Subject:
Year. Month. Date. ( )

دینامیک

منبع آموزشی : دینامیک مریام چاپ ششم ، 1986،

امتحان میان ترم : ۸۴ ، ۸ ، ۲۵

ارزشیابی : میان ترم ۷ پایان ترم ۸ تکلیف ۳ حضور غیاب ۲

تا پایان فصل دوم ، کار انرژی + قانون دوم

دینامیک : حرکت اجسام تحت تاثیر نیروهای وارده را بررسی می‌کند

دینامیک
- سینماتیک : بررسی حرکت بدون در نظر گرفتن عامل حرکت
- سینتیک : در تحلیل حرکت از عامل حرکت (نیرو) صحبت می‌شود

دینامیک
- ذره : جسمی است که در مسیر حرکت از ابعاد آن صرف نظر می‌کنیم
- جسم صلب : ابعاد جسم در بررسی حرکت مهم هستند ابعاد جسم صلب در حین حرکت ثابت است

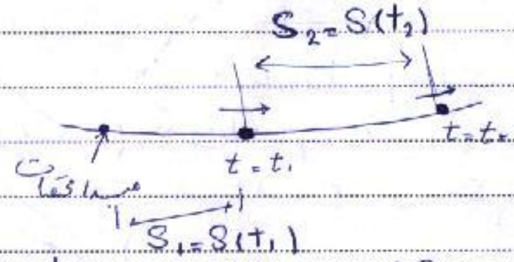
حالت جسم

PAPNO

فصل دوم) دینامیک ذره

* حرکت ذره: مستقیم الخط / منحنی الخط: در صفحه / در فضا

حرکت مستقیم الخط ذره)



S جهت مشخصات ذره در هر لحظه

- سرعت متوسط $v_{ave} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S_2 - S_1}{t_2 - t_1}$ سرعت متوسط در فاصله زمانی t_2, t_1

واحد m/s

- سرعت لحظه ای $v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt} = \frac{d}{d(t)} \dot{s}(t)$ (اسلات t)

- شتاب متوسط $a_{ave} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$ شتاب متوسط در بازه زمانی t_2, t_1

واحد m/s^2

- شتاب لحظه ای $a = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \dot{v}$ (دوی حالت t)

$$= \frac{d}{dt}\left[\frac{d}{dt} S\right] = \frac{d^2 S}{dt^2} = \ddot{S}$$

فرمولها $v = \frac{dS}{dt}$, $a = \frac{dv}{dt}$ $\Longrightarrow$ حذف زمان

$$\begin{cases} v\,dt = dS \\ a\,dt = dv \end{cases} = \begin{cases} a v\,dt = a\,dS \\ v a\,dt = v\,dv \end{cases}$$

$\Rightarrow v\,dv = a\,dS$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$2P = (m_A + m_B)a \Rightarrow a = \frac{80}{100+20} = \%66 \ \frac{m}{s^2}$

فرض دوم: $P = 60 \quad 2P = 120 > f_{s\,max}$ دو جسم نسبت به هم حرکت دارند

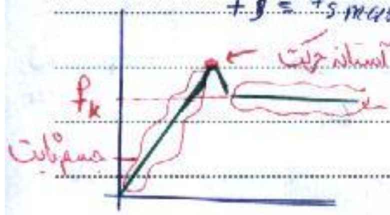
$f = \mu_k N_A = \mu_k m_A g = (0.5)(20)(9.81) = 98.1$

$a_A = \frac{1}{20}(120 - 98.1) \qquad a_B = \frac{98.1}{100}$

اصطکاک استاتیک و اصطکاک دینامیکی

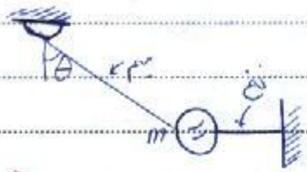
اصطکاک استاتیکی $f_s \le \mu_s N$ برای آستانه حرکت $f_s = \mu_s N$

$f_s = f_{s\,max} = \mu_s N$ ضریب اصطکاک استاتیک



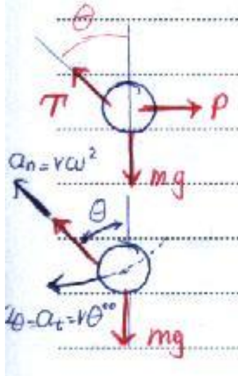
$f_k = \mu_k N$ اصطکاک دینامیکی

مثال: مطلوب است نسبت کشش در سیم بلافاصله پس از پاره شدن نخ به کشش در سیم قبل از پاره شدن نخ



$\Sigma F_y = m a_y \qquad T_0 \cos\theta - mg = 0 \qquad T_0 \cos\theta = mg$

$T = \frac{mg}{\cos\theta}$



وقتی سیستم از حال سکون شروع به حرکت می‌کند $a_n = r\omega^2 = 0$ می‌گردد

$\omega = 0 \rightarrow a_n = r\omega^2 = 0$

$\Sigma F_n = m a_n$

$T - mg\cos\theta = m(0) \qquad T = \frac{mg}{\cos\theta} \Rightarrow \qquad \frac{T}{T_0} = \cos^2\theta$

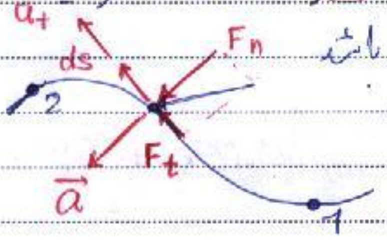
PAPNO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

قانون کار و انرژی)

کار = نیرو × جابجایی

$$= \int \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int \vec{F}\, ds \cos\alpha = \int F_t\, ds$$



حاصلضرب آن مؤلفه‌ای از نیرو که در راستای جابجایی باشد

حاصلضرب نیرو در نقطه اثر نیرو در امتداد جابجایی

$$\Delta U = \int F_t\, ds = \int m a_t\, ds \quad , \quad a_t = \frac{dv}{dt}$$

$$a\,ds = v\,dv \Leftarrow \cancel{d}v = \frac{ds}{dt}$$

$$\Delta U = \int_1^2 m v\, dv = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) = \Delta T$$

کار حاصل از نیروها از 1 به 2 برابر است با تغییر در انرژی جنبشی

$$\Delta U = \Delta T$$

تعریف) نیروی کنسرواتیو نیرویی است که کار حاصل از آن نیرو به مسیر حرکت بستگی ندارد

مانند نیروی وزن و نیروی فنر

کار نیروی فنر $= \frac{1}{2} k x^2$ نیروی فنر $F = kx$

$\frac{1}{2}$ در فرمول برای آن است که به صورت نیروی فنر کار انجام می‌دهد و متوسط کار را در نظر می‌گیریم

کار نیروی فنر همیشه منفی است (چه جمع شود و چه کشیده شود) ولی فنر چه جمع شود و چه کشیده شود انرژی ذخیره شده در فنر همواره مثبت است

کار همه نیروها به غیر از وزن و فنر + کار نیروی وزن + کار نیروی فنر = ΔU کار کلیه نیروها

$$\Delta U = \Delta T$$

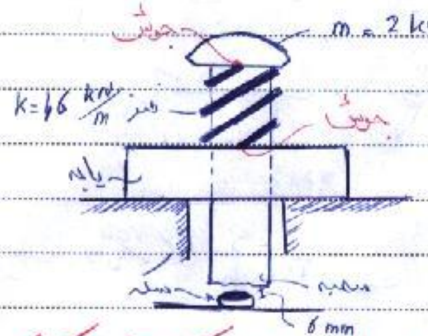
تغییر در انرژی ارتجاعی یا فنر ← $\Delta U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$ کار کلیه نیروها به غیر از وزن و فنر

تغییر در انرژی پتانسیل ثقل — تغییر در انرژی جنبشی سیستم

در قانون کار و انرژی همیشه مجاز به استفاده از سرعت نسبی نیستیم زیرا این قانون براساس قانون دوم نیوتن که در آن شتاب مطلق است ثابت شده

Subject:
Year. Month. Date. ( )

برای محاسبه انرژی پتانسیل فنر مبدأ مختصات تعادل استاتیکی فنر هستند. تعادل استاتیکی یعنی جایی که فنر نه کشیده شده و نه فشرده



مثال) در حال تعادل استاتیکی سیستم مهره در فاصله ۴ میلی متری از سکه قرار دارد مهره را به اندازه 40 mm از وضعیت تعادل پائین برده و رها میکنیم مهره با چه سرعتی به سکه برخورد می کند

وضعیت 1) وضعیتی که از تعادل استاتیکی سیستم به اندازه 40 mm پائین برده شده وضعیت 2) وضعیتی که مهره با سرعت v با سکه برخورد می کند

$$\Delta U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$$

به این دلیل که نیروی جوش در سیستم داخلی است از انرژی آن صرف نظر می کنیم و فقط به محاسبه نیروهای خارجی جرم و فنر می پردازیم $\Leftarrow$ $\Delta U = 0$

$$\Delta T = \frac{1}{2} m (v_2^2 - \cancel{v_1^2}) = \frac{1}{2} m v_2^2$$

$$\delta_{ST} = \frac{mg}{k} = \frac{2 \times 9.81}{1.6 \times 10^3} \times 10^3$$

$$\Delta V_g = -mg(40 + 6) \times 10^{-3}$$

$$\Delta V_e = \frac{1}{2} \overset{1.6 \times 10^3}{k} (x_2^2 - x_1^2) \Rightarrow v_2 \checkmark$$

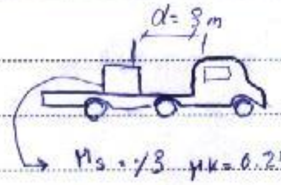
$x_2 = (6 + \delta_{ST}) \times 10^{-3}$ ، $x_1 = (40 - \delta_{ST}) \times 10^{-3}$

مسئله های فصل 2 ، 209 ، 217 ، 222 ، 220 ، 237

فصل 3 مسئله ، 9 ، 10 ، 25 ، 35 ، 45 ، 44

PAPNO

Subject:
Year. Month. Date. ( )



مسأله ۱۴ فصل ۱۳

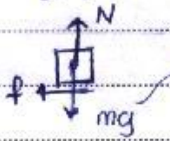
کامیونی از سرعت $70\ \frac{km}{h}$ در اثر ترمز کردن با شتاب ثابت در طول مسافت 50 متری ایستد. آیا بسته از روی کف کامیون سر می‌خورد. اگر سر می‌خورد سرعت جعبه چقدر است.

پاسخ

$v\,dv = a\,ds \qquad \int v\,dv = \int a\,ds \qquad \int_{70\times\frac{5}{18}}^{0} v\,dv = a\int_0^{50} ds$

$\frac{1}{2}\left[0-\left(70\times\frac{50}{18}\right)^2\right] = a \times 50 \qquad a = -3.78\ \frac{m}{s^2}$ شتاب کامیون

Truck کامیون



$-f = ma$

$-\mu_s mg = ma$

فرض: بسته در آستانه لغزش است

$\mu_s = -\frac{a}{g}$ حداقل ضریب اصطکاک بسته و کامیون برای آنکه بسته سر نخورد

$\mu_s = \frac{-3.78}{9.81} = 0.385 \qquad \mu_s = 0.3 < 0.385 \qquad f = \mu_k N = \mu_k mg$

$-f = ma \qquad -\mu_k mg = ma \qquad a = -\mu_k g \qquad a = -0.25 \times 9.81 = -2.45\ \frac{m}{s^2}$

شتاب box

$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{A/B} \qquad a_b = a_T + a_{b/T}$ شتاب بسته نسبت به کامیون

$-2.45 = -3.78 + a_{b/T} \Rightarrow a_{b/T} = 1.33\ \frac{m}{s^2}$

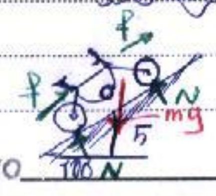
نسبی $\int_0^{v_{B/T}} v_{b/T}\,dv = \int_0^{d} a_{b/T}\,ds \Rightarrow \frac{1}{2}(v_{B/T})^2 - 0 = a_{b/T} \times d$

$v_{B/T} = \sqrt{2\times 1.33 \times 3} = 2.82\ \frac{m}{s}$

تعریف توان یا قدرت (P, power)

$P = \frac{\text{کار نیروهای خارجی}}{\text{زمان}}$ توان یا قدرت $= \frac{\sum\vec{F}\cdot\vec{\Delta r}}{\Delta t} = \sum\vec{F}\cdot\frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t} \qquad P = F\cdot v$

مثال) دوچرخه سواری با سرعت $20\ \frac{km}{h}$ از سطح شیب‌داری با شیب 5% به سمت بالا حرکت می‌کند. توان دوچرخه سوار چقدر است. $m = 95$



توان $= (mg\sin\alpha)\,v = 95 \times 9.81 \times \sin\alpha \times 20 \times \frac{5}{18}$

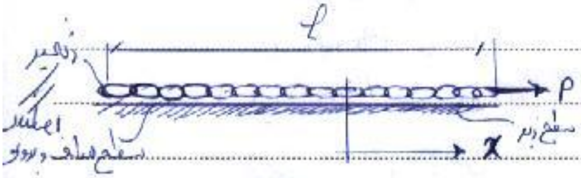
توان $P = 259$ وات

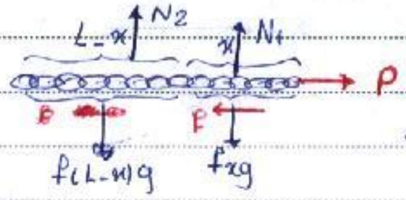
PAPNO

در غلتش همواره کار نیروی اصطکاک صفر است. زیرا نیروی اصطکاک به نقطه‌ای اعمال می‌شود که سرعت آن نقطه صفر است

مسأله 31 فصل 13

اگر ρ جرم واحد طول زنجیر باشد و زنجیر در ابتدا در وضعیت $x = 0$ باشد، سرعت زنجیر را وقتی که تمام آن روی سطح زبر قرار می‌گیرد تعیین کنید.





$$\Sigma F_x = m a_x \rightarrow -\mu_k N_1 + P = m a$$

$N_1 = \rho x g$, $m = \rho L$

$$-\mu_k \rho x g + P = \rho L a$$

$$v\,dv = a\,ds \qquad \int_0^v v\,dv = \int_0^L \frac{-\mu_k \rho x g + P}{\rho L}\,dx$$

$$\frac{1}{2}v^2 - 0 = \left[-\mu_k \rho g \frac{L^2}{2} + PL\right] \Rightarrow v = \checkmark$$

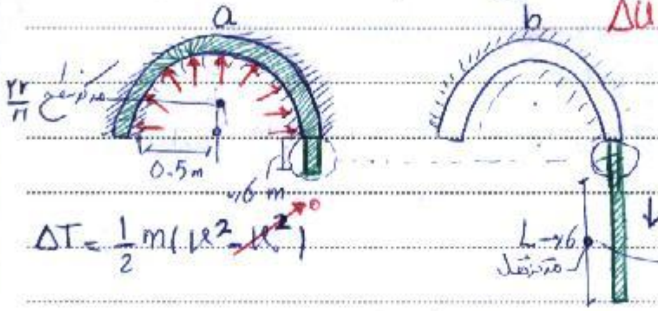
طناب همانند وضعیت a از حال سکون رها می‌شود. سطح صاف و بدون اصطکاک است. مطلوب است سرعت طناب در وضعیت b.

$$\Delta U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$$

(1) وضعیت a

(2) وضعیت b

کار نیروی N صفر است $\Delta U = 0$



جابجایی $0.6 + \frac{L-0.6}{2}$

$$\Delta T = \frac{1}{2} m (v^2 - \cancel{v_0^2})$$

$$\Delta V_g = -m g \left(y_1 + 0.6 + \frac{(L-0.6)}{2}\right) \qquad \Delta V_e = 0$$

$$m \rightarrow \frac{m}{L}(L - 0.6)$$

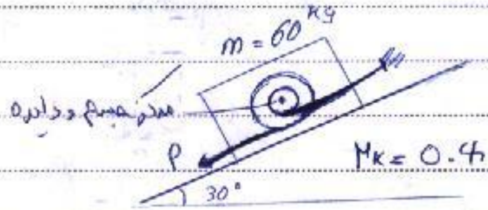
$$0 = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{m}{L}(L-0.6) g \left(\frac{2r}{\pi} + 0.6 + \frac{L-0.6}{2}\right)$$

$$L = 2\pi \times 0.5 \times \frac{1}{2} + 0.6$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

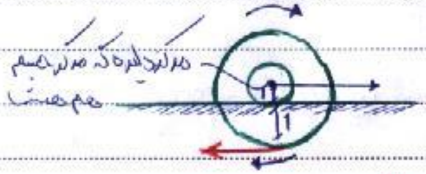
مثال ۲



جسم از حال سکون روی سطح شیب دار در نتیجه اعمال نیروی P به طناب شروع به حرکت می کند پس از طی 1.4 متر در امتداد سطح شیب دار سرعت جسم چقدر است

$P = 600\ N$ نسبت شعاع ها 1 به 2

از اصطکاک های داخلی کوپل ها صرف نظر می کنیم



چرا با اینکه نیرو به سمت پایین است جسم بالا می رود

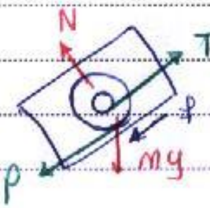
چرا اگر طناب 5 متر جابجا شود جسم هم 5 متر جابجا می شود

مرکز جرم در تحلیل حرکت برای ما مهم است نه طناب

$\Delta U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$

① وضعیت اول سیستم

② سیستم 1.4 متر به سمت بالا جابجا شده است



کار نیروی کشش چون حرکت ندارد چون جابجا نمی شود

$\Delta U = -\mu_k mg * \underbrace{1.4}_{\text{مسافتی که اصطکاک وارد می شود}} - T * 0 + P * 1.4$ نیرو و جابجایی ها هم جهت هستند

$\Delta T = \frac{1}{2} m (v^2 - v_0^2)$

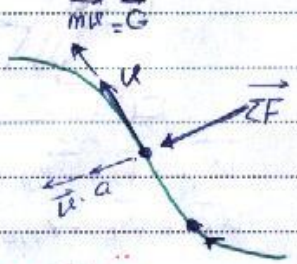
$\Delta V_g = + mg * 1.4 \sin 30 \rightarrow v = 2.18$

PAPNO

ضربه و مومنتم خطی)

زمان × نیرو = ضربه

سرعت × جرم = مومنتم خطی



$$\vec{\Sigma F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{\Sigma F} \cdot dt = m\,d\vec{v}$$ انتگرال $$\int_{t_1}^{t_2} \vec{\Sigma F}\,dt = \int_{v_1}^{v_2} m\,dv$$

جمع دوبا… $$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma F\,dt = mv_2 - mv_1 = G_2 - G_1$$ = تغییرات مومنتم خطی

برآیند ضربه نیروهای وارد شده به جسم در بازه زمانی $t_2 - t_1$

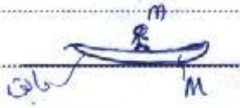
برآیند ضرب نیروهای وارد بر جسم برابر است با تغییرات مومنتم خطی

سرعت‌ها حتماً سرعت‌های مطلق هستند (در قانون مومنتم)

قانون بقاء مومنتم خطی) اگر برآیند ضربه نیروهای وارد بر جسم صفر باشد بقاء مومنتم خطی را خواهیم داشت.

$$G_2 - G_1 = \Delta G = 0 \qquad G_2 = G_1$$

$$\int \Sigma F_x\,dt = \Delta G_x \qquad \int \Sigma F_y\,dt = \Delta G_y \qquad \int \Sigma F_z\,dt = \Delta G_z$$



$$\Delta G_x = 0 \Rightarrow G_2 - G_1 = 0 \qquad mv_1 = Mv_2 \Rightarrow v_2 = \frac{m}{M}v_1$$

بقای مومنتم خطی در راستای افق

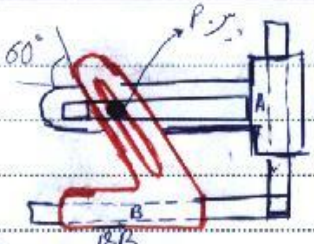
بقای مومنتم در راستای افق صادق است و در راستای قائم صادق نیست به خاطر وجود نیروی وزن

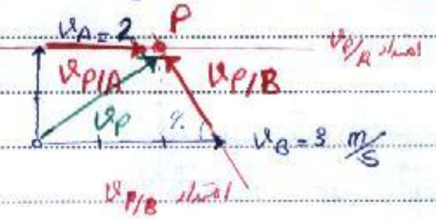
Subject:

Year. Month. Date. ( )

مثال)

$v_B = 3\,\frac{m}{s}$ $\quad v_A = 2\,\frac{m}{s} \quad \rightarrow v_P = ?$





$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{v}_{P/A}$

$\vec{v}_P = \vec{v}_B + \vec{v}_{P/B}$

$v_A = v_{P/B}\sin 60 \qquad 2 = \frac{\sqrt{3}}{2} v_{P/B} \qquad v_{P/B} = \frac{4}{\sqrt{3}}$

$v_{P/A} = -\frac{4}{\sqrt{3}}\cos 60 + 3 \qquad v_{P/B} = 3 - \frac{2}{\sqrt{3}}$

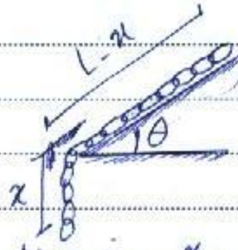
$v_P = \sqrt{(v_A)^2 + (v_{P/A})^2}$

مثال)

زنجیر از حال سکون و از موقعیت $x=0$ رها می‌شود

سطح صاف و بدون اصطکاک، سرعت

حالت های زنجیر برحسب x



$\Delta U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$

$\Delta U = 0$ چون N عمود بر مسیر حرکت است

$\Delta T = \frac{1}{2} m (v_2^2 - \cancel{v_1^2})$ $\qquad \Delta V_e = 0$

موقعیت اول $x=0$

موقعیت دوم : موقعیت نشان داده شده

جابجایی مرکز ثقل

$\Delta V_g = -mg(\Delta h)$

$\rightarrow \left[(L-x) + \frac{x}{2}\right]\sin\theta + \frac{x}{2}$

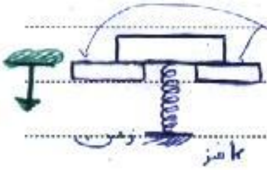
$\Delta V_g = -\frac{m}{L} x g \left(\left[(L-x) + \frac{x}{2}\right]\sin\theta + \frac{x}{2}\right)$

$v = \sqrt{\frac{g}{l} x^2 (1-\sin\theta) + 2gx\sin\theta}$

$\rightarrow \left[(L-x) + \frac{x}{2}\right]\sin\theta + \frac{x}{2}$

Subject:
Year. Month. Date.

مسأله) در وضعیت نشان داده شده فنر تماس
فنر با جرم m هیچ فشردگی در فنر وجود ندارد در صورتی
که قطعه‌های نگهدارنده ناگهان کشیده شوند مطلوب
است حداکثر سرعتی که جرم m به آن می‌رسد
حداکثر فشردگی فنر
حداکثر نیرویی که فنر به زمین اعمال می‌کند



$\Delta U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$

(1) وضعیت نشان داده شده

(2) جرم به اندازه x پایین آمده و سرعت آن $\dot{x}$ است

$\Delta U = 0 \qquad \Delta T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \qquad \Delta V_g = -mgx \qquad \Delta V_e = \frac{1}{2} k (x_2^2 - \cancel{x_1^2}) = \frac{1}{2} k x^2$

$-mgx + \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2 = 0$

$\frac{1}{2} m v_{(x)}^2 - mgx + \frac{1}{2} k x^2 = 0 \qquad \frac{dv}{dx} = 0 \longrightarrow x_0$ در این وضعیت سرعت حداکثر است

$mv \cancel{\frac{dv}{dx}} - mg + kx_0 = 0 \Rightarrow mg = kx_0 \qquad x_0 = \frac{mg}{k}$

$v_{max} \Rightarrow$ [redacted] $\frac{1}{2} m v_{max}^2 - mg \left(\frac{mg}{k}\right) + \frac{1}{2} k \left(\frac{mg}{k}\right)^2 = 0$

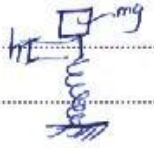
$v_{max} = \sqrt{\frac{m}{k}}\, g$

ب) $x_{max} \Rightarrow v = 0 \qquad -mgx + \frac{1}{2} k x^2 = 0 \qquad x = \frac{2mg}{k}$

ج) $F_{max} = kx_{max} = 2mg$ چون بارگذاری ناگهانی است

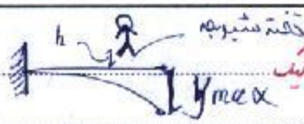
اگر بارگذاری تدریجی باشد $F_{max} = mg$ می‌شود

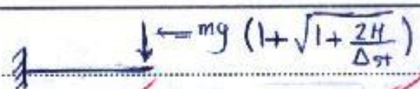
نیروی معادل بارگذاری استاتیک $F_{dyn} = mg \underbrace{\left(1 + \sqrt{\frac{2h}{\delta_{st}}}\right)}_{\text{ضریب ضربه}}$ تغییر طول فنر در بارگذاری تدریجی



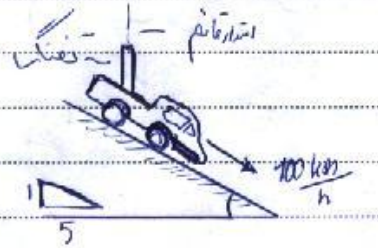
PAPNO

Subject:
Year. Month. Date. ( )





بارگذاری به صورت استاتیک



مثال) سرعت خروج گلوله از لوله تفنگ $500\ m/s$ است

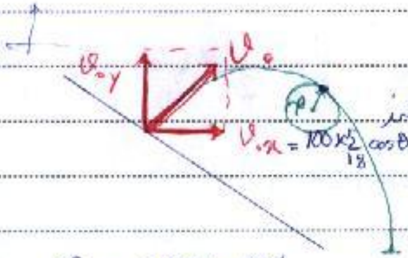
درصورتی که شیب جاده 20% و سرعت خودرو $100\ km/h$

باشد مطلوب است.

الف) شعاع انحنا مسیر حرکت گلوله در ارتفاع حداکثر

ب) برد یا مسافتی که گلوله در امتداد سطح شیب دار طی می کند

سرعت گلوله نسبت به ماشین مطلق



v مطلق گلوله $= \vec{v} + \vec{v}$ $\qquad \vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B}$

$v_{0x} = 27.24\ m/s \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{1}{5}$

$v_{0y} = 500 - 100 \times \frac{5}{18} \times \sin\theta = 494.54$

در نقطه اوج $a_n = g$

$a_n = \frac{v^2}{\rho}$

از مولفه های سرعت گلوله در نقطه اوج $v_y = 0$

$\Sigma F_x = 0 \quad a_x = 0 \Rightarrow v_x =$ ثابت

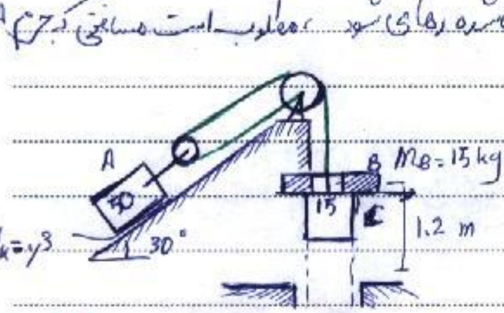
v_x حالت v_{0x} است که برابر 27.24 است (گلوله)

$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ در نقطه اوج چون v_y صفر است v برابر با مقدار v_x است

$g = \frac{(v_x)^2}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{(27.24)^2}{9.81} = 75.63$

PAPNO

مثال) سیستم از حال سکون و از وضعیت نشان داده شده رها می‌شود، مطلوب است مسافتی که جرم A روی سطح شیب‌دار تا توقف کامل طی می‌کند.



① وضعیت نشان داده شده، سیستم در حال سکون

② جرم B در آستانه تعلیق بر تکیه‌گاه

③ سیستم کاملاً متوقف شده

2،1 بین: $\Delta U = -\mu_k m_A g \cos\theta \cdot \frac{1.2}{2}$

$\Delta T = \frac{1}{2} m (v_2^2 - \cancel{v_1^2}) = \frac{1}{2} m_A v_{2A}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{2B}^2 + \frac{1}{2} m_C v_{2C}^2$

$f_k = \mu_k N$

$N = mg\cos\theta$

$\Delta V_g = + mg \frac{1.2}{2} \sin\theta - (m_C - m_B) g \cdot 1.2$

$\Delta U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$

سرعت A نصف سرعت v_B و v_C است (به دلیل وجود قرقره‌ها)

از معادله $v_{2C} = 2.469\ m/s$ $v_{2A} = 1.234\ m/s$

3،2 بین: فرض جرم A روی سطح شیب‌دار از 2 به 3 به اندازه x جابجا شده است

$\Delta U = -\mu_k m_A g \cos\theta \cdot x$

$\Delta T = \frac{1}{2} m (\cancel{v_3^2} - v_2^2) = -\frac{1}{2} m_A v_{2A}^2 - \frac{1}{2} m_C v_{2C}^2$

$v_{2A} = \frac{1}{2} v_{2C}$

$\Delta V_g = + m_A g x \sin\theta - m_C g (2x) \Rightarrow x = 1.0689\ m$

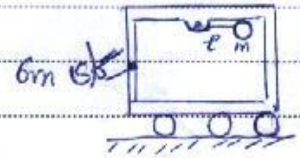
کل جابجایی جرم A برابر است با 1.6689 متر

$\Delta U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$\int \Sigma \vec{F} \cdot dt = \Delta \vec{G} = \vec{G}_2 - \vec{G}_1$ مومنتم خطی $G = mv$

سوال) سیستم از حال سکون در وضعیت نشان داده شده رها می‌شود
مطلوب است سرعت نسبی گلوله وقتی گلوله در حالت قائم قرار می‌گیرد.



وضعیت 1 : وضعیت نشان داده شده
وضعیت 2 : وقتی گلوله در راستای قائم قرار می‌گیرد

$\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$

$\Delta U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$

$\Delta U = 0$

کشش کابل و نیروی مفصل‌ها داخلی هستند و نیروی N هم
بر مسیر حرکت عمود است پس کار آنها صفر است

$\Delta T = \frac{1}{2}(6m)(v_{2M}^2 - \cancel{v_{1M}^2}) + \frac{1}{2}m(v_{2m}^2 - \cancel{v_{1m}^2}) \Leftarrow \Delta KT$

$\Delta V_g = -mgh = -mgl$

$+ \quad \frac{1}{2}(6m)(v_{2M}^2) + \frac{1}{2}m(v_{2m})^2 - mgl = 0$

بقای مومنتم خطی در راستای افق داریم یعنی
هیچ نیروی خارجی افقی به سیستم وارد نمی‌شود

$\int \Sigma F_x \, dt = G_{2x} - G_{1x}$

$G_{2x} = G_{1x}$

$G_1 = 6m\cancel{v_{1M}} + m\cancel{v_{1m}} \Rightarrow G_{1x} = 0 \qquad G_2 = 6mv_{2M} + mv_{2m}$

$\Rightarrow 6mv_{2M} + mv_{2m} = 0$

$v_{2M} = -\frac{1}{6} v_{2m}$

سرعت‌ها مطلق است و جهت آنها خلاف هم هستند

$6 v_{2M}^2 + (-6 v_{2M})^2 - 2gl = 0 \qquad v_{2M} = \sqrt{\frac{gl}{21}} \Rightarrow v_{2m} = -6\sqrt{\frac{gl}{21}}$

$v_{2m} = v_{2M} + v_{2m/M} \qquad -6\sqrt{\frac{gl}{21}} = \sqrt{\frac{gl}{21}} + v_{m/M}$

بزرگ

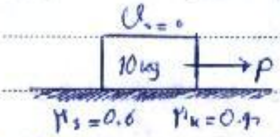
$v_{m/M} = -7\sqrt{\frac{gl}{21}}$ چون هر دو سرعت در یک راستا هستند جمع برداری ساده داریم

PAPNO

Subject:

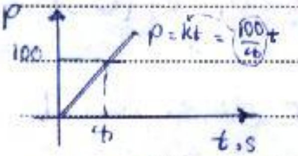
Year. Month. Date. ( )

مثال 3/178)

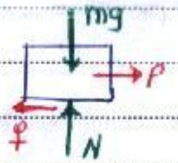


نیروی P از صفر مانند شکل روبرو افزایش می‌یابد مطلوب است
سرعت بسته پس از 4 ثانیه

تنها رابطه‌ای که در آن زمان و سرعت وجود دارد ضربه و مومنتوم خطی است



$$\int \Sigma \vec{F}\, dt = \Delta \vec{G} \rightarrow \int \Sigma F_x\, dt = \Delta G_x = \vec{G}_{2x} - \vec{G}_{1x}$$



$t = 0$ ①

$$\int_{t=t^*}^{t=4} \Sigma F_x\, dt = G_{3x} - G_{2x}$$ استارت حرکت $t = t^*$ ②

$t = 4$ ③

$f = f_{s\,max} = \mu_s N = \mu_s mg$ جسم دقیقاً موقعی به حرکت درمی‌آید که f_{max} و $f_{s\,max}$ برابر باشد

$f_{max} = (0.6)(10)(9.8) = 58.86\ N$

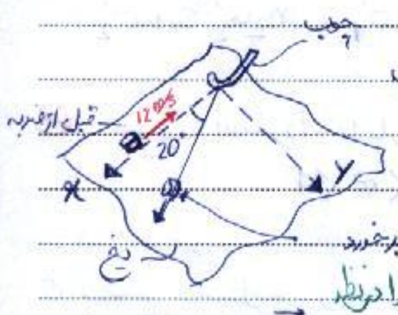
$\frac{100}{4} t^* = 58.86 \Rightarrow t^* = 2.354\ (s)$

$$\int_{2.354}^{4} \Sigma F_x\, dt = \int_{2.354}^{4} (\frac{100}{4} t - \overset{\mu_k mg}{f})\, dt = G_{3x} - \cancel{G_{1x}}^{\,0} = m v_3$$

استارت حرکت

$$\int_{2.354}^{4} (\frac{100}{4} t - 0.4 \times 10 \times 9.81)\, dt = 10 v_3 \Rightarrow v_3 = 6.6121\ (m/s)$$

مثال 3/183) حاکی روی یخ



جرم توپ = 0.20

زمان تماس چوب با توپ = 0.04

مطلوب است نیروی متوسط اعمالی از طرف چوب به توپ

چون از فیبر زمان، سرعت، نیرو صحبت شده از مومنتم خطی استفاده می‌کنیم بعد از برخورد

برای اینکه بتوانیم dt را از انتگرال بیرون بیاوریم متوسط ΣF را در نظر
می‌گیریم چون زمان برخورد 0.04 بسیار کم است

$\int \Sigma \vec{F}\, dt = \Delta \vec{G}$

$\vec{F}\, \Delta t = \Delta \vec{G} = m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$ $\rightarrow \vec{F} = 144.55 i + 30.8 j$

$F = 147.8 N$

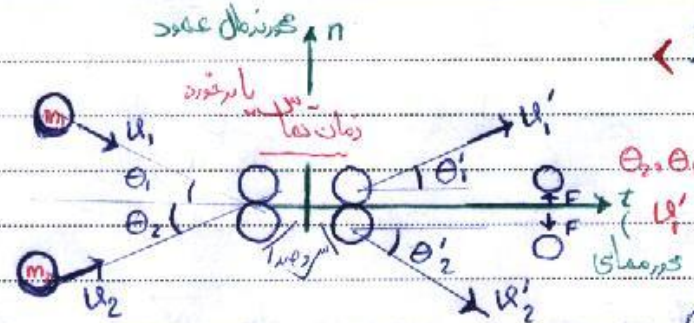
PAPNO

$F + 0.04 = 0.20 [[18 \cos 20 i \underset{+?}{-} 18 \sin 20 j] - (\underset{?}{-}12 i)]$

خلاف جهت گرد x

Subject:
Year. Month. Date. ( )

برخورد Impact

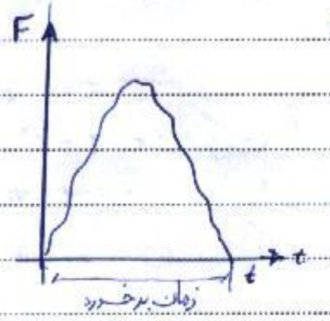


معلومات: $m_1, m_2, u_1, u_2, \theta_1, \theta_2$

مجهولات: $u_1', u_2', \theta_1', \theta_2'$

1- انتخاب محورهای n و t

نیرویی که دو جسم به هم وارد می‌کنند F در راستای n است



هیچ نیرویی به تک تک ذرات در راستای محور t وارد نمی‌شود
به عبارت دیگر برای تک تک ذرات در راستای t
بقای مومنتم خطی را داریم ولی در راستای n
برای کل سیستم بقای مومنتم خطی را داریم

$$\int \sum F\,dt = \Delta G$$

1 بقای مومنتم خطی برای جرم m_1 در راستای t ←

$$m_1 u_1 \cos\theta_1 = m_1 u_1' \cos\theta_1' \qquad u_1 \cos\theta_1 = u_1' \cos\theta_1'$$

2 بقای مومنتم خطی برای جرم m_2 در راستای t ←

$$m_2 u_2 \cos\theta_2 = m_2 u_2' \cos\theta_2' \qquad u_2 \cos\theta_2 = u_2' \cos\theta_2'$$

3 بقای مومنتم خطی برای کل سیستم در راستای n ←

$$m_2 u_2 \sin\theta_2 - m_1 u_1 \sin\theta_1 = m_1 u_1' \sin\theta_1' - m_2 u_2' \sin\theta_2'$$

e ضریب استرداد یا بازگشت پذیری (ذکری)

$$e = \frac{\text{سرعت نسبی دور شدن در راستای } n}{\text{سرعت نسبی نزدیک شدن در راستای } n} \qquad 0 < e < 1$$

e به جنس و شکل هندسی اجسام بستگی دارد

$e = 1$ الاستیک کامل، یعنی تلفات انرژی نداریم، قانون بقای انرژی جنبشی داریم

$0 < e < 1$ غیر الاستیک، تلفات انرژی در نتیجه گرما، سر و صدا و تغییر شکل دو جسم در هم ایجاد می‌کند است، قانون بقای انرژی جنبشی صادق نیست

PAPNO

$e = 0$ غیر الاستیک کامل، دو جسم پس از برخورد کاملاً به هم می‌چسبند، تلفات انرژی داشته، قانون بقای انرژی جنبشی صادق نیست

Subject:
Year. Month. Date.

4. $e = \dfrac{v_1' \sin\theta_1' + v_2' \sin\theta_2'}{v_1 \sin\theta_1 + v_2 \sin\theta_2}$

مثال ۱)

مطلوب است سرعت مانع پس از برخورد و درصد انرژی تلف شده.

پاسخ

* برای کل سیستم در راستای افق $\Sigma F_x = 0$
* برای کل سیستم در راستای افق بقای مومنتم خطی داریم *

$\Delta G_x = 0$

$m v_1 + M \cancel{v_2}^{\,0} = m v_1' + M v_2'$

$180 \times 10^{-3} \times 3 \times 10^3 = 180 \times 10^{-3} \times 1.5 \times 10^3 + 0.96 \times v_2' \qquad v_2' = 281 \, km/h$

درصد انرژی تلف شده $= \dfrac{\text{تغییر در انرژی جنبشی}}{\text{انرژی جنبشی اولیه}} = \dfrac{\left(\frac{1}{2} m v_1^2\right) - \left(\frac{1}{2} m v_1'^2 - \frac{1}{2} M v_2'^2\right)}{\frac{1}{2} m v_1^2} \times 100 = 70\%$

جرم 1 با سرعت $6 \, m/s$ در جهت نشان داده شده پرتاب می‌شود جرم 2 در حال سکون است هر دو جرم کاملاً مشابه و ضریب استرداد $e=0.6$ است

مطلوب است سرعت و جهت هر یک از جرم ها پس از برخورد و انرژی نسبی استهلاک شده در نتیجه برخورد

$v_1, \theta_1, v_2, \theta_2$

$v_1', \theta_1', v_2', \theta_2'$

$v_1 \Rightarrow \theta_1 = 60 \qquad v_1 = 6 \, m/s \quad \theta_1' = ? \quad v_1' = ? \quad v_2' = ? \quad \theta_2' = 90$

① t در راستای m_1: $m_1 v_1 \cos\theta_1 = m_1 v_1' \cos\theta_1'$

② t در راستای m_2: $0 = m_2 v_2' \cos 90 \Rightarrow 0 = 0$ ✓ (ساکن)

③ n در راستای m_2, m_1: $m_1 v_1 \sin\theta_1 + 0 = m_1 v_1' \sin\theta_1' + m_2 v_2'$

دو معادله و سه مجهول

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$e = \frac{\text{سرعت نسبی دور شدن ذرات در راستای } n}{\text{سرعت نسبی نزدیک شدن ذرات در راستای } n} \qquad e = \frac{v_2' - v_1'\sin\theta_1'}{v_1\sin\theta_1}$$

$$v_2' - v_1'\sin\theta_1' = e\,v_1\sin\theta_1 \qquad ③$$

$① = 6 * \cos 60 = v_1'\cos\theta_1'$ $\qquad v_1' = 3.17 \ m/s$

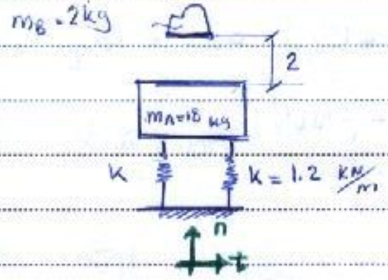
$② \Rightarrow 6 * \sin 60 = v_1'\sin\theta_1' + v_2'$ $\qquad v_2' = 4.16 \ m/s$

$③ = .6 \times 6 \sin 60 = v_2' - v_1'\sin\theta_1'$ $\qquad \theta_1' = 19.1°$

T_2 انرژی بعد از برخورد $\qquad T_1$ انرژی جنبشی قبل از برخورد

$$\text{درصد اتلاف انرژی} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} * 100$$

$$= \frac{\frac{1}{2}m_1(6)^2 - \left[\frac{1}{2}m_1(3.17)^2 + \frac{1}{2}m_2(4.16)^2\right]}{\frac{1}{2}m_1\, 6^2} = 24\%$$



3/226) جسم B پس از سقوط بر جسم A می‌چسبد.
مطلوب است مقدار حداکثر فشردگی فنر.

1) وضعیت نشان داده شده (دقیقاً قبل از برخورد B به A)

زاویه برخورد

2) دو جسم به هم برخورد کرده به هم چسبیده و هر دو دارای یک سرعت می‌باشند

از 1 به 2 قانون بقای انرژی صادق نیست

3) حداکثر فشردگی فنر

از روابط کار و انرژی

از 2 به 3 بقای انرژی داریم

$m_A * 0 + m_B\sqrt{2gh} = (m_A + m_B)\,v$ دو جسم به هم چسبیده و دارای یک سرعت مشترک

$$v = \frac{2}{18+2}\sqrt{2 * 9.81 * 2} = 0.626 \ m/s$$

PAPNO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$\Delta U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$ بین 2و3

$\Delta T = \frac{1}{2}\underbrace{(m_A+m_B)}_{20}(0-v_2^2)$ 0,626

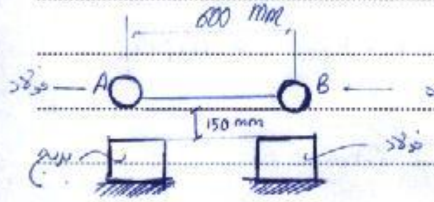
فشردگی فنر

$\Delta V_g = -\underbrace{(m_A+m_B)}_{20}\, g\, \delta$ 9,81

فشردگی پس از Max

$\Delta V_e = \frac{1}{2}k(x_3^2 - x_2^2)$ $x_2 = \frac{m_A g}{k \times 2} = \frac{18\times 9.81}{2\times 1.2\times 10^3}$ $x_3 = x_2 + \delta$

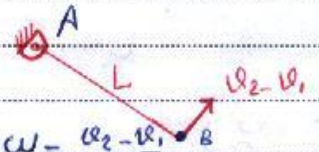
پیش فشردگی



$e = 0.4$ فولاد و برنج

$e = 0.6$ دو فولاد

سرعت زاویه میله AB پس از برخورد



$v_B = v_A + v_{B/A}$ $\omega = \frac{v_2 - v_1}{L}$

$v_{1A} = \sqrt{2gh} = v_{2B}$ $v_{2A} = ?$ $0.4\sqrt{2gh}$ $v_{2B} = ?$

$e_{\text{فولاد و برنج}} = \frac{v_{2A}}{\sqrt{2gh}}$ $\omega = \frac{v_{2B} - v_{2A}}{L} = \frac{(0.6-0.4)\sqrt{2gh}}{0.6000} = .15718$

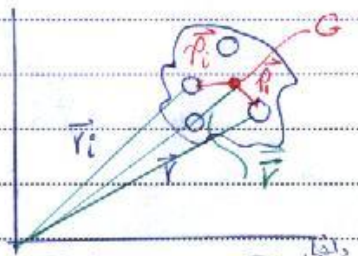
مسائل:

فصل 3، 184، 215، 212، 244، 253، 255

PAPNO

فصل چهارم :

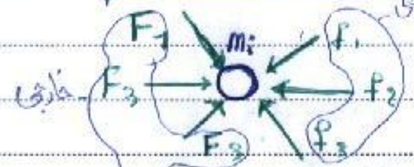
سینتیک سیستم ذره :



$(\Sigma m_i)\vec{\bar{r}} = \Sigma m_i \vec{r_i} \Rightarrow \bar{r} = \dfrac{\Sigma m_i r_i}{\Sigma m_i}$

$\Sigma m_i \vec{\rho_i} = 0$

قانون دوم نیوتن



$\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$

$m_i \Rightarrow F_1 + F_2 + \cdots + f_1 + f_2 + \cdots = m_i \vec{a_i}$

$m_i \cdots m_2 , m_1$ برای کل سیستم $\Rightarrow \quad \Sigma \vec{F} + \cancel{\Sigma \vec{f}} = \Sigma m_i \vec{a_i}$

برایند کل نیروهای داخلی برای کل سیستم صفر است

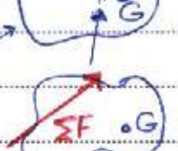
$\Sigma \vec{F} = \Sigma m_i \vec{a_i}$ برایند کل نیروهای خارجی

$\Sigma m_i \vec{\bar{r}} = \Sigma m_i \vec{r_i} \xrightarrow{\text{2 بار مشتق}} (\Sigma m_i)\vec{\bar{a}} = \Sigma m_i \vec{a_i}$

$\Sigma F = \Sigma m_i a_i = (\Sigma m_i)\vec{\bar{a}}$

برایند نیروهای خارجی وارد بر سیستم ذرات برابر است با جرم کل سیستم ضرب در شتاب مرکز ثقل

اگر برایند وارد بر سیستم ذرات از مرکز ثقل نگذرد سیستم ذرات هم حرکت انتقالی دارد هم حرکت دورانی



انرژی جنبشی سیستم ذرات :

$m_1 \Rightarrow T = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 \dot{r}_1^2 = \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{r}}_1 \cdot \dot{\vec{r}}_1$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

کل سیستم ذرات $\quad T = \sum T_i = \sum \frac{1}{2} m_i \dot{\vec r}_i \cdot \dot{\vec r}_i$

سرعت ذره iام نسبت به مرکز ثقل

$$\vec r_i = \vec{\bar r} + \vec\rho_i \xrightarrow{\text{مشتق}} \vec v_i = \vec{\bar v} + \dot{\vec\rho}_i$$

سرعت مطلق ذره iام — سرعت مرکز ثقل

$$T = \sum \frac{1}{2} m_i (\vec{\bar v} + \dot{\vec\rho}_i)(\vec{\bar v} + \dot{\vec\rho}_i)$$

$$= \sum \frac{1}{2} m_i \left[\bar v^2 + 2\vec{\bar v}\cdot\dot{\vec\rho}_i + \dot\rho_i^2 \right]$$

$$T = \bar v^2 \underbrace{\left(\sum \frac{1}{2} m_i\right)}_{\frac{1}{2}m} + 2\vec{\bar v}\cdot \cancel{\sum \frac{1}{2} m_i \dot{\vec\rho}_i} + \sum \frac{1}{2} m_i \dot\rho_i^2$$

$$\sum m_i \rho_i = 0 \qquad \sum m_i \dot\rho_i = 0$$

$$T = \frac{1}{2} m \bar v^2 + \sum \frac{1}{2} m_i \dot\rho_i^2$$

انرژی جنبشی سیستم ذرات برابر است با انرژی جنبشی مرکز ثقل به علاوه انرژی جنبشی تک تک ذرات نسبت به مرکز ثقل.

$T = \frac{1}{2} m \bar v^2$ — اگر ذرات نسبت به هم حرکت نداشته باشند $\dot\rho_i = 0$ بوده.

به عبارت دیگر انرژی جنبشی کل سیستم برابر است با انرژی جنبشی مرکز ثقل

مومنتم خطی سیستم ذرات

$$\vec G_i = m_i \vec v_i$$

$$\vec G = \sum \vec G_i = \sum m_i \vec v_i = \boxed{m \vec{\bar v}}$$

مومنتم خطی سیستم ذرات برابر است با مومنتم خطی مرکز ثقل

Subject:
Year. Month. Date. ( )

قانون ضربه و مومنتم خطی سیستم ذرات)

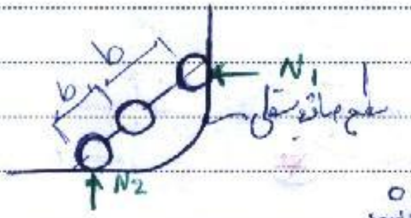
$$\frac{d}{dt}\vec{G} = \frac{d}{dt}\sum m_i \vec{v}_i$$

$$= \sum m_i \vec{a}_i$$

$$\int dG = \int \sum m_i \, \vec{a}_i \, dt = \bar{G}_2 - \bar{G}_1$$

$\Delta G =$ ضربه نیروهای اعمالی به سیستم ذرات

برآیند ضربه نیروهای اعمالی به سیستم ذرات برابر است با تغییرات مومنتم خطی مرکز ثقل



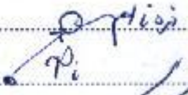
سه گلوله مشابه
از وزن میله های رابط صرف نظر می کنیم
سیستم از وضعیت نشان داده شده رها می شود
مطلوب است سرعت سیستم ذرات وقتی افقی می شود

1) وضعیت نشان داده شده

2) وقتی سیستم ذرات افقی

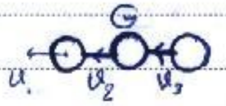
$\Delta U = 0$ کار نیروی N عمود بر مسیر حرکت است

$$\Delta U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$$



$$T = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m \bar{v}^2 + \cancel{\sum \frac{1}{2} m_i \dot{\rho}_i^2} \; 0$$

ρ_i کوچک است و ثابت و $\dot{\rho}$ هم صفر است



$$v_1 = v_2 = v_3 = \bar{v}$$

$$\Delta T = \sum \Delta T_i = 3 \times \frac{1}{2} m (v^2 - 0)$$

سرعت در وضعیت 2 — سرعت در وضعیت 1

$$\Delta V_g = \sum \Delta V_{gi} = -mg(b \sin 45) - mg(2b \sin 45)$$

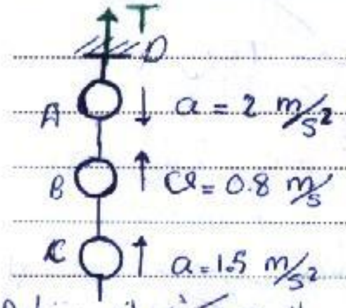
تغییر ارتفاع مرکز ثقل ها

$$\Delta V_e = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{\cancel{3}}{\cancel{2}} \cancel{m} v^2 = -\cancel{3} \cancel{m} g \, b \sin 45 \qquad v = \sqrt{2 g b \sin 45}$$

PAPNO

Subject:
Year. Month. Date. ( )



مثال 1)

$$\sum F_y = m\bar{a}_y = \sum m_i a_{iy}$$

$$T - m_A g - m_B g - m_C g = \sum m_i a_i$$

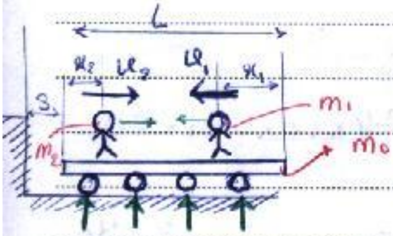
$$= m_A a_A + m_B a_B + m_C a_C$$

مطلوب است کشش طناب در نقطه D

$m_A = 10\,kg \quad m_B = 15\,kg \quad m_C = 18\,kg$

$$T - (10 + 15 + 18) * 9.81 = 10 \times (-2) + 18 \quad (1.5)$$

$$T = 316\ N$$



2 سیستم در حال سکون

دو نفر شروع به حرکت کرده تا یکدیگر را ملاقات کنند

مطلوب است فاصله S برحسب x_1 در لحظه تلاقی دو نفر

$x_2 = 0 \leftarrow x_1 = 0 \leftarrow S = 0 \leftarrow t = 0$

برای سیستم ذرات $\sum F_x = 0$

بقای مومنتم خطی برای سیستم ذرات

$$\int \sum F_x\, dt = \Delta G_x$$

$$\sum G_{1i} = 0 \quad \sum G_{2i}$$

① سیستم در حال سکون $S = x_1 = x_2 = 0$

② وقتی دو نفر یکدیگر را ملاقات می‌کنند

v_1 و v_2 سرعت نسبت به ارابه (سرعت‌ها نسبی هستند).

$$\sum G_{2i} = m_0 \overset{S/t}{v} + m_2(\underset{S/t}{v} + \overset{x_2/t}{v_2}) + m_1(\underset{S/t}{v} - \overset{x_1/t}{v_1}) = 0$$

$$m_0 S + m_2(S + x_2) + m_1(S - x_1) = 0$$

وقتی دو نفر یکدیگر را ملاقات می‌کنند $x_2 = L - x_1$

$$(m_0 + m_2 + m_1)S + m_2(L - x_1) - m_1 x_1 = 0$$

$$S = \frac{(m_1 + m_2)x_1 - m_2 L}{m_0 + m_1 + m_2}$$

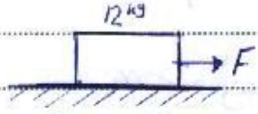
یعنی ارابه تکان نخورد $\left.\begin{matrix} m_1 = m_2 \\ x_1 = \frac{L}{2} \end{matrix}\right\} S = 0$

PAPNO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

مثال) سیستم در $t=0$ ساکن است

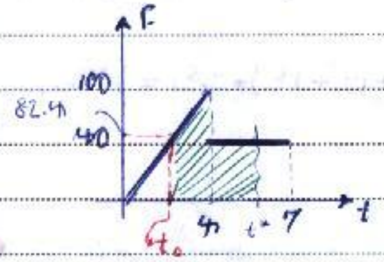


t_0 زمانی که نیروی F بر اصطکاک استاتیک غلبه کند

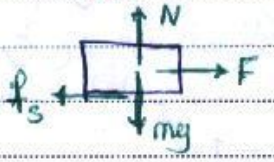
$\mu_s = 0.7 \quad \mu_k = 0.5 \qquad f_{s-max} = \mu_s N \qquad P \geq \mu_s N$

1) مطلوب است سرعت Max جسم

2) کل زمان حرکت جسم



$$\int_{t_0}^{t} \Sigma F_x dt = \Delta G_x$$



$$f_{s-max} = \mu_s N = \mu_s mg = 0.7 \times 12 \times 9.81 = 82.4 N$$

$$0 \leq t \leq 4 \qquad P(t) = \frac{100}{4} t \qquad 82{,}4 = \frac{100}{4} t_0 \Rightarrow t_0 = 3{,}296$$

وقتی $P = P_{max}$ $(t=4)$ سرعت جسم حداکثر خواهد شد

$$\int \Sigma F_x \Delta T = \Delta G_x$$

1) $t = t_0$ سرعت جسم صفر

2) $t = 4$ سرعت جسم Max

$$\int_{t=3{,}296}^{4} (\overset{\frac{100}{4}t}{P} - \mu_k mg)\, dt = \Delta G_x = m(u_2 - \cancel{u_1})$$

$$\frac{100}{8} t^2 \Big|_{3{,}296}^{4} - (0.5)(12)(9.81)(t)\Big|_{3{,}296}^{4} = 12\, u_{max}$$

$$u_{max} = 1{,}896 \ \frac{m}{s}$$

راه اول $\int_{4}^{t^*} \Sigma F_x dt = m u_{max}$

2) زمان توقف جسم در $4 < t^* < 7$

راه دوم $\int_{t_0}^{t^*} \Sigma F_x dt = 0$

1) $t = t_0$

2) $t = t^*$ جسم متوقف شده است

$$\int (P - \mu_k mg) dt = 0$$

PAPNO

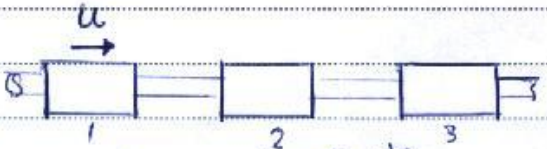
سطح زیر منحنی $\int_{t_0}^{t^*} P\, dt - \int_{t_0}^{t^*} \mu_k mg\, dt = 0$

$$\frac{100+82.4}{2} * (4 - 3.296) + 40(t^* - 4) - .5 \times 12 \times 9.81\ (t^* - 3.296) = 0$$

$$t^* = 5.2$$

مثال) سه استوانه فولادی کاملاً مشابه نشان داده شده می‌توانند بر روی محور افقی حرکت کنند، استوانه 2 و 3 ساکن و استوانه 1 با سرعت u به آنها نزدیک می‌شود

رابطه‌ای برای سرعت استوانه 3 پس از برخورد بر حسب u و ضریب استرداد e بنویسید



استوانه 1 { u قبل از برخورد به 2 ؛ u'_1 پس از برخورد به 2 }

استوانه 2 { 0 قبل از برخورد به 1 ؛ u'_2 پس از برخورد به 1 }

استوانه 3 { 0 قبل از برخورد با 2 ؛ v پس از برخورد با 2 }

برای هر دو عضو در راستای محور استوانه‌ها قانون ضربه و مومنتوم خطی را می‌نویسیم

$$m u_1 = m u'_1 + m u'_2 \qquad m u'_2 = m u''_2 + m u$$

$$e = \frac{u'_2 - u'_1}{u_1} \qquad e = \frac{u - u''_2}{u'_2}$$

$$u = u'_1 + u'_2$$

$$u'_2 - u'_1 = eu \to u'_2 - (u - u'_2) = eu \rightsquigarrow u'_2 = \frac{1}{2}(1+e)u$$

$$u'_2 = u''_2 + u$$

$$e u'_2 = v - u''_2 \qquad v = \frac{1}{2}(1+e)(u'_2) = \frac{1}{4}(1+e)^2 u = u$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

PAPNO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

حل مسائل:

۱) اگر $S(t)=v$ ⇐ $v(t)=?$ $a(t)=?$

پاسخ: $v=\frac{ds}{dt}=S'$ $a=\frac{d^2s}{dt^2}=S''$

در یک حرکت مستقیم الخط موقعیت ذره نسبت به مبدا مختصات بصورت $S(t)=2t^3-3t^2+1$ داده شده مطلوب است: الف) سرعت و شتاب لحظه‌ای در زمان‌های $t_1=1$ و $t_2=2$

پاسخ: $t=0 \rightarrow S=1$ $t=1 \rightarrow S=1$ $t=2 \rightarrow S=5$

سرعت لحظه‌ای $\Rightarrow$ مشتق $\Rightarrow 6t^2-6t=S'$ $v_{(2)}=12$ $v_{(1)}=0\ m/s$

شتاب لحظه‌ای $\Rightarrow$ مشتق $\Rightarrow 12t-6=S''$ $a_{(2)}=18$ $a_{(1)}=6\ m/s^2$

سرعت متوسط $\Rightarrow v_{ave}=\frac{S(2)-S(1)}{t_2-t_1}$

ب) سرعت و شتاب متوسط در فاصله زمانی $t=0$ و $t=2$

پاسخ:

سرعت متوسط $\Rightarrow v_{ave}=\frac{S(2)-S(1)}{t_2-t_1}=\frac{12-8^{\,5-1}}{2}=2\ m/s$

شتاب متوسط $\Rightarrow a_{ave}=\frac{v_{(2)}-v_{(1)}}{t_2-t_1}=\frac{12}{2}=6$

ج) کل مسافت طی شده پس از ۲ ثانیه

پاسخ:

$v=0 \Rightarrow 6t^2-6t=0 \Rightarrow t=0 \quad t=1$

$\Delta S=|\Delta s(t_1,t_0)|+|\Delta S(t_2,t_1)|=|S(1)-S(0)|+|S(2)-S(1)|=6$

چون متحرک در بازه‌ای از مسیر تغییر مسیر داده یعنی سرعت صفر گردیده

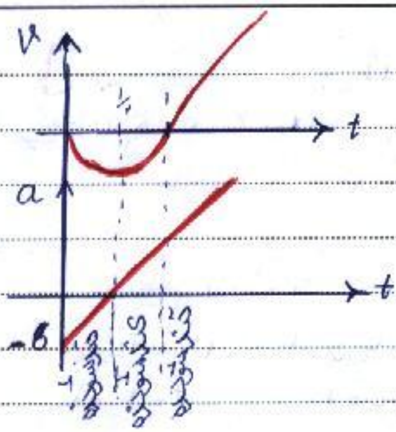
د) زمانی که متحرک مجدداً به مبدا مختصات برمی‌گردد:

پاسخ:

$S(t)=0 \Rightarrow 2t^3-3t^2+1=0 \Rightarrow (t-1)(2t^2-t-1)=0 \Rightarrow t=1,\ t=-\frac{1}{2}$ غ ق

$t=1$

PAPNO



$a \times v > 0$ حرکت تندشونده

$a \times v < 0$ حرکت کندشونده

۱۲) متحرکی با شتاب ثابت $2\ \frac{m}{s^2}$ از حال سکون و از نقطه‌ای به فاصله ۱ متری مبدا در یک حرکت مسیر مستقیم حرکت می‌کند مطلوب است معادلات سرعت و موقعیت نسبت به زمان و مسافت طی شده پس از 10 ثانیه؟

$a = 2$ ثابت

$a(t) = \frac{dv}{dt} \qquad dv = a\,dt \qquad \int_{v=v_0}^{v} dv = \int_{t=0}^{t} a\,dt \Rightarrow v(t) - v(0) = \int_0^t a(t)\,dt$

$$v(t) = v_0 + \int_0^t a\,dt$$

$v(t) = \frac{ds}{dt} \qquad \int_{S_0}^{S} ds = \int_{t=0}^{t} v(t)\,dt \Rightarrow S(t) - S(0) = \int_0^t v(t)\,dt$

$$S(t) = S_0 + \int_0^t v\,dt$$

پاسخ $\Rightarrow$

$v(t) = \int_0^t 2\,dt = 2t \qquad S(t) = 1 + \int_0^t 2t\,dt = 1 + t^2$

$v(t) = 0 \rightarrow 2t = 0 \rightarrow t = 0$

$S=0 \quad S=1 \quad S=0$

$\Delta S = \Delta S(t = 10, 0) = S(10) - S(0) = 100$

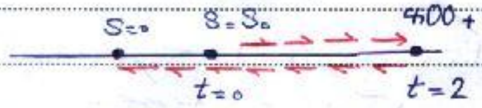
Subject:
Year. Month. Date. ( )

۱۳) در یک حرکت مستقیم الخط $v = 300-75t^2$ است. مطلوب است مسافتی طی شده پس از 3 ثانیه

پاسخ

$$S = S_0 + \int_0^t v\,dt = S(t) = S(0) + \int_0^t 300 - 75t^2\,dt = S_0 - 25t^3 + 300t$$

$$v = 0 \rightarrow 300 - 75t^2 = 0 \qquad t = 2$$



$$\Delta S = |\Delta S(t=2,0)| + |\Delta S(t=3,2)| = |S(2)-S(0)| + |S(3)-S(2)| =$$
$$= |400+S_0-S_0| + |225+S_0-400-S_0|$$
$$= 575$$

۱۴) اگر $a(s) = \checkmark$ ⇐ $S(t) = ?$ $\quad v(t) = ?$ $\quad a(t) = ?$

پاسخ

$$a\,ds = v\,dv$$

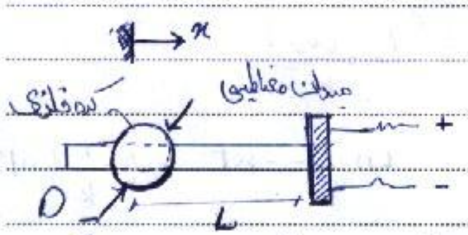
$$\int_{S_0}^{S} a\,ds = \int_{v_0}^{v} v\,dv \Rightarrow \boxed{\frac{1}{2}(v^2 - v_0^2)} \rightarrow v(S) = f(S)$$ v برحسب S

$$v = \frac{ds}{dt} = f(s) \qquad \int_{S_0}^{S} \frac{d(s)}{f(s)} = \int_{t_0}^{t} dt \Rightarrow g(S) = t$$ ← تغییر متغیر

در نتیجه $S(t) = \checkmark$ یعنی S برحسب t بدست آمد

$$v(t) = \frac{ds}{dt} \qquad a(t) = \frac{d^2s}{d^2t}$$

۵)



$$a = \frac{k}{(L-x)^2}$$ (ثابت k)

در شیر برقی بالا پس از وصل سیم به برق میدان مغناطیسی ایجاد شده کره فلزی را جذب می‌کند شتاب کره فلزی متناسب است با عکس مجذور فاصله. مطلوب است سرعت کره فلزی در هنگام برخورد با صفحه مغناطیسی.

$v = ?$

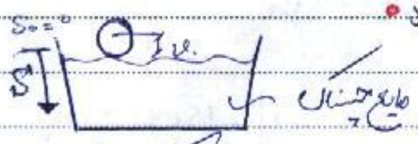
Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$a\,dx = v\,dv$$

$$\frac{k}{(L-x)^2}\,dx = v\,dv \qquad \int_{0}^{L-\frac{D}{2}} \frac{k}{(L-x)^2}\,dx = \int_{v=0}^{v} v\,dv$$

$$\left.\frac{kx}{L(L-x)}\right|_{0}^{L-\frac{D}{2}} = \frac{1}{2}v^2 \qquad v = \sqrt{\frac{k(2L-D)}{LD}}$$

16) گلوله‌ای با سرعت اولیه v_0 در مایع چسبناکی سقوط می‌کند.



الف) مسافتی که گلوله طی می‌کند تا بایستد

ب) مدت زمانی که طول می‌کشد تا سرعت گلوله نصف شود

توضیح) آزمایشات نشان می‌دهد هرچه سرعت گلوله بیشتر باشد مقاومت مایع چسبناک بیشتر است

$$a = -kv \qquad a(v) = \checkmark$$

پاسخ) $S(t) = ?$ $\quad v(t) = ?$ $\quad a(t) = ?$

$$a = \frac{dv}{dt} = -kv \qquad \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{-kv} = \int_{t=0}^{t} dt \qquad -\frac{1}{k}\operatorname{Ln}\frac{v}{v_0} = t$$

$$\operatorname{Ln}\frac{v}{v_0} = -kt \qquad \frac{v}{v_0} = e^{-kt} \qquad v = v_0 e^{-kt}$$

$$S = \cancel{S_0} + \int_0^t v\,dt \Rightarrow S = \int v_0 e^{-kt}\,dt = v_0\left(-\frac{1}{k}e^{-kt}\right)\Big|_0^t$$

$$= v_0\left(-\frac{1}{k}e^{-kt} + \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k}\left(-v_0 e^{-kt} + v_0\right) \Rightarrow$$

الف) $S = \frac{1}{k}(\cancel{-v_0 e^{-\infty}} + v_0) = \frac{v_0}{k} \qquad L = \frac{v_0}{k}$

$$v = v_0 e^{-kt} \Rightarrow \frac{v_0}{2} = v_0 e^{-kt} \qquad \operatorname{Ln}\frac{1}{2} = -kt \qquad t = \frac{1}{k}\operatorname{Ln}(2)$$

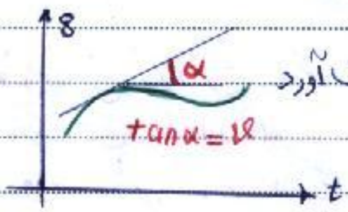
PAPNO

Subject:

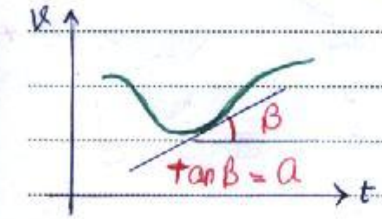
Year. Month. Date. ( )

بجای فرم کلی منحنی تغییر مکان‌ها را داریم !

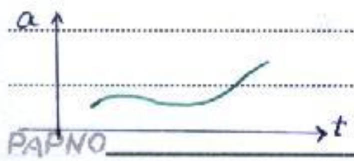
از روی منحنی چگونه می‌توان سرعت و شتاب لحظه‌ای را به دست آورد



شیب منحنی در هر لحظه ← مشتق ← $v = \frac{ds}{dt}$

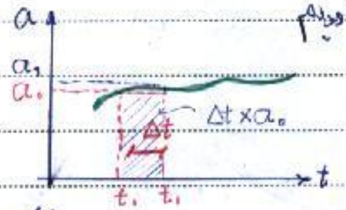


شیب منحنی سرعت در هر لحظه ← مشتق ← $a = \frac{dv}{dt}$



منحنی شتاب

PAPNO



۱ـ گر منحنی $(a-t)$ را داشته باشیم v و S را چگونه به دست آوریم

$$v(t) = v_0 + \int_0^t a\,dt \quad \text{— سطح زیر منحنی } a-t$$

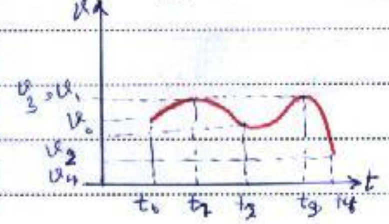
$$v(t_0+\Delta t) = v(t_1) = v(t_0) + \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} a\,dt$$

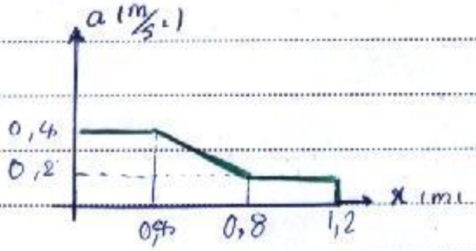
Δt بسیار کوچک $\quad v(t_1) = v_0 + a_0\,\Delta t$

$$v(t_2) = v(t_1+\Delta t) = v(t_0+2\Delta t)$$

$$= v(t_1) + a_1\,\Delta t$$

$\vdots$



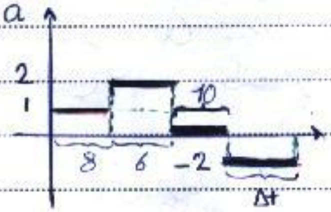


مثال) در حرکت مستقیم الخط یک متحرک سرعت متحرک در مبدأ مختصات برابر $0.8\ m/s$ است. سرعت نره را در انتهای مسیر $x=1.5m$ بیابید

پاسخ)

$$\int_{s=0}^{s=1.2} a\,ds = \int_{v=v_0}^{v} v\,dv \Rightarrow 0.4\times0.4 + \frac{0.4+0.2}{2}\times 0.4 + 0.2\times0.4$$

$$= \frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) = \frac{1}{2}(v^2 - 0.8^2) \Rightarrow v = 1.2\ m/s$$



مثال) ترن فاصله بین دو ایستگاه را با شتاب های روبرو حرکت می‌کند مطلوب است Δt زمان ترمز کردن ترن قبل از رسیدن به ایستگاه دوم

* آیا می‌توان فاصله دو ایستگاه را تعیین نمود (یافت)

پاسخ) $t=0 \rightarrow v_0 = 0$ و $v=0$ سرعت در انتهای مسیر

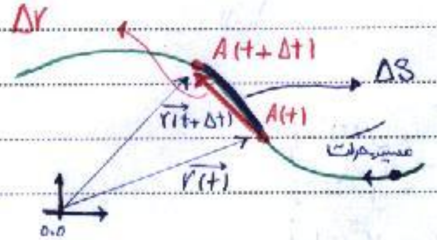
$$a = \frac{dv}{dt} \qquad a\,dt = dv \qquad \underbrace{\int_{t=0}^{t} a\,dt}_{\text{سطح زیر منحنی}} = \int_0^0 dv = 0 \quad \Rightarrow \text{سطح زیر منحنی} = 0$$

$$1 * 8 + 2 * 6 + 0 * 10 - 2 * \Delta t = 0 \qquad \Delta t = 10$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

حرکت منحنی الخط ذره در صفحه :



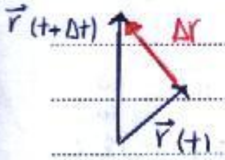
$r(t)$ بردار موقعیت لحظه‌ای ذره نسبت به مبدا

$\Delta(r)$ تغییرات بردار موقعیت

$$\vec{\Delta r} = \vec r(t+\Delta t) - \vec r(t)$$

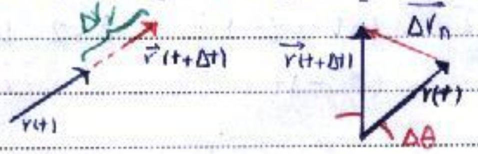
اگر $\Delta t \to 0$ باشد Δr مماس بر مسیر حرکت می‌گردد

بردار سرعت لحظه‌ای $= v = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{d\vec r}{dt} = \dot{\vec r}$



تغییرات هم در اندازه و هم در جهت $\vec r(t)$ ایجاد شده است

تغییرات در جهت (فقط) + تغییرات در اندازه (فقط) =



$\Delta r = \Delta r_p + \Delta r_n$

تغییرات جهت ، تغییرات اندازه

در حرکت ذره به دور یک مسیر دایره‌ای با r ثابت تغییرات فقط در راستای جهت است

بردار سرعت لحظه‌ای : یک بردار آزاد بوده (برای تعریف آن نیازی به مبدأ مختصات نیست) بردار سرعت همواره بر مسیر حرکت مماس است.

بردار شتاب لحظه‌ای $= a = \lim_{\Delta v\to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \dot v = \ddot r$

$|v| = v$ (تندی) اندازه بردار سرعت $= \frac{ds}{dt} = \dot S \Rightarrow$ مطابق کیلومتر ماشین

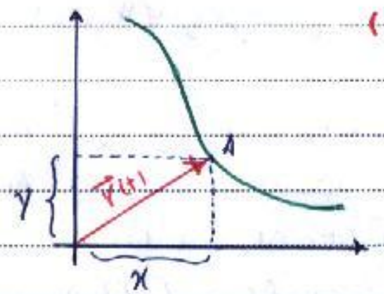
$|a| = a \neq \ddot S$ مشتق v براساس تغییرات فقط اندازه v است و نه جهت $\ddot S$ *

محورهای مختصات در ریاضیات : 1) دکارتی 2) قطبی (استوانه‌ای) $r-\theta$ 3) مماس و عمود بر مسیر حرکت

$n-t$ که B'

PAPNO

بررسی حرکت منحنی الخط ذره در محورهای مختصات دکارتی)



$\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j}$

$\vec{v}(t) = \dot{x}(t)\,\vec{i} + \dot{y}(t)\,\vec{j}$

$\vec{a}(t) = \ddot{x}(t)\,\vec{i} + \ddot{y}(t)\,\vec{j}$

مثال 2/57) در حرکت یک ذره در صفحه $x(t)=3t^2-4t$, $y(t)=4t^2-\frac{1}{3}t^3$

مطلوب است سرعت و شتاب لحظه‌ای در $t=2$

پاسخ)

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$

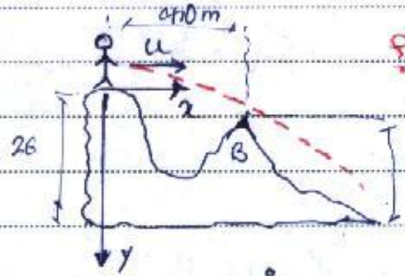
$= (3t^2-4t)\,\vec{i} + (4t^2-\frac{1}{3}t^3)\,\vec{j}$ $\qquad \vec{r} = 4\vec{i} + \frac{30}{4}\vec{j}$

$\vec{v} = (6t-4)\,\vec{i} + (8t-t^2)\,\vec{j}$ $\qquad t=2 \qquad \vec{v} = 8\vec{i} + 12\vec{j}$

$\vec{a} = (6)\,\vec{i} + (8-2t)\,\vec{j}$ $\qquad \vec{a} = 6\vec{i} + 4\vec{j}$

جهت بردار $= \tan^{-1}\frac{y}{x} = \alpha \Rightarrow \text{Arc}\tan\frac{12}{8} = \alpha_u$

مثال 2/67) حداقل u چقدر باشد تا شخص با تپه برخورد نکند؟



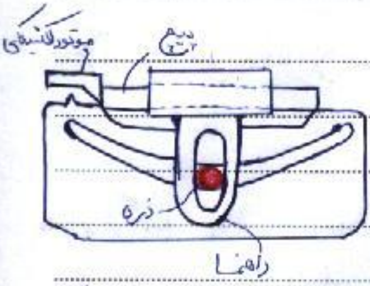
پاسخ) $t=0 \begin{cases} \dot{x} = u \\ \dot{y} = 0 \end{cases}$ $\qquad$ همواره $\begin{cases} \ddot{x} = a_x = 0 & \cancel{F_x} = m\cancel{a_x} \\ \ddot{y} = a_y = g & F_y = ma_y \\ & \cancel{m}g = \cancel{m}a_y \end{cases}$

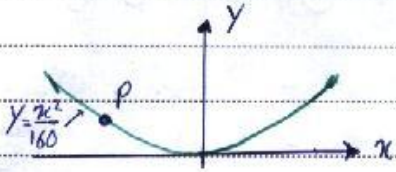
انتگرال گیری) $\begin{cases} \dot{x} = C_1 \\ \dot{y} = gt + C_2 \end{cases}$ $\quad t=0 \begin{cases} C_1 = u \\ C_2 = 0 \end{cases}$ $\quad$ انتگرال $\Rightarrow \begin{cases} x = ut + C_3 \\ y = \frac{1}{2}gt^2 + C_4 \end{cases} \xrightarrow{t=0} C_3 = 0 \quad C_4 = 0$

$\begin{cases} x = ut \\ y = \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$ $\quad$ شرط گذشتن ذره از B صدق کردن B در روابط متقابل است $= \text{Min}\,u$

$\begin{cases} 40 = ut \\ 10 = \frac{1}{2}g(t)^2 \end{cases} \Rightarrow t = ? \Rightarrow u = 28\ \frac{m}{s}$

مثال 2/170)





جا راه اندازی موتور الکتریکی و چرخش پیچ (۲-۲) pin P مقید است درداخل شیار حرکت کند اگر حرکت موتور به نحوی باشد که راهنما با سرعت ۲۰ mm/s حرکت خطی داشته باشد (بصورت ثابت) در $x=60$ شتاب و سرعت لحظه ای pin P را پیدا کنید

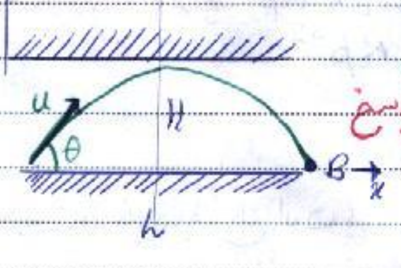
پاسخ ۱) $\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}$ $\quad v = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}$ $\quad$ ثابت $\dot{x} = ۲۰ \ \frac{mm}{s}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{۲x}{160} \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\cdot\boxed{\frac{dx}{dt}} = \frac{x}{80}\dot{x} \qquad \dot{y} = \frac{۲x\dot{x}}{160}$$

$$y'' = \frac{x'^2 + x x''}{80} \qquad x'' = 0 \text{ شتاب}$$

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \left(\frac{x\dot{x}}{80}\right)^2} \Rightarrow \sqrt{(۲۰\times10^{-۳})^2 + \left(\frac{60\times 20\times 10^{-3}}{80}\right)^2}$$

مثال پرتابه ای با سرعت u در امتداد یک طول پرتاب می شود مطلوب است حداقل مقدار u و زاویه θ مربوط به نحوی که پرتابه بدون برخورد به سقف به نقطه B برسد



پاسخ ۲) $v_x = u\cos\theta$ سرعت در طول مسیر ثابت است

$v_y =$ متغیر

$F_x = ma_x \Rightarrow v_x =$ ثابت

$F_y = ma_y = mg \neq 0 \quad v_y$

$\boxed{L = (u\cos\theta)t}$ $\quad t = \frac{L}{u\cos\theta}$, $a_y = \frac{dv_y}{dt} \Rightarrow \int_0^t a_y = \int_{u\sin\theta} dv_y$

$-gt = v_y - u\sin\theta$

$v_y(t) = -gt + u\sin\theta$

اوج) $\boxed{0 = -\frac{gt}{2} + u\sin\theta}$

جواب:
$\theta = \frac{\pi}{2} \quad u = \infty$

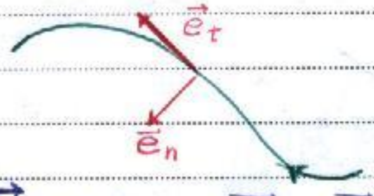
$u_{min} \rightarrow \theta = \pi/4$

$u_{min} = \sqrt{gL}$

PAPNO

$$0 = -g\frac{L}{2u\cos\theta} + u\sin\theta \qquad \cancel{2}u^2 = \frac{gL}{2\sin\theta\cos\theta} = \frac{gL}{\sin ۲\theta} \qquad u = \sqrt{\frac{gL}{\sin ۲\theta}}$$

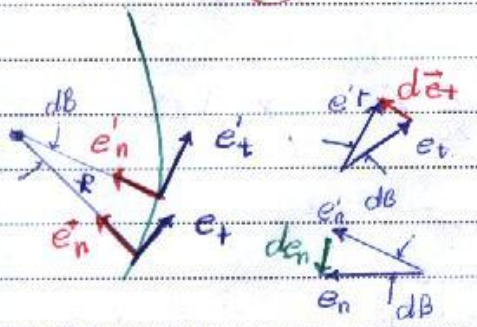
حرکت منحنی الخط ذره در صفحه در محورهای مختصات مماس و عمود بر مسیر حرکت (n–t)



• بردار یکه v_t همواره مماس بر مسیر حرکت و در امتداد حرکت و بردار یکه v_n همواره عمود بر مسیر حرکت و به سمت مرکز انحنا است

$$\vec{v} = v e_t \qquad |\vec{e}_t| = |\vec{e}_n| = 1$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} = \overbrace{\frac{dv}{dt}}^{\dot{v}} e_t + v\frac{d\vec{e}_t}{dt}$$



$$de_t = |\vec{e}_t|\, d\beta\, \vec{e}_n \qquad \frac{d\vec{e}_t}{dt} = \frac{d\beta}{dt}\vec{e}_n = \dot{\beta} e_n$$

$$de_n = -\dot{\beta} e_t$$

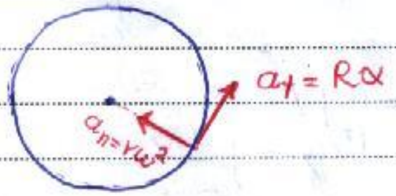
$$\vec{v} = v\vec{e}_t \qquad \dot{\vec{v}} = \vec{a} = \dot{v}\vec{e}_t + v\dot{\beta}\vec{e}_n$$

$$\vec{a} = a_t\vec{e}_t + a_n\vec{e}_n$$

ناشی از تغییر جهت بردار سرعت $a_n = v\dot{\beta} = R\dot{\beta}^2$ و ناشی از تغییر اندازه بردار سرعت $a_t = \dot{v}$, $R\ddot{\beta} = \ddot{s}$

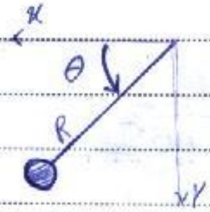
$$ds = R\,d\beta \qquad \dot{v} = \frac{ds}{dt} = R\dot{\beta}$$

حرکت دور دایره با شعاع ثابت :



$$a_n = r\omega^2 = \frac{v^2}{r}$$

(ω سرعت زاویه‌ای)



$R = 2\,m$

مثال ۱) در $\theta = 60$ مقادیر ذیل موجود است $\ddot{\theta} = 2.045\ \frac{Rad}{s}$ $\dot{\theta} = 2\ \frac{Rad}{s}$

رابطه‌ای برای موقعیت جرم در زمان‌های مختلف بنویسید.

حل به روش محورهای دکارتی

پاسخ) $x = R\cos\theta \qquad y = R\sin\theta$

$$\vec{r}(t) = x\vec{i} + y\vec{j} = (R\cos\theta)\vec{i} + (R\sin\theta)\vec{j}$$

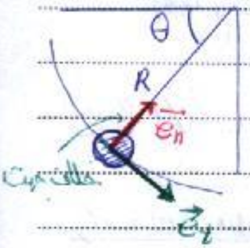
یادآوری) $$\frac{d}{dt}\cos\theta = \underbrace{\frac{d}{d\theta}\cos\theta}_{(-\sin\theta)\dot{\theta}} \times \frac{d\theta}{dt}$$

مشتق $$v(t) = \dot{r}(t) = R(-\dot{\theta}\sin\theta)\vec{i} + R(\dot{\theta}\cos\theta)\vec{j}$$

$$a(t) = \ddot{r}(t) = R[(-\ddot{\theta}\sin\theta) - \dot{\theta}^2\cos\theta]\vec{i} + R[(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta)]\vec{j}$$

$$if = \theta = 60 \Rightarrow \begin{cases} a_x = -4.09\ \frac{\sqrt{3}}{2} - 4 \\ a_y = \frac{4.09}{2} - \frac{4\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

حل به روش محورهای مماسی و عمودی

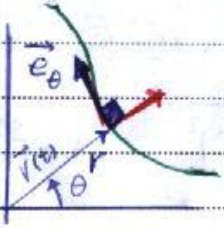


$$\vec{r}(t) = -R\vec{e}_n = -R(-\dot{\theta}\vec{e}_t) = R\theta\vec{e}_t$$

$$v(t) = -R(-\dot{\theta}\vec{e}_t) = R\dot{\theta}\vec{e}_t$$

$$a(t) = R\ddot{\theta}\vec{e}_t + R\dot{\theta}^2\vec{e}_n$$

• بررسی حرکت صفحه‌ای الحاق ذره در صفحه در محورهای مختصات قطبی $((r-\theta))$



دو بردار یکه $\vec{e}_\theta$ و $\vec{e}_r$ را داریم که $\vec{e}_r$ در امتداد R و $\vec{e}_\theta$ در راستای افزایش زاویه θ و عمود بر e_r

لزوماً e_θ بر مسیر حرکت مماس نیست (مهم)

$|e_r| = |e_\theta| = 1$

$\vec{r}(t) = r\vec{e}_r$ مشتق $\dot{r}(t) = \dot{r}\vec{e}_r + r\,e_r(\dot{\theta}\vec{e}_\theta)$

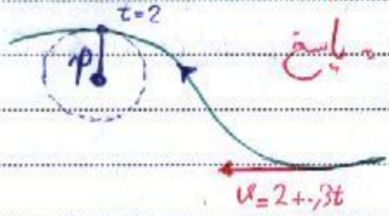
نکته = $\begin{cases} \dot{e}_r = \dot{\theta}e_\theta \\ \dot{e}_\theta = -\dot{\theta}e_r \end{cases}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\vec{r}(t) = r\vec{e}_r$$
$$\vec{v}(t) = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$$
$$\vec{a}(t) = \ddot{r}\,\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\,e_\theta + \dot{r}\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + r\ddot{\theta}\,\vec{e}_\theta - r\dot{\theta}^2\,\vec{e}_r$$
$$= (\ddot{r} + r\dot{\theta}^2)\,\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\,\vec{e}_\theta$$

$\begin{cases} v_r = \dot{r} \\ v_\theta = r\dot{\theta} \end{cases}$ $\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \end{cases}$ $a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2}$ $v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2}$

مسأله) ذره P در حرکت منحنی الخط در صفحه با سرعت $v = 2 + 0.3t$ در حرکت است در $t = 2$ شتاب کل ذره $2.4\ m/s^2$ است مطلوب است شعاع انحنای مسیر حرکت در $t = 2$



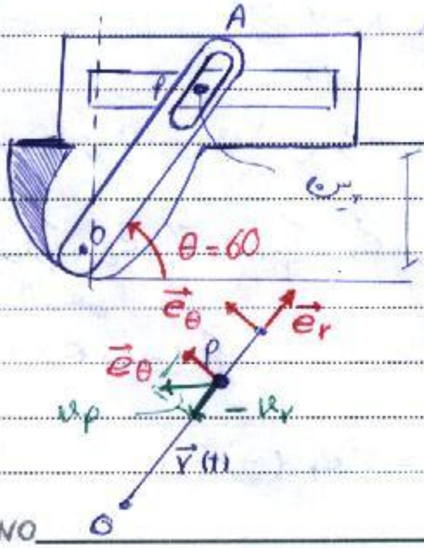
پاسخ: $\vec{a} = a_t\vec{e}_t + a_n\vec{e}_n$

$a_t = \dot{v} = \rho\ddot{\beta}$ شتاب کل $= \sqrt{a_n^2 + a_t^2}$

$a_n = \rho\dot{\beta}^2 = \dfrac{v^2}{\rho}$ $\dot{v} = 0.3$

شتاب کل $= 2.4\ m/s^2 = \sqrt{\left(\dfrac{v^2}{\rho}\right)^2 + (\dot{v})^2} \Rightarrow 2.4 = \sqrt{\left(\dfrac{2.6}{\rho}\right)^2 + (0.3)^2}$

مثال 2/137)



$\omega_{OA} = \dot{\theta} = 2\ Rad/s$

در $\theta = 60$ مقادیر v_p و a_p را بیابید؟

پاسخ) $\vec{v} = \underbrace{\dot{r}}_{v_r}\,\vec{e}_r + \underbrace{r\dot{\theta}}_{v_\theta}\,\vec{e}_\theta$

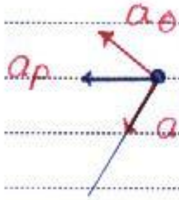
$v_p = \sqrt{(\dot{r})^2 + (r\dot{\theta})^2}$ $r = \dfrac{200}{\sin\theta}$

حرکت مقید $\begin{cases} v_p\cos\theta = \dot{r} \\ v_p\sin\theta = r\dot{\theta} \end{cases}$

$v_p = \dfrac{r\dot{\theta}}{\sin\theta} = \dfrac{\frac{200}{\sin\theta} \times 2}{\sin\theta} \Rightarrow \theta = 60 = \dfrac{1600}{\sqrt{3}}\ m/s$

PAPNO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

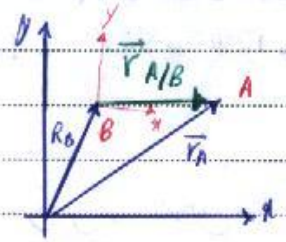


حرکت مقید
$$\begin{cases} a_p\cos\theta = -\ddot{r} + r\dot{\theta}^2 \\ a_p\sin\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \end{cases}$$

$$2\left(\frac{-800}{3}\right)\times 2 = \frac{3200}{3} \Rightarrow a_p = \frac{-6400}{3\sqrt{3}}$$

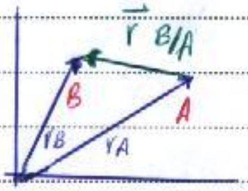
از رابطه قبلی $\dot{r} = -\frac{1600}{\sqrt{3}}\cos 60 = -\frac{800}{\sqrt{3}}$

● حرکت نسبی ذره در صفحه)



$r_A = r_B + r_{A/B}$ — موقعیت ذره A نسبت به B

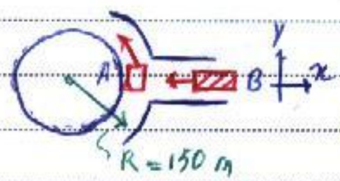
$$\begin{cases} \vec{a}_A = \vec{a}_B + a_{A/B} \\ \vec{v}_A = \vec{v}_B + v_{A/B} \end{cases}$$



$$\begin{cases} r_B = r_A + r_{B/A} \\ \vec{a}_B = \vec{a}_A + a_{B/A} \\ \vec{v}_B = \vec{v}_A + v_{B/A} \end{cases}$$

➡ $\vec{r}_{B/A} = -\vec{r}_{A/B}$ $\quad \vec{v}_{B/A} = -\vec{v}_{A/B}$ $\quad \vec{a}_{B/A} = \vec{a}_{A/B}$

مثال (2/183



$v_B = 81\ \frac{km}{h}$ ، ثابت $a_B = -3\ \frac{m}{s^2}$

$v_A = 54\ \frac{km}{h}$ ، ثابت

سرعت و شتاب خودرو B نسبت به راننده A

$v_{B/A} = ?$ $\quad a_{B/A} = ?$

$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A}$ $\quad \vec{v}_{B/A} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$

$\vec{v}_{B/A} = -\left(81 * \frac{5}{18}\right)\vec{i} - 54 * \frac{5}{18}\ \vec{j}$ $\quad v_{B/A} = \sqrt{\left(81 * \frac{5}{18}\right)^2 + \left(54 * \frac{5}{18}\right)^2}$

$= 97 * \frac{5}{18}\ m/s$

PAPNO

Subject:
Year. Month. Date.

$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}$ $\qquad a_{B/A} = a_B - a_A$ $\quad \frac{v^2}{R}$

$= -(-3\vec{i}) - \left(\frac{(54 \times \frac{5}{18})^2}{150}\right) i$

$a_{B/A} = \sqrt{\quad}$

مسائل 19 - 20 - 22 - 39 - 51 - 62 - 71 - 72 - 75 - 83 - 97

200 - 155 - 147 - 142 - 139 - 138 - 124 - 117 - 110

مثال) در تعقیب حرکت راکتی به وسیله رادار در لحظه مورد نظر نتایج زیر ثبت شده است

شعاع انحنای مسیر حرکت در لحظه ثبت نتایج

$r = 10.5$ km

$\dot{r} = 480$ m/s

$\dot{\theta} = 0$

$\ddot{\theta} = 0.00720$

$\vec{V} = r\vec{e}_r$

$\vec{\dot{r}} = v = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$

$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta$ $\qquad$ اندازه $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$

$\vec{V} = v\vec{e}_t$

$\vec{a} = \dot{v}\vec{e}_t + v\dot{\beta}\vec{e}_n$ $\quad \frac{v^2}{\rho}$

$\rho d\beta = ds$

$\rho\dot{\beta} = v$

$\dot{\beta} = \frac{v}{\rho}$ شعاع انحنای مسیر

$v \to \frac{dV}{dt} = a_t \qquad v = \sqrt{(\dot{r})^2 + (r\dot{\theta})^2}$ $\qquad$ اندازه v

$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{2\dot{r}\ddot{r} + 2(\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})(r\dot{\theta})}{2\sqrt{(\dot{r})^2 + (r\dot{\theta})^2}}$ $\qquad$ در لحظه ثبت نتایج $a_t = \frac{2\dot{r}\ddot{r}}{2\dot{r}} = \ddot{r}$

PAPNO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$a=\sqrt{a_t^2+a_n^2}=\sqrt{a_r^2+a_\theta^2}$$

$a_t \to \ddot r$ $\quad a_n \to \frac{v^2}{\rho}$ $\quad a_r \to \ddot r - r\dot\theta^2 = \ddot r$ $\quad a_\theta \to r\ddot\theta + 2\dot r\dot\theta = r\ddot\theta$

$$a=\sqrt{(\ddot r)^2+\left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}=\sqrt{(\ddot r)^2+(r\ddot\theta)^2}$$

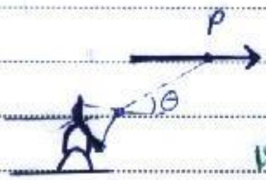
$\dot r \sim v$ $\quad \frac{v^2}{\rho}=r\ddot\theta \qquad \frac{\dot r^2}{\rho}=r\ddot\theta \Rightarrow \rho=\frac{\dot r^2}{r\ddot\theta}=\frac{(480)^2}{(10.5\times10^3)(0.0012)}$

$\rho = 3047\ m$

1.133 (تمرین) $\qquad \theta=60 \rightarrow \dot\theta=-0.02$

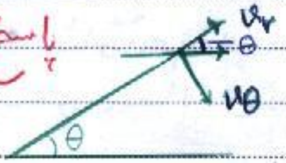
مطلوب است در لحظه مورد نظر سرعت افقی هواپیما و $\ddot r$

v_p = سرعت افقی هواپیما $\qquad \ddot r = ?$



$$v=\dot r\vec e_r + r\dot\theta\vec e_\theta$$

پاسخ



$v_r\sin\theta = v_\theta\cos\theta$

$\dot r\sin\theta = r\dot\theta\cos\theta$

$\dot r\sin 60 = \frac{10\times10}{\sin60}(0.02)\cos60$

$$v_p=\sqrt{(\dot r)^2+(r\dot\theta)^2}$$

ب) $\vec a = a_r\vec e_r + a_\theta e_\theta = 0 \Rightarrow a_r = 0 = \ddot r - r\dot\theta^2 \Rightarrow \ddot r = r\dot\theta^2$

$a_\theta = 0 = r\ddot\theta + 2\dot r\dot\theta$

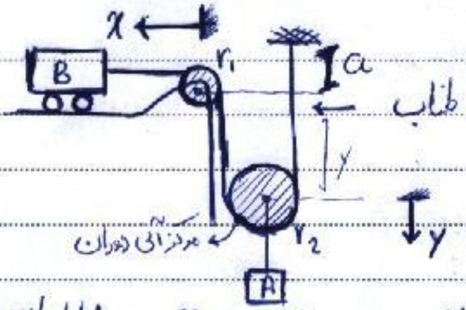
$= \frac{(10\times10)^3}{\sin60}(-0.02)^2$

PAPNO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

* حرکت مقید ذرات متصل به هم ۱



طول طناب $L =$ طول طناب $x + \frac{\pi r_1}{2} + y + \pi r_2 + y + a$ طول طناب همیشه ثابت است

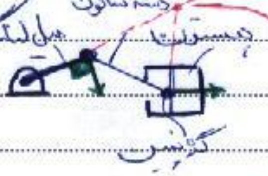
پس مشتق طول هم برابر صفر است

$$\frac{dL}{dt} = 0 \rightarrow \dot{x} + \dot{y} + \dot{y} = 0 \qquad \dot{x} = -2\dot{y} \Rightarrow \boxed{v_B = 2v_A}$$

اگر x با گذشت زمان زیاد شود y با گذشت زمان کم می‌شود

$$\boxed{a_B = 2a_B}$$

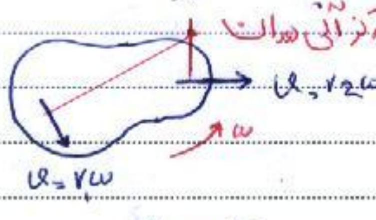
* سرعت نسبی طناب نسبت به قرقره به صورت لحظه‌ای صفر است



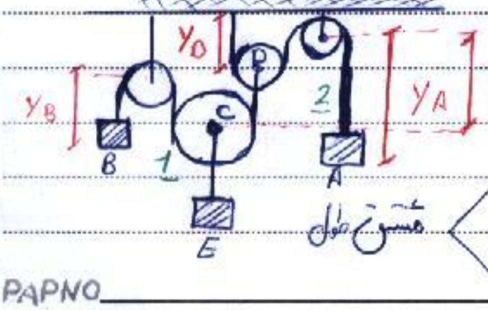
مرکز آنی دوران دسته شاتون

* دسته شاتون هم دوران دارد هم انتقال

* پیستون فقط انتقال دارد



تحلیل فیزیکی مرکز دوران آن است که سرعت در آن لحظه صفر است



مثال: طول طناب 1 $\Rightarrow L_1 = y_B + y_C + (y_C - y_D) +$ مقدار ثابت

طول طناب 2 $L_2 = y_D + y_D + y_A +$ مقدار ثابت

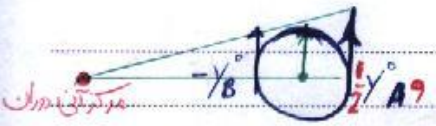
مشتق طول

$$\dot{y}_B + 2\dot{y}_C - \dot{y}_D = 0 \quad \times 2$$

$$2\dot{y}_D + \dot{y}_A = 0$$

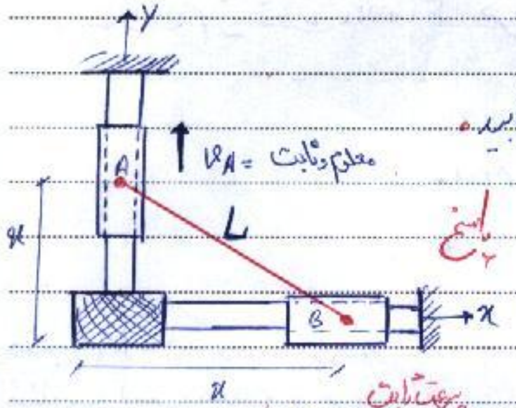
PAPNO

$$2\dot{y}_B + 4\dot{y}_C + \dot{y}_A = 0$$



مثال)

v_A ثابت و معلوم رابطه ای برای شتاب و سرعت نقطه B بیابید.



پاسخ

$$x^2 + y^2 = L^2$$

مشتق $\Rightarrow 2\dot{x}x + 2\dot{y}y = 0 \qquad \dot{y} = v_A$

$$\dot{x} = -\frac{y}{x}\dot{y} = -\frac{y}{x}v_A = v_B$$

سرعت ثابت

$$\cancel{2}\ddot{x}x + \cancel{2}\dot{x}^2 + \cancel{2\ddot{y}y} + \cancel{2}\dot{y}^2 = 0$$

$$\ddot{x}x = -\dot{x}^2 - \dot{y}^2$$

$$\dot{x} = -\frac{y}{x}v_A \rightarrow v_B$$

$$\ddot{x} = a_B = \frac{1}{x}\left[-\left(\frac{y}{x}v_A\right)^2 - v_A^2\right]$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

فصل سوم ۱

سینتیک حرکت ذره

بررسی قانون دوم نیوتون $F=ma$ در محورهای مختلف مختصاتی

دکارتی
محورهای مختصاتی $\Rightarrow \Sigma F_x = m a_x \quad \Sigma F_y = m a_y$

$r-\theta$ محورهای مختصاتی $\Rightarrow \Sigma F_r = m a_r \quad \Sigma F_\theta = m a_\theta$

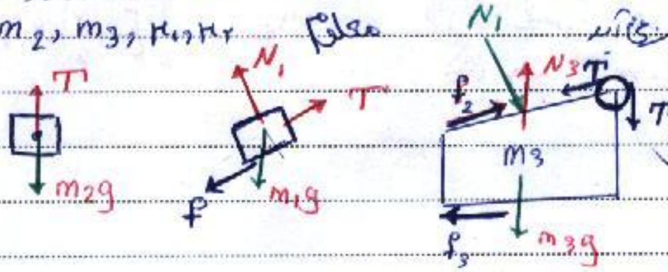
$n-t$ محورهای مختصاتی $\Rightarrow \Sigma F_n = m a_n \quad \Sigma F_t = m a_t$

مثال) سیستم از حال سکون رها می‌شود
مطلوب است شتاب هر جرم

$\alpha, m_1, m_2, m_3, \mu_1, \mu_2$ معلوم

جرم m_2 به سمت پایین می‌رود

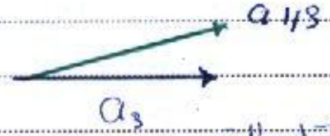
ترسیم دیاگرام آزاد نیرو

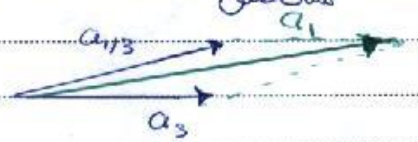


شتاب جرم m_1 نسبت به m_3

$\vec{a}_1 = \vec{a}_3 + \vec{a}_{1/3}$

شتاب نسبی





قانون دوم نیوتون فقط و فقط برای شتاب‌های مطلق صادق است

جرم $m_2 \rightarrow m_2 g - T = m_2 a_2$

جرم در راستای سطح $m_1 \rightarrow T - m_1 g \sin\alpha - f = m_1 \left(a_{1/3} + a_3 \cos\alpha \right)$

$a_{2/3} = a_2 \quad a_{1/3} = a_{2/3} = a_2$ ✓

جرم m_1 در راستای عمود بر سطح $\Rightarrow N_1 - m_1 g \cos\alpha = (0 - a_3 \sin\alpha \quad)$

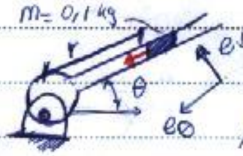
شتاب مطلق جرم m_1 عمود بر سطح شیب دار

$f = \mu_1 N_1$

در راستای افق m_3 جرم $\Rightarrow -f_3 + f\cos\alpha + N_1 \sin\alpha - T\cos\alpha = m_3 a_3$

در راستای قائم m_3 جرم $\Rightarrow N_3 - N_1\cos\alpha + f\sin\alpha - T - T\sin\alpha - m_3 g = 0$

$f_3 = \mu_2 m_3$



مسأله ۵

$\dot{r} = -1.2$ $\qquad \dot{\theta} = 3\ \frac{Rad}{s}$

سرعت ذره نسبت به لوله $1.2\ m/s$ در $\theta = 30^\circ$ نیروی عکس العمل وارده از دیواره لوله به ذره را محاسبه کنید.

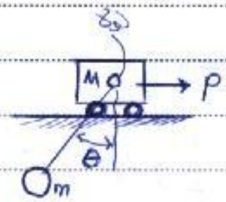
پاسخ

$\Sigma F_r = m a_r \rightarrow -mg\sin\theta = m a_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$

$\Sigma F_\theta = m a_\theta \rightarrow N - mg\cos\theta = m a_\theta = m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})$

$N = m(g\cos\theta + 2\dot{r}\dot{\theta})$ $\qquad N = 0.1(9.81\cos 30 + 2(-1.2)(3))$

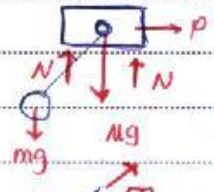
$N = 0.129\ N$

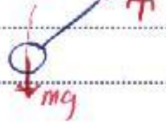


زاویه‌ای که نخ با محور قائم می‌سازد چقدر است؟

$\Sigma F_x \Rightarrow\ = m a_x$ $\qquad \Sigma F_y = m a_y$

$P = (m + M)a$ $\qquad N = mg + Mg$



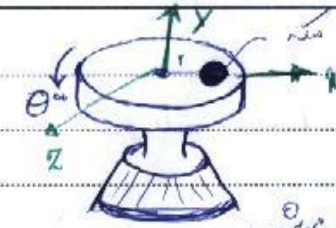


$\Sigma F_x = m a_x \quad T\sin\theta = ma$

$\Sigma F_y = m a_y \quad T\cos\theta = mg$

$\left\{ \tan\theta = \frac{a}{g} = \frac{\frac{P}{m+M}}{g} \right.$

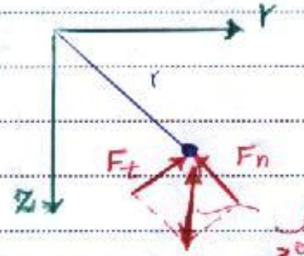
Subject:
Year. Month. Date. ( )



مثال) μ_s ضریب اصطکاک استاتیکی بین سکه و سطح

سیستم با شتاب زاویه ای ثابت $\ddot\theta$ شروع به چرخش می‌کند

سیستم از حال سکون شروع به حرکت می‌کند پس از چند دور سکه از روی سطح جدا می‌شود.



$$F = \sqrt{F_t^2 + F_n^2} = \mu_s N = \mu_s mg$$

$$F_t = ma_t = m(\rho\ddot\beta)$$

$$F_n = ma_n = m(\rho\dot\beta)^2 = m\frac{v^2}{\rho}$$

$$F_r = ma_r = m(\cancel{\ddot r} - r\dot\theta^2)$$

$$F_\theta = ma_\theta = m(r\ddot\theta + \cancel{2\dot r\dot\theta})$$

$\dot r$ و $\ddot r$ صفر است چون شعاع تغییر نمی‌کند

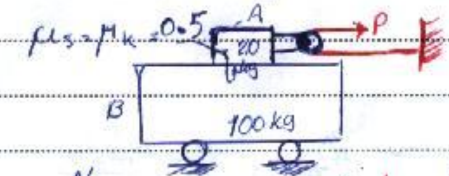
$$\alpha = \frac{d\dot\theta}{dt} = \ddot\theta = \text{ثابت}$$

انتگرال $\dot\theta = \alpha t + C_1 \xrightarrow[\dot\theta=0]{t=0} C_1 = 0 \Rightarrow \dot\theta = \alpha t$

$$f = \sqrt{(mr\ddot\theta)^2 + (mr(\ddot\theta t)^2)^2} = \mu_s mg$$

$\dot\theta = \alpha t$ انتگرال $\Rightarrow \theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 + C_2 \Rightarrow \begin{cases} t=0 \\ \theta=0 \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 \qquad t^2 = \frac{2\theta}{\ddot\theta}$

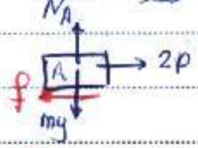
$$f = \sqrt{(mr\ddot\theta)^2 + \left(mr\ddot\theta\,\frac{2\theta}{\ddot\theta}\right)^2}$$



3/18) مطلوب است شتاب a_A و a_B در دو حالت

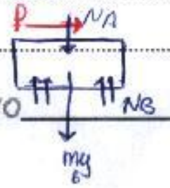
$P = 60$ و $P = 40$

پاسخ) $f_{s\,max} = \mu_s N_A = \mu_s m_A g = (0.5)(20)(9.81) = 98.1$ N



$$2P - f = m_A a_A$$

$$f = m_B a_B$$

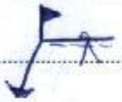


در حالت اول $P = 40$, $2P = 80$ $\quad 80 < 98.1 \; f_{max}$

دو جسم نسبت به هم حرکت نمی‌کنند

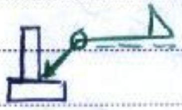
PAPNO

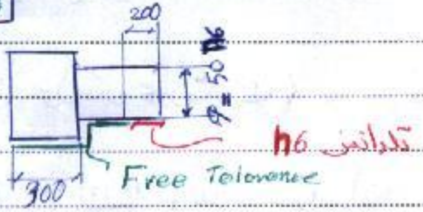
Subject:
Year. Month. Date.



جوش پرچمی ▶ یعنی جوشکاری در محل استقرار قطعه (سایت) انجام گیرد.

جوش حلقوی) یعنی از یک نقطه جوشکاری شروع و به همان نقطه انتها یابد





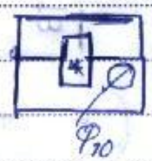
نقشه‌های مونتاژی جوش کاری ◀ در مورد نقشه های جوش استاندارد نقشه ساخت، مونتاژ را روی یک کاغذ می‌کشند

چون در این مرحله دارای مراحل مونتاژ و ساخت هستیم (به علت وجود اعوجاج و ...) نقشه ~~[illegible]~~ جوش و ساخت را در ~~[illegible]~~ یک کاغذ می‌کشیم

اگر تعداد قطعاتی که مونتاژ - جوشکاری می‌شوند زیاد باشد

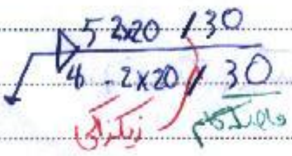
اگر تعدادی از قطعات به وسیله جوشکاری و تعدادی دیگر به روش‌های دیگر مونتاژ شوند

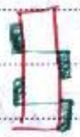
در هر یک از دو حالت فوق نقشه مونتاژی نقشه ساخت جدا ترسیم می‌شوند مانند جلسه گذشته منتها در نقشه‌های ساخت قسمت‌هایی که پس از جوشکاری انجام می‌شوند را مشخص می‌کنیم



سوراخ Φ10 *
پس از جوشکاری انجام می‌شود

صفحه ۴۸ و ۴۹





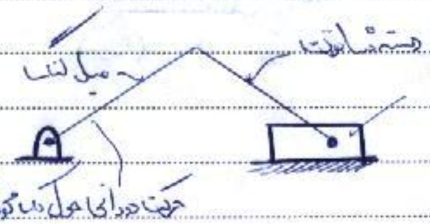
PAPNO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

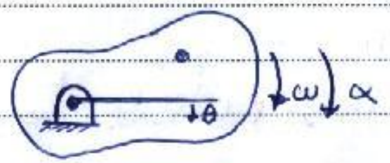
فصل پنجم

سینماتیک ذره جسم صلب

ذره < سینماتیک / سینتیک



حرکت دورانی حول یک محور ثابت)



سرعت زاویه‌ای $\omega = \frac{d\theta(t)}{dt}$ $\frac{rad}{sec}$

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{t=0}^{t} \omega dt \qquad \theta = \theta_0 + \int_0^t \omega dt$$

$$S(t) = S_0 + \int_0^t v dt$$

شتاب زاویه‌ای $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$ $\frac{rad}{s^2}$

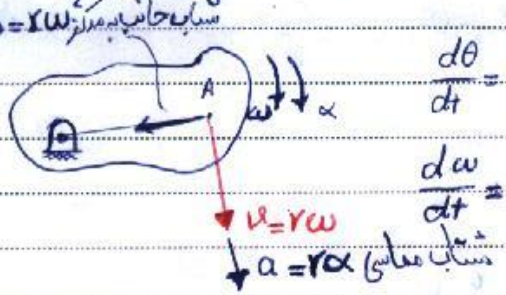
$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_{t=0}^{t} \alpha dt$$

$$\omega = \omega_0 + \int_0^t \alpha dt$$

$$v(t) = v_0 + \int_0^t \alpha dt$$

$\vec{\alpha}$ و $\vec{\omega}$ بردارهای آزاد هستند

$a_n = r\omega^2$ شتاب جانب به مرکز



$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \rightarrow d\theta = \omega dt$$

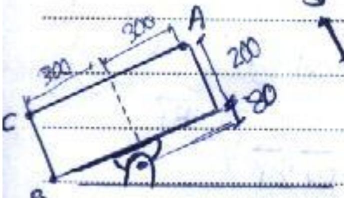
$$\frac{d\omega}{dt} = \alpha \rightarrow d\omega = \alpha dt$$

$$v = \vec{r} \times \vec{\omega} \qquad \vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

$$a_t = \vec{\alpha} \times \vec{r}$$

PAPNO

Subject:
Year. Month. Date. ( )



y , x

اگر ضلع BC دارای سرعت زاویه‌ای ثابت $6\ \frac{Rd}{s}$ در جهت عقربه‌های ساعت باشد مطلوب است

$v_A = ?$

$a_A = ?$

$\omega = -6k$

$\vec{v}_A = \vec{\omega} \times \vec{r} = (-6k)(0.280\,j + 0.300\,i)$

$v_A = -(-6)(0.280)\,\vec{i} + (-6)(0.30)\,\vec{j} = 1.68\,i - 1.8\,j$

$a_A = a_t + a_n = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} = (-6\vec{k})(1.68\,i - 1.8\,j)$
$= -10.08\,j - 10.8\,i$

حرکت کلی جسم صلب در صفحه، ترکیبی است از یک حرکت انتقالی $AB \rightarrow A'B''$ بعلاوه یک حرکت دورانی حول یک محور ثابت A' به اندازه زاویه θ و سرعت و شتاب زاویه ω و α

$\Delta r_{B/A}$ حرکت دورانی حول یک محور ثابت (A)

چون B را نسبت به A می‌سنجیم یعنی مبدا (A) ثابت است $AB \rightarrow$

$\Delta \vec{r}_B = \Delta \vec{r}_A + \Delta \vec{r}_{B/A}$

مشتق $v_B = v_A + v_{B/A} = v_A + \vec{\omega} \times \vec{r}$

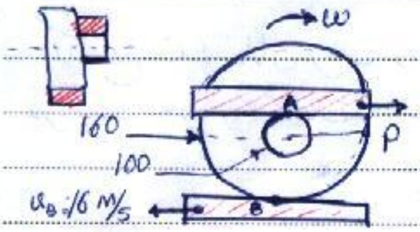
$a_B = a_A + a_{B/A} = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \vec{r} + \omega \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

(روابط سینماتیکی بین دو نقطه دلخواه از جسم صلب)

PAPNO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال ۱
با فرض غلتش مطلوب است سرعت نقطه P



$$\vec{v}_P = \vec{v}_B + \vec{v}_{P/B} = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$\vec{BP}$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B} = v_B + \omega \times r$$

BA

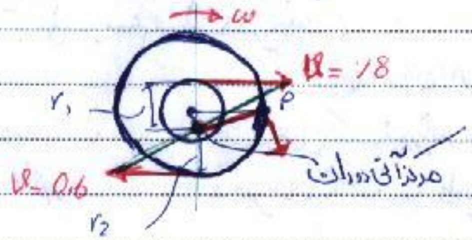
$$0/8\, i = (-0/6\, \vec{i}) + (-\omega \vec{k}) \times (0.260\, \vec{j})$$

$$\omega = \frac{1.4}{0.26}$$

عمود های سرعت

$$v_P = -0/6\, i + \left(\frac{1.4}{0.26}\right) \times (0/160\, \vec{j} + 0.160\, \vec{i})$$

$$\vec{v}_P = 0.2\, \vec{i} - 0.8\, \vec{j}$$



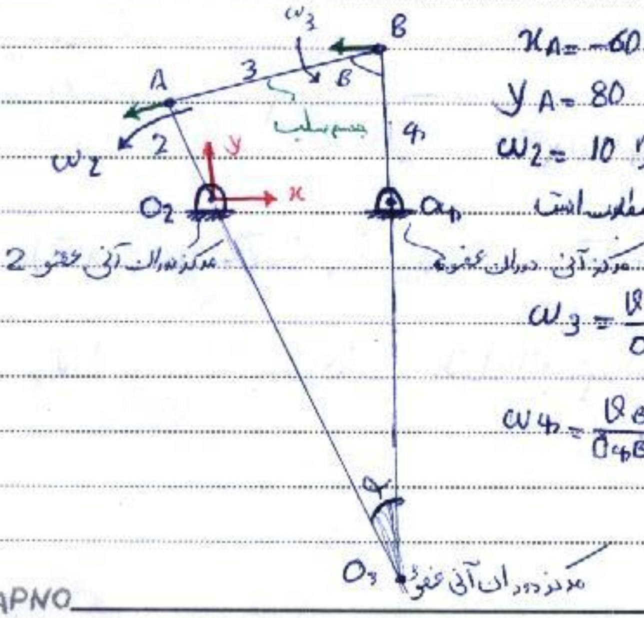
$$r_1 + r_2 = 260 \times 10^{-3}$$

$$v_A = r_1 \omega = 0/8$$

$$v_B = r_2 \omega = 0/6$$

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{8}{6}$$

مکانیزم چهار عضوی



$x_A = -60$

$y_A = 80$

$\omega_2 = 10\ \frac{rad}{s}$

$O_4B = 180$

$AB = 260$

$O_2O_4 = 180$

ω_3, ω_4 مطلوب است

$$\omega_3 = \frac{v_{A=1}}{O_3A} \qquad v_B = \omega_3 \times O_3B$$

$$\omega_4 = \frac{v_B}{O_4B}$$

PAPNO

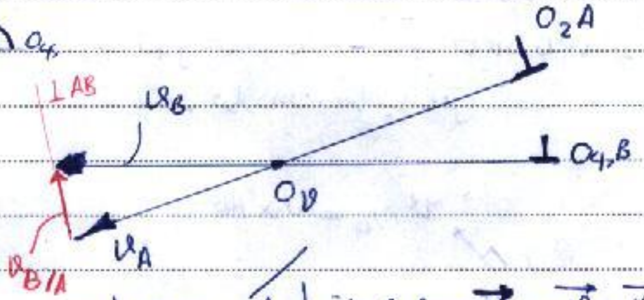
$\tan\alpha = \frac{y_B}{x_A} = \frac{6}{8} \to \alpha = 58°$

$AB = 260$ $\qquad \frac{O_3B}{\sin 90} = \frac{AB}{\sin\alpha} = \frac{O_3A}{\sin\beta} \to O_3A \checkmark \qquad O_3B = \checkmark$

$O_2O_4 = 180$

$\beta = \operatorname{Arccos} \frac{180-160}{260} = \checkmark$

روش 2) حل به روش ترسیم چندضلعی های سرعت



دو نقطه B، A از یک جسم صلب $\to \vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A}$

روش 3) حل مسأله از روش تحلیل

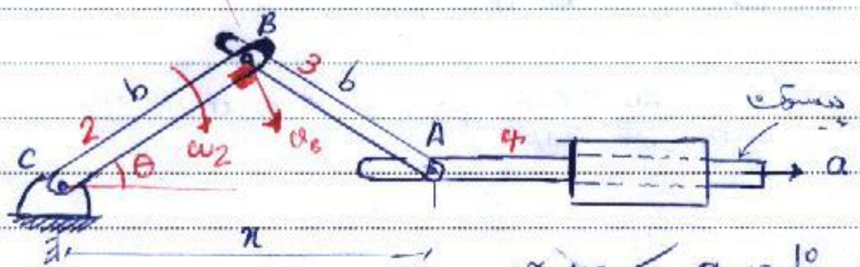
$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A} = v_A + \omega_3 \times \vec{r}_{AB}$

$v_B(-i) = v_A\cos\alpha(-\vec{i}) + v_A\sin\alpha(-\vec{j}) + \omega_3\vec{k} \times (\cos\beta\, j + \sin\beta\, i) \cdot 260$

$\omega_3 = \checkmark$ $\qquad$ ضرایب i و j را از دو طرف متساوی قرار دهید

$v_B = \checkmark$

مثال)



پیستون A با شتاب ثابت a در حرکت است

سیستم از حال سکون ، $x=0$

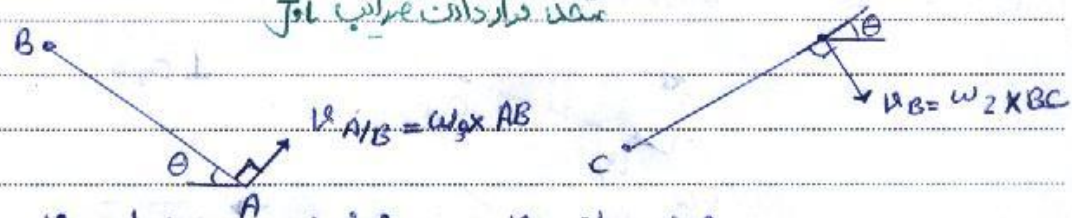
مطلوب است ω_{AB}

A و B متعلق به جسم صلب AB

$\vec{v}_A = \vec{v}_B + v_{A/B}$

$v_A\vec{i} = (v_B \sin\theta)\vec{i} - v_B \cos\theta\,\vec{j} + b\omega_3 \cos\theta\,\vec{j} + b\omega_3 \sin\theta\,\vec{i}$

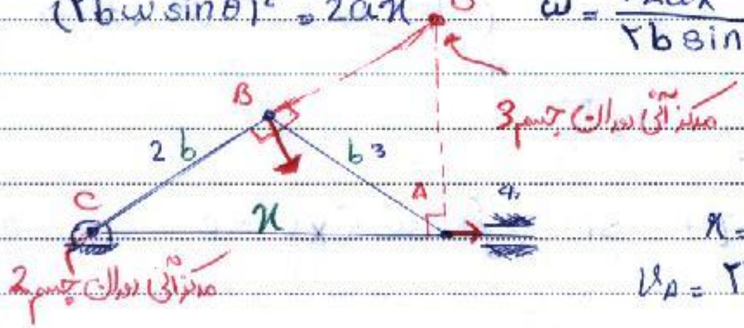
متحد قرار دادن ضرایب $\vec{j}$ و $\vec{i}$



$$\begin{cases} v_A = b(\omega_3 + \omega_2)\sin\theta \rightsquigarrow v_A = 2b\omega \sin\theta \\ 0 = b(\omega_3 - \omega_2)\cos\theta \rightsquigarrow \omega = \omega_3 = \omega_2 \end{cases}$$

$v^2 - v_0^2 = 2ax$

$(2b\omega \sin\theta)^2 = 2ax \qquad \omega = \dfrac{\sqrt{2ax}}{2b\sin\theta}$



$|AD| = x\tan\theta$

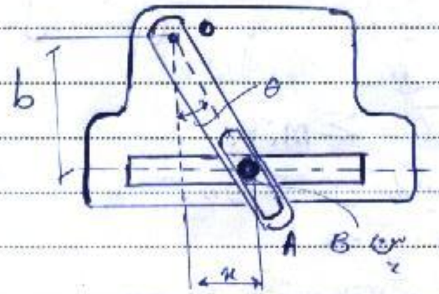
$v_A = AD\,\omega_3 = x\omega_3 \tan\theta$

$x = 2b\cos\theta$

$v_A = 2b\omega_3 \sin\theta \qquad \omega_3 = \omega_2 = \omega$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال ۱)



بازوی OA با سرعت زاویه‌ای ثابت $\dot{\theta}=\omega$ حول O
می‌چرخد
رابطه‌ای بین سرعت و شتاب پین B بدست آورید)

$$x = b\tan\theta$$

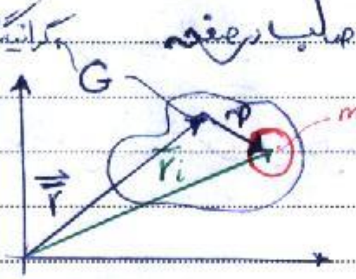
$$v_B = \dot{x} = b\dot{\theta}(1+\tan^2\theta) = b\omega(1+\tan^2\theta)$$

$$a_B = \ddot{x} = b\cancel{\ddot{\theta}}(1+\tan^2\theta) + b\dot{\theta}\,2\dot{\theta}\tan\theta(1+\tan^2\theta)$$

سرعت زاویه‌ای ثابت

$$a_B = 2b\omega^2(1+\tan^2\theta)\tan\theta$$

فصل ششم) سینتیک حرکت جسم صلب در صفحه



از اعمال نیرو صحبت می‌شود

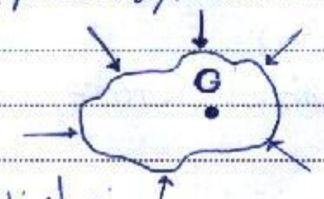
$$m \times \bar{r} = \sum m_i r_i$$

اگر مبدأ مختصات روی مرکز ثقل قرار گیرد

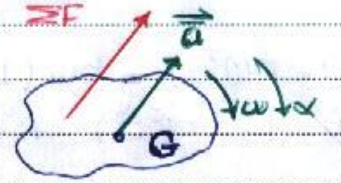
$$\vec{r} = \bar{x} = \bar{y} = 0$$

$$m \times \bar{x} = \sum m_i x_i \qquad \sum m_i r_i = \sum m_i y_i = \sum m_i x_i = 0$$

$$m \times \bar{y} = \sum m_i y_i$$



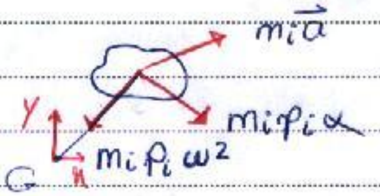
$=$



$$a_A = \vec{\bar{a}} + a_{A/G}$$

$$(a_{A/G})_t + (a_{A/G})_n$$

$$(a_{A/G})_n = \rho_i \omega^2 \qquad (a_{A/G})_t = \rho_i \alpha$$



نیروهای اعمالی به ذره iام

ممان نیروهای اعمالی به ذره iام)

$$\bar{M}_i = (m_i \rho_i \alpha)\rho_i + (m_i \vec{a} \cos\beta) y_i - (m_i \vec{a} \sin\beta) x_i$$

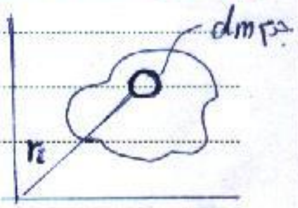
ممان کلیه نیروهای اعمالی به جسم صلب $\sum M_G = \sum \bar{M}$

$$= \sum m_i \rho_i^2 \alpha + \cancel{\sum m_i y_i (\bar{a}\cos\beta)} - \cancel{\sum m_i x_i (\vec{a}\sin\beta)}$$

چون مبدأ مختصات روی مرکز ثقل در نظر گرفته شده است

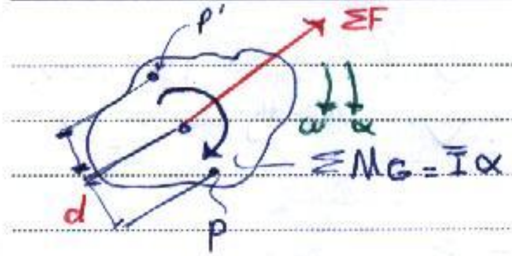
$$\sum M_G = (\underbrace{\sum m_i \rho_i^2}_{\text{ممان اینرسی جرم}})\alpha = \bar{I}\alpha$$

یادآوری $= I_0 = \int r^2 dm$

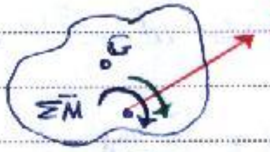


$$\bar{I}\alpha = \sum \bar{M} = \sum M_G$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

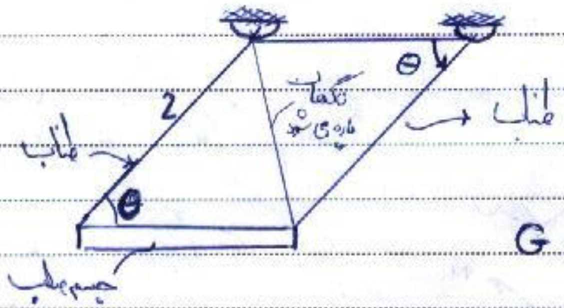


$$\Sigma M_G = \bar{I}\alpha$$

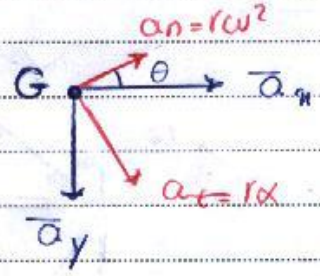


$$\Sigma M_P = \bar{I}\alpha + \underbrace{(m\bar{a})}_{\Sigma F} d$$

$$\begin{cases} \Sigma M_P = \bar{I}\alpha + m\bar{a}d \\ \Sigma M_G = \bar{I}\alpha \\ \Sigma F = m\bar{a} \end{cases}$$

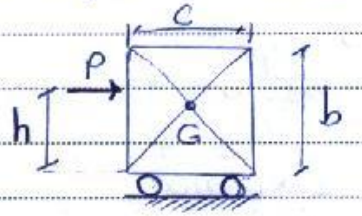


(ω و α جسم صلب صفر است)

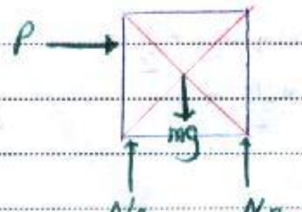


$$\sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

مثال)



مطلوب است P_{max} به طوری که صندوق نچرخد ؛
الف) $h = b$ باشد ب) $h = 0$ باشد



$$\Sigma F_x = m\bar{a}_x \rightarrow P = m\bar{a}$$

$$\Sigma F_y = m\bar{a}_y \rightarrow N_A + N_B = mg$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_G = \bar{I}\alpha = \underbrace{\bar{I}(0)}_{\text{نچرخد}} = 0$$

$$* \; N_A * \frac{c}{2} + P\left(h - \frac{b}{2}\right) - N_B * \frac{c}{2} = 0$$

PAPNO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

برای حالت 1 وقتی $P=P_{max}$ است که در آن N_A به دلیل جدا شدن از زمین صفر گردد
در این صورت $N_B = Mg$ و در نتیجه فرمول*

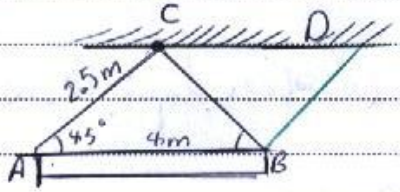
$$P_{max} = \frac{c}{b} mg$$

برای حالت 2 وقتی $P=P_{max}$ است که در آن N_B برابر صفر باشد

$$P_{max} = \frac{c}{b} mg$$

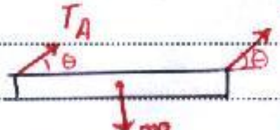
در هر دو حالت

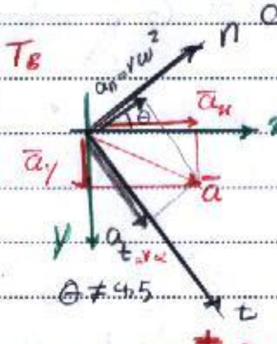
$$\bar{a} = \frac{c}{b} g$$



مثال ۱)

جرم میله AB ، 100 کیلوگرم است
اگر طناب CB پاره شود مطلوب است کشش در طناب BD
بلافاصله پس از پاره شدن طناب CB





جسم میله حرکت انتقالی دارد

$$\begin{cases} \bar{a}_A = \bar{a}_G = \bar{a}_B \\ \vec{V}_A = \vec{V}_G = V_B \end{cases}$$

ω ، α جسم AB صفر باشد

α ، ω طناب CB صفر است

$$\Sigma \vec{F} = m\bar{a}$$

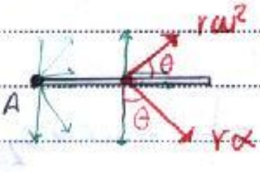
$$\Sigma \bar{M}_G = \bar{I}\alpha$$

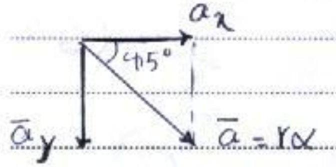
$$\Sigma M_P = \bar{I}\alpha + m\bar{a}d$$

$$\Sigma M_A = \cancel{\bar{I}\alpha} + m\bar{a}d$$

جسم میله

$$-T_B \sin\theta * 4 + mg * \frac{4}{2} = -\cancel{mr\omega^2 \sin\theta} * \frac{4}{2} + mr\alpha \cos\theta \frac{4}{2}$$





در لحظه پاره شدن طناب BC ← $\left.\begin{matrix}\theta = 45 \\ \omega = 0 \quad \alpha \neq 0\end{matrix}\right\}$

حالت خاص if $\theta = 45$ $\boxed{\bar{a}_x = \bar{a}_y = r\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}}$

$$-T_B \cancel{\sin 45}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} * 4 + \cancel{m}g * \frac{4}{2} = \cancel{m} \cancel{r}^{100} \alpha \cancel{\cos 45}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} * \frac{4}{2} \quad ✡$$

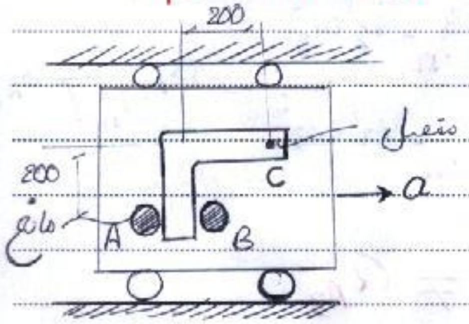
$\Sigma F_y = m\bar{a}_y$ $-T_A \sin\theta - T_B \sin\theta + mg = m\bar{a}_y$ $\left\{\begin{matrix} -T_A \frac{\sqrt{2}}{2} - T_B \frac{\sqrt{2}}{2} + mg = m\bar{a}_y \\ T_A \frac{\sqrt{2}}{2} + T_B \frac{\sqrt{2}}{2} = m\bar{a}_x \end{matrix}\right.$

$\Sigma F_x = m\bar{a}_x$ $T_A \cos\theta + T_B \cos\theta = m\bar{a}_x$

$\bar{a}_x = \bar{a}_y \Rightarrow \cancel{m}(g - \bar{a}_y) = \cancel{m}\bar{a}_x$ $\quad \bar{a}_x = \bar{a}_y = \frac{g}{2} = r\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}$ a_x, a_y

اگر بخواهیم α را در معادله ΣF_x یا ΣF_y بگذاریم به اشتباه خواهد
که θ در آنک است و θ هم متغیر است کار مشکل می‌شود
اما در معادله ✡ چون α نداریم راحت است

$\alpha = \checkmark$ در معادله ✡ جایگذاری می‌کنیم



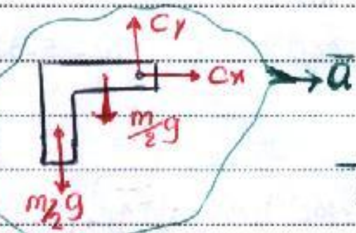
مثال 1 $\frac{1}{6}$

شتاب a را چنان تعیین کنید که بشقاب نه به مانع A بچسبد و نه به مانع B

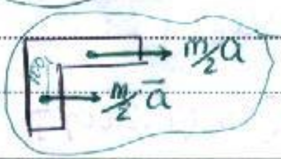
وزن بشقاب 3kg

چون نمی‌چرخد

$$\curvearrowleft + \ \Sigma M_G = \bar{I}\cancel{\alpha}^{0} + m\bar{a}d$$



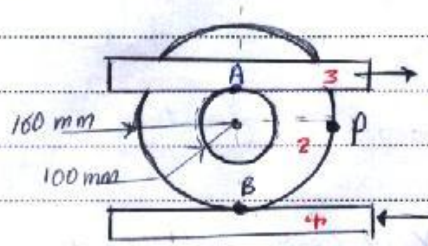
$$-\frac{\cancel{m}}{2} g * 200 \times 10^{-3} - \frac{\cancel{m}}{2} g * 100 \times 10^{-3} = -\frac{\cancel{m}}{2} a * 0.1$$



$\bar{a} = a$ $\quad -0.3g = -0.1a$

$a = 3g$

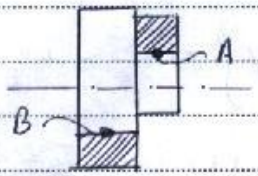
مثال)

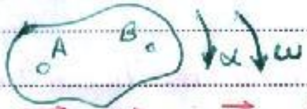


$\begin{cases} v = 0.8\ m/s \\ a = 2\ m/s^2 \end{cases}$

مطلوب است سرعت و شتاب نقطه P

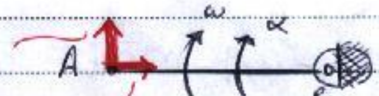
$\begin{cases} v = 0.6 \\ a = 0 \end{cases}$





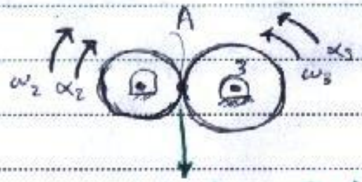
$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B} = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}$

$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{A/B} = \vec{a}_B + \vec{a}_{A/B})_t + \vec{a}_{A/B})_n$



$r\alpha = a_{A/B})_t$

$r\omega^2 = a_{A/B})_n$



$a_{A_2})_t = a_{A_3})_t$

مولفه های مماسی یکی است

$a_{A_2})_n = r_2 \omega_2^2$

But

$a_{A_3})_n = r_3 \omega_3^2$

$\Rightarrow a_{A_2})_n \neq a_{A_3})_n$

$\Rightarrow a_{A_2} \neq a_{A_3}$

$v_A = v_B + \vec{\omega} \times \vec{r}$

$0.8\,\vec{i} = .6\,\vec{i} + (-\omega \vec{k}) \times (\overbrace{.260 \times \vec{j}}^{AB})$ $\qquad \omega = 5.38\ \frac{rad}{s}$

$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \vec{\alpha} \times \vec{r}$

$\underbrace{2\vec{i}}_{\vec{a}_{A_2})_t} - \underbrace{(0.1)(5.38)^2\vec{j}}_{a_{A_2})_n} = \underbrace{0}_{a_{B_2})_t} + \underbrace{(0.160)(5.38)^2\vec{j}}_{a_{B_2})_n} + (-5.38\vec{k}) \times$

PAPNO $[(-5.38\,\vec{k})(0.260\,\vec{j})] + (-\alpha\,\vec{k}) \times (0.260)\vec{j}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

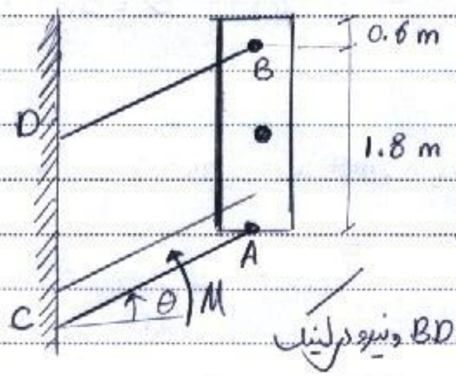
$$\alpha = 7{,}692 \ \frac{rad}{s^2}$$

$$\vec{a}_P = \vec{a}_B + \vec{a}_{P/B} = \vec{a}_B + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + (\vec{\alpha} \times \vec{r})$$

$$= 0(-\vec{i}) + (0{,}760)(5.38)^2 \vec{j} + (-5.38\vec{k})[(-5.38\vec{k}) \times (0{,}160\vec{j} + 0{,}160\vec{i})]$$

$$+ (-7{,}692\ \vec{k})(0{,}160\ \vec{j} + 0{,}160\ \vec{i}) = \boxed{-1.2\ \vec{j} - 3.4\ \vec{i}}$$

مثال)



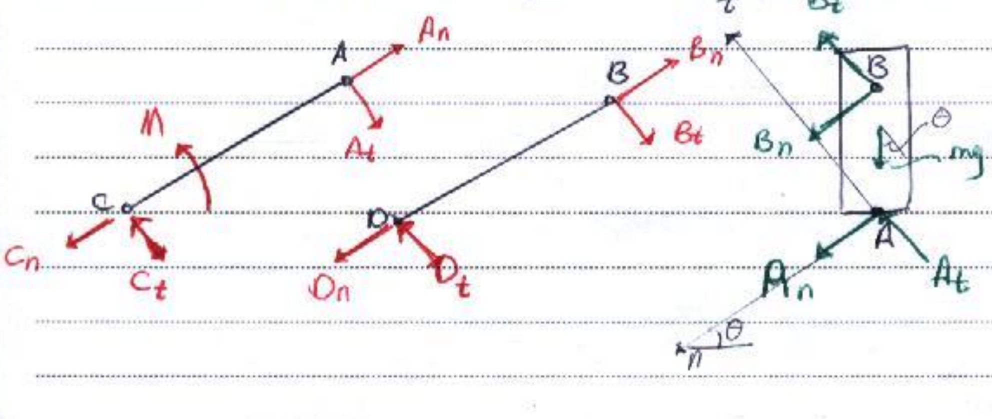
$m_{AB} = 150\ kg$

$M = 5\ kN.m$

وزن لینک های AB و BD ناچیز است

سیستم از حال سکون، $\theta = 0$ شروع به حرکت می کند

مطلوب است شتاب زاویه ای لینک های AC و BD و نیرو در لینک BD وقتی $\theta = 30°$



PAPNO

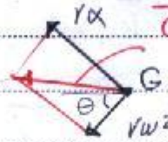
Subject:
Year. Month. Date. ( )

$AC: \quad \Sigma M_C = \cancel{\bar{I}\alpha} + \cancel{m\bar{a}}d = 0 \qquad A_t * 1.5 = 5 * 10^3 \rightsquigarrow A_t = 3333\ N$

$BD: \quad \Sigma M_D = \cancel{\bar{I}\alpha} + \cancel{m\bar{a}}d = 0 \qquad B_t * 1.5 = 0 \qquad B_t = 0$ عضو BD دو نیروئی است

چون عملاً B_t و D_t صفر می‌شوند

و B_n و D_n هم راستا هستند



$\vec{a}_A = \vec{a}_B = a_G$

جسم $AB: \Rightarrow \Sigma F_t = ma_t$

$A_t - mg\cos\theta = ma_t = mr\alpha$

$3333 - (150) * 9.81\cos\theta = (150)(1.5)\alpha$

$\alpha = 14.81 - 6.56\cos\theta \qquad \theta = 30° \qquad \alpha = 9.15\ \frac{rad}{s^2}$

جسم AB $\quad \overset{+}{\curvearrowleft} \Sigma M_A = \bar{I}\cancel{\alpha} + m\bar{a}d \Rightarrow$

$-B_n\cos\theta * 1.8 = -mr\alpha\sin\theta * 1.2 - mr\omega^2\cos\theta * 1.2$

$\omega d\omega = \alpha d\theta \qquad \int_0^\omega \omega d\omega = \int_0^\theta (14.81 - 6.54\cos\theta)d\theta$

$\omega^2 = 29.6\,\theta - 13.08\sin\theta$

$\theta = 30° \rightsquigarrow \omega^2 = 8.97 \rightsquigarrow B_n = 2.147 * 10^3\ N$

PAPNO