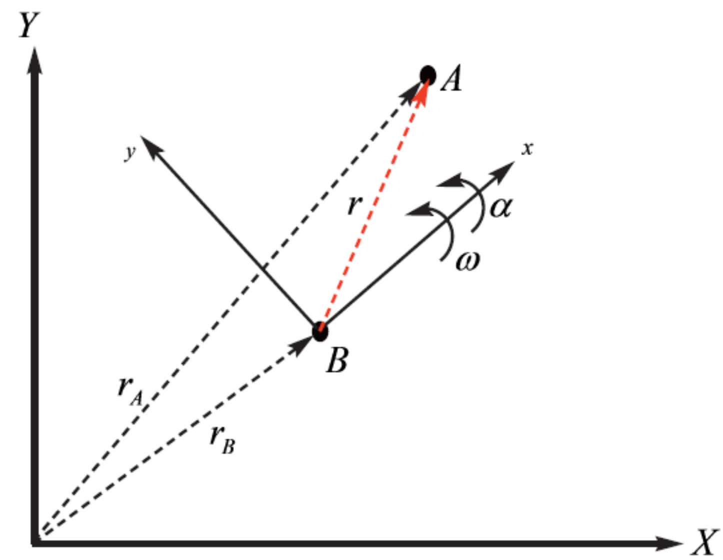
(خرد هر کجا گنجی آرد پدید- ز نام خدا سازد آن را کلید)

سینماتیک اجسام صلب

روش حرکت نسبی :



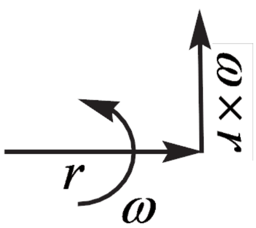
۹۰ درصد مسائل سینماتیک با این روش حل می شوند.
A نقطه ی مورد بررسی – B نقطه ای که دستگاه متحرک روی آن واقع است.
r فاصله ی دستگاه تا نقطه ی مورد بررسی می باشد.
هدف ما از این شکل پیدا کردن سرعت و شتاب زاویه ای نقطه ی A می باشد :

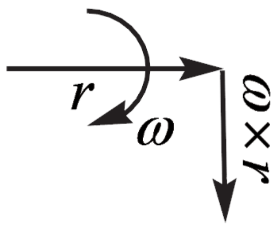
سرعت نسبی :

فرمول = $\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times r + \vec{v}_{rel}$

نکات :

- $\omega \times r$ زمانی وجود دارد که دستگاهی که روی B قرار داده ایم ، بچرخد.
- یادتان باشد ما برای یک بردار دو مشخصه تعیین می کنیم، یکی راستا و دیگری اندازه .
- فرمولی که در بالا نوشتیم ، دو معادله محسوب می شود ، یکی در راستای j و یکی در راستای i .
-برای یافتن راستا و جهت بردار $\omega \times r$ از شکل های زیر کمک می گیریم :





شتاب نسبی :

$$\vec{a}_A=\vec{a}_B+\omega\times(\vec{\omega}\times r)+\dot{\vec{\omega}}\times r+2\vec{\omega}\times v_{rel}+\vec{a}_{rel}$$ = فرمول

نکات :

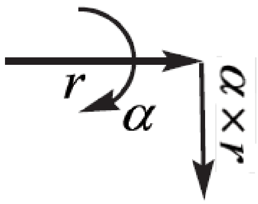
- اگر هریک از مسیر های شتاب ها مشخص باشد ، آنها را باید به صورت نرمال و تانژانت نوشت.

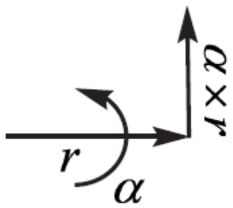
مثلا ؛ $\overrightarrow{a_{rel}}=\overrightarrow{a_{rel_n}}+\overrightarrow{a_{rel_t}}$, $\overrightarrow{a_B}=\overrightarrow{a_{B_n}}+\overrightarrow{a_{B_t}}$, $\overrightarrow{a_A}=\overrightarrow{a_{A_n}}+\overrightarrow{a_{A_t}}$

- مقدار $a_{A_t}=r\alpha$ و $a_{A_n}=r\omega^2=\frac{v^2}{r}$ است.

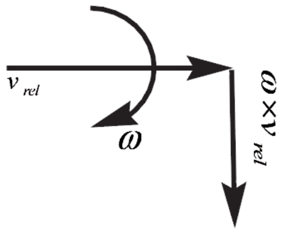
- یادمان باشد که راستا و جهت $\omega\times(\omega\times r)$ همیشه عکس r است و مقدار آن برابر با $r\omega^2$ است.

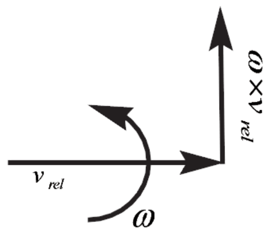
- مقدار $\dot{\omega}\times r$ برابر با $r\alpha$ است. برای یافتن راستا و جهت بردار $\dot{\omega}\times r$ از شکل های زیر کمک می گیریم :





- مقدار $2\omega\times v_{rel}$ برابر با $2\omega\, v_{rel}$ است. برای یافتن راستا و جهت بردار $2\omega\times v_{rel}$ از شکل های زیر کمک می گیریم :





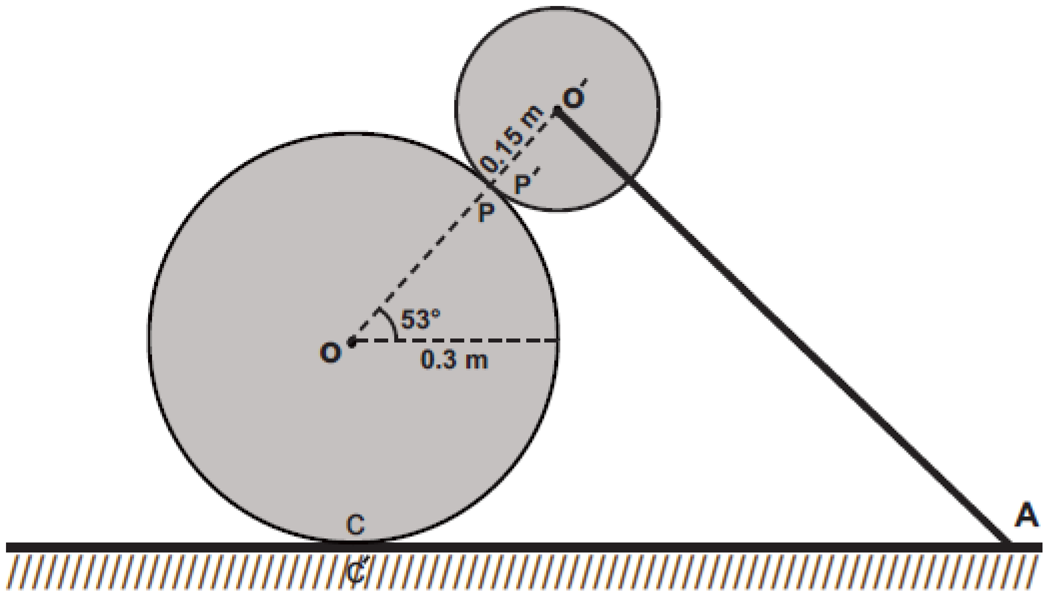
- برای a_{rel} دو صورت نرمال و تانژانت را بررسی می کنیم :

$a_{rel_n}=$ زمانی وجود دارد که سطح حرکت ما به صورت منحنی باشد. و اکثرا در بین دو دیسک که با یکدیگر اتصال دارند و یا زمینی که به صورت منحنی است ظاهر می شود . راستای آن به سمت مرکز انحنا می باشد. توجه داشته باشید ، چه ما لغزش داشته باشیم چه نداشته باشیم در موارد گفته شده ما دارای a_{rel_n} هستیم .

$a_{rel_t}=$ زمانی وجود دارد که جسم دارای لغزش باشد . در لینک تلسکوپی نیز a_{rel_t} داریم.

اگر با توضیحات بالا هنوز متوجه این قسمت نشده اید، مثال ها را با دقت بخوانید .

مثال اول :



$$\begin{cases} v_o = 2\frac{m}{s} \leftarrow \\ a_o = 3\frac{m}{s} \leftarrow \end{cases} \text{ ، } \begin{cases} v_A = 4\frac{m}{s} \rightarrow \\ a_A = 5\frac{m}{s^2} \rightarrow \end{cases} \text{ ، } \begin{cases} \omega_{o'} = ? \\ \alpha_{o'} = ? \end{cases} \text{ ، } \begin{cases} \omega_{o'A} = ? \\ \alpha_{o'A} = ? \end{cases}$$

در این سوال A به زمین جوش نشده و دارای حرکت است . ودر نقاط C و P دارای غلتش کامل هستیم.
طول Ao' برابر 0.9 است. زاویه ای که A با زمین می سازد برابر 49.36° است.(باید بدست آورید)
o' مفصل است.

حل سوال :

محاسبه درجه ی آزادی : $3n - q = 3\times3 - 7 = 2$

(**یاد آوری :** مفصل ها ۲ مجهول – غلتش کامل ۲ مجهول – لغزش ۱ مجهول)

در اینجا چون دارای ۲ درجه آزادی هستیم باید دو دسته ورودی داشته باشیم .

ابتدا دستگاه مختصات را بر روی نقطه O که بیشترین اطلاعات را از آن داریم قرار می دهیم و سرعت را در نقطه ی P′ محاسبه می کنیم و داریم :

نکته : | مقدار | راستا |

$$\overset{\boxtimes\boxtimes}{v_{p'}} = \overset{\checkmark\checkmark}{v_o} + \omega_o \times \overset{\checkmark\checkmark}{r_{op'}} + \overset{\circ}{\cancel{v}}_{rel_{\frac{p'}{p}}}$$

$|v_o| = -2i$

$\omega_o = \dfrac{v_o}{r} = \dfrac{2}{0.3}$ ↺

$|\omega_0 \times r_{op'}| = 0.3 \times \dfrac{2}{0.3} \times (-\cos 37 i + \sin 37 j) = -1.6i + 1.2j$

$v_{p'} = -2i + -1.6i + 1.2j = -1.8i + 1.2j$

حال دستگاه را روی o' قرار داده و نقطه ی P′ را بررسی می کنیم تا بتوانیم سرعت زاویه ای را در نقطه ی o' محاسبه کنیم . پس داریم :
($v_{rel} = 0$ چون در نقاط P و P′ دارای غلتش کامل هستیم .)

☑☑ ☒☒ ☑☒ ○

$$①\ v_{p'} = v_{o'} + \omega_{o'} \times r_{o'p'} + \cancel{v}_{rel}$$

با توجه به اینکه ① دارای دو معادله و سه مجهول می باشد ، قابل حل نمی باشد.

حال دستگاه را روی A قرار داده و نقطه ی o' را بررسی می کنیم تا بتوانیم سرعت زاویه ای را در نقطه ی o' محاسبه کنیم . پس داریم :

☒☒ ☑☑ ☑☒ ○

$$②\ v_{o'} = v_A + \omega_{Ao'} \times r_{Ao'} + \cancel{v}_{rel}$$

حال ② را در ① جایگذاری می کنیم و داریم :

☑☑ ☑☑ ☑☒ ☑☒

$$v_{p'} = v_A + \omega_{Ao'} \times r_{Ao'} + \omega_{o'} \times r_{o'p'}$$

الان عبارت ما دارای دو معادله و دو مجهول می باشد ، که به سادگی قابل حل است .

$\overrightarrow{v_{p'}} = -1.8i + 1.2j$

$\overrightarrow{v_A} = 4i$

$|\omega_{Ao'} \times r_{Ao'}| = 0.9 \times \omega_{Ao'}$ ↺ فرض

$|\omega_{o'} \times r_{o'p'}| = 0.15 \times \omega_{o'}$ ↺ فرض

$-1.8i + 1.2j = 4i + 0.9 \times \omega_{Ao'}(\cos 37 i + \sin 37 j) + 0.15 \times \omega_{o'}(-\cos 37 i + \sin 37 j)$

$$\begin{cases} -1.8 = 4 + 0.9 \times \omega_{Ao'} \times \cos 37 + 0.15 \times \omega_{o'} \times -\cos 37 \\ 1.2 = 0.9 \times \omega_{Ao'} \times \sin 37 + 0.15 \times \omega_{o'} \times \sin 37 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0.12 \times \omega_{o'} - 0.72 \times \omega_{Ao'} = -5.8 \\ 0.54 \times \omega_{Ao'} + 0.09 \times \omega_{o'} = 1.2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega_{o'} = -17.67 \\ \omega_{Ao'} = 5.13 \end{cases}$$

در قسمت بالا جهت های $\omega_{o'}$ و $\omega_{Ao'}$ به صورت فرضی مثبت (پادساعتگرد) در نظر گرفته شده بود. با بدست آوردن جواب ها معلوم شد ، جهت $\omega_{Ao'}$ درست بوده است ولی جهت $\omega_{o'}$ به علت منفی در آمدن به صورت ساعتگرد می باشد. پس مقدار بدست آمده را مثبت کرده و جهت را به صورت ساعتگرد در نظر می گیریم.

حال شتاب ها را بررسی می کنیم : (دستگاه روی o و بررسی نقطه ی p')

$$\overset{\boxtimes\boxtimes}{a_{p'}} = \overset{\checkmark\checkmark}{a_{o_t}} + \overset{\circ}{\cancel{a_{o_n}}} + \omega_o \times (\overset{\checkmark\checkmark}{\omega_o} \times r_{op'}) + \overset{\checkmark\checkmark}{\dot{\omega}_o} \times r_{op'} + 2\overset{\circ}{\omega_o} \times \cancel{v_{rel}} + \overset{\circ}{\cancel{a_{rel_t}}} + \overset{\checkmark\checkmark}{a_{rel_n}} \quad ③$$

$$\alpha_o = \frac{a_o}{r_{oc}} = \frac{3}{0.3} = 10 \quad ↺$$

$$\left|a_{o_t}\right| = -3i$$

$$\left|\omega_o \times (\omega_o \times r_{op'})\right| = r_{op'}\omega_o^2 = 0.3 \times \left(\frac{2}{0.3}\right)^2 \times \left(-\cos 53 i - \sin 53 j\right) = -8.02i - 10.64j$$

$$\left|\dot{\omega}_o \times r_{op'}\right| = r_{op'}\alpha_o = 0.3 \times 10 \times \left(-\cos 37 i + \sin 37 j\right) = -2.4i + 1.8j$$

برای محاسبه ی a_{rel_n} از فرمول مقابل استفاده کنید : چون دو دیسک روی هم می غلتند.

$$\left|a_{rel_n}\right| = \frac{rR\left(\omega_{o'} \pm \omega_o\right)^2}{r+R}$$

حال سوال پیش می آید کی از مثبت وکی از منفی استفاده کنیم؟؟
مخالف جهت + و هم جهت −
هم چنین فرقی نمی کند کدام را اول بنویسیم ، چون به توان ۲ رسیده است.

چون $\omega_{o'}$ ساعتگرد و ω_o پاد ساعتگرد می باشد ، علامت بین آنها مثبت است. پس داریم :

$$\left|a_{rel_n}\right| = \frac{0.3 \times 0.15 \times \left(17.67 + 6.66\right)^2}{0.3 + 0.15} = 59.2\left(\cos 53 i + \sin 53 j\right) = 35.62i + 47.27j$$

برای جهت آن نیز، چون دستگاه روی o و بررسی p' است . در نتیجه جهت آن به سمت مرکز انحنای نقطه ی p' می باشد.
با جایگذاری موارد بدست آمده ، به راحتی $a_{p'}$ برحسب i و j بدست می آید.

$$a_{p'} = -3i - 8.02i - 10.64j - 2.4i + 1.8j + 35.62i + 47.27j = 22.2i + 38.43j$$

حال دستگاه را روی o' قرار داده و نقطه ی p' را که همه ی اطلاعات آن را داریم را بررسی می کنیم :

$$\overset{\checkmark\checkmark}{a_{p'}} = \overset{\times\times}{a_{o'}} + \overset{\checkmark\checkmark}{\omega_{o'}} \times (\omega_{o'} \times r_{o'p'}) + \overset{\checkmark\times}{\dot{\omega}_{o'}} \times r_{o'p'} + 2\omega_{o'} \times \cancel{\mathring{v}_{rel}} + \cancel{\mathring{a}_{rel_t}} + \cancel{\mathring{a}_{rel_n}} \quad ④$$

با توجه به اینکه ④ دارای دو معادله و سه مجهول می باشد ، قابل حل نمی باشد.

حال دستگاه را روی A قرار داده و شتاب نقطه ی o' را بررسی می کنیم. پس داریم :

$$\overset{\times\times}{a_{o'}} = \overset{\checkmark\checkmark}{a_{A_t}} + \overset{\checkmark\checkmark}{\omega_{Ao'}} \times (\omega_{Ao'} \times r_{Ao'}) + \overset{\checkmark\times}{\dot{\omega}_{Ao'}} \times r_{Ao'} + 2\omega_{o'} \times \cancel{\mathring{v}_{rel}} + \cancel{\mathring{a}_{rel_t}} + \cancel{\mathring{a}_{rel_n}} \quad ⑤$$

حال ④ را در ⑤ جایگذاری می کنیم و به سادگی می توانید مقادیر $\alpha_{o'}$ و $\alpha_{Ao'}$ را بدست آورید.

(هست همت چو مغز و کار چو پوست – کار هر کس به قدر همت اوست)

مثال دوم :

اگر در مسئله قبلی Ao' را جوش دهیم . تمامی مقادیر مجهول را بیابید.

حل سوال :

با جوش دادن لینک A به دیسک o' ، درحقیقت ما دو لینک را تبدیل به یک لینک کرده ایم و دیگر مفصلی به نام o' نداریم .

تعیین درجه آزادی : (در حل اینگونه سوال ها باید حتما درجه آزادی تعیین شود که شما را خیلی کمک می کند.)

$3n - q = 3\times 2 - 5 = 1$

شاید از خود بپرسید ، n و q چیست؟؟
n تعداد عضو ها و q تعداد مجهولات

نکته خیلی مهم :
چون ما داری دو دسته ورودی هستیم باید درجه ی آزادی ما ۲ با شد ، در حالی که ما آن را یک بدست آوردیم ، پس می توانیم نتیجه بگیریم که در یکی از نقاط C و P حتما ما داری لغزش هستیم.(یعنی در حقیقت ما میخواهیم با تبدیل یه غلتش کامل که داری دو مجهول است به لغزش که دارای یک مجهول می باشد درجه آزادی را به دو برسانیم تا با ورودی های ما برابر شود.)

ما لغزش برای دو نقطه داریم:

۱- در نقطه P ۲- در نقطه C

در دو حالت بررسی خواهیم کرد.

حالت اول : در نقطه P دارای لغزش هستیم و در C غلتش.

محاسبه درجه آزادی :

$$3n - q = 3 \times 2 - 4 = 2$$

دودسته ورودی و دو درجه آزادی.

محاسبه سرعت :

ابتدا دستگاه مختصات را بر روی نقطه O که بیشترین اطلاعات را از آن داریم قرار می دهیم و سرعت را در نقطه ی P′ محاسبه می کنیم و داریم :

$$\overset{\boxtimes\boxtimes}{v_{p'}} = \overset{\checkmark\checkmark}{v_o} + \overset{\checkmark\checkmark}{\omega_o} \times r_{op'} + \overset{\checkmark\boxtimes}{v_{rel}} \quad ❶$$

در بالا مشاهده می شود که v_{rel} صفر نیست . این به این دلیل است که در نقطه ی P لغزش داریم.

حال دستگاه را روی A قرار داده و نقطه ی P' را بررسی می کنیم . پس داریم :

$$\overset{\boxtimes\boxtimes}{v_{p'}} = \overset{\checkmark\checkmark}{v_A} + \overset{\checkmark\boxtimes}{\omega_{Ao'}} \times r_{Ap'} + \overset{\circ}{\cancel{v_{rel}}} \quad ❷$$

در بالا مشاهده می شود که v_{rel} صفراست . چرا ؟؟

چون دستگاه روی A قرار دارد و نقطه ای به نام P' که جزوه همین لینک است را بررسی مکنیم . بدیهی است که دستگاه هر طرفی بچرخد P' هم با او می چرخد، یعنی سرعت یا شتاب خاصی نسبت به دستگاه ندارد .

خوب! دو معادله و دو مجهول داریم . (❶ و ❷)

به راحتی هر چه تمامتر ، مقادیر $\omega_{Ao'}$ و v_{rel} بدست می آید.

محاسبه شتاب :

دستگاه روی o و بررسی نقطه ی p' :

$$\overset{\boxtimes\boxtimes}{a_{p'}} = \overset{\checkmark\checkmark}{a_{o_t}} + \overset{\circ}{\cancel{a_{o_n}}} + \omega_o \times (\overset{\checkmark\checkmark}{\omega_o} \times r_{op'}) + \overset{\checkmark\checkmark}{\dot{\omega}_o} \times r_{op'} + 2\overset{\checkmark\checkmark}{\omega_o} \times v_{rel} + \overset{\checkmark\boxtimes}{a_{rel_t}} + \overset{\checkmark\checkmark}{a_{rel_n}} \quad ❸$$

همه ی موارد بالا را در قسمت های قبلی به طور مفصل بیان کردیم. فقط در مورد a_{rel_t} که مقدارش را نداریم باید بدست آید و در مورد جهت آن باید بگوییم که راستای آن را داریم که خط مماس بین دو دیسک است . جهت آن را فرضی در نظر میگیریم.

در معادله ❸ ما دارای سه مجهول و دو معادله هستیم .

دستگاه را روی A قرار داده و نقطه ی P' را بررسی می کنیم :

☒☒ ☑☑ ☑☑ ☑☒

$$a_{p'} = a_{A_t} + \omega_{Ao'} \times (\omega_{Ao'} \times r_{Ap'}) + \dot{\omega}_{Ao'} \times r_{Ap'} + 2\omega_{o'} \times \cancel{v_{rel}} + \cancel{a_{rel_t}} + \cancel{a_{rel_n}} \quad ❹$$

خوب! دو معادله و دو مجهول داریم . (❹ و ❸)

مقادیر $\alpha_{Ao'}$ و a_{rel_t} بدست می آید.

حالت دوم : در نقطه C دارای لغزش هستیم و در P غلتش.

محاسبه درجه آزادی :

$$3n - q = 3\times2 - 4 = 2$$

دودسته ورودی و دو درجه آزادی.

نکته مهم در این حالت :

با وجود لغزش در نقطه ی C ، دیگر ω_o متناسب با V_o نیست . $\omega_o \neq \frac{v_o}{r}$ یا $v_o \neq \omega_o r$

همچنین $\alpha_o \neq \frac{a_o}{r_{oc}}$ یا $a_o \neq \alpha_o r_{oc}$

محاسبه سرعت :

ابتدا دستگاه مختصات را بر روی نقطه O که بیشترین اطلاعات را از آن داریم قرار می دهیم و سرعت را در نقطه ی P′ محاسبه می کنیم و داریم :

☒☒ ☑☑ ☑☒

$$v_{p'} = v_o + \omega_o \times r_{op'} + \cancel{v_{rel}} \quad ①$$

چون در نقاط P و P′ دارای غلتش کامل هستیم. $v_{rel} = 0$

مقدار ω_o جزو مجهولات ماست چون در نقطه ی C لغزش داریم.

در معادله ① ما دارای سه مجهول و دو معادله هستیم.

حال دستگاه را روی A قرار داده و نقطه ی P' را بررسی می کنیم . پس داریم :

☒☒ ☑☑ ☑☒

$$v_{p'} = v_A + \omega_{Ao'} \times r_{Ap'} + \cancel{v_{rel}} \quad ②$$

دو معادله و دو مجهول داریم . (② و ①)

مقادیر $\omega_{Ao'}$ و ω_o بدست می آید.

محاسبه شتاب :

دستگاه روی o و بررسی نقطه ی p' :

$$a_{p'} = a_{o_t} + \cancel{a_{o_n}} + \omega_o \times (\omega_o \times r_{op'}) + \dot{\omega}_o \times r_{op'} + 2\omega_o \times \cancel{v_{rel}} + \cancel{a_{rel_t}} + \cancel{a_{rel_n}} \quad ③$$

دستگاه را روی A قرار داده و نقطه ی P' را بررسی می کنیم :

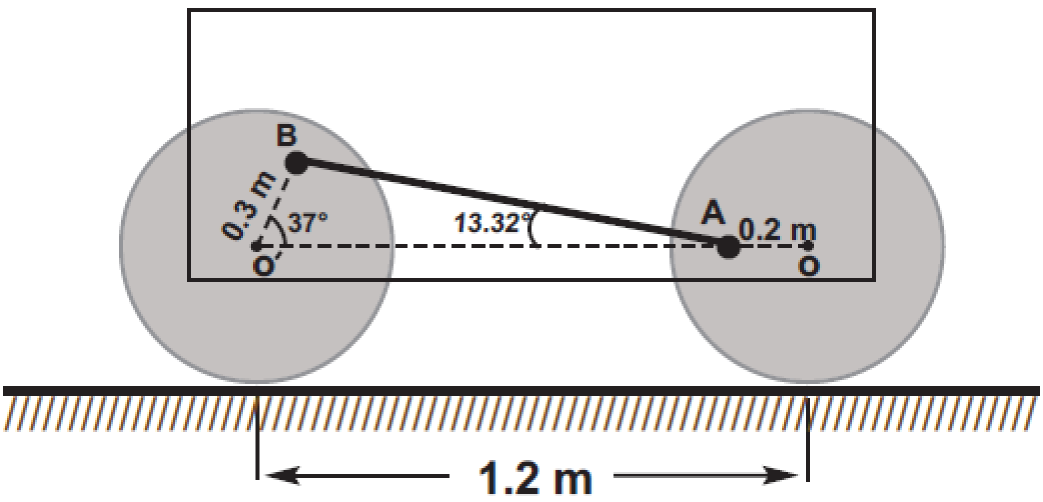
$$a_{p'} = a_{A_t} + \omega_{Ao'} \times (\omega_{Ao'} \times r_{Ap'}) + \dot{\omega}_{Ao'} \times r_{Ap'} + 2\omega_{o'} \times \cancel{v_{rel}} + \cancel{a_{rel_t}} + \cancel{a_{rel_n}} \quad ④$$

دو معادله و دو مجهول داریم . (④ و ③)

که به راحتی مقادیر $\alpha_{Ao'}$ و α_o بدست می آید.

(الهی جانب من کن نگاهی – مرا بنما به سوی خویش راهی)

مثال سوم :



در این مثال ما موتوری داریم که دارای سرعت و شتاب $\begin{cases} a = 3\,\dfrac{m}{s} \leftarrow \\ v = 2\,\dfrac{m}{s} \leftarrow \end{cases}$ می باشد.

داده های مسئله : شعاع هر یک از چرخ ها $0.4\,m$ است.

$$\begin{cases} \omega_{charkh} = ? \\ \alpha_{charkh} = ? \end{cases} \quad و \quad \begin{cases} \omega_{AB} = ? \\ \alpha_{AB} = ? \end{cases}$$

خواسته های مسئله :

حل سوال :

محاسبه درجه ی آزادی :

$$3n - q = 3 \times 4 - 12 = 0$$

موتور مسئله ما دارای چهار عضو میباشد .(دو چرخ- بدنه –لینک AB)
با فرض غلتش کامل گرفتن دو چرخ تعداد مجهولات ما ۱۲ عدد می باشد .(مفصل های $o\,,o'\,,$A,B و دو نقطه ای که در آنها غلتش کامل داریم)

نکته مهم :
در اکثر امتحانات هم به شما گفته نمی شود در اینجا لغزش داریم یا نداریم.پس این خود شما هستید که می فهمید باید لغزش داشت یا نداشت.
در این مسئله با توجه به درجه آزادی ما بایک مسئله استاتیکی سرو کار داریم، درحالی که این مسئله دینامیکی است. در نتیجه با توجه به اینکه یک دسته ورودی داریم، باید یک درجه آزادی داشته باشیم، پس حتما در یکی از چرخ ها ما دارای لغزش هستیم تا مسئله ی ما تبدیل به دینامیکی شود .(به همین راحتی)

محاسبه سرعت :
ما در اینجا فرض میگیریم که در چرخ o غلتش کامل و در چرخ o' لغزش داریم.
بنابرین برای چرخ o داریم :

$$\omega_o = \frac{v_o}{r} = \frac{2}{0.4} \quad \circlearrowleft$$

دستگاه را روی o قرار داده و نقطه ی A را بررسی می کنیم :

$$\overset{\boxtimes\boxtimes}{v_A} = \overset{\boxtimes\!\!\!\!\checkmark\checkmark}{v_o} + \overset{\checkmark\checkmark}{\omega_o \times r_{oA}} + \overset{\circ}{\cancel{v}_{rel}}$$

سپس، دستگاه را روی A قرار داده و نقطه ی B را بررسی می کنیم :

$$\overset{\boxtimes\boxtimes}{v_B} = \overset{\checkmark\checkmark}{v_A} + \overset{\checkmark\boxtimes}{\omega_{AB} \times r_{AB}} + \overset{\circ}{\cancel{v}_{rel}} \quad ①$$

سه مجهول و دو معادله داریم. قابل حل نیست.

پس، دستگاه را روی B قرار داده و نقطه ی o' را بررسی می کنیم :

$$\overset{\boxtimes\boxtimes}{v_B} = \overset{\checkmark\boxtimes}{v_{o'}} + \overset{\checkmark\boxtimes}{\omega_{o'} \times r_{o'B}} + \overset{\circ}{\cancel{v}_{rel}} \quad ②$$

با مساوی قرار دادن ② و ① دو معادله و دو مجهول داریم .

مقادیر ω_{AB} و $\omega_{o'}$ بدست می آید.

محاسبه شتاب :

ما در اینجا فرض میگیریم که در چرخ o غلتش کامل و در چرخ o' لغزش داریم.
بنابرین برای چرخ o داریم :

$$\alpha_o = \frac{a_o}{r} = \frac{3}{0.4} \quad \circlearrowleft$$

دستگاه را روی o قرار داده و نقطه ی A را بررسی می کنیم :

$$\overset{\boxtimes\boxtimes}{a_A} = \overset{\checkmark\checkmark}{a_{o_t}} + \overset{\circ}{\cancel{a_{o_n}}} + \omega_o \times (\overset{\checkmark\checkmark}{\omega_o} \times r_{oA}) + \overset{\checkmark\checkmark}{\dot{\omega}_o} \times r_{oA} + 2\overset{\circ}{\omega_o} \times \cancel{v_{rel}} + \overset{\circ}{\cancel{a_{rel_t}}} + \overset{\circ}{\cancel{a_{rel_n}}}$$

سپس، دستگاه را روی A قرار داده و نقطه ی B را بررسی می کنیم :

$$\overset{\boxtimes\boxtimes}{a_B} = \overset{\checkmark\checkmark}{a_A} + \omega_{AB} \times (\overset{\checkmark\checkmark}{\omega_{AB}} \times r_{AB}) + \overset{\checkmark\boxtimes}{\dot{\omega}_{AB}} \times r_{AB} + 2\overset{\circ}{\omega_{AB}} \times \cancel{v_{rel}} + \overset{\circ}{\cancel{a_{rel_t}}} + \overset{\circ}{\cancel{a_{rel_n}}} \quad ③$$

سه مجهول و دو معادله داریم. قابل حل نیست.

پس، دستگاه را روی B قرار داده و نقطه ی o' را بررسی می کنیم :

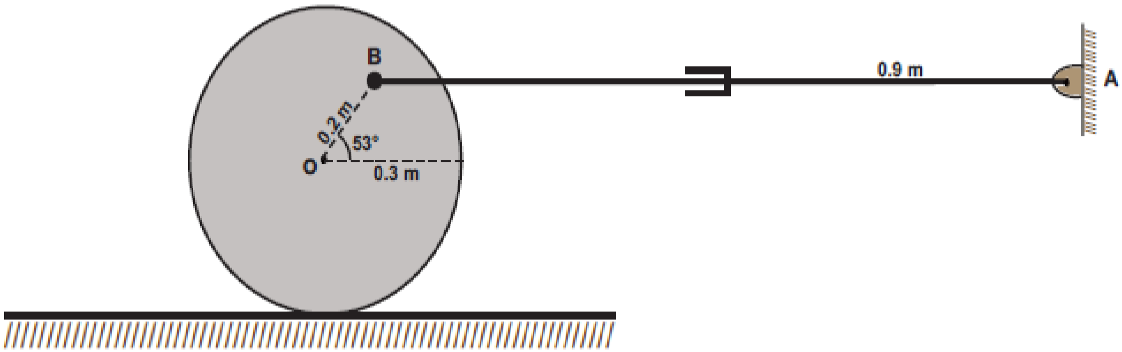
$$\overset{\boxtimes\boxtimes}{a_B} = \overset{\checkmark\checkmark}{a_{o'_t}} + \omega_{o'} \times (\overset{\checkmark\checkmark}{\omega_{o'}} \times r_{o'B}) + \overset{\checkmark\boxtimes}{\dot{\omega}_{o'}} \times r_{o'B} + 2\overset{\circ}{\omega_{o'}} \times \cancel{v_{rel}} + \overset{\circ}{\cancel{a_{rel_t}}} + \overset{\circ}{\cancel{a_{rel_n}}} \quad ④$$

با مساوی قرار دادن ④ و ③ دو معادله و دو مجهول داریم .

مقادیر α_{AB} و $\alpha_{o'}$ بدست می آید.

(خدایا تویی بنده را دستگیر - بود بنده را از خدا ناگزیر)

مثال چهارم :



یک شکلی داریم که در آن از دیسک و لینک تلسکوپی استفاده شده است. سرعت و شتاب در مرکز o برابر است با $\begin{cases} a_o = 6\dfrac{m}{s} & \rightarrow \\ v_o = 3\dfrac{m}{s} & \rightarrow \end{cases}$. خواسته مسئله $\begin{cases} \omega_{AB} = ? \\ \alpha_{AB} = ? \end{cases}$.

حل سوال :

محاسبه درجه ی آزادی :

$3n - q = 3\times 3 - 8 = 1$

مکانیزم مسئله ما دارای سه عضو میباشد .(دو تا لینک تلسکوپی- دیسک o)
با فرض غلتش کامل گرفتن دیسک تعداد مجهولات ما ۸ عدد می باشد .(دو تا لینک تلسکوپی- مفصل های A, B و نقطه ای که در آنها غلتش کامل داریم.)

نکته مهم :
با توجه به اینکه یک درجه آزادی داریم و مسئله نیز یک ورودی به ما داده است ، پس فرض غلتش کامل برای دیسک کاملا درست است .

محاسبه سرعت :

ما برای دیسک با غلتش کامل داریم :

$\omega_o = \dfrac{v_o}{r} = \dfrac{3}{0.3} = 10\dfrac{rad}{s}$ ↻

دستگاه را روی o قرار داده و نقطه ی B را بررسی می کنیم :

☒☒ ☑☑ ☑☑ ∘

$$v_B = v_o + \omega_o \times r_{oB} + \cancel{v_{rel}}$$

$$v_B = 3i + 0.2\times 10\left(\sin 53 i - \cos 53 j\right) = 4.6i - 1.2j$$

سپس، دستگاه را روی A قرار داده و نقطه ی B را بررسی می کنیم :

☑☑ ∘ ☑☒ ☑☒

$$v_B = \cancel{v_A} + \omega_{AB} \times r_{AB} + v_{rel}$$

در بالا مشاهده می شود که v_{rel} صفر نیست . این به دلیل وجود لینک تلسکوپی است که نسبت به دستگاه باز و بسته می شود.(اگر لینک تلسکوپی ما باز شود منفی و اگر بسته شود مثبت است)

$|v_B| = 4.6i - 1.2j$

ω_{AB} ↺ فرض

$|\omega_{AB} \times r_{AB}| = -0.9 \times \omega_{AB}\, j$

$|v_{rel}| = v_{rel}\, i$

$$4.6i - 1.2j = -0.9\times\omega_{AB}\, j + v_{rel}\, i \Rightarrow \begin{cases} v_{rel} = 4.6 & \rightarrow \\ \omega_{AB} = \dfrac{4}{3} & ↺ \end{cases}$$

در بالا v_{rel} مقدارش معلوم نیست ، ولی راستای آن معلوم است . v_{rel} در راستای افقی می باشد . و مقدار آن را مثبت فرض کردیم که با بدست آمدن مقدار آن، فرض ما نیز درست می باشد. فرض ما برای ↺ ω_{AB} نیز درست بود .

محاسبه شتاب :

ما برای دیسک با غلتش کامل داریم :

$$\alpha_o = \frac{a_o}{r} = \frac{6}{0.3} = 20\,\frac{rad}{s} \quad ↻$$

دستگاه را روی o قرار داده و نقطه ی B را بررسی می کنیم :

$$\overset{\boxtimes\boxtimes}{a_B} = \overset{\boxtimes\!\!\checkmark\checkmark}{a_{o_t}} + \overset{\circ}{\cancel{a_{o_n}}} + \overset{\checkmark\checkmark}{\omega_o \times (\omega_o \times r_{oB})} + \overset{\checkmark\checkmark}{\dot{\omega}_o \times r_{oB}} + \overset{\circ}{2\omega_o \times \cancel{v_{rel}}} + \overset{\circ}{\cancel{a_{rel_t}}} + \overset{\circ}{\cancel{a_{rel_n}}}$$

$|a_{o_t}| = 6i$

$|\omega_o \times (\omega_o \times r_{op'})| = r_{op'}\,\omega_o^2 = 0.2 \times 10^2 \times (-\cos 53 i - \sin 53 j) = -12.03i - 15.97j$

$|\dot{\omega}_o \times r_{op'}| = r_{op'}\,\alpha_o = 0.2 \times 20 \times (\sin 53 i - \cos 53 j) = 3.19i - 2.4j$

$a_B = 6i - 12.03i - 15.97j + 3.19i - 2.4j = -2.84i - 18.4j$

سپس، دستگاه را روی A قرار داده و نقطه ی B را بررسی می کنیم :

$$\overset{\checkmark\checkmark}{a_B} = \overset{\circ}{\cancel{a_A}} + \overset{\checkmark\checkmark}{\omega_{AB} \times (\omega_{AB} \times r_{AB})} + \overset{\checkmark\boxtimes}{\dot{\omega}_{AB} \times r_{AB}} + \overset{\checkmark\checkmark}{2\omega_{AB} \times v_{rel}} + \overset{\checkmark\boxtimes}{a_{rel_t}} + \overset{\circ}{\cancel{a_{rel_n}}}$$

$$|a_B| = -2.84i - 18.4j$$

$$|\omega_{AB} \times (\omega_{AB} \times r_{AB})| = r_{AB}\omega_{AB}^{\ 2} = 0.9 \times \left(\frac{4}{3}\right)^2 = 1.6i \quad \rightarrow$$

α_{AB} ↺ ف ر ض

$$|\dot{\omega}_{AB} \times r_{AB}| = r_{AB}\alpha_{AB} = -0.9 \times \alpha_{AB} j$$

$$|2\omega_{AB} \times v_{rel}| = 2 \times \left(\frac{4}{3}\right) \times 4.6 = 12.26j$$

a_{rel_t} $\rightarrow$ ف ر ض

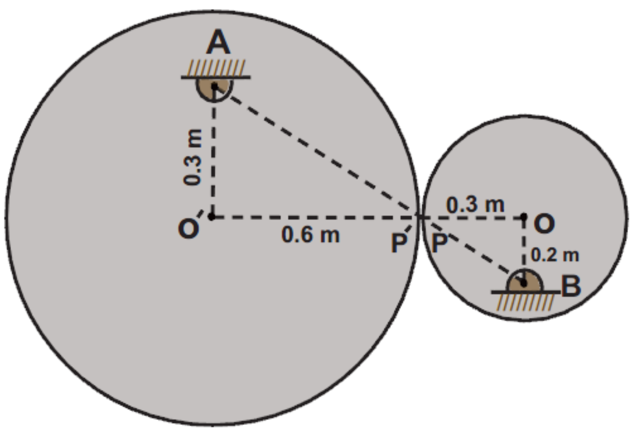
$$|a_{rel_t}| = a_{rel_t} i$$

$$-2.84i - 18.4j = 1.6i - 0.9 \times \alpha_{AB} j + 12.26j + a_{rel_t} i \Rightarrow \begin{cases} \alpha_{AB} = 34.06 \\ a_{rel_t} = -4.44 \end{cases}$$

در بالا a_{rel_t} مقدارش معلوم نیست ، ولی راستای آن معلوم است . a_{rel_t} در راستای افقی می باشد . و مقدار آن را مثبت فرض کردیم که با بدست آمدن مقدار آن، فرض ما نیز نادرست می باشد و جهت آن به سمت راست می باشد، اما فرض ما برای ↺ α_{AB} درست بود .

(بکوشیم کوشیدنی مردوار - رگ جان به کوشش کنیم استوار)

مثال پنجم :



در این مسئله ما دو دیسکی داریم، که با هم تماس دارند.

داده های مسئله : $\begin{cases} \omega_{o'} = 2\dfrac{rad}{s} \circlearrowleft \\ \alpha_{o'} = 3\dfrac{rad}{s^2} \circlearrowleft \end{cases}$. خواسته های مسئله : $\begin{cases} \omega_B = ? \\ \alpha_B = ? \end{cases}$.

حل سوال :

محاسبه درجه ی آزادی :

$3n-q=3\times2-6=0$

مکانیزم مسئله ما دارای دو عضو میباشد .(دو تا دیسک)
با فرض غلتش کامل گرفتن بین دودیسک تعداد مجهولات ما ۶ عدد می باشد .(مفصل های A,B و نقطه P که در آنها غلتش کامل داریم.)

نکته مهم :
باز هم می گویم و تکرار می کنم . این قسمت مهمترین قسمت حل مسئله است.
در این مسئله با توجه به درجه آزادی ما بایک مسئله استاتیکی سرو کار داریم، درحالی که این مسئله دینامیکی است. در نتیجه با توجه به اینکه یک دسته ورودی داریم، باید یک درجه آزادی داشته باشیم، پس حتما بین دودیسک لغزش وجود دارد.
پس درجه آزادی به صورت زیر می شود :

$3n-q=3\times2-5=1$

محاسبه سرعت :

دستگاه را روی A قرار داده و نقطه ی P را بررسی می کنیم :

$$\overset{\checkmark\times}{v_P}=\overset{\circ}{\cancel{v_A}}+\overset{\checkmark\checkmark}{\omega_A\times r_{AP}}+\overset{\checkmark\times}{v_{rel}}$$

در بالا v_{rel} وجود دارد ،چون لغزش داریم ومقدارش معلوم نیست ، ولی راستای آن معلوم است . v_{rel} در راستای مماس مشترک دو دیسک می باشد . یک جهت فرضی برای آن در نظر گرفته و مسئله را حل می کنیم .

ω_B ↻ فرض

$|v_P|=r_{oP}\omega_B=0.36\omega_B$

$|\omega_{AB}\times r_{AP}|=0.67\times2=1.34$

v_{rel} ↓ فرض

$|v_{rel}|=-v_{rel}\,j$

$$0.36\omega_B\left(\sin 33.69i+\cos 33.69j\right)=1.34\left(\sin 26.56i+\cos 26.56j\right)-v_{rel}\,j\Rightarrow\begin{cases}v_{rel}=0.3 & \downarrow\\ \omega_{AB}=3 & \circlearrowright\end{cases}$$

فرض های ما همگی درست بود.(چون مقادیر مثبت در آمدند).

محاسبه شتاب :

دستگاه را روی A قرار داده و نقطه ی P را بررسی می کنیم :

$$\overset{\checkmark\boxtimes}{a_{P_t}}+\overset{\checkmark\checkmark}{a_{P_n}}=\overset{\circ}{\cancel{a_A}}+\overset{\checkmark\checkmark}{\omega_A\times(\omega_A\times r_{AP})}+\overset{\checkmark\checkmark}{\dot{\omega}_A\times r_{AP}}+\overset{\checkmark\checkmark}{2\omega_A\times v_{rel}}+\overset{\checkmark\boxtimes}{a_{rel_t}}+\overset{\checkmark\checkmark}{a_{rel_n}}$$

α_B ↻ فرض

$$\left|a_{P_t}\right|=0.36\times\alpha_B\times(\sin 33.69i+\cos 33.69j)$$

$$\left|a_{P_n}\right|=0.36\times 9=3.2\times(\cos 33.69i-\sin 33.69j)$$

$$\left|\omega_A\times(\omega_A\times r_{AP})\right|=r_{AP}\omega_A{}^2=6.7\times 2^2=2.68\times(-\cos 26.56i+\sin 26.56j)$$

$$\left|\dot{\omega}_A\times r_{AP}\right|=r_{AP}\alpha_A=3\times 0.67=2.01\times(\sin 26.56i+\cos 26.56j)$$

$$\left|2\omega_A\times v_{rel}\right|=2\times 2\times 0.3=1.2i$$

$$\left|a_{rel_n}\right|=\frac{rR(\omega_{o'}\pm\omega_o)^2}{r+R}=\frac{0.3\times 0.6\times(3+2)^2}{0.3+0.6}=5i$$

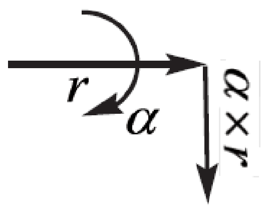
a_{rel_t} ↓ فرض

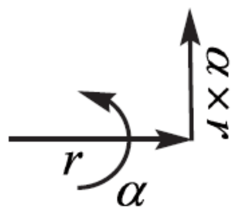
$$\left|a_{rel_t}\right|=-a_{rel_t}j$$

تعیین جهت و یادگیری آن برای همیشه :

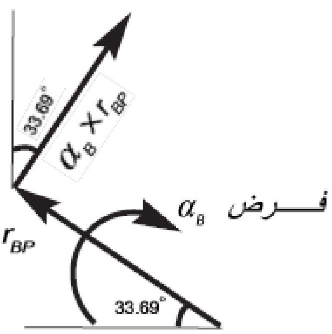
$\left|a_{P_t}\right|=$ مقدار آن برابر با $r_{BP}\alpha_B$ است. راستا و جهت آن از طریق شکل های زیر تعیین می شود:

(این شکل ها را لازم نیست بکشید ، محض یاد آوری است.)

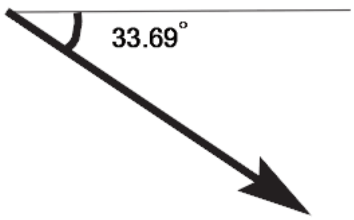




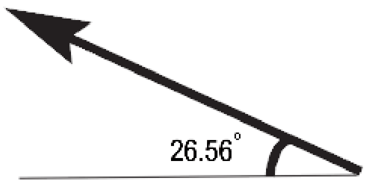
حال راستا و جهت آن را مشخص می کنیم :



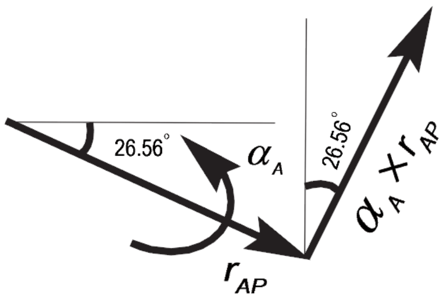
$\left|a_{P_n}\right| =$ مقدار آن برابر با $r_{BP}\omega_B{}^2$ است. راستا و جهت آن نیز به سمت مرکز دائمی دوران میباشد.



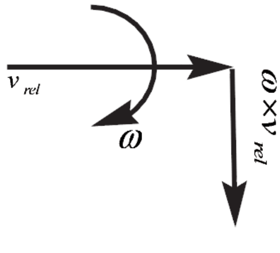
$\left|\omega_A \times (\omega_A \times r_{AP})\right| =$ مقدار آن برابر با $r_{AP}\omega_A{}^2$ است. راستای آن نیز عکس جهت r است.
(یادآوری : r فاصله ی دستگاه تا نقطه ی مورد بررسی)

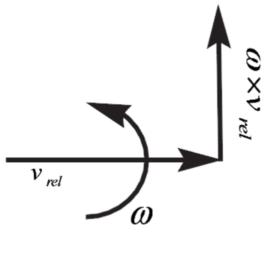


$\left|\dot{\omega}_A \times r_{AP}\right| =$ مقدار آن برابر با $r_{AP}\alpha_A$ است. حال راستا و جهت آن را مشخص می کنیم :

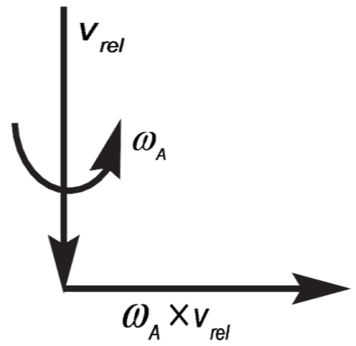


$\left|2\omega_A \times v_{rel}\right| =$ مقدار آن برابر با $2\omega_A v_{rel}$ است. راستا و جهت آن از طریق شکل های زیر تعیین می شود:
(این شکل ها را لازم نیست بکشید ، محض یاد آوری است.)

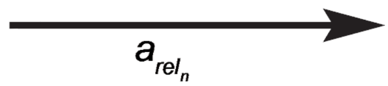




حال راستا و جهت آن را مشخص می کنیم :



$\left|a_{rel_n}\right| =$ مقدار آن برابر با $\frac{rR\left(\omega_{o'} \pm \omega_o\right)^2}{r+R}$ است.(چون اتصال دو دیسکی است که هر کدام دارای سرعت زاویه ای هستند). راستا و جهت آن نیز از نقطه ی مورد بررسی به سمت مرکز انحنا می باشد. که در اینجا مرکز انحنای نقطه ی P به سمت O است.

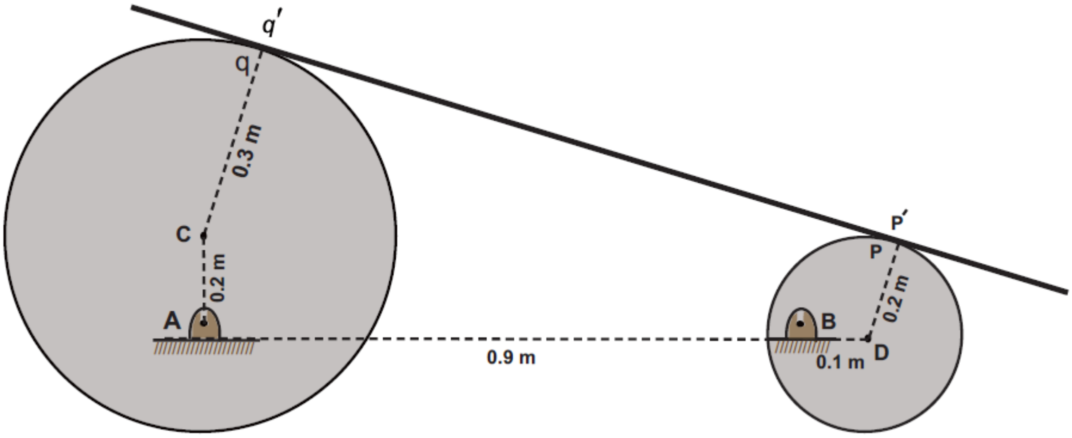


$\left|a_{rel_t}\right| =$ چون لغزش داریم a_{rel_t} وجود دارد. مقدار آن مشخص نیست. راستای آن خط مماس مشترک دو دیسک می باشد.ولی جهت آن معلوم نیست ، ما فرضی آن را به طرف پایین در نظر می گیریم .اگر مقدار آن منفی درآمد فرض ما اشتباه و اگر مثبت بود فرض ما درست است.

خوب!! تعیین راستا وجهت ها در این سوال تموم شد . فکر کنم دیگه مشکلی نداشته باشید. حل مسئله هم فقط جایگذاری است ، این رو به عهده شما میگذارم.

(زندگی جنگست و تدبیر معاش – زندگی خواهی، چو مردان کن تلاش)

مثال ششم :



دو دیسکی داریم که هر کدام دارای مرکز دائمی دوران می باشند.میله ای داریم که در دو نقطه با این دیسک ها در تماس است .

داده های مسئله = $\begin{cases} \omega_C = 3\dfrac{rad}{s} \circlearrowright \\ \alpha_C = 4\dfrac{rad}{s^2} \circlearrowright \end{cases}$ و $\begin{cases} \omega_D = 2\dfrac{rad}{s} \circlearrowleft \\ \alpha_D = 3\dfrac{rad}{s^2} \circlearrowleft \end{cases}$.

مجهولات را بیابید.

حل سوال :

محاسبه درجه ی آزادی :

$$3n - q = 3\times3 - 8 = 1$$

مکانیزم مسئله ما دارای سه عضو میباشد .(دو تا دیسک و یک میله)
با فرض عدم لغزش دو نقطه p,q تعداد مجهولات ما ۸ عدد می باشد .(مفصل های A,B و نقاط p,q که در آنها عدم لغزش داریم.)
برای میله ما لفظ غلتش کامل را بکار نمی بریم و از کلمه عدم لغزش استفاده می کنیم .

نکته مهم :
باز هم می گویم و تکرار می کنم . این قسمت مهمترین قسمت حل مسئله است.
در این مسئله با توجه به اینکه درجه آزادی ما یک می باشد و دو دسته ورودی داریم، پس حتما در یکی از نقاط p,q لغزش وجود دارد.
پس درجه آزادی به صورت زیر می شود :

$$3n - q = 3\times3 - 7 = 2$$

حالت اول : در نقطه q دارای لغزش هستیم و در p عدم لغزش.

محاسبه درجه آزادی :

$$3n-q=3\times3-7=2$$

دودسته ورودی و دو درجه آزادی.

محاسبه سرعت :

ابتدا دستگاه مختصات را بر روی نقطه D قرار می دهیم و سرعت را در نقطه ی P' محاسبه می کنیم و داریم :

$$\overset{\boxtimes\boxtimes}{v_{p'}}=\overset{\checkmark\checkmark}{v_D}+\overset{\checkmark\checkmark}{\omega_D\times r_{Dp'}}+\overset{\circ}{\cancel{v}_{rel}}$$

در بالا مشاهده می شود که v_{rel} صفر است . این به این دلیل است که در نقطه ی P' عدم لغزش داریم.

حال دستگاه را روی A قرار داده و نقطه ی P' را بررسی می کنیم . پس داریم :

$$\overset{\checkmark\checkmark}{v_q}=\overset{\checkmark\checkmark}{v_{p'}}+\overset{\checkmark\boxtimes}{\omega_{p'q}}\times r_{p'q}+\overset{\checkmark\boxtimes}{v_{rel}}$$

در بالا مشاهده می شود که v_{rel} صفرنیست . این به این دلیل است که در نقطه ی q لغزش داریم.
و راستای آن مماس مشترک بین میله و دیسک است.
به راحتی ، مقادیر $\omega_{p'q}$ و v_{rel} بدست می آید.

محاسبه شتاب :

ابتدا دستگاه مختصات را بر روی نقطه D قرار می دهیم و سرعت را در نقطه ی P' محاسبه می کنیم و داریم :

$$\overset{\boxtimes\boxtimes}{a_{p'}}=\overset{\checkmark\checkmark}{a_{D_n}}+\overset{\checkmark\checkmark}{a_{D_t}}+\overset{\checkmark\checkmark}{\omega_D\times(\omega_D\times r_{DP'})}+\overset{\checkmark\checkmark}{\dot{\omega}_D\times r_{DP'}}+\overset{\circ}{2\omega_o\times \cancel{v}_{rel}}+\overset{\checkmark\checkmark}{a_{rel_n}}+\overset{\circ}{\cancel{a}_{rel_t}}$$

همه ی موارد بالا را در قسمت های قبلی به طور مفصل بیان کردیم. فقط در مورد a_{rel_n} که هم مقدارش و هم راستا و جهت آن را داریم. راستای آن به سمت مرکز انحنای دیسک است و مقدارش برابر با $r\left(\omega_D\pm\omega_{p'q'}\right)^2$ است.(مخالف جهت $+$ و هم جهت $-$)

حال دستگاه را روی A قرار داده و نقطه ی P' را بررسی می کنیم . پس داریم :

$$\overset{\surd\surd}{a_{q_t}}+\overset{\surd\surd}{a_{q_n}}=\overset{\surd\surd}{a_{p'}}+\overset{\surd\surd}{\omega_{p'q}\times(\omega_{p'q}\times r_{p'q})}+\overset{\surd\times}{\dot{\omega}_{p'q}\times r_{p'q}}+\overset{\surd\surd}{2\omega_{p'q}\times v_{rel}}+\overset{\surd\times}{a_{rel_t}}+\overset{\surd\surd}{a_{rel_n}}$$

در مورد a_{rel_t} که مقدارش معلوم نیست ولی راستای آن را داریم. راستای آن مماس مشترک بین میله و دیسک است.

مقادیر $\alpha_{p'q}$ و a_{rel_t} بدست می آید.

(برو سعی کن تا چو گل در بهار – بخندی به رخساره ی روزگار)

نکات مهم :

۱- دراین قسمت فقط روش حرکت نسبی توضیح داده شده است که به احتمال زیاد دو مسئله از این قسمت در امتحان می آید .

۳- ممکن است یک سوال از روش مستقیم یا مرکز آنی در امتحان مطرح شود.

۲- ممکن است اشتباهاتی در حل مسئله یا تایپ وجود داشته باشد که شما می توانید با ایمیل من در تماس باشید.

۳- این جزوه با بررسی پنج جزوه استاد حاجی موسی نوشته شده است که به صورت کاملا رایگان در اختیار شما قرار گرفته است ، امیدوارم از خواندن آن لذت ببرید.

(سخایی که بی دانش آید به جوش – ز طبل دریده برآرد خروش)