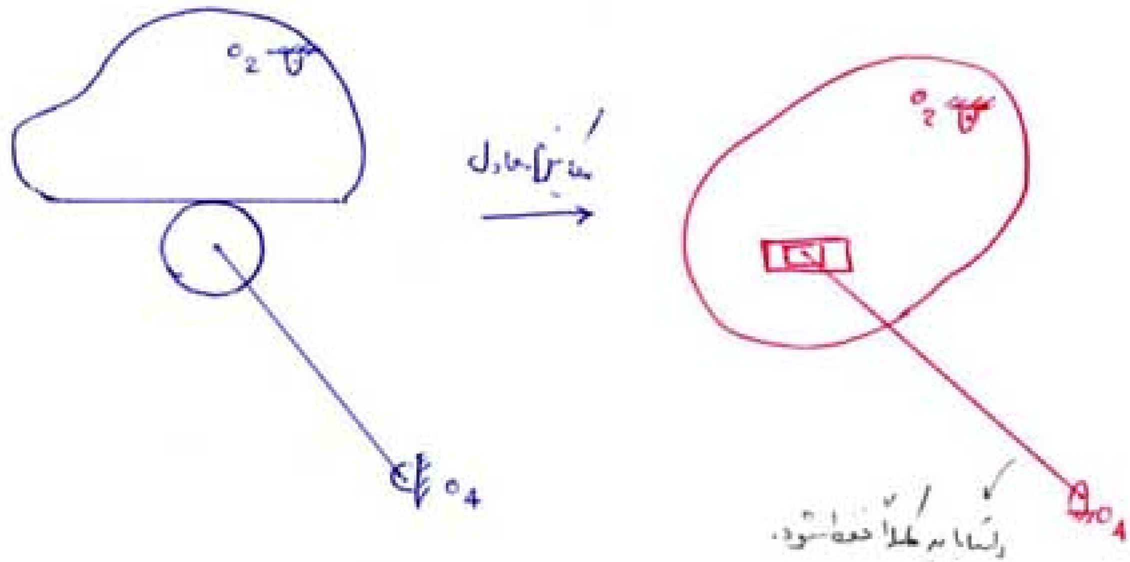


اگر مرکز انحنای یکی از اجسام درگیر در بی‌نهایت باشد به جای آن لغزنده می‌گذاریم. مسیر لغزنده همیشه در جهت خط مماس در محل برخورد دو جسم است و محل آن در مرکز انحنای جسم دیگر است.

8)



9)



فصل هشتم : چرخ دنده ها

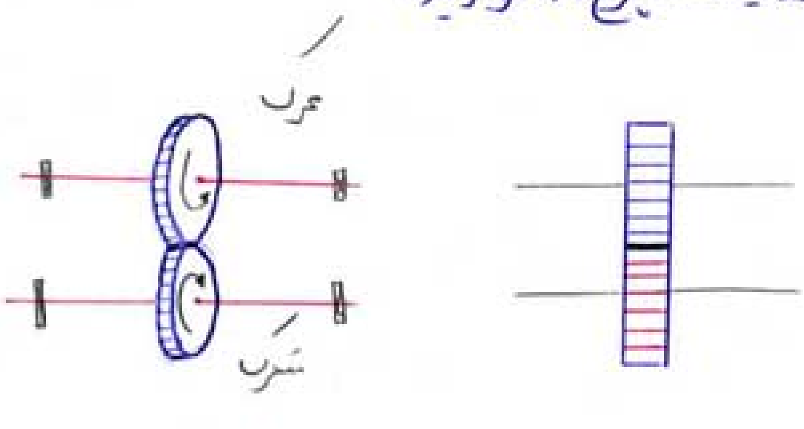
(مطالعه فصل ۱۲ و ۱۳ مارتین)

ظرفیت قابل انتقال توسط اعضای غلتشی محدود به اصطکاک بین سطوح درتماس است و اگر بار از حد تجاوز کند، لغزش اتفاق می افتد و برای فراهم کردن واکنش مثبت در روی سطوح تماس دندانه تعبیه می شود. اعضای حاصل موسوم به چرخ دنده می باشد.

چرخ دنده عضوی است که از آن برای انتقال توان همراه با تغییرات دور استفاده می شود که دارای انواع مختلفی می باشد که از جمله می توان موارد زیر را نام برد:

۱- چرخ دنده ساده یا صاف (Spur Gear)

چرخ دنده ای است که برای انتقال توان بین دو شافت موازی از آن استفاده می شود. دندانه های این چرخ دنده با محور یا شافت چرخ دنده موازیند.

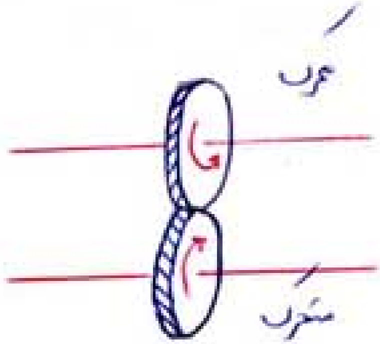


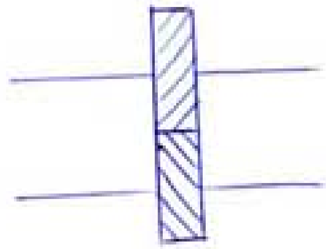
۲- چرخ دنده مارپیچ ساده (Simple Helical gear)

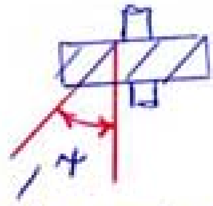
چرخ دنده ای است که برای انتقال توان بین دو شافت موازی از آن استفاده می شود. دندانه های این چرخ دنده ها به طور مورب نسبت به محور چرخ دنده قرار دارند. نحوه درگیری دندانه ها تدریجی بوده و لذا از این چرخ دنده ها در مواقعی که دور بالا است استفاده می شود و به همین دلیل صدای ایجاد شده توسط

این چرخ دنده ها همتراز چرخ دنده های ساده است. این چرخ دنده ها یا راستگرد و یا چپگرد.

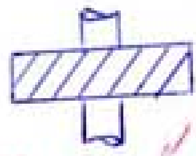
(همانند پیچ ها) که دو چرخ دنده های مارپیچ ساده همواره یک راستگرد با یک چپگرد درگیر می شود.



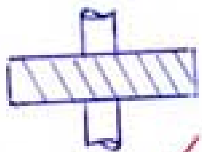




زاویه مارپیچ (هلیکس)



راستگرد (شیب مثبت)



چپگرد (شیب منفی)

زاویه مارپیچ ψ دو چرخ دنده مارپیچ ساده درگیر با هم الزاماً برابر است.

۳) چرخ دنده مارپیچ ضربدری (متقاطع)

چرخ دنده هایی هستند که توان را بین دو شافت متقاطع انتقال می دهند، زاویه بین این دو شافت تابع رابطه زیر است:

زاویه مارپیچ چرخ دنده 1

زاویه بین دو شافت

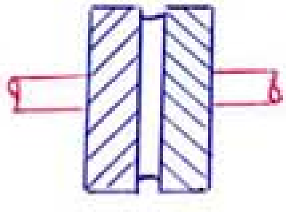
$$\Sigma = \psi_1 \pm \psi_2$$

زاویه مارپیچ چرخ دنده 2

اگر هر دو چپ گرد یا راستگرد باشند علامت جمع و اگر یکی چپ گرد و دیگری راستگرد باشد علامت منفی داریم.

۴) چرخ دنده جناغی

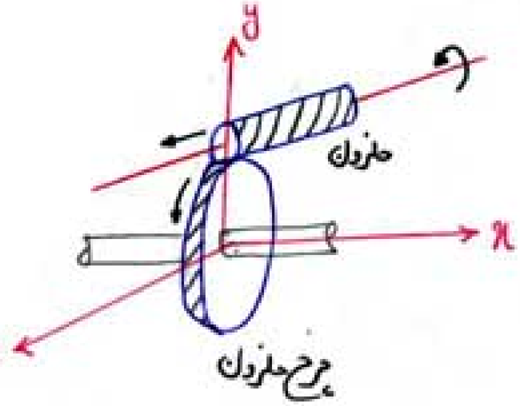
یک چرخ دنده جناغی معادل ۲ چرخ دنده مارپیچ با شیب معکوس است که پهلو به پهلو در کنار هم قرار داشته باشند و قابلیت حذف فشارهای جانبی را دارد.



۵) چرخ دنده حلزونی (worm gears)

در این چرخ دنده ها توان بین دو شافت متنافر که عموماً زاویه بین آنها °90 است منتقل می شود. یکی

در این دستگاه حلزون است. لذا از این چرخ دنده ها برای کاهش دور به میزان قابل توجهی استفاده می شود.



اگر حلزون راستگرد باشد، چرخ حلزون نیز راستگرد است و بالعکس.

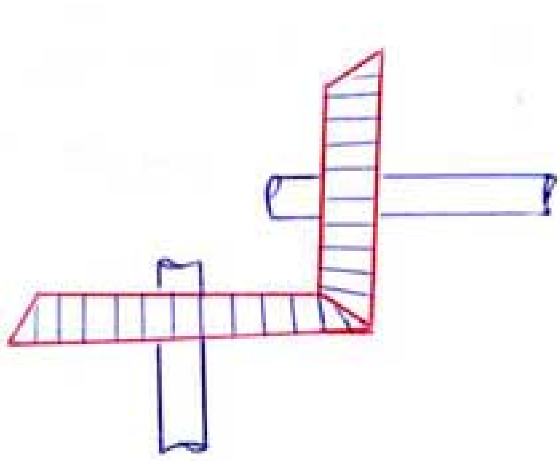
((در شکل هر دو چپ گردند.))

به منظور تعیین جهت دوران چرخ دنده به ازاء دوران حلزون از مانول پیچ و مهره استفاده می شود. در این جا حلزون مانند پیچ و چرخ حلزون مانند مهره عمل می کند. به این ترتیب که اگر حلزون با توجه به دید از سمت $-z$ cw بچرخد، چرخ حلزون با توجه به دید از $+x$ ، ccw خواهد چرخید.

۶) چرخ دنده مخروطی (Bevel gears)

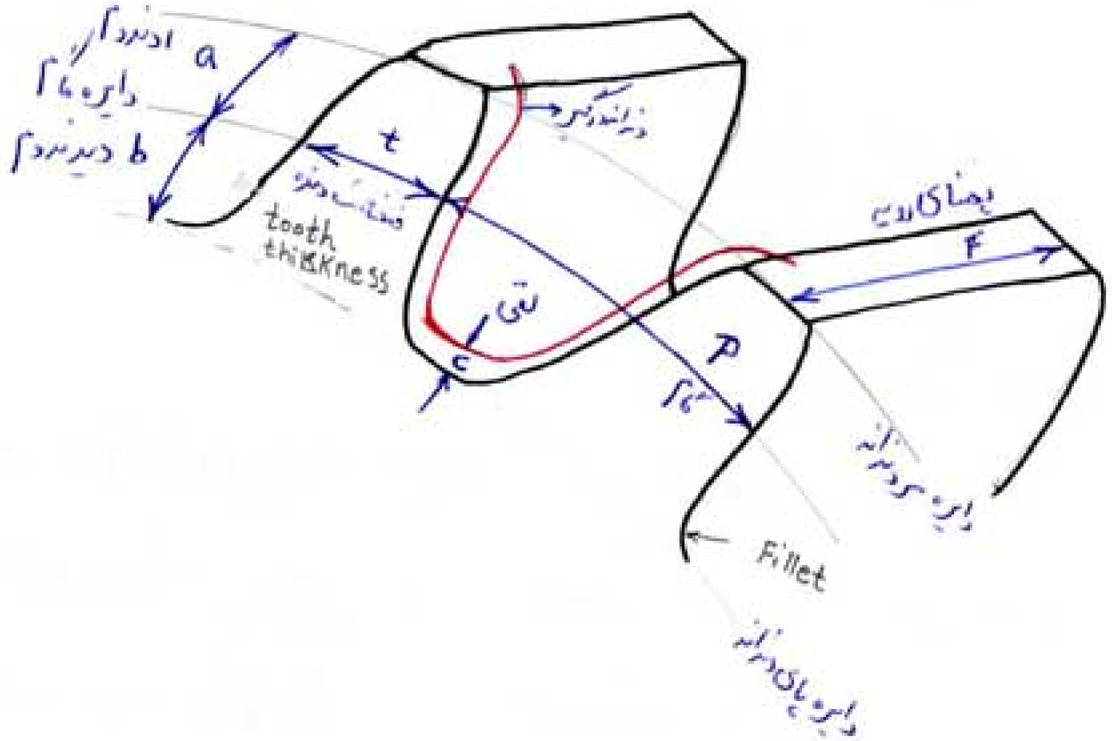
این چرخ دنده ها انواع مختلفی دارند که مهمترین آنها می توان به مخروطی ساده و مخروطی مارپیچ اشاره کرد.

در چرخ دنده های مخروطی ساده و مخروطی مارپیچ می توان بین دو شافت متقاطع که زاویه بین آنها °90 است، انتقال می یابد.



تعاریف اولیه :

اگر یک جفت دندانه از یک چرخدنده ساده را در نظر بگیریم ، در آن صورت می توان پارامترهای زیر را به شرحی که گفته خواهد شد ، تعریف کرد :



۱- دایره گام (Pitch circles) :

دایره ای فرضی است که از آن در تمام محاسبات استفاده می شود ، قطر این دایره را با d نمایش می دهند.

دوایر گام دو چرخدنده درگیر با هم مماس بوده و بر روی هم می غلتند.

۲- گام دندانه P (Circular pitch) :

فاصله یک نقطه واقع بر یک دندانه تا نقطه ی مشابه واقع بر دندانه ی دیگر روی دایره گام را گام دندانه می نامند.

گام دندانه ی دو چرخ دنده ی درگیر باید با هم برابر باشند.

۳- مدول m (module) :

در سیستم متریک طبق تعریف مدول برابر است با :

قطر بر حسب mm

$$m = \frac{d}{N}$$

تعداد دندانه

در سیستم انگلیسی گام قطری تعریف می‌شود که با P_d نمایش داده می‌شود:

Diameter Pitch

$$DP \text{ یا } P_d = \frac{N \rightarrow \text{تعداد دندانه}}{d \rightarrow \text{قطر برحسب in}}$$

رابطه گام با مدول:

$$NP = \pi d \rightarrow P = \pi \frac{d}{N} \Rightarrow \underline{P = \pi m}$$

رابطه گام با DP:

$$NP = \pi d \rightarrow P \frac{N}{d} = \pi \Rightarrow \underline{P \cdot D_P = \pi}$$

مدول یا DP در چرخ‌دنده‌های درگیر با هم برابر است.

۴- لقی جانبی یا لقی (Backlash):

فاصله آزاد بین دو دندانه که بر روی دایره‌ی گام اندازه گرفته می‌شود را لقی جانبی گویند.

۵- لقی C (Clearance):

فاصله آزاد بین سطح بالای یک دندانه و سطح پائینی دندانه‌ی دیگر را لقی C گویند.

۶- ادندوم a (addendum):

فاصله دایره‌ی گام تا سطح بالای دندانه را ادندوم گویند.

۷- دیدندوم b (Didendom):

فاصله دایره‌ی گام تا سطح پائینی دندانه را دیدندوم گویند.

۸- عمق دندانه (whole depth):

عمق دندانه برابر است: $h_t = a + b$

Pinion: چرخ‌دنده کوچک

Gear: چرخ‌دنده بزرگ

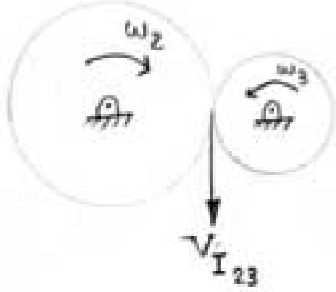
(مراجعه به صفحه ۲۰۸ جدول ۱۲-۲ ← ۴ فرم دنده استاندارد و متداول)

ادامه چرخ دنده‌های معمولی :

یک جفت چرخ دنده درگیر را در نظر بگیرید ۲ محرک و ۳ متحرک است.

$$V_{I_{23}} = r_2\omega_2 = r_3\omega_3 \Rightarrow$$

$$\omega_3 = \frac{r_2}{r_3}\omega_2 = \frac{d_2}{d_3}\omega_2 = \frac{N_2}{N_3}\omega_2$$



$$\Rightarrow \quad \omega_3 = \frac{N_2}{N_3}\omega_2$$

برای چرخ دنده ساده، مارپیچ ساده و حلزونی صادق است

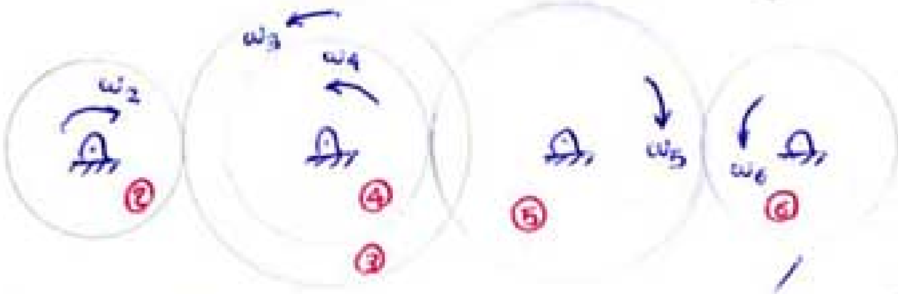
برای چرخ دنده حلزونی

$$\omega_{\text{چرخ حلزون}} = \frac{N_w}{N_G}\,\omega_{\text{حلزون}}$$

N_w: تعداد دوره‌های حلزون

N_G: تعداد دندانه چرخ حلزون

حال اگر چند جفت چرخ دنده درگیر داشته باشیم :



$$\omega_3 = \frac{N_2}{N_3}\omega_2 \quad \text{و} \quad \omega_3 = \omega_4$$

$$\omega_5 = \frac{N_4}{N_5}\omega_4 = \frac{N_4}{N_5}\cdot\frac{N_2}{N_3}\omega_2$$

$$\omega_6 = \frac{N_5}{N_6}\omega_5 = \frac{N_4}{N_6}\cdot\frac{N_2}{N_3}\cdot\frac{N_5}{N_5}\omega_2$$

بنابراین با تشکیل جدول محرک‌ها و متحرک‌ها داریم:

محرک	2	4	5
متحرک	3	5	6

$$e = \frac{N_2\cdot N_4\cdot N_5}{N_3\cdot N_5\cdot N_6}$$ که نسبت دوری

نسبت دوری

$$\boxed{e \text{ یا } VR = \frac{\text{حاصل ضرب تعداد دندانه‌های چرخ دنده‌های محرک}}{\text{حاصل ضرب تعداد دندانه‌های چرخ دنده‌های متحرک}}}$$

angular Velocity ratio

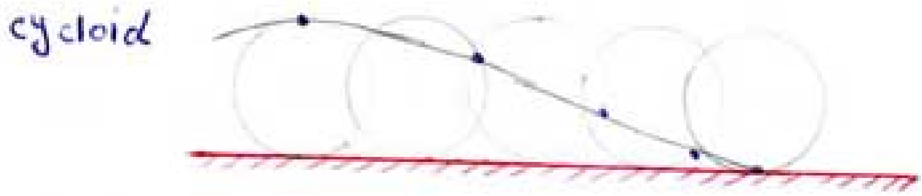
$$\omega_L = e\,\omega_F \longleftarrow \begin{cases} \omega_L = \omega_6 & \text{سرعت زاویه‌ای خروجی} \\ \omega_F = \omega_2 & \text{سرعت زاویه‌ای ورودی} \end{cases}$$

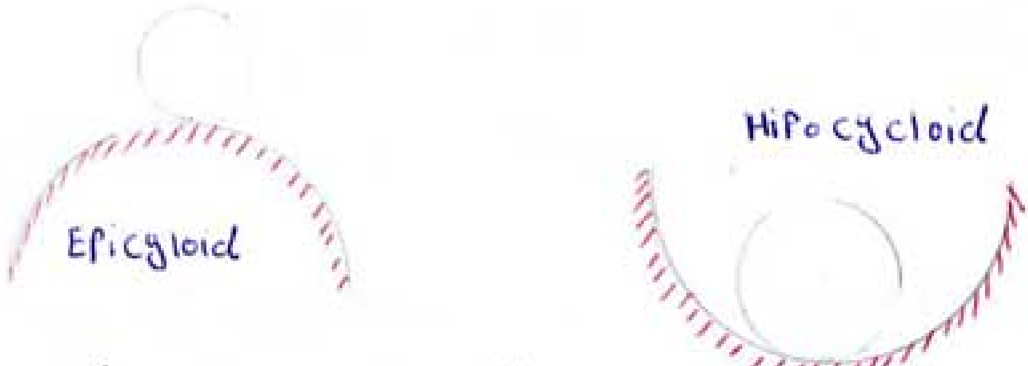
✓ چرخ دنده‌هایی مانند ω_5 را که در رابطه حذف می‌شوند هرزگرد می‌نامیم و فقط جهت ω را عوض می‌کنند

اگر e مثبت باشد جهت ω_L و ω_F یکی است و بالعکس.

رشته چرخ دنده های خورشیدی و یا اپی سیکلوئیدی :

سیکلوئید منحنی حرکت ذره از محیط یک دایره است که بر سطح افق می غلتد.





اگر سطح افق محدب شود منحنی بدست آمده اپی سیکلوئید و اگر مقعر شود هیپوسیکلوئید نام دارد.

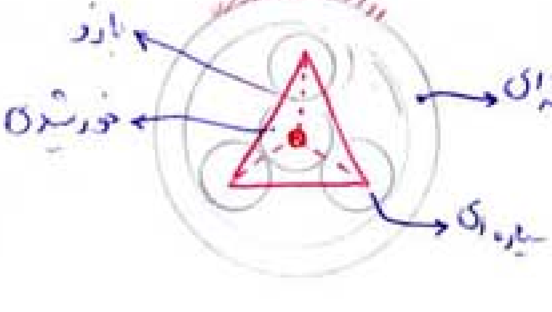
چرخدنده های خورشیدی یا Sun Gear چرخدنده هایی هستند که درجه آزادی آنها ۲ است. این مجموعه چرخدنده ها عموماً دارای اجزاء زیر باشند :

۱- چرخدنده ای که در وسط است و بقیه چرخدنده ها به دور آن می چرخند که اصطلاحاً خورشیدی نام دارد

۲- بازویی که مرکز تعدادی از چرخدنده ها را که به دور خورشیدی می چرخند به هم متصل می کند.

۳- چرخدنده هایی که با حرکت بازو به دور خورشیدی می چرخند به آنها سیاره ای می گویند.

۴- چرخدنده حلقه ای یا رینگی که دور چرخدنده های سیاره ای قرار داشته باشد.



روش تحلیل سرعت زاویه‌ای و شمارش دور :

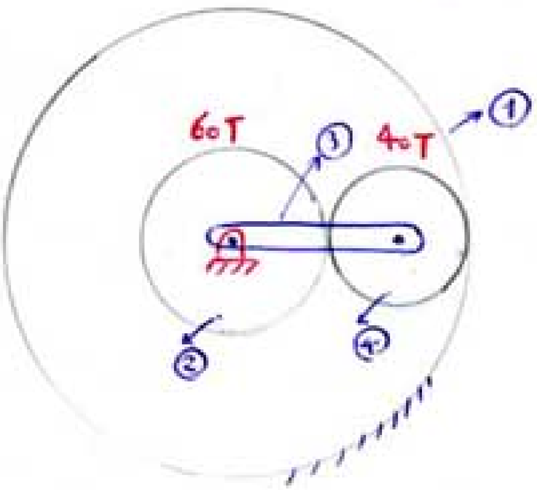
۱- ابتدا کل مجموعه را یکبار در جهت ساعتگرد (cw) می‌چرخانیم.

۲- بازو را ثابت نگه می‌داریم و چرخ‌دنده‌ای که ثابت بوده است را یک دور در جهت پادساعتگرد (ccw) می‌چرخانیم.

۳- جمع مراحل ۱ و ۲ تعداد دورهای زده شده هر عضو را نشان خواهد داد.

توجه : جهت چرخش‌ها مهم است. توجه شود اگر دو چرخ‌دنده درگیر خارجی جهت را عوض کرده و دو چرخ‌دنده درگیر داخلی (مثل سیاره و رینگ) جهت را عوض نمی‌کنند.

مثال : اگر سرعت زاویه‌ای چرخ‌دنده ② در دستگاه نشان داده شده زیر 80 rpm در جهت ccw باشد و چرخ‌دنده حلقه‌ای ① ساکن باشد، سرعت زاویه‌ای چرخ‌دنده ④ را بیابید.



درجه آزادی :

$n = 4$

$F_1 = 3$

$F_2 = 2$

$DoF = 9 - 2(3) - 2 = 1$

ابتدا تعداد دندانه‌های چرخ‌دنده رینگی را می‌یابیم :

$$\frac{1}{2}d_2 + d_4 = \frac{1}{2}d_1 \qquad M = \frac{d}{N} \text{ or } d = MN$$

$$\downarrow$$

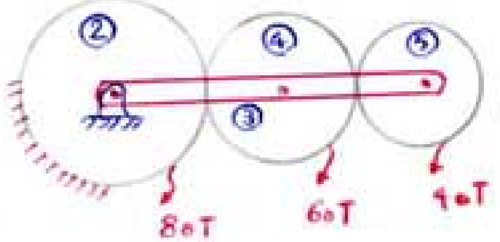
$$MN_2 + 2MN_4 = MN_1 \Rightarrow N_2 + 2N_4 = N_1 \Rightarrow N_1 = 140\,T$$

چرخ‌دنده ①	چرخ‌دنده ④	چرخ‌دنده ②	بازو ③	اعمال انجام شده روی مجموعه
+1	+1	+1	+1	مجموعه یک دور در جهت ساعتگرد بزند (cw)
−1	$-\frac{140}{40}$	$+\frac{140}{40}\times\frac{40}{60}$	0	بازو ثابت و چرخ‌دنده ① یک دور پادساعتگرد بزند
0	$-2\frac{1}{2}$	$+3\frac{1}{3}$	+1	تعداد دورهای بدست آمده

$$\frac{\omega_4}{\omega_2} = \frac{-2\frac{1}{2}}{3\frac{1}{3}} = \frac{-5/2}{10/3} = \frac{-15}{20} = -\frac{3}{4} \quad \text{و} \quad \omega_2 = 80\ rpm\ \ ccw\ \text{یا (منفی)}$$

$$\Rightarrow \omega_4 = 80 \times \frac{3}{4} = 60\ rpm$$

مثال: در دستگاه خورشیدی زیر نسبت سرعت زاویه‌ای چرخدنده ⑤ به چرخدنده ④ را بیابید.



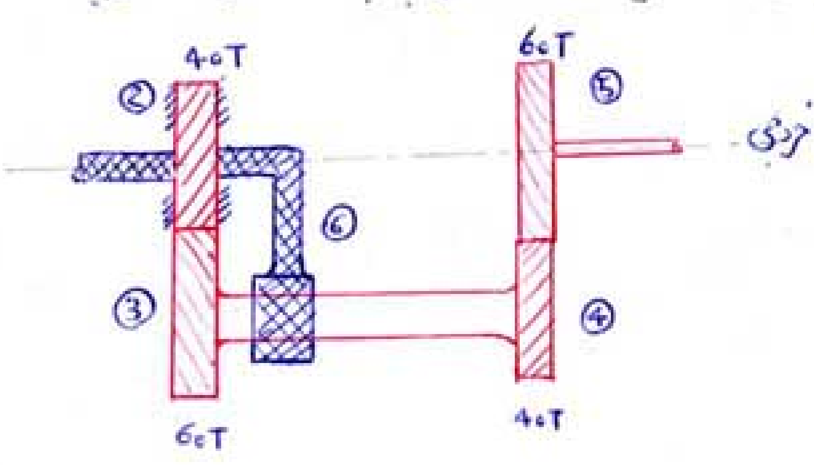
اعمال تشکیل‌دهنده حرکت	بازو ③	چرخدنده ②	چرخدنده ④	چرخدنده ⑤
مجموعه یک دور مثبت بزند (cw)	+1	+1	+1	+1
بازو ثابت و چرخدنده ② یک دور منفی بزند	0	-1	$+\frac{80}{60}$	$-\frac{80}{60} \times \frac{60}{90}$
تعداد دورهای بدست آمده	+1	0	$+\frac{7}{3}$	-1

$$\frac{\omega_5}{\omega_4} = \frac{-1}{+7/3} = -\frac{3}{7}$$ یعنی نسبت $3/7$ و خلاف جهت هم می‌چرخند.

اگر $\omega_3 = 60\ rpm$ و cw باشد: آنگاه $\omega_5 = -60\ rpm$ (ccw)

$\hookrightarrow \omega_4 = \frac{7}{3} \times 60 = 140\ rpm \quad cw$

مثال: در ترکیب خورشیدی هم‌محور زیر سرعت زاویه‌ای شافت خروجی به شافت ورودی را بیابید.



نسبت خروجی به ورودی:

VR یا TV یا e

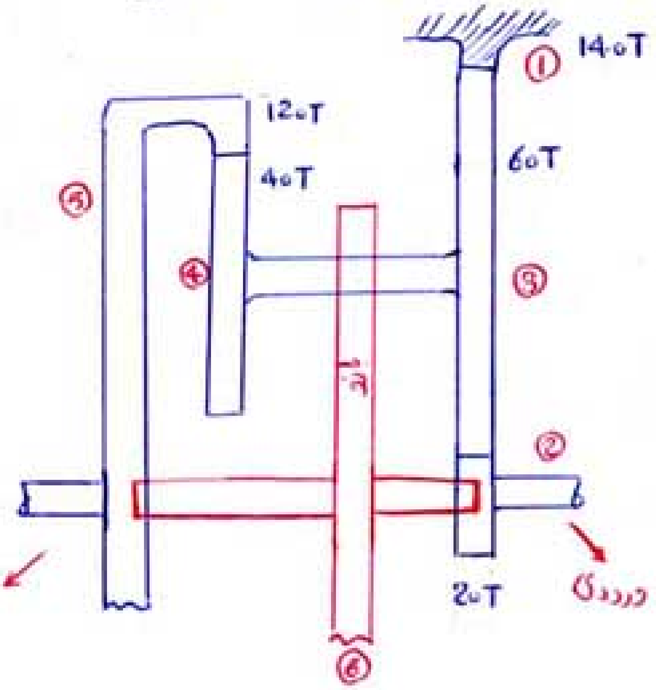
Velocity ratio ← VR ، Train Value ← TV

اعضای تشکیل دهنده مجموعه	چرخ‌دنده ②	چرخ‌دنده ③	چرخ‌دنده ④	چرخ‌دنده ⑤	بازو ⑥
مجموعه یک دور مثبت بزند (cw)	+1	+1	+1	+1	+1
بازو ثابت و چرخ‌دنده ② یک دور منفی بزند	-1	$+\frac{40}{60}$	$+\frac{40}{60}$	$-\frac{40}{60}\times\frac{40}{60}$	0
تعداد دورهای بدست آمده	0	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{9}$	+1

$$TV = \frac{\omega_5}{\omega_6} = \frac{5/9}{1} = 5/9$$

یعنی دستگاه تعداد دور را $4/9$ کاهش می‌دهد.

مثال ۵: در گیربکس خورشیدی زیر نسبت سرعت خروجی به ورودی یا (TV) را بیابید.



$$\frac{\omega_5}{\omega_2} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{8}{1}} = \frac{1}{36}$$

$$\omega_5 = \frac{1}{36}\,\omega_2$$

اعضای تشکیل دهنده مجموعه	چرخ‌دنده ①	چرخ‌دنده ②	چرخ‌دنده ③	چرخ‌دنده ④	چرخ‌دنده ⑤	بازو ⑥
مجموعه یک دور مثبت بزند (cw)	+1	+1	+1	+1	+1	+1
بازو ثابت و چرخ‌دنده ① یک دور منفی بزند	-1	$\frac{140}{60}\times\frac{60}{20}$	$-\frac{140}{60}$	$-\frac{140}{60}$	$-\frac{140}{60}\times\frac{40}{120}$	0
تعداد دورهای بدست آمده	0	+8	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$+\frac{2}{9}$	+1

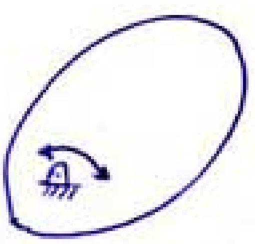
فصل نهم: بادامکها : (Cams)

بادامک عضوی از ماشین بوده که با شکل نامنظم خود به عنوان یک محرک، حرکت را به عضو دیگری به نام پیرو (follower) انتقال می‌دهد و در ماشینهای اتوماتیک مثل ماشین چاپ، ماشینهای ابزار، موتور احتراق داخلی و ... کاربرد دارد.

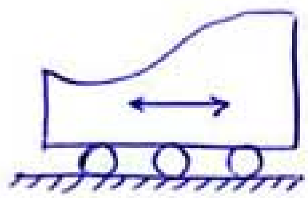
انواع بادامکها :

۱- بادامکهای دیسکی (Disk cams) یا بادامکهای دورانی (Rotating cams)

۲- بادامکهای انتقالی (Tranlation cams) یا بادامکهای رفت و برگشتی (Reciprocating cams)



(Rotating cams)

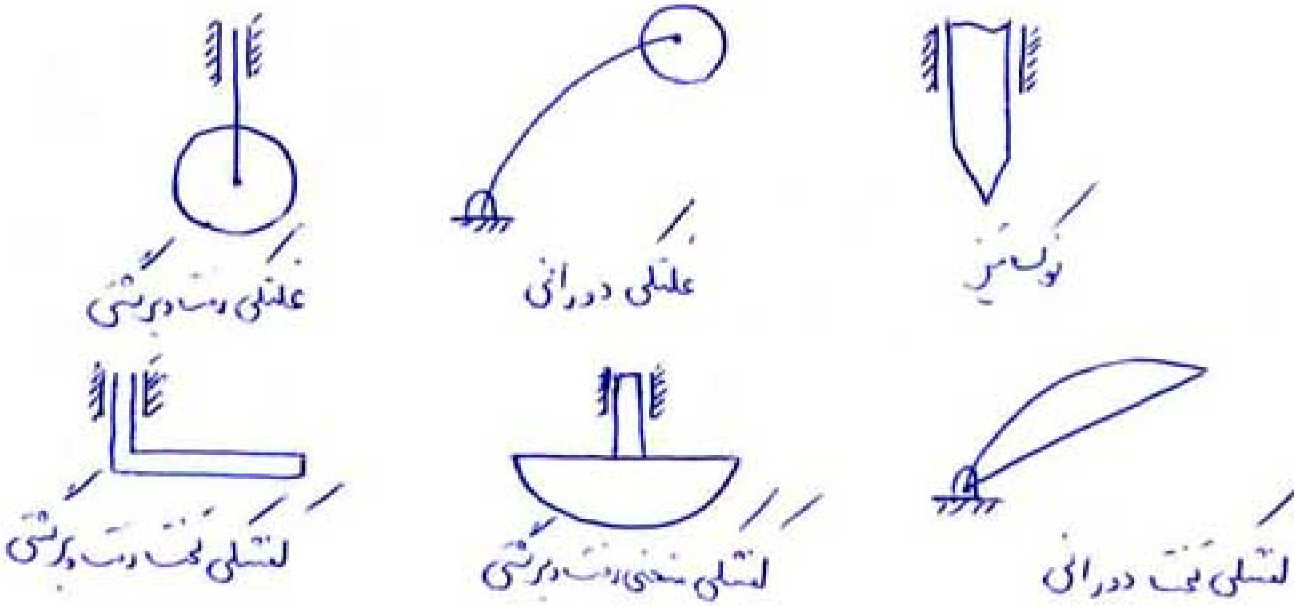


(Reciprocating cams)

انواع پیروها :

از نظر حرکتی:
- پیروهای نوسانی یا دورانی (Osilating or Rotating)
- پیروهای رفت و برگشتی (Reciprocating)

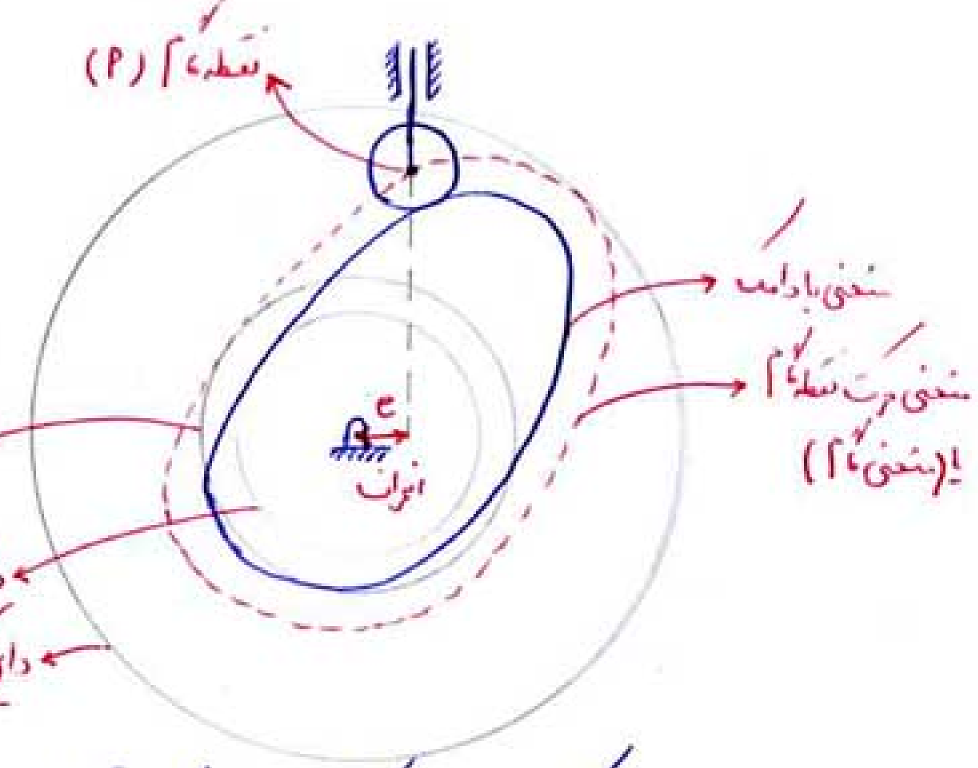
از نظر شکل:
- نوک تیز (Knife edge)
- غلتکی (Roler)
- کفشکی تخت (Flat Shoe)
- کفشکی منحنی (Curve Shoe)



- برای طراحی بادامکها ابتدا رفتار پیرو را مشخص می‌کنیم و سپس براساس آن رویه (سطح) بادامک تعیین می‌گردد.

نقطه گام:

یک نقطه فرضی از پیرو است که در سازوکار معادل با پیرو نوک تیز، نوک پیرو در آن نقطه واقع می‌شود. بسته به نوع سازوکار معادل، ممکن است این نقطه دائم باشد، مثلاً در پیرو غلتکی و لشکی دایروی، مرکز دایره، محل تماس فرضی (از نوع) دائم است و در لشکی غیر دایروی، مرکز انحنای سطح در تماس پیرو بوده و آنی است. در پیرو لشکی تخت، همان محل تماس پیرو با بادامک بوده و آنی است. نقطه گام را با P نمایش می‌دهند و مسیر حرکت نقطه گام در دوران بادامک را منحنی گام می‌نامند. مثلاً برای پیرو لشکی تخت منحنی گام همان منحنی بادامک است.



بادامک چرخان خارج از مرکز - پیرو غلتکی رفت و برگشتی

دایره پایه :

کوچکترین دایره به مرکز چرخش بادامک و دوران که بر منحنی بادامک مماس است را دایره پایه گویند

دایره گام :

کوچکترین دایره به مرکز چرخش بادامک دوران که بر منحنی گام مماس است را دایره گام می‌نامند. واضح است در پیروهای غلتکی تخت یا نوک تیز این دایره بر دایره پایه منطبق است.

دایره کورس :

بزرگترین دایره به مرکز چرخش بادامک دوران که بر منحنی گام مماس است را دایره کورس نامند.

$$L = R_{max} - R_{min}$$

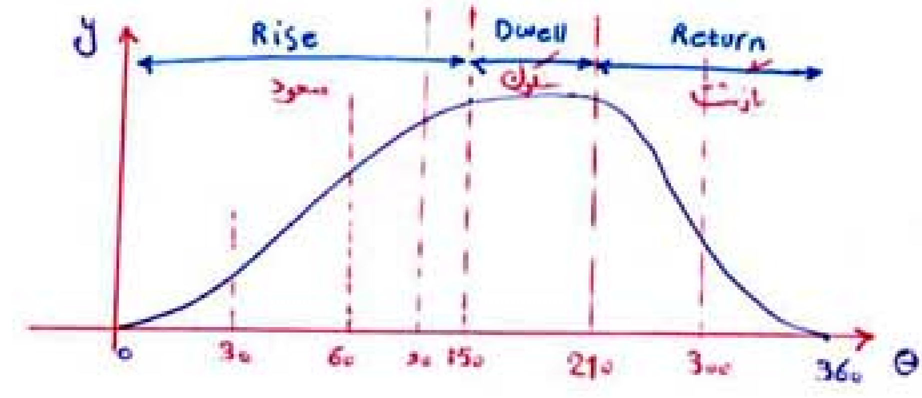
L : کورس پیرو ، R_{min} شعاع دایره گام ، R_{max} شعاع دایره کورس

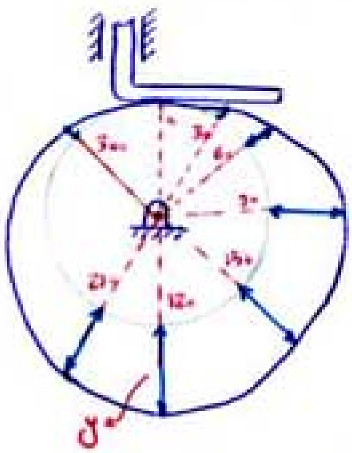
انحراف :

فاصله مرکز چرخش بادامک تا امتداد حرکت نقطه گام را انحراف (e) می‌نامند و این بادامکها را خارج از مرکز نامند.

موقعیت پیرو :

فرض کنید که موقعیت و نمودار حرکت پیرو به ازای یک حرکت دورانی کامل بادامک به شکل زیر داده شده است. و بادامک از نوع دورانی خارج از مرکز و پیرو لغزشی تخت رفت و برگشتی باشد.





موقعیت پیرو با L نمایش داده می‌شود و در پیرو رفت و برگشتی برحسب متر یا سانتی‌متر یا میلی‌متر بیان می‌شود [L] و در پیرو نوسانی (دورانی) بدون بعد بوده و با واحد رادیان بیان می‌گردد. نزدیکترین حد نقطه‌ی A به مرکز چرخش بادامک به عنوان مبداء اندازه‌گیری موقعیت پیرو در نظر گرفته می‌شود و در بادامک دورانی مبداء $L=0$ محل تماس پیرو با نقطه‌ی A است.

بادامک‌های رفت و برگشتی نیز برحسب [L] و بادامک‌های دورانی برحسب θ و بدون بعد و برحسب رادیان است.

می‌توان نوشت : $L = F(\theta)$ (برای بادامک‌های دورانی)

مشتق شتاب jerk (ضربه یا پرش)

با مشتق گیری پیاپی از y نسبت به زمان می توان سرعت، شتاب و تکان پیرو را بدست آورد. برای آنکه این مشتق گیری مستقل از نحوه پیمایش زمان توسط بادامک باشد، مشتق گیری پیاپی از y نسبت به موقعیت بادامک (θ) صورت گرفته و با استفاده از قاعده زنجیره ای می توان مشتق های نسبت به زمان را محاسبه نمود:

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} \quad , \quad y' = \frac{dy}{d\theta}$$

$$\ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2} \quad , \quad y'' = \frac{d^2y}{d\theta^2}$$

$$\dddot{y} = \frac{d^3y}{dt^3} \quad , \quad y''' = \frac{d^3y}{d\theta^3}$$

$\dot{y}$: سرعت واقعی m/s

$\ddot{y}$: شتاب واقعی m/s^2

$\dddot{y}$: تکان واقعی m/s^3 (jerk)

y' : سرعت هندسی m/rad

y'' : شتاب هندسی m/rad^2

y''' : تکان هندسی m/rad^3

$$y = f(\theta) \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$$

$$\dot{y} = y'\dot{\theta} \quad \text{یا} \quad \dot{y} = y'\omega$$

$$\ddot{y} = y''\dot{\theta}^2 + y'\ddot{\theta} \quad \text{یا} \quad \ddot{y} = y''\omega^2 + y'\alpha$$

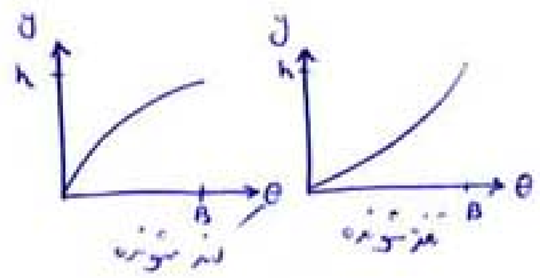
$$\dddot{y} = y'''\dot{\theta}^3 + 3y''\dot{\theta}\ddot{\theta} + y'\dddot{\theta} \quad \text{یا} \quad \dddot{y} = y'''\omega^3 + 3y''\omega\alpha + y'\dot{\alpha}$$

(α : شتاب زاویه ای بادامک)

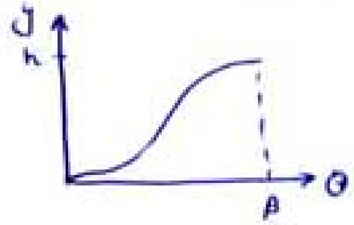
انواع حرکات متداول پیرو:

نوع حرکت	تغییر مکان (y)	سرعت ($\dot{y}$)	شتاب ($\ddot{y}$)
شتاب ثابت	$\frac{\theta}{\beta} \leq 0.5 \quad s = 2h\frac{\theta^2}{\beta^2}$ $\frac{\theta}{\beta} \geq 0.5 \quad s = h\left[1-2\left(1-\frac{\theta}{\beta}\right)^2\right]$	$\frac{ds}{dt} = \frac{4h\omega\theta}{\beta^2}$ $\frac{ds}{dt} = \frac{4h\omega}{\beta}\left(1-\frac{\theta}{\beta}\right)$	$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{4h\omega^2}{\beta^2}$ $\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{4h\omega^2}{\beta^2}$
هارمونیک ساده	$s = \frac{h}{2}\left(1-\cos\frac{\pi\theta}{\beta}\right)$	$\frac{ds}{dt} = \frac{\pi h\omega}{2\beta}\sin\frac{\pi\theta}{\beta}$	$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{\pi^2 h\omega^2}{2\beta^2}\cos\frac{\pi\theta}{\beta}$
سیکلوئیدی	$s = h\left(\frac{\theta}{\beta} - \frac{1}{2\pi}\sin\frac{2\pi\theta}{\beta}\right)$	$\frac{ds}{dt} = \frac{h\omega}{\beta}\left(1-\cos\frac{2\pi\theta}{\beta}\right)$	$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{2\pi h\omega^2}{\beta^2}\sin\frac{2\pi\theta}{\beta}$

انواع معادلات:



۱- شتاب ثابت: $y = A\theta^2 + B\theta + C$



۲- هارمونیک ساده: $y = A\cos(a\theta) + B$ یا $y = A\sin(a\theta) + B$

۳- سیکلوئیدی: $y = A\cos(a\theta) + B\theta + C$ یا $y = A\sin(a\theta) + B\theta + C$

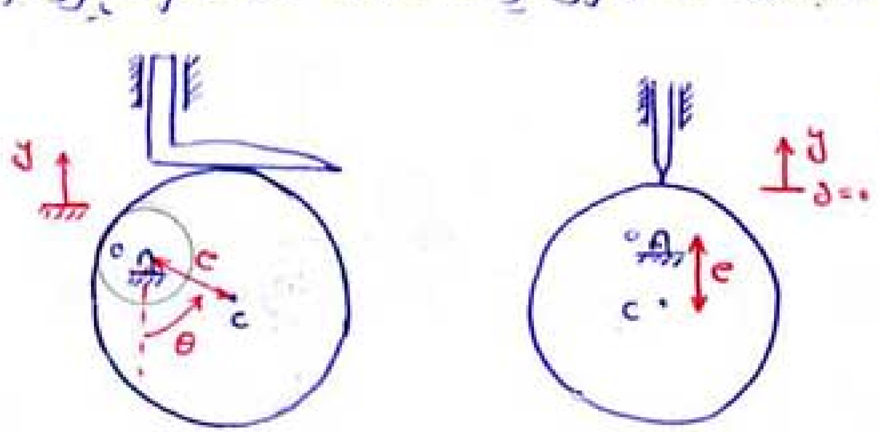
زاویه چرخش شده: θ

بیشترین تغییر مکان: h

زاویه بیشترین تغییر مکان: β

بادامک خارج از مرکز:

در این نوع بادامکها که به دلیل حذف برخی قطعات جانبی در ماشینها و کاهش فشار جانبی روی پیرو طراحی شده‌اند، مرکز دوران بادامک به اندازه e از مرکز دایره فاصله دارد. معادله حرکت پیرو عبارت است از



$$y = e(1 - \cos\theta)$$