

# دینامیک ماشین

مجموعه مهندسی مکانیک

مهندس عبدالحمید حنانه

مؤسسه آموزش عالی آزاد پارسه

پارسه



## مقدمه

مجموعه حاضر، مطالب اصلی درس دینامیک ماشین در دوره کارشناسی بوده و به منظور آمادگی برای شرکت در آزمون ورودی دوره کارشناسی ارشد و با تکیه بر اهمیت مطالب و توجه به سؤال‌های آزمون‌های گذشته تهیه گردیده است.

شش فصل اول به سازوکارهای صفحه‌ای اختصاص یافته که در فصل اول، حرکت‌شناسی آن‌ها با توجه به اجزای تشکیل دهنده، انواع و طبقه‌بندی آن‌ها، و آشنایی با مهم‌ترین سازوکارهای صفحه‌ای بررسی می‌شود. بحث درجه آزادی از حرکت‌شناسی سازوکارهای صفحه‌ای، با توجه به اهمیت آن و بر محور رابطه کوتزباخ، به صورت یک بحث مجزا در فصل دوم آورده شده است. در فصل سوم به روش‌های مختلف سرعت‌شناسی سازوکارهای صفحه‌ای پرداخته و با توجه به اهمیت بحث مراکز چرخش و سرعت‌شناسی سازوکارها با استفاده از این روش، فصل چهارم به این مهم اختصاص یافته است. در فصل پنجم شتاب‌شناسی سازوکارهای صفحه‌ای با استفاده از روش‌های تفکیک بردار شتاب به مؤلفه‌های مماسی، عمودی، جانب مرکز، متقاطع، کوریولی و غلتشی مورد بررسی قرار گرفته و با توجه به مشکلات تعیین مرکز انحنا مسیر نقاط مختلف بندهای یک سازوکار برای تعیین مقدار و جهت شتاب عمود بر مسیر، به عنوان آخرین راه‌گرایز از تئوری انحنا مسیر، سازوکارهای صفحه‌ای معادل که فقط شامل اتصالات مرتبه پایین باشند، در فصل ششم مورد بحث قرار گرفته‌اند.

پنج فصل بعدی به کاربرد دینامیک ماشین در اجزای متحرک ماشین‌ها اختصاص دارد. در فصل هفتم چرخ‌لنگر و نقش آن به عنوان تنظیم کننده نوسانات سرعت زاویه‌ای در ماشین‌ها به همراه طراحی سینماتیکی و سینتیکی آن مورد توجه قرار می‌گیرد. فصل هشتم به بحث ترازمندی اجرام چرخان پرداخته و به ترتیب، ترازمندی استاتیکی و دینامیکی تک جرم، دو جرم، اجرام هم‌صفحه، اجرام غیرهم‌صفحه، و اجرام پیوسته چرخان را مورد مطالعه قرار می‌دهد. در فصل نهم ابتدا شرایط تفکیک‌پذیری جرم شاتون به عنوان یک بند شناور با جرم پیوسته به دو جرم متمرکز در دو لولای انتهایی آن، بررسی شده و پس از محاسبه کمی شتاب پستون و نیروی لختی آن، به ترازمندی موتورهای احتراق داخلی چند سیلندر خطی به عنوان پسر کاربردترین موتورهای احتراق داخلی پرداخته می‌شود. در فصل دهم بادامک‌های صفحه‌ای و پیروهای مختلف، بنا نیم نگاهی به حرکات استاندارد آن‌ها آغاز شده و به عنوان یک مثال خاص و پرکاربرد، با بحث بادامک خارج از مرکز و پیرو کفشکی تخت و آرو به پایان می‌رسد. فصل یازدهم و آخرین فصل، به بررسی سینماتیکی مجموعه چرخ‌دنده‌های ساده، مرکب و منظومه‌ای در انواع صفحه‌ای و فضایی می‌پردازد.

بخش پیوست جزوه حاضر، شامل کلیه سؤال‌های آزمون‌های بیست سال گذشته، به تفکیک سال برگزاری آن‌ها است که به همراه پاسخ‌نامه و طبقه‌بندی موضوعی سؤال‌ها آورده شده است. امید است مجموعه حاضر مورد استفاده جویندگان علم و دانش قرار گیرد.

عبدالحمید حنانه

### فصل اول حرکت‌شناسی سازوکارهای صفحه‌ای

۹	تعاریف اولیه
۱۰	حرکت و انواع آن
۱۱	بند و انواع آن
۱۱	اتصالات سینماتیکی و انواع آن
۱۳	سازوکارها
۱۳	سازوکار چهار میله‌ای
۱۴	سازوکار لغزنده - لنگی
۱۵	سازوکار بیضی نگار متعامد
۱۵	سازوکار جنوا

### فصل دوم درجه آزادی سازوکارهای صفحه‌ای

۱۷	رابطه کوتزباخ
۱۸	کاهش مرتبه اتصالات سینماتیکی
۱۹	اتصالات سینماتیکی چندگانه
۲۰	درجه صلیبیت
۲۰	قیود زاید
۲۱	درجه آزادی و اتصالات تماس مستقیم و پوششی

### فصل سوم سرعت‌شناسی سازوکارهای صفحه‌ای

۲۳	مروری بر روابط کلی سرعت‌شناسی
۲۴	سینماتیک جسم صلب
۲۶	سینماتیک تماس مستقیم

## فصل چهارم مراکز چرخش در سازوکارهای صفحه‌ای

- ۲۹..... تعداد و انواع آن‌ها ..... مراکز چرخش
- ۳۰..... موقعیت مراکز چرخش ..... مراکز چرخش
- ۳۵..... سرعت‌شناسی با استفاده از مراکز چرخش ..... سرعت‌شناسی

## فصل پنجم شتاب‌شناسی سازوکارهای صفحه‌ای

- ۳۷..... مروری بر روابط کلی شتاب‌شناسی ..... مروری بر روابط کلی شتاب‌شناسی
- ۴۰..... سینماتیک جسم صلب ..... سینماتیک جسم صلب
- ۴۲..... سینماتیک تماس مستقیم ..... سینماتیک تماس مستقیم
- ۴۴..... شتاب غلتشی ..... شتاب غلتشی

## فصل ششم سازوکارهای صفحه‌ای معادل

- ۴۶..... سازوکارهای صفحه‌ای معادل

## فصل هفتم چرخ لنگر

- ۴۸..... کلیات ..... کلیات
- ۴۹..... معادلات حرکت، روابط کار و انرژی در چرخ لنگر ..... معادلات حرکت، روابط کار و انرژی در چرخ لنگر
- ۵۰..... ضریب تغییرات سرعت ..... ضریب تغییرات سرعت
- ۵۲..... طراحی ابعاد چرخ لنگر ..... طراحی ابعاد چرخ لنگر
- ۵۳..... تنش‌های ایجاد شده در چرخ لنگر ..... تنش‌های ایجاد شده در چرخ لنگر

## فصل هشتم ترازمندی اجرام چرخان

- ۵۵..... تعاریف اولیه ..... تعاریف اولیه
- ۵۶..... ترازمندی تک جرم چرخان ..... ترازمندی تک جرم چرخان
- ۵۷..... ترازمندی دو جرم چرخان ..... ترازمندی دو جرم چرخان
- ۵۹..... ترازمندی اجرام چرخان هم‌صفحه ..... ترازمندی اجرام چرخان هم‌صفحه
- ۶۰..... ترازمندی اجرام چرخان غیرهم‌صفحه ..... ترازمندی اجرام چرخان غیرهم‌صفحه
- ۶۳..... ترازمندی اجرام پیوسته ..... ترازمندی اجرام پیوسته

## فصل نهم ترازمندی اجرام آرو

- ۶۶..... مرکز ضربه ..... مرکز ضربه
- ۶۸..... شتاب پیستون در سازوکار لغزنده-لنگ ..... شتاب پیستون در سازوکار لغزنده-لنگ
- ۶۹..... ترازمندی موتورهای چند سیلندر خطی ..... ترازمندی موتورهای چند سیلندر خطی

## فصل دهم بادامک و پیرو

- ۷۳..... تعاریف اولیه ..... تعاریف اولیه
- ۷۵..... تابع موقعیت پیرو ..... تابع موقعیت پیرو
- ۷۸..... بادامک دایروی خارج از مرکز - پیرو کشکی تخت آور ..... بادامک دایروی خارج از مرکز - پیرو کشکی تخت آور

## فصل یازدهم مجموعه چرخ‌دنده‌ها

- ۷۹..... تعاریف اولیه ..... تعاریف اولیه
- ۸۰..... مجموعه چرخ‌دنده‌های معمولی - ساده ..... مجموعه چرخ‌دنده‌های معمولی - ساده

- ۸۰ ..... مجموعه چرخ‌دنده‌های معمولی - مرکب
- ۸۱ ..... مجموعه چرخ‌دنده‌های منظومه‌ای - صفحه‌ای
- ۸۴ ..... مجموعه چرخ‌دنده‌های منظومه‌ای - فضایی

### پیوست مجموعه سؤال‌های آزمون‌های گذشته

- ۸۶ ..... تعداد سؤال‌ها
- ۸۷ ..... توضیحات
- ۸۸ ..... فهرست موضوعی سؤال‌ها
- ۹۱ ..... آزمون کارشناسی ارشد - سال تحصیلی ۶۸/۶۷
- ۹۲ ..... آزمون کارشناسی ارشد - سال تحصیلی ۷۰/۶۹
- ۹۴ ..... آزمون کارشناسی ارشد - سال تحصیلی ۷۱/۷۰
- ۹۶ ..... آزمون کارشناسی ارشد - سال تحصیلی ۷۲/۷۱
- ۹۹ ..... آزمون کارشناسی ارشد - سال تحصیلی ۷۳/۷۲
- ۱۰۱ ..... آزمون کارشناسی ارشد - سال تحصیلی ۷۴/۷۳
- ۱۰۳ ..... آزمون کارشناسی ارشد - سال تحصیلی ۷۵/۷۴
- ۱۰۵ ..... آزمون کارشناسی ارشد - سال تحصیلی ۷۶/۷۵
- ۱۰۷ ..... آزمون کارشناسی ارشد - سال تحصیلی ۷۷/۷۶
- ۱۰۹ ..... آزمون کارشناسی ارشد - سال تحصیلی ۷۸/۷۷
- ۱۱۱ ..... آزمون کارشناسی ارشد - سال تحصیلی ۷۹/۷۸
- ۱۱۴ ..... آزمون کارشناسی ارشد - سال تحصیلی ۸۰/۷۹
- ۱۱۷ ..... آزمون کارشناسی ارشد - سال تحصیلی ۸۱/۸۰
- ۱۱۹ ..... آزمون کارشناسی ارشد - سال تحصیلی ۸۲/۸۱
- ۱۲۱ ..... آزمون کارشناسی ارشد - سال تحصیلی ۸۳/۸۲
- ۱۲۳ ..... آزمون کارشناسی ارشد - سال تحصیلی ۸۴/۸۳
- ۱۲۵ ..... آزمون کارشناسی ارشد - سال تحصیلی ۸۵/۸۴
- ۱۲۷ ..... آزمون کارشناسی ارشد - سال تحصیلی ۸۶/۸۵
- ۱۲۹ ..... آزمون کارشناسی ارشد - سال تحصیلی ۸۷/۸۶
- ۱۳۲ ..... پاسخ‌نامه سؤال‌های دینامیک ماشین

# فصل اول

## حرکت‌شناسی سازوکارهای صفحه‌ای

### تعاریف اولیه

- **دستگاه مختصات مرجع:** دستگاه مختصاتی است که حرکات اجسام نسبت به آن بررسی شده و برای نیروشناسی اجسام (و در نتیجه شتاب‌شناسی آنها)، باید فاقد هرگونه چرخش (و در نتیجه سرعت و شتاب چرخشی) بوده و مبدأ آن فاقد هرگونه شتابی باشد.
- **ذره مادی:** یک فرضیه ریاضی است که خواص هندسی یک نقطه را دارا بوده (یعنی حجم آن صفر بوده) و دارای جرم است.
- **جسم صلب:** مجموعه‌ای از ذرات مادی است که فاصله بین آن ذرات همواره ثابت بوده و به عبارت دیگر ذرات مادی آن تحرک داخلی ندارند. جسم صلب تحت تأثیر نیروهای خود متعادل، دچار تغییر شکل نمی‌شود. جسم صلب نیز یک فرضیه ریاضی بوده و وجود خارجی ندارد.
- **گستره طبیعی بدون جرم جسم صلب:** توسعه ریاضی یک جسم، تحت هندسه حاکم بر آن را گستره طبیعی آن گویند، مانند توسعه میان‌تار یک تیر به صورت ریاضی، که به یک خط که از دو سر تا بی‌نهایت ادامه دارد منجر شده و تحت تأثیر بارهای واقعی وارده، در ناحیه فیزیکی تیر خمیده شده و در ناحیه فرضی آن، حرکت جسم صلب خواهد داشت. به این ترتیب برای حرکات صفحه‌ای، گستره طبیعی جسم صلب، صفحه (یا صفحاتی موازی) خواهد بود که ابعاد آن از هر سو تا بی‌نهایت ادامه یافته و جز در نواحی مادی، فاقد جرم فرض می‌شود.
- **درجه آزادی:** تعداد پارامترهای مستقل یا تعداد حداقل پارامترهای لازم برای تعیین یا تبیین وضعیت یک جسم را درجه آزادی گویند. به این ترتیب، ذره مادی در حرکت صفحه‌ای، دو درجه آزادی ( $x$  و  $y$ ) و در حرکت فضایی، 3 درجه آزادی ( $x$ ،  $y$  و  $z$ ) خواهد داشت، همچنین جسم صلب در حرکت صفحه‌ای، 3 درجه آزادی ( $x$ ،  $y$  و  $\theta_z$ ) و در حرکت فضایی، 6 درجه آزادی ( $x$ ،  $y$ ،  $z$ ،  $\theta_x$ ،  $\theta_y$  و  $\theta_z$ ) دارد.

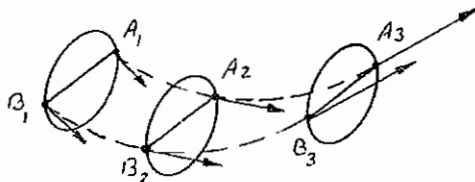
## حرکت و انواع آن:

- حرکت: تغییر وضعیت یک جسم (ذره مادی یا جسم صلب) نسبت به جسم دیگر در طی زمان را حرکت گویند.  
 - حرکت صفحه‌ای: هرگاه، هر یک از نقاط جسمی در تمام لحظات حرکت، در یک صفحه باقی بماند، حرکت را صفحه‌ای گویند که دو حالت خاص آن حرکت انتقالی و چرخشی است. در صورتی که حرکتی صفحه‌ای نباشد، فضایی است.

- حرکت انتقالی دایم: برای جسم صلب تعریف شده و حرکتی است صفحه‌ای که یکی از سه شرط زیر بر آن حاکم باشد:

(۱) سرعت همه نقاط جسم صلب نسبت به یک دستگاه مختصات واحد، در لحظه  $t$  برابر باشد، به عبارت دیگر برای همه نقاط جسم

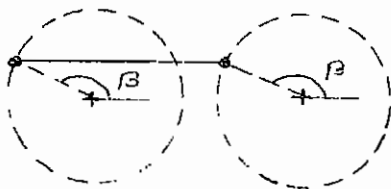
صلب، سرعت فقط تابعی از زمان باشد:  $\vec{V} = f(t)$ . (این شرط شامل حرکت انتقالی دایم و آنی است)  
 (۲) در تمام لحظات حرکت، هر خط مستقیم در جسم صلب به موازات وضعیت اولیه خود باقی بماند.



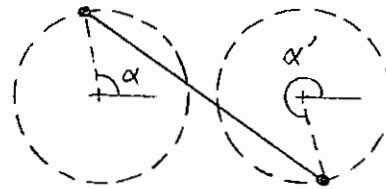
$$\overline{A_1B_1} \parallel \overline{A_2B_2} \parallel \overline{A_3B_3}$$

$$\vec{V}_A = \vec{V}_B = \vec{f}(t)$$

(۳) مسیر حرکت تمام نقاط جسم صلب، مشابه و هم‌زمان باشد، به این معنی که مسیر همه نقاط، یک منحنی بوده و در هر لحظه معین، روی موقعیت‌های متناظر از آن منحنی‌ها واقع گردند تا راستای بردار سرعت که مماس بر مسیر است برای همه نقاط یکسان باشد. اگر مسیر مذکور، خط باشد حرکت انتقالی را راست خط (مستقیم‌الخط) و در غیر این صورت خمیده‌خط (منحنی‌الخط) می‌نامند.



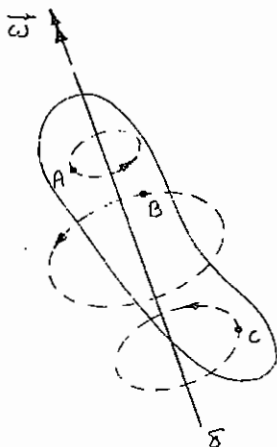
« مسیره‌های مشابه - هم‌زمان »  
 « حرکت انتقالی خمیده خط »



« مسیره‌های مشابه - غیرهم‌زمان »  
 « حرکت غیرانتقالی »

- حرکت چرخشی دایم: حرکتی است صفحه‌ای، که در آن فاصله هر نقطه از جسم صلب در تمام طول چرخه حرکت، از یک خط مستقیم (موسوم به محور چرخش) مقداری ثابت است. سرعت نقاطی از جسم صلب که بر روی محور چرخش قرار دارند صفر است.

\* توجه شود که در حالت کلی، جابه‌جایی محدود یک جسم صلب را می‌توان به یک انتقال و یک چرخش (بدون اثر ترتیب) تجزیه نمود. در جابه‌جایی نامحدود کوچک یک جسم صلب، می‌توان حرکت را به یک حرکت چرخشی آنی حول یک محور آنی چرخش، تعبیر نمود که در حرکت فضایی، سرعت نقاط جسم صلب واقع بر آن محور، در امتداد همان محور بوده و به سرعت پیچی (Screw Velocity) معروف است. در حرکت صفحه‌ای سرعت پیچی، صفر می‌باشد.





## بند و انواع آن

قطعه یا مجموعه‌ای از قطعات متصل به هم که دارای حرکت داخلی (حرکت نسبت به یکدیگر) نبوده و همگی با هم حرکت کنند، بند نامیده می‌شود که انواع آن عبارت است از:

- **بند پایه:** دستگاه مختصات مرجع به آن وصل بوده و حرکت سازوکار نسبت به آن تحلیل می‌شود.
- **بند ورودی:** معمولاً متصل به بند پایه بوده و کمیت‌های مکانیکی به آن وارد می‌شوند.
- **بند خروجی:** معمولاً متصل به بند پایه بوده و کمیت‌های مکانیکی از آن گرفته می‌شوند.
- **بند رابط:** بندهای واسطه، بین بند یا بندهای ورودی و خروجی را بند رابط گویند.

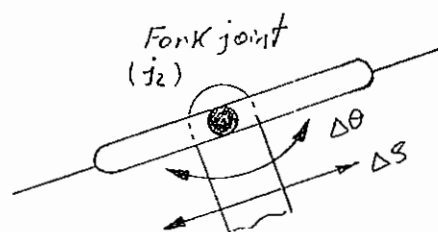
## اتصالات سینماتیکی و انواع آن:

ارتباط بندهای صلب در سازوکارهای صفحه‌ای، از طریق اتصالات سینماتیکی صفحه‌ای صورت می‌پذیرد که به دو گروه تقسیم می‌شوند:

۱) **اتصالات مرتبه پایین:** شامل لولا و لغزنده

۲) **اتصالات مرتبه بالا:** شامل اتصالات تماس مستقیم (غلتش خالص و غلتش همراه با لغزش) و اتصال پوششی

- **اتصال لولا:** با علامت اختصاری R (Revolute) نشان داده شده و از سه درجه آزادی یک بند نسبت به بند مجاور که به آن لولا شده، تنها یک درجه آزادی را باقی گذارده و دو درجه آزادی دیگر را سلب می‌نماید، به همین علت به آن اتصال ۱ز گویند. زیرنویس ۱ز معرف تعداد درجات آزادی باقی‌مانده است که در این مورد جابه‌جایی زاویه‌ای بوده و با  $\Delta\theta$  اندازه‌گیری می‌شود.
- **اتصال لغزنده:** با علامت اختصاری S (Slider) نشان داده شده و تنها یک درجه از سه درجه آزادی جسم صلب را باقی می‌گذارد. بنابراین آن نیز یک اتصال ۱ز بوده و درجه آزادی باقی‌مانده، جابه‌جایی خطی است که با  $\Delta S$  اندازه‌گیری می‌شود.
- **اتصال غلتش خالص:** با علامت اختصاری P.R. (Pure Rolling) نشان داده شده و تنها یک درجه آزادی از جسم صلب را باقی می‌گذارد که با زاویه چرخش ( $\Delta\theta$ ) یا جابه‌جایی روی طول قوس تماس ( $\Delta S$ ) اندازه‌گیری شده و چون این دو پارامتر به هم وابسته‌اند، این اتصال نیز از نوع ۱ز است.
- **اتصال غلتش همراه با لغزش:** با علامت اختصاری R.S. (Roll-Slide) نشان داده شده و دو درجه آزادی از جسم صلب را باقی گذارده که آن دو، یکی با زاویه چرخش ( $\Delta\theta$ ) و دیگری با جابه‌جایی روی طول قوس تماس ( $\Delta S$ ) اندازه‌گیری شده و چون این دو پارامتر مستقل از هم می‌باشند، این اتصال از نوع ۲ز است. یک حالت خاص از این اتصال که یک پین درون یک شیار، حرکت غلتش همراه با لغزش انجام می‌دهد، به نام اتصال چنگکی (Fork Joint) خوانده می‌شود:



- اتصال پوششی: با علامت اختصای W.P. (Wrapping Pair) نشان داده شده و یک سیم، تسمه، زنجیر یا هر عضو انعطاف پذیر، و بدون قابلیت تغییر طول می‌باشد که دو بند بدون تماس مستقیم را به هم وصل می‌کند. این اتصال یک درجه آزادی جسم صلب (حرکت در امتداد اتصال) را سلب نموده و دو درجه آزادی را باقی می‌گذارد که یکی از آنها چرخش جسم حول محل تماس اتصال و دیگری انتقال منحنی الخط (روی مسیر دایره) حول محل دیگر تماس اتصال می‌باشد. پس اتصال از نوع  $j_2$  بوده و با دو پارامتر مستقل  $\Delta\theta$  و  $\Delta S$  اندازه‌گیری می‌شود.

### جدول خلاصه اطلاعات اتصالات سینماتیکی صفحه‌ای

ردیف	نام اتصال	علامت اختصاری	نوع اتصال	مشخصه اندازه‌گیری
۱	لولا	R	$j_1$	$\Delta\theta$
۲	لغزنده	S	$j_1$	$\Delta S$
۳	غلتش خالص	P.R.	$j_1$	$\Delta\theta$ یا $\Delta S$
۴	غلتش همراه با لغزش	R.S.	$j_2$	$\Delta\theta$ و $\Delta S$
۵	پوششی	W.P.	$j_2$	$\Delta\theta$ و $\Delta S$

## سازوکارها:

مجموعه‌ای از بندهای (صلب) مرتبط به هم می‌باشد که کمیت‌های سینماتیکی (مانند حرکت، سرعت، شتاب و ...) را، طبق نظر طراح، از یک یا چند ورودی، به یک یا چند خروجی منتقل می‌نماید.

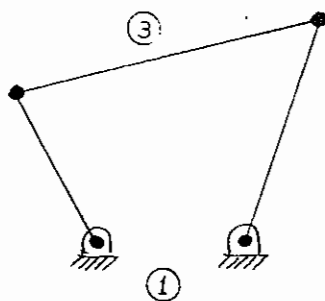
گرچه در سازوکارها، کمیت‌های سینماتیکی (مانند نیرو، گشتاور، کار، توان، انرژی و ...) نیز منتقل می‌شوند اما اولویت با انتقال کمیت‌های سینماتیکی است. اگر در سازوکاری اولویت با انتقال کمیت‌های سینماتیکی باشد، آن را ماشین می‌خوانند.

- **چرخه حرکت:** هنگامی که یک سازوکار در حین حرکت خود، تمامی وضعیت‌های ممکن را اختیار نموده و به وضعیت ابتدای حرکت خود باز گردد، گفته می‌شود که یک چرخه یا سیکل را طی کرده است.

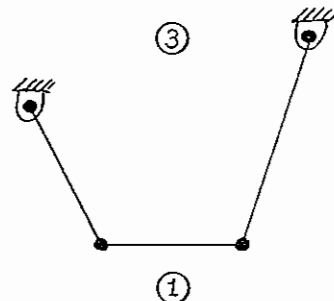
- **دوره تناوب:** زمان لازم برای طی یک چرخه حرکت را دوره تناوب گویند.

- **نمودار مرحله‌ای یا فاز (Phase):** موقعیت نسبی بندهای یک سازوکار، در هر لحظه از چرخه حرکت را یک نمودار مرحله‌ای یا فاز گویند.

- **وارونش سینماتیکی:** هر گاه دستگاه مختصات مرجع روی بند  $n$  نصب گردیده و حرکت دیگر بندها نسبت به آن بررسی شود، سازوکار جدید را، وارونش  $n$  ام سازوکار اصلی می‌خوانند، مثلاً در شکل زیر، وارونش سوم سازوکار چهار میله‌ای ترسیم شده است:



« سازوکار اصلی »



« وارونش سوم »

## سازوکار چهار میله‌ای (Four Bar Linkage):

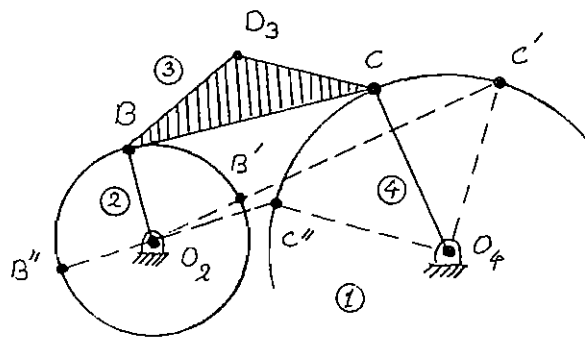
- از لولا کردن متوالی چهار بند صلب، به‌طوری که تشکیل یک حلقه بسته دهند، به‌دست می‌آید که با نصب دستگاه مختصات مرجع بر روی یکی از بندها، آن بند، بند پایه (شماره 1) خوانده شده و دو بند مجاور آن بندهای ورودی (شماره 2) و خروجی (شماره 4) نامیده شده و بند رابط بین آن دو بند شماره 3 خواهد بود.

- اگر بلندترین بند،  $l$ ، کوتاه‌ترین،  $s$  و دو بند دیگر  $p$  و  $q$  نامیده شوند، با فرض برقراری شرط  $l + s \leq p + q$  ممکن است بند ورودی بتواند چرخش کامل داشته باشد در غیراین‌صورت، هیچ‌کدام از بندهای ورودی یا خروجی نمی‌توانند چرخش کامل داشته باشند.

- اگر شرط  $l + s = p + q$  برقرار باشد، آن‌گاه در یک وضعیت خاص همه بندهای سازوکار در امتداد بند شماره یک هم راستا می‌شوند که به این وضعیت، نقطه دگرگونی (Change Point) گویند. سازوکار می‌تواند از این وضعیت به وضعیت حلقه باز (Open) یا حلقه متقاطع (Crossed) تغییر وضعیت بدهد که دو سازوکار مختلف با دو سینماتیک مختلف می‌باشند.

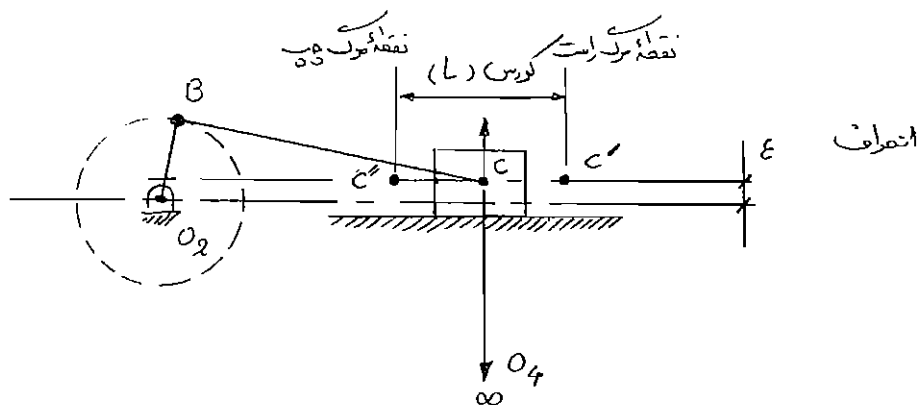
- هرگاه بندهای ورودی و رابط هم‌راستا شوند، آن‌گاه سازوکار در وضعیتی قرار می‌گیرد که به آن نقطه مرده (Dead Point) گویند. (اصطلاح نقطه مرگ بیش‌تر رایج شده است) در این حالت بند خروجی تحت شرایط سکون آبی قرار گرفته و سرعت همه نقاط آن صفر می‌شود، اگر شتاب آن نقاط نیز صفر شود، بند خروجی برای همیشه در همان وضعیت باقی خواهد ماند. اما در موارد کلی شتاب آن نقاط غیرصفر بوده و بند خروجی و در نتیجه سازوکار به حرکت خود ادامه خواهد داد.

هر نقطه دلخواهی از بند شماره 3 یا گستره طبیعی بدون جرم آن (مثلاً D) را، نقطه رابط گویند که مسیر حرکت آن، منحنی نقطه رابط خوانده شده و در کلی‌ترین حالت، یک منحنی درجه 6 است، جز نقاط B و C که مسیر آن‌ها دایره‌هایی با مراکز  $O_2$  و  $O_4$  می‌باشد.



### سازوکار لغزنده - لنگ (Slider-Crank Mechanism):

- در سازوکار چهار میله‌ای، هرگاه طول بند 4 بزرگ‌تر شود، یعنی نقطه  $O_4$  از C دورتر شود، آن‌گاه شعاع انحنای مسیر نقطه  $C_4$  که قوسی از دایره‌ای به مرکز  $O_4$  است، بزرگ‌تر شده و اگر  $O_4$  به بی‌نهایت دور منتقل شود یا به عبارت دیگر طول بند 4 به سمت بی‌نهایت افزایش یابد، آن‌گاه مسیر نقطه  $C_4$  به یک پاره خط راست تبدیل شده و می‌توان به جای بند 4 یک لغزنده قرارداد. این سازوکار برای تبدیل حرکت دورانی به انتقالی و برعکس مورد استفاده قرار می‌گیرد:



- فاصله مرکز لولای ثابت  $O_2$  تا امتداد حرکت پیستون را انحراف نامیده و آن را با  $\epsilon$  نشان می‌دهند.

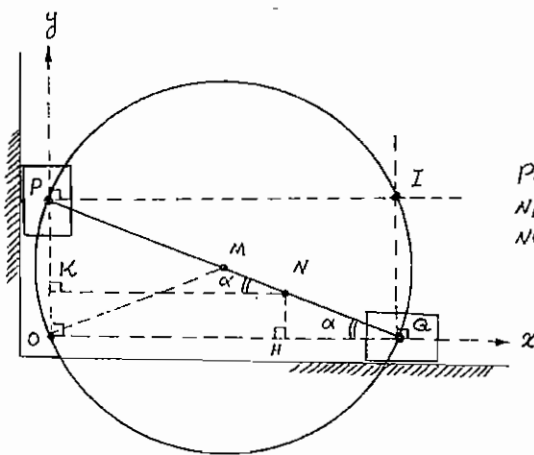
- وضعیت نقطه مرگ هنگامی رخ می‌دهد که بند 2 و 3 هم‌راستا شوند، که در حالت جمع طول بندهای 2 و 3  $(l_2 + l_3)$ ، نقطه  $C'$  (نقطه مرگ راست یا بالا) و در حالت تفریق طول بندهای 2 و 3  $(l_3 - l_2)$ ، نقطه  $C''$  (نقطه مرگ چپ یا پایین) به دست می‌آید.

- وضعیت دیگرگونی، هنگامی رخ می‌دهد که  $|\ell_3 - \ell_2| = \epsilon$  بوده و بندهای 2 و 3 هم‌راستا شوند.

### سازوکار بیضی نگار متعامد (Elliptic Trammel):

- در واقع یک سازوکار چهار میله‌ای است که طول بندهای 2 و 4 آن به سمت بی‌نهایت میل کرده و بنابراین در محل اتصال با بند 3 به لغزنده تبدیل شده‌اند. نقطه O از تقاطع امتداد مسیر نقاط P و Q از بند 3 و نقطه I از تقاطع امتداد عمودهای وارد بر خطوط فوق در نقاط P و Q حاصل می‌شود. از چهار نقطه P، Q، O، I یک دایره (C) عبور می‌کند که در تمام طول چرخه حرکت، قطر دایره (PQ) ثابت باقی می‌ماند.

- نقطه منحصر به فرد M که مرکز دایره مذکور است دایره‌ای به مرکز O و شعاع OM رسم می‌کند.  
 - نقاطی از جسم صلب 3 یا گستره طبیعی آن، که روی دایره C قرار دارند، پاره خطی به طول دو برابر PQ (که وسط آن خط، نقطه O است) رسم می‌کنند. (از جمله نقاط P و Q)  
 - تمام نقاط جسم صلب 3 یا گستره طبیعی آن که درون یا بیرون دایره قرار دارند، بیضی‌هایی به مرکز O ترسیم می‌کنند.  
 - هر گاه بند رابط 3 به صورت افقی یا عمودی قرار گیرد، سرعت یکی از لغزنده‌ها صفر شده و سازوکار در وضعیت مرگ قرار می‌گیرد.



$$\Delta NHQ : \sin \alpha = \frac{NH}{NQ} = \frac{y_N}{b}$$

$$\Delta NKP : \cos \alpha = \frac{NK}{NP} = \frac{x_N}{a}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x_N}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_N}{b}\right)^2 = 1$$

معادله بیضی:

$$a = b = \frac{l_3}{2} \Rightarrow x_M^2 + y_M^2 = \left(\frac{l_3}{2}\right)^2$$

با ضرب دو طرف در  $a^2 b^2$  خواهیم داشت:

$$b^2 x_N^2 + a^2 y_N^2 = a^2 b^2$$

اکنون با قرار دادن  $N = P$  خواهیم داشت:

$$N = P \Rightarrow a = 0 \Rightarrow b^2 x_N^2 = 0 \Rightarrow x_N = 0 \text{ (معادله محور y)}$$

هم‌چنین با قرار دادن  $N = Q$  خواهیم داشت:

$$N = Q \Rightarrow b = 0 \Rightarrow a^2 y_N^2 = 0 \Rightarrow y_N = 0 \text{ (معادله محور x)}$$

### سازوکار چرخ جنوا (Geneva Wheel Mechanism):

سازوکار چرخ جنوا برای تبدیل حرکت چرخشی پیوسته (بند 2) به حرکت چرخشی گسسته (بند 4) مورد استفاده قرار می‌گیرد. روی بند ورودی یک پین برآمده P در شعاع  $O_2P$  نصب گردیده و در روی بند خروجی نیز تعداد n شیار (معمولاً 4 یا 6 عدد) ایجاد شده و با حرکت چرخشی بند 2، پین P در وضعیتی که سرعت آن در امتداد شیار است، وارد شیار شده و آن را به اندازه  $\frac{2\pi}{n}$  چرخانده و از شیار خارجی می‌شود. سرعت زاویه‌ای بند خروجی در ابتدا و انتهای درگیری صفر بوده اما سرعت نسبی پین نسبت به شیار، مقدار

حداکثر خود را دارد. وقتی که پین P روی خط بین مراکز قرار گیرد، سرعت زاویه‌ای بند خروجی حداکثر شده و سرعت نسبی پین P نسبت به شیار، به صفر می‌رسد. رابطه سرعت‌های زاویه‌ای دو بند با فرمول زیر به دست می‌آید:

$$\omega_3 = \frac{(k^2 - k \sin \theta_2) \omega_2}{k^2 - 2k \sin \theta_2 + 1} \quad k = \frac{a}{O_2 O_4}$$

اگر  $n = 4 \Rightarrow O_2 P = a \Rightarrow O_2 O_4 = \sqrt{2} a \Rightarrow k = \frac{\sqrt{2}}{2}$

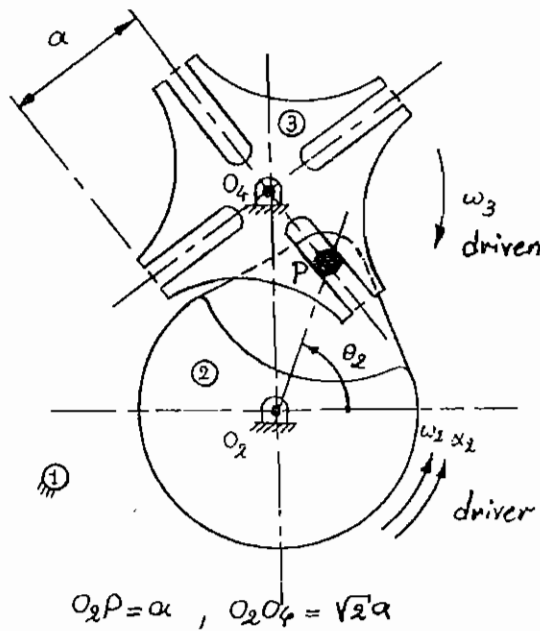
$$\Rightarrow \omega_3 = \omega_2 \frac{1 - \sqrt{2} \sin \theta_2}{3 - 2\sqrt{2} \sin \theta_2}$$

$$\theta_2 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \sin \theta_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \omega_3 = 0$$

$$\theta_2 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin \theta_2 = 1 \Rightarrow \omega_3 = \frac{1 - \sqrt{2}}{3 - 2\sqrt{2}} \omega_2 = -(1 + \sqrt{2}) \omega_2$$

علامت منفی به علت آن است که  $\omega_2$  و  $\omega_3$  در جهت عکس یکدیگر می‌باشند:

$$|\omega_3| = (\sqrt{2} + 1) |\omega_2|$$



## فصل دوم

### درجه آزادی سازوکارهای صفحه‌ای

#### رابطه کوتزباخ

درجه آزادی یک سازوکار، عبارت است از تعداد حداقل پارامترها یا پارامترهای مستقل، که برای تعیین وضعیت بندهای یک سازوکار نسبت به بند پایه، مورد نیاز می‌باشند. با کنترل این پارامترهای مستقل ورودی، می‌توان کل سازوکار را در یک وضعیت مشخص قرار داد. درجه آزادی یک سازوکار صفحه‌ای را می‌توان با استفاده از تعداد بندها و تعداد و نوع اتصالات به کار رفته در آن تعیین نمود. به این منظور از رابطه زیر که به رابطه Kutzbach معروف است، استفاده می‌شود:

$$F = 3(n - 1) - 2f_1 - f_2$$

که در آن:

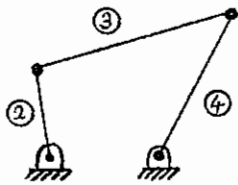
$F$ : درجه آزادی سازوکار

$n$ : تعداد بندهای سازوکار

$f_k$ : تعداد اتصالات نوع  $k$ ز

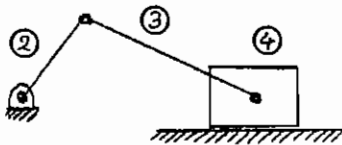
$k = 1$  و  $2$

برای مثال، سازوکارهای چهارمیله‌ای زیر را در نظر بگیرید:



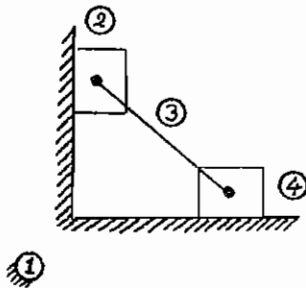
$$n = 4, f_1 = 4(\text{لولا}), f_2 = 0$$

$$F = 3(4 - 1) - 2 \times 4 = 9 - 8 = 1$$



$$n = 4, f_1 = 3(\text{لولا}) + 1(\text{لغزنده}) = 4, f_2 = 0$$

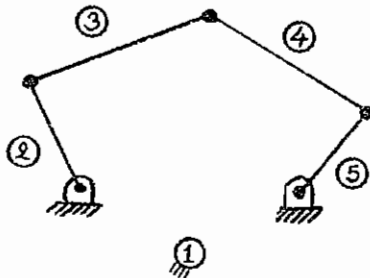
$$F = 3(4 - 1) - 2 \times 4 = 9 - 8 = 1$$



$$n = 4, f_1 = 2(\text{لولا}) + 2(\text{لغزنده}) = 4, f_2 = 0$$

$$F = 3(4 - 1) - 2 \times 4 = 9 - 8 = 1$$

برای سازوکار پنج میله‌ای زیر می‌توان نوشت:



$$n = 5, f_1 = 5(\text{لولا}), f_2 = 0$$

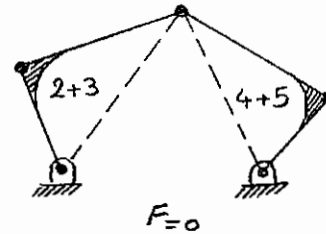
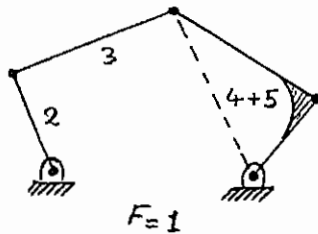
$$F = 3(5 - 1) - 2 \times 5 = 12 - 10 = 2$$

یعنی برای آن که بتوان سازوکار را در یک وضعیت مشخص قرار داد، وضعیت دو بند سازوکار می‌بایست معلوم باشد. یا به عبارت دیگر سازوکار باید دو ورودی داشته باشد، مثلاً بندهای 2 و 5.

## کاهش مرتبه اتصالات سینماتیکی

هر گاه درجه اتصال بین دو عضو پیایی یک سازوکار، یک درجه کاسته شود (مثل تبدیل اتصال چنگکی به لولا و سپس تبدیل آن به اتصال جوش یا تبدیل اتصال غلتش همراه با لغزش به اتصال غلتش خالص و سپس تبدیل آن به اتصال جوش)، آن گاه از تعداد درجات آزادی آن سازوکار، یک واحد کاسته خواهد شد. این عمل می‌بایست آن قدر تکرار شود تا سازوکار به یک سازه تبدیل گردد، در این صورت درجه آزادی سازوکار برابر تعداد عمل کاهش مرتبه اتصالات آن خواهد بود. در مورد سازوکار پنج میله‌ای، قفل کردن بند 4 و 5 به یکدیگر، یک سازوکار چهار میله‌ای ایجاد می‌کند، که قادر به حرکت است. با قفل کردن بندهای 4 و 3 یا قفل کردن بندهای 3 و 2، حرکت سازوکار سلب شده و به یک سازه بدل می‌شود. پس سازوکار پنج میله‌ای یک سازوکار دو درجه آزادی است.

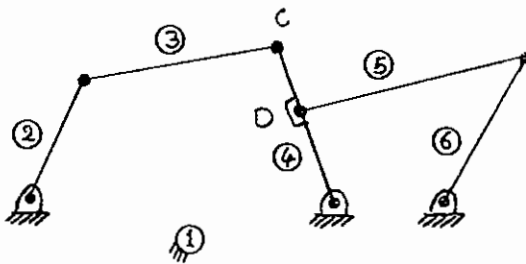




در مورد اتصال غلتش همراه با لغزش، یا اتصال چنگکی، به جای عمل قفل کردن، در مرحله اول باید اتصال را به لولا تبدیل نموده و در مرحله بعد دو بند را به هم قفل نمود که در این حالت طی دو مرحله، دو درجه آزادی از سازوکار سلب می‌شود.

### اتصالات سینماتیکی چندگانه

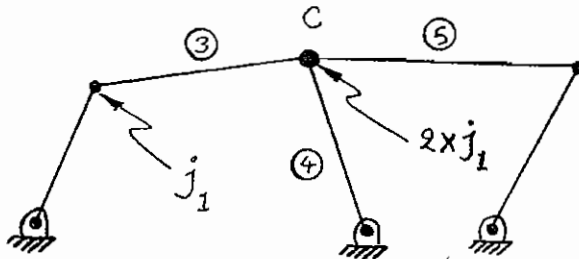
برای سازوکارهای شش میله‌ای نوع اول می‌توان نوشت:



$$n = 6, f_1 = 7, f_2 = 0$$

$$F = 3(6 - 1) - 2 \times 7 = 1$$

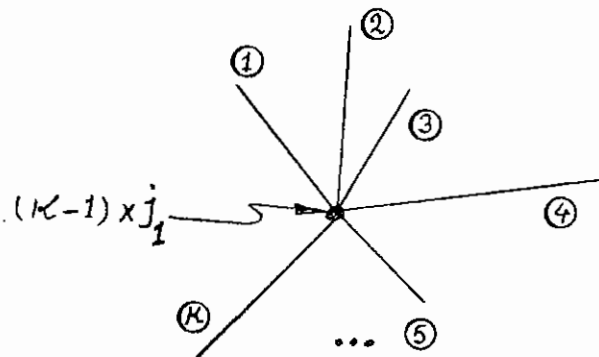
در مثال فوق، هرگاه لولای D بر لولای C منطبق شود، ظاهراً از تعداد لولاها یکی کاسته شده، اما در قابلیت تحرک سازوکار تغییری حاصل نگردیده و همچنان دارای یک درجه آزادی است. علت آن است که در واقع لولای C سه عضو 3، 4 و 5 را به یکدیگر متصل نموده و بنابراین دو لولا یا به عبارت دیگر یک لولای مضاعف محسوب می‌شود.



$$n = 6, f_1 = 6 \text{ (لولای ساده)} + 1 \text{ (لولای مضاعف)} = 7, f_2 = 0$$

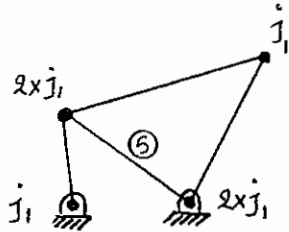
$$F = 3(6 - 1) - 2 \times 7 = 1$$

به طور کلی هرگاه، k بند در یک نقطه لولا شده باشند، آن لولا، یک لولای چندگانه خوانده شده و معادل (k-1) لولای ساده است.



## درجه صلبیت

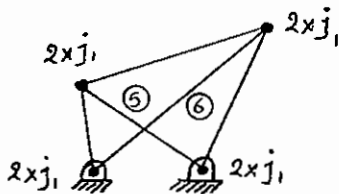
می‌توان از رابطه کوترباخ برای تعیین درجه صلبیت سازه‌ها نیز استفاده نمود. مثلاً برای سازه‌های زیر می‌توان نوشت:



با افزایش میله 5 به سازوکار چهار میله‌ای:

$$n = 5, f_1 = 6, f_2 = 0$$

$$F = 3(5 - 1) - 2 \times 6 = 12 - 12 = 0 \quad (\text{سازه معین})$$



با افزایش میله 5 و 6 به سازوکار چهار میله‌ای:

$$n = 6, f_1 = 8, f_2 = 0$$

$$F = 3(6 - 1) - 2 \times 8 = 15 - 16 = -1 \quad (\text{سازه نامعین (یک درجه فوق صلب)})$$

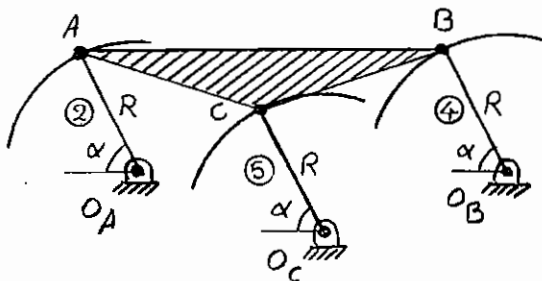
در مورد اول، با قطع یک بند (2, 3, 4 یا 5) سازه فرو خواهد ریخت،

اما در مورد دوم با قطع دو بند (مثلاً 5 و 6 یا 2 و 4) سازه فرو می‌ریزد.

همان‌طور که دیده می‌شود، به علت افزوده شدن یک میله، سه درجه آزادی اضافه و به علت افزوده شدن دو لولا، چهار درجه آزادی کاسته می‌شود، پس با افزودن هر میله دو سر لولا، یک درجه آزادی از سازوکار کاسته خواهد شد، بنابراین درجه آزادی سازوکار چهار میله‌ای با افزودن میله 5 به صفر و با افزودن میله 6 به (-1) کاهش می‌یابد.

## قیود زاید

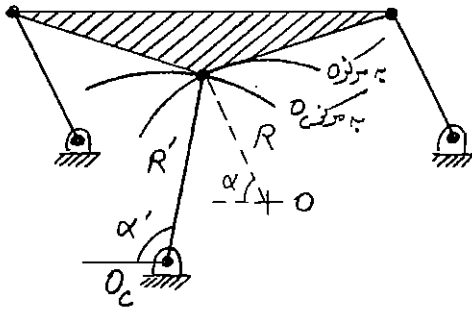
ذکر این نکته ضروری است که رابطه کوترباخ یک رابطه جبری بوده و مشخصات هندسی سازوکار در آن دخالتی ندارند، به همین علت گاه ممکن است در تعیین درجه آزادی ایجاد مشکل نماید. مثلاً در سازوکار چهار میله‌ای متوازی الاضلاع، چون حرکت بند رابط 3 یک حرکت انتقالی است، بنابراین مسیر حرکت همه نقاط این بند دایره‌ای به شعاع R می‌باشد. افزودن هر نوع قیدی به سازوکار که سبب گردد مسیر نقطه‌ای از بند رابط همین دایره باشد، یک قید زاید بوده و قابل حذف است. مثلاً بند 5 در سازوکار زیر سبب می‌شود نقطه C روی مسیر اولیه خود (در حالتی که بند 5 وجود نداشته) باقی بماند، بنابراین وجود بند 5 زاید بوده و قابل حذف است. در صورت باقی گذاشتن بند 5 درجه آزادی سازوکار، صفر می‌شود که غیرواقعی است. پس برای تعیین درجه آزادی باید بند 5 و یا 2 و یا 4 را حذف نمود.



$$n = 5, f_1 = 7, f_2 = 0$$

$$F = 3(5 - 1) - 2 \times 7 = 0 \quad (\text{غیرواقعی})$$

اما در صورتی که بند 5 کمی بلندتر یا کوتاه‌تر باشد  $(R \pm \epsilon)$  یا زاویه  $\alpha$  کمی کمتر یا بیشتر باشد  $(\alpha \pm \epsilon)$ ، آن‌گاه نقطه C به علت واقع شدن روی بند رابط 3، روی مسیر دایره‌ای حرکت می‌کند که با مسیر دایره دیکته شده توسط بند 5 (به شعاع  $R'$  و مرکز  $O_C$ ) متفاوت بوده و چون یک نقطه واحد نمی‌تواند روی دو دایره مختلف حرکت کند، پس سازوکار قفل می‌شود.

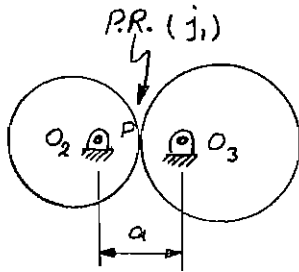


$$n = 5, f_1 = 6, f_2 = 0$$

$$F = 3(5 - 1) - 2 \times 6 = 0 \text{ (واقعی)}$$

### درجه آزادی و اتصالات تماس مستقیم و پوششی

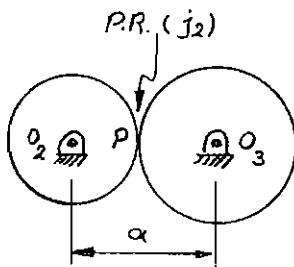
برای سازوکارهای تماس مستقیم از نوع غلتش خالص در صورتی که هر دو بند غلتان، روی بند سومی لولا شده باشند و در تمام طول چرخه حرکت، همواره جمع شعاع‌های تماس، برابر فاصله بین مراکز دو بند باشد، آن‌گاه یکی از لولاهای قید زاید بوده و می‌توان بدون آن که خللی در نحوه حرکت سازوکار پدید آید، آن را به یک اتصال چنگکی کاهش داد. توجه به مثال‌های زیر می‌تواند مفید باشد.



در شکل، اگر چه در این لحظه شرط  $O_2P + O_3P = a$  برقرار است، اما در بقیه چرخه حرکت به علت خارج از مرکز بودن لولاهای  $O_2$  و  $O_3$ ، این شرط برقرار نبوده و می‌توان نوشت:

$$n = 3, f_1 = 2(\text{لولاهای}) + 1(\text{غلتش خالص}) = 3, f_2 = 0$$

$$F = 3(3 - 1) - 2 \times 3 = 0 \text{ (سازوکار قفل است)}$$



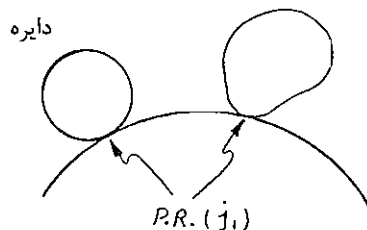
و در این حالت، چه در این لحظه و چه در تمام طول چرخه حرکت، شرط  $O_2P + O_3P = a$  برقرار بوده و می‌توان نوشت:

$$n = 3, f_1 = 2(\text{لولاهای}) + 1(\text{اتصال چنگکی جایگزین}), f_2 = 1$$

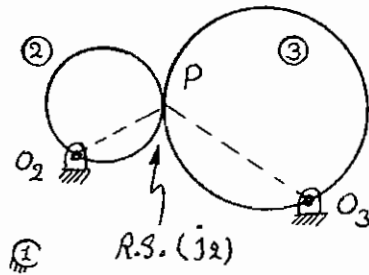
$$F = 3(3 - 1) - 2 \times 2 - 1 = 1 \text{ (سازوکار دارای یک درجه آزادی است)}$$

توجه شود در صورتی که دو بند، روی بند سومی لولا نشوند، در هر صورت اتصال از نوع 1 فرض می‌شود.

پروفیل غیر مشخص



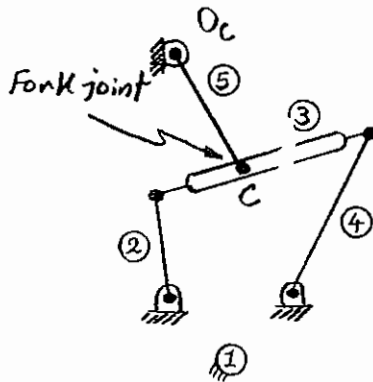
برای تماس غلتش همراه با لغزش، همواره اتصال، جز فرض می‌شود. اتصال چنگکی نیز یک اتصال غلتش همراه با لغزش (ج<sub>۲</sub>) محسوب می‌گردد:



$$n = 3, f_1 = 2 \text{ (لولا)}, f_2 = 1 \text{ (غلتش همراه با لغزش)}$$

$$F = 3(3-1) - 2 \times 2 - 1 = 1$$

برای سازوکار پنج میله‌ای شامل اتصال مرتبه بالای چنگکی:



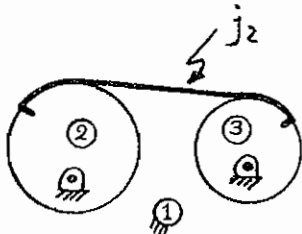
$$n = 5, f_1 = 5 \text{ (لولا)}, f_2 = 1$$

$$F = 3(5-1) - 2 \times 5 - 1 = 12 - 10 - 1 = 1$$

سازوکار چهار میله‌ای دارای یک درجه آزادی بوده و با افزودن میله 5، درجه آزادی آن 3 واحد افزایش می‌یابد، اما لولای O<sub>C</sub>، 2 درجه و اتصال C، 1 درجه آزادی را کاهش داده، بنابراین درجه آزادی سازوکار همان یک درجه باقی می‌ماند:

$$F = 1 + 3 - 2 - 1 = 1$$

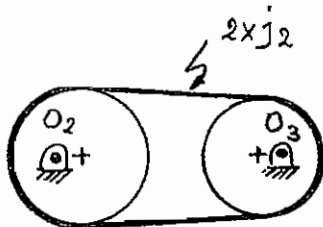
در مورد اتصالات پوششی، اگر اتصال پوششی به صورت یک حلقه بسته، k بند متمایز دیگر را پوشش دهد، یک اتصال چندگانه ج<sub>۲</sub> × k محسوب شده و اگر شرایط به گونه‌ای باشد که ثابت ماندن طول میان‌تار اتصال پوششی در تمام چرخه حرکت تضمین شود، اتصال پوششی مذکور یک اتصال چندگانه (k-1) × ج<sub>۲</sub> خواهد بود. توجه به مثال‌های زیر مسئله را روشن‌تر خواهد کرد:



$$n = 3, f_1 = 2 \text{ (لولا)}, f_2 = 1 \text{ (اتصال پوششی)}$$

$$F = 3(n-1) - 2 \times 2 - 1 = 1$$

و در شکل زیر، از آن‌جا که تسمه پوشش دهنده یکبار بند 2 را به بند 3 وصل کرده و یکبار هم بند 3 را به بند 2 متصل نموده، این اتصال یک اتصال مضاعف ج<sub>۲</sub> × 2 محسوب می‌شود.



$$n = 3, f_1 = 2 \text{ (لولا)}, f_2 = 1 \text{ (اتصال پوششی مضاعف)} = 2$$

$$F = 3(n-1) - 2 \times 2 - 2 \times 1 = 6 - 4 - 2 = 0$$

پس سازوکار قفل بوده و نمی‌تواند حرکت کند، زیرا چرخش بند 2 سبب چرخش بند 3 خواهد شد و برای این منظور می‌بایست طول تسمه افزایش یابد، که طول اتصال پوششی (در میان‌تار) ثابت فرض می‌شود، بنابراین حرکت بند 2 غیرممکن خواهد بود.

اما اگر لولاهای O<sub>2</sub> و O<sub>3</sub> در مراکز چرخ‌تسمه‌ها واقع شوند، آن‌گاه حرکت بندهای 2 و 3، مستلزم تغییر طول میان‌تار تسمه نبوده و حرکت سازوکار ممکن خواهد بود. در این حالت یک شاخه از اتصال پوششی قید اضافه بوده و باید حذف شود. به این ترتیب اتصال پوششی، یک اتصال ساده ج<sub>۲</sub> فرض می‌شود.

$$n = 3, f_1 = 2 \text{ (لولا)}, f_2 = 1 \text{ (اتصال پوششی ساده)}$$

$$F = 3(3-1) - 2 \times 2 - 1 = 6 - 4 - 1 = 1$$

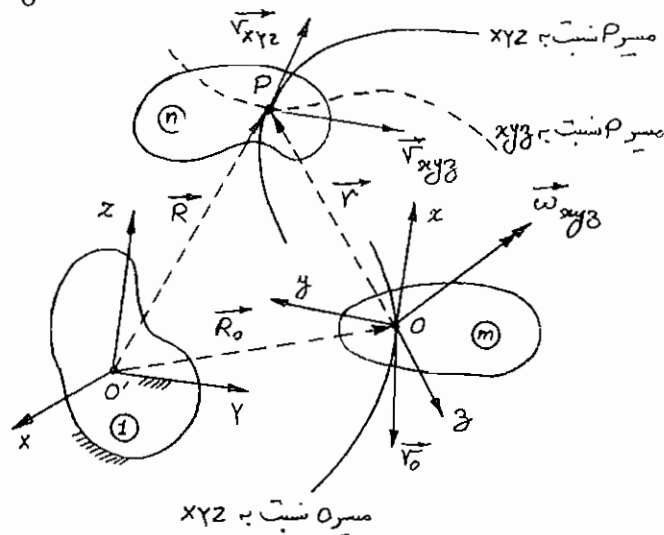
# فصل سوم

## سرعت‌شناسی سازوکارهای صفحه‌ای

مروری بر روابط کلی سرعت‌شناسی

معادله عمومی رابطه سرعت‌ها در دستگاه مختصات موضعی (xyz) و مرجع (XYZ) عبارت است از:

$$\vec{V}_{XYZ} = \vec{V}_{xyz} + (\vec{\omega}_{xyz} \times \vec{r}) + \vec{V}_O$$



که در آن:

$\vec{V}_{XYZ}$ : سرعت نقطه P نسبت به دستگاه XYZ (یا سرعت مطلق  $\vec{V}_{Abs}$ )

$\vec{V}_{xyz}$ : سرعت نقطه P نسبت به دستگاه xyz (یا سرعت نسبی  $\vec{V}_{Rel}$ )

$\vec{V}_O$ : سرعت مبدأ دستگاه مختصات xyz (یا سرعت انتقالی  $\vec{V}_{Trans}$ )

$\vec{\omega}_{xyz} \times \vec{r}$ : سرعت چرخشی (یا سرعت موضعی  $\vec{V}_{Rot}$ )

سرعت انتقالی  $\vec{V}_O$  نسبت به دستگاه XYZ غیرمشهود و سرعت چرخشی  $\vec{\omega} \times \vec{r}$  نسبت به هر دو دستگاه XYZ و XYZ غیرمشهود بوده و جمع این دو سرعت، سرعت کششی یا سرعت جای پا خوانده می‌شود:

$$\vec{V}_T = \vec{V}_O + \vec{\omega}_{xyz} \times \vec{r}$$

باید توجه داشت که در معادله سرعت‌ها، مقدار کلیه پارامترهایی که شامل مشتقات مرتبه اول هستند مجهول بوده، اما به علت معلوم بودن مسیرها، راستای سرعت‌های مشهود که مماس بر مسیر خود هستند، معلوم می‌باشند:

$$\vec{V} = V \vec{e}_t = \frac{ds}{dt} \vec{e}_t \quad \text{معلوم: } \vec{e}_t \text{ و مجهول: } \frac{ds}{dt}$$

از این پس، از دو علامت بر روی هر بردار مثل بردار  $\vec{A}$  استفاده می‌شود که علامت سمت چپ مربوط به مقعر جبری و علامت سمت راست مربوط به راستای بردار می‌باشد و نیز از علامت  $(\checkmark)$  برای مشخصه‌های معلوم و از علامت دایره کوچک (o) برای مشخصه‌های مجهول استفاده خواهد شد.

بنابراین معادله عمومی سرعت‌ها برای حرکات صفحه‌ای به شکل زیر نوشته خواهد شد:

$$\vec{V}_{XYZ} = \vec{V}_{xyz} + \vec{\omega}_{xyz} \times \vec{r} + \vec{V}_O$$

- چون حرکت صفحه‌ای است بردار  $\vec{\omega}$  بر صفحه حرکت عمود بوده و راستای آن معلوم است.
- راستای سرعت‌های مطلق و نسبی به علت معلوم بودن راستای مماس بر مسیر معلوم است.
- راستا و مقدار سرعت  $\vec{V}_O$  می‌بایست معلوم باشد، در غیر این صورت مسئله قابل حل نیست.

با این حال معادله برداری فوق که در حرکت صفحه‌ای، معادل دو معادله جبری است، دارای سه مجهول (مقدار سرعت مطلق، مقدار سرعت نسبی و مقدار سرعت زاویه‌ای دستگاه موضعی) بوده و غیر قابل حل است. با استفاده از دو حالت خاص می‌توان یکی از مجهول‌ها را حذف نموده و دو معادله - دو مجهول باقی‌مانده را حل نمود.

## سینماتیک جسم صلب

### اختلاف سرعت (غیر مشهود) بین دو نقطه متمایز از یک جسم صلب

در صورتی که دستگاه مختصات موضعی XYZ، بر روی یک نقطه مناسب از جسم n نصب شود، آن‌گاه، نقطه P نسبت به دستگاه موضعی XYZ فاقد حرکت بوده و مؤلفه سرعت نسبی  $\vec{V}_{xyz}$  برابر صفر شده و یک مجهول حذف می‌شود، پس می‌توان نوشت:

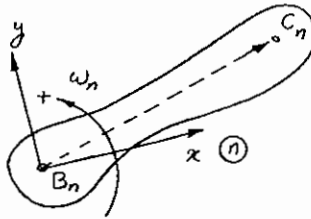
$$\vec{V}_{XYZ} = \vec{V}_{xyz} + \vec{\omega}_{xyz} \times \vec{r} + \vec{V}_O$$

0

و یا به شکل جدید آن:

$$\vec{V}_{P_n} = \vec{V}_{O_n} + \vec{\omega}_n \times \vec{OP}$$

این رابطه برای هر دو نقطه دلخواه مانند نقاط B و C از جسم صلب n معتبر است:



$$\vec{V}_{C_n} = \vec{V}_{B_n} + \vec{\omega}_n \times \overline{BC}$$

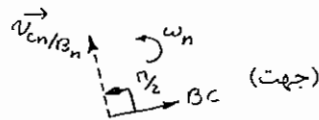
$$\vec{V}_{C_n/B_n} = \vec{V}_{C_n} - \vec{V}_{B_n} = \vec{\omega}_n \times \overline{BC}$$

سرعت نسبی بین نقاط B<sub>n</sub> و C<sub>n</sub> غیرمشهود بوده و از نظر مقدار نیز بستگی به موقعیت نقطه B<sub>n</sub> دارد. از این رو با علامت  $\vec{V}_{C_n/B_n}$  نشان داده می‌شود:

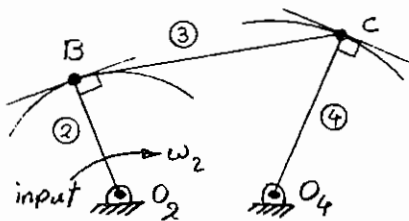
$$\vec{V}_{C_n} = \vec{V}_{B_n} + \vec{V}_{C_n/B_n}$$

با توجه به حاصل ضرب  $\vec{\omega}_n \times \overline{BC}$ ، می‌توان گفت راستای  $\vec{V}_{C_n/B_n}$  عمود بر  $\overline{BC}$  و در صفحه حرکت بوده و اگر مقدار  $\omega_n$  معلوم باشد، مقدار این سرعت نسبی برابر  $(\overline{BC})\omega_n$  بوده و جهت آن از چرخش جهت بردار  $\overline{BC}$  به اندازه  $\frac{\pi}{2}$  در جهت  $\omega_n$  حاصل می‌شود:

$$\vec{V}_{C_n/B_n} : (\overline{BC})\omega_n \text{ (مقدار)}, \perp \overline{BC} \text{ (راستا)},$$



به عنوان مثال، یک سازوکار چهار میله‌ای در نظر گرفته می‌شود. با توجه به معلوم بودن سرعت زاویه‌ای بند 2، سرعت نقطه C و سرعت زاویه‌ای بندهای 3 و 4 را می‌توان به دست آورد:



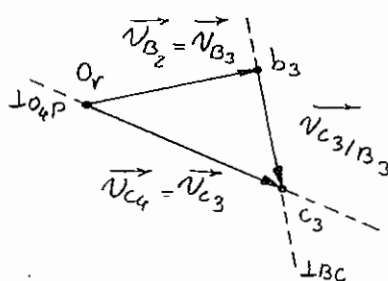
$$\vec{V}_{C_3} = \vec{V}_{B_3} + \vec{V}_{C_3/B_3}$$

$$\vec{V}_{B_3} = \vec{V}_{B_2} = \vec{\omega}_2 \times \overline{O_2B} : (\overline{O_2B})\omega_2, \perp (\overline{O_2B}), \nearrow$$

$$\vec{V}_{C_3/B_3} : \perp (\overline{BC}) \text{ (سرعت غیرمشهود بر خط عمود است)}$$

$$\vec{V}_{C_4} : \perp (\overline{O_4C})$$

(چون مسیر C دایره‌ای به مرکز O<sub>4</sub> و شعاع  $\overline{O_4C}$  است، پس راستای سرعت  $V_{C_4}$  بر  $\overline{O_4C}$  عمود است)

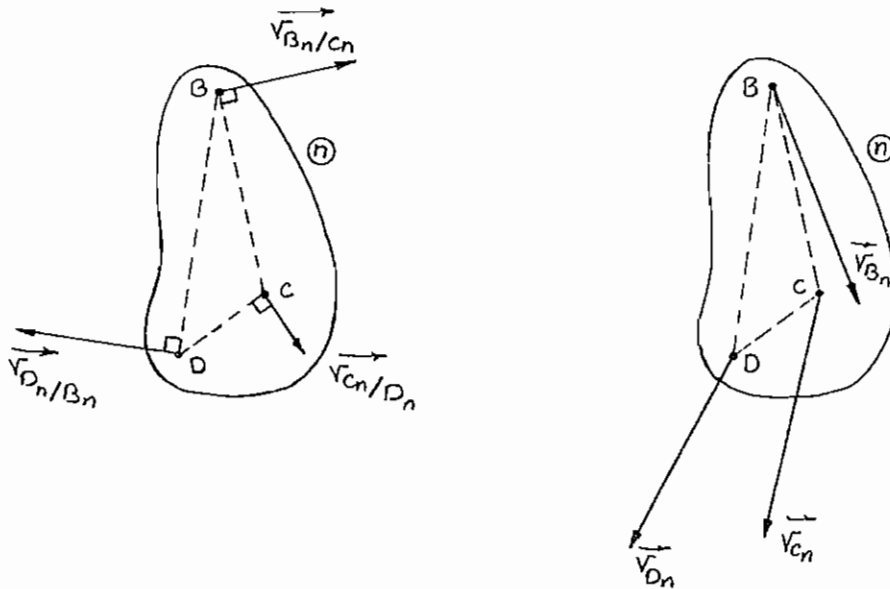


پس از رسم بردار  $\vec{V}_{B_3}$  از یک نقطه دلخواه (که قطب سرعت نامیده شده و با O<sub>v</sub> نشان داده می‌شود)، از انتهای بردار  $\vec{V}_B$  یک خط عمود بر  $\overline{BC}$  و از نقطه O<sub>v</sub> یک خط عمود بر  $\overline{O_4C}$  رسم می‌شود. محل تلاقی دو خط چین، نقطه انتهایی بردار  $\vec{V}_{C_3}$  است که با c<sub>3</sub> نشان داده می‌شود. با توجه به مقدار و جهت بردارهای  $\vec{V}_{C_3/B_3}$  و  $\vec{V}_{C_3}$ ، می‌توان سرعت زاویه‌ای بقیه بندها را معلوم نمود:

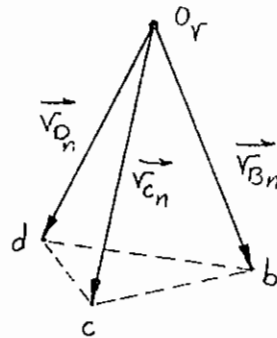
$$\omega_3 = \frac{|\vec{V}_{C_3/B_3}|}{(\overline{BC})} \quad \text{c.w.}$$

$$\omega_4 = \frac{|\vec{V}_{C_4}|}{(\overline{O_4C})} \quad \text{c.w.}$$

هرگاه سرعت دو نقطه (مانند B و C) از یک جسم صلب معلوم باشد، سرعت هر نقطه دلخواه دیگر (مثل D) از همان جسم صلب را با استفاده از تشابه مثلث‌ها می‌توان به‌دست آورد. به این ترتیب که مثلثی با رئوس نقاط B، C و D با مثلثی با رئوس انتهایی بردار سرعت آن سه نقطه با مبدأ قطب سرعت  $O_V$  (یعنی نقاط a، b و c)، متشابه می‌باشد:



$$\begin{cases} |\vec{V}_{B_n/C_n}| = \bar{cb} = (\overline{CB})\omega_n \\ |\vec{V}_{C_n/D_n}| = \bar{dc} = (\overline{DC})\omega_n \\ |\vec{V}_{D_n/B_n}| = \bar{bd} = (\overline{BD})\omega_n \end{cases} \Rightarrow \frac{\bar{cb}}{CB} = \frac{\bar{dc}}{DC} = \frac{\bar{bd}}{BD} = \omega_n \Rightarrow \Delta BCD \sim \Delta bcd \text{ ض.ض.ض.}$$



### سینماتیک تماس مستقیم

#### سرعت نسبی (مشهود) بین دو نقطه برهم منطبق از دو جسم صلب متمایز

در صورتی که دستگاه مختصات موضعی  $xyz$ ، در نقطه P اما بر روی جسم صلب m (یا بر روی گستره طبیعی بدون جرم جسم صلب m) نصب گردد، آن‌گاه بردار موقعیت  $\vec{r}$  برابر صفر شده و هم‌زمان با آن مؤلفه چرخشی سرعت  $\vec{\omega}_n \times \vec{r}$  نیز صفر گردیده و یک مجهول حذف خواهد شد، در این حالت می‌توان نوشت:

$$\overset{oV}{V}_{XYZ} = \overset{oV}{V}_{xyz} + \overset{oV}{\omega}_{xyz} \times \vec{r} + \overset{oV}{V}_O$$



و یا به شکل جدید آن:

$$\frac{ov}{\bar{V}_{P_n}} = \frac{ov}{\bar{V}_{P_m}} + \frac{ov}{\bar{V}_{P_n/m}}$$

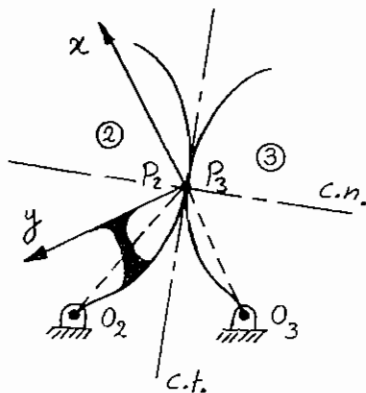
از آن‌جا که سرعت نسبی  $\bar{V}_{P_n} - \bar{V}_{P_m}$  نسبت به دستگاه مختصات موضعی مشهود است، به جای استفاده از نماد  $\bar{V}_{P_n/P_m}$ ، از نماد  $\bar{V}_{P_n/m}$  استفاده می‌شود.

در مورد دو جسم صلب  $m$  و  $n$  که در حالت تماس مستقیم می‌باشند، سرعت نقاط  $P_m$  و  $P_n$ ، در امتداد عمود مشترک باید برابر باشد، چون در غیراین‌صورت دو جسم یا در حال جدا شدن از هم و یا در حال فرو رفتن در یکدیگر هستند که اولی مغایر اتصال دائم دو جسم، و دومی مغایر صلب بودن این اجسام است. بنابراین در صورت وجود اختلاف سرعت بین نقاط  $P_m$  و  $P_n$  (در حالت غلتش همراه با لغزش) این سرعت نسبی  $\bar{V}_{P_n/m}$  در امتداد مماس مشترک دو سطح در تماس است. بدیهی است این اختلاف سرعت در حالت غلتش خالص وجود نداشته و می‌توان نوشت:

$$\bar{V}_{P_n/m} = \vec{0} \Rightarrow \bar{V}_{P_n} = \bar{V}_{P_m}$$

به عنوان مثال، یک سازوکار سه میله‌ای تماس مستقیم، مانند شکل در نظر بگیرید.

باتوجه به معلوم بودن سرعت زاویه‌ای بند 2 در جهت ساعت‌گرد، به عنوان ورودی، سرعت زاویه‌ای بند 3 را می‌توان به‌دست آورد:



$$\frac{ov}{\bar{V}_{P_3}} = \frac{ov}{\bar{V}_{P_2}} + \frac{ov}{\bar{V}_{P_{3/2}}}$$

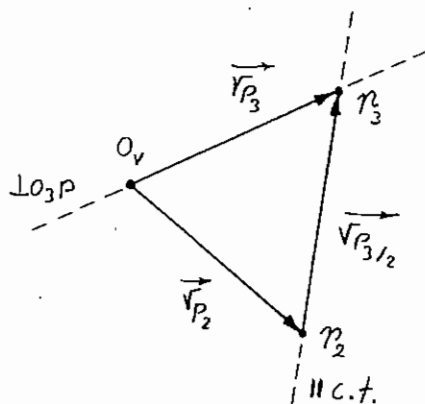
$$\bar{V}_{P_2} : (\overline{O_2P})\omega_2, \perp \overline{O_2P}, \sphericalangle$$

$$\bar{V}_{P_3} : \perp (\overline{O_3P}) \quad V_{P_{3/2}} \parallel c.t.$$

پس از رسم بردار  $\bar{V}_{P_2}$  از قطب سرعت، باید از انتهای آن یک خط به موازات مماس مشترک (c.t.) و از ابتدای آن یک خط عمود بر

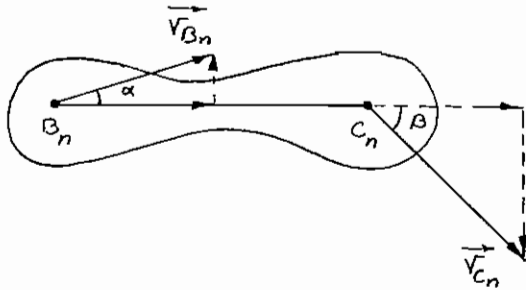
$(\overline{O_3P})$  رسم نمود، که تقاطع دو خط‌چین اخیر، انتهای بردار  $\bar{V}_{P_3}$  است و با  $P_3$  نشان داده می‌شود:

باتوجه به مقدار و جهت بردار  $\bar{V}_{P_3}$  می‌توان سرعت زاویه‌ای  $\omega_3$  را معلوم نمود:



$$\omega_3 = \frac{|\bar{V}_{P_3}|}{(\overline{O_3P})} \quad \text{c.w.}$$

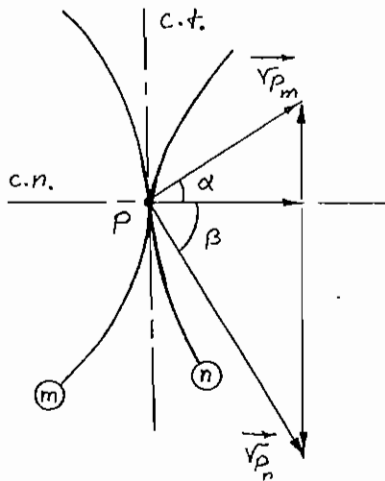
باتوجه به مطالب فوق، در خصوص سرعت‌های نسبی می‌توان گفت:  
 سرعت دو نقطه متمایز از یک جسم صلب در امتداد خط واصل بین آن دو نقطه، برابر بوده و راستای اختلاف سرعت بین دو نقطه، در امتداد عمود بر خط واصل بین آن دو نقطه است:



$$|\bar{v}_{B_n}| \cos \alpha = |\bar{v}_{C_n}| \cos \beta$$

$$|\bar{v}_{C_n/B_n}| = |\bar{v}_{B_n}| \sin \alpha + |\bar{v}_{C_n}| \sin \beta$$

سرعت دو نقطه بر هم منطبق از دو جسم صلب در تماس مستقیم، در امتداد عمود مشترک سطوح تماس برابر بوده و در صورت وجود سرعت نسبی بین دو نقطه (در حالت غلتش همراه با لغزش)، در امتداد مماس مشترک سطوح تماس است.



$$|\bar{v}_{P_m}| \cos \alpha = |\bar{v}_{P_n}| \cos \beta$$

$$|\bar{v}_{P_n/m}| = |\bar{v}_{P_n}| \sin \alpha + |\bar{v}_{P_m}| \sin \beta$$

## فصل چهارم

### مراکز چرخش در سازوکارهای صفحه‌ای

#### مراکز چرخش - تعداد و انواع آنها

- مرکز چرخش، دو نقطه بر هم منطبق از دو جسم صلب (یا گستره طبیعی بدون جرم آنها) است که سرعت نسبی آن دو نقطه صفر بوده یا به عبارت دیگر، سرعت آن دو نقطه نسبت به جسم صلب سوم، برابر است و در هر لحظه، هر یک از دو جسم نسبت به دیگری، حول این نقطه مضاعف در حال چرخش است. همان‌طور که از تعریف بر می‌آید، مرکز آنی چرخش بین دو جسم صلب مثل  $m$  و  $n$  تعریف می‌شود و با  $I_{mn}$  یا  $I_{nm}$  نشان داده می‌شود.

- برای یک سازوکار که شامل  $N$  بند است، تعداد مراکز آنی چرخش عبارت است از:

$$\frac{N(N-1)}{2}$$

$I_{12}$	$I_{13}$	$I_{14}$	...	$I_{1n}$
	$I_{23}$	$I_{24}$	...	$I_{2n}$
		$I_{34}$	...	$I_{3n}$
			...	...
				$I_{(n-1)n}$

- مراکز چرخش، می‌توانند آنی (Instantaneous)، و یا دایم (Permanent) باشند. در صورتی که محل مرکز چرخش، نسبت به دو جسم تغییر کند آن را آنی و در غیراین صورت دایم گویند.

- مراکز چرخش، می‌توانند اولیه (Primary)، یا ثانویه (Secondary) باشند. موقعیت مراکز چرخش اولیه، با توجه به هندسه سازوکار معلوم بوده و نیازی به انجام فرآیندهای اضافی نیست. اما موقعیت مراکز چرخش ثانویه، با توجه به موقعیت مراکز چرخش اولیه و انجام فرآیندهای اضافی، معلوم می‌شود. مراکز چرخش اولیه می‌توانند دایم یا آنی باشند، ولی مراکز چرخش ثانویه فقط از نوع آنی هستند. ممکن است برای تعیین بعضی از مراکز چرخش ثانویه، از مراکز چرخش ثانویه دیگر استفاده شود. بنابراین، مراکز چرخش ثانویه خود دارای اولویت‌های تعیین موقعیت هستند.

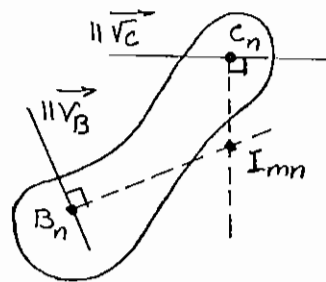
## موقعیت مراکز چرخش

با توجه به نکات زیر می‌توان موقعیت مراکز آنی چرخش را معلوم نمود:  
 (۱) از آن‌جا که سرعت مرکز آنی چرخش صفر است:

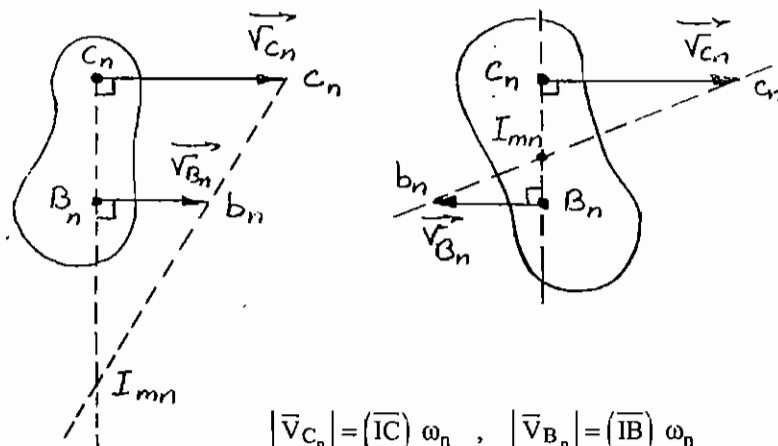
$$\vec{V}_B = \vec{V}_I + \vec{\omega} \times \vec{IB}$$

$$\Rightarrow \vec{V}_B = \vec{\omega} \times \vec{IB} \Rightarrow \vec{V}_B \perp (\vec{IB})$$

به عبارت دیگر سرعت هر نقطه از جسم صلب، بر شعاع چرخش آن نقطه (IB یا  $R_B$ ) عمود است. به این ترتیب با داشتن راستای سرعت دو نقطه از جسم صلب، می‌توان موقعیت مرکز چرخش را معلوم کرد. البته به آن شرط که دو راستا، مستقل بوده و موازی یکدیگر نباشند.



در صورتی که دو راستا موازی باشند، لازم است علاوه بر معلوم بودن راستای سرعت دو نقطه، مقدار آن‌ها نیز معلوم باشد، در این صورت، پس از خارج نمودن یک عمود بر راستای سرعت دو نقطه، انتهای سرعت دو نقطه را نیز به هم وصل کرده تا مرکز چرخش، از تقاطع دو خط اخیر به‌دست آید.

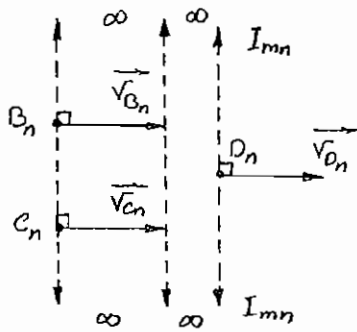


$$|\vec{V}_{C_n}| = (\overline{IC}) \omega_n \quad , \quad |\vec{V}_{B_n}| = (\overline{IB}) \omega_n$$

$$\Rightarrow \frac{|\vec{V}_{C_n}|}{(\overline{IC})} = \frac{|\vec{V}_{B_n}|}{(\overline{IB})} = \omega_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta IBb \sim \Delta ICc \quad \text{ض.ز.ض.} \quad (\text{تشابه مثلث‌های قائم الزاویه})$$

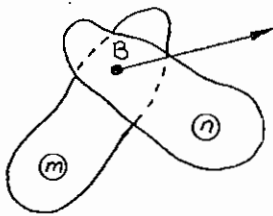
۲) در خصوص لغزنده‌های مستقیم الخط، باتوجه به برابر بودن سرعت همه نقاط، مرکز چرخش در بی‌نهایت دور و در امتداد عمود بر مسیر حرکت لغزنده قرار می‌گیرد. باید توجه داشت که با تعریف بی‌نهایت و نیز تعریف توازی دو خط، می‌توان گفت دو خط موازی یکدیگر را در بی‌نهایت قطع می‌کنند:



سرعت سه نقطه  $B_n$ ،  $C_n$  و  $D_n$  از یک لغزنده مستقیم الخط نشان داده شده است، که مرکز چرخش در بی‌نهایت دور و در امتداد عمودی واقع می‌شود.

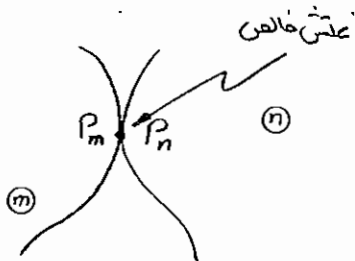
۳) در مورد لولاها، چون سرعت دو نقطه از دو جسم صلب لولا شده در آن محل با هم برابر است، پس خود لولا، مرکز چرخش نسبی می‌باشد:

$$\vec{V}_{B_n} = \vec{V}_{B_m} \Rightarrow I_{mn} = B$$

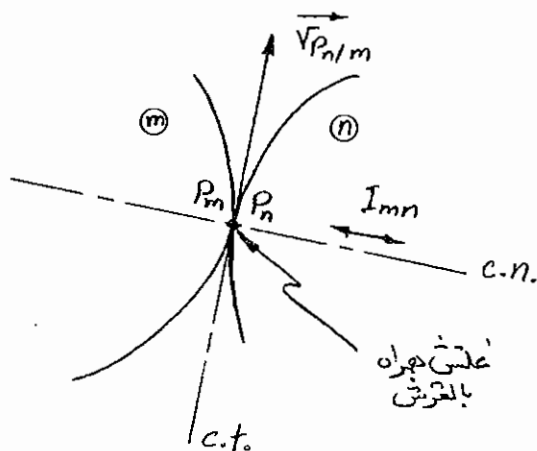


۴) برای تماس مستقیم دو بند، از نوع غلتش خالص، سرعت نسبی برای نقاط محل تماس، صفر بوده و بنابراین نقطه تماس، خود، مرکز آنی چرخش نسبی است.

$$\vec{V}_{P_n/m} = \vec{0} \Rightarrow I_{mn} = P$$

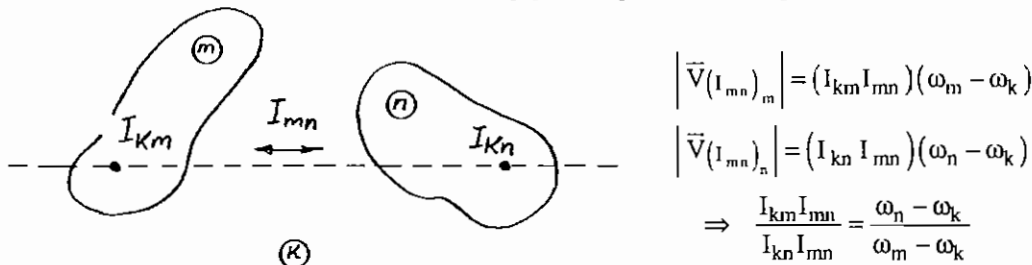


۵) برای تماس مستقیم دو بند، از نوع غلتش همراه با لغزش، سرعت نسبی نقاط محل تماس، در امتداد مماس مشترک دو سطح در تماس بوده و بنابراین شعاع چرخش نسبی، بر سرعت نسبی عمود بوده و به عبارت دیگر، مرکز آنی چرخش نسبی روی امتداد عمود مشترک دو سطح در حال تماس قرار دارد:

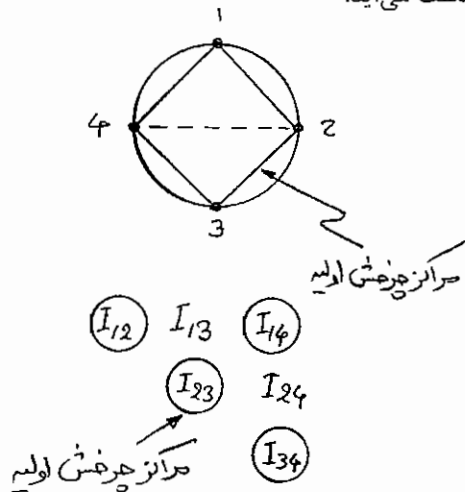


۶) قضیه سه مرکز یا قضیه Arnhold-Kennedy: بین سه جسم صلب متمایز، سه مرکز چرخش نسبی تعریف می‌شود، که هر سه بر یک راستا قرار دارند. یعنی با معلوم بودن مراکز  $I_{kn}$  و  $I_{km}$  می‌توان گفت که مرکز چرخش  $I_{mn}$  روی خط واصل بین دو مرکز فوق قرار دارد:

باتوجه به این‌که، سرعت نقطه  $I_{mn}$  از بند  $m$  با سرعت نقطه  $I_{mn}$  از بند  $n$  برابر است:

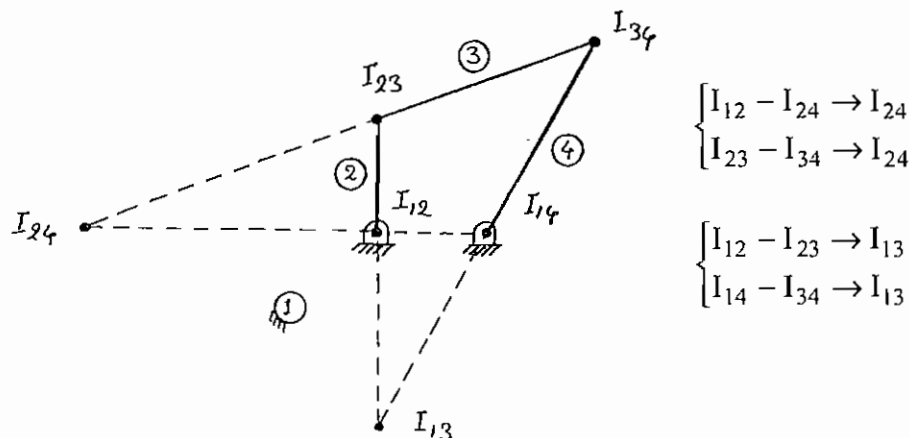


برای تعیین مراکز آنی چرخش یک سازوکار صفحه‌ای، ابتدا موقعیت مراکز چرخش اولیه را تعیین نموده و با استفاده از نمودار چند ضلعی، مراکز چرخش ثانویه، به ترتیب اولویت و با استفاده از قواعد گفته شده به دست می‌آید.

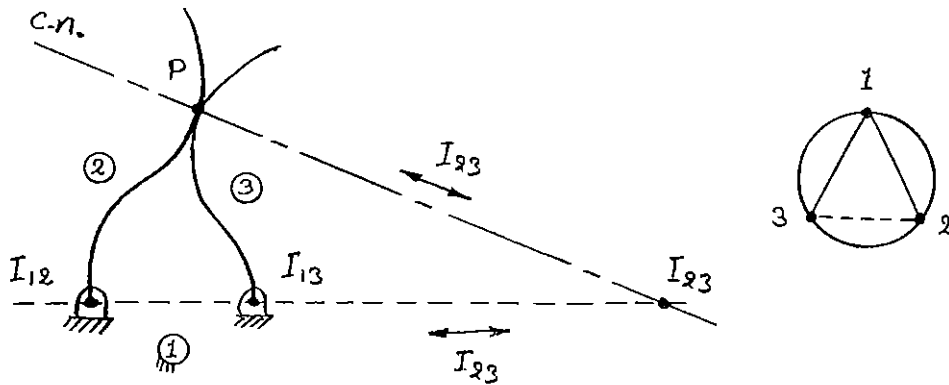


برای نمودار چند ضلعی، دایره‌ای به شعاع دلخواه ترسیم شده، و به  $N$  قسمت مساوی تقسیم می‌شود، که  $N$ ، تعداد بندهای سازوکار صفحه‌ای است. به هر گره، شماره‌ای داده می‌شود که معرف یک جسم صلب با همان شماره خواهد بود. هر خط واصل بین دو گره، معرف مرکز چرخش نسبی بوده و برای تعیین یک مرکز چرخش ثانویه، می‌بایست خط متناظر آن مرکز چرخش بر روی نمودار چند ضلعی، دو مثلث ناقص موجود را کامل کند. مانند شکل.

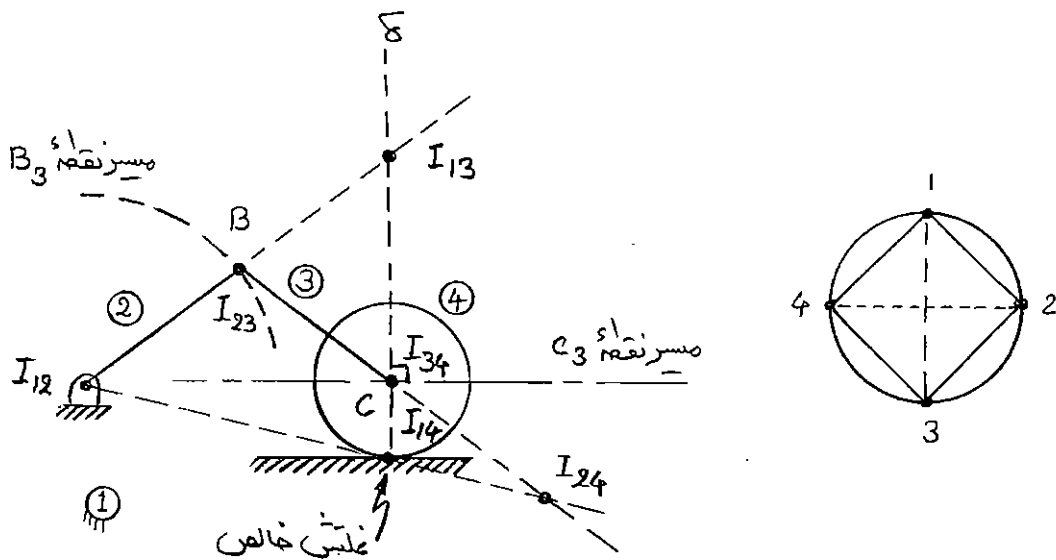
خط واصل بین گره‌های 2 و 4 که معرف  $I_{24}$  است، دو مثلث ناقص موجود را تکمیل می‌کند. به این ترتیب رئوس هر مثلث، سه جسم صلبی خواهند بود که با استفاده از آن‌ها می‌توان قضیه سه مرکز را به کار برد. دوبار استفاده مکرر از قضیه سه مرکز، دو خط متقاطع را خواهد داد، که تقاطع آن‌ها، مرکز چرخش مورد نظر است. این مسئله در مورد سازوکار چهار میله‌ای زیر استفاده شده است:



در مورد سازوکار سه میله‌ای زیر، یکبار از قضیه سه مرکز و یکبار هم از فرار گرفتن مرکز چرخش نسبی روی عمود مشترک استفاده می‌شود:

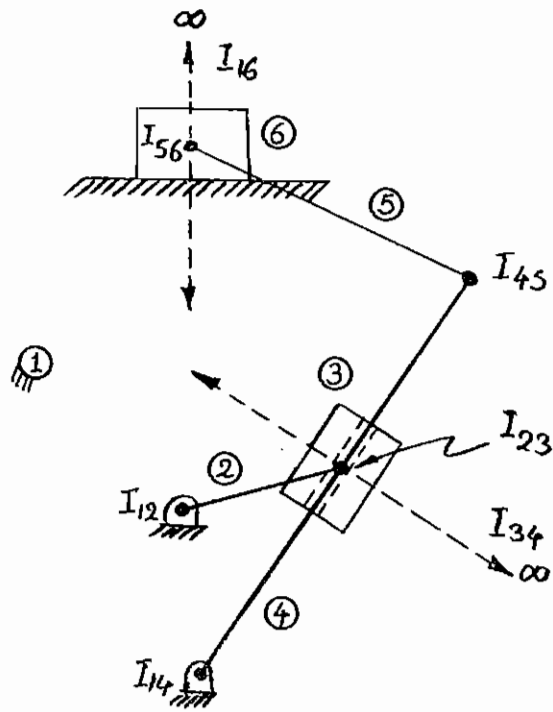


برای سازوکار چهار میله‌ای زیر نیز، مراکز آنی چرخش ثانویه  $I_{24}$  و  $I_{13}$  به دست آمده‌اند. توجه شود که مرکز چرخش  $I_{14}$ ، اولیه اما آنی است، ولی بقیه مراکز چرخش اولیه، دایم می‌باشند:

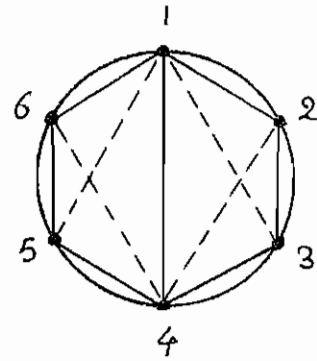


در مثال فوق باید توجه کرد که اگر تماس بند 4 و زمین، غلتش همراه با لغزش باشد، موقعیت مرکز آنی چرخش  $I_{14}$  را نمی‌توان معلوم کرد، ولی به هر حال بر روی عمود مشترک  $\delta$  قرار خواهد داشت و به طریق مشابه (یا با استفاده از ترسیم عمود بر مسیر نقاط  $B_3$  و  $C_3$ ) می‌توان موقعیت مرکز آنی چرخش ثانویه  $I_{13}$  را معلوم نمود، ولی برای تعیین موقعیت دقیق  $I_{14}$  و نیز تعیین موقعیت  $I_{24}$  باید میزان لغزش دیسک معلوم باشد.

در سازوکار شش میله‌ای تند برگشت نشان داده شده در شکل، ابتدا می‌توان موقعیت 7 مرکز چرخش اولیه را معلوم نموده، پس از آن با استفاده از مراکز چرخش اولیه، موقع چهار مرکز چرخش ثانویه رده اول را تعیین نموده و سپس با استفاده از مراکز چرخش اولیه و ثانویه رده اول، موقعیت چهار مرکز چرخش ثانویه رده دوم، تعیین می‌شود.

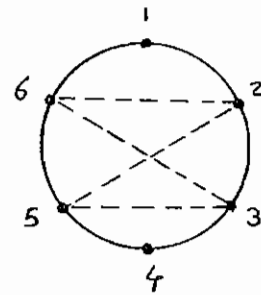


$$\text{تعداد مراکز چرخش} = \frac{N(N-1)}{2} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$$

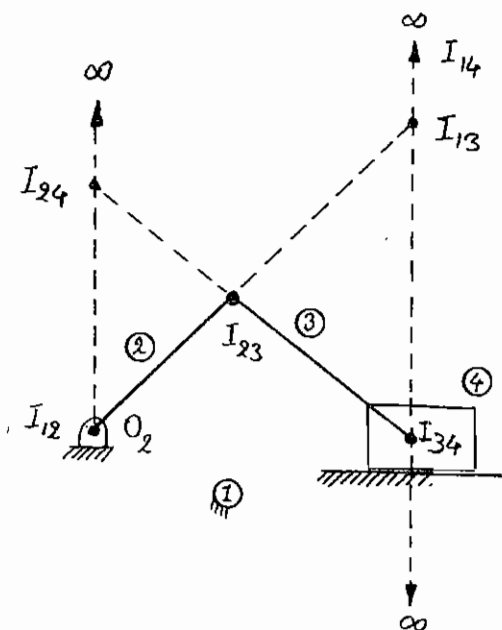


مراکز چرخش اولیه و ثانویه رده اول

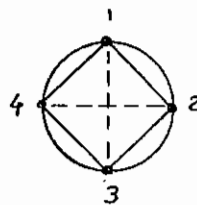
$I_{12}$	$\overline{I_{13}}$	$I_{14}$	$\overline{I_{15}}$	$\overline{I_{16}}$
	$I_{23}$	$\overline{I_{24}}$	$\overline{I_{25}}$	$\overline{I_{26}}$
		$I_{34}$	$\overline{I_{35}}$	$\overline{I_{36}}$
			$I_{45}$	$\overline{I_{46}}$
				$I_{56}$



مراکز چرخش ثانویه رده دوم

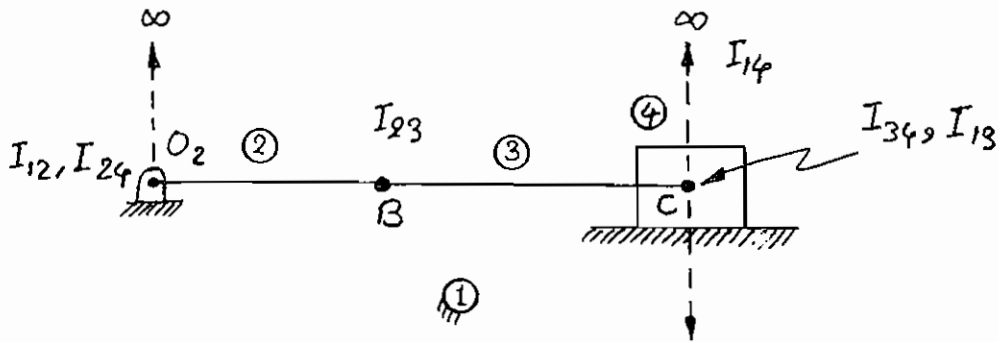


درسازوکار لغزنده- لنگ نیز مراکز آنی چرخش ثانویه را با استفاده از تقاطع خطوط موازی در فاصله بی‌نهایت دور، می‌توان به دست آورد. برای وصل کردن  $I_{12}$  به  $I_{14}$ ، باید از نقطه  $I_{12}$  خطی به موازات  $I_{14}I_{34}$  رسم نمود و فرض بر آن است که در فاصله بی‌نهایت دور، در نقطه  $I_{14}$  یکدیگر را قطع خواهند کرد.





ممکن است در حالت‌های خاص، مانند نقطه مرگ سازوکار چهار میله‌ای، بعضی از مراکز چرخش، برهم منطبق شوند:



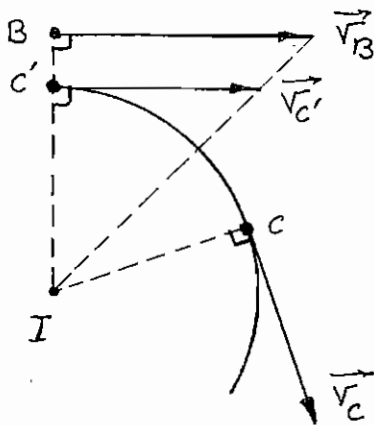
چون در این حالت سرعت همه نقاط بند 4، برابر صفر است، تنها نقطه‌ای از بند 2 که سرعتش صفر است،  $O_2$  می‌باشد، پس  $O_2$  همان  $I_{24}$  بوده و سرعت  $(I_{24})_2$  و  $(I_{24})_4$  با هم برابر و مساوی صفر است. از طرف دیگر، نقطه C نقطه‌ای از بند 3 است که به علت ارتباط با بند 4، سرعتش صفر است. همه نقاط بند 1 نیز دارای سرعت صفر بود، پس نقطه C همان  $I_{13}$  است.

### سرعت‌شناسی با استفاده از مراکز چرخش

با استفاده از مراکز آنی چرخش می‌توان سازوکارهای صفحه‌ای را سرعت‌شناسی کرد. باید توجه کرد که تندی همه نقاطی که از مرکز چرخش، به یک فاصله هستند، با هم برابر است:

با داشتن سرعت  $\vec{V}_B$  می‌توان نقطه C انتقال یافته  $(C')$  را با ایجاد یک قوس به مرکز I و شعاع IC که با خط IB تقاطع می‌کند، به دست آورد. با تشابه مثلث‌های قائم الزاویه، می‌توان نوشت:

$$\frac{|\vec{V}_B|}{IB} = \frac{|\vec{V}_{C'}|}{IC'}$$



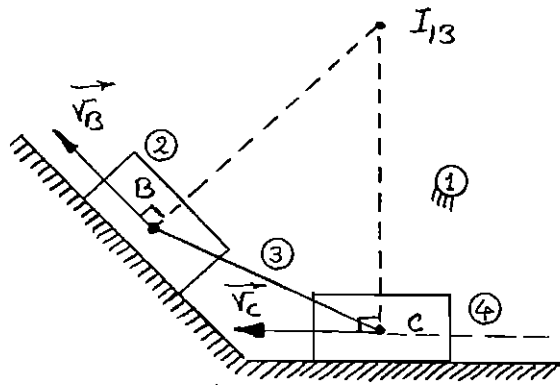
$$\vec{V}_{C'} = \frac{IC'}{IB} \vec{V}_B$$

$$|\vec{V}_C| = |\vec{V}_{C'}|$$

به این ترتیب سرعت  $\vec{V}_{C'}$  به دست می‌آید:

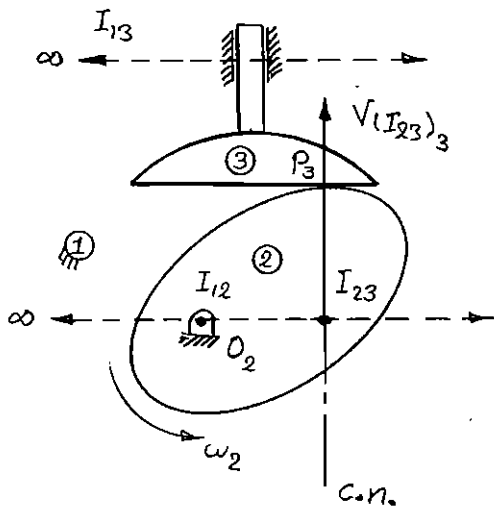
از طرفی تندی  $C'$  و C با هم برابر است:

کافی است برداری عمود بر IC به طول  $\bar{V}_C$  در جهت سازگار با سرعت زاویه‌ای جسم صلب، رسم شود که همان  $\bar{V}_C$  خواهد بود. این مطلب هم در مورد سرعت‌های مطلق (نسبت به بند پایه)، با استفاده از مراکز چرخش مطلق (نسبت به بند پایه) صادق است و هم در مورد سرعت‌های نسبی، با استفاده از مراکز چرخش نسبی (نسبت به بندهای متحرک). به عنوان مثال، سرعت نقطه C از بند شناور سازوکار بیضی نگار، با استفاده از سرعت نقطه B به دست می‌آید:



$$\begin{aligned} (I_{13}B)\omega_3 &= |\bar{V}_B| \\ (I_{13}C)\omega_3 &= |\bar{V}_C| \\ \Rightarrow |\bar{V}_C| &= \frac{I_{13}C}{I_{13}B} |\bar{V}_B| \end{aligned}$$

برای سازوکار بادامک و پیرو نشان داده شده، استفاده از مرکز چرخش نسبی  $I_{23}$  مناسب‌تر است، زیرا:  $\bar{V}_{(I_{23})_2} = \bar{V}_{(I_{23})_3}$  بوده و حرکت جسم 3 انتقالی است، بنابراین سرعت  $\bar{V}_{(I_{23})_3}$  برابر سرعت همه نقاط بند 3 خواهد بود:



$$\bar{V}_{P_3} = \bar{V}_{(I_{23})_3} = \bar{V}_{(I_{23})_2} = \bar{\omega}_2 \times \overline{O_2 I_{23}}$$

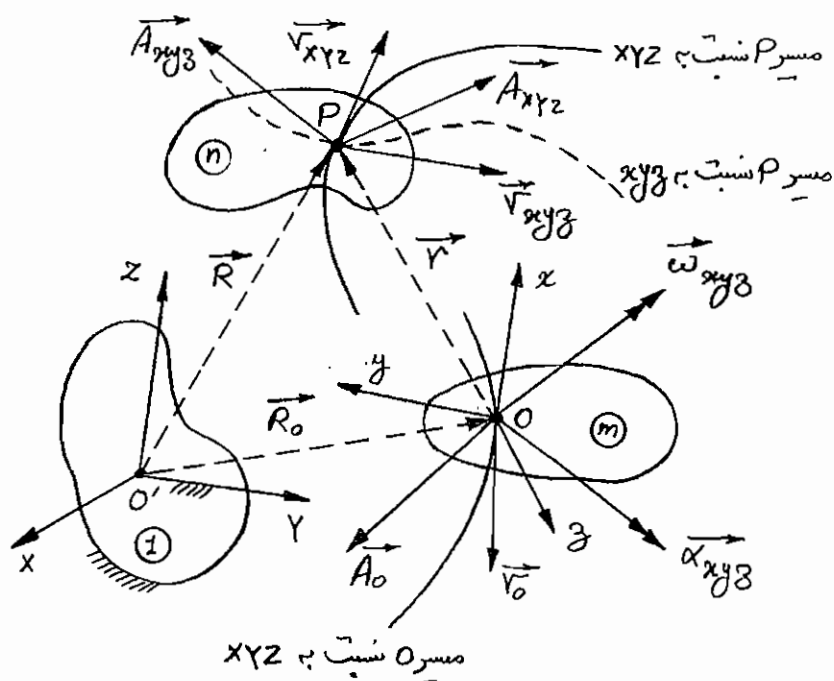
# فصل پنجم

## شتاب‌شناسی سازوکارهای صفحه‌ای

### مروری بر روابط کلی شتاب‌شناسی

معادله عمومی رابطه شتاب‌ها در دستگاه مختصات موضعی  $(xyz)$  و دستگاه مختصات مرجع  $(XYZ)$ ، با مشتق‌گیری از معادله عمومی رابطه سرعت‌ها به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\bar{A}_{XYZ} = \bar{A}_{xyz} + \bar{A}_O + \bar{\omega}_{xyz} \times (\bar{\omega}_{xyz} \times \bar{r}) + \bar{\alpha}_{xyz} \times \bar{r} + 2\bar{\omega}_{xyz} \times \bar{V}_{xyz}$$



که در آن:

$\bar{A}_{XYZ}$ : شتاب نقطه P نسبت به دستگاه XYZ یا شتاب مطلق ( $\bar{A}_{Abs.}$ )

$\bar{A}_{xyz}$ : شتاب نقطه P نسبت به دستگاه xyz یا شتاب نسبی ( $\bar{A}_{Rel.}$ )

$\bar{A}_O$ : شتاب مبدأ دستگاه مختصات xyz یا شتاب انتقالی ( $\bar{A}_{Trans.}$ )

$\bar{\omega}_{xyz} \times (\bar{\omega}_{xyz} \times \bar{r})$ : شتاب جانب مرکز ( $\bar{A}_{Cen.}$ )

$\bar{\alpha}_{xyz} \times \bar{r}$ : شتاب متقاطع ( $\bar{A}_{Crossed}$ )

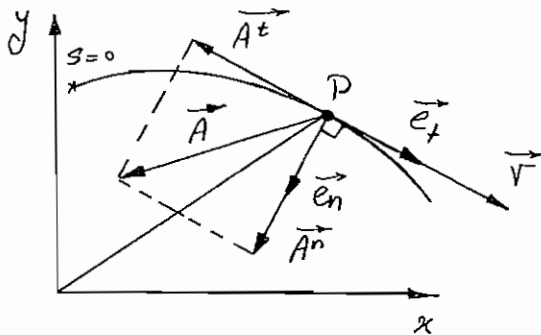
$2\bar{\omega}_{xyz} \times \bar{V}_{xyz}$ : شتاب کوریولی یا شتاب متمم ( $\bar{A}_{Cor.}$ )

شتاب انتقالی  $\bar{A}_{Trans.}$ ، شتاب جانب مرکز  $\bar{A}_{Cen.}$  و شتاب متقاطع  $\bar{A}_{Crossed}$ ، نسبت به دستگاه xyz غیرمشهود بوده و جمع این سه شتاب، شتاب کششی یا شتاب جای پا خوانده می‌شود:

$$\bar{A}_T = \bar{A}_O + \bar{\omega}_{xyz} \times (\bar{\omega}_{xyz} \times \bar{r}) - \bar{\alpha}_{xyz} \times \bar{r}$$

پس اختلاف شتاب مطلق و شتاب نسبی، عبارت است از شتاب کششی به اضافه شتاب کوریولی  $\bar{A}_{Cor.}$ ، که آن نیز یک شتاب غیرمشهود نسبت به دستگاه xyz بوده اما به علت تأثیر وجود سرعت نسبی  $\bar{V}_{xyz}$  در آن، جزو شتاب‌های کششی محسوب نمی‌شود.

- در حرکت صفحه‌ای، با معلوم بودن مسیر حرکت یک نقطه، می‌توان شتاب آن نقطه را به دو مؤلفه در امتداد مماس بر مسیر و در امتداد عمود بر مسیر، تجزیه نمود:



$$\begin{aligned} \bar{V} &= \frac{ds}{dt} \bar{e}_t = V \bar{e}_t \\ \bar{A} &= \frac{d^2s}{dt^2} \bar{e}_t + \frac{(ds/dt)^2}{\rho} \bar{e}_n \\ &= \frac{dV}{dt} \bar{e}_t + \frac{V^2}{\rho} \bar{e}_n \end{aligned}$$

« حرکت کند شونده  $\Rightarrow A^t < 0$  »

برای حرکت فضایی، این روابط در صفحه بوسان صادق می‌باشند.

$$\begin{cases} \bar{A}^t = \frac{dV}{dt} \bar{e}_t \\ \bar{A}^n = \frac{V^2}{\rho} \bar{e}_n \end{cases}$$

که شتاب مماسی، سبب تغییر (افزایش یا کاهش) در مقدار تندی و شتاب قائم، سبب تغییر در راستای سرعت می‌شود.

- به این ترتیب چون شتاب  $\bar{A}_{xyz}$  در دستگاه مختصات xyz مشهود بوده و دارای مسیر است، می‌توان نوشت:

$$\bar{A}_{xyz} = \bar{A}_{xyz}^t + \bar{A}_{xyz}^n = \left( \frac{dV_{xyz}}{dt} \right) (\bar{e}_t)_{xyz} + \frac{V_{xyz}^2}{\rho_{xyz}} (\bar{e}_n)_{xyz}$$

که در آن:

$$\begin{aligned} \rho_{xyz}: & \text{ شعاع انحنای مسیر نقطه P در دستگاه } xyz \\ (\bar{e}_t)_{xyz}: & \text{ برداری که مماس بر مسیر نقطه P در دستگاه } xyz \\ (\bar{e}_n)_{xyz}: & \text{ برداری که قائم بر مسیر نقطه P در دستگاه } xyz \end{aligned}$$

- همچنین شتاب  $\bar{A}_{XYZ}$  و  $\bar{A}_O$  در دستگاه مختصات XYZ مشهود بوده و دارای مسیر می‌باشند، پس می‌توان نوشت:

$$\bar{A}_{XYZ} = \bar{A}_{XYZ}^t + \bar{A}_{XYZ}^n = \left( \frac{dV_{XYZ}}{dt} \right) (\bar{e}_t)_{XYZ} + \frac{V_{XYZ}^2}{\rho_{XYZ}} (\bar{e}_n)_{XYZ}$$

که در آن:

$$\begin{aligned} \rho_{XYZ}: & \text{ شعاع انحنای مسیر نقطه P در دستگاه } XYZ \\ (\bar{e}_t)_{XYZ}: & \text{ برداری که مماس بر مسیر نقطه P در دستگاه } XYZ \\ (\bar{e}_n)_{XYZ}: & \text{ برداری که قائم بر مسیر نقطه P در دستگاه } XYZ \end{aligned}$$

$$\bar{A}_O = \bar{A}_O^t + \bar{A}_O^n = \left( \frac{dV_O}{dt} \right) (\bar{e}_t)_O + \frac{V_O^2}{\rho_O} (\bar{e}_n)_O$$

که در آن:

$$\begin{aligned} \rho_O: & \text{ شعاع انحنای مسیر نقطه O در دستگاه } XYZ \\ (\bar{e}_t)_O: & \text{ برداری که مماس بر مسیر نقطه O در دستگاه } XYZ \\ (\bar{e}_n)_O: & \text{ برداری که قائم بر مسیر نقطه O در دستگاه } XYZ \end{aligned}$$

- به‌طور کلی معادله عمومی رابطه شتاب‌ها به صورت زیر خواهد بود:

$$\left( \begin{array}{c} \overline{A}_{XYZ}^t + \overline{A}_{XYZ}^n \\ \overline{A}_O^t + \overline{A}_O^n \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \overline{A}_{xyz}^t + \overline{A}_{xyz}^n \\ \overline{A}_O^t + \overline{A}_O^n \end{array} \right) + \overline{A}^{Cen.} + \overline{A}^{Crossed} + \overline{A}^{Cor.}$$

در این رابطه، مقدار کلیه پارامترهایی که شامل مشتقات مرتبه دوم زمانی هستند، مجهول است:

- مقدار شتاب‌های مماسی که برابر  $\frac{d^2s}{dt^2}$  است مجهول می‌باشند، اما مقدار  $\bar{A}_O^t$  باید معلوم باشد، چون در غیراین صورت مسئله قابل حل نخواهد بود.

- مقدار شتاب متقاطع که شامل  $\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2}$  است، مجهول می‌باشد.

- مقدار شتاب جانب مرکز که شامل  $\omega = \frac{d\theta}{dt}$  است، معلوم می‌باشد.

- مقدار شتاب کوریولی که شامل  $\frac{d\theta}{dt}$  و  $\frac{ds}{dt}$  است، معلوم می‌باشد.

- مقدار شتاب‌های قائم که شامل  $\rho$  است معلوم می‌باشد، البته باید توجه داشت که  $\rho$  خود شامل مشتقات مرتبه دوم است.

این مشتق مرتبه دوم از نوع مکانی بوده و با روش‌های نسبتاً پیچیده‌ای می‌توان باتوجه به هندسه سازوکار، مقدار آن را به‌دست آورد.

$$\rho = \frac{[1+y'^2]^{3/2}}{|y''|} : y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$$

در دستگاه مختصات دکارتی:

$$\rho = \frac{[r^2+r'^2]^{3/2}}{r^2+2r'r''-r''^2} : r' = \frac{dr}{d\theta}, \quad r'' = \frac{d^2r}{d\theta^2}$$

در دستگاه مختصاب قطبی:

اما راستای کلیه شتاب‌ها معلوم است:

- به علت مشهود بودن  $A_{xyz}$  در دستگاه  $xyz$  و مشهود بودن  $A_{XYZ}$  و  $A_{O}$  در دستگاه  $XYZ$ ، برای این نقاط امتدادهای مماس و عمود بر مسیر معلوم بوده و بنابراین امتداد -؛ افه‌های مماسی و قائم این شتاب‌ها معلوم است.
  - به علت عمود بودن بردار  $\bar{\omega}_{xyz}$  بر صفحه حرکت، امتداد شتاب جانب مرکز معلوم است.
  - به علت عمود بودن بردار  $\bar{\alpha}_{xyz}$  بر صفحه حرکت، امتداد شتاب متقاطع معلوم است.
  - به علت عمود بودن بردار  $\bar{\omega}_{xyz}$  بر صفحه حرکت و معلوم بودن بردار  $\bar{V}_{xyz}$ ، راستای شتاب کوریولی نیز معلوم است.
- با این حال معادله برداری فوق که در حرکت صفحه‌ای، معادل دو معادله جبری است، دارای سه مجهول (مقدار شتاب مماسی مطلق، مقدار شتاب مماسی نسبی و مقدار شتاب زاویه‌ای دستگاه مختصات موضعی) بوده و غیرقابل حل است. با استفاده از دو حالت خاص قبلی می‌توان یکی از مجهول‌ها را حذف نموده و دو معادله - دومجهول باقی‌مانده را حل نمود.

## سینماتیک جسم صلب:

### اختلاف شتاب (غیرمشهود) بین دو نقطه متمایز از یک جسم صلب

در صورتی که دستگاه مختصات موضعی  $xyz$ ، بر روی یک نقطه مناسب از جسم  $n$  نصب شود، آن‌گاه نقطه  $P$  نسبت به دستگاه موضعی  $xyz$  فاقد حرکت بوده و شتاب نسبی  $\bar{A}_{xyz}$  برابر صفر شده و یک مجهول حذف می‌شود. در عین حال به علت صفر شدن بردار  $\bar{V}_{xyz}$ ، شتاب کوریولی نیز از معادله حذف شده و می‌توان نوشت:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{\sqrt{}} & o\sqrt{} \\ \bar{A}_{XYZ}^n + \bar{A}_{XYZ}^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\sqrt{}} & \sqrt{\sqrt{}} \\ \bar{A}_O^n + \bar{A}_O^t \end{pmatrix} + \bar{\omega}_{xyz} \times \left( \frac{\sqrt{\sqrt{}}}{\omega_{xyz}} \cdot \frac{\sqrt{\sqrt{}}}{\Gamma} \right) + \bar{\alpha}_{xyz} \times \frac{\sqrt{\sqrt{}}}{\Gamma}$$

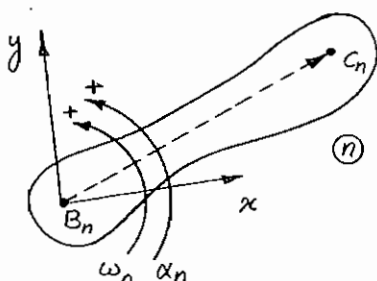
و یا به شکل جدید آن:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{\sqrt{}} & o\sqrt{} \\ \bar{A}_{P_n}^n + \bar{A}_{P_n}^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\sqrt{}} & \sqrt{\sqrt{}} \\ \bar{A}_{O_n}^n + \bar{A}_{O_n}^t \end{pmatrix} + \bar{\omega}_n \times (\bar{\omega}_n \times \overline{OP}) + \bar{\alpha}_n \times \overline{OP}$$

این رابطه برای هر دو نقطه دلخواه، مانند نقاط  $B$  و  $C$  از جسم  $n$  معتبر است:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{\sqrt{}} & \sqrt{\sqrt{}} \\ \bar{A}_{C_n}^n + \bar{A}_{C_n}^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\sqrt{}} & \sqrt{\sqrt{}} \\ \bar{A}_{B_n}^n + \bar{A}_{B_n}^t \end{pmatrix} + \bar{\omega}_n \times (\bar{\omega}_n \times \overline{BC}) + \bar{\alpha}_n \times \overline{BC}$$

$$\bar{A}_{C_n} - \bar{A}_{B_n} = \bar{A}_{C_n/B_n} = \bar{\omega}_n \times (\bar{\omega}_n \times \overline{BC}) + \bar{\alpha}_n \times \overline{BC}$$



شتاب نسبی بین نقاط  $B_n$  و  $C_n$  غیرمشهود بوده و از نظر مقدار نیز بستگی به موقعیت نقطه  $B_n$  دارد، از این رو با علامت  $\overline{A}_{C_n/B_n}$  نشان داده می‌شود و دارای دو مؤلفه است. از آنجا که جهت شتاب جانب مرکز از سمت  $C_n$  به  $B_n$  بوده و راستای شتاب متقاطع، بر راستای برداری  $\overline{BC}$  عمود است، در حالت خاصی که سرعت و شتاب نقطه  $B_n$  صفر است، این دو شتاب به ترتیب به شتاب‌های مماسی و قائم تبدیل می‌شوند، بنابراین از بالانویس‌های  $T$  و  $N$  (به جای  $n$  و  $t$ ) برای آن‌ها استفاده می‌شود:

$$\overline{A}_{C_n/B_n}^N = \overline{\omega}_n \times (\overline{\omega}_n \times \overline{BC}) : (BC) \omega_n^2 \text{ (مقدار)}, \parallel BC \text{ (راستا)}, \text{ جهت آن از سمت } C \text{ به } B \text{ است}$$

$$\overline{A}_{C_n/B_n}^T = \overline{\alpha}_n \times \overline{BC} : (BC) \alpha_n \text{ (مقدار)}, \perp BC \text{ (راستا)}$$

و در صورت معلوم بودن بردار  $\overline{\alpha}_n$ ، جهت آن از چرخش بردار  $\overline{BC}$  به اندازه  $\frac{\pi}{2}$  در جهت  $\alpha_n$  حاصل می‌شود.

هر دو این شتاب‌های نسبی غیرمشهود بوده (چون هر دو نقطه نسبت به دستگاه  $xyz$  ساکن هستند) و تنها از دید ناظری بر روی دستگاه  $XYZ$ ، به عنوان اختلاف شتاب‌های مطلق نقاط  $B_n$  و  $C_n$  قابل تحلیل است.

- به عنوان مثال، سازوکار چهار میله‌ای زیر را در نظر بگیرید. باتوجه به معلوم بودن شتاب زاویه‌ای بند 2، شتاب نقطه  $C$  و شتاب زاویه‌ای بندهای 3 و 4 را می‌توان به دست آورد:

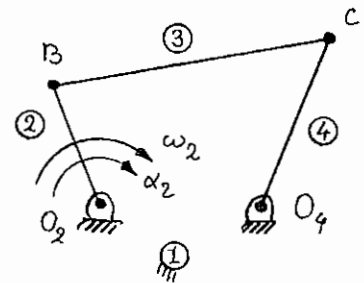
$$\left( \overline{A}_{C_3}^n + \overline{A}_{C_3}^t \right) = \left( \overline{A}_{B_3}^n + \overline{A}_{B_3}^t \right) + \left( \overline{A}_{C_3/B_3}^N + \overline{A}_{C_3/B_3}^T \right)$$

$$\overline{A}_{B_3}^n = \overline{A}_{B_2}^n = \overline{\omega}_2 \times (\overline{\omega}_2 \times \overline{O_2B}) : (\overline{O_2B}) \omega_2^2 \text{ , جهت: از } B \text{ به } O_2 \text{ , } \parallel O_2B$$

$$\overline{A}_{B_3}^t = \overline{A}_{B_2}^t = \overline{\alpha}_2 \times \overline{O_2B} : (\overline{O_2B}) \alpha_2 \text{ , } \perp O_2B$$

$$\overline{A}_{C_3/B_3}^N = \overline{\omega}_3 \times (\overline{\omega}_3 \times \overline{BC}) : (\overline{BC}) \omega_3^2 \text{ , جهت: از } C \text{ به } B \text{ , } \parallel BC$$

$$\overline{A}_{C_3}^n = \overline{A}_{C_4}^n = \overline{\omega}_4 \times (\overline{\omega}_4 \times \overline{O_4C}) : (\overline{O_4C}) \omega_4^2 \text{ , جهت: از } C \text{ به } O_4 \text{ , } \parallel O_4C$$



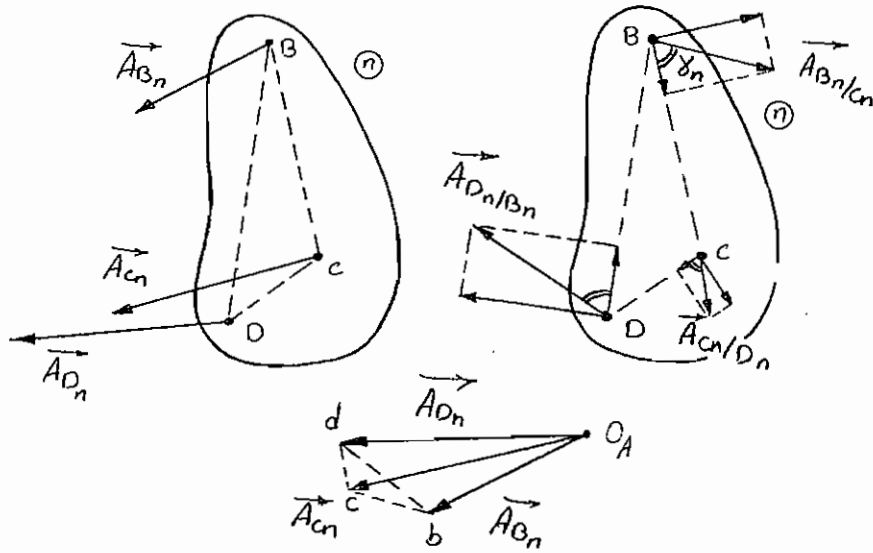
راستای شتاب  $\overline{A}_{C_3/B_3}^T$  عمود بر خط  $BC$  است.

راستای شتاب  $\overline{A}_{C_3}^t$  عمود بر خط  $O_4C$  است.

پس از رسم چند ضلعی شتاب، بردارهای  $\overline{A}_{C_3}^t$  و  $\overline{A}_{C_3/B_3}^T$  به دست می‌آیند و توسط آن‌ها می‌توان شتاب زاویه‌ای بندهای 3 و 4 را تعیین نمود:

$$\alpha_3 = \frac{|\overline{A}_{C_3/B_3}^T|}{(BC)} \text{ , } \alpha_4 = \frac{|\overline{A}_{C_3}^t|}{(O_4C)}$$

هرگاه شتاب دو نقطه (مانند  $B$  و  $C$ ) از یک جسم صلب معلوم باشد، شتاب هر نقطه دلخواه دیگر (مثل  $D$ ) از همان جسم صلب را با استفاده از تشابه مثلث‌ها می‌توان به دست آورد، به این ترتیب که مثلث با رئوس  $B$ ،  $C$  و  $D$  با مثلثی با رئوس انتهایی بردار شتاب آن سه نقطه با مبدأ قطب شتاب  $O_A$  (یعنی نقاط  $b$ ،  $c$  و  $d$ ) متشابه می‌باشد:



$$|\bar{A}_{B_n/C_n}| = \left[ |\bar{A}_{B_n/C_n}^n|^2 + |\bar{A}_{B_n/C_n}^t|^2 \right]^{1/2} = (CB) \sqrt{\omega_n^4 + \alpha_n^2} = cb$$

و به همین ترتیب:

$$|\bar{A}_{C_n/D_n}| = (DC) \sqrt{\omega_n^4 + \alpha_n^2} = dc$$

$$|\bar{A}_{D_n/B_n}| = (BD) \sqrt{\omega_n^4 + \alpha_n^2} = bd$$

$$\Rightarrow \frac{cb}{CB} = \frac{dc}{DC} = \frac{bd}{BD} = \sqrt{\omega_n^4 + \alpha_n^2} \Rightarrow \Delta BCD \sim \Delta bcd \quad \text{ض.ض.ض.}$$

$$\gamma_n = \text{tg}^{-1} \left( \frac{\alpha_n}{\omega_n^2} \right)$$

### سینماتیک تماس مستقیم:

#### شتاب نسبی (مشهود - غیرمشهود) بین دو نقطه برهم منطبق از دو جسم صلب متمایز

در صورتی که دستگاه مختصات موضعی  $xyz$ ، در نقطه  $P$  اما بر روی جسم  $m$  (یا بر روی گستره طبیعی بدون جرم جسم صلب  $m$ ) نصب گردد، آن گاه بردار موقعیت  $\bar{r}$  برابر صفر شده و در نتیجه شتاب متقاطع نیز صفر گردیده و یک مجهول حذف خواهد شد. در عین حال شتاب جانب مرکز نیز به علت صفر شدن  $\bar{r}$ ، حذف گردیده و می توان نوشت:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{v} & o\sqrt{v} \\ \bar{A}_{XYZ}^n + \bar{A}_{XYZ}^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{v} & \sqrt{v} \\ \bar{A}_O^n + \bar{A}_O^t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{v} & o\sqrt{v} \\ \bar{A}_{xyz}^n + \bar{A}_{xyz}^t \end{pmatrix} + \bar{A}_{Cor}$$



و یا به شکل جدید آن:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{\nu} & o\nu \\ \bar{A}_{P_n}^n + \bar{A}_{P_n}^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\nu} & \sqrt{\nu} \\ \bar{A}_{P_m}^n + \bar{A}_{P_m}^t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{\nu} & o\nu \\ \bar{A}_{P_{n/m}}^n + \bar{A}_{P_{n/m}}^t \end{pmatrix} + \bar{A}_{P_n/P_m}^c$$

همان‌طور که دیده می‌شود، شتاب نسبی  $(\bar{A}_{P_n} - \bar{A}_{P_m})$  دارای دو بخش است، بخش اول، شتاب‌های مماسی و قائم نسبی بین دو نقطه است که مشهود بوده و در امتداد مماس و عمود بر مسیر نقطه P در دستگاه xyz می‌باشند، که به علت مشهود بودن آن، از نماد  $\bar{A}_{P_n/m}$  برای آن دو استفاده شده، شتاب مماسی نسبی  $\bar{A}_{P_n/m}^t$  در امتداد سرعت نسبی  $\bar{V}_{P_n/m}$ ، یعنی در امتداد مماس مشترک سطوح در تماس دو بند بوده و در نتیجه شتاب قائم نسبی  $\bar{A}_{P_n/m}^n$  در امتداد عمود مشترک سطوح در تماس دو بند خواهد بود. بخش دوم، شتاب کوریولی نقطه  $P_n$  است که از دستگاه xyz قابل مشاهده نبوده و تنها از دید ناظر مستقر در دستگاه XYZ قابل مشاهده می‌باشد. به علت ماهیت غیرمشهود بودن آن، از نماد  $\bar{A}_{P_n/P_m}^c$  برای آن استفاده می‌شود. باتوجه به رابطه:

$$\bar{A}_{P_n/P_m}^c = 2\bar{\omega}_m \times \bar{V}_{P_n/m}$$

و نیز با در نظر داشتن این مسئله که  $\bar{\omega}_m$  بر صفحه حرکت عمود بوده و  $\bar{V}_{P_n/m}$  نیز در امتداد مماس مشترک سطوح در تماس است، می‌توان نتیجه گرفت که شتاب کوریولی در امتداد عمود مشترک سطوح در تماس، یعنی هم‌امتداد با شتاب قائم می‌باشد، و مقدار آن هم برابر  $2\omega_m V_{P_n/m}$  خواهد بود. که البته همه این مسایل در مورد تماس غلتش همراه با لغزش، که در آن  $V_{P_n/m} \neq 0$ ، معتبر است.

به عنوان مثال، سازوکار سه میله‌ای تماس مستقیم قبل را در نظر گرفته و باتوجه به معلوم بودن سرعت و شتاب زاویه‌ای بند 2 (هر دو در جهت ساعت‌گرد)، به عنوان ورودی، سرعت و شتاب زاویه‌ای بند 3 را می‌توان به‌دست آورد:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{\nu} & o\nu \\ \bar{A}_{P_3}^n + \bar{A}_{P_3}^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\nu} & \sqrt{\nu} \\ \bar{A}_{P_2}^n + \bar{A}_{P_2}^t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{\nu} & o\nu \\ \bar{A}_{P_{3/2}}^n + \bar{A}_{P_{3/2}}^t \end{pmatrix} + \bar{A}_{P_3/P_2}^c$$

$$\bar{A}_{P_2}^n = \bar{\omega}_2 \times (\bar{\omega}_2 \times \overline{O_2P}) : (\overline{O_2P}) \omega_2^2, \parallel O_2P, O_2 \text{ به } P \text{ جهت}$$

$$\bar{A}_{P_2}^t = \bar{\alpha}_2 \times \overline{O_2P} : (\overline{O_2P}) \alpha_2, \perp O_2P, \searrow$$

$$\bar{A}_{P_3}^n = \bar{\omega}_3 \times (\bar{\omega}_3 \times \overline{O_3P}) : (\overline{O_3P}) \omega_3^2, \parallel O_3P, O_3 \text{ به } P \text{ جهت}$$

$$\bar{A}_{P_3}^t = \bar{\alpha}_3 \times \overline{O_3P} : (\overline{O_3P}) \alpha_3 \text{ (مقدار)}, \perp O_3P$$

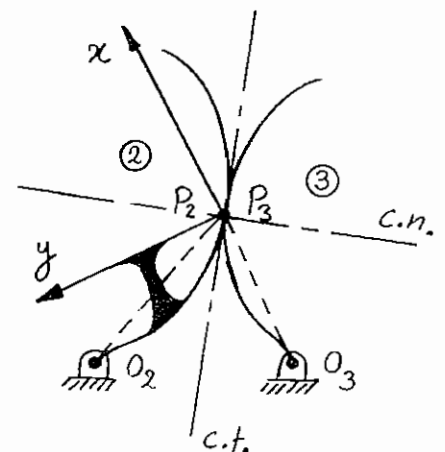
$$\bar{A}_{P_{3/2}}^n : \frac{V_{P_{3/2}}^2}{\rho_{P_{3/2}}}, \parallel c \cdot n$$

$P_{3/2}$  باید از روش ترسیمی هارتمن ویا معادلات اوپلر - ساواری به‌دست آید. جهت شتاب قائم نیز به سمت مرکز انحنا خواهد بود.

$$\bar{A}_{P_3/P_2}^c = 2\bar{\omega}_2 \times \bar{V}_{P_{3/2}} : 2\omega_2 V_{P_{3/2}}, \parallel c \cdot n$$

چون جهت  $V_{P_{3/2}}$  به سمت بالا بوده و  $\omega_2$  نیز ساعت‌گرد است، جهت شتاب کوریولی به سمت بند 3 خواهد بود.

راستای شتاب مماسی  $\bar{A}_{P_3}^t$  در امتداد عمود بر خط  $O_3P$  می‌باشد.

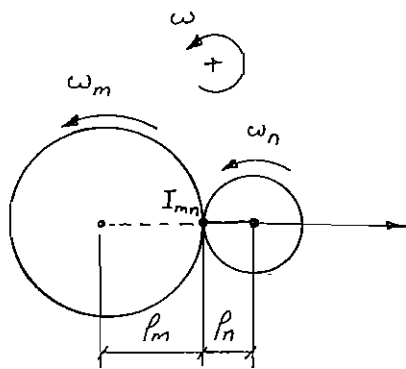


راستای شتاب مماسی نسبی  $\bar{A}_{P_3/2}^1$  در امتداد مماس مشترک سطوح در تماس می‌باشد. پس از رسم چند ضلعی شتاب، بردارهای  $\bar{A}_{P_3}^1$  و  $\bar{A}_{P_3/2}^1$  به دست می‌آیند و توسط آن‌ها می‌توان، شتاب زاویه‌ای بند 3 را تعیین نمود:

$$\alpha_3 = \frac{|\bar{A}_{P_3}^1|}{(O_3P)}$$

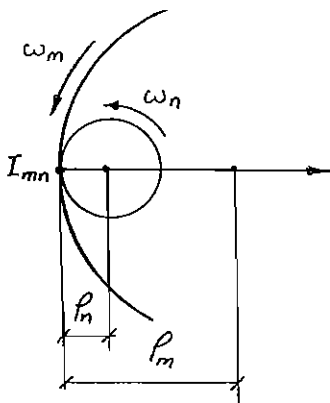
### شتاب غلتشی

در حالت غلتش خالص،  $\bar{V}_{P_3} = \bar{V}_{P_2}$  بوده و بنابراین  $\bar{V}_{P_3/2}$  و در نتیجه شتاب کوریولی برابر صفر خواهد بود. می‌توان ثابت کرد که در این حالت شتاب قائم نیز برابر صفر بوده و تنها شتاب مماسی وجود دارد که در این حالت خاص، تنها مؤلفه شتاب نسبی، که شتاب مماسی است، در امتداد عمود مشترک سطوح در تماس است، که این مطلب در بحث «تئوری انحنای مسیر» اثبات می‌گردد. مقدار این شتاب مماسی از روابط زیر محاسبه می‌شود (که  $\rho_m$  و  $\rho_n$  شعاع دایره انحنای سطوح در محل تماس است) و در اصطلاح به این شتاب، شتاب غلتشی گویند:



#### الف) سطوح غلتان خارجی:

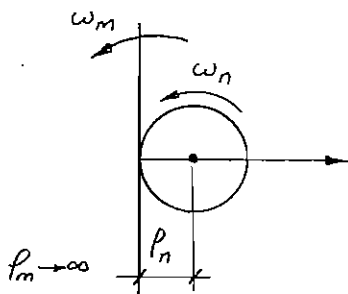
$$\bar{A}_{(I_{mn})_{n/m}}^r = \frac{\rho_m \rho_n}{\rho_m + \rho_n} (\omega_m - \omega_n)^2$$



#### ب) سطوح غلتان داخلی:

$$\left| \bar{A}_{(I_{mn})_{n/m}}^r \right| = \frac{\rho_m \rho_n}{\rho_m - \rho_n} (\omega_m - \omega_n)^2$$

ج) یکی از سطوح خارجی یا داخلی خط صاف باشد ( $\rho_m \rightarrow \infty$ ):

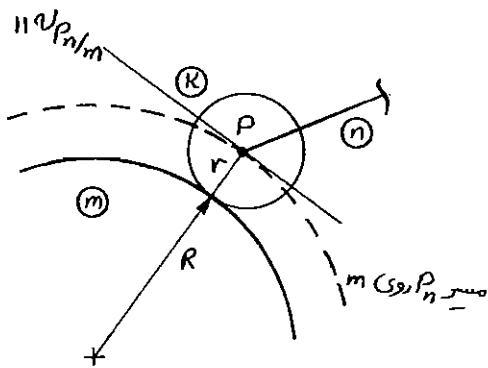


$$\left| \bar{A}_{(I_{mn})_{n/m}}^r \right| = \rho_n (\omega_m - \omega_n)^2$$

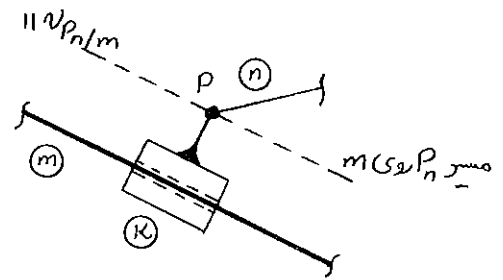
- توجه شود که راستای شتاب غلتشی در امتداد عمود مشترک سطوح در تماس غلتان بوده و جهت آن در جهت احتمال جدا شدن جسم متحرک نسبی (در شکل‌های بالا، جسم  $n$ ) می‌باشد.

- در صورتی که جسم متحرک نسبی، جسم  $m$  باشد، آن‌گاه راستا و مقدار شتاب  $\bar{A}_{(I_{mn})_{m/n}}^r$  مانند شکل‌های فوق بوده اما جهت آن برعکس خواهد شد.

در بعضی از مسایل که شامل یک لغزنده یا دیسک تماس مستقیم (غلتش خالص و یا غلتش همراه یا لغزش) است، می‌توان با حذف لغزنده یا دیسک، مستقیماً رابطه سرعت‌ها و شتاب‌ها را بین دو بند واقع در طرفین لغزنده یا دیسک نوشت، که به این ترتیب حل مسئله ساده‌تر و از مسیری کوتاه‌تر صورت می‌گیرد:



شعاع انحنای مسیر  $P_n$  روی  $m$   $(R+r)$



با حذف بند  $k$  می‌توان نوشت:

$$\bar{V}_{P_n} = \bar{V}_{P_m} + \bar{V}_{P_n/m}$$

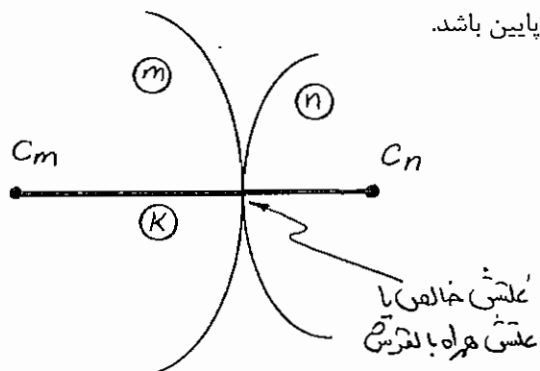
$$\left( \bar{A}_{P_n}^n + \bar{A}_{P_n}^t \right) = \left( \bar{A}_{P_m}^n + \bar{A}_{P_m}^t \right) + \left( \bar{A}_{P_n/m}^n + \bar{A}_{P_n/m}^t \right) + \bar{A}_{P_n/P_m}^c$$

- به خصوص در مورد لغزنده مستقیم الخط که در آن شتاب  $\bar{A}_{P_n/m}^n$  صفر بوده و نیازی به محاسبه  $P_{n/m}$  نیست.

## فصل ششم

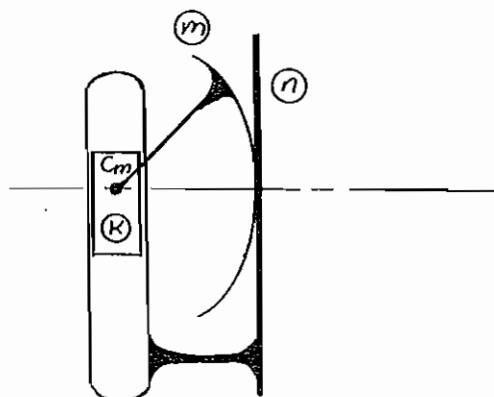
### سازوکارهای صفحه‌ای معادل

در سازوکارهای تماس مستقیم، از آن‌جا که محاسبه شتاب نسبی قائم (در تماس غلتش همراه با لغزش) و تیز محاسبه شتاب غلتشی (در تماس غلتش خالص) مشکل بوده و یا حل مسئله را طولانی می‌سازد، می‌توان تمهیدی به کار برد تا اتصال تماس مستقیم که یک اتصال مرتبه بالاتر است، حذف گردیده و سازوکار تنها شامل اتصالات مرتبه پایین باشد.



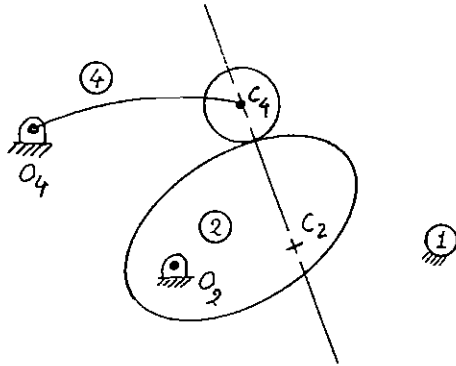
به این منظور، یک بند اضافی بین مراکز انحناى سطوح تماس دو بند، به صورت دو سر لولا اضافه می‌شود، که به جای سازوکار قبلی با اتصال تماس مستقیم، می‌توان از سازوکار جدید که نسبت به حالت قبل خود، یک بند و دو اتصال لولا اضافه دارد، استفاده نمود، مانند شکل که به جای بندهای  $m$  و  $n$  که در تماس مستقیم هستند، از بندهای  $m$ ،  $n$  و  $k$  که دوه‌دو در محل  $C_m$  و  $C_n$  لولا شده‌اند، استفاده می‌شود.

در صورتی که شعاع انحناى یکی از بندها (مثلاً  $n$ ) بی‌نهایت باشد، یعنی منحنی بند  $n$  در محل تماس، خط راست باشد، آن‌گاه طول بند شماره  $k$ ، بی‌نهایت شده و بنابراین بند به لغزنده تبدیل می‌شود، که در این حالت مسیر نقطه  $C_m$  نسبت به بند  $n$ ، به طور لحظه‌ای، یک خط راست خواهد بود (عبور از نقطه عطف مسیر).

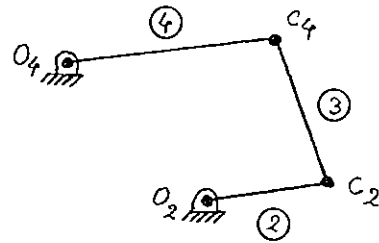


لازم به ذکر است، در صورتی که سطوح در تماس بندهای  $m$  و  $n$ ، هر دو دایره بوده و یا یکی از آن‌ها دایره و دیگری خط راست (دایره به شعاع بی‌نهایت) باشد، سازوکار معادل، دیگر لحظه‌ای نبوده و دائمی است.

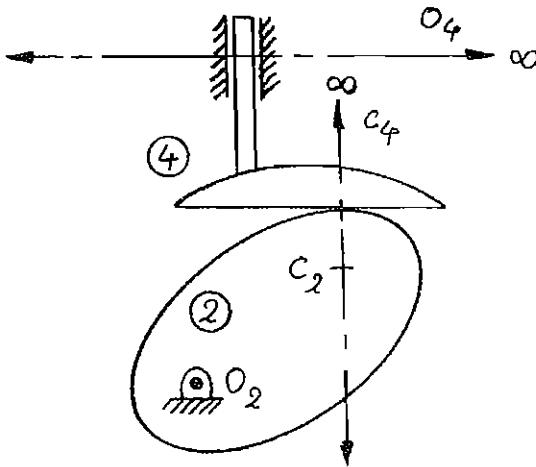
در زیر، مثال‌هایی از سازوکارهای صفحه‌ای معادل آمده است:



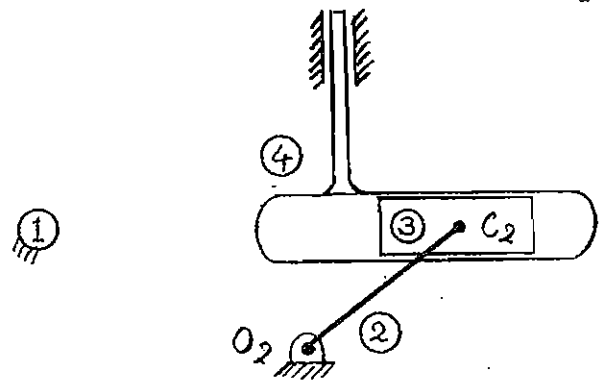
« بادامک چرخان - پیرو غلتکی نوسانی »



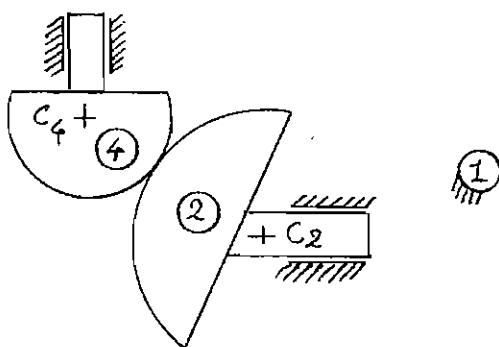
« سازوکار چهار میله‌ای معادل »



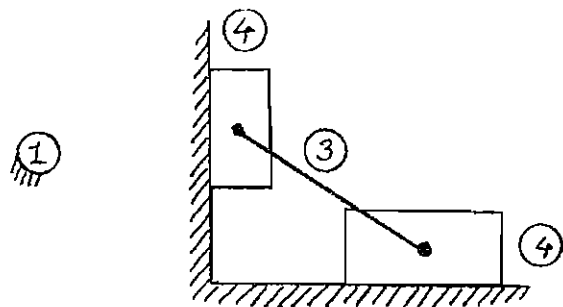
« بادامک چرخان - پیرو تخت آرو »



« سازوکار چهار میله‌ای معادل - یوغ اسکاتلندی »



« بادامک انتقالی - پیرو کشکی آرو »



« سازوکار چهار میله‌ای معادل - بیضی نگار »

# فصل هفتم

## چرخ‌لنگر

### کلیات

چرخ‌لنگر، جرم متقارن چرخانی است که برای ذخیره انرژی جنبشی و یکنواخت نمودن جریان انرژی بین منبع قدرت (توان) و مصرف‌کننده، به کار می‌رود. انرژی جنبشی یک جسم صلب که حول یک محور اصلی‌اش در حال چرخش است، برابر است با:  $E_K = \frac{1}{2}I\omega^2$  که  $\omega$  سرعت زاویه‌ای و  $I$  گشتاور ماند جسم صلب، حول محور چرخش آن است. برای تغییر دادن مقدار انرژی جنبشی دو راه وجود دارد، تغییر دادن  $I$ ، که مشکل به نظر می‌رسد و تغییر دادن  $\omega$ ، که عملی‌تر است. هرگاه سرعت زاویه‌ای افزایش یابد، انرژی جنبشی نیز افزایش می‌یابد و با کاهش سرعت زاویه‌ای، انرژی جنبشی کاهش می‌یابد. به همین ترتیب با انجام کار مثبت روی یک جسم سنگین چرخان می‌توان انرژی جنبشی (و در نتیجه سرعت زاویه‌ای) آن را افزایش داد و این جرم چرخان به نوبه خود می‌تواند کار مثبت انجام دهد که در نتیجه، انرژی جنبشی (و سرعت زاویه‌ای) آن کاهش می‌یابد. به همین علت از چرخ‌لنگر برای مصرف یا تولید یکنواخت انرژی استفاده می‌شود.

از نظر تولید و مصرف انرژی، دستگاه‌های صنعتی به یکی از سه شکل زیر عمل می‌نمایند:

تولید غیریکنواخت انرژی و مصرف یکنواخت آن، مانند موتورهای احتراق داخلی

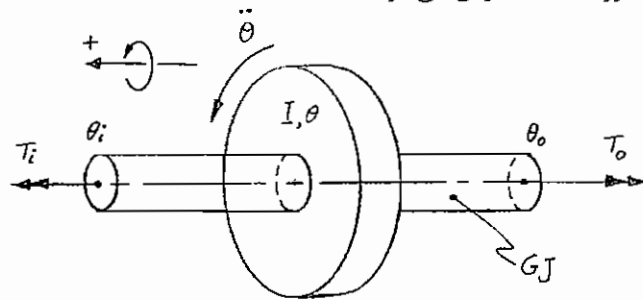
تولید یکنواخت انرژی و مصرف غیریکنواخت آن، مانند دستگاه پرس و نقطه جوش

تولید و مصرف غیریکنواخت انرژی، مانند پمپ پیستونی با محرک موتور دیزل

برای مثال در یک موتور احتراق داخلی تک سیلندر چهار زمانه، تنها در یک کورس پیستون، انرژی تولید می‌شود، بنابراین تنها در  $\frac{1}{4}$  چرخه کاری موتور، انرژی تولید می‌گردد که یک منبع تولید انرژی مکانیکی غیریکنواخت است. با استفاده از یک چرخ‌لنگر می‌توان در کورس تولید انرژی، سرعت چرخ‌لنگر را افزایش داد تا انرژی در آن ذخیره شده و در سه کورس دیگر که انرژی تولید نمی‌شود، مصرف گردد، که این امر سبب کاهش سرعت چرخ‌لنگر می‌گردد. این مسئله حتی در زندگی روزمره هم به چشم می‌خورد، تولید آب در طبیعت غیریکنواخت بوده، در حالی که مصرف آب توسط انسان، به‌طور تقریبی ثابت است، که برای حل این مشکل، از سدهای بزرگ برای ذخیره آب در فصول پرباران و مصرف آن در فصول کم باران استفاده می‌شود.

## معادلات حرکت، روابط کار و انرژی در چرخ‌لنگر

در شکل زیر، پیکره آزاد یک چرخ‌لنگر همراه محور آن ترسیم شده است. گشتاور ماند چرخ‌لنگر حول محور گردش برابر  $I$  بوده و موقعیت زاویه‌ای آن  $\theta$  می‌باشد. گشتاورهای ورودی (محرک)  $T_i$  و خروجی (مقاوم)  $T_o$ ، در دو طرف محور چرخ‌لنگر وارد شده‌اند و موقعیت زاویه‌ای سطح مقطع محور در محل وارد شدن این لنگرها، به ترتیب با  $\theta_i$  و  $\theta_o$  نمایش داده شده‌اند. گشتاور  $T_i$  سبب افزایش انرژی جنبشی چرخ‌لنگر و گشتاور  $T_o$  سبب کاهش آن می‌شود. با استفاده از معادله اویلر می‌توان معادله حرکت چرخ‌لنگر را نوشت. برای این منظور، جهت گشتاور  $T_i$  مثبت فرض می‌شود:



$$T_i(\theta_i, \dot{\theta}_i) - T_o(\theta_o, \dot{\theta}_o) = I\ddot{\theta}$$

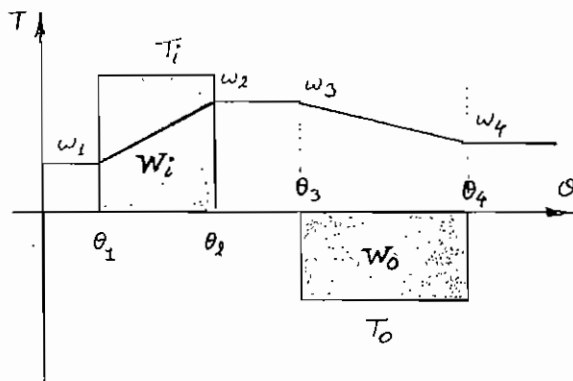
مقادیر  $T_i$  و  $T_o$ ، هر دو در حالت کلی، تابعی از موقعیت زاویه‌ای سطح مقطع محور در محل خود و نیز سرعت زاویه‌ای در آن محل هستند. معمولاً گشتاور، تنها به یکی از این دو کمیت وابسته است.

مثلاً اگر گشتاور ورودی توسط یک موتور القایی (Induction Motor) تأمین گردد، گشتاور  $T_i$  به سرعت دورانی موتور بستگی دارد، که شرکت‌های تولید کننده موتورهای الکتریکی، نمودارهای گشتاور بر حسب سرعت زاویه‌ای را با جزئیات کامل چاپ نموده و در اختیار مصرف کننده قرار می‌دهند.

با در دست داشتن توابع گشتاورهای ورودی و خروجی می‌توان معادله حرکت فوق را با استفاده از روش‌های حل معادلات دیفرانسیل خطی یا غیرخطی حل نمود و موقعیت زاویه‌ای و سرعت زاویه‌ای چرخ‌لنگر را به صورت توابعی از زمان به دست آورد که این مطلب از حوصله این بحث خارج است. برای سادگی فرض می‌شود محوری که چرخ‌لنگر روی آن سوار شده صلب بوده و تحت لنگرهای وارده دچار پیچش نمی‌شود، بنابراین:

$$\theta_i = \theta_o = \theta \Rightarrow T_i(\theta, \omega) - T_o(\theta, \omega) = I\ddot{\theta}$$

هرگاه توابع گشتاورها در دست بوده و مقادیر اولیه موقعیت زاویه‌ای  $\theta$  و سرعت زاویه‌ای  $\omega$  معلوم باشند، می‌توان معادله را برای  $\alpha$ ،  $\omega$  و  $\theta$  به صورت توابعی از زمان حل نمود.



اما در بحث حاضر، تعیین مقادیر لحظه‌ای کمیت‌های سینماتیکی چرخ‌لنگر، مورد نظر نبوده و در وهله اول عملکرد کلی (و نه لحظه‌ای) یک چرخ‌لنگر دارای اهمیت است. برای به دست آوردن یک ایده کلی از بحث، نمودار فرضی  $T-\theta$  که در شکل رسم شده، بررسی می‌شود:

در حالی که موقعیت زاویه‌ای چرخ‌لنگر بین  $\theta_1$  و  $\theta_2$  است، یک منبع قدرت ورودی با گشتاور ثابت  $T_i$  روی چرخ‌لنگر اثر می‌کند، که این گشتاور، مثبت فرض شده و منحنی مربوط به آن، در بالای محور  $\theta$  رسم شده است. در این مدت، این گشتاور، یک شتاب زاویه‌ای مثبت ایجاد می‌نماید که سبب افزایش سرعت زاویه‌ای از  $\omega_1$  به  $\omega_2$  می‌شود و کار انجام شده بر روی چرخ‌لنگر مثبت بوده و برابر مساحت زیر منحنی  $T-\theta$  است. مقدار این کار انجام شده برابر است با افزایش انرژی جنبشی چرخ‌لنگر (با صرف‌نظر از نیروهای اصطکاکی و...)، بنابراین:

$$w_i = T_i * (\theta_2 - \theta_1) = \Delta E_{ki} = \frac{1}{2} I \omega_2^2 - \frac{1}{2} I \omega_1^2 > 0$$

سپس چرخ‌لنگر از  $\theta_2$  تا  $\theta_3$  با گشتاور صفر و در نتیجه با شتاب صفر و سرعت ثابت دوران کرده و انرژی جنبشی آن تغییر نمی‌کند، بنابراین:

$$w = 0 \Rightarrow \Delta E_k = 0 \Rightarrow \omega_2 = \omega_3$$

از موقعیت زاویه‌ای  $\theta_3$  تا  $\theta_4$ ، یک بار مقاوم یا گشتاور خروجی با مقدار  $T_o$  روی چرخ‌لنگر اثر نموده، که علامت  $T_o$  منفی بوده و منحنی مربوط به آن در زیر محور  $\theta$  رسم گردیده. در این مدت گشتاور  $T_o$  یک شتاب زاویه‌ای منفی ایجاد می‌کند که سبب کاهش سرعت زاویه‌ای از  $\omega_3$  به  $\omega_4$  می‌گردد. گشتاور  $T_o$  در این مدت روی چرخ‌لنگر، کار منفی انجام داده و باعث کاهش انرژی جنبشی چرخ‌لنگر می‌گردد که مقدار کار انجام شده، برابر مقدار تغییر در انرژی جنبشی چرخ‌لنگر است، پس می‌توان نوشت:

$$w_o = T_o * (\theta_4 - \theta_3) = \Delta E_{ko} = \frac{1}{2} I \omega_4^2 - \frac{1}{2} I \omega_3^2 < 0$$

در مقام مقایسه بین مقادیر  $w_i$  و  $w_o$ ، سه حالت ممکن است پیش آید:

۱-  $|w_o| > |w_i|$ ، در این صورت بار مقاوم، انرژی بیشتری از آن چه گشتاور محرک به چرخ‌لنگر می‌دهد را جذب می‌نماید و بنابراین  $\omega_4 < \omega_1$  بوده و در هر چرخه کاری، سرعت چرخ‌لنگر مقداری کاهش می‌یابد.

۲-  $|w_o| = |w_i|$ ، در این حالت بین انرژی جذب شده توسط بار مقاوم و انرژی داده شده توسط گشتاور محرک به چرخ‌لنگر، توازن برقرار بوده و در پایان هر دوره کاری، سرعت چرخ‌لنگر برابر سرعت زاویه‌ای آن در ابتدای دوره است. ( $\omega_1 = \omega_4$ ).

۳-  $|w_o| < |w_i|$ ، در این مورد، بار مقاوم، انرژی کمتری از آن چه که گشتاور محرک به چرخ‌لنگر منتقل می‌کند را جذب نموده و نتیجه آن این است که  $\omega_4 > \omega_1$  بوده و در هر چرخه کاری، سرعت چرخ‌لنگر دائماً افزایش می‌یابد.

بدیهی است که موارد اول و سوم برای کارکرد متعادل و پایدار یک دستگاه، مناسب نبوده و حالت دوم یعنی وقتی که  $\omega_1 = \omega_4$  یا  $w_o = w_i$  باشد، بهترین حالت برای عملکرد دستگاه است و اگرچه در طی یک چرخه کاری دستگاه، سرعت زاویه‌ای متغییر است، اما حرکت دستگاه دوره‌ای (Periodic) بوده و در زمان‌های مساوی، چرخه‌های کاری خود را انجام می‌دهد. در این حالت می‌توان برای دستگاه یک سرعت چرخشی نامی (Nominal Speed) یا سرعت چرخشی متوسط (Average Speed) تعریف نمود و تغییرات سرعت را نسبت به این سرعت متوسط سنجید.

## ضریب تغییرات سرعت

هرگاه حرکت یک دستگاه به صورت دوره‌ای بوده و در هر چرخه کاری، سرعت زاویه‌ای آن دارای تغییراتی باشد، محدوده مجاز این تغییرات، با تعریف کمیتی که بیانگر میزان این تغییرات است و به آن ضریب تغییرات سرعت گویند، تعیین می‌شود که این ضریب، نسبت تغییرات مجاز سرعت بین دو حد بالایی و پایینی آن، به سرعت متوسط است:

$$c = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\bar{\omega}} \quad (\text{Coefficient of Fluctuation})$$





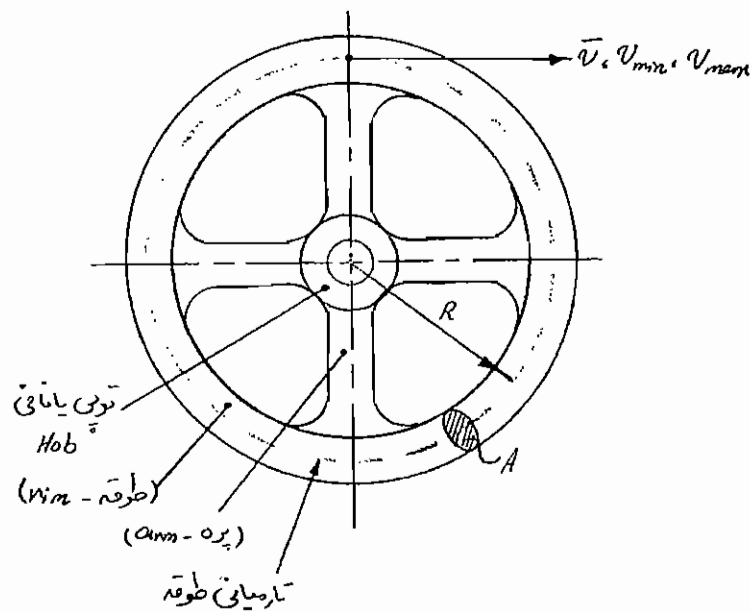
و بیشترین میزان تغییرات انرژی جنبشی، تقاضای این دو مقدار است:

$$\begin{aligned} \max(\Delta E_K) &= (E_K)_{\max} - (E_K)_{\min} = \frac{1}{2} I(\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2) \\ &= \frac{1}{2} I(\omega_{\max} - \omega_{\min})(\omega_{\max} + \omega_{\min}) = \frac{1}{2} I(C\bar{\omega})(2\bar{\omega}) = CI\bar{\omega}^2 \Rightarrow I = \frac{\max(\Delta E_K)}{C\bar{\omega}^2} \end{aligned}$$

به این ترتیب، با داشتن حداکثر میزان تغییرات انرژی جنبشی در طی یک دوره کاری و سرعت نامی چرخ‌لنگر، می‌توان گشتاور ماند چرخ‌لنگر را به نحوی تعیین نمود، که ضریب تغییرات سرعت به اندازه دلخواه بوده و سرعت زاویه‌ای در محدوده از پیش تعیین شده‌ای، تغییر نماید.

## طراحی ابعاد چرخ‌لنگر

معمولاً برای چرخ‌لنگر، از یک دیسک توپر و یا یک طوقه (rim) پره‌دار (arm) استفاده می‌شود که به این ترتیب با دور نمودن جرم از محور دوران، می‌توان مقدار I را زیاد نموده و در مصرف ماده صرفه‌جویی نمود.



حال اگر یک نقطه مشخص از طوقه چرخ‌لنگر را در نظر بگیریم، مثلاً یک نقطه روی تار میانی طوقه آن، با شعاع R، می‌توان نوشت:

$$V_{\max} = R\omega_{\max}, \quad V_{\min} = R\omega_{\min}, \quad \bar{V} = R\bar{\omega}$$

که مقادیر  $V_{\min}$  و  $V_{\max}$  به ترتیب حداکثر و حداقل سرعت خطی نقاط تار میانی طوقه چرخ‌لنگر در طول چرخه حرکت و  $\bar{V}$  نیز سرعت خطی متوسط این نقاط است.

حال می‌توان کمیتی به نام جرم مؤثر (Effective Mass) چرخ‌لنگر را تعریف نمود، به این صورت که  $m_{\text{eff.}} = \frac{I}{R^2}$  و عبارت از مقدار

جرمی است که اگر روی تار میانی طوقه متمرکز شود، گشتاور ماند آن برابر گشتاور ماند چرخ‌لنگر واقعی شود:  $I = (m_{\text{eff.}})R^2$  بنابراین می‌توان نوشت:

$$(m_{\text{eff.}})R^2 = \frac{\max(\Delta E_K)}{C\bar{\omega}^2} \Rightarrow m_{\text{eff.}} = \frac{\max(\Delta E_K)}{C\bar{V}^2}$$

در عمل همه جرم چرخ‌لنگر در طوقه آن متمرکز نبوده و پره‌ها و توپی نیز که در مقدار گشتاور ماند تأثیر دارند، دارای شعاع چرخشی (Gyration Radius) هستند که با  $R$  برابر نیست. برای حل این مشکل، جرم طوقه برابر ۹۰٪ جرم مؤثر در نظر گرفته می‌شود، به این ترتیب:

$$m_{rim} = 0.9m_{eff}$$

و با معلوم بودن شعاع متوسط طوقه و نوع ماده آن، می‌توان سطح مقطع طوقه را محاسبه نمود. معمولاً شکل سطح مقطع دایره، مستطیل، مربع یا بیضی است:

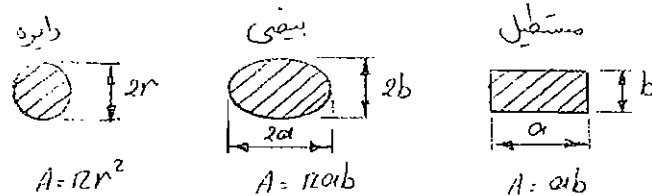
$$m_{rim} = \rho V_{rim} = \rho(2\pi RA) \Rightarrow A = \frac{m_{rim}}{2\pi R\rho}$$

که  $\rho$ ، جرم ویژه ماده به کار رفته در طوقه چرخ‌لنگر است و معمولاً از جنس فولاد یا چدن می‌باشد، که جرم ویژه این دو ماده برابر است با:

$$\rho_{steel} = 7830 \text{ (kg/m}^3\text{)}$$

$$\rho_{cast iron} = 7090 \text{ (kg/m}^3\text{)}$$

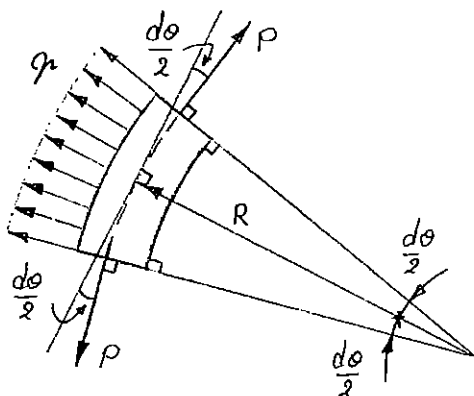
و مساحت سطح مقاطع مختلف عبارت است از:



## تنش‌های ایجاد شده در چرخ‌لنگر

هنگامی که چرخ‌لنگر در حال چرخش است، به ذرات طوقه و پره‌ها نیروی لختی گریز از مرکز وارد می‌شود که از دید ناظر غیرنیوتنی، باید توسط نیروهای داخلی بوجود آمده، خنثی شوند. به عبارت دیگر برای آن که ذرات چرخ‌لنگر بر روی مسیر دایره‌ای حرکت کنند، باید به آن‌ها نیرویی وارد شود که مسیر حرکت آن‌ها را از مسیر مستقیم الخط منحرف نماید، که این کار بر عهده همان نیروهای داخلی است. در صورتی که سرعت چرخشی چرخ‌لنگر افزایش پیدا کند، نیروهای داخلی دیگر توانایی تغییر مسیر ذرات را نداشته (به عبارت دیگر تنش‌های ایجاد شده از مقاومت نهایی جسم فراتر رفته) و چرخ‌لنگر دچار گسیختگی می‌گردد. در این قسمت با یک بحث

ساده، حلقه چرخانی که به صورت یکپارچه ساخته شده و می‌توان آن را جدار نازک ( $\frac{r}{R} \ll 1$ ) در نظر گرفت، بررسی می‌شود:



یک عنصر بسیار کوچک از طوقه که تحت بار شعاعی گسترده با شدت  $q$  (مثلاً نیروی گریز از مرکز) قرار دارد، در نظر گرفته می‌شود. در قسمت‌های برش خورده این عنصر کوچک، تنها کمیت مکانیکی قابل توجهی که می‌توان در نظر گرفت، نیروی محیطی  $p$  است که مماس بر تار میانی حلقه وارد می‌شود:

حال می‌توان معادله تعادل نیروها در امتداد شعاعی را نوشت:

$$\sum F_R = 0 \Rightarrow q(Rd\theta) - 2P(\sin \frac{d\theta}{2}) = 0$$

$$\sin \frac{d\theta}{2} \approx \frac{d\theta}{2} \Rightarrow p = qR$$

$$\Rightarrow \sigma_c = \frac{P}{A} = \frac{qR}{A}$$

به  $\sigma_c$  تنش محیطی گویند و  $A$  نیز سطح مقطع حلقه است.

حال فرض می‌شود که نیروی گسترده شعاعی  $q$ ، ناشی از نیروی گریز از مرکز باشد:

$$dm = \rho dV \quad dV = Ads = ARd\theta \Rightarrow dm = \rho ARd\theta$$

$$dF_R = (dm)R\omega^2 = \rho AR\omega^2 ds \quad q = \frac{dF_R}{ds} = \rho AR\omega^2$$

$$\sigma_c = \frac{qR}{A} = \rho R^2 \omega^2 = \rho V^2 \leq \sigma_p = \frac{\sigma_{u.t.}}{n} \quad V^2 \leq \frac{\sigma_p}{\rho} = V_u^2$$

به این ترتیب برای این که تنش محیطی از تنش مجاز تجاوز ننماید، سرعت خطی نقاط طوقه چرخ‌لنگر باید محدود نگاه داشته شود.

حداکثر سرعت خطی مجاز، به ماده مورد استفاده در چرخ‌لنگر بستگی دارد:

$$V_u = f(\sigma_{u.t.}, \rho, n)$$

که در آن  $n$  ضریب اطمینان بوده و مقدار حداکثر سرعت خطی مجاز برای چدن و فولاد به ترتیب برابر 30 m/sec و 40 m/sec است:

Cast iron :	$V_u=30$ (m/sec)	$\rho=7090$ (kg/m <sup>3</sup> )	[ $\Rightarrow \sigma_p=6.4$ (MN/m <sup>2</sup> )]
Steel :	$V_u=40$ (m/sec)	$\rho=7830$ (kg/m <sup>3</sup> )	[ $\Rightarrow \sigma_p=12.5$ (MN/m <sup>2</sup> )]

## فصل هشتم

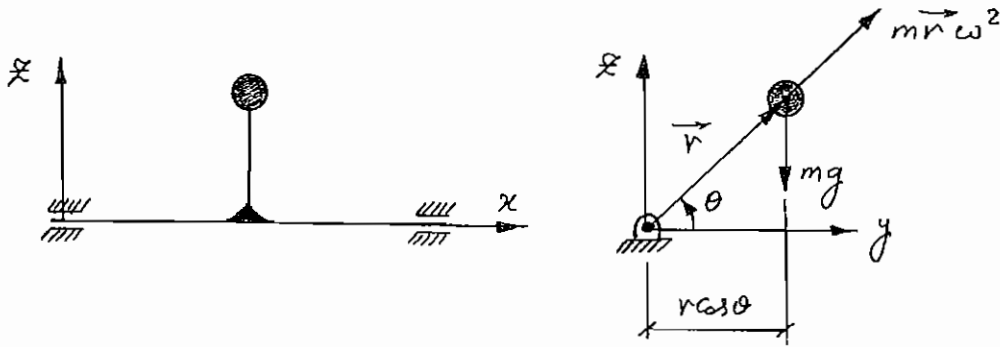
### ترازمندی اجرام چرخان

#### تعاریف اولیه:

- مقدار جرم خارج از محور یا خارج از مرکز: عبارت است از حاصل ضرب جرم در فاصله جرم تا محور چرخش آن.
- ترازمندی استاتیکی: عبارت است از ایجاد شرایط تعادل بی تفاوت (یا شرایطی نزدیک به آن) برای یک جسم صلب با قابلیت چرخش حول یک محور چرخش ثابت، از طریق از بین بردن (به حداقل رساندن، یا از یک حد استاندارد کمتر کردن) جرم خارج از محور چرخش.
- ترازمندی دینامیکی: عبارت است از حذف (به حداقل رساندن یا از یک حد استاندارد کمتر کردن) نیروها و گشتاورهای لرزشی ایجاد شده در تکیه‌گاه‌های یک جسم صلب چرخان حول یک محور ثابت، از طریق از بین بردن (به حداقل رساندن، یا از یک حد استاندارد کمتر کردن) جرم خارج از محور چرخش.
- جرم موازنه‌گر: جرمی است که باید از جسم صلب چرخان کاسته (یا به آن افزوده) گردد، تا شرایط ترازمندی (استاتیکی یا دینامیکی) جسم صلب چرخان فراهم شود.
- خودترازمندی: شرایطی است که طبق آن، جسم در شرایط استاندارد ترازمندی (استاتیکی یا دینامیکی) قرار داشته و نیازی به جرم موازنه‌گر ندارد.

توجه: در کلیه متن حاضر  $\sum_{i=1}^n \equiv \sum$  است.

### ترازندی تک جرم چرخان:



#### الف) ترازندی استاتیکی:

- شرایط خودترازندی:

چون لنگر ایجاد شده حول محور چرخش x با لنگر دیگری ترازندی نمی‌شود، بنابراین شرط خودترازندی استاتیکی برای آن وجود ندارد:

$$\sum M_x = mgr \cos \theta \neq 0 \quad (g \neq 0 \text{ به شرط})$$

- مشخصات جرم موازنه‌گر:

با افزودن جرم  $m_c$  در شعاع چرخش  $r_c$  تحت زاویه  $\theta_c$  به مجموعه بالا، می‌توان نوشت:

$$\sum M_x = mgr \cos \theta + m_c g r_c \cos \theta_c = g(mr \cos \theta + m_c r_c \cos \theta_c) = 0$$

رابطه فوق تحت هر زاویه چرخش کلی دیگر نیز باید صادق باشد، به این منظور، مجموعه اجرام چرخان فوق، تحت زاویه چرخش  $\frac{\pi}{2}$

نسبت به وضعیت نشان داده شده نیز، باید ترازند باشد:

$$\sum M_x = mgr \cos \left( \theta + \frac{\pi}{2} \right) + m_c g r_c \cos \left( \theta_c + \frac{\pi}{2} \right) = 0$$

$$\Rightarrow g(mr \sin \theta + m_c r_c \sin \theta_c) = 0$$

با فرض  $g \neq 0$ :

$$\Rightarrow \begin{cases} mr \sin \theta + m_c r_c \sin \theta_c = 0 \\ mr \cos \theta + m_c r_c \cos \theta_c = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_c r_c \sin \theta_c = -mr \sin \theta \\ m_c r_c \cos \theta_c = -mr \cos \theta \end{cases} \Rightarrow \text{tg} \theta_c = \text{tg} \theta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \theta_c = \theta \Rightarrow m_c r_c = -mr \\ \theta_c = \theta + \pi \Rightarrow m_c r_c = mr \end{cases}$$

نتیجه آن که، یا باید جرم خارج از مرکزی به همان اندازه ( $mr$ ) در طرف مقابل جرم چرخان اولیه اضافه گردد، یا در همان موضع، جرم خارج از مرکزی به اندازه ( $mr$ ) کم شود تا ترازمندی استاتیکی تأمین گردد.

### ب) ترازمندی دینامیکی:

- شرط خودترازمندی:

چون نیروی لرزشی ایجاد شده بر اثر جرم چرخان  $m$ ، با نیروی دیگری ترازمند نمی‌شود، بنابراین شرط خودترازمندی دینامیکی برای آن وجود ندارد:

$$\sum \vec{F}_S = m\vec{r}\omega^2 \neq \vec{0} \quad (\omega \neq 0)$$

$$\sum \vec{F}_S = m\vec{r}\omega^2 + m_c\vec{r}_c\omega^2 = \omega^2(m\vec{r} + m_c\vec{r}_c) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow m\vec{r} + m_c\vec{r}_c = \vec{0} \quad (\omega \neq 0)$$

این معادله برداری، قابل تبدیل به دو معادله جبری به شرح زیر است:

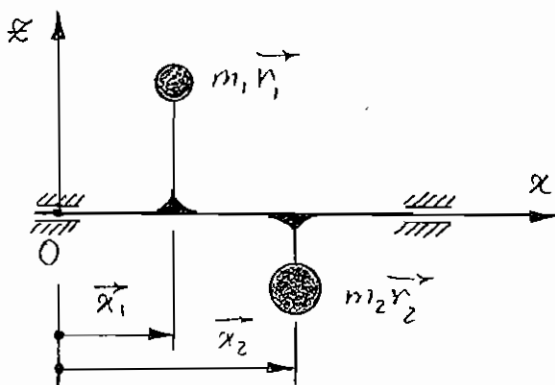
$$\begin{cases} mr \sin \theta + m_c r_c \sin \theta_c = 0 \\ mr \cos \theta + m_c r_c \cos \theta_c = 0 \end{cases}$$

که همان معادلات حاکم برای ترازمندی استاتیکی است و شرایط ایجاد ترازمندی استاتیکی یکسان است.

### ج) نتیجه:

به منظور ترازمندی دینامیکی تک جرم چرخان، می‌توان آن را به صورت استاتیکی ترازمند نمود، به عبارت دیگر: ترازمندی دینامیکی  $\Leftrightarrow$  ترازمندی استاتیکی

### ترازمندی دو جرم چرخان:



### الف) ترازمندی استاتیکی:

$$\sum M_x = 0 \Rightarrow m_1 g r_1 \cos \theta_1 + m_2 g r_2 \cos \theta_2 = 0$$

- شرایط خودترازمندی:

با چرخش محور به اندازه  $\frac{\pi}{2}$ :

$$\begin{cases} m_1 r_1 \sin \theta_1 + m_2 r_2 \sin \theta_2 = 0 \\ m_1 r_1 \cos \theta_1 + m_2 r_2 \cos \theta_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \operatorname{tg} \theta_1 = \operatorname{tg} \theta_2$$

$$\begin{cases} \theta_1 = \theta_2 \Rightarrow m_2 r_2 = -m_1 r_1 \\ \theta_1 = \theta_2 + \pi \Rightarrow m_2 r_2 = m_1 r_1 \Rightarrow m_1 \vec{r}_1 = -m_2 \vec{r}_2 \end{cases}$$

که شرط اول غیرممکن است و اگر دو جرم خارج از مرکز برابر بوده  $(m_1 r_1 = m_2 r_2)$  و روبه‌روی هم نصب شوند، ترازمندی استاتیکی برقرار است.

### ب) ترازمندی دینامیکی:

شرایط خودترازمندی نیروهای لرزشی:

$$\sum \vec{F}_S = \vec{0} \Rightarrow m_1 \vec{r}_1 \omega^2 + m_2 \vec{r}_2 \omega^2 = 0 \Rightarrow m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = \vec{0}$$

که معادل شرایط خودترازمندی استاتیکی است.

شرایط خودترازمندی گشتاورهای لرزشی:

$$\sum (\vec{M}_S)_O = \vec{0} \Rightarrow (x_1 \vec{e}_x \times m_1 \vec{r}_1 + x_2 \vec{e}_x \times m_2 \vec{r}_2) \omega^2 = \vec{0}$$

$\vec{e}_x$  بردار یکه در امتداد محور  $x$  بوده و ضرب خارجی آن، در هر برداری عمود بر محور  $x$ ، سبب چرخش آن به اندازه  $\frac{\pi}{2}$  در امتداد ساعت‌گرد (هر گاه ناظر در سمت چپ محور چرخش قرار گیرد) می‌شود، بنابراین تأثیری در معادله برداری نداشته و می‌توان نوشت:

$$x_1 m_1 \vec{r}_1 + x_2 m_2 \vec{r}_2 = \vec{0}$$

$$m_1 \vec{r}_1 = -m_2 \vec{r}_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

بنابراین، دو جرم چرخان باید در یک صفحه عمود بر محور  $x$  واقع باشند تا گشتاورهای لرزشی ایجاد شده خودترازمند شوند، در غیراین صورت:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1 m_1 \vec{r}_1 - x_2 m_1 \vec{r}_1 = (x_1 - x_2) m_1 \vec{r}_1 \neq 0$$

دو جرم خارج از مرکز یک زوج نیروی لرزشی عمود بر صفحه گذرنده از دو جرم و محور چرخش، ایجاد می‌نمایند، که همراه با محور چرخش، چرخیده و سبب ایجاد ارتعاشات چرخشی محور حول مرکز جرم کل مجموعه خواهد شد. برای ترازمندی نمودن آن باید دو جرم خارج از مرکز برابر در همان صفحه، در فاصله‌ای نصب گردد که زوج نیروی لرزشی حاصله، از نظر مقدار برابر و در خلاف جهت زوج نیروی لرزشی دو جرم چرخان اولیه باشد.

$$(x_3 - x_4) m_3 \vec{r}_3 = -(x_1 - x_2) m_1 \vec{r}_1$$

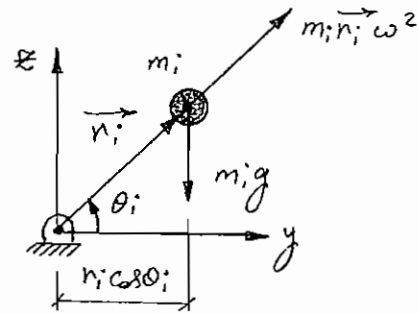
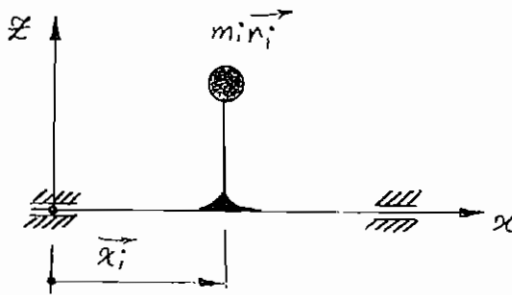
### ج) نتیجه:

برای ترازمندی دو جرم چرخان در دو صفحه متمایز عمود بر محور چرخش، ترازمندی استاتیکی کافی نبوده و باید شرط ترازمندی دینامیکی برقرار شود.

به عبارت دیگر: ترازمندی دینامیکی  $\Leftarrow$  ترازمندی استاتیکی



ترازمندی اجرام چرخان هم صفحه:



$$\bar{x}_i = \bar{x} \quad i=1,2,\dots,n$$

الف) ترازمندی استاتیکی:

- شرایط خودترازمندی:

$$\sum M_x = 0 \Rightarrow \sum m_i g r_i \cos \theta_i = 0$$

با چرخش محور به اندازه  $\frac{\pi}{2}$

$$\sum m_i g r_i \sin \theta_i = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sum m_i r_i \sin \theta_i = 0 \\ \sum m_i r_i \cos \theta_i = 0 \end{cases} \quad (\text{شرایط خودترازمندی استاتیکی})$$

- مشخصات جرم موازنه گر:

اگر شرایط خودترازمندی برقرار نباشد، آن گاه با افزودن یک جرم خارج از مرکز  $m_c \bar{r}_c$  در هر موقعیت محوری (x) دلخواهی، می توان نوشت:

$$\begin{cases} \sum m_i r_i \sin \theta_i + m_c r_c \sin \theta_c = 0 \\ \sum m_i r_i \cos \theta_i + m_c r_c \cos \theta_c = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_c r_c \sin \theta_c = -\sum m_i r_i \sin \theta_i \\ m_c r_c \cos \theta_c = -\sum m_i r_i \cos \theta_i \end{cases}$$

$$\text{tg} \theta_c = \frac{\sin \theta_c}{\cos \theta_c} = \frac{-\sum m_i r_i \sin \theta_i}{-\sum m_i r_i \cos \theta_i} \quad \text{و} \quad m_c r_c = \frac{-\sum m_i r_i \sin \theta_i}{\sin \theta_c}$$

توجه شود که زاویه  $\theta_c$  با توجه به علامت  $\sin \theta_c$  و  $\cos \theta_c$  در ربع مناسب انتخاب شود.

**ب) ترازمندی دینامیکی:**

- شرایط خودترازمندی نیروهای لرزشی:

$$\sum \vec{F}_S = \vec{0} \Rightarrow \sum m_i \vec{r}_i \omega^2 = \vec{0} \Rightarrow \sum m_i \vec{r}_i = \vec{0}$$

که این معادله برداری، معادل همان دو معادله جبری ترازمندی استاتیکی است.

شرایط خودترازمندی گشتاورهای لرزشی: چون همه اجرام هم‌صفحه هستند و  $x_i = x, i = (1, 2, \dots, n)$  است:

$$\sum (\vec{M}_S)_O = \vec{0} \Rightarrow \sum x_i \vec{e}_x \times m_i \vec{r}_i \omega^2 = \vec{0} \Rightarrow x \sum \vec{e}_x \times m_i \vec{r}_i = \vec{0} \Rightarrow \sum m_i \vec{r}_i = \vec{0}$$

که همان معادله قبلی است، یعنی در صورت ترازمندی نیروهای لرزشی، گشتاورهای لرزشی خودترازمند خواهند بود.

- مشخصات جرم موازنه‌گر: مشابه با مشخصات جرم موازنه‌گر برای ترازمندی استاتیکی است.

**ج) نتیجه**

برای ترازمندی اجرام چرخان هم‌صفحه، ترازمندی استاتیکی کافی است، به عبارت دیگر:

ترازمندی دینامیکی  $\Leftrightarrow$  ترازمندی استاتیکی

برای ترازمندی استاتیکی یا دینامیکی مجموعه‌ای از اجرام چرخان هم‌صفحه، حداقل به یک جرم خارج از مرکز موازنه‌گر نیاز است.

**ترازمندی اجرام چرخان غیر هم‌صفحه:**

**الف) ترازمندی استاتیکی:**

- شرایط خودترازمندی: مانند حالت اجرام چرخان هم‌صفحه است.

- مشخصات جرم موازنه‌گر: مانند حالت اجرام چرخان هم‌صفحه است.

**ب) ترازمندی دینامیکی:**

- شرایط خودترازمندی نیروهای لرزشی: مانند اجرام چرخان هم‌صفحه است.

- شرایط خودترازمندی گشتاورهای لرزشی:

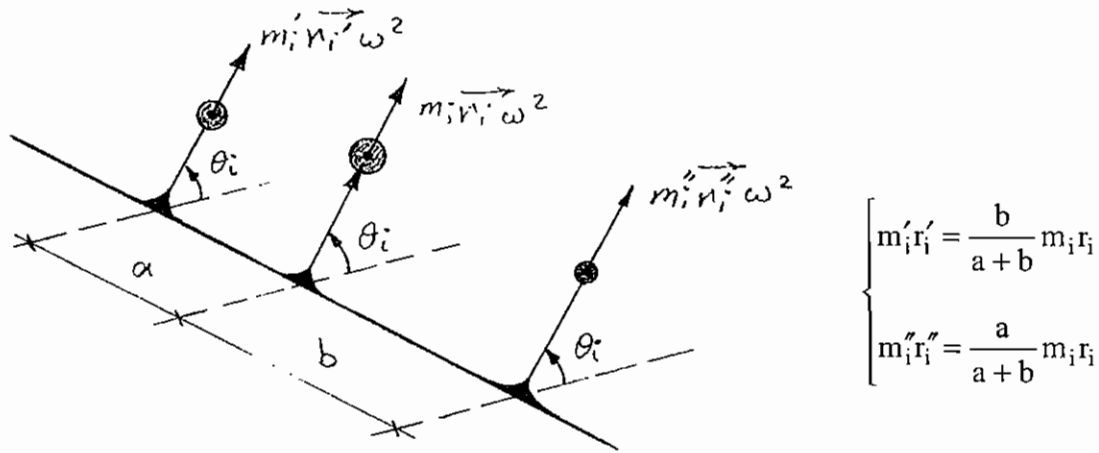
$$\sum (\vec{M}_S)_O = \vec{0} \Rightarrow \sum x_i \vec{e}_x \times m_i \vec{r}_i \omega^2 = \vec{0} \Rightarrow \sum x_i m_i \vec{r}_i = \vec{0} \quad (\omega \neq 0)$$

این رابطه برداری، معادل دو رابطه جبری زیر است:

$$\begin{cases} \sum x_i m_i r_i \sin \theta_i = 0 \\ \sum x_i m_i r_i \cos \theta_i = 0 \end{cases}$$

- مشخصات اجرام موازنه‌گر:

نیروی گریز از مرکز هر جرم خارج از مرکز  $m_i r_i$  را می‌توان به دو نیروی موازی، در دو صفحه دلخواه توزیع نمود، که مقدار هر یک از اجرام خارج از مرکز عبارت است از:



بنابراین یک گروه اجرام چرخان غیرهم‌صفحه، قابل توزیع به صورت دو گروه اجرام چرخان هم‌صفحه در دو صفحه دلخواه می‌باشند، که به صفحات اخیر، صفحات تصحیح گویند. باتوجه به آن‌که هر مجموعه از اجرام چرخان هم‌صفحه، حداقل با یک جرم خارج از مرکز ترازمند می‌شوند، هر مجموعه از اجرام چرخان غیرهم‌صفحه، حداقل با دو جرم خارج از مرکز ترازمند خواهند شد. به این ترتیب برای شرایط ترازمندی مجموعه‌ای از اجرام چرخان غیرهم‌صفحه، می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \text{I} \left\{ \begin{aligned} \sum m_i r_i \sin \theta_i + m_a r_a \sin \theta_a + m_b r_b \sin \theta_b &= 0 \\ \sum m_i r_i \cos \theta_i + m_a r_a \cos \theta_a + m_b r_b \cos \theta_b &= 0 \end{aligned} \right. \\ \text{II} \left\{ \begin{aligned} \sum x_i m_i r_i \sin \theta_i + x_a m_a r_a \sin \theta_a + x_b m_b r_b \sin \theta_b &= 0 \\ \sum x_i m_i r_i \cos \theta_i + x_a m_a r_a \cos \theta_a + x_b m_b r_b \cos \theta_b &= 0 \end{aligned} \right. \end{cases}$$

معادلات I مربوط به ترازمندی استاتیکی و نیز ترازمندی نیروهای لرزشی بوده و معادلات II مربوط به ترازمندی گشتاورهای لرزشی، و مجموعه معادلات I و II مربوط به ترازمندی دینامیکی است.

که در آن مجهولات عبارتند از:

مشخصات جرم موازنه‌گر a:  $m_a r_a, \theta_a, x_a$

مشخصات جرم موازنه‌گر b:  $m_b r_b, \theta_b, x_b$

باتوجه به آن که چهار معادله فوق، شش مجهول دارد، دو مجهول باید اختیاری انتخاب شود که معمولاً موقعیت صفحات تصحیح ( $x_a$ ) و ( $x_b$ ) انتخاب شده و صفحه  $YOZ$  دستگاه مختصات به صفحه تصحیح  $A$  منتقل می‌شود به این ترتیب  $x_a = 0$  شده و معادلات به شکل زیر ترمیم می‌شود:

$$\begin{cases} \text{I} \left\{ \begin{aligned} \sum m_i r_i \sin \theta_i + m_a r_a \sin \theta_a + m_b r_b \sin \theta_b &= 0 \\ \sum m_i r_i \cos \theta_i + m_a r_a \cos \theta_a + m_b r_b \cos \theta_b &= 0 \end{aligned} \right. \\ \text{II} \left\{ \begin{aligned} \sum x_i m_i r_i \sin \theta_i + x_b m_b r_b \sin \theta_b &= 0 \\ \sum x_i m_i r_i \cos \theta_i + x_b m_b r_b \cos \theta_b &= 0 \end{aligned} \right. \end{cases}$$

ابتدا معادلات II و سپس معادلات I به صورت جداگانه حل شده و مشخصات اجرام خارج از مرکز موثر به دست می‌آیند:

$$1) \tag{\theta}_b = \frac{\sin \theta_b}{\cos \theta_b} = \frac{-\left(\sum x_i m_i r_i \sin \theta_i\right)}{-\left(\sum x_i m_i r_i \cos \theta_i\right)}$$

توجه شود که زاویه  $\theta_b$  با توجه به علامت  $\sin \theta_b$  و  $\cos \theta_b$ ، در ربع مناسب انتخاب شود.

$$2) m_b r_b = \frac{\left(-\sum x_i m_i r_i \sin \theta_i\right)}{x_b \sin \theta_b}$$

$$3) \tag{\theta}_a = \frac{\sin \theta_a}{\cos \theta_a} = \frac{-\left(\sum m_i r_i \sin \theta_i + m_b r_b \sin \theta_b\right)}{-\left(\sum m_i r_i \cos \theta_i + m_b r_b \cos \theta_b\right)}$$

توجه شود که زاویه  $\theta_a$  با توجه به علامت  $\sin \theta_b$  و  $\cos \theta_b$ ، در ربع مناسب انتخاب شود.

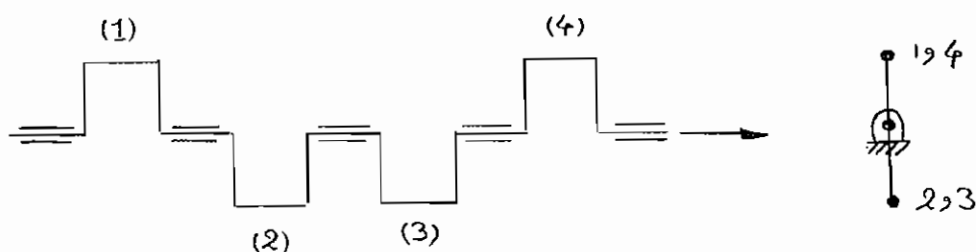
$$4) m_a r_a = \frac{\left(-\sum m_i r_i \sin \theta_i + m_b r_b \sin \theta_b\right)}{\sin \theta_a}$$

### ج) نتیجه:

برای ترازمندی اجرام چرخان غیرهم‌صفحه، ترازمندی استاتیکی کافی نبوده، و باید ترازمندی دینامیکی صورت پذیرد، به عبارت دیگر: ترازمندی دینامیکی  $\Leftrightarrow$  ترازمندی استاتیکی

در این حالت برای ترازمندی استاتیکی، حداقل به یک و برای ترازمندی دینامیکی، حداقل به دو جرم خارج از مرکز نیاز است.

به عنوان مثال، میل‌لنگ یک موتور چهار سیلندر چهار زمانه خطی بررسی می‌شود:



$$\begin{cases} m_i r_i = mr & i = 1, 2, 3, 4 \\ x_i - x_{i-1} = a \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta_1 = 0, & \theta_2 = \pi, & \theta_3 = \pi, & \theta_4 = 0 \\ x_1 = 0, & x_2 = a, & x_3 = 2a, & x_4 = 3a \end{cases}$$

$$\left\{ \sum m_i r_i \sin \theta_i = mr \sum \sin \theta_i = mr(4 \times 0) = 0 \right.$$

$$\left\{ \sum m_i r_i \cos \theta_i = mr \sum \cos \theta_i = mr(1 - 1 - 1 + 1) = 0 \right.$$

$$\left\{ \sum x_i m_i r_i \sin \theta_i = mr \sum x_i \sin \theta_i = mr(0 + a \times 0 + 2a \times 0 + 3a \times 0) = 0 \right.$$

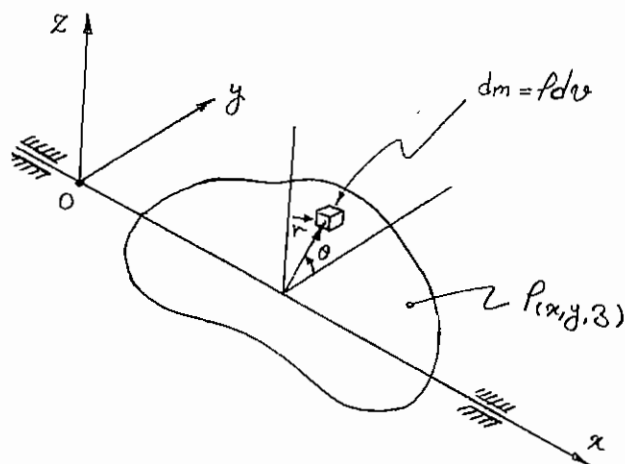
$$\left\{ \sum x_i m_i r_i \cos \theta_i = mr \sum x_i \cos \theta_i = mr(0 + a \times -1 + 2a \times -1 + 3a \times +1) = 0 \right.$$

بنابراین میل لنگ مذکور از نظر استاتیکی و دینامیکی خودترازمند است.

اگر زاویه  $2\pi$ ، توسط لنگ‌های میل لنگ به  $n$  بخش برابر تقسیم گردیده و در هر موقعیت تعداد لنگ‌ها یکسان بوده و تعداد موقعیت‌های زاویه‌ای لنگ‌ها (بدون احتساب موقعیت‌های تکراری) بیش از  $k$  باشد، روابط زیر می‌تواند مفید واقع گردد:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \sin\left(i \frac{2k\pi}{n}\right) = 0 \\ \sum_{i=1}^n \cos\left(i \frac{2k\pi}{n}\right) = 0 \end{cases} \quad \text{به شرط آن که: } n > k$$

در این روابط  $n$  تعداد موقعیت‌های زاویه‌ای اشغال شده توسط لنگ‌ها در  $2\pi$  می‌باشد. برای مثال فوق  $k = 1$  و  $n = 2$  است، که شرط  $n > k$  برقرار می‌باشد.



### ترازمندی اجرام چرخان پیوسته:

$$\begin{aligned} y &= r \cos \theta \\ z &= r \sin \theta \end{aligned}$$

یک جسم پیوسته با جرم مخصوص  $\rho$  که تابعی از موقعیت است، در واقع مجموعه‌ای از اجرام چرخان غیرهم‌صفحه است با بی‌نهایت جرم بسیار کوچک. در این حالت، به جای استفاده از نماد جمع  $\sum$  از نماد انتگرال روی حجم  $\int_V$ ، استفاده کرده و به دنبال آن به جای جرم گسسته  $m_i$  در روابط حاصل در قسمت قبل، جزو جرم  $dm = \rho dv$  به کار برده می‌شود.

### الف) ترازمندی استاتیکی:

- شرایط خودترازمندی:

$$\begin{cases} \int_V r \cos \theta \rho dv = \int_V y \rho dv = \bar{y} \int_V \rho dv = M\bar{y} = 0 \Rightarrow \bar{y} = 0 \\ \int_V r \sin \theta \rho dv = \int_V z \rho dv = \bar{z} \int_V \rho dv = M\bar{z} = 0 \Rightarrow \bar{z} = 0 \end{cases}$$

شرط خودترازمندی استاتیکی آن است که مرکز جرم جسم صلب پیوسته، روی محور چرخش واقع باشد.

- مشخصات جرم موازنه‌گر: یک جرم خارج از مرکز  $m_c \bar{r}_c$  برای ترازمندی استاتیکی کافی است:

$$\begin{cases} M\bar{y} + m_c r_c \cos \theta_c = 0 \\ M\bar{z} + m_c r_c \sin \theta_c = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \theta_c = \frac{\sin \theta_c}{\cos \theta_c} = \frac{-\bar{y}}{-\bar{z}}, m_c r_c = \frac{-M\bar{y}}{\cos \theta_c} \end{cases}$$

(انتخاب زاویه  $\theta_c$ ، در ربع مناسب، با توجه به علایم  $\sin \theta_c$  و  $\cos \theta_c$ )

### ب) ترازمندی دینامیکی:

- شرایط خودترازمندی نیروهای لرزشی: مانند شرایط خودترازمندی استاتیکی است.

- شرایط خودترازمندی گشتاورهای لرزشی:

$$\begin{cases} \int_V x r \cos \theta \rho dv = \int_V x y \rho dv = I_{xy} = 0 \\ \int_V x r \sin \theta \rho dv = \int_V x z \rho dv = I_{xz} = 0 \end{cases}$$

شرط خودترازمندی گشتاورهای لرزشی آن است که حاصل ضرب‌های ماند شامل محور  $x$  جسم صلب، صفر بوده و یا به عبارت دیگر، محور  $x$  یک جهت اصلی جسم صلب باشد.

- مشخصات اجرام موازنه‌گر: مانند دستگاه اجرام چرخان غیرهم‌صفحه می‌توان نوشت:

$$1) \operatorname{tg} \theta_b = \frac{\sin \theta_b}{\cos \theta_b} = \frac{-I_{xz}}{-I_{xy}} \quad (\text{انتخاب زاویه } \theta_b \text{ در ربع مناسب})$$

$$2) m_b r_b = \frac{-I_{xy}}{x_b \cos \theta_b}$$

$$3) \operatorname{tg} \theta_a = \frac{\sin \theta_a}{\cos \theta_a} = \frac{-(I_{xz} + m_b r_b \sin \theta_b)}{-(I_{xy} + m_a r_a \sin \theta_a)} \quad (\text{انتخاب } \theta_a, \text{ در ربع مناسب، با توجه به علایم } \sin \theta_a \text{ و } \cos \theta_a)$$

$$4) m_a r_a = \frac{-(I_{xy} + m_b r_b \cos \theta_b)}{\cos \theta_a}$$

### ج) نتیجه:

برای ترازمندی اجرام چرخان صلب پیوسته، ترازمندی استاتیکی کافی نبوده و باید ترازمندی دینامیکی صورت پذیرد، به عبارت دیگر:

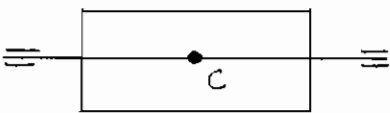
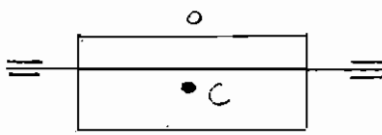
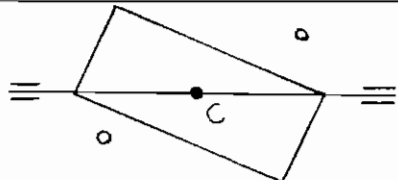
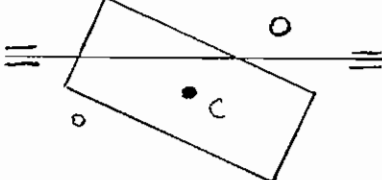
$$\text{ترازمندی دینامیکی} \Leftrightarrow \text{ترازمندی استاتیکی}$$

در این حالت برای ترازمندی استاتیکی، حداقل به یک و برای ترازمندی دینامیکی، حداقل به دو جرم خارج از مرکز نیاز است.

شرط ترازمندی استاتیکی آن است که مرکز جرم روی محور چرخش واقع باشد.

شرط ترازمندی دینامیکی آن است که علاوه بر شرط فوق، محور چرخش یک محور اصلی باشد.

برای مثال، شرایط ترازمندی استوانه‌های چرخان زیر بررسی می‌شود:

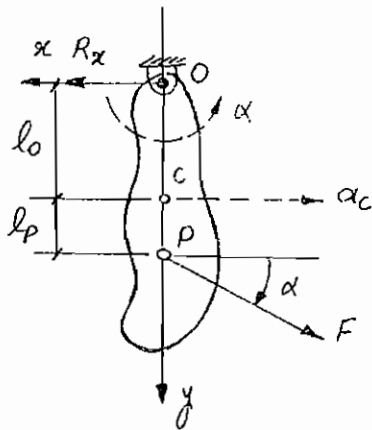
حداقل تعداد اجرام موازنه‌گر	نوع ناترازمندی و (عامل ناترازمندی)	
-	ترازمند است	
یک جرم روبه‌روی مرکز جرم	ناترازمندی استاتیکی (نیروهای لرزشی)	
دو جرم برابر	ناترازمندی دینامیکی (جفت نیروی لرزشی)	
دو جرم نابرابر	ناترازمندی استاتیکی (نیروها و گشتاورهای لرزشی)	

# فصل نهم

## ترازمندی اجرام آرو

### مرکز ضربه:

- تعریف ۱) جسم صلب لولا شده‌ای در نقطه O (موسوم به نقطه آویز یا نقطه لولا) با مرکز جرم C در نظر گرفته می‌شود، مرکز ضربه P نقطه‌ای از جسم صلب، واقع در امتداد OC است، که هرگاه نیروی متمرکز خارجی F به آن وارد شود عکس العمل تکیه گاه O، فقط مؤلفه‌ای در امتداد OC خواهد داشت، برای جسم صلب نشان داده شده می‌توان نوشت:



$$\begin{cases} F \cos \alpha - R_x = m a_C \\ F \cos \alpha (\overline{CP}) = I_C \alpha \\ a_C = (\overline{CO}) \alpha \end{cases}$$

با مساوی صفر قرار دادن نیروی عکس العمل  $R_x$ :

$$\begin{cases} F \cos \alpha = m (\overline{CO}) \alpha \\ F \cos \alpha (\overline{CP}) = I_C \alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow m (\overline{CO}) (\overline{CP}) \alpha = I_C \alpha = m k_C^2 \alpha \Rightarrow k_C^2 = l_P l_O$$

یعنی فاصله مرکز جرم تا نقطه آویز، ضرب در فاصله مرکز جرم تا مرکز ضربه، برابر مجذور شعاع چرخشی جسم صلب حول مرکز جرم است.



- **تعریف ۲)** هر گاه جسم صلب فوق به عنوان یک آونگ مرکب در نظر گرفته شود، مرکز ضربه، موقعیت جرم متمرکز در یک آونگ ساده با همان دوره تناوب آونگ مرکب خواهد بود. در هر دو حالت، حرکت آونگ، خطی (با زاویه نوسان کوچکتر از  $6^\circ$ ) فرض می‌شود:

$$T_S = 2\pi \sqrt{\frac{(\overline{OP})}{g}} \quad \text{دوره تناوب آونگ ساده}$$

$$T_C = 2\pi \sqrt{\frac{k_C^2}{g(\overline{OC})}} \quad \text{دوره تناوب آونگ مرکب}$$

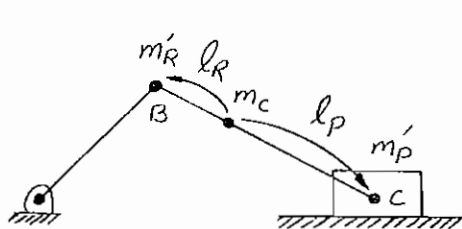
$$T_S = T_C \Rightarrow (\overline{OP}) = \frac{k_O^2}{(\overline{OC})} \Rightarrow k_O^2 = (\overline{OC})(\overline{OP})$$

$$k_O^2 = k_C^2 + (\overline{OC})^2 \Rightarrow k_C^2 = (\overline{OC})(\overline{OP}) - (\overline{OC})^2 = (\overline{OC})(\overline{OP} - \overline{OC})$$

$$\Rightarrow k_C^2 = (\overline{CO})(\overline{CP}) \Rightarrow k_C^2 = \ell_P \ell_O$$

که همان رابطه قبل است.

- **تعریف ۳)** تجزیه جرم شاتون به دو جرم متمرکز در مرکز لولای لنگ ( $m'_R$ ) و مرکز لولای پیستون ( $m'_P$ ):



$$\begin{cases} m_C = m'_R + m'_P \\ m'_R \ell_R = m'_P \ell_P \\ m'_R \ell_R^2 + m'_P \ell_P^2 = m_C k_C^2 \end{cases}$$

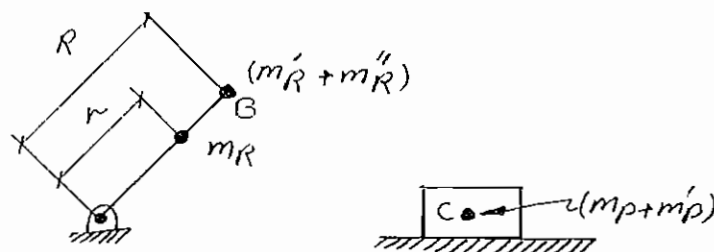
که سه معادله و دو مجهول ( $m'_P$ ,  $m'_R$ ) است.

$$\begin{aligned} m'_R \ell_R^2 + m'_P \ell_P^2 &= (m'_R \ell_R) \ell_R + (m'_P \ell_P) \ell_P \\ &= (m'_P \ell_P) \ell_R + (m'_R \ell_R) \ell_P = \ell_R \ell_P (m'_P + m'_R) \\ &= (m_C) \ell_P \ell_R = m_C k_C^2 \Rightarrow k_C^2 = \ell_P \ell_R \end{aligned}$$

به عبارت دیگر، نقاط مرکز لولای لنگ (B) و مرکز لولای پیستون (C) باید نسبت به مرکز جرم، نقاط مزدوج ضربه باشند، یعنی نقطه B، مرکز ضربه با نقطه آویز C و نقطه C، مرکز ضربه با نقطه آویز B باشد.

به این ترتیب جرم شاتون که مسیر آن یک منحنی درجه 6 است به دو جرم تجزیه می‌شود، که مسیر یکی دایره (نقطه B) و مسیر دیگری (نقطه C) خط راست است.

جرم‌های متمرکز بر روی مرکز لولای لنگ ( $m'_R + m'_R$ )، به شرط یکسان بودن لنگ‌ها و شاتون‌ها و نیز برقراری شرایط خودترازمندی میل‌لنگ، خودترازمند بوده، و نیازی به ترازمندی کردن ندارند و جرم‌های متمرکز بر روی مرکز لولای پیستون ( $m_P + m'_P$ )، ممکن است خودترازمند باشند و یا در صورت عدم خودترازمندی بتوان آن‌ها را با سازوکارهای نسبتاً پیچیده‌ای مثل سازوکار لنچستر ترازمند نمود.

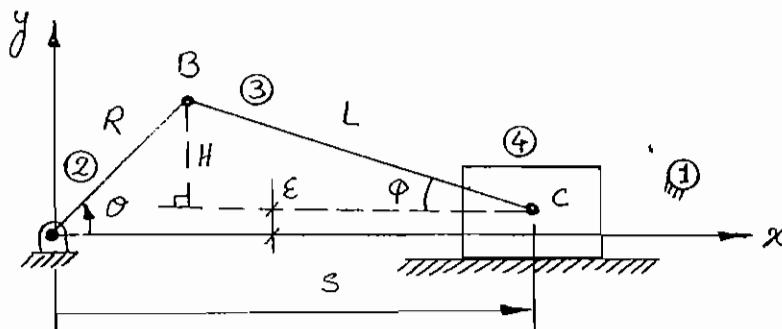


$$m_R'' = \frac{r}{R} m_R \quad (\text{جرم متمرکز لنگ در نقطه B})$$

مسئله اصلی در این بحث، ترازمند کردن نیروهای لرزشی ناشی از جرم پیستون و بخشی از جرم شاتون که به روی مرکز لولای پیستون منتقل شده، می‌باشد. به مجموع دو جرم اخیر، جرم مؤثر پیستون گویند.

### شاتاب پیستون در سازوکار لغزنده- لنگ:

باتوجه به شکل می‌توان موقعیت مرکز لولای پیستون (S) را به صورت تابعی از موقعیت زاویه‌ای لنگ ( $\theta$ ) به دست آورد:



$$S = R \cos \theta + L \cos \varphi \quad , \quad H = L \sin \varphi = R \sin \theta - \varepsilon$$

$$\sin \varphi = \frac{R \sin \theta - \varepsilon}{L} \quad , \quad \cos \varphi = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi}$$

$$\Rightarrow S = R \cos \theta + L \sqrt{1 - \left( \frac{R \sin \theta - \varepsilon}{L} \right)^2}$$

و با فرض صفر بودن انحراف پیستون ( $\varepsilon = 0$ ):

$$S = R \cos \theta + L \sqrt{1 - \left( \frac{R}{L} \sin \theta \right)^2}$$

باتوجه به مشکلات مشتق‌گیری از رابطه اخیر، بسط سری تیلور آن به شکل زیر خواهد بود:

$$\left[ 1 - \left( \frac{R}{L} \sin \theta \right)^2 \right]^{1/2} = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{R}{L} \sin \theta \right)^2 - \frac{1}{8} \left( \frac{R}{L} \sin \theta \right)^4 - \frac{1}{16} \left( \frac{R}{L} \sin \theta \right)^6 - \frac{5}{128} \left( \frac{R}{L} \sin \theta \right)^8 \dots$$

باتوجه به کراندار بودن تابع  $\sin \theta$  ( $|\sin \theta| \leq 1$ ) و کوچک‌تر از یک بودن نسبت  $\frac{R}{L}$ ، می‌توان از جمله سوم به بعد صرف‌نظر نمود:

$$\Rightarrow S \approx L + R \cos \theta - \frac{L}{2} \left( \frac{R}{L} \sin \theta \right)^2 = L + R \left( \cos \theta - \frac{R}{2L} \sin^2 \theta \right)$$

$$\Rightarrow V \approx R \omega \left( -\sin \theta - \frac{R}{L} \sin \theta \cos \theta \right) = R \omega \left( -\sin \theta - \frac{R}{2L} \sin 2\theta \right)$$

$$\Rightarrow A \approx -R \omega^2 \left( \cos \theta + \frac{R}{L} \cos 2\theta \right)$$

به این ترتیب نیروی لرزشی ناشی از جرم مؤثر پیستون عبارت است از:

$$\bar{F}_I = -(m_P + m'_P) \bar{A}_{C_4} = (m_P + m'_P) R \omega^2 \left( \cos\theta + \frac{R}{L} \cos 2\theta \right)$$

که قابل تقسیم به دو نیروی لرزشی اولیه و ثانویه می‌باشد. دوره تناوب نیروی لرزشی ثانویه نصف و دامنه آن  $\frac{R}{L}$  نیروی لرزشی اولیه است. توجه شود راستای این نیروها همواره در امتداد حرکت پیستون بوده و مقدار آن‌ها تابعی هارمونیک از زاویه لنگ است:

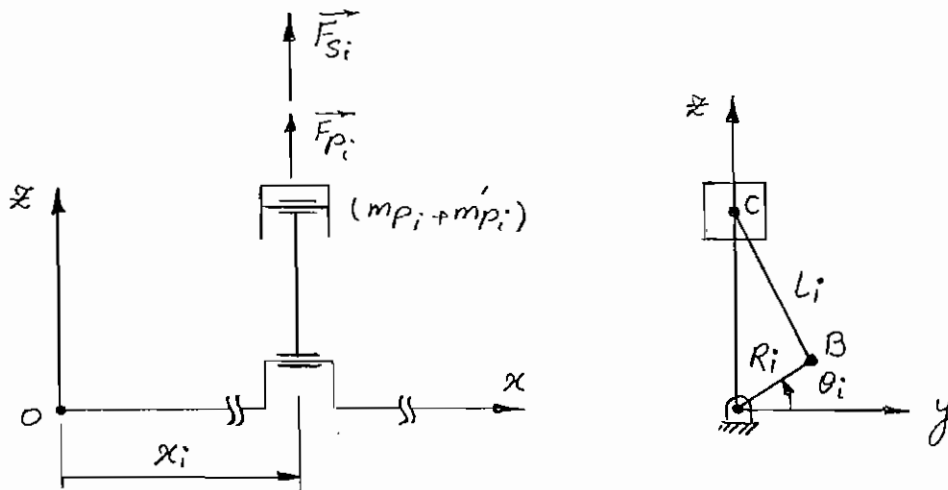
$$\bar{F}_P = (m_P + m'_P) R \omega^2 \cos\theta \quad \text{نیروی لرزشی اولیه}$$

$$\bar{F}_S = (m_P + m'_P) \frac{R^2 \omega^2}{L} \cos 2\theta \quad \text{نیروی لرزشی ثانویه}$$

برای ترازمندی مجموعه‌ای از اجرام آرو، باید برآیند نیروهای لرزشی اولیه و ثانویه و نیز برآیند گشتاورهای لرزشی ناشی از آن‌ها، به ازای هر زاویه دلخواه لنگ، صفر باشد.

### ترازمندی موتورهای چند سیلندر خطی:

موتورهای چند سیلندر خطی، متداول‌ترین موتورهای احتراق داخلی بوده و با صرف‌نظر از انحراف پیستون ( $\varepsilon = 0$ )، راستای حرکت مرکز لولای پیستون‌ها و محور چرخش میل‌لنگ، همگی در یک صفحه قرار دارند. در صورتی که زاویه لنگ شماره  $i$  با محور  $y$ ،  $\theta_i$  و موقعیت محوری وسط لنگ شماره  $i$ ، نسبت به مبدأ دستگاه مختصات،  $x_i$  نامیده شوند:



فرض می‌شود که پیستون‌ها، شاتون‌ها و لنگ‌ها، از نظر هندسه، جرم و توزیع جرم حول مرکز جرم، کاملاً یکسان بوده و از ترازنس‌های آن‌ها چشم‌پوشی می‌شود:

$$\begin{cases} m_{P_i} = m_P \\ m'_{P_i} = m'_P \\ R_i = R \\ L_i = L \end{cases}$$

- شرایط ترازمندی نیروهای لرزشی اولیه:

$$\begin{aligned} \sum \bar{F}_{P_i} = \bar{0} &\Rightarrow \sum (m_P + m'_P)_i R_i \omega^2 \cos\theta_i = (m_P + m'_P) R \omega^2 \sum \cos\theta_i = 0 \\ &\Rightarrow \sum \cos\theta_i = 0 \quad (\text{با فرض } \omega \neq 0) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum \sin \theta_i = 0 \quad : \frac{\pi}{2} \text{ با چرخش میل‌لنگ به اندازه}$$

- شرایط ترازمندی نیروهای لرزشی ثانویه:

به طور مشابه می‌توان نشان داد:

$$\sum \cos 2\theta_i = 0 \quad (\text{با فرض } \omega \neq 0)$$

$$\sum \sin 2\theta_i = 0 \quad : \frac{\pi}{4} \text{ با چرخاندن میل‌لنگ به اندازه}$$

- شرایط ترازمندی گشتاورهای لرزشی اولیه:

$$\sum (\overline{M p_i})_o = \vec{0} \Rightarrow \sum x_i \overline{e_x} \times (m_p + m'_p)_i R_i \omega^2 \cos \theta_i \overline{e_z} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow -(m + m'_p) R \omega^2 \sum x_i \cos \theta_i \overline{e_y} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \sum x_i \cos \theta_i = 0 \quad (\text{با فرض } \omega \neq 0)$$

$$\Rightarrow \sum x_i \sin \theta_i = 0 \quad : \frac{\pi}{2} \text{ با چرخش میل‌لنگ به اندازه}$$

- شرایط ترازمندی گشتاورهای لرزشی ثانویه:

به طور مشابه می‌توان نشان داد:

$$\sum x_i \cos 2\theta_i = 0 \quad (\text{با فرض } \omega \neq 0)$$

$$\sum x_i \sin 2\theta_i = 0 \quad : \frac{\pi}{4} \text{ با چرخاندن میل‌لنگ به اندازه}$$

- در صورتی که لنگ‌های میل‌لنگ کاملاً یکسان باشند، آن‌گاه شرایط ترازمندی استاتیکی و دینامیکی میل‌لنگ چرخان با شرایط ترازمندی نیروها و گشتاورهای لرزشی اولیه پیستون‌ها یکسان بوده و بنابراین در موتورهایی که میل‌لنگ آن‌ها از نظر دینامیکی خودترازمند باشد، نیروهای لرزشی اولیه و ثانویه پیستون‌ها نیز، خودترازمند خواهد بود.

- اگر زاویه  $2\pi$ ، توسط لنگ‌ها به  $n$  بخش برابر تقسیم گردیده و در هر موقعیت، تعداد لنگ‌ها یکسان بوده و تعداد موقعیت‌های زاویه‌ای لنگ‌ها (بدون احتساب موقعیت‌های تکراری) بیش از یک باشد، در آن صورت نیروهای لرزشی اولیه خودترازمند می‌باشند:

$$\sum \sin\left(i \frac{2\pi}{n}\right) = 0 \quad \text{و} \quad \sum \cos\left(i \frac{2\pi}{n}\right) = 0 \quad n > 1 \quad (k=1)$$

- اگر زاویه  $2\pi$ ، توسط لنگ‌ها به  $n$  بخش برابر تقسیم گردیده و در هر موقعیت، تعداد لنگ‌ها یکسان بوده و تعداد موقعیت‌های زاویه‌ای لنگ‌ها (بدون احتساب موقعیت‌های تکراری) بیش از دو باشد، در آن صورت نیروهای لرزشی ثانویه خودترازمند می‌باشند:

$$\sum \sin\left(i \frac{4\pi}{n}\right) = 0 \quad \text{و} \quad \sum \cos\left(i \frac{4\pi}{n}\right) = 0 \quad n > 2 \quad (k=2)$$

به عنوان مثال همان میل‌لنگ موتور چهار زمانه چهار سیلندر در نظر گرفته می‌شود. با توجه به ترتیب احتراق 1342، زاویه لنگ‌ها را می‌توان به ترتیب زیر نوشت:

$$\theta_1 = 0, \quad \theta_2 = \pi, \quad \theta_3 = \pi, \quad \theta_4 = 0$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = a, \quad x_3 = 2a, \quad x_4 = 3a$$



- چون میل لنگ، خودترازمنند است، پس نیروها و گشتاورهای لرزشی اولیه خودترازمنند می‌باشند.  
 - چون زاویه  $2\pi$  به دو بخش برابر تقسیم شده، پس نیروهای لرزشی اولیه خودترازمنند می‌باشند (  $k=1$  و  $n=2$  ) اما ترازمندی نیروهای لرزشی ثانویه باید بررسی شود (چون  $k=2$  و  $n=2$  ):

$$\sum \sin 2\theta_i = \sin 0 + \sin 2\pi + \sin 2\pi + \sin 0 = 0$$

$$\sum \cos 2\theta_i = \cos 0 + \cos 2\pi + \cos 2\pi + \cos 0 = 4 \neq 0$$

نیروهای لرزشی ثانویه خودترازمنند نمی‌باشند:

$$\sum \bar{F}_{Si} = 4(m_P + m'_P) \frac{R^2 \omega^2}{L} \cos 2\theta_1 \bar{e}_z$$

- حال گشتاورهای لرزشی ثانویه مورد بررسی قرار می‌گیرند:

$$\sum x_i \sin 2\theta_i = 0 \times \sin 0 + a \times \sin 2\pi + 2a \times \sin 2\pi + 3a \times \sin 0 = 0$$

$$\sum x_i \cos 2\theta_i = 0 \times \cos 0 + a \times \cos 2\pi + 2a \times \cos 2\pi + 3a \times \cos 0 = 6a$$

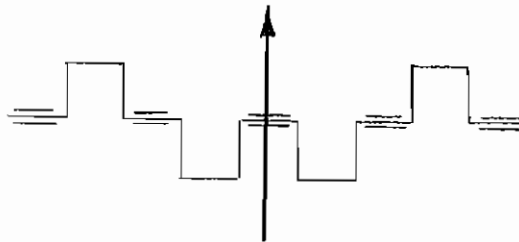
گشتاورهای لرزشی ثانویه نیز خودترازمنند نمی‌باشند:

$$\sum (\bar{M}_{Si})_O = -6a(m_P + m'_P) \frac{R^2 \omega^2}{L} \cos 2\theta_1 \bar{e}_y$$

از آن جا که نیروها و گشتاورهای لرزشی باقی‌مانده هر دو ثانویه بوده و تابع هارمونیک هر دو  $\cos 2\theta_1$  بود (  $\theta_1$  زاویه لنگ اول است ) و بر هم عمود می‌باشند، این مجموعه نیرو و گشتاور، قابل تبدیل به یک تک نیروی لرزشی ثانویه در موقعیت  $\bar{x}$  است:

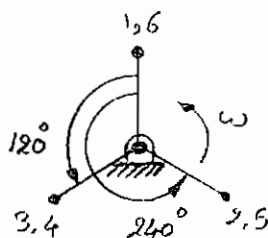
$$\bar{x} = \frac{|\sum (\bar{M}_{Si})_O|}{|\sum (\bar{F}_{Si})|} = \frac{6a}{4} = \frac{3a}{2}$$

یعنی اگر نیروی لرزشی ثانویه به میان لنگ دوم و سوم منتقل شود، گشتاور لرزشی ثانویه حذف می‌شود.



که این امر با استفاده از سازوکار لنچستر قابل انجام خواهد بود و موتور چهار سیلندر چهار زمانه خطی ترازمنند می‌شود.

به عنوان مثالی دیگر، موتور 6 سیلندر، چهار زمانه خطی در نظر گرفته می‌شود:



$$\begin{cases} \theta_1 = \theta_6 = 0, & \theta_3 = \theta_4 = 120^\circ, & \theta_2 = \theta_5 = 240^\circ \\ x_i = (i-1)a & i = 1, \dots, 6 \end{cases}$$

$$2\theta_1 = 2\theta_6 = 0, \quad 2\theta_3 = 2\theta_4 = 240^\circ$$

$$2\theta_2 = 2\theta_5 = 480^\circ \equiv 120^\circ$$

ترتیب احتراق:  $\overline{153624}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum \sin \theta_i = 0 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 0 = 0 \\ \sum \cos \theta_i = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = 0 \end{array} \right.$$

باتوجه به  $k=1$  و  $n=3$ ، خودترازمندی نیروهای لرزشی اولیه قابل پیش‌بینی بود.

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum \sin 2\theta_i = 0 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} + 0 = 0 \\ \sum \cos 2\theta_i = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = 0 \end{array} \right.$$

با توجه به  $k=2$  و  $n=3$ ، خودترازمندی نیروهای لرزشی ثانویه نیز قابل پیش‌بینی بود.

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum x_i \sin \theta_i = a \left[ 0 \times 0 + 1 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 4 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 5 \times 0 \right] = 0 \\ \sum x_i \cos \theta_i = a \left[ 0 \times 1 + 1 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 5 \times 1 \right] = 0 \end{array} \right.$$

باتوجه به خودترازمندی نیروها و گشتاورهای لرزشی اولیه، می‌توان گفت که میل‌لنگ این موتور از نظر دینامیکی خودترازمنده است.

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum x_i \sin 2\theta_i = a \left[ 0 \times 0 + 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 3 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 5 \times 0 \right] = 0 \\ \sum x_i \cos 2\theta_i = a \left[ 0 \times 1 + 1 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 5 \times 1 \right] = 0 \end{array} \right.$$

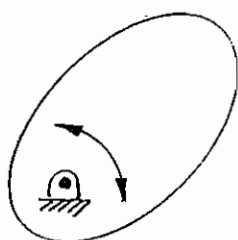
به این ترتیب کلیه نیروها و گشتاورهای لرزشی اولیه و ثانویه خودترازمنده می‌باشند.

# فصل دهم

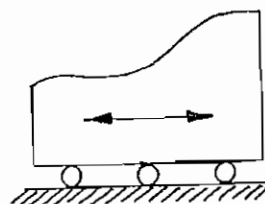
## بادامک و پیرو

تعاریف اولیه:

- انواع بادامک‌ها: بادامک‌های صفحه‌ای به دو نوع چرخان و آرو تقسیم می‌شوند که نوع حرکت آن‌ها از نامشان مشخص است:

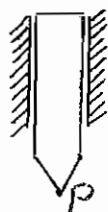


« بادامک چرخان »

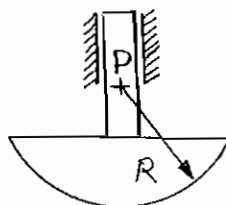


« بادامک آرو »

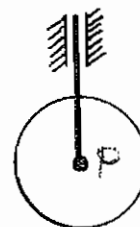
- انواع پیروها: پیروها از نظر نوع حرکت به دو نوع آرو و نوسانی، و از نظر نوع تماس با بادامک، به انواع کفشکی (معمولاً دایروی)، کفشکی تخت، غلتکی و نوک تیز تقسیم می‌شوند:



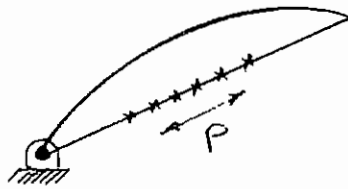
« پیرو نوک تیز آرو »



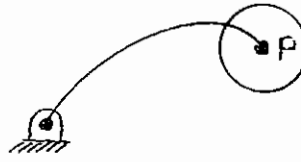
« پیرو کفشکی آرو »



« پیرو غلتکی آرو »

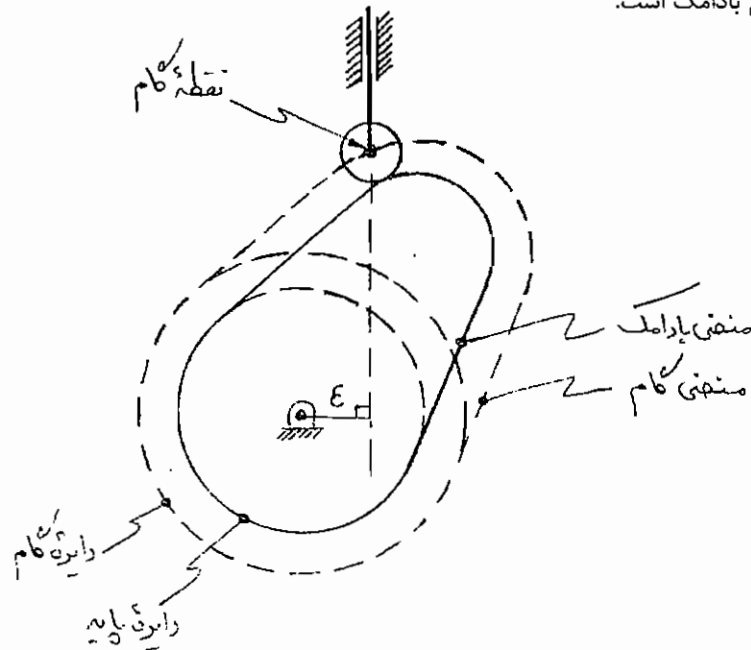


« پیرو کفشکی تخت نوسانی »



« پیرو غلتکی نوسانی »

- **نقطه گام:** یک نقطه فرضی از پیرو است، که در سازوکار معادل با پیرو نوک تیز، نوک پیرو در آن نقطه واقع می‌شود، بسته به نوع سازوکار معادل، ممکن است آنی یا دایم باشد، مثلاً در پیرو غلتکی و کفشکی دایروی، مرکز دایره تماس و دایمی است و در پیرو کفشکی غیردایروی، مرکز انحنا سطح در تماس پیرو بوده و آنی است، در پیرو کفشکی تخت، همان محل - اس پیرو با بادامک بوده و آنی است. نقطه گام را با  $p$  نشان می‌دهند و مسیر حرکت نقطه گام بر روی بادامک را منحنی گام می‌نامند، برای پیرو کفشکی تخت، منحنی گام، همان منحنی بادامک است.



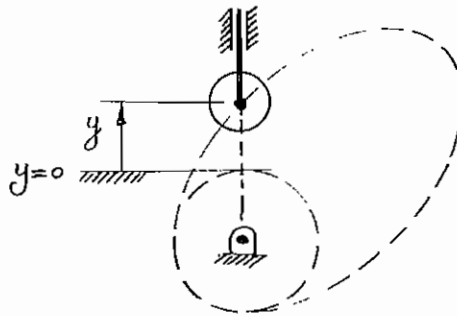
« بادامک چرخان منحرف - پیرو غلتکی آرو »

- **انحراف:** در بادامک چرخان و پیرو آرو، فاصله مرکز چرخش بادامک تا امتداد حرکت نقطه گام را انحراف ( $\epsilon$ )، و بادامک مربوطه را منحرف می‌نامند. اگر  $\epsilon = 0$  باشد بادامک چرخان، شعاعی خوانده می‌شود.
  - **دایره گام:** کوچک‌ترین دایره به مرکز چرخش بادامک شعاعی که بر منحنی گام مماس است دایره گام خوانده می‌شود. در طول چرخه حرکت بادامک، همواره نقطه گام روی دایره یا در خارج آن قرار گرفته و هیچ‌گاه وارد دایره نمی‌شود.
  - **دایره کورس:** بزرگ‌ترین دایره به مرکز چرخش بادامک شعاعی که بر منحنی گام مماس است را دایره کورس می‌نامند. کورس پیرو ( $L$ ) از تفاضل شعاع دایره کورس ( $R_{maj}$ ) و شعاع دایره گام ( $R_{min}$ ) حاصل می‌شود:
- $$L = R_{maj} - R_{min}$$
- **دایره پایه:** کوچک‌ترین دایره به مرکز چرخش بادامک شعاعی که بر منحنی بادامک مماس است را دایره پایه می‌نامند.



## تابع موقعیت پیرو:

موقعیت پیرو با  $y$  نمایش داده شده و در پیرو آرو، موقعیت  $y$  جابه‌جایی خطی، رابطه ابعادی آن  $[L]$  و با واحد متر، سانتی‌متر یا میلی‌متر بیان می‌شود. موقعیت در پیرو نوسانی، بدون بعد بوده و با واحد رادیان بیان می‌گردد. نزدیک‌ترین حد نقطه گام به مرکز چرخش بادامک، به عنوان مبدأ اندازه‌گیری موقعیت پیرو در نظر گرفته می‌شود که در بادامک چرخان شعاعی، خط مبدأ  $y=0$  مماس بر دایره گام است:



موقعیت پیرو، تابعی از موقعیت بادامک می‌باشد که در بادامک چرخان با  $\theta$  نمایش داده شده، بدون بعد بوده و واحد آن رادیان است و در بادامک آرو با  $x$  نمایش داده شده، رابطه ابعادی آن  $[L]$  و با واحد متر، سانتی‌متر یا میلی‌متر بیان می‌شود. به این ترتیب برای بادامک چرخان می‌توان نوشت:  $y = f(\theta)$ . با مشتق‌گیری پیاپی از  $y$  نسبت به زمان، می‌توان سرعت، شتاب و تکان پیرو را به دست آورد. برای آن که این مشتق‌گیری مستقل از نحوه پیمایش زمان توسط بادامک باشد، مشتق‌گیری پیاپی از  $y$  نسبت به موقعیت بادامک ( $\theta$ ) صورت گرفته و با استفاده از قاعده زنجیری، می‌توان مشتق‌های نسبت به زمان را محاسبه نمود:

$$\begin{cases} \dot{y} = \frac{dy}{dt} & \ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2} & \dddot{y} = \frac{d^3y}{dt^3} \\ y' = \frac{dy}{d\theta} & y'' = \frac{d^2y}{d\theta^2} & y''' = \frac{d^3y}{d\theta^3} \end{cases}$$

$$y = f(\theta)$$

$$\dot{y} = y'\dot{\theta} \quad \text{یا} \quad \dot{y} = y'\omega$$

$$\ddot{y} = y''\dot{\theta}^2 + y'\ddot{\theta} \quad \text{یا} \quad \ddot{y} = y''\omega^2 + y'\alpha$$

$$\dddot{y} = y'''\dot{\theta}^3 + 3y''\dot{\theta}\ddot{\theta} + y'\ddot{\theta} \quad \text{یا} \quad \dddot{y} = y'''\omega^3 + 3y''\omega\alpha + y'\dot{\alpha}$$

(که  $\alpha$  تکان زاویه‌ای بادامک می‌باشد)

$$\alpha = 0 \quad \text{و} \quad \dot{\alpha} = 0$$

در صورتی که سرعت زاویه‌ای ثابت باشد می‌توان نوشت:

$$\dot{y} = y'\omega$$

$$\ddot{y} = y''\omega^2$$

$$\dddot{y} = y'''\omega^3$$

به  $y'$ ،  $y''$  و  $y'''$  به ترتیب سرعت هندسی (با واحد متر بر رادیان)، شتاب هندسی (با واحد متر بر مجذور رادیان) و تکان هندسی (با واحد متر بر مکعب رادیان) گفته شده و رابطه ابعادی هر سه  $[L]$  است.

تابع موقت پیرو برحسب  $\theta$  به صورت شکل‌های استاندارد تعریف شده است، که مهم‌ترین آن‌ها عبارتند از:

- توابع چند جمله‌ای:

$y = A_n \theta^n + \dots + A_2 \theta^2 + A_1 \theta + A_0$	:	شکل کلی تابع
$y = A_1 \theta + A_0$	:	تابع سرعت ثابت
$y = A_2 \theta^2 + A_1 \theta + A_0$	:	تابع شتاب ثابت
$y = A_3 \theta^3 + A_2 \theta^2 + A_1 \theta + A_0$	:	تابع تکان ثابت
$y = A_5 \theta^5 + A_4 \theta^4 + A_3 \theta^3$	:	تابع درجه 5
$y = A_8 \theta^8 + A_7 \theta^7 + A_6 \theta^6 + A_5 \theta^5 + A_3 \theta^3 \quad (A_4 = 0)$	:	تابع درجه 8

- توابع هماهنگ (یا هارمونیک):

$$y = A \cos(\alpha\theta) + C$$

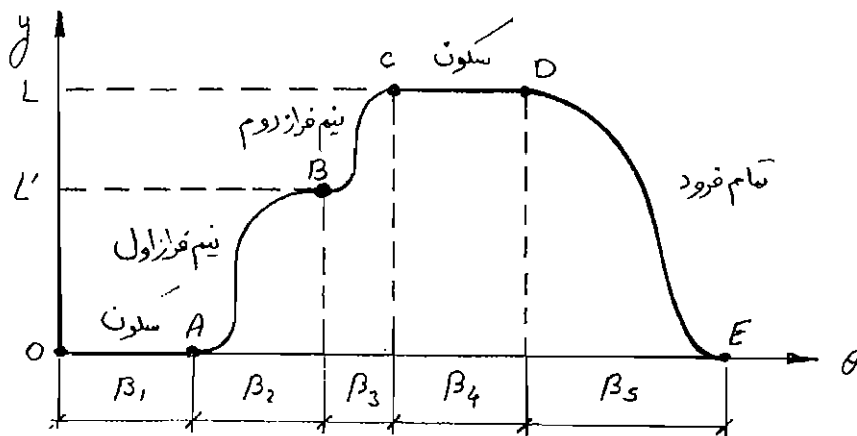
$$y = A \sin(\alpha\theta) + C$$

- توابع چرخزادی (یا سیکلوئیدی):

$$y = A \cos(\alpha\theta) + B\theta + C$$

$$y = A \sin(\alpha\theta) + B\theta + C$$

معمولاً یک حرکت کامل پیرو، ترکیبی از چند حرکت استاندارد فوق است، که در شکل، مثالی از یک حرکت کامل پیرو به ازای یک دور چرخش بادامک به صورت ترکیب پنج حرکت، نشان داده شده است:



که در آن بخش‌های مختلف حرکت عبارتند از:

- سکون پیرو در پایین‌ترین نقطه کورس خود، به ازای چرخش بادامک به اندازه  $\beta_1$
- نیم فراز اول، حرکت پیرو به اندازه  $L'$ ، به ازای چرخش بادامک به اندازه زاویه  $\beta_2$
- نیم فراز دوم، حرکت پیرو به اندازه  $(L-L')$ ، به ازای چرخش بادامک به اندازه زاویه  $\beta_3$
- سکون پیرو در بالاترین نقطه کورس خود، به ازای چرخش بادامک به اندازه  $\beta_4$
- تمام فرود، حرکت پیرو به اندازه  $(-L)$ ، به ازای چرخش بادامک به اندازه زاویه  $\beta_5$

در نقاطی مانند  $A, B, C, D$  و  $E$  که حرکات با توابع متفاوت به یکدیگر وصل می‌شوند، شرایط زیر باید در حد امکان و به ترتیب اولویت برقرار باشد:

- (۱) تابع موقعیت پیرو باید پیوسته باشد.
  - (۲) تابع سرعت پیرو باید پیوسته باشد (به عبارت دیگر تابع موقعیت پیرو مشتق پذیر باشد).
  - (۳) تابع شتاب پیرو باید پیوسته باشد (یا به عبارت دیگر تابع سرعت پیرو مشتق پذیر باشد).
- پیوسته بودن تابع شتاب پیرو کافی بوده و مشتق پذیر بودن آن لازم نیست به عبارت دیگر تابع تکان، می‌تواند پیوسته نباشد ولی نباید به ازای هیچ نقطه‌ای از موقعیت پیرو، بی‌نهایت شود.
- معمولاً چون توابع موقعیت پیرو به صورت استاندارد استفاده می‌شوند، بهتر است شرایط نقاط مرزی آن‌ها به گونه‌ای باشد که به هم پیوستن آن‌ها دچار مشکل نشود. به این منظور، در حد امکان سعی می‌شود که در نقاط مرزی، در مرحله اول سرعت پیرو و در مرحله بعد شتاب پیرو برابر صفر شود.

به عنوان مثال، یک حرکت تمام فراز هماهنگ، در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{cases} y = A \cos(\alpha\theta) + C, & y' = -A\alpha \sin(\alpha\theta), & y'' = -A\alpha^2 \cos(\alpha\theta) \\ \theta = 0 \Rightarrow y = 0, & y' = 0, & y'' = 0 \\ \theta = \beta \Rightarrow y = L, & y' = 0, & y'' = 0 \end{cases}$$

چون فقط سه مجهول وجود دارد، شرایط مرزی موقعیت و سرعت اعمال می‌شود:

$$(\theta = 0 \Rightarrow y = 0) \Rightarrow C = -A \Rightarrow y = C[1 - \cos(\alpha\theta)]$$

$$(\theta = 0 \Rightarrow y' = 0) \text{ خودبخود برقرار است}$$

$$(\theta = \beta \Rightarrow y = L) \Rightarrow L = C[1 - \cos(\alpha\beta)]$$

$$(\theta = \beta \Rightarrow y' = 0) \Rightarrow 0 = -C\alpha \sin(\alpha\beta) \Rightarrow \alpha\beta = \pi \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{\beta}$$

$$\Rightarrow y = C \left[ 1 - \cos\left(\frac{\pi\theta}{\beta}\right) \right]$$

$$\Rightarrow L = C[1 - (-1)] \Rightarrow C = \frac{L}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = \frac{L}{2} \left[ 1 - \cos\left(\frac{\pi\theta}{\beta}\right) \right] \\ y' = \frac{L}{2} \left(\frac{\pi}{\beta}\right) \sin\left(\frac{\pi\theta}{\beta}\right) \\ y'' = \frac{L}{2} \left(\frac{\pi}{\beta}\right)^2 \cos\left(\frac{\pi\theta}{\beta}\right) \end{cases}$$

حال شتاب‌ها نیز در نقاط مرزی بررسی می‌شوند:

$$\theta = 0 \Rightarrow y'' = \frac{L}{2} \left(\frac{\pi}{\beta}\right)^2 \neq 0$$

$$\theta = \beta \Rightarrow y'' = -\frac{L}{2} \left(\frac{\pi}{\beta}\right)^2 \neq 0$$

که در هیچ یک از نقاط مرزی شتاب صفر نیست.  
مقدار موقعیت، سرعت و شتاب حداکثر عبارت است از:

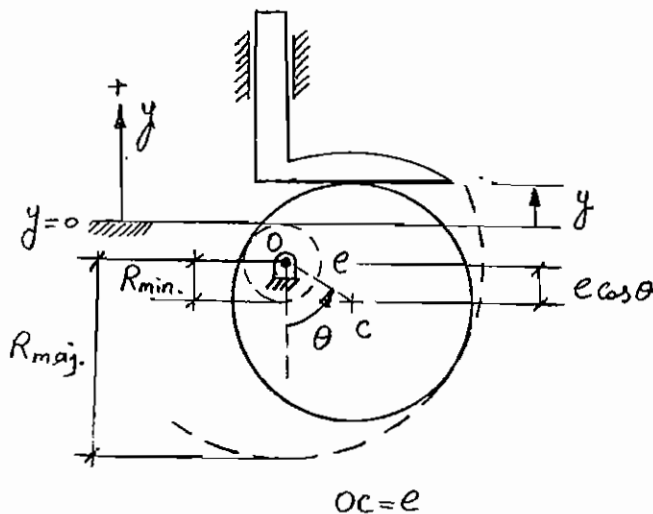
$$y_{\max.} = L$$

$$|\dot{y}_{\max.}| = \frac{L}{2} \left( \frac{\pi}{\beta} \right) \omega = \frac{L}{2} \left( \frac{\pi}{\beta} \right) \left( \frac{2\pi N}{60} \right) = \frac{LN\pi^2}{60\beta} \quad (\theta = \frac{\beta}{2} \text{ در})$$

$$|\ddot{y}_{\max.}| = \frac{L}{2} \left( \frac{\pi}{\beta} \right)^2 \omega^2 = \frac{L}{2} \left( \frac{\pi}{\beta} \right)^2 \left( \frac{2\pi N}{60} \right)^2 = \frac{LN^2\pi^4}{1800\beta^2} \quad (\theta = \beta \text{ و } \theta = 0 \text{ در})$$

### بادامک دایروی خارج از مرکز - پیرو کشکی تخت آرو:

یکی از معروفترین بادامک و پیروها بوده و با توجه به شکل، می توان تابع موقعیت پیرو بر حسب موقعیت زاویه ای بادامک را به دست آورد:



$$y = e - e \cos \theta = e(1 - \cos \theta)$$

$$R_{\min.} = R - e$$

$$R_{\max.} = R + e$$

$$L = R_{\max.} - R_{\min.} = 2e$$

همان طور که دیده می شود، حرکت پیرو یک حرکت هماهنگ کسینوسی است.

$$y = e(1 - \cos \theta)$$

و برای آن می توان نوشت:

$$\begin{cases} y' = e \sin \theta & , & \dot{y} = e\omega \sin \theta \\ y'' = e \cos \theta & , & \ddot{y} = e(\omega^2 \cos \theta + \alpha \sin \theta) \\ y''' = -e \sin \theta & , & \ddot{y} = e[(-\omega^3 + \dot{\alpha}) \sin \theta + 3\omega\alpha \cos \theta] \end{cases} \quad \omega = \text{ثابت} \Rightarrow \begin{cases} \dot{y} = e\omega \sin \theta \\ \ddot{y} = e\omega^2 \cos \theta \\ \ddot{y} = -e\omega^3 \sin \theta \end{cases}$$

# فصل یازدهم

## مجموعه چرخ‌دنده‌ها

### تعاریف اولیه:

مجموعه چرخ‌دنده‌ها به گروه‌های زیر تقسیم‌بندی می‌شوند:

- مجموعه چرخ‌دنده‌های معمولی: محور چرخش همه چرخ‌دنده‌ها دایمی است.

- ساده: روی هر محور تنها یک چرخ‌دنده درگیر وجود دارد.

- مرکب: حداقل روی یک محور، بیش از یک چرخ‌دنده درگیر وجود دارد.

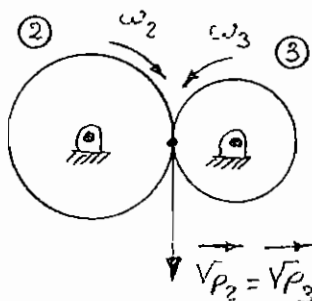
- مجموعه چرخ‌دنده‌های منظومه‌ای: محور چرخش حداقل یکی از چرخ‌دنده‌ها آنی است.

- صفحه‌ای: محور چرخش کلیه چرخ‌دنده‌ها در تمام طول چرخه حرکت بر یک صفحه ثابت عمود است.

- فضایی: محور چرخش برخی از چرخ‌دنده‌ها بر صفحه حرکت بقیه عمود نیست.

- نسبت سرعت‌های زاویه‌ای:

برای جفت چرخ‌دنده‌های بیرونی (دو چرخ‌دنده خارجی) یا درونی (یک چرخ‌دنده داخلی و یک چرخ‌دنده خارجی) می‌توان نوشت:

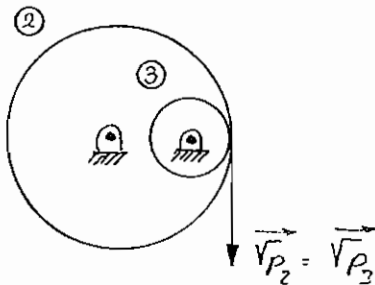


$$\vec{v}_{P_2} = \vec{v}_{P_3} \Rightarrow R_2 \omega_2 = -R_3 \omega_3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m z_2 \omega_2 = -\frac{1}{2} m z_3 \omega_3$$

$$\Rightarrow R_{23} = \frac{\omega_3}{\omega_2} = -\frac{z_2}{z_3}$$

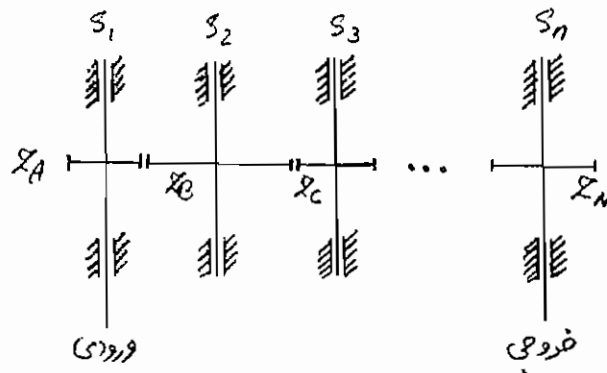
که در آن نسبت سرعت چرخ دنده 3 به چرخ دنده 2 است.



$$\begin{aligned} \vec{V}_{P_2} = \vec{V}_{P_3} &\Rightarrow R_2 \omega_2 = R_3 \omega_3 \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} m z_2 \omega_2 = \frac{1}{2} m z_3 \omega_3 \\ &\Rightarrow R_{23} = \frac{\omega_3}{\omega_2} = + \frac{z_2}{z_3} \end{aligned}$$

### مجموعه چرخ دنده‌های معمولی - ساده:

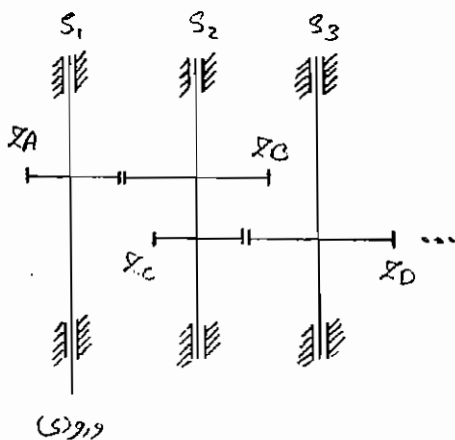
روی هر محور تنها یک چرخ دنده درگیر نصب شده است، مثلاً روی محور  $S_3$  چرخ دنده C با تعداد دندانه  $z_C$  نصب شده است.



حال نسبت دور خروجی به ورودی را به روش زیر می‌توان به دست آورد:

$$\begin{aligned} R_{io} = \frac{\omega_o}{\omega_i} = \frac{\omega_n}{\omega_1} = \frac{\omega_n}{\omega_{n-1}} \times \dots \times \frac{\omega_3}{\omega_2} \times \frac{\omega_2}{\omega_1} &= \left( -\frac{z_{N-1}}{z_N} \right) \times \dots \times \left( -\frac{z_B}{z_C} \right) \left( -\frac{z_A}{z_B} \right) = (-1)^{n-1} \left( \frac{z_A}{z_N} \right) = (-1)^{n-1} \left( \frac{z_i}{z_o} \right) \\ \Rightarrow R_{io} = \frac{\omega_o}{\omega_i} &= (-1)^{n-1} \left( \frac{z_i}{z_o} \right) \quad (n \text{ تعداد محورهای مجموعه چرخ دنده‌ها است}) \end{aligned}$$

به این ترتیب نسبت سرعت زاویه‌ای محور خروجی به ورودی برابر عکس نسبت تعداد دندانه‌های چرخ دنده خروجی به چرخ دنده ورودی است. اگر تعداد محورها فرد باشد، چرخش ورودی و خروجی هم جهت، و اگر زوج باشد، غیرهم جهت است.



### مجموعه چرخ دنده‌های معمولی - مرکب:

حداقل روی یک محور بیش از یک چرخ دنده درگیر نصب شده، مثلاً روی محور  $S_2$  دو چرخ دنده B و C با تعداد دندانه‌های  $z_C$  و  $z_B$  نصب گردیده است.

ادامه مجموعه چرخ دنده‌ها می‌تواند به صورت مرکب یا ساده باشد. فعلاً نسبت سرعت زاویه‌ای برای همین قسمت از مجموعه چرخ دنده‌ها، محاسبه می‌شود:

$$R_{13} = \frac{\omega_3}{\omega_1} = \frac{\omega_3}{\omega_2} \times \frac{\omega_2}{\omega_1} = \left( -\frac{z_C}{z_D} \right) \left( -\frac{z_A}{z_B} \right) = +\frac{z_A z_C}{z_B z_D}$$

باتوجه به این‌که محور  $S_1$  ورودی است، بین محورهای  $S_1$  و  $S_2$ ، چرخ‌دنده  $A$  گرداننده و چرخ‌دنده  $B$  گردنده است. به همین ترتیب بین محورهای  $S_2$  و  $S_3$ ، چرخ‌دنده  $C$  گرداننده و چرخ‌دنده  $D$  گردنده است. در نسبت سرعت، تعداد دندانه‌های چرخ‌دنده‌های گرداننده، پس از ضرب در یکدیگر، در صورت قرار گرفته و تعداد دندانه‌های چرخ‌دنده‌های گردنده، پس از ضرب در یکدیگر، در مخرج قرار می‌گیرند. به این ترتیب می‌توان نوشت:

$$R_{io} = \frac{\omega_o}{\omega_i} = (-1)^{n-1} \left( \frac{\prod z_f}{\prod z_n} \right) \quad (n \text{ تعداد محورهای مجموعه چرخ‌دنده‌ها است})$$

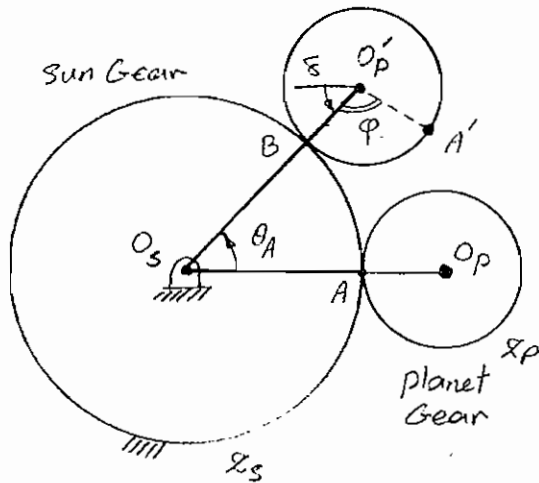
به عنوان مثال:

گرداننده:  $z_A = 90$  ،  $z_C = 96$  ،  $z_E = 100$

گردنده:  $z_B = 30$  ،  $z_D = 24$  ،  $z_F = 20$  (n=4)

$$R_{io} = (-1)^3 \left( \frac{z_A z_C z_E}{z_B z_D z_F} \right) = -\frac{(90) \times (96) \times (100)}{(30) \times (24) \times (20)} = -60$$

### مجموعه چرخ‌دنده‌های منظومه‌ای - صفحه‌ای:



در مجموعه چرخ‌دنده‌های خارجی نشان داده شده در شکل فرض می‌شود، که اتصال دایم دو چرخ‌دنده توسط بازوی  $A$  تأمین گردیده و از جدا شدن چرخ‌دنده‌ها، جلوگیری می‌کند. در این حالت سرعت زاویه‌ای چرخ‌دنده  $P$  نسبت به  $A$  محاسبه می‌شود:

چرخ‌دنده  $S$  را چرخ‌دنده خورشیدی و چرخ‌دنده  $P$  را چرخ‌دنده سیاره‌ای می‌نامند. با چرخش بازو به اندازه  $\theta_A$  مرکز چرخ‌دنده سیاره‌ای به  $O'_p$  منتقل شده و زاویه چرخش چرخ‌دنده سیاره‌ای با  $\theta_p$  نمایش داده می‌شود.

به علت غلتش خالص چرخ‌دنده  $P$  بر روی چرخ‌دنده  $S$  می‌توان نوشت:

$$\widehat{AB} = \widehat{A'B} \Rightarrow R_s \theta_A = R_p \phi \Rightarrow \left( \frac{1}{2} m z_s \right) \theta_A = \left( \frac{1}{2} m z_p \right) \phi \Rightarrow \phi = \frac{z_s}{z_p} \theta_A$$

اما چرخش خالص چرخ‌دنده سیاره‌ای، زاویه حاصل بین امتدادهای  $O_p A$  (یا موازی آن  $\delta$ ) و  $O'_p A'$  است، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\theta_p = \phi + \theta_A = \left( 1 + \frac{z_s}{z_p} \right) \theta_A$$

$$\Rightarrow \omega_p = \left( 1 + \frac{z_s}{z_p} \right) \omega_A \quad \text{و} \quad \alpha_p = \left( 1 + \frac{z_s}{z_p} \right) \alpha_A$$

با استفاده از اصل جمع آثار (Superposition) می‌توان مسئله را در دو مرحله، اما ساده‌تر حل نمود. در مرحله اول همه بندها را به هم قفل کرده (T.L.  $\equiv$  Train Locked) و یک دور چرخانده، در مرحله بعد، بازوی A را ثابت نگه‌داشته (A.F.  $\equiv$  Arm Fixed) و بندی که در کل باید ثابت بماند (چرخ‌دنده خورشیدی) را یک دور در جهت معکوس چرخانده و تأثیر آن بر بندهای دیگر (مثل چرخ‌دنده سیاره‌ای) را به دست آورده، در نهایت، جمع مقادیر هر ستون، در سطر آخر نوشته می‌شود:

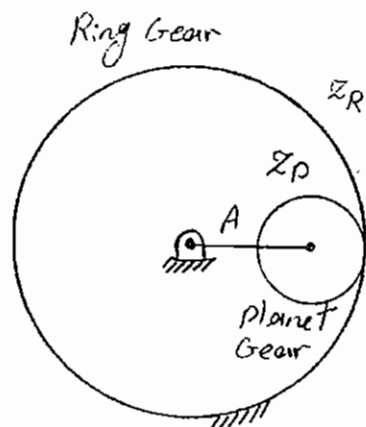
	S	P	Arm
T.L.	+1	+1	+1
A.F.	-1	$+\frac{z_S}{z_P}$	0
Res.	0	$1 + \frac{z_S}{z_P}$	+1

همان‌طور که دیده می‌شود، نتیجه آن است که چرخ‌دنده خورشیدی ثابت باقی‌مانده، بازوی A یک دور و چرخ‌دنده سیاره‌ای  $1 + \frac{z_S}{z_P}$

دور چرخیده است. با یک تناسب ساده می‌توان نوشت:

$$\theta_P = \left(1 + \frac{z_S}{z_P}\right) \theta_A \Rightarrow \omega_P = \left(1 + \frac{z_S}{z_P}\right) \omega_A$$

- در صورتی که به جای چرخ‌دنده خورشیدی S، از چرخ‌دنده داخلی R استفاده شود، آن‌گاه نتیجه به شرح زیر خواهد بود:

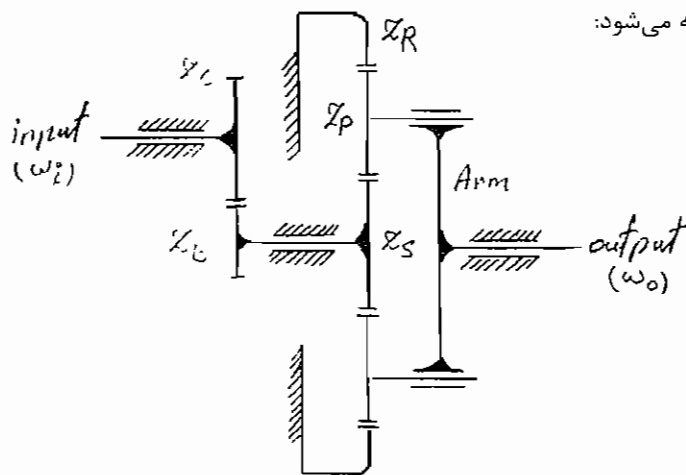


$$\begin{cases} \theta_P = \left(1 - \frac{z_R}{z_P}\right) \theta_A \\ \omega_P = \left(1 - \frac{z_R}{z_P}\right) \omega_A \\ \alpha_P = \left(1 - \frac{z_R}{z_P}\right) \alpha_A \end{cases}$$



به عنوان مثالی دیگر، مجموعه چرخ دنده‌های منظومه‌ای زیر در نظر گرفته می‌شود: چون محور چرخش ورودی و خروجی در یک راستا قرار ندارند، ابتدا چرخ دنده‌های B و C را حذف کرده و مجموعه چرخ دنده‌های

باقی مانده را تحلیل نموده و نسبت  $R_{i0} = \frac{\omega_{Arm}}{\omega_S}$  محاسبه می‌شود:



	S	P	R	Arm
T.L.	+1	+1	+1	+1
A.F.	$+\frac{z_R}{z_S}$	$-\frac{z_R}{z_P}$	-1	0
Res.	$1 + \frac{z_R}{z_S}$	$1 - \frac{z_R}{z_P}$	0	+1

$$\omega_{Arm} = \frac{\omega_S}{1 + \frac{z_R}{z_S}} \quad \text{و} \quad \omega_S = -\frac{z_B}{z_C} \omega_i \quad \Rightarrow \quad \omega_o = \frac{-z_B/z_C}{1 + \frac{z_R}{z_S}} \omega_i$$

$$\Rightarrow \omega_o = -\left(\frac{z_B}{z_C}\right) \left(\frac{z_S}{z_R + z_S}\right) \omega_i$$

برای مقادیر زیر می‌توان نوشت:

$$z_R = 49, \quad z_P = 19, \quad z_S = 11, \quad z_B = 12, \quad z_C = 11 \quad \text{و} \quad N_i = 1500 \text{ rpm}$$

$$N_o = -\left(\frac{12}{11}\right) \left(\frac{11}{49+11}\right) (1500) \quad \Rightarrow \quad N_o = -300 \text{ rpm}$$

حال اگر چرخ دنده داخلی R، به جای آن که ثابت باشد با سرعت زاویه  $\omega_R$  بچرخد، مسئله را می‌توان با استفاده از اصل جمع آثار حل نمود، به این ترتیب که یکبار مسئله را با  $\omega_R = 0$  (که قبلاً حل شد) و یکبار هم با  $\omega_S = 0$  حل نموده و از جمع دو پاسخ حاصل، پاسخ نهایی به دست می‌آید:

$$\omega_R = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega'_o = \left(\frac{z_B}{z_C}\right) \left(\frac{z_S}{z_S + z_R}\right) \omega_i$$

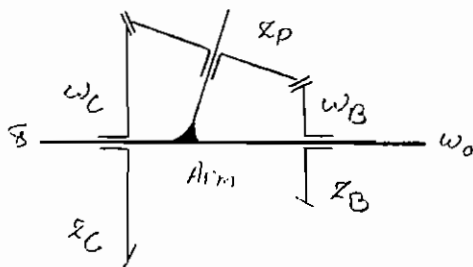
$\omega_S = 0$	S	P	R	Arm
T.L.	+1	+1	+1	+1
A.F.	-1	$+\frac{z_S}{z_P}$	$+\frac{z_S}{z_R}$	0
Res.	0	$1 + \frac{z_S}{z_P}$	$1 + \frac{z_S}{z_R}$	+1

$$\omega_S = 0 \Rightarrow \omega_o'' = \frac{1}{1 + \frac{z_S}{z_R}} \omega_R = \frac{z_R}{z_S + z_R} \omega_R$$

$$\omega_o = \omega_o' + \omega_o'' = \frac{\left(\frac{z_B}{z_C}\right) (z_S \omega_i + (z_R) \omega_R)}{(z_S + z_R)} \Rightarrow N_o = \left(\frac{49}{60}\right) N_R - 300$$

که سرعت زاویه‌ای خروجی، تابعی خطی از  $\omega_R$  بوده و می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} N_R \in [0, 1500] & \Rightarrow N_o \in [-300, +925] \\ N_R = 397.347 \text{ rpm} & \Rightarrow N_o = 0 \end{cases}$$



### مجموعه چرخ‌دنده‌های منظومه‌ای - فضایی:

یک نمونه از چنین مجموعه چرخ‌دنده‌هایی، در شکل نشان داده شده است، که از چرخ‌دنده‌های مخروطی تشکیل شده و محور آنی چرخش  $Z_P$  در هیچ لحظه از حرکت سازوکار، با محور دایم چرخش  $Z_C$  و  $Z_B$  هم‌راستا نمی‌شود.

نسبت سرعت خروجی  $\omega_o$  بر حسب دو ورودی  $\omega_C$  و  $\omega_B$ ، با استفاده از روش جمع آثار به دست می‌آید. البته باید توجه داشت که:

- سرعت زاویه چرخ‌دنده سیاره‌ای  $Z_P$ ، ترکیبی از چرخش آن حول محور آنی خود و نیز چرخش کل چرخ‌دنده حول محور دایم  $\delta$  است، به همین علت، سرعت زاویه‌ای چرخ‌دنده‌های شبیه به این، در جدول جابه‌جایی‌های زاویه‌ای نوشته نمی‌شود.
- در صورتی که بازو (Arm) ثابت نگه‌داشته شده و چرخ‌دنده B در جهت ساعت‌گرد (اگر ناظر در سمت چپ محور قرار داشته باشد) دوران کند، آن‌گاه چرخ‌دنده C در جهت پادساعت‌گرد دوران خواهد کرد که عکس B است، یعنی:

$$\omega_{Arm} = 0 \Rightarrow \frac{\omega_C}{\omega_B} = -\left(\frac{z_B}{z_C}\right)$$

در حالی که در چرخ‌دنده‌های استوانه‌ای، وجود یک واسطه بین دو چرخ‌دنده، سبب می‌شد که حرکت آن دو در یک جهت باشد.

$\omega_B = 0$	B	C	Arm
T.L.	+1	+1	+1
A.F.	-1	$+\frac{z_B}{z_C}$	0
Res.	0	$1 + \frac{z_B}{z_C}$	+1

$$\omega_B = 0 \Rightarrow \omega'_{Arm} = \frac{z_C}{z_B + z_C} \omega_C$$

$$\omega_C = 0 \Rightarrow \omega''_{Arm} = \frac{z_B}{z_B + z_C} \omega_B$$

و به همین ترتیب:

$$\omega_o = \omega'_{Arm} + \omega''_{Arm}$$

$$\omega_o = \frac{z_C \omega_C + z_B \omega_B}{z_B + z_C}$$

## پیوست

### مجموعه سؤال‌های آزمون‌های گذشته

#### تعداد سؤال‌ها

تعداد سؤال‌های تستی آزمون کارشناسی ارشد در طی ۲۰ سال گذشته به شرح زیر می‌باشد. لازم به ذکر است کنکور کارشناسی ارشد سال تحصیلی ۶۹/۶۸ در دانشگاه صنعتی شریف و به صورت تشریحی برگزار گردیده است.

سال تحصیلی	تعداد سؤال
۷۸/۷۷	۶
۷۹/۷۸	۸
۸۰/۷۹	۹
۸۱/۸۰	۷
۸۲/۸۱	۸
۸۳/۸۲	۷
۸۴/۸۳	۷
۸۵/۸۴	۷
۸۶/۸۵	۷
۸۷/۸۶	۷

سال تحصیلی	تعداد سؤال
۶۸/۶۷	۱
۶۹/۶۸	-
۷۰/۶۹	۸
۷۱/۷۰	۸
۷۲/۷۱	۸
۷۳/۷۲	۵
۷۴/۷۳	۵
۷۵/۷۴	۷
۷۶/۷۵	۸
۷۷/۷۶	۷

تعداد کل سؤال‌ها: ۱۳۰

## توضیحات

در حد امکان سعی شده متن سؤال‌ها و پاسخ‌ها بدون تغییر چاپ شده و تنها به اصلاح غلط‌های چاپی در متن اصلی بسنده گردد. غلط‌های دستوری و اشتباهات ساختاری در جملات عیناً حفظ گردیده است. شکل‌ها همانند متن اصلی بوده و فقط اعداد، علائم یا کلمات ناخوانا مجدداً بازنویسی شده‌اند. در فهرست موضوعی سؤال‌ها، ممکن است سؤالی را بتوان در دو گروه متفاوت دسته بندی کرد، که موضوع اصلی سؤال، ملاک دسته بندی قرار گرفته است. برخی از سؤال‌ها در پاسخ‌نامه با علائمی مشخص شده‌اند که مفهوم آن‌ها به شرح زیر است:

◀ : هر چهار پاسخ داده شده در متن اصلی، غلط بوده و هیچ یک از پاسخ‌های داده شده شبیه به پاسخ اصلی نمی‌باشد که بدون تغییر، چاپ گردیده است.

† : هر چهار پاسخ داده شده در متن اصلی، غلط بوده، با این حال با ایجاد تغییراتی در سؤال، یا هر علت دیگر، یکی از پاسخ‌ها که شبیه پاسخ اصلی بوده، انتخاب گردیده است.

‡ : هر چهار پاسخ داده شده در متن اصلی، غلط بوده، با این حال با ایجاد تغییراتی در سؤال، یا هر علت دیگر، دو پاسخ از پاسخ‌های داده شده می‌تواند صحیح باشد.

« : دو پاسخ از پاسخ‌های داده شده در متن اصلی، می‌تواند صحیح باشد.

■ : با چشم‌پوشی از غلط بودن شکل مربوط به سؤال، یکی از پاسخ‌ها می‌تواند صحیح باشد.

## « فهرست موضوعی سؤال‌ها »

سؤال‌ها از سمت راست به چپ و از بالا به پایین مرتب شده است.

### (۱) حرکت‌شناسی سازوکارهای صفحه‌ای ( ۲ سؤال - ۱/۵۴٪ )

گروه اول: ۱-۷۰/۶۹ (ص ۸۴)

گروه دوم: ۳-۷۱/۷۰ (ص ۸۶)

### (۲) درجه آزادی سازوکارهای صفحه‌ای ( ۱۵ سؤال - ۱۱/۵۴٪ )

گروه اول: ۶-۷۲/۷۱ (ص ۸۹)      ۲-۷۵/۷۴ (ص ۹۵)      ۷-۷۵/۷۴ (ص ۹۶)      ۱-۷۶/۷۵ (ص ۹۷)

۱-۷۹/۷۸ (ص ۱۰۳)      ۳-۸۱/۸۰ (ص ۱۰۹)      ۱-۸۲/۸۱ (ص ۱۱۱)      ۳-۸۵/۸۴ (ص ۱۱۷)

۱-۸۷/۸۶ (ص ۱۲۱)      ۵-۸۷/۸۶ (ص ۱۲۲)

گروه دوم: ۲-۸۴/۸۳ (ص ۱۱۵)      ۵-۸۰/۷۹ (ص ۱۰۷)      ۶-۷۸/۷۷ (ص ۱۰۲)

گروه سوم: ۷-۸۳/۸۲ (ص ۱۱۴)

گروه چهارم: ۴-۸۴/۸۳ (ص ۱۱۵)

### (۳) مراکز آنی چرخش سازوکارهای صفحه‌ای ( ۱۱ سؤال - ۸/۴۶٪ )

گروه اول: ۱-۷۱/۷۰ (ص ۸۶)      ۳-۷۲/۷۱ (ص ۸۸)

گروه دوم: ۳-۷۷/۷۶ (ص ۹۹)      ۴-۷۷/۷۶ (ص ۹۹)      ۴-۸۵/۸۴ (ص ۱۱۷)      ۵-۸۶/۸۵ (ص ۱۲۰)

۳-۸۳/۸۲ (ص ۱۱۳)

گروه سوم: ۴-۷۳/۷۲ (ص ۹۱)      ۷-۸۱/۸۰ (ص ۱۱۰)

گروه چهارم: ۵-۸۲/۸۱ (ص ۱۱۱)      ۵-۸۵/۸۴ (ص ۱۱۸)

### (۴) سرعت‌شناسی سازوکارهای صفحه‌ای - روش مراکز آنی چرخش ( ۲۲ سؤال - ۱۶/۹۲٪ )

گروه اول: ۴-۷۶/۷۵ (ص ۹۷)      ۷-۸۰/۷۹ (ص ۱۰۷)      ۲-۸۰/۷۹ (ص ۱۰۶)

گروه دوم: ۶-۷۵/۷۴ (ص ۹۶)      ۵-۷۷/۷۶ (ص ۹۹)      ۲-۷۸/۷۷ (ص ۱۰۱)      ۴-۸۶/۸۵ (ص ۱۱۹)

۶-۸۶/۸۵ (ص ۱۲۰)

گروه سوم: ۲-۷۰/۶۹ (ص ۸۴)      ۳-۷۹/۷۸ (ص ۱۰۳)

گروه چهارم: ۴-۸۰/۷۹ (ص ۱۰۶)      ۱-۸۳/۸۲ (ص ۱۱۳)

گروه پنجم: ۲-۸۳/۸۲ (ص ۱۱۳)      ۳-۸۴/۸۳ (ص ۱۱۵)

گروه ششم: ۲-۸۱/۸۰ (ص ۱۰۹)      ۵-۷۳/۷۲ (ص ۹۲)      ۹-۸۰/۷۹ (ص ۱۰۸)

گروه هفتم: ۴-۷۰/۶۹ (ص ۸۴)      ۶-۷۰/۶۹ (ص ۸۵)      ۱-۸۰/۷۹ (ص ۱۰۶)

گروه هشتم: ۲-۷۹/۷۸ (ص ۱۰۳)      ۱-۸۵/۸۴ (ص ۱۱۷)

۵) سرعت‌شناسی سازوکارهای صفحه‌ای - حل پارامتری (۳ سؤال - ۲/۳۱٪)

گروه اول: ۵-۷۱/۷۰ (ص ۸۷) ۵-۷۸/۷۷ (ص ۱۰۲) ۱-۸۶/۸۵ (ص ۱۱۹)

۶) سرعت‌شناسی سازوکارهای صفحه‌ای - روش نقطه کمکی (۱ سؤال - ۰/۷۷٪)

گروه اول: ۵-۷۲/۷۱ (ص ۸۹)

۷) شتاب‌شناسی سازوکارهای صفحه‌ای - حل ترسیمی (۲ سؤال - ۱/۵۴٪)

گروه اول: ۴-۷۱/۷۰ (ص ۸۶) ۵-۷۴/۷۳ (ص ۹۴)

۸) شتاب‌شناسی سازوکارهای صفحه‌ای - حل تحلیلی (۱۲ سؤال - ۹/۲۳٪)

گروه اول: ۲-۸۵/۸۴ (ص ۱۱۷) ۴-۸۷/۸۶ (ص ۱۲۲)

گروه دوم: ۳-۷۵/۷۴ (ص ۹۵) ۱-۷۸/۷۷ (ص ۱۰۱)

گروه سوم: ۳-۷۸/۷۷ (ص ۱۰۱) ۶-۸۰/۷۹ (ص ۱۰۷) ۷-۸۵/۸۴ (ص ۱۱۸) ۶-۸۴/۸۳ (ص ۱۱۶)

۷-۸۲/۸۱ (ص ۱۱۲)

گروه چهارم: ۲-۷۱/۷۰ (ص ۸۶) ۳-۸۲/۸۱ (ص ۱۱۱) ۱-۸۴/۸۳ (ص ۱۱۵)

۹) شتاب‌شناسی سازوکارهای صفحه‌ای - حل پارامتری (۵ سؤال - ۳/۸۵٪)

گروه اول: ۱-۶۸/۶۷ (ص ۸۳)

گروه دوم: ۶-۷۱/۷۰ (ص ۸۷) ۲-۷۳/۷۲ (ص ۹۱) ۱-۷۷/۷۶ (ص ۹۹) ۶-۸۱/۸۰ (ص ۱۱۰)

۱۰) سازوکارهای صفحه‌ای معادل (۵ سؤال - ۳/۸۵٪)

گروه اول: ۲-۷۲/۷۱ (ص ۸۸) ۶-۸۲/۸۱ (ص ۱۱۲)

گروه دوم: ۱-۷۴/۷۳ (ص ۹۳) ۲-۸۷/۸۶ (ص ۱۲۱) ۶-۸۷/۸۶ (ص ۱۲۳)

۱۱) نیروشناسی سازوکارهای صفحه‌ای (۷ سؤال - ۵/۳۹٪)

گروه اول: ۸-۷۲/۷۱ (ص ۹۰) ۵-۸۴/۸۳ (ص ۱۱۶) ۷-۸۶/۸۵ (ص ۱۲۰)

گروه دوم: ۶-۷۶/۷۵ (ص ۹۸) ۸-۷۶/۷۵ (ص ۹۸) ۸-۷۹/۷۸ (ص ۱۰۵)

گروه سوم: ۵-۷۰/۶۹ (ص ۸۵)

۱۲) چرخ‌لنگر (۲ سؤال - ۱/۵۴٪)

گروه اول: ۱-۷۵/۷۴ (ص ۹۵)

گروه دوم: ۲-۸۲/۸۱ (ص ۱۱۱)

۱۳) ترازمندی اجرام چرخان (۴ سؤال - ۳/۰۸٪)

گروه اول: ۴-۸۲/۸۱ (ص ۱۱۱)

گروه دوم: ۱-۸۱/۸۰ (ص ۱۰۹) ۶-۸۳/۸۲ (ص ۱۱۴)

گروه سوم: ۷-۷۹/۷۸ (ص ۱۰۴)

۱۴) ترازمندی اجرام آرو ( ۶ سؤال - ۴/۶۲٪ )

		گروه اول:	۲-۸۶/۸۵ (ص ۱۱۹)
		گروه دوم:	۶-۷۷/۷۶ (ص ۱۰۰)
		گروه سوم:	۸-۸۰/۷۹ (ص ۱۰۸)
		گروه چهارم:	۴-۷۲/۷۱ (ص ۸۹)
۷-۷۶/۷۵ (ص ۹۸)	۳-۷۴/۷۳ (ص ۹۳)		

۱۵) بادامک و پیرر ( ۶ سؤال - ۴/۶۲٪ )

		گروه اول:	۸۰۰/۷۰ (ص ۸۷)
		گروه دوم:	۲-۷۴/۷۳ (ص ۹۳)
		گروه سوم:	۴-۸۱/۸۰ (ص ۱۰۹)
		گروه چهارم:	۷-۷۷/۷۶ (ص ۱۰۰)
۳-۷۰/۶۹ (ص ۸۴)	۵-۷۵/۷۴ (ص ۹۶)		

۱۶) مجموعه چرخ‌دنده‌های معمولی ( ۱ سؤال - ۰/۷۷٪ )

گروه اول: ۷-۷۰/۶۹ (ص ۸۵)

۱۷) مجموعه چرخ‌دنده‌های منظومه ای صفحه‌ای ( ۲۱ سؤال - ۱۶/۱۵٪ )

		گروه اول:	۵-۸۱/۸۰ (ص ۱۱۰)
		گروه دوم:	۴-۷۵/۷۴ (ص ۹۵)
			۲-۷۷/۷۶ (ص ۹۹)
		گروه سوم:	۵-۸۳/۸۲ (ص ۱۱۴)
		گروه چهارم:	۵-۷۶/۷۵ (ص ۹۸)
		گروه پنجم:	۵-۷۹/۷۸ (ص ۱۰۴)
		گروه ششم:	۸-۷۰/۶۹ (ص ۸۵)
		گروه هفتم:	۴-۷۸/۷۷ (ص ۱۰۱)
۳-۸۶/۸۵ (ص ۱۱۹)	۷-۸۷/۸۶ (ص ۱۲۳)	۱-۲۳/۷۲ (ص ۹۱)	۲-۷۶/۷۵ (ص ۹۷)
		۴-۷۴/۷۳ (ص ۹۴)	۳-۷۶/۷۵ (ص ۹۷)
		۶-۸۵/۸۴ (ص ۱۱۸)	۴-۷۹/۷۸ (ص ۱۰۳)
		۳-۸۷/۸۶ (ص ۱۲۲)	۷-۸۴/۸۳ (ص ۱۱۶)
۳-۷۳/۷۲ (ص ۹۱)	۸-۸۲/۸۱ (ص ۱۱۲)	۷-۷۲/۷۱ (ص ۹۰)	

۱۸) مجموعه چرخ‌دنده‌های منظومه ای فضایی ( ۴ سؤال - ۳/۰۸٪ )

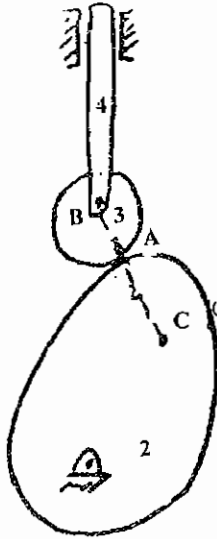
	گروه اول:	۷-۷۱/۷۰ (ص ۸۷)
۴-۸۳/۸۲ (ص ۱۱۳)	گروه دوم:	۳-۸۰/۷۹ (ص ۱۰۶)
۶-۷۹/۷۸ (ص ۱۰۴)		

۱۹) اثرات چرخش‌نمایی ( ۱ سؤال - ۰/۷۷٪ )

گروه اول: ۱-۷۲/۷۱ (ص ۸۸)



### آزمون کارشناسی ارشد - سال تحصیلی ۶۷/۶۸



۱- کدام یک از معادلات زیر در مورد سرعت و شتاب نقاط  $A_2$  و  $A_3$  صحیح است؟

$$(1) \quad V_{A_2} = V_{A_3} \text{ و } a_{A_3} = a_{A_2} + a_{A_3/A_2}^C + a_{A_3/A_2}^l + a_{A_3/A_2}^n, \text{ هر سه مقدار شتاب‌های}$$

عمودی، مماسی و کربولیس وجود دارد.

$$(2) \quad V_{A_2} = V_{A_3} \text{ و } a_{A_3} = a_{A_2} + a_{A_3/A_2}, \text{ امتداد } a_{A_3/A_2} \text{ بر روی خط } BC \text{ قرار دارد.}$$

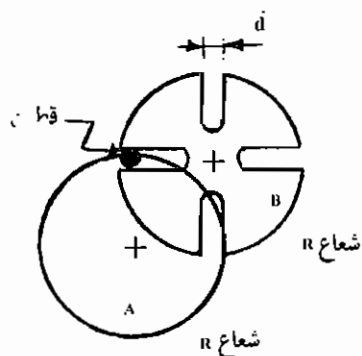
$$(3) \quad V_{A_3} = V_{A_2} + V_{A_3/A_2} \text{ و } a_{A_3} = a_{A_2} + a_{A_3/A_2}, \text{ عمود بر خط } BC \text{ است.}$$

$$(4) \quad V_{A_2} = V_{A_3} \text{ و } a_{A_2} = a_{A_3} \text{ و } a_B = a_{A_2} + a_{B/A_2}$$

(مرکز انحناء)

### آزمون کارشناسی ارشد - سال تحصیلی ۶۹/۷۰

۱- در پیرامون دیسک A مطابق شکل یک پین به قطر d نصب شده است و در روی دیسک دیگر چهار شیار به عرض d ایجاد گردیده است. دیسک A به طور یکنواخت در هر ثانیه یک دور می‌زند و حرکت به دیسک B منتقل می‌شود در این صورت:

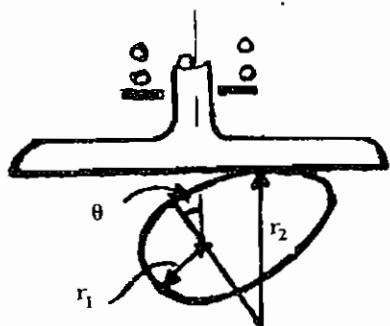


- (۱) دیسک B بر ۱ هر بار چرخش دیسک A فقط نیم دور می‌چرخد.
- (۲) دیسک B برای هر بار چرخش دیسک A فقط نیم ثانیه به چرخش ادامه می‌دهد.
- (۳) وقتی دیسک B می‌چرخد سرعت زاویه‌ای آن در هر لحظه برابر سرعت زاویه‌ای دیسک A است.
- (۴) هیچ‌کدام.

۲- در مسئله قبلی وقتی پین با مراکز دیسک‌های A و B در یک امتداد باشد، سرعت زاویه‌ای دیسک B برابر است با:

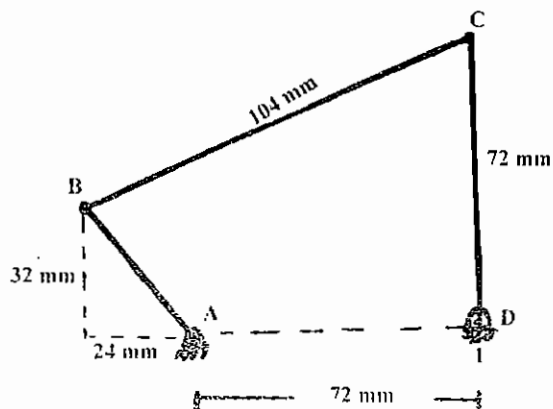
- (۱)  $2\pi$  رادیان بر ثانیه
- (۲)  $\frac{2\pi}{\sqrt{2}-1}$  رادیان بر ثانیه
- (۳)  $4\pi$  رادیان بر ثانیه
- (۴)  $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$  رادیان بر ثانیه

۳- در سیستم بادامک و پیرو شکل زیر بادامک با سرعت زاویه‌ای ثابت  $\omega$  می‌چرخد. در موقعیتی که دایره کناری با شعاع  $r_2$  در تماس با پیرو می‌باشد، شتاب پیرو برابر است با:



- (۱)  $r_2 \omega^2 \sin \theta$
- (۲)  $(r_2 - r_1) \omega^2 \sin \theta$
- (۳)  $r_2 \omega^2 \cos \theta$
- (۴)  $(r_2 - r_1) \omega^2 \cos \theta$

۴- در مکانیزم شکل زیر، اگر سرعت زاویه‌ای عضو AB برابر  $20 \text{ rad/s}$  باشد سرعت زاویه‌ای عضو BC برابر خواهد بود با:



- (۱) ۵ رادیان بر ثانیه
- (۲) ۱۰ رادیان بر ثانیه
- (۳) ۱۵ رادیان بر ثانیه
- (۴) هیچ‌کدام

۵- یک علت انتخاب چرخ‌های با قطر بزرگ به عنوان چرخ عقب تراکتورها:

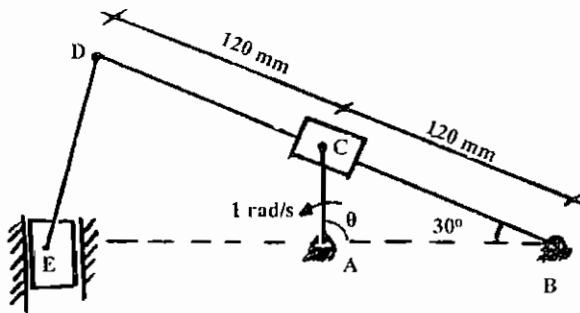
(۱) افزایش نیروی اصطکاک است.

(۲) پایین آوردن دور موتور و بنابراین بالا بردن قدرت آن است.

(۳) افزایش سرعت تراکتور به واسطه کم بودن سرعت دوران موتور است.

(۴) جلوگیری از سر خوردن به واسطه کوپل زیاد اعمال شده به چرخ عقب است.

۶- اگر سرعت زاویه‌ای میل‌لنگ AC ثابت و برابر با  $1 \text{ rad/s}$  باشد، در لحظه‌ای که  $\theta = 90^\circ$  است، سرعت زاویه‌ای میله DB برابر است با:



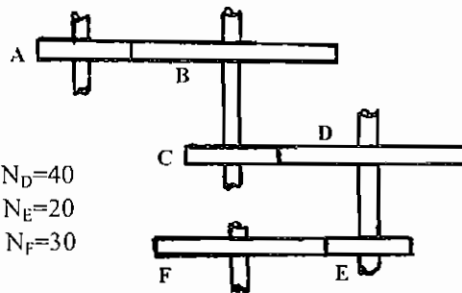
(۱)  $\frac{1}{4}$  رادیان بر ثانیه

(۲)  $\frac{1}{6}$  رادیان بر ثانیه

(۳)  $\frac{1}{8}$  رادیان بر ثانیه

(۴) هیچ کدام

۷- نسبت سرعت زاویه‌ای خروجی به ورودی در سیستم چرخ دنده که تعداد دنده آن‌ها به شرح زیر مشخص می‌گردند عبارت است از:



$$N_A=30, N_D=40$$

$$N_B=60, N_E=20$$

$$N_C=20, N_F=30$$

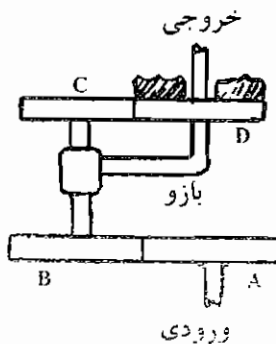
(۱)  $\frac{1}{3}$

(۲)  $\frac{1}{5}$

(۳)  $\frac{1}{6}$

(۴) هیچ کدام

۸- شکل سیستم چرخ‌دنده زیر اگر محور ورودی با سرعت  $1200$  دور در دقیقه بچرخد، محور خروجی چه سرعتی خواهد داشت؟



$$N_A = 51$$

$$N_B = 50$$

$$N_C = 51$$

$$N_D = 50$$

(چرخ‌دنده D ثابت است)

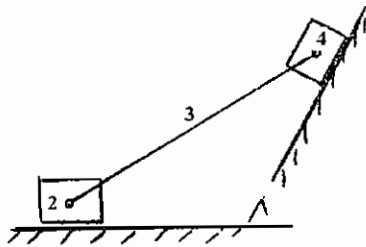
(۱)  $46/6$  دور در دقیقه

(۲)  $56/5$  دور در دقیقه

(۳)  $82/5$  دور در دقیقه

(۴) هیچ کدام

## آزمون کارشناسی ارشد - سال تحصیلی ۷۰/۷۱



۱- در مکانیزم زیر مرکز آنی ۲۴:

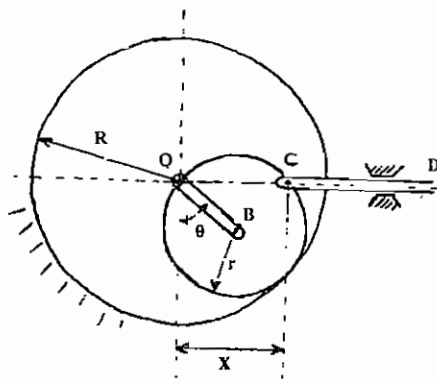
- (۱) روی جزو ۳ قرار می‌گیرد.
- (۲) در امتداد جزو ۳ و در بی‌نهایت است.
- (۳) در امتداد جزو ۳ است ولی در بی‌نهایت نیست.
- (۴) برای این مکانیزم مرکز آنی ۲۴ تعریف نمی‌شود.

۲- در مکانیزم چرخ ژنوا، وقتی که چرخ محرک با سرعت زاویه‌ای ثابت دوران می‌کند، برای به‌دست آوردن شتاب زاویه‌ای چرخ متحرک:



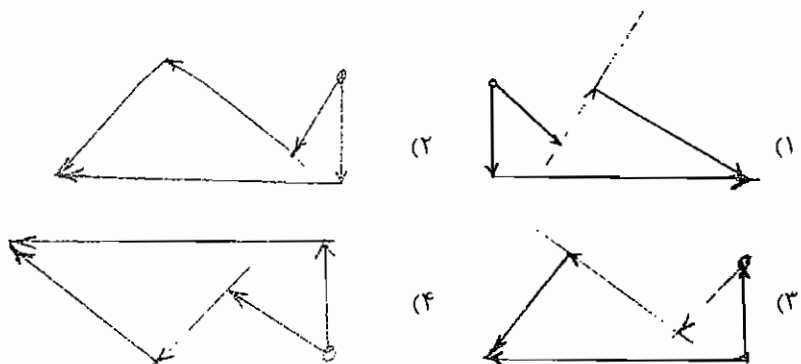
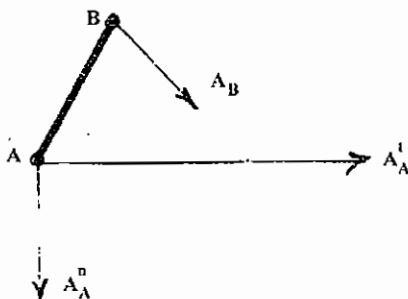
- (۱) شتاب کریولیس برای کلیه موقعیت‌هایی که چرخ متحرک ساکن نیست غیر صفر بوده و بایستی منظور گردد.
- (۲) شتاب کریولیس در ابتدا و در انتهای تماس‌گیر چرخ محرک به اضافه وقتی که گیر در امتداد دو مرکز چرخ‌ها قرار دارند صفر است.
- (۳) شتاب کریولیس فقط در مدت سکون چرخ متحرک منظور می‌گردد.
- (۴) شتاب کریولیس در این مکانیزم مطرح نمی‌گردد.

۳- در مکانیزم زیر چرخ‌ی به شعاع  $r$  در داخل چرخ ثابت به شعاع  $R$  بدون لغزش حرکت می‌کند و اتصالات چرخ‌دنده خورشیدی را ایجاد کرده‌اند. میله  $OB$  به طول  $r$  در نقطه  $O$  ثابت و در نقطه  $B$  به مرکز چرخ به شعاع  $r$  لولا شده است. میله  $CD$  محدود به حرکت در امتداد جهت  $x$  است و در نقطه  $c$  به نقطه‌ای در محیط چرخ به شعاع  $r$  لولا شده است. متغیر  $x$  از رابطه زیر به‌دست می‌آید.

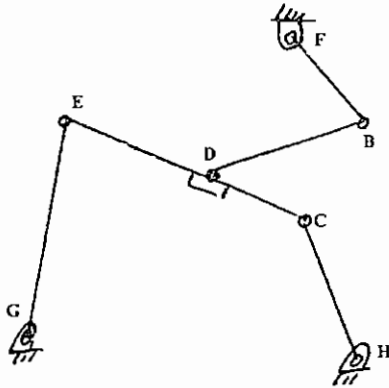


- (۱)  $x = R \sin \theta$
- (۲)  $x = R \tan \theta$
- (۳)  $x = R \cos \theta$
- (۴)  $x = R(\sin \theta + \cos \theta)$

۴- برای میله  $AB$  از یک مکانیزم کثیرالاضلاع، شتاب به چه صورت است؟



۵- کدام یک از روابط ذیل در مورد مکانیزم شش میله صحیح نیست؟



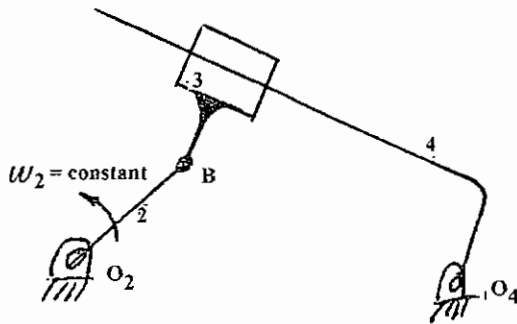
$$\begin{cases} -V_{C/H} - V_{E/C} + V_{G/E} = 0 \\ -V_{B/F} - V_{D/B} - V_{E/D} + V_{G/E} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} V_{C/H} + V_{E/C} - V_{E/G} = 0 \\ V_{B/F} + V_{D/B} + V_{E/D} - V_{E/G} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} V_D = V_E + V_{D/E} \\ V_D = V_C + V_{D/C} \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} V_C = V_H + V_{C/H} \\ V_C = V_D + V_{C/D} \end{cases} \quad (4)$$

۶- کدام یک از معادلات ذیل مناسب‌تر برای محاسبه  $\alpha_1$  می‌باشد؟



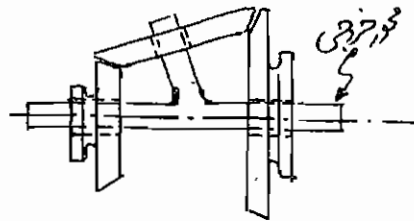
$$A_{B_4} = A_{O_4} + A_{B_4/O_4}^n + A_{B_4/O_4}^t \quad (1)$$

$$A_{B_2} = A_{B_4/O_4}^n + A_{B_4/O_4}^t + A_{B_2/B_4}^t + 2V_{B_2/B_4}\omega_4 \quad (2)$$

$$A_{B_2} = A_{B_4} + A_{B_2/B_4}^n + A_{B_2/B_4}^t + 2V_{B_2/B_4}\omega_4 \quad (3)$$

$$A_{B_2} = A_{O_2} + A_{B_2/O_2}^n + A_{B_2/O_2}^t \quad (4)$$

۷- در سیستم دنده‌ای مقابل تعداد دندانه‌های سمت چپی  $N_1$  برابر 50 و سمت راستی  $N_2$  برابر 75 بوده، دنده سمت چپی با 2.49 دور در ثانیه (در جهت حرکت ساعت) و سمت راستی با 1.66 دور در ثانیه (در خلاف جهت حرکت ساعت) می‌چرخند. دور محور خروجی برابر خواهد بود با:



$N_1=50$

$N_2=75$

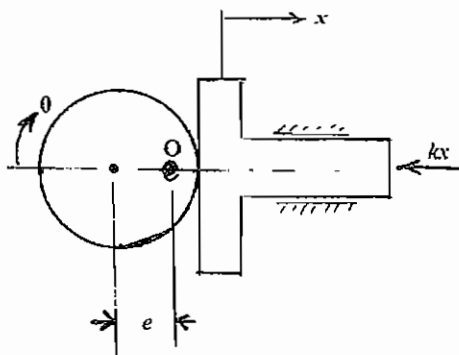
(۱) دو دور در ثانیه

(۲) نیم دور در ثانیه

(۳) صفر دور در ثانیه

(۴) این طرح عملاً نمی‌تواند کار بکند.

۸- وقتی بادامک دایره‌ای از وضع نشان داده شده  $180^\circ$  دوران نماید انرژی حاصله برابر کدام یک از مقادیر زیرین خواهد بود؟



نیروی مقاوم متناسب با تغییر مکان است و نیز داریم:

$$x = e(1 - \cos \theta)$$

$$ke^2 \quad (1)$$

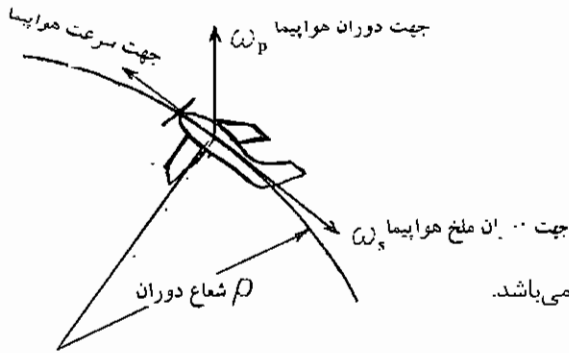
$$\frac{1}{2} ke \quad (2)$$

$$2ke^2 \quad (3)$$

$$2ke \quad (4)$$

## آزمون کارشناسی ارشد - سال تحصیلی ۷۲/۷۱

۱- اگر اثر ژيروسکوپي روی هواپیما اعمال شده باشد کدام یک از عبارات ذیل صحیح است؟



(۱) اثر ژيروسکوپي باعث سقوط هواپیما می شود.

(۲) اثر ژيروسکوپي تولید یک گشتاور می کند که تأثیری در

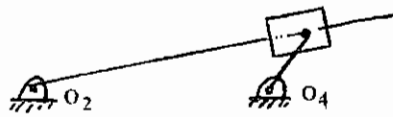
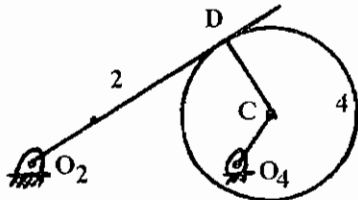
تعادل افقی هواپیما ایجاد نمی کند.

(۳) اثر ژيروسکوپي گشتاوری ایجاد می کند که موجب پایین آمدن

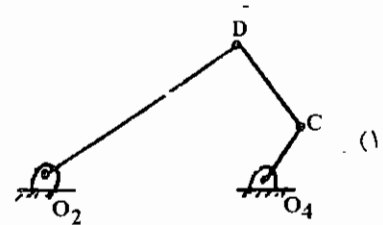
دماغه هواپیما و بالا رفتن دم آن می شود.

(۴) اثر ژيروسکوپي روی هواپیمایی که دارای سرعت ثابت است بی تأثیر می باشد.

۲- برای مکانیزم نشان داده شده، کدام یک از مکانیزمها معادل این مکانیزم هستند؟

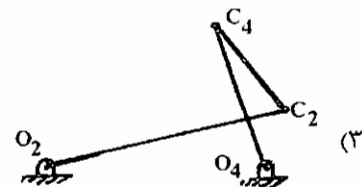


(۲)



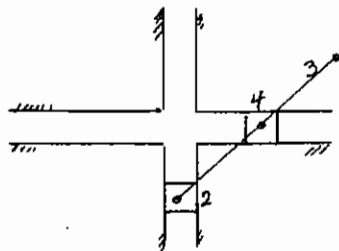
(۱)

(۴) هر دو جواب ب و ج صحیح است.



(۳)

۳- کدام یک از عبارات ذیل در مورد پُرگار بیضی زن صادق می باشد؟



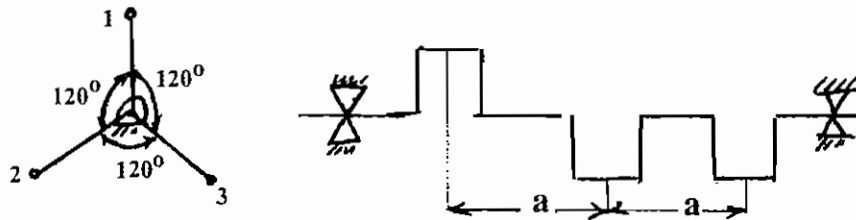
(۱) اهرم بندی است با چهار میله و یک درجه آزادی و چهار مرکز آنی.

(۲) اهرم بندی است با شش مرکز آنی که سه تا از مراکز آنی در بی نهایت قرار دارند.

(۳) پُرگار بیضی زن قابل استفاده برای ترسیم دایره نمی باشد.

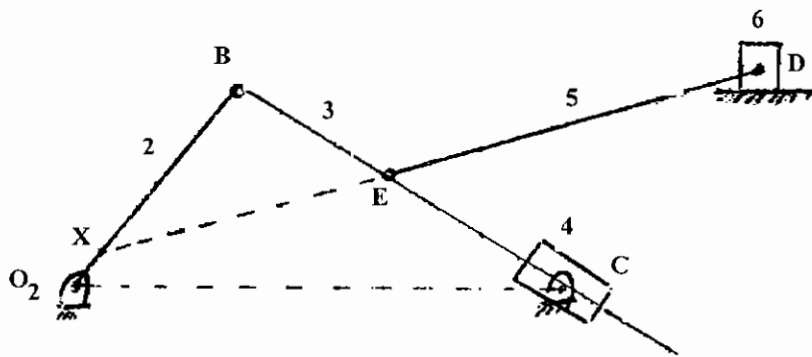
(۴) پُرگار بیضی زن قابل استفاده برای ترسیم دایره می باشد، در صورتی که درجه آزادی مکانیزم تغییر داده شود.

۴- یک موتور سه سیلندر دو زمانه دارای پیستون‌هایی با ترکیب نشان داده شده است. کدام یک از موارد زیر در مورد آن صحیح است.



- (۱) نیروهای اولیه فقط بالانس هستند.  
 (۲) نیروهای اولیه و ثانویه بالانس هستند.  
 (۳) گشتاورهای اولیه و ثانویه فقط بالانس هستند.  
 (۴) هیچ کدام از نیروها یا گشتاورها بالانس نیستند.

۵- برای مکانیزم نشان داده شده، اگر سرعت نقطه D معلوم باشد، کدام گروه از روابط زیر، برای به دست آوردن سرعت زاویه‌ای عضو ۲ کافی است؟



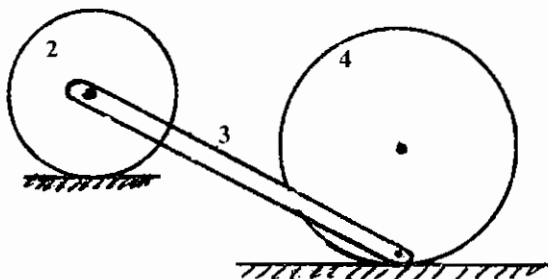
$$\left. \begin{aligned} V_E &= V_D + V_{D/E} \\ V_B &= V_{C_3} + V_{B/C_3} \\ V_{C_3} &= V_{C_4} \\ V_{C_3} &= V_X + V_{C_3/X} \end{aligned} \right\} (۴)$$

$$\left. \begin{aligned} V_E &= V_D + V_{D/E} \\ V_B &= V_{C_3} + V_{B/C_3} \\ V_{C_3} &= V_{C_4} + V_{C_3/C_4} \\ V_B &= V_X + V_{B/X} \end{aligned} \right\} (۳)$$

$$\left. \begin{aligned} V_E &= V_D + V_{E/D} \\ V_B &= V_{C_4} + V_{B/C_4} \\ V_{C_4} &= V_{C_3} + V_{C_4/C_3} \end{aligned} \right\} (۲)$$

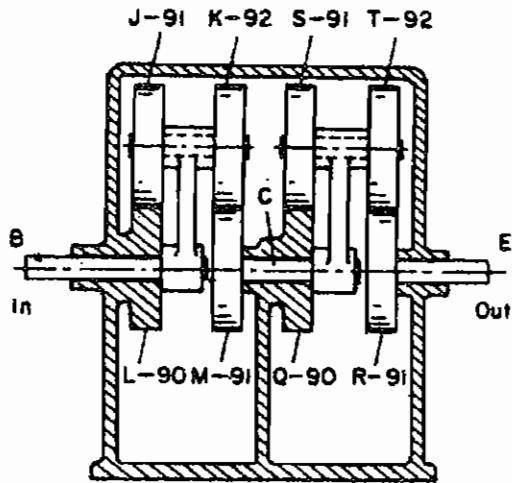
$$\left. \begin{aligned} V_E &= V_D + V_{E/D} \\ V_B &= V_E + V_{B/E} \\ V_E &= V_{C_4} + V_{E/C_4} \end{aligned} \right\} (۱)$$

۶- در سیستم زیر اگر چرخ‌ها در دو مسیر افقی بدون لغزش حرکت کنند این سیستم



- (۱) یک مکانیزم یک درجه آزادی است.  
 (۲) یک زنجیره دو درجه آزادی است.  
 (۳) یک سازه است.  
 (۴) یک سیستم زنجیره‌ای بدون قید است.

۷- در مجموعه چرخ‌دنده‌های مطابق شکل برای سرعت دورانی ورودی 2000 rpm مطلوب است سرعت دورانی خروجی مجموعه



$$\frac{2000}{8281} \text{ rpm} \quad (۱)$$

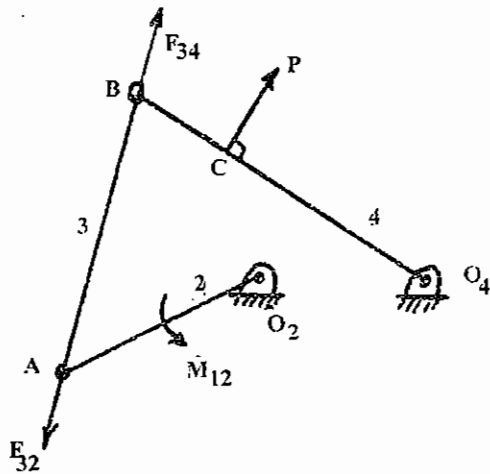
$$\frac{8281}{2000} \text{ rpm} \quad (۲)$$

(۳) سرعت خروجی تقریباً با سرعت ورودی یکسان است.

(۴) سرعت خروجی به قدری کاهش می‌یابد که حدوداً یک

ماه طول می‌کشد تا یک دور بزند.

۸- در تحلیل استاتیکی نیروها در مکانیزم چهار میله‌ای مطابق شکل کدام یک از معادلات ذیل صحیح نمی‌باشد؟



$$\sum F = F_{34} + F_{32} + P = 0 \quad (۱)$$

$$\sum M_{O_4} = R_B \times F_{34} + R_C \times P = 0 \quad (۲)$$

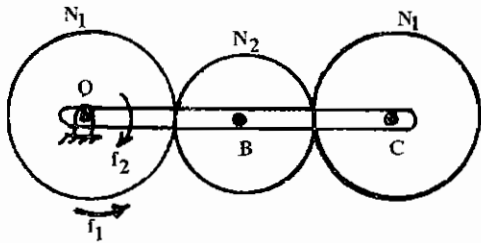
$$\sum F_4 = F_{34} + P + F_{14} = 0 \quad (۳)$$

$$\sum M_{O_2} = M_{12} + R_A \times F_{32} = 0 \quad (۴)$$



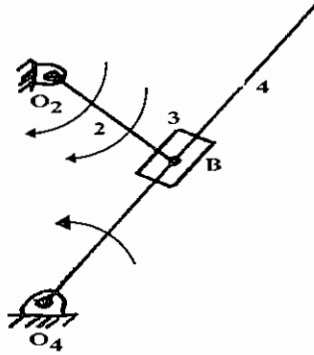
### آزمون کارشناسی ارشد - سال تحصیلی ۷۳/۷۲

۱- در سیستم چرخ‌دنده نشان داده شده میله OBC، ۵ دور بر ثانیه در جهت عقربه‌های ساعت و چرخ به مرکز O، ۵ دور بر ثانیه در جهت عکس عقربه ساعت می‌زند. چرخ به مرکز C چند دور بر ثانیه می‌زند.  
(۱) صفر



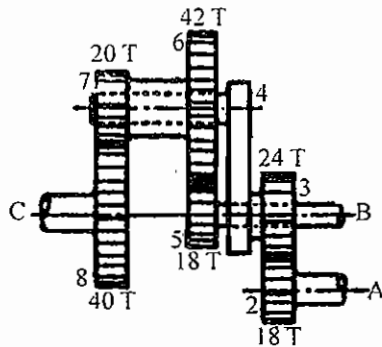
- (۲) ۱۰ دور بر ثانیه در جهت عقربه ساعت  
(۳) ۱۰ دور بر ثانیه در جهت عکس عقربه ساعت  
(۴) ۵ دور بر ثانیه در جهت عکس عقربه ساعت

۲- در صورتی که  $\omega_2$ ،  $\omega_3$  و  $\alpha_2$  معلوم باشند، برای آنالیز شتاب مکانیزم نشان داده شده، کدامیک از روابط برداری زیر بهتر است استفاده گردند.



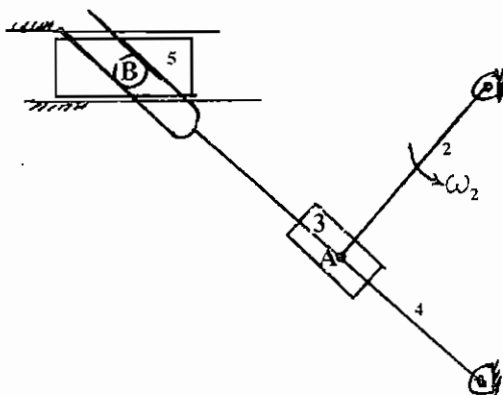
- (۱)  $\bar{a}_{B_3} = \bar{a}_{B_4} + \bar{a}_{B_3/B_4}$   
(۲)  $\bar{a}_{B_4} = \bar{a}_{B_3} + \bar{a}_{B_4/B_3}$   
(۳)  $\bar{a}_{B_4} = \bar{a}_{B_3} + \bar{a}_{B_4/B_3}^{rel} + 2\bar{\omega}_3 \times \bar{v}_{B_4/B_3}$   
(۴)  $\bar{a}_{B_3} = \bar{a}_{B_4} + \bar{a}_{B_3/B_4}^{rel} + 2\bar{\omega}_4 \times \bar{v}_{B_3/B_4}$

۳- در شکل زیر محور B ثابت و محور C با سرعت دورانی ۳۸۰ دور در دقیقه در جهت حرکت عقربه‌های ساعت می‌چرخد. کدامیک از گزینه‌ها بدون توجه به جهت حرکت نمایانگر سرعت دورانی محور A می‌باشد.



- (۱) 645 rpm  
(۲) 273 rpm  
(۳) 932 rpm  
(۴) 745 rpm

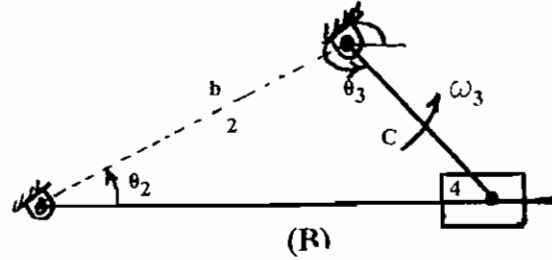
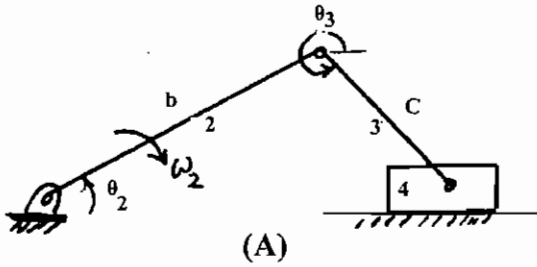
۴- در مکانیزم پنج میله‌ای مطابق شکل محل قرار گرفتن مراکز آنی (لحظه‌ای) بین عضوهای (۴،۵) و (۲،۴) و (۱،۵) عبارتند از:



- (۱) مرکز آنی در این نوع مکانیزم مفهوم ندارد.  
(۲) مراکز آنی ۴۵ و ۳۴، ۴۵ و ۱۵ همگی در بی‌نهایت قرار دارند.  
(۳) مراکز آنی ۴۵ در نقطه B، ۳۴ در نقطه A و ۱۵ روی خط قائم در بی‌نهایت قرار دارند.  
(۴) مراکز آنی ۴۵ در نقطه B، ۳۴ روی خط عمود بر عضو ۴ در بی‌نهایت و ۱۵ در بی‌نهایت قرار دارند.

۵- اگر برای مکانیزم لنگ لغزنده شکل (A) رابطه سرعت زاویه‌ای  $\omega_3 = -\frac{b \cos \theta_2}{c \cos \theta_3} \omega_2$  باشد، کدام یک از عبارات ذیل در

مکانیزم برگشت سریع شکل (B) صدق می‌کند؟



$$\omega_3 = \frac{\omega_1}{1 + \frac{b \cos \theta_2}{c \cos \theta_3}} \quad (\gamma)$$

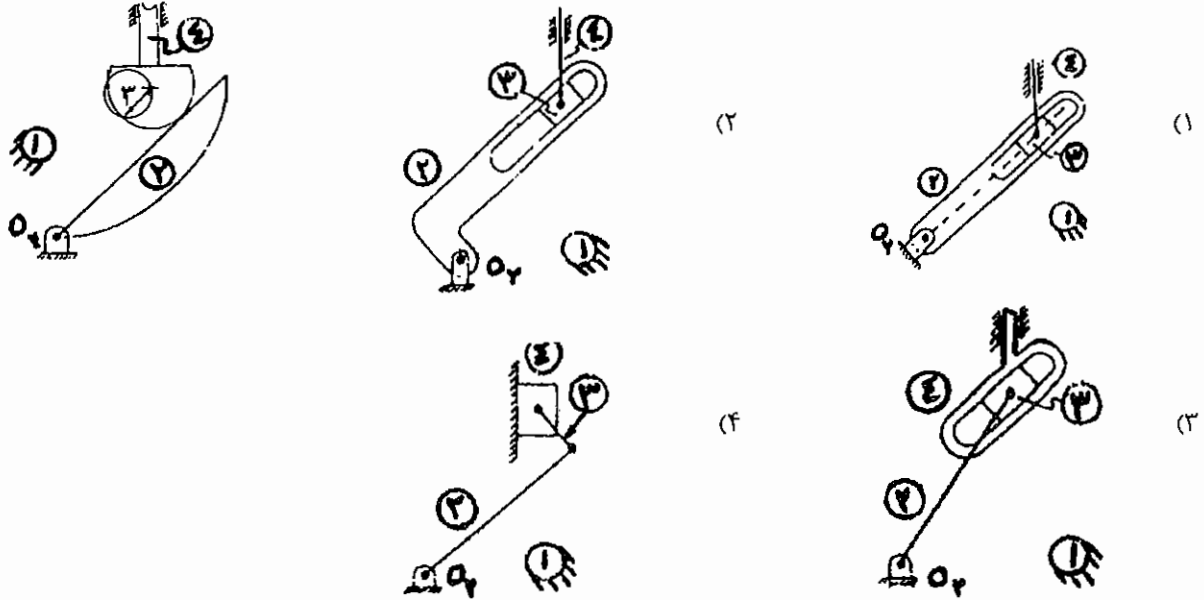
$$\omega_3 = -\frac{b \cos \theta_2}{c \cos \theta_3} \omega_2 \quad (\delta)$$

$$\omega_2 = -\frac{b \cos \theta_2}{c \cos \theta_3} \omega_3 \quad (\epsilon)$$

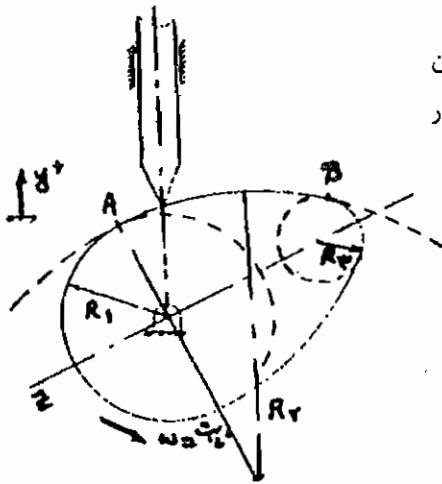
$$\omega_1 = \frac{\omega_3}{1 + \frac{b \cos \theta_2}{c \cos \theta_3}} \quad (\zeta)$$

## آزمون کارشناسی ارشد - سال تحصیلی ۷۴/۷۳

۱- در شکل زیر یک مکانیزم سه میله‌ای از نوع تماس مستقیم نشان داده شده است. مکانیزم چهار میله‌ای معادل آن که تنها دارای اتصالات مرتبه پایین است کدام یک از موارد زیر می‌باشد:

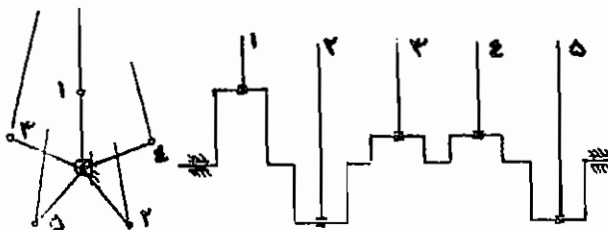


۲- بادامک صفحه‌ای چرخان زیر از نوع قوس پهلو بوده و نسبت به خط  $\delta$  متقارن می‌باشد، این بادامک از چهار قوس دایروی مماس بر هم تشکیل شده است. در مورد نقاط A و B کدام یک از جملات زیر صحیح است:



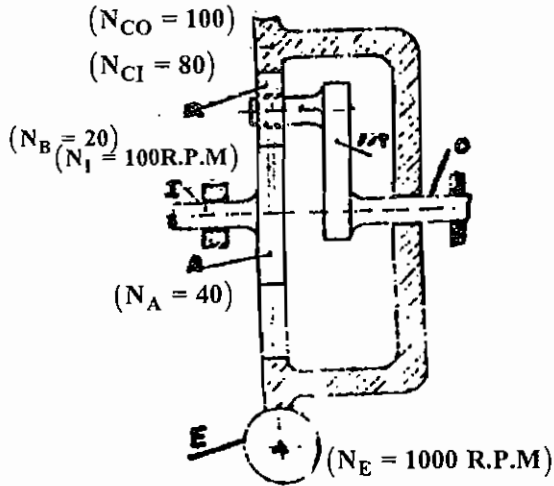
- (۱) سرعت پیرو پیوسته و مشتق پذیر بوده و تکان آن (Jerk) بی‌نهایت است.
- (۲) سرعت پیوسته بوده، اما شتاب آن ناپیوسته است.
- (۳) سرعت و شتاب پیرو هر دو پیوسته و مشتق پذیر است.
- (۴) سرعت و شتاب پیرو هر دو پیوسته بوده اما تکان (Jerk) آن ناپیوسته است.

۳- یک موتور پنج سیلندر مطابق شکل و دارای میل‌لنگی که حاوی لنگ‌هایی با زوایا و موقعیت طولی مساوی نسبت به یکدیگر مفروض است. جرم قسمت‌های رفت و برگشتی سیلندرها مختلف با یکدیگر برابر می‌باشند. عوامل نابالانسی در این موتور عبارتند از:



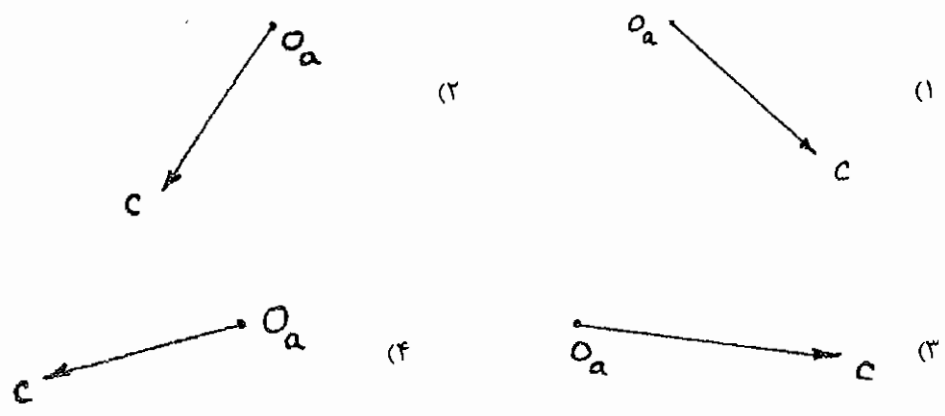
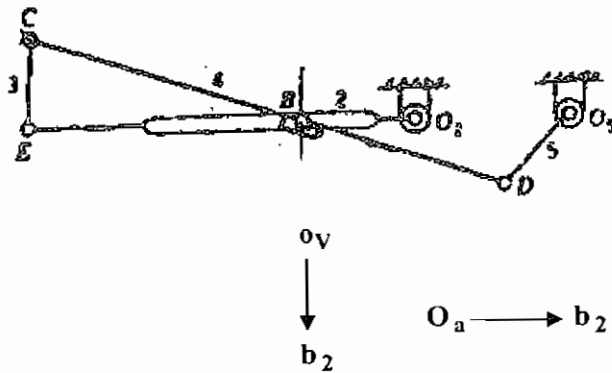
- (۱) نیروی اولیه و گشتاور اولیه
- (۲) نیروی ثانویه و گشتاور ثانویه
- (۳) گشتاور اولیه و گشتاور ثانویه
- (۴) نیروها و گشتاورهای اولیه و ثانویه

۴- در جعبه دنده خورشیدی نشان داده شده در شکل زیر، پیچ چپ گرد E با سرعت ۱۰۰۰ دور در دقیقه در جهت گردش عقربه‌های ساعت و شفت I با نگاه از سمت راست، با سرعت ۱۰۰ دور در دقیقه در جهت گردش عقربه‌های ساعت دوران می‌نماید. دور شفت خروجی O با نگاه از سمت راست برابر است با:



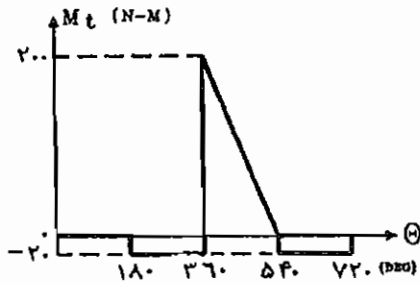
- (۱)  $\frac{20}{3}$  دور در دقیقه در جهت خلاف گردش عقربه‌های ساعت
- (۲)  $\frac{20}{3}$  دور در دقیقه در جهت موافق گردش عقربه‌های ساعت
- (۳)  $\frac{40}{3}$  دور در دقیقه در جهت خلاف گردش عقربه‌های ساعت
- (۴)  $\frac{40}{3}$  دور در دقیقه در جهت موافق گردش عقربه‌های ساعت

۵- با توجه به مقیاس سرعت و شتاب نقطه  $b_2$ ، شتاب نقطه C را از طریق ترسیم نمودار سرعت و شتاب به دست آورید.



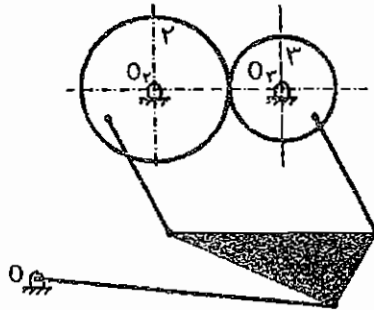
### آزمون کارشناسی ارشد - سال تحصیلی ۷۴/۷۵

۱- دیاگرام ممان خروجی یک موتور تک سیلندر چهار هنگامه مطابق شکل زیر است. ممان مقاوم ثابتی بر روی میل‌لنگ وجود داشته و سرعت زاویه‌ای متوسط ۱۰۰۰ rpm می‌باشد. قدرت موتور چند کیلو وات است؟



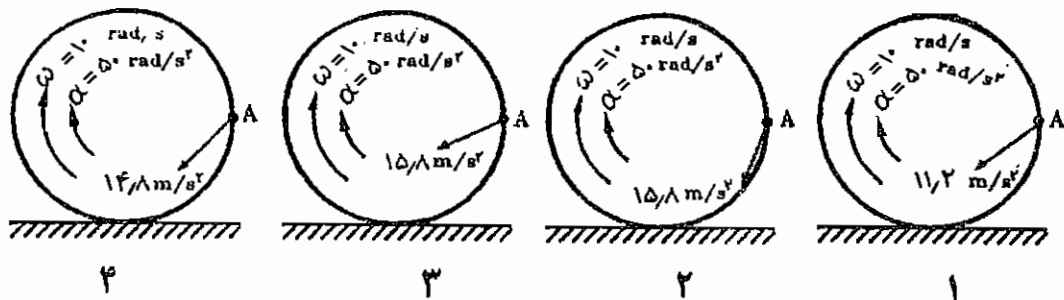
- (۱) ۰/۲۵  
(۲) ۲/۶۲  
(۳) ۱۵  
(۴) ۱/۵۷

۲- درباره مکانیزم روبه‌رو که شامل چرخ‌دنده‌های ۲ و ۳ می‌باشد، کدام عبارت درست است؟

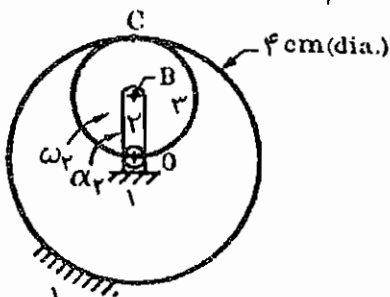


- (۱) اگر به یکی از عضوهای مکانیزم نیروی محرکی وارد شود، مکانیزم حرکتی نخواهد داشت.  
(۲) اگر به یکی از عضوهای مکانیزم نیروی محرکی وارد شود، مکانیزم حرکت کاملاً مشخصی خواهد داشت.  
(۳) باید به دو عضو مکانیزم نیروی محرک وارد شود، تا مکانیزم حرکت کاملاً مشخصی داشته باشد.  
(۴) در مورد امکان حرکت مکانیزم در اثر نیروی محرک اظهار نظر مشخصی نمی‌توان کرد.

۳- دیسک به شعاع ۱۰ cm مطابق شکل بر روی سطح افق بدون لغزش می‌غلتد. کدام گزینه شتاب نسبی نقطه A را نسبت به مرکز دوران به‌صورت صحیح نشان می‌دهد.

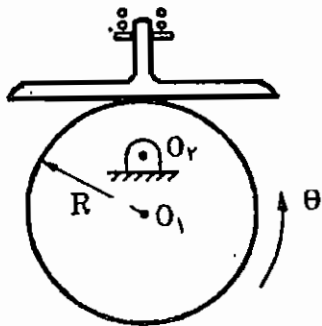


۴- در مجموعه چرخ‌دنده شکل زیر  $\omega_2 = 12 \text{ rad/s}$  و  $\alpha_2 = 48 \text{ rad/s}^2$  می‌باشد.  $\alpha_3$  کدام است؟



- (۱)  $48 \text{ rad/s}^2$  (ccw)  
(۲)  $144 \text{ rad/s}^2$  (cw)  
(۳)  $152 \text{ rad/s}^2$  (cw)  
(۴)  $288 \text{ rad/s}^2$  (ccw)

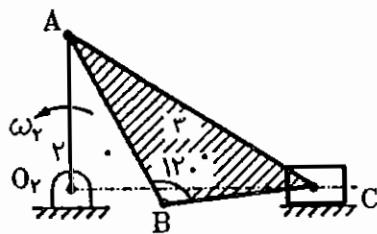
۵- در سیستم زیر اگر بادامک دایره‌ای شعاع  $R$  داشته و فاصله  $O_1O_2$  برابر  $\frac{2R}{3}$ ، تغییر مکان، سرعت و شتاب زاویه‌ای آن به ترتیب  $\theta$ ،  $\omega$  و  $\alpha$  باشد، شتاب پیرو برابر است با:



$$\begin{aligned}
 & \frac{R}{3}(\omega^2 \cos \theta + \alpha \sin \theta) \quad (۱) \quad \frac{R}{2}(\omega^2 \cos \theta + \alpha \sin \theta) \quad (۲) \\
 & \frac{2R}{3}(\omega^2 \cos \theta + \alpha \sin \theta) \quad (۳) \quad \frac{3R}{2}(\omega^2 \sin \theta + \alpha \cos \theta) \quad (۴)
 \end{aligned}$$

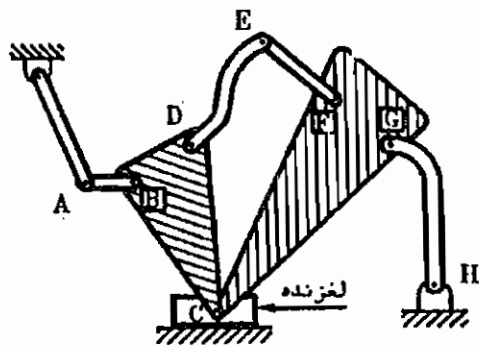
۶- در مکانیزم لنگ و لغزنده شکل زیر، نقطه B، نقطه‌ای در روی میله رابط ۳ است. در حالت نشان داده شده در شکل، سرعت

نقطه B کدام است؟ ( $AB = BC$ )



- (۱) صفر
- (۲) نصف سرعت نقطه A
- (۳) برابر سرعت نقطه A
- (۴) دو برابر سرعت نقطه A

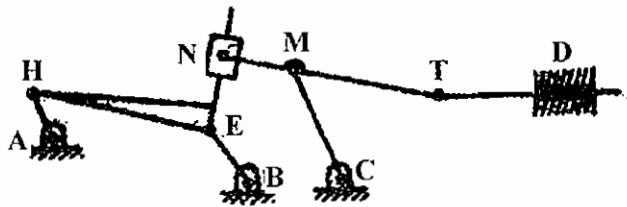
۷- در مکانیزم روبه‌رو تعداد درجات آزادی کدام است؟



- (۱) یک
- (۲) دو
- (۳) سه
- (۴) چهار

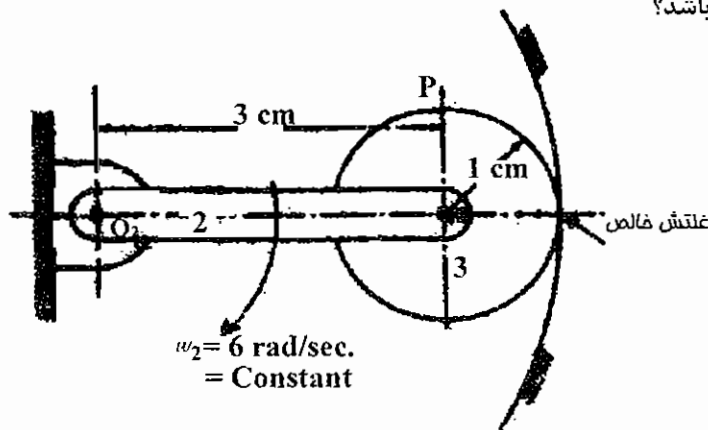
## آزمون کارشناسی ارشد - سال تحصیلی ۷۶/۷۵

۱- در مکانیزم روبه‌رو معین کردن وضعیت حرکتی حداقل چه تعداد از اعضا برای تعیین کامل وضعیت مکانیزم لازم است؟



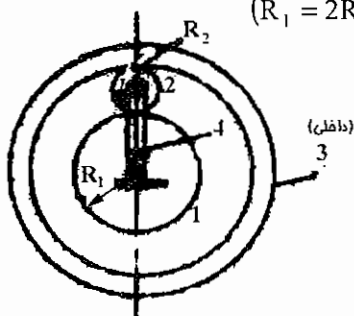
- (۱) صفر عضو
- (۲) یک عضو
- (۳) دو عضو
- (۴) سه عضو

۲- شتاب نقطه P در مکانیزم روبه‌رو چند  $\text{cm/s}^2$  می‌باشد؟



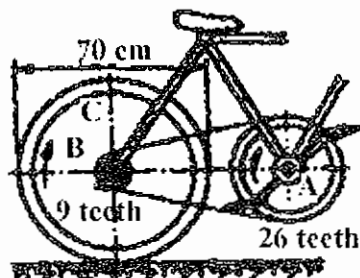
- (۱) ۱۰۸
- (۲) ۳۲۴
- (۳) ۳۴۱
- (۴) ۴۳۲

۳- در سیستم چرخ‌دنده خورشیدی اگر بازوی ۴ دارای سرعت زاویه‌ای ۱ دور در ثانیه در جهت عقربه‌های ساعت و چرخ‌دنده شماره ۱ دارای سرعت زاویه‌ای ۵ دور در ثانیه و در جهت عقربه‌های ساعت باشد، در این صورت سرعت زاویه‌ای چرخ‌دنده داخلی ۳ برابر ... دور در ثانیه و در ... عقربه‌های ساعت می‌باشد. ( $R_1 = 2R_2$ )



- (۱) ۱- جهت
- (۲) ۱- خلاف جهت
- (۳) ۵- جهت
- (۴) ۵- خلاف جهت

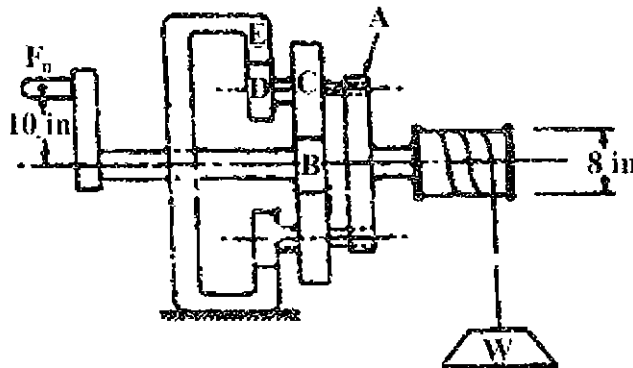
۴- سینی رکاب A دوچرخه‌ای دارای قطر 30 cm و سرعت 60 rpm است و چرخ زنجیر B آن دارای قطر 5 cm است. اگر قطر چرخ دوچرخه 70 cm باشد، سرعت دوچرخه سوار چند کیلومتر در ساعت است؟



- (۱) ۳۵/۷
- (۲) ۴۰/۱۵
- (۳) ۴۷/۱۵
- (۴) ۵۵/۸

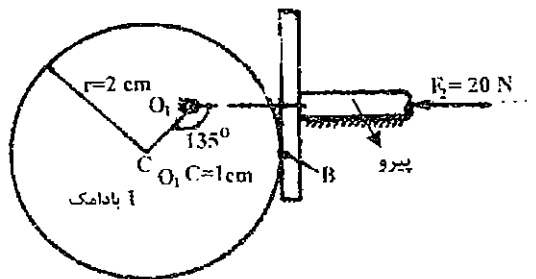
۵- مکانیزم یک جرثقیل دستی در شکل مقابل ملاحظه می‌شود. اگر  $Z_B=20$ ،  $Z_C=80$  و  $Z_D=30$  دندانه باشند، برای یک نسبت تبدیل

$n_A : n_B = 1 : 25$ ، تعداد دندانه‌های E باید چند تا باشد؟



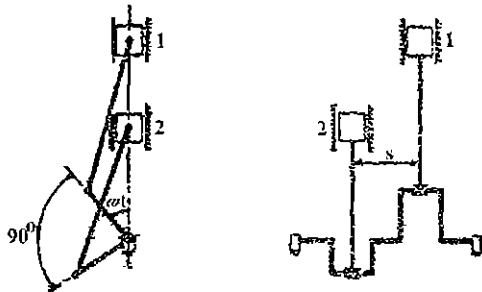
- (۱) ۴۰
- (۲) ۸۰
- (۳) ۱۲۰
- (۴) ۱۸۰

۶- گشتاور  $T_1$  وارد بر محور بادامک، برای ایجاد تعادل استاتیکی مکانیزم بادامک و پیرو، برابر است با:



- (۱) 14.1 N.cm (ccw)
- (۲) 14.1 N.cm (cw)
- (۳) 20 N.cm (ccw)
- (۴) 20 N.cm (cw)

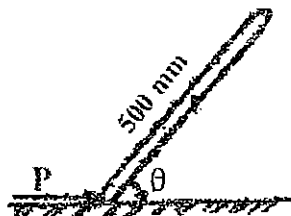
۷- در مورد موتور دو سیلندر رو به رو کدام عبارت درست است؟



- (۱) ممان لرزشی اولیه بالانس می‌باشد.
- (۲) ممان لرزشی ثانویه بالانس می‌باشد.
- (۳) نیروی لرزشی اولیه بالانس می‌باشد.
- (۴) نیروی لرزشی ثانویه بالانس می‌باشد.

۸- به میله‌ای همگن به جرم ۴ کیلوگرم نیروی افقی  $P = 60 \text{ N}$  وارد می‌شود. اگر این میله فقط دارای حرکت انتقالی باشد، زاویه

تمایل ( $\theta$ ) آن نسبت به سطح افق چه مقدار می‌باشد؟ ( سطح افقی را بدون اصطکاک فرض کنید)

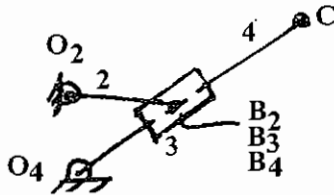


- (۱)  $13/3^\circ$
- (۲)  $23/3^\circ$
- (۳)  $33/3^\circ$
- (۴)  $43/3^\circ$



## آزمون کارشناسی ارشد - سال تحصیلی ۷۶/۷۷

۱- در شکل مقابل با معلوم بودن سرعت زاویه‌ای عضو ۲ و به فرض ثابت بودن آن، شتاب نقطه C از کدام روابط حاصل می‌شود؟



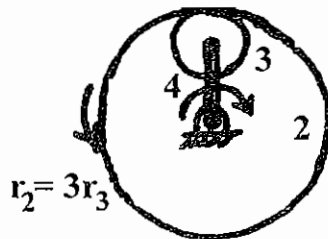
$$\bar{a}_C = \bar{a}_{B_3} + \bar{a}_{C/B_3}^1 + \bar{a}_{C/B_3}^n + \bar{a}_{C/B_3}^{Cr} \quad (1)$$

$$\bar{a}_{B_3}^n = \bar{a}_{B_4}^1 + \bar{a}_{B_4}^n + \bar{a}_{B_3/B_4}^n + \bar{a}_{B_3/B_4}^{rel}, \quad \bar{a}_C = \bar{a}_{B_4} + \bar{a}_{C/B_4} \quad (2)$$

$$\bar{a}_{B_4}^n + \bar{a}_{B_4}^1 = \bar{a}_{B_3}^n + \bar{a}_{B_4/B_3}^{rel} + \bar{a}_{B_4/B_3}^{Cr}, \quad \bar{a}_C = \bar{a}_{B_4} + \bar{a}_{C/B_4} \quad (3)$$

$$\bar{a}_{B_3}^n = \bar{a}_{B_4}^1 + \bar{a}_{B_4}^n + \bar{a}_{B_3/B_4}^{rel} + \bar{a}_{B_3/B_4}^{Cr}, \quad \bar{a}_C = \bar{a}_{B_4} + \bar{a}_{C/B_4} \quad (4)$$

۲- در شکل مقابل اگر بازوی شماره ۴ دارای سرعت زاویه‌ای 2rad/sec در جهت عقربه‌های ساعت و چرخ‌دنده ۲ دارای سرعت زاویه‌ای 5rad/sec در جهت عکس عقربه‌های ساعت باشد، سرعت زاویه‌ای چرخ‌دنده ۳ چند rad/sec خواهد بود؟



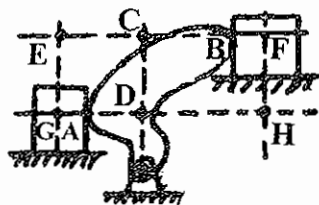
$$\omega_3 = 7 \quad (1)$$

$$\omega_3 = 11 \quad (2)$$

$$\omega_3 = 19 \quad (3)$$

$$\omega_3 = 29 \quad (4)$$

۳- مراکز آنی دوران غیراویلیه (یعنی غیر از ۱۲، ۱۳ و ۱۴) در مکانیزم شکل مقابل کدام دو نقطه‌اند؟



$$B, A \quad (1)$$

$$D, C \quad (2)$$

$$G, F \quad (3)$$

$$E, H \quad (4)$$

۴- مرکز آنی دوران (۲۴) در سیستم سه چرخ‌دنده شکل مقابل در کدام محل قرار دارد؟



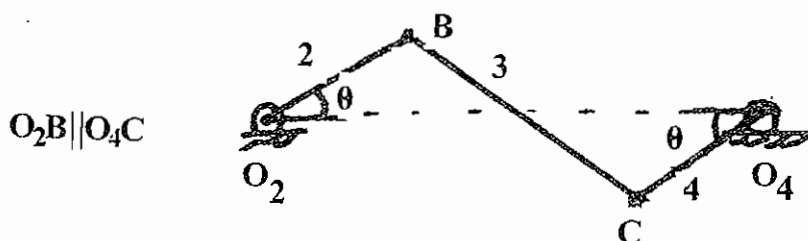
(۱) وسط خط‌المركزین دواير (۲) و (۴)

(۲) تماس دواير (۲) و (۳)

(۳) تقاطع خط‌المركزین بامماس مشترك داخلی دواير (۲) و (۴)

(۴) تقاطع خط‌المركزین بامماس مشترك خارجی دواير (۲) و (۴)

۵- در شکل مقابل برای مکانیزم نشان داده شده اگر عضو ۲ دارای سرعت زاویه‌ای  $\omega_2$  و ثابت باشد، کدام پاسخ برای سرعت و شتاب زاویه‌ای عضو ۳ صحیح است؟



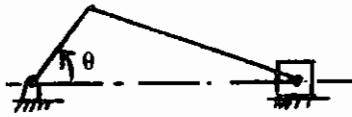
$$\alpha_3 \neq 0, \quad \omega_3 = 0 \quad (1)$$

$$\alpha_3 = 0, \quad \omega_3 = 0 \quad (2)$$

$$\alpha_3 = 0, \quad \omega_3 \neq 0 \quad (3)$$

$$\alpha_3 \neq 0, \quad \omega_3 \neq 0 \quad (4)$$

۶- کدام عبارت در مورد مکانیزم لنگ و پیستون صدق می‌کند؟



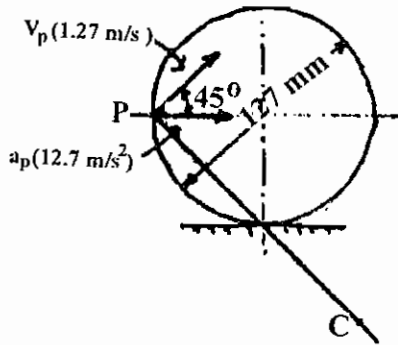
- (۱) اگر طول دسته پیستون با طول لنگ برابر باشد، مکانیزم نمی‌تواند کار کند.
- (۲) حداکثر شتاب پیستون در  $\theta = 180^\circ$  یعنی در نقطه مرگ پایین رخ می‌دهد.
- (۳) هر قدر دسته پیستون بلند باشد، حرکت پیستون به هارمونیک ساده نزدیک می‌شود.
- (۴) وقتی زاویه لنگ  $90^\circ$  باشد سرعت پیستون حداکثر است.

۷- یک پیرو در ازا  $\beta$  رادیان از دوران بادامک،  $f$  سانتی‌متر به طور هارمونیک صعود می‌کند. اگر بادامک در  $N$  دور در دقیقه گردش کند، حداکثر شتاب پیرو (بر حسب  $\text{cm/sec}^2$ ) کدام است؟

(۱)  $(2\pi^4 LN^2)/\beta^2$       (۲)  $(\pi^4 LN^2)/(1800\beta^2)$       (۳)  $\pi^4 L(\pi N/30)^2$       (۴)  $2L(\pi/\beta)^2 (\pi N)^2$

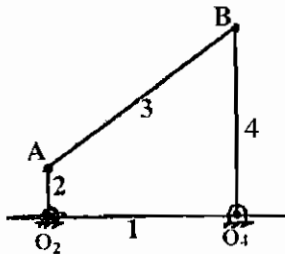
## آزمون کارشناسی ارشد - سال تحصیلی ۷۸/۷۷

۱- چرخ روبه‌رو، بر روی زمین مسطح می‌غلتد. سرعت و شتاب نقطه P بر روی شکل داده شده است. شعاع انحنای نقطه P چقدر است؟



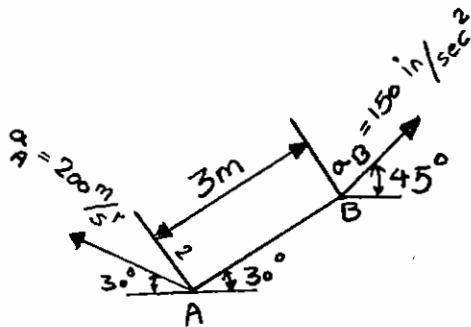
- (۱)  $r_p = 179.6 \text{ mm}$
- (۲)  $r_p = 153.3 \text{ mm}$
- (۳)  $r_p = 127 \text{ mm}$
- (۴)  $r_p = 89.8 \text{ mm}$

۲- در مکانیزم چهار میله‌ای شکل، کدام رابطه برقرار است؟



- (۱)  $\omega_2 = 4\omega_4$
- (۲)  $\omega_4 = 4\omega_2$
- (۳)  $\omega_2 = 2\omega_4$
- (۴)  $\omega_4 = 2\omega_2$

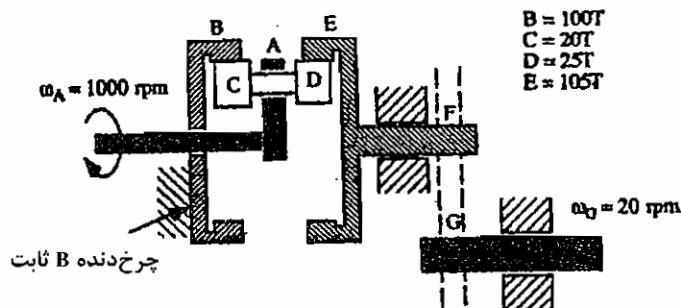
۳- شتاب نقاط انتهایی لینک AB در شکل روبه‌رو، مشخص شده است. شتاب زاویه‌ای این لینک چقدر است؟



- (۱)  $\alpha = 450 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \text{ ccw}$
- (۲)  $\alpha = 45 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \text{ ccw}$
- (۳)  $\alpha = 45 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \text{ cw}$
- (۴)  $\alpha = 450 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \text{ cw}$

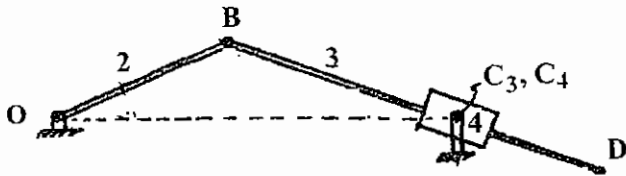
۴- سیستم چرخ‌دنده شکل زیر برای کاهش دور مورد استفاده قرار گرفته است. برای تعیین چرخ دنده‌های مناسب F و G، ابتدا

باید نسبت سرعت  $\frac{\omega_F}{\omega_A}$  معلوم شود. این نسبت را تعیین کنید.



- (۱)  $-\frac{4}{21}$
- (۲)  $-\frac{1}{4}$
- (۳)  $-\frac{3}{21}$
- (۴)  $\frac{1}{4}$

۵- با معلوم بودن سرعت زاویه‌ای بازوی OB (عضو شماره ۲)، کدامیک از معادلات زیر برای پیدا کردن سرعت زاویه‌ای بازوی BD (عضو ۳) کافی است؟



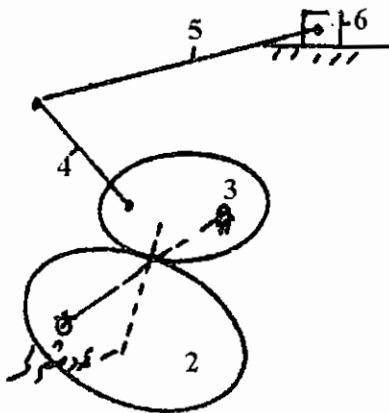
$$\vec{V}_D = \vec{V}_B + \vec{V}_{D/B}, \quad \omega_{BD} = \frac{V_{D/B}}{DB} \quad (1)$$

$$\vec{V}_{C_3} = \vec{V}_B + \vec{V}_{C_3/B}, \quad \omega_{BD} = \frac{V_{C_3/B}}{BC_3} \quad (2)$$

$$\vec{V}_{C_4} = \vec{V}_B + \vec{V}_{C_4/B}, \quad \omega_{BD} = \frac{V_{C_4/B}}{C_4B} \quad (3)$$

$$\vec{V}_{C_4} = \vec{V}_{C_3} + \vec{V}_{C_4/C_3}, \quad \omega_{BD} = \frac{V_{C_4/C_3}}{C_4C_3} \quad (4)$$

۶- در مکانیزم زیر اگر  $\omega_2$  معلوم باشد، با توجه به مشخص بودن طول و موقعیت اهرم‌ها در این لحظه، کدامیک از عبارات داده شده صحیح است؟



(۱) می‌توان سرعت بلوک ۶ یا سرعت زاویه‌ای اهرم ۵ را برحسب  $\omega_2$  مشخص نمود.

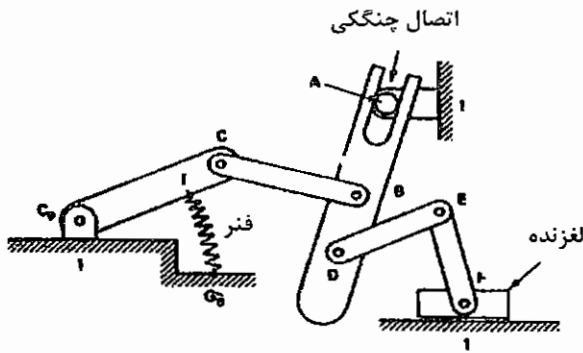
(۲) می‌توان کلیه مراکز آنی این مکانیزم را مشخص نمود.

(۳) گزینه‌های ۱ و ۲ صحیح است.

(۴) نمی‌توان سرعت بلوک ۶ یا سرعت زاویه‌ای اهرم ۵ را برحسب  $\omega_2$  مشخص نمود.

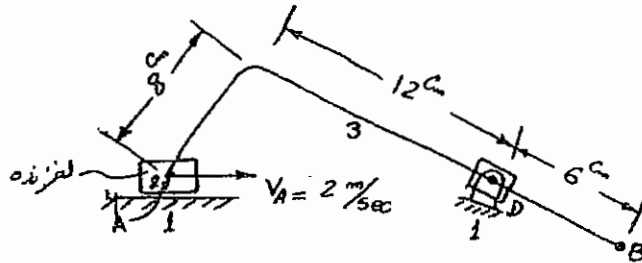
## آزمون کارشناسی ارشد - سال تحصیلی ۷۹/۷۸

۱- درجه آزادی یا قابلیت حرکت (Mobility) مکانیزم نشان داده شده در شکل چند می‌باشد؟



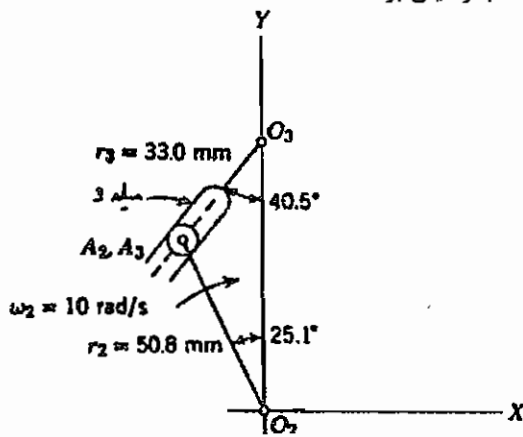
- (۱) سه
- (۲) دو
- (۳) یک
- (۴) صفر

۲- در مکانیزم زیر سرعت نقطه A داده شده است. نقطه A روی مرکز لغزنده تعیین شده است. سرعت نقطه B برابر است با:



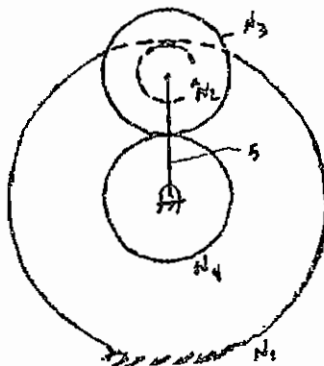
- (۱)  $1.9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
- (۲)  $2.9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
- (۳)  $3.9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
- (۴)  $4.9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

۳- با توجه به شکل مقابل، اندازه سرعت زاویه‌ای میله ۳ در این لحظه برحسب رادیان بر ثانیه چقدر است؟



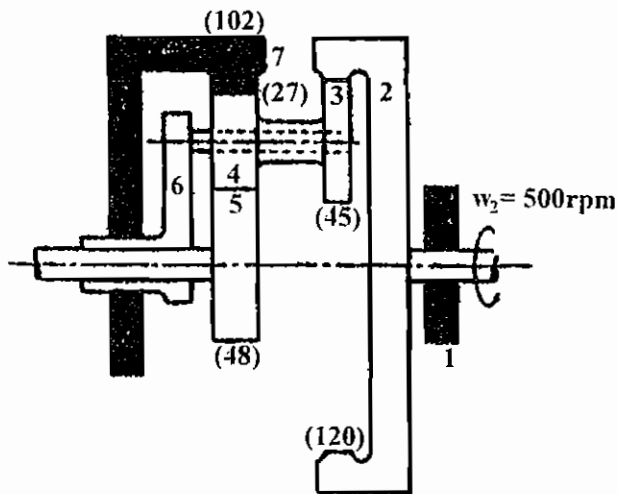
- (۱)  $4/45$
- (۲)  $6/36$
- (۳)  $7/22$
- (۴) ۸

۴- چنانچه حرکت در جهت عکس عقربه‌های ساعت مثبت تلقی شود و در شکل کلیه تماس دایره‌ها با هم از نوع غلتکی باشد، نسبت  $\frac{\omega_4}{\omega_5}$  چقدر است؟



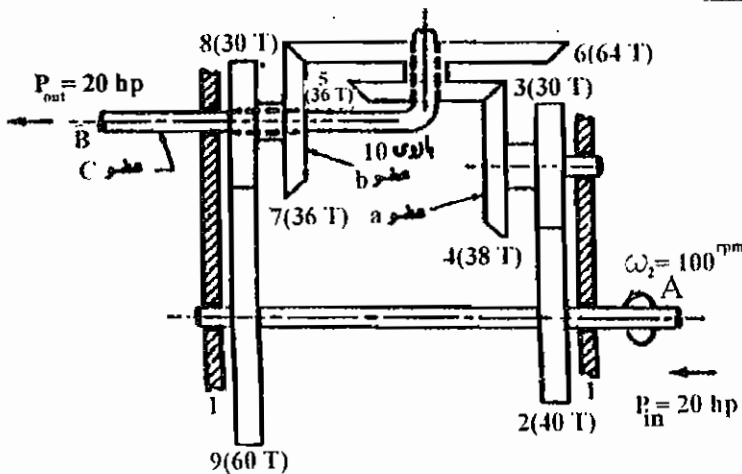
- (۱)  $(1 - \frac{N_3}{N_4})(1 - \frac{N_3}{N_2})$
- (۲)  $(1 + \frac{N_3}{N_4})(1 + \frac{N_3}{N_2})$
- (۳)  $-(1 + \frac{N_3}{N_4})(1 + \frac{N_3}{N_2})$
- (۴)  $(1 + \frac{N_4}{N_3})(1 + \frac{N_2}{N_3})$

۵- چنانچه در سیستم چرخ‌دنده مقابل  $\omega_2$  داده شده باشد، کدام یک از گزینه‌های زیر برای  $\omega_1$  صحیح است؟



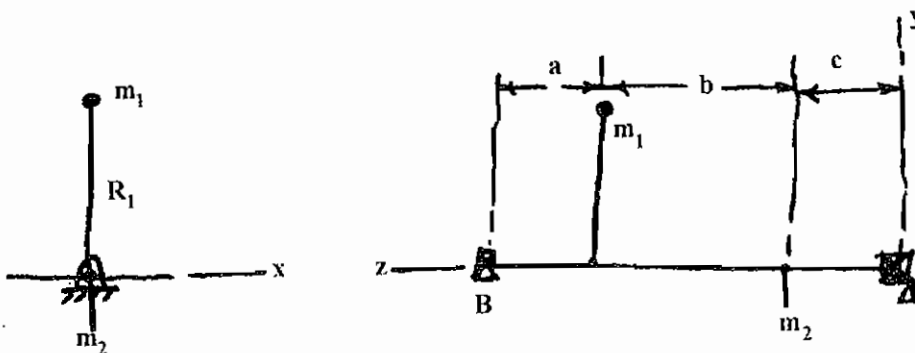
- (۱)  $\omega_2$  در جهت 600(rpm)
- (۲)  $\omega_2$  در خلاف جهت 1200(rpm)
- (۳)  $\omega_2$  در خلاف جهت 3750(rpm)
- (۴)  $\omega_2$  در جهت 5250(rpm)

۶- در شکل نشان داده شده، اندازه  $\omega_2$  و جهت آن مشخص شده. اندازه و جهت دوران عضو C (بازوی ۱۰) کدام یک از گزینه‌های زیر است؟



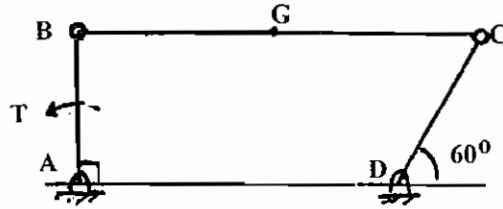
- (۱)  $\omega_2$  در جهت 133.3(rpm)
- (۲)  $\omega_2$  در خلاف جهت 157.3(rpm)
- (۳)  $\omega_2$  در خلاف جهت 200(rpm)
- (۴)  $\omega_2$  در خلاف جهت 400(rpm)

۷- در سیستم دوار شکل زیر،  $R_1=R_2=60$  mm،  $a=c=300$  mm،  $b=600$  mm،  $m_1=1$  kg و  $m_2=3$  kg. نیروی عکس‌العمل در تکیه‌گاه A را محاسبه کنید در صورتی که سرعت محور AB معادل 100 rpm تعیین شده باشد.



- (۱)  $\angle 90^\circ$  8.8 KN
- (۲)  $\angle 90^\circ$  23.5 KN
- (۳)  $\angle 90^\circ$  13.15 KN
- (۴)  $\angle 270^\circ$  13.15 KN

۸- مکانیزم شکل مقابل در صفحه قائم حرکت می‌کند. در لحظه نشان داده شده، میله BC افقی است:



$$\bar{a}_G = \left( 400 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \nearrow 45^\circ \right)$$

$$\bar{\alpha}_{AB} = \left( 2000 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}, \curvearrowright \right)$$

$$\bar{\alpha}_{BC} = \left( 1200 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}, \curvearrowright \right)$$

$$m_{BC} = 2.5 \text{ kg}$$

$$I_{AB} = 0.03 \text{ kg.m}^2 \rightarrow \text{حول نقطه A}$$

$$I_{BC} = 0.15 \text{ kg.m}^2 \rightarrow \text{حول نقطه G}$$

$$AB = 0.15 \text{ m} , \quad BG = GC = 0.2 \text{ m}$$

جرم و ممان اینرسی میله CD ناچیز است. (به‌طور نسبی) گشتاور محرک T برابر است با:

$$208 \text{ Nm}, \quad \left. \vphantom{208 \text{ Nm}} \right\} (1)$$

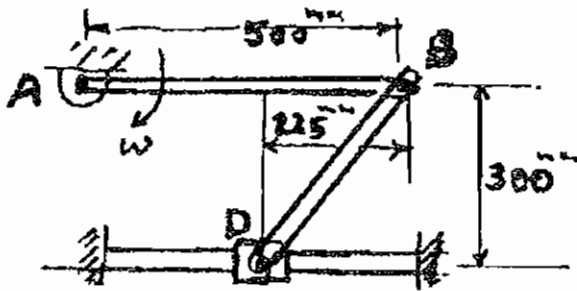
$$186 \text{ Nm}, \quad \left. \vphantom{186 \text{ Nm}} \right\} (2)$$

$$186 \text{ Nm}, \quad \left. \vphantom{186 \text{ Nm}} \right\} (3)$$

$$175 \text{ Nm}, \quad \left. \vphantom{175 \text{ Nm}} \right\} (4)$$

آزمون کارشناسی ارشد - سال تحصیلی ۸۰/۷۹

۱- میله AB با تندی زاویه‌ای  $\omega = 3 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  در جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران می‌کند. تندی لغزنده D و تندی زاویه‌ای میله DB عبارتند از:



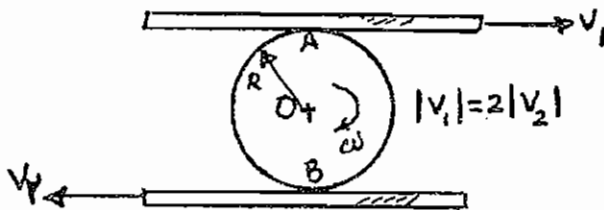
(۱)  $\dot{\theta} = 3 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  ,  $V_D = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

(۲)  $\dot{\theta} = 3 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  ,  $V_D = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

(۳)  $\dot{\theta} = \frac{20}{3} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  ,  $V_D = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

(۴)  $\dot{\theta} = \frac{20}{3} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  ,  $V_D = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

۲- با توجه به شکل صفحات موازی در حال تماس با استوانه، بدون لغزش با سرعت‌های معلوم در حرکت هستند. کدام یک از گزینه‌های زیر غلط است؟



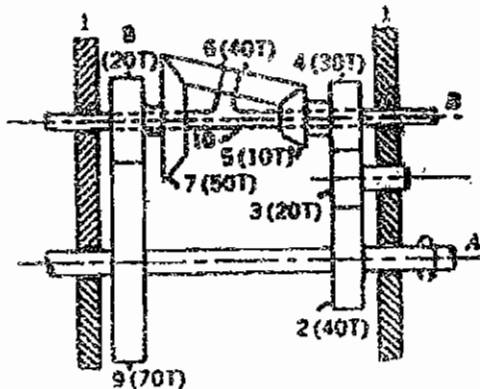
(۲)  $\omega = \frac{3 v_2}{2 R}$

(۱)  $v_0 = \frac{v_1}{4}$

(۴)  $\omega = \frac{|v_1| - |v_2|}{2R}$

(۳)  $\omega = \frac{3 v_1}{4 R}$

۳- در شکل روبه‌رو، شافت A با سرعت زاویه‌ای 100rpm در جهت نشان داده شده می‌چرخد. سرعت زاویه‌ای شافت B برابر است با:



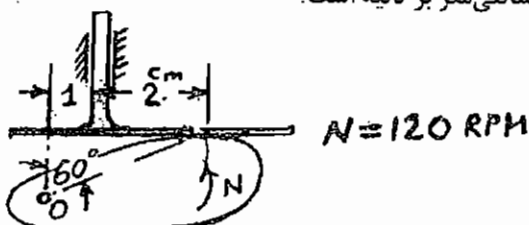
(۱) هم جهت با شافت A و با مقدار 269.5 rpm

(۲) هم جهت با شافت A و با مقدار 1333 rpm

(۳) خلاف جهت با شافت A و با مقدار 269.5 rpm

(۴) خلاف جهت با شافت A و با مقدار 1333 rpm

۴- با توجه به شکل، سرعت صعود پیرو در لحظه نشان داده شده چند سانتی‌متر بر ثانیه است؟



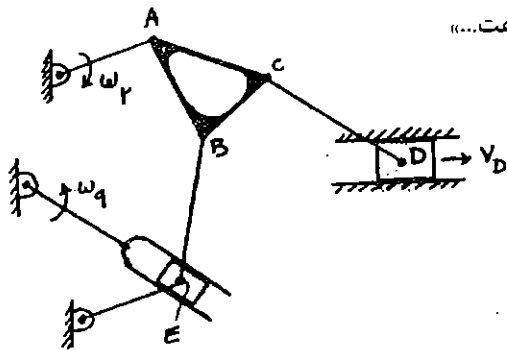
(۱) ۲۵/۱۳۳

(۲) ۲۹/۲۵

(۳) ۳۷/۷

(۴) ۴۳/۵۳۳

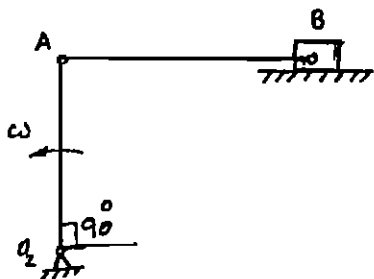




۵- در مکانیزم داده شده کدام گزینه صحیح‌تر می‌باشد: «برای تحلیل سرعت...»

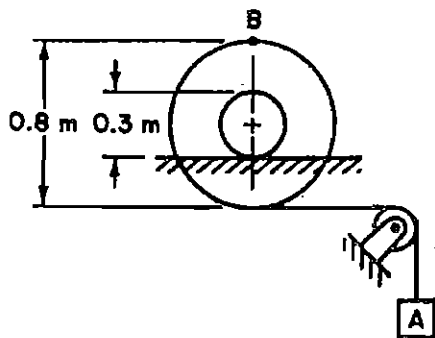
- (۱) فقط مشخص بودن  $\omega_2$  کافی است.
- (۲) علاوه بر مقدار  $\omega_2$  بایستی  $\omega_3$  و یا  $V_D$  نیز داده شده باشد.
- (۳) علاوه بر مقدار  $\omega_2$  بایستی  $\omega_3$  نیز داده شده باشد.
- (۴) علاوه بر مقدار  $\omega_2$  بایستی  $\omega_3$  و  $V_D$  نیز داده شده باشد.

۶- در شکل زیر  $O_2A=AB$  است.  $O_2A$  با سرعت ثابت  $\omega$  می‌چرخد. شتاب زاویه‌ای  $AB$  در این لحظه برابر است با:



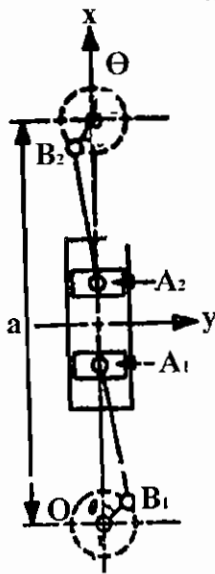
- (۱)  $\omega^2$
- (۲)  $2\omega^2$
- (۳)  $3\omega^2$
- (۴) صفر

۷- چنانچه در مکانیزم روبه‌رو وزنه A با سرعت ثابت  $2 \frac{m}{s}$  به طرف پایین حرکت کند، سرعت نقطه B از محیط دیسک برابر است



- با .....
- (۱)  $2 \frac{m}{s}$  و به طرف راست
  - (۲)  $4.4 \frac{m}{s}$  و به طرف راست
  - (۳)  $2 \frac{m}{s}$  و به طرف چپ
  - (۴)  $4.4 \frac{m}{s}$  و به طرف چپ

۸- کدام یک از گزینه‌های زیر در مورد نیروهای لرزاننده موتور در مکانیزم روبه‌رو صحیح می‌باشد؟



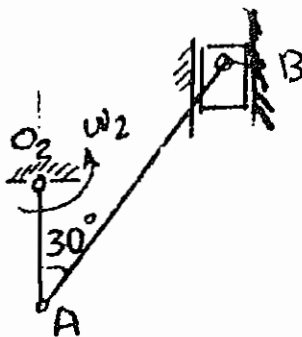
(۱) نیروهای لرزاننده در جهت‌های x و y بالانس هستند.

(۲) نیروهای لرزاننده فقط در جهت x بالانس هستند.

(۳) نیروهای لرزاننده فقط در جهت y بالانس هستند.

(۴) نیروهای لرزاننده در جهت‌های x و y بالانس نمی‌باشند.

۹- با توجه به مکانیزم مقابل در مورد سرعت زاویه‌ای  $\omega_{AB}$ ، کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟ (O2A با مسیر حرکت B موازی است.)



(۱) جهت  $\omega_{AB}$  با جهت  $\omega_2$  یکی است اما:  $|\omega_{AB}| > |\omega_2|$  است.

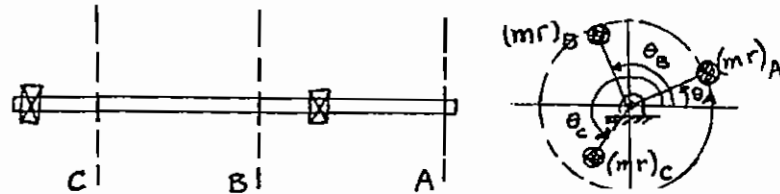
(۲) وقتی O2A با AB در یک امتداد است،  $\omega_{AB}$  برابر صفر است.

(۳)  $\omega_{AB}$  مساوی دو برابر سرعت B تقسیم بر طول AB می‌باشد.

(۴)  $\omega_{AB}$  برابر تفاضل سرعت‌های مطلق A و B تقسیم بر طول AB می‌باشد.

### آزمون کارشناسی ارشد - سال تحصیلی ۸۱/۸۰

۱- سه دیسک A, B و C مطابق شکل بر روی محور صلب و همگن و یکنواختی نصب شده‌اند. اگر نمایانی معادل در هر یک از دیسک‌ها به ترتیب برابر  $(mr)_A$ ,  $(mr)_B$  و  $(mr)_C$  بوده و مجموعه دارای تعادل استاتیکی باشد، در این صورت کدام رابطه صحیح است؟



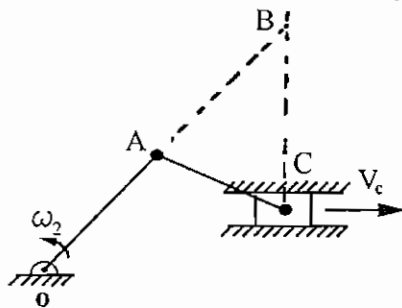
$$(mr)_A \cos \theta_A - (mr)_B \cos \theta_B - (mr)_C \cos \theta_C = 0 \quad (1)$$

$$(mr)_A \cos \theta_A + (mr)_B \sin \theta_B - (mr)_C \cos \theta_C = 0 \quad (2)$$

$$(mr)_A + (mr)_B \cos(\theta_B + \theta_A) + (mr)_C \cos(\theta_C - \theta_A) = 0 \quad (3)$$

$$(mr)_A + (mr)_B \sin(\theta_B - \theta_A) + (mr)_C \cos(\theta_C - \theta_A) = 0 \quad (4)$$

۲- در مکانیزم لنگ-لغزنده OAC کدام پاسخ برای سرعت لغزنده صحیح است؟



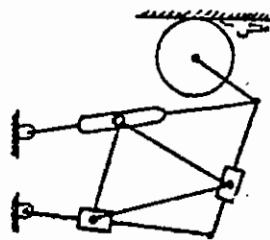
$$|V_C| = \omega_2 \cdot \overline{BC} \quad (1)$$

$$|V_C| = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{BC}}{\overline{AB}} \cdot \omega_2 \quad (2)$$

$$|V_C| = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{AB}}{\overline{BC}} \cdot \omega_2 \quad (3)$$

$$|V_C| = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{AC}}{\overline{OA}} \cdot \omega_2 \quad (4)$$

۳- این مکانیزم چند درجه آزادی دارد؟



(۱) یک

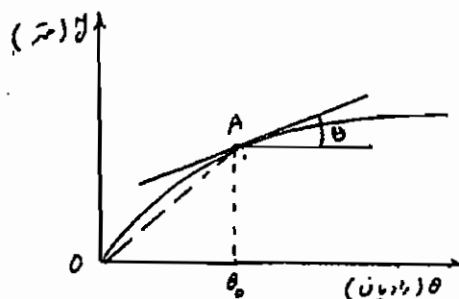
(۲) دو

(۳) سه

(۴) چهار

۴- با توجه به نمودار تغییر مکان یک پیرو نسبت به زاویه دوران بادامک که نشان داده شده است، اگر سرعت زاویه‌ای بادامک برابر

$\omega$  باشد، در زاویه  $\theta_0$  بادامک سرعت صعود پیرو مطابق با کدام پاسخ است؟



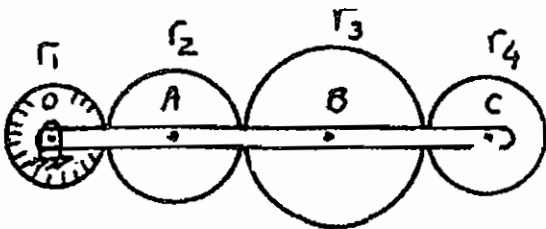
$$\omega \tan \theta \quad (1)$$

$$\omega \sin \theta \quad (2)$$

$$\overline{OA} \omega \cos \theta \quad (3)$$

$$\overline{OA} \omega \tan \theta \quad (4)$$

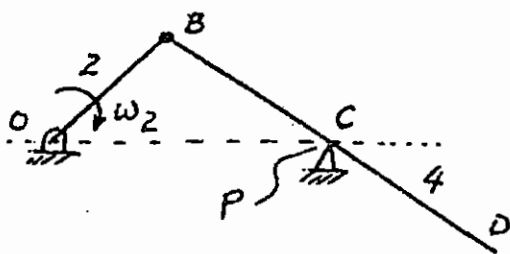
۵- میله OC در نقطه O لولا شده و در نقاط A، B و C به چهار چرخ دنده که دو به دو با یکدیگر در تماس هستند متصل شده است. چرخ دنده به شعاع  $r_1$  ساکن است. اگر میله با سرعت یک دور بر ثانیه در جهت عکس عقربه ساعت دوران کند، سرعت زاویه‌ای چرخ دنده به شعاع  $r_4$  با کدام گزینه برابر است؟



$$\omega_4 = \frac{r_2}{r_4} \left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right) \quad (2) \qquad \omega_4 = \frac{r_2 r_1}{r_4 r_3} \quad (1)$$

$$\omega_4 = \frac{r_1}{r_4} \left(1 + \frac{r_1}{r_2}\right) \quad (4) \qquad \omega_4 = \frac{r_2}{r_4} \left(1 + \frac{r_1}{r_2}\right) \quad (3)$$

۶- در مکانیزم نشان داده شده سرعت زاویه‌ای عضو ۲ برابر  $\omega_2$  و ثابت است. شتاب زاویه‌ای عضو ۴ را از کدام رابطه می‌توان به دست آورد؟ (نقطه C روی میله BD و در کنار تکیه‌گاه P قرار گرفته و میله همیشه با این تکیه‌گاه در تماس است)



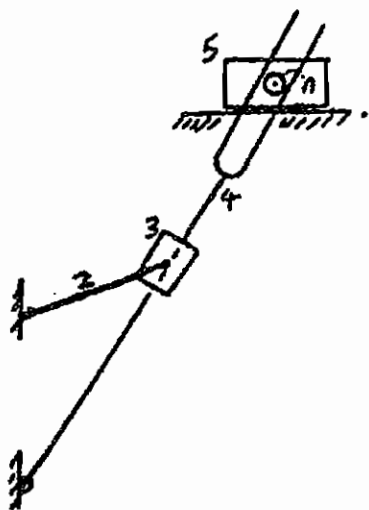
$$a_C = a_B + a_{C/B}^n + a_{C/B}^t, \quad a_C = a_P + a_{C/P}^{rel} + a_{C/P}^{Cr} \quad (1)$$

$$a_D = a_C + a_{D/C}^n + a_{D/C}^t, \quad a_P = a_C + a_{P/C}^{Cr} + a_{P/C}^{rel} \quad (2)$$

$$a_D = a_B + a_{D/B}^n + a_{D/B}^t, \quad a_C = a_P + a_{C/P}^{rel} + a_{C/P}^{Cr} \quad (3)$$

$$a_C = a_B + a_{C/B}^n + a_{C/B}^t, \quad a_P = a_C + a_{P/C}^{rel} + a_{P/C}^{Cr} \quad (4)$$

۷- در مکانیزم نشان داده شده، کدام عبارت برای محل مرکز آنی سرعت عضوهای ۴ و ۵ صحیح است؟



(۱) در امتداد عضو ۴ است.

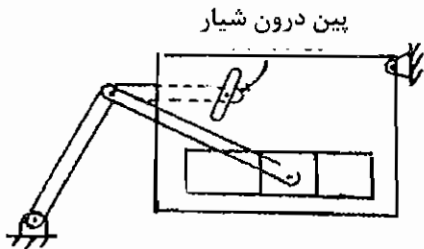
(۲) در نقطه A است.

(۳) در امتداد خط عمود وارد بر عضو ۴ از نقطه A و در فاصله بی نهایت است.

(۴) در امتداد خط عمود وارد بر عضو ۴ از نقطه A و در فاصله‌ای محدود است.

## آزمون کارشناسی ارشد - سال تحصیلی ۸۲/۸۱

۱- تعداد درجه آزادی مکانیزم، مطابق شکل روبه‌رو چقدر است؟

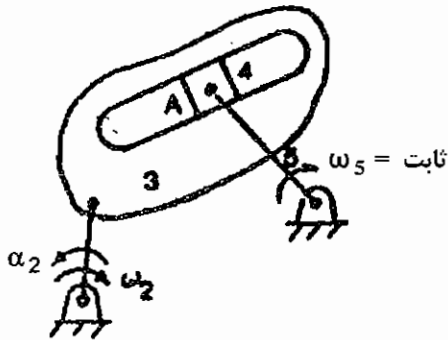


- (۱) یک  
(۲) دو  
(۳) سه  
(۴) چهار

۲- نقش چرخ‌لنگر (Flywheel) در ماشین‌ها چیست؟

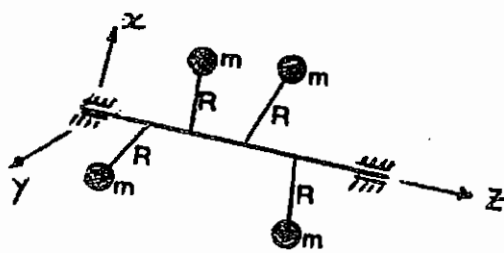
- (۱) افزایش سرعت کاری  
(۲) کاهش سرعت کاری  
(۳) افزایش توان مورد نیاز برای عملکرد  
(۴) کاهش توان مورد نیاز برای عملکرد

۳- در مکانیزم نشان داده شده، کدام عبارت صحیح است؟



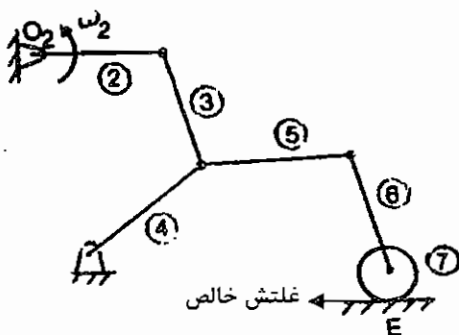
- (۱) شتاب نقطه  $A_4$  نسبت به نقطه  $A_3$  فقط مؤلفه مماسی دارد.  
(۲) شتاب نقطه  $A_4$  نسبت به نقطه  $A_3$  دارای مؤلفه‌های مماسی و کوریولیس است.  
(۳) شتاب نقطه  $A_4$  نسبت به نقطه  $A_3$  دارای مؤلفه‌های عمودی و کوریولیس است.  
(۴) با توجه به ثابت بودن سرعت زاویه‌ای میله ۵، نقطه  $A_4$  نسبت به نقطه  $A_3$  شتابی ندارد.

۴- به منظور تعادل (بالانس) دینامیکی مجموعه اجرام نشان داده شده بر روی محور، می‌توان ... متعادل نمود.



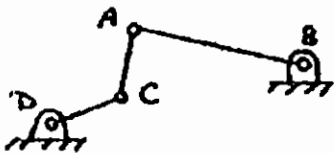
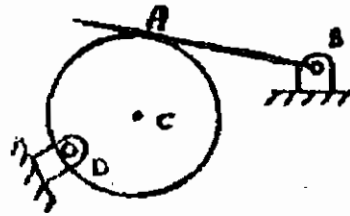
- (۱) فقط سیستم را از نظر نیرو  
(۲) فقط سیستم را از نظر گشتاور  
(۳) با اضافه نمودن یک جرم به یک نقطه معین، سیستم را  
(۴) با اضافه نمودن دو جرم در دو نقطه معین، سیستم را

۵- در مکانیزم مقابل، چنانچه  $\omega_2$  معلوم باشد، در این صورت مکانیزم دارای ۲۱ مرکز آنی است ... تعیین نمود.



- (۱) که می‌توان همگی را  
(۲) که فقط می‌توان ۹ عدد آن‌ها را  
(۳) که فقط می‌توان ۱۱ عدد آن‌ها را  
(۴) که فقط می‌توان ۱۰ عدد آن‌ها را

۶- مکانیزم معادل، مکانیزم نشان داده شده کدام است؟



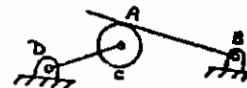
(۲)



(۱)

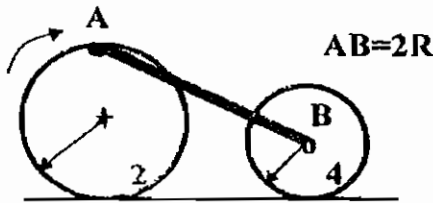


(۴)



(۳)

۷- اگر غلتک‌های ۲ و ۴ بدون لغزش روی سطح افقی حرکت نمایند و غلتک ۲ دارای سرعت زاویه‌ای ثابت  $\omega$  باشد، شتاب زاویه‌ای غلتک ۴ با کدام گزینه برابر است؟



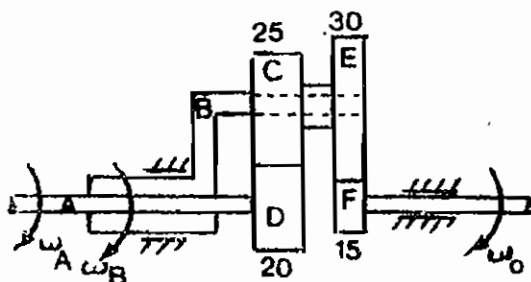
(۲)  $\sqrt{3}R\omega^2$

(۱)  $\sqrt{2}R\omega^2$

(۴)  $\frac{\sqrt{2}}{2}R\omega^2$

(۳)  $\frac{\sqrt{3}}{3}R\omega^2$

۸- در مکانیزم چرخ‌دنده‌ای سیاره‌ای نشان داده شده، اگر محور A با سرعت  $10 \text{ rad/s c.w.}$  و محور B با سرعت  $20 \text{ rad/s c.w.}$  دوران نماید، سرعت خروجی  $\omega_0$  چقدر است؟ (بر حسب rad/s)



(۱) ۴

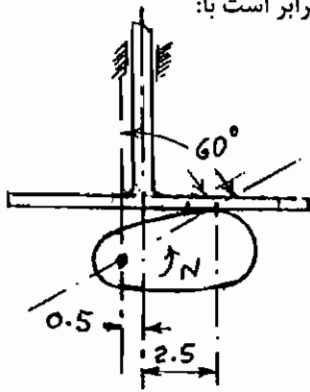
(۲) ۱۰

(۳) ۲۸

(۴) ۵۸

## آزمون کارشناسی ارشد - سال تحصیلی ۸۳/۸۲

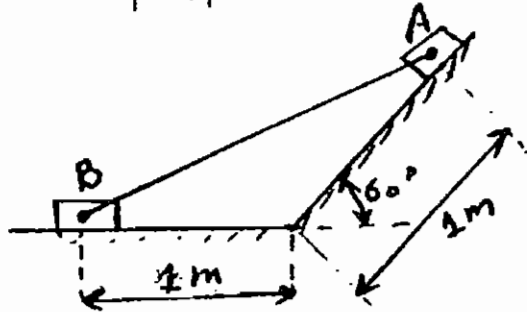
۱- با توجه به شکل مقابل سرعت صعود پیرو در لحظه نشان داده شده بر حسب سانتی‌متر بر ثانیه برابر است با:



$N = 120 \text{ rpm}$   
(اندازه‌ها بر حسب سانتی‌متر است)

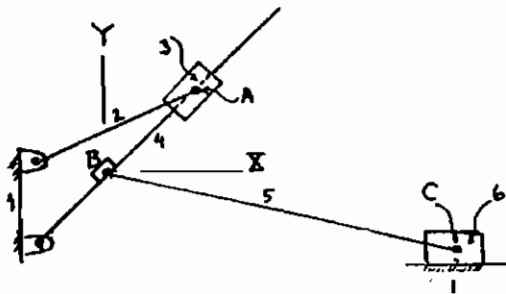
- (۱) ۳۱/۴۱۶
- (۲) ۳۷/۲۵
- (۳) ۳۷/۷
- (۴) ۴۳/۵۳

۲- اگر سرعت نقطه A،  $۲/۵ \text{ m/s}$  باشد، سرعت نقطه B چقدر است؟



- (۱)  $۱/۵ \text{ m/s}$
- (۲)  $۲/۵ \text{ m/s}$
- (۳)  $۷/۵ \text{ m/s}$
- (۴)  $۵ \text{ m/s}$

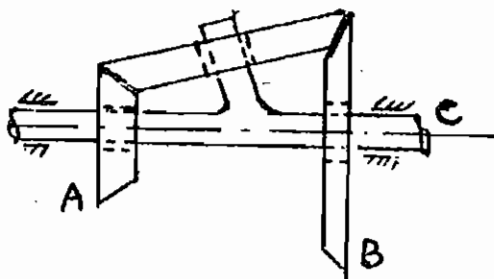
۳- در مکانیزم نشان داده شده، در شکل و با توجه به محورهای مختصات مشخص شده در شکل در نقطه B، مرکز آنی  $I_{36}$  در کدام



ربع قرار دارد؟

- (۱) اول
- (۲) دوم
- (۳) سوم
- (۴) چهارم

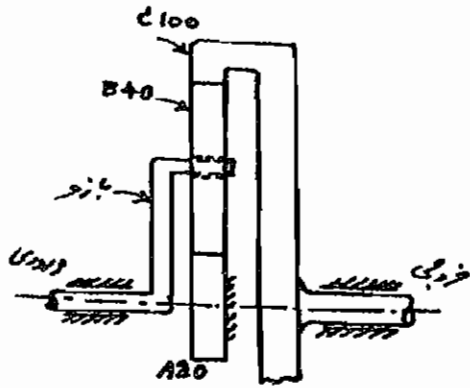
۴- در شکل زیر یک ورودی  $۶۰ \text{ rpm}$  به چرخ دنده A و ورودی دیگر  $۶۰ \text{ rpm}$  به چرخ دنده B داده می‌شود خروجی C بر حسب rpm



A تعداد دندانه = ۲۵  
B تعداد دندانه = ۳۵

- برابر است با:
- (۱)  $-۱۰ \text{ rpm}$
  - (۲)  $۶۰ \text{ rpm}$
  - (۳)  $۱۰ \text{ rpm}$
  - (۴) صفر

۵- در سیستم چرخ دنده‌ای مقابل، چرخ دنده A ثابت بوده و دارای ۲۰ دندانه است. چرخ دنده B دارای ۴۰ دندانه و چرخ دنده داخلی C دارای ۱۰۰ دندانه می‌باشد که به شفت خروجی متصل است. اگر سرعت زاویه‌ای ورودی ۱۵۰۰ rpm باشد، سرعت زاویه‌ای شفت خروجی چقدر خواهد بود؟

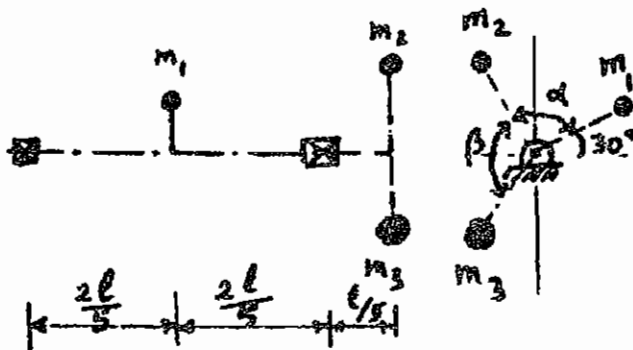


- (۱) ۶۰۰ rpm
- (۲) ۱۲۵۰ rpm
- (۳) ۱۸۰۰ rpm
- (۴) ۳۷۵۰ rpm

۶- سه جرم نامیزان  $m_1=m$ ،  $m_2=m$  و  $m_3=2m$  در وضعیتی روی محور قرار گرفته‌اند که تعادل استاتیکی برقرار است. در این صورت

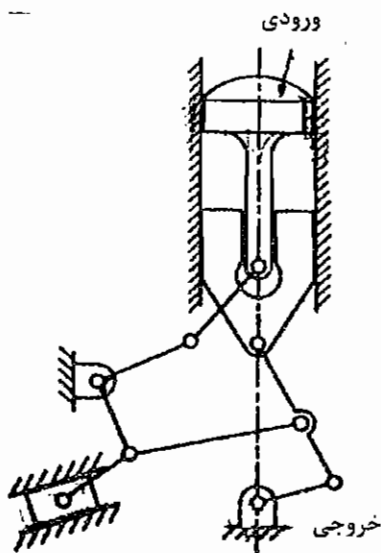
$$r_1 = r_2 = r_3 = r$$

کدام یک از روابط زیر صحیح می‌باشد؟



- (۱)  $2 \sin \alpha = \sin(\alpha + \beta)$
- (۲)  $\cos \alpha = 2 \cos(\alpha + \beta)$
- (۳)  $2 \cos \alpha = \cos(\alpha + \beta)$
- (۴)  $\sin \alpha = 2 \sin(\alpha + \beta)$

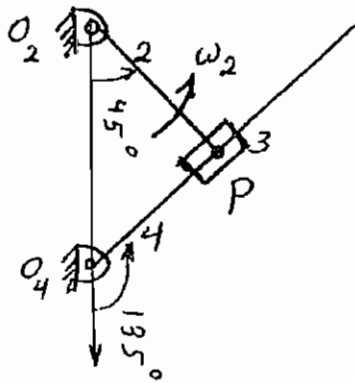
۷- با توجه به شکل، درجه آزادی این مکانیزم چند می‌باشد؟



- (۱) یک
- (۲) دو
- (۳) سه
- (۴) چهار



### آزمون کارشناسی ارشد - سال تحصیلی ۸۴/۸۳



۱- کدام عبارت درباره شتاب کریولیس در این اهرم بندی صدق می‌کند؟

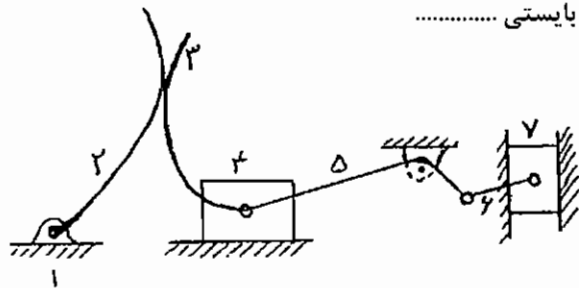
(۱) چون  $V_{P_2} = V_{P_4}$  است پس  $A^C = 0$

(۲) چون  $V_{P_4} = 0$  است پس  $A^C = 0$

(۳) چون  $V_{P_3} = 0$  است پس  $A^C = \omega_2 \times V_{P_4/P_2}$

(۴) چون  $V_{P_2} = V_{P_4/P_4}$  است پس  $A^C = \omega_4 \times V_{P_4/P_2}$

۲- برای این که مکانیزم شکل داده شده در وضعیت مورد نظر قرار گیرد، بایستی .....



(۱) به میله ۲ حرکت معینی بدهیم.

(۲) این مکانیزم حرکتی نمی‌تواند داشته باشد.

(۳) میله ۲ و لغزنده ۷ حرکت‌های معینی را انجام دهند.

(۴) رابطه‌های ۲، ۳ و یک میله دیگر حرکت‌های معینی را انجام دهند.

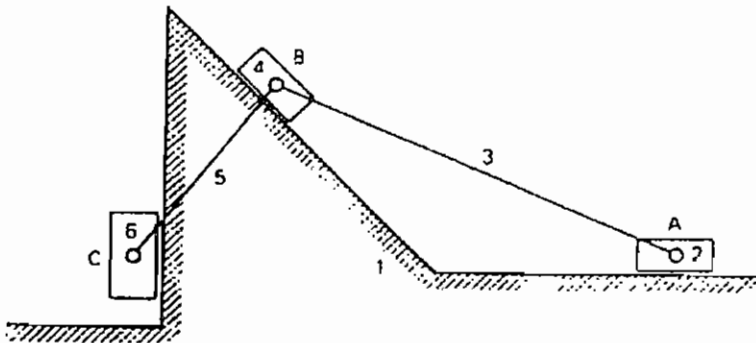
۳- میله ۳ با سطح افق و سطح شیب‌دار زاویه  $30^\circ$  می‌سازد و میله ۵ بر سطح شیب‌دار عمود است. به ازای  $V_A = 1 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$ ، آن‌گاه:

(۱)  $\vec{V}_B = \vec{V}_A = \vec{V}_{A/B}$

(۲)  $\vec{V}_B = 1 \cos 30^\circ \sin 30^\circ$

(۳)  $\vec{V}_B = 1 \cos 30^\circ \cos 30^\circ$

(۴)  $\vec{V}_B = 1$  موازی سطح شیب دار



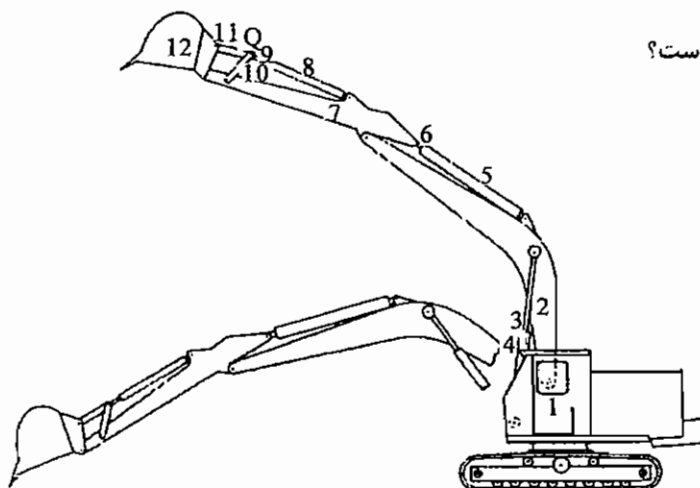
۴- تعداد درجه آزادی مکانیزم مقابل کدام است؟

(۱) ۲

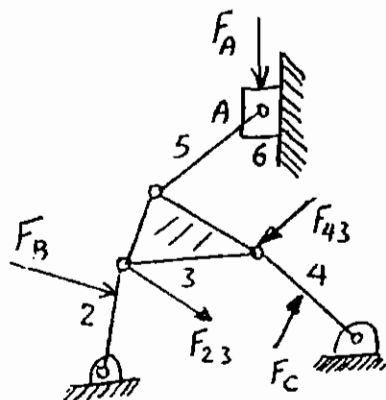
(۲) ۳

(۳) ۵

(۴) ۶



۵- برای تعادل استاتیکی مکانیزم نشان داده شده، کدام عبارت صحیح است؟



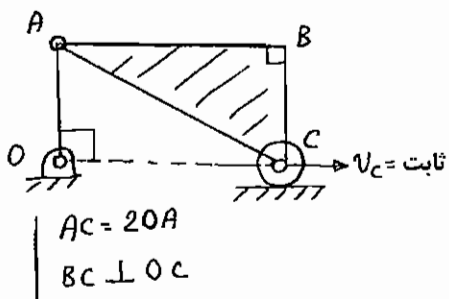
$$\sum \vec{F} = \vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C = 0 \quad (1)$$

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C + \vec{F}_{23} + \vec{F}_{43} = 0 \quad (2)$$

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C + \vec{F}_{16} + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{14} = 0 \quad (3)$$

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{14} + \vec{F}_{16} + \vec{F}_{23} + \vec{F}_{43} = 0 \quad (4)$$

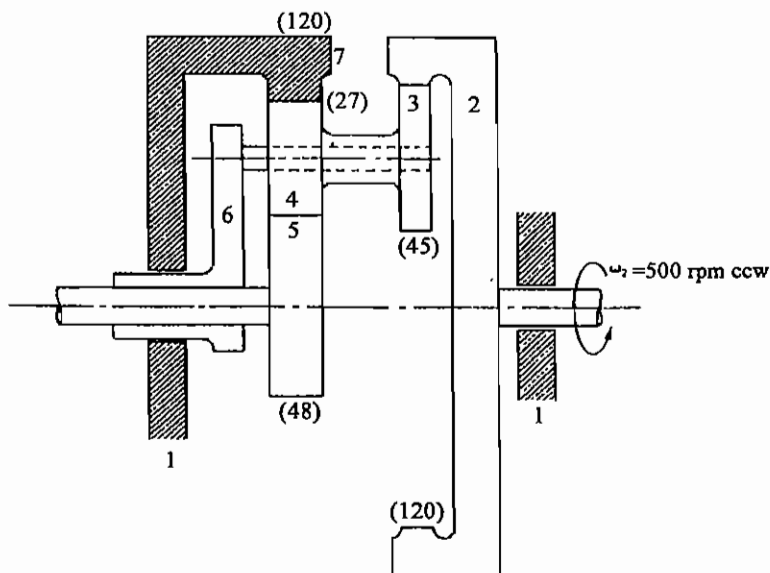
۶- برای مکانیزم نشان داده شده، شتاب نقطه B برابر است با:



$$\frac{V_C^2 \sqrt{3}}{OA} \quad (2) \qquad \frac{V_C^2 \sqrt{3}}{3OA} \quad (1)$$

$$\frac{V_C^2 \sqrt{3}}{2OA} \quad (4) \qquad \frac{2V_C^2 \sqrt{3}}{3OA} \quad (3)$$

۷- در جعبه دنده مقابل، تعداد دور در دقیقه چرخ دنده ۵ و محور ۶ کدام است؟ (برای تعیین جهت حرکت، از سمت راست به جعبه دنده نگاه کنید.)



$$\omega_5 = 3750 \text{ rpm cw} \quad (1)$$

$$\omega_6 = 1200 \text{ rpm cw}$$

$$\omega_5 = 2840 \text{ rpm cw} \quad (2)$$

$$\omega_6 = 1500 \text{ rpm cw}$$

$$\omega_5 = 3400 \text{ rpm cw} \quad (3)$$

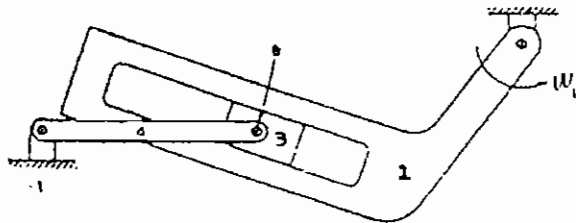
$$\omega_6 = 1350 \text{ rpm cw}$$

$$\omega_5 = 1850 \text{ rpm cw} \quad (4)$$

$$\omega_6 = 910 \text{ rpm cw}$$

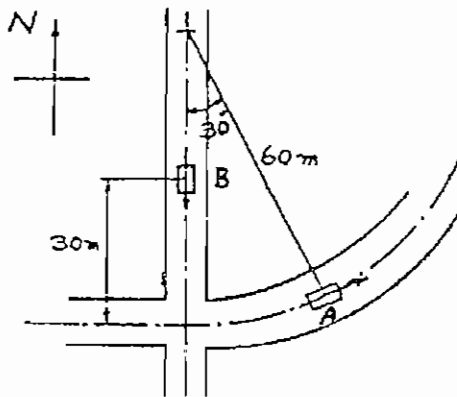
## آزمون کارشناسی ارشد - سال تحصیلی ۸۵/۸۴

۱- مقدار  $\omega_2$  در مکانیزم مقابل برابر ۱۰ رادیان بر ثانیه و در جهت مخالف حرکت عقربه‌های ساعت می‌باشد. مقدار  $\omega_3$  را به دست آورید.



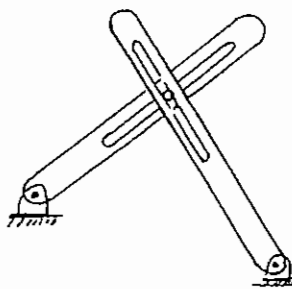
- (۱) ۸/۳ رادیان بر ثانیه، در جهت مخالف حرکت عقربه‌های ساعت  
 (۲) ۱۰/۷ رادیان بر ثانیه، در جهت حرکت عقربه‌های ساعت  
 (۳) ۱۵/۹ رادیان بر ثانیه، در جهت مخالف حرکت عقربه‌های ساعت  
 (۴) ۲۰/۶ رادیان بر ثانیه، در جهت حرکت عقربه‌های ساعت

۲- اتومبیل A مسیر منحنی شکلی را که دارای شعاع انحنای ۶۰ متر می‌باشد، با سرعت ثابت ۵۰ کیلومتر در ساعت طی می‌کند. وقتی که اتومبیل A در وضعیت شکل قرار می‌گیرد اتومبیل B، ۳۰ متر با تقاطع فاصله داشته و دارای شتاب ۱/۲ متر بر مجذور ثانیه به طرف جنوب (به سمت تقاطع) می‌باشد. شتاب اتومبیل A را از نقطه نظر مسافر ماشین B در لحظه نشان داده شده محاسبه کنید.



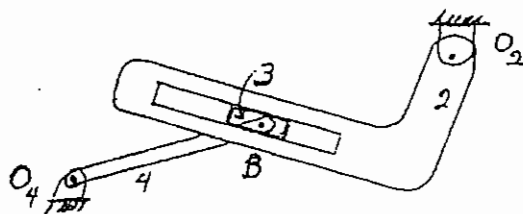
- (۱) ۲/۸ متر بر مجذور ثانیه،  $17^\circ$   
 (۲) ۳/۱ متر بر مجذور ثانیه،  $31^\circ$   
 (۳) ۴/۳ متر بر مجذور ثانیه،  $22^\circ$   
 (۴) ۲/۷ متر بر مجذور ثانیه،  $57^\circ$

۳- دو میله شیاردار توسط یک پین با قابلیت لغزش در هر دو میله به هم متصل شده‌اند. کدام عبارت درباره درجه آزادی اهرم‌بندی صدق می‌کند؟



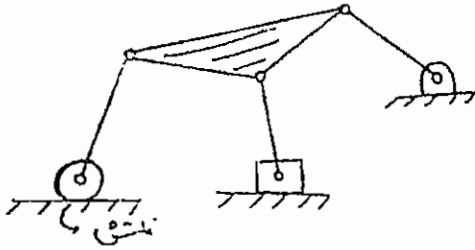
- (۱) -۱  
 (۲) صفر  
 (۳) +۱  
 (۴) +۲

۴- در مکانیزم چهار میله مطابق شکل، اگر میله ۲ حرکت ورودی را تأمین کند، مرکزی که لغزنده ۳ حول آن دوران می‌کند در کجا واقع است؟



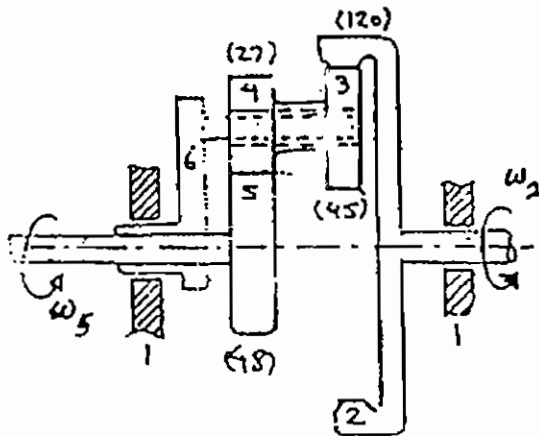
- (۱) به لحاظ نوع اهرم‌بندی در همان نقطه B  
 (۲) در محل تلاقی امتداد میله ۴ با خط عمود بر امتداد شیار از نقطه  $O_2$   
 (۳) در محل تلاقی امتداد میله ۴ با خط عمود بر امتداد شیار از نقطه B  
 (۴) به لحاظ نوع اهرم‌بندی فقط حرکت لغزشی دارد و این مرکز وجود ندارد.

۵- برای مکانیزم نشان داده شده کدام عبارت صحیح است؟



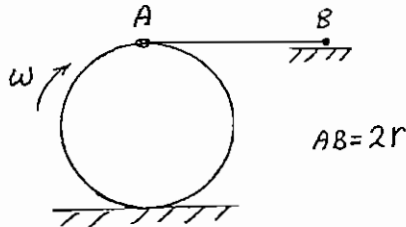
- (۱) باتوجه به اطلاعات موجود تمام مراکز آنی قابل تعیین شدن هستند.
- (۲) برای این مکانیزم بیش از سه مرکز آنی دوران در بی نهایت قرار دارند.
- (۳) برای چنین مکانیزمی نمی توان مرکز آنی دوران تعریف نمود.
- (۴) باتوجه به اطلاعات موجود برخی از مراکز آنی قابل تعیین شدن هستند.

۶- در سیستم چرخ دنده که دو ورودی  $\omega_2 = 500$  و  $\omega_2 = 300$  دور بر دقیقه و هم جهت دارد، باتوجه به این که چرخ دنده شماره ۲ داخلی است و تعداد دنده هر کدام از چرخ دنده ها هم داخل پرانتز نوشته شده است، - لوب است مقدار  $\omega_6$  و جهت آن.



- (۱) 420 دور در دقیقه و هم جهت با  $\omega_5$
- (۲)  $\frac{1900}{3}$  دور در دقیقه و در جهت  $\omega_5$
- (۳) 420 دور در دقیقه و در خلاف جهت با  $\omega_5$
- (۴)  $\frac{1900}{3}$  دور در دقیقه و در خلاف جهت با  $\omega_5$

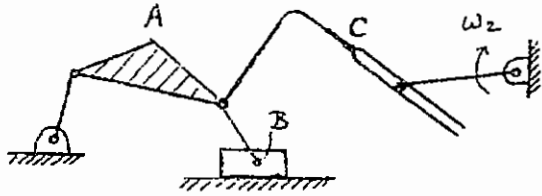
۷- غلتک به شعاع  $r$  روی زمین با سرعت زاویه  $\omega$  ثابت، در حالت غلتش محض می باشد. در حالت نشان داده شده مطلوب است شتاب زاویه میله AB.



شتاب زاویه میله AB.

- (۱)  $\alpha_{AB} = 0$
- (۲)  $\alpha_{AB} = \frac{\omega^2}{2}$
- (۳)  $\alpha_{AB} = \omega^2$
- (۴)  $\alpha_{AB} = 2\omega^2$

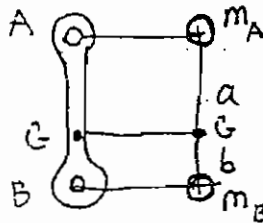
## آزمون کارشناسی ارشد - سال تحصیلی ۸۶/۸۵



۱- در مکانیزم داده شده در شکل مقابل، .....

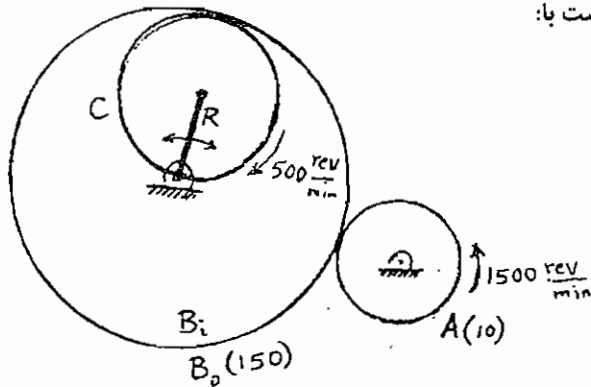
- (۱) تنها اگر  $V_A$  معلوم باشد می‌توان سرعت C را به دست آورد.
- (۲) اگر  $V_A$  و  $V_B$  معلوم باشند، سرعت C را می‌توان به دست آورد.
- (۳) علاوه بر  $V_A$  دی‌بایست  $\omega_2$  هم معلوم باشد تا بتوان  $V_C$  را به دست آورد.
- (۴) معلوم بودن  $V_A$  و  $V_B$  برای تعیین  $V_C$  کافی نمی‌باشند.

۲- اگر به جای شاتون، یک سیستم دینامیکی با دو جرم متمرکز جایگزین شود به طوری که جرم مجموعه یکسان و مرکز جرم نیز ثابت بماند، ممان اینرسی سیستم جایگزینی نسبت به شاتون اصلی:



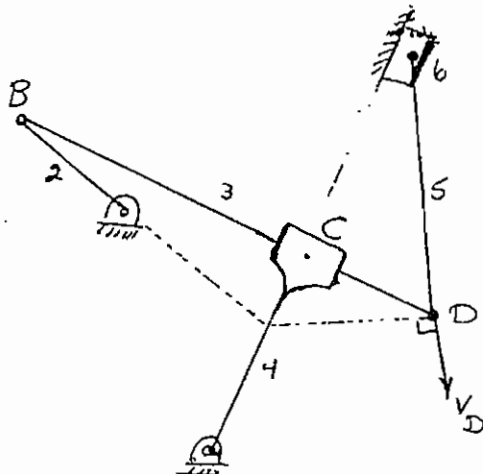
- (۱) کمتر است.
- (۲) یکسان است.
- (۳) بیش‌تر است.
- (۴) ممکن است بیش‌تر یا کمتر باشد.

۳- در سری چرخ‌دنده شکل داده شده، اگر  $n_A = 1500 \frac{\text{rev}}{\text{min}}$  در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت باشد، و  $n_C = 500 \frac{\text{rev}}{\text{min}}$  در جهت ساعت‌گرد، در این صورت سرعت بازوی R برابر است با:



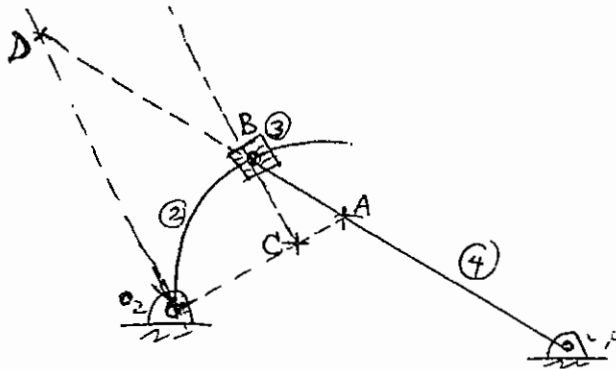
- (۱)  $100 \frac{\text{rev}}{\text{min}}$  پادساعت‌گرد
- (۲)  $100 \frac{\text{rev}}{\text{min}}$  ساعت‌گرد
- (۳)  $300 \frac{\text{rev}}{\text{min}}$  پادساعت‌گرد
- (۴)  $300 \frac{\text{rev}}{\text{min}}$  ساعت‌گرد

۴- در اهرم‌بندی شش‌میله‌ای مطابق شکل چنان‌چه سرعت نقطه D یعنی  $V_D$  معلوم باشد، کدام یک از عبارات زیر اعتبار دارد؟



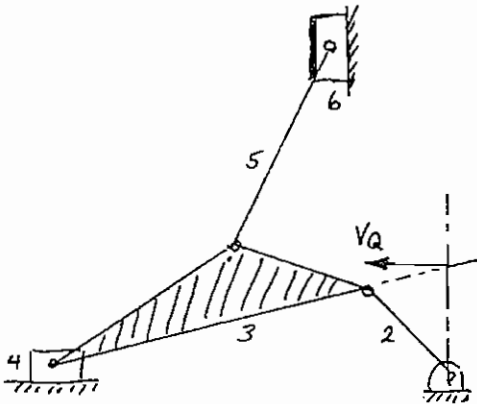
- (۱) در این لحظه سرعت لغزنده ۶ کوچک‌تر از  $V_D$  است.
- (۲) در این لحظه سرعت لغزنده ۶ برابر سرعت نقطه D است.
- (۳) از روی شکل مشهود است که سرعت لغزنده ۶ بزرگ‌تر از  $V_D$  است.
- (۴) چون میله ۴ حامل لغزنده است و با لغزنده ۶ در یک امتداد قرار دارند پس اهرم‌بندی در این لحظه قفل می‌کند.

۵- در مکانیزم چهارمیله‌ای، اگر نقطه C مرکز انحنای میله ۲ در نقطه تماس با ۳ باشد، کدام گزینه در رابطه با مرکز آنی ۱۳ صحیح می‌باشد؟



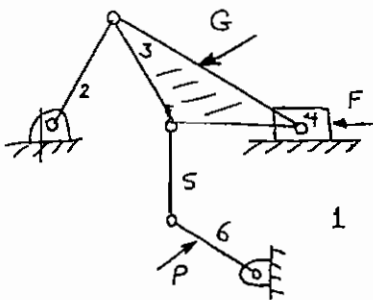
- (۱) نقطه A
- (۲) نقطه B
- (۳) نقطه C
- (۴) نقطه D

۶- در مکانیزم شش‌میله‌ای مطابق شکل در صورتی که برای این نقطه  $V_Q$  معلوم باشد، کدام یک از عبارات زیر صحیح است؟



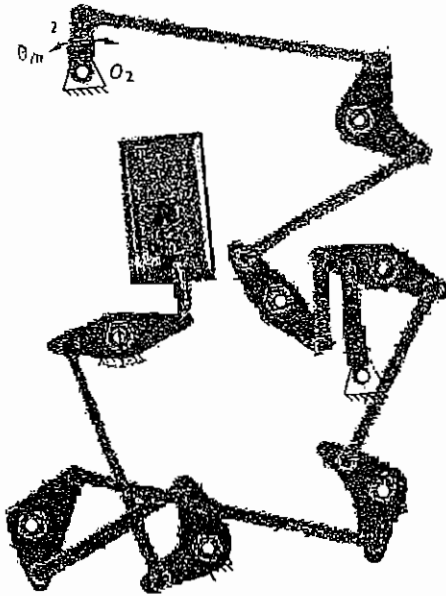
- (۱) سرعت لغزنده‌های ۴ و ۶ کسری از بردار سرعت  $V_Q$  هستند.
- (۲) سرعت لغزنده ۴ بستگی به  $V_Q$  دارد ولی سرعت لغزنده ۶ مستقل از آن است.
- (۳) سرعت لغزنده ۴ عیناً برابر  $V_Q$  است و سرعت لغزنده ۶ به کمک آن تعیین می‌گردد.
- (۴) لغزنده‌های ۴ و ۶ دارای حرکت دورانی حول مرکزی در بی‌نهایت می‌باشند و سرعت آن‌ها ارتباطی با  $V_Q$  ندارند.

۷- کدام عبارت برای حفظ تعادل استاتیکی مکانیزم زیر درست است؟



- (۱)  $F + G + P = 0$
- (۲)  $F_{12} + F_{14} + P + G + F_{16} + F = 0$
- (۳)  $F_{12} + F_{14} + F_{34} + F_{16} + F + G + P = 0$
- (۴)  $F_{12} + F_{34} + F_{53} + F_{65} + F_{23} + F_{25} + G + P + F = 0$

### آزمون کارشناسی ارشد - سال تحصیلی ۸۷/۸۶



۱- حرکت ورودی برای مکانیزم هجده میله‌ای قطع و وصل کلید روشنایی اتاق، از طریق اهرم ۲ که متصل به حرکت دورانی درب اتاق می‌باشد، می‌گردد. کدام عبارت درباره درجه آزادی این مکانیزم مناسب است؟ (دو تا از اهرم‌ها قابلیت رگلاژ (تنظیم) ثابت را دارند).

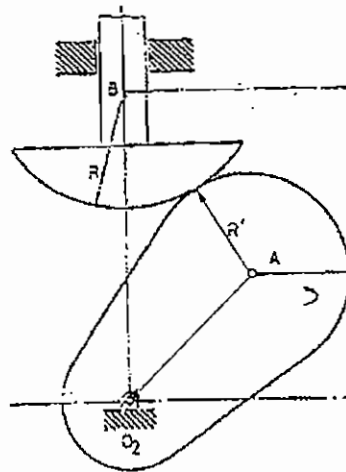
(۱) پس از تنظیم همواره درجه آزادی مکانیزم یک می‌باشد.

(۲) درجه آزادی مکانیزم بستگی به شرایط تنظیم شده دارد.

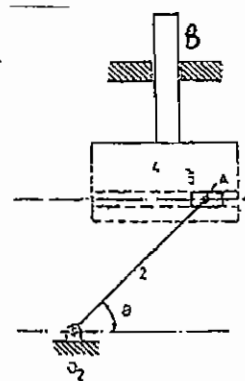
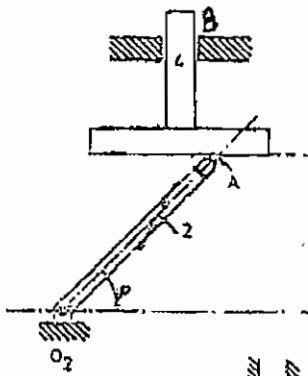
(۳) درجه آزادی مکانیزم می‌تواند بیش‌تر از یک باشد.

(۴) درجه آزادی مکانیزم بین یک درجه و دو درجه در تغییر است.

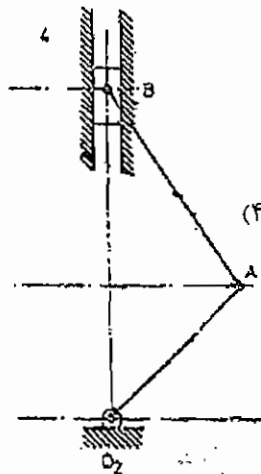
۲- مکانیزم معادل مکانیزم بادامک - پیرو شکل مقابل را تعیین کنید.



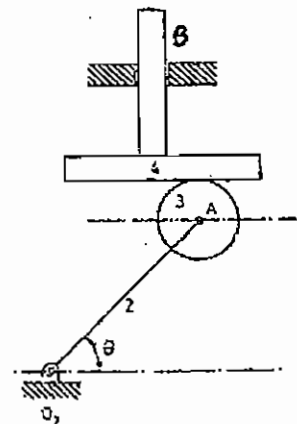
(۲)



(۱)

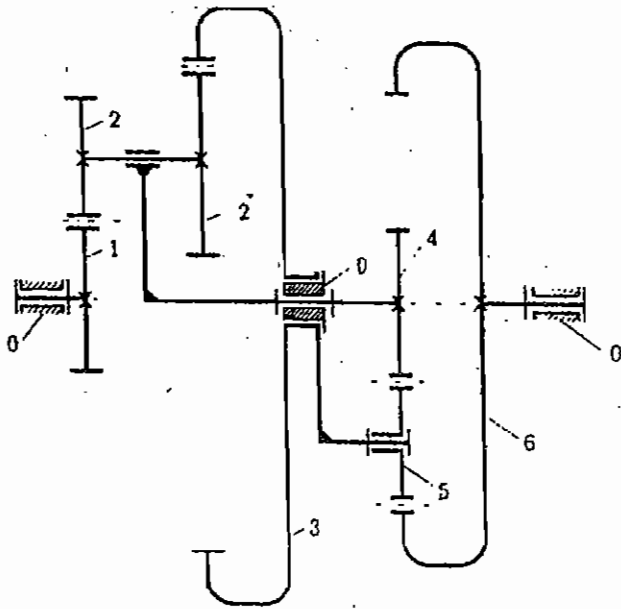


(۴)



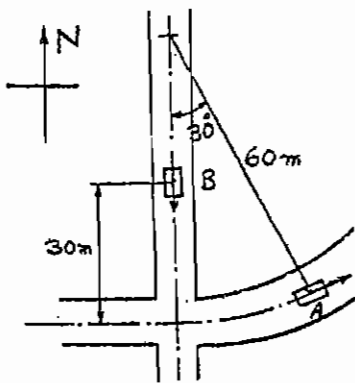
(۳)

۳- دو مجموعه چرخنده سیاره‌ای به یکدیگر متصل شده‌اند و یک مجموعه را تشکیل داده‌اند به طوری که بازوی مجموعه راست به رینگ خورشیدی مجموعه چپ و خورشید مجموعه راست به بازوی مجموعه چپ وصل شده‌اند. چنانچه کلیه اطلاعات هندسی معلوم باشند، آن‌گاه برای دو حرکت ورودی ساعتگرد  $\omega_3 = \omega_6 = 1$ ، دور خروجی  $\omega_1$  چقدر خواهد شد؟



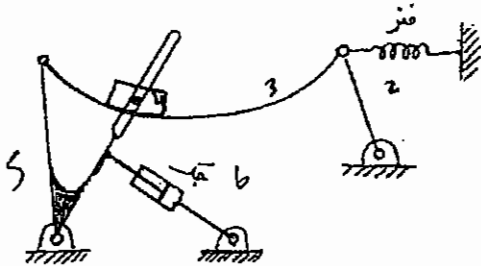
- (۱) ۱-۱  
 (۲) ۱  
 (۳) مجموعه قفل می‌کند.  
 (۴) غیرقابل پیش بینی

۴- اتومبیل A با سرعت ثابت ۵ کیلومتر در ساعت و اتومبیل B با ۱/۲ متر بر ثانیه حرکت می‌کند. شتاب اتومبیل A از نقطه نظر ماشین B چند متر بر مجذور ثانیه است؟



- (۱) ۱/۲  
 (۲) ۴/۳  
 (۳) ۶/۳  
 (۴) ۸/۷

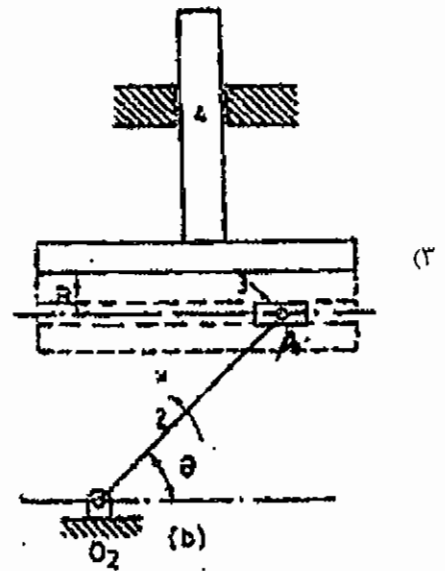
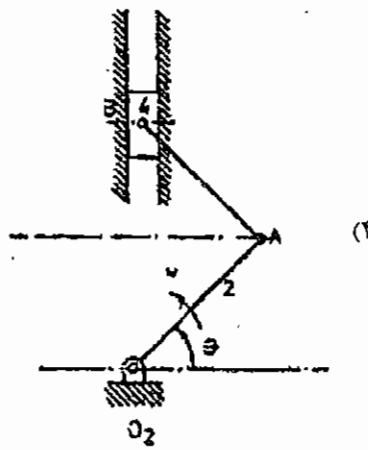
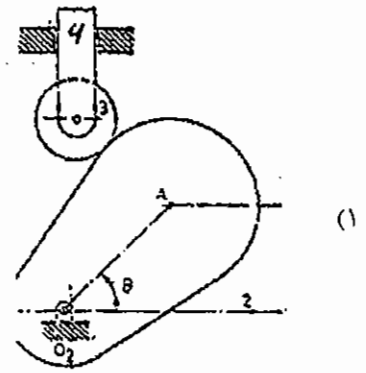
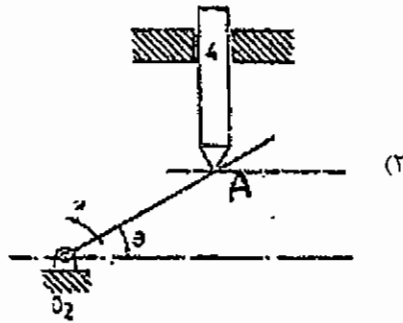
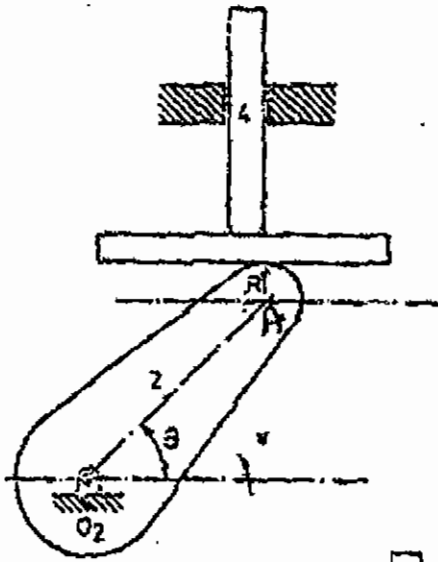
۵- درجه آزادی مکانیزم نشان داده شده در شکل چند می‌باشد؟



- (۱) ۱  
 (۲) ۲  
 (۳) ۳  
 (۴) ۴



۶- مکانیزم معادل مکانیزم بادامک - پیرو شکل را تعیین کنید.



۷- در سری چرخ‌دنده‌ای سیاره‌ای نشان داده شده، چرخ‌دنده D با سرعت ۱۰۰۰ rpm + و بازو با سرعت ۱۰۰۰ rpm - دوران می‌نمایند. اگر تعداد دندانه‌ها:  $N_D, N_{B6} = 5N$

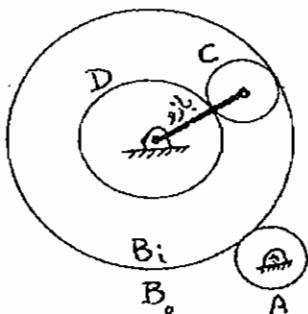
باشند، سرعت A برابر است با:

(۱) -۱۰۰۰ rpm

(۲) -۵۰۰۰ rpm

(۳) +۵۰۰۰ rpm

(۴) +۱۰۰۰۰ rpm



### پاسخ نامه سؤال های دینامیک ماشین

۴	۳	۲	۱		۴	۳	۲	۱		۴	۳	۲	۱	
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	۵-۷۷/۷۶	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	۳-۷۳/۷۲	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۱-۶۸/۶۷
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۶-۷۷/۷۶	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۴-۷۳/۷۲ ‡	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۱-۷۰/۶۹
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۷-۷۷/۷۶	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۵-۷۳/۷۲	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۲-۷۰/۶۹
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	۱-۷۸/۷۷	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۱-۷۴/۷۳	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۳-۷۰/۶۹
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	۲-۷۸/۷۷	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۲-۷۴/۷۳	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۴-۷۰/۶۹
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۳-۷۸/۷۷ ■	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۳-۷۴/۷۳	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۵-۷۰/۶۹
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	۴-۷۸/۷۷	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۴-۷۴/۷۳ ‡	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۶-۷۰/۶۹
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۵-۷۸/۷۷	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۵-۷۴/۷۳ ◀	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۷-۷۰/۶۹ «
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۶-۷۸/۷۷	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۸-۷۰/۶۹
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	۱-۷۹/۷۸	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۱-۷۵/۷۴	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۱-۷۱/۷۰
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	۲-۷۹/۷۸ ■	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۲-۷۵/۷۴	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۲-۷۱/۷۰
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۳-۷۹/۷۸	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	۳-۷۵/۷۴	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	۳-۷۱/۷۰
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۴-۷۹/۷۸	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۴-۷۵/۷۴	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	۴-۷۱/۷۰
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۵-۷۹/۷۸	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۵-۷۵/۷۴	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	۵-۷۱/۷۰
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۶-۷۹/۷۸ ■	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۶-۷۵/۷۴	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۶-۷۱/۷۰
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۷-۷۹/۷۸	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۷-۷۵/۷۴	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۷-۷۱/۷۰
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۸-۷۹/۷۸	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۱-۷۶/۷۵	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۸-۷۱/۷۰
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۱-۸۰/۷۹	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۲-۷۶/۷۵	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۱-۷۲/۷۱
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۲-۸۰/۷۹	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	۳-۷۶/۷۵	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۲-۷۲/۷۱ †
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۳-۸۰/۷۹	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۴-۷۶/۷۵ ■	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۳-۷۲/۷۱
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۴-۸۰/۷۹	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	۵-۷۶/۷۵	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	۴-۷۲/۷۱
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۵-۸۰/۷۹	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۶-۷۶/۷۵	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	۵-۷۲/۷۱ †
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	۶-۸۰/۷۹	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۷-۷۶/۷۵	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۶-۷۲/۷۱
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۷-۸۰/۷۹	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۸-۷۶/۷۵	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	۷-۷۲/۷۱
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	۸-۸۰/۷۹	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۱-۷۷/۷۶	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	۸-۷۲/۷۱ ■
<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۹-۸۰/۷۹ «	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۲-۷۷/۷۶	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۱-۷۳/۷۲
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۱-۸۱/۸۰ †	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۳-۷۷/۷۶	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۲-۷۳/۷۲
					<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۴-۷۷/۷۶	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	

۴	۳	۲	۱	
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۱-۸۵/۸۴
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۲-۸۵/۸۴
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۳-۸۵/۸۴
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۴-۸۵/۸۴
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۵-۸۵/۸۴
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	۶-۸۵/۸۴ †
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۷-۸۵/۸۴

<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۱-۸۶/۸۵
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۲-۸۶/۸۵
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۳-۸۶/۸۵
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	۴-۸۶/۸۵
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	۵-۸۶/۸۵
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۶-۸۶/۸۵
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۷-۸۶/۸۵

<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۱-۸۷/۸۶ ◀
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۲-۸۷/۸۶
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۳-۸۷/۸۶
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۴-۸۷/۸۶
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	۵-۸۷/۸۶
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۶-۸۷/۸۶
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	۷-۸۷/۸۶

۴	۳	۲	۱	
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۲-۸۱/۸۰
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	۳-۸۱/۸۰
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	۴-۸۱/۸۰ ■
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۵-۸۱/۸۰ ◀
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۶-۸۱/۸۰
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۷-۸۱/۸۰

<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۱-۸۲/۸۱
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۲-۸۲/۸۱ †
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۳-۸۲/۸۱
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۴-۸۲/۸۱
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۵-۸۲/۸۱
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	۶-۸۲/۸۱
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۷-۸۲/۸۱ ■
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	۸-۸۲/۸۱

<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۱-۸۳/۸۲
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۲-۸۳/۸۲
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۳-۸۳/۸۲
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	۴-۸۳/۸۲
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۵-۸۳/۸۲
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۶-۸۳/۸۲ †
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	۷-۸۳/۸۲

<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۱-۸۴/۸۳
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	۲-۸۴/۸۳
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۳-۸۴/۸۳
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۴-۸۴/۸۳
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۵-۸۴/۸۳ ■
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	۶-۸۴/۸۳
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	۷-۸۴/۸۳ ■

