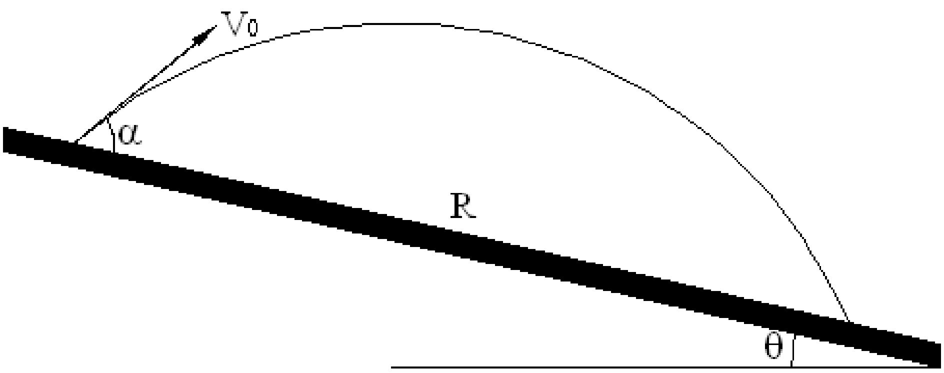
www.20file.org

بسمه تعالی

سوالات میان ترم دینامیک — زمان پاسخگویی:۱۲۰دقیقه

نام ونام خانوادگی: — شماره دانشجویی:

۱-پرتابه ای مطابق شکل با سرعت اولیه V_0 تحت زاویه α نسبت به یک سطح شیب دار پرتاب می شود.اگر زاویه سطح شیبدار با افقθ باشد برد پرتابه(R) را محاسبه کنید.(۱۵ نمره)

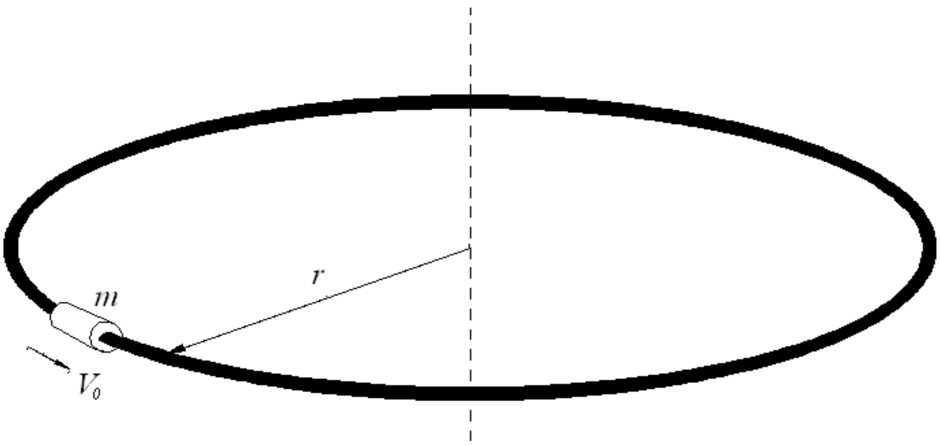


۲-نقطه مادی با سرعت ثابت V در امتداد منحنی فضایی $\begin{cases} x = cos\theta \\ y = \sin\theta \\ z = \theta \end{cases}$ حرکت می کند.مطلوب است:

الف:شتاب نقطه مادی(۸ نمره)

ب:شعاع انحناء مسیر(۲ نمره)

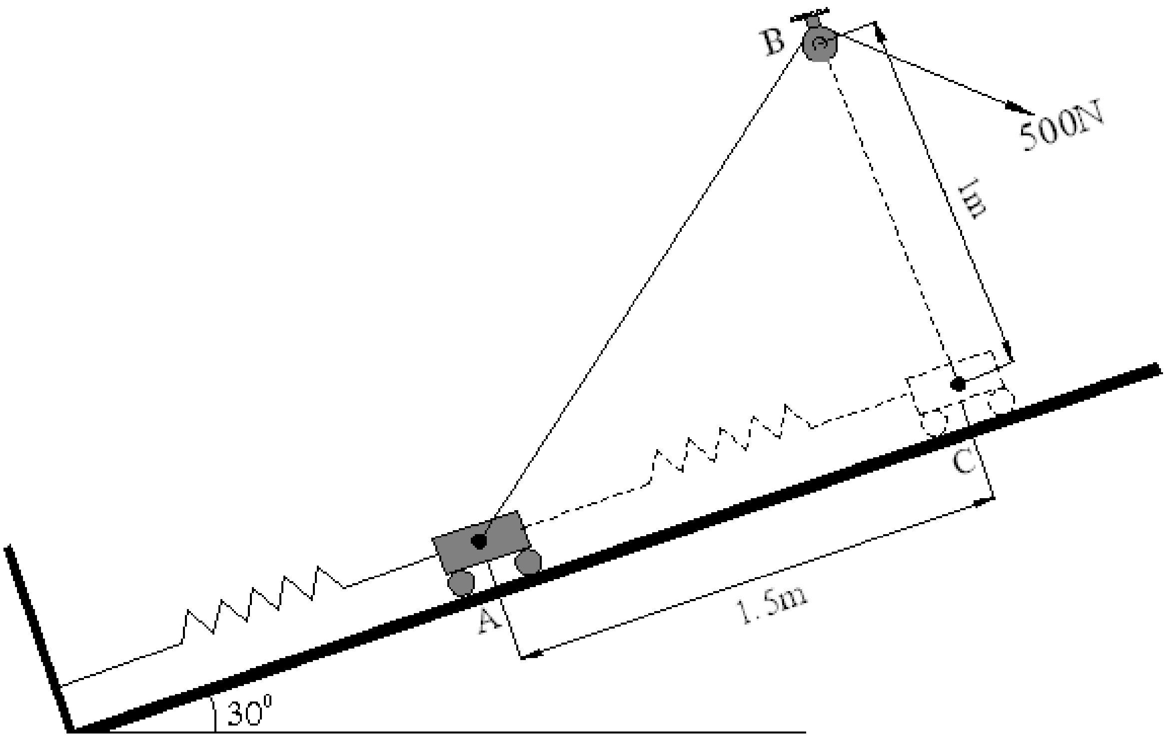
۳-به طوقه کوچکی به جرم m،سرعت اولیهV_0 بر روی مسیر مدور افقی ساخته شده از یک میله نازک، داده می شود.اگر ضریب اصطکاک جنبشی μ_k باشد،فاصله پیموده شده توسط طوقه را پیش از رسیدن به حالت سکون تعیین نمایید.(۲۰ نمره)



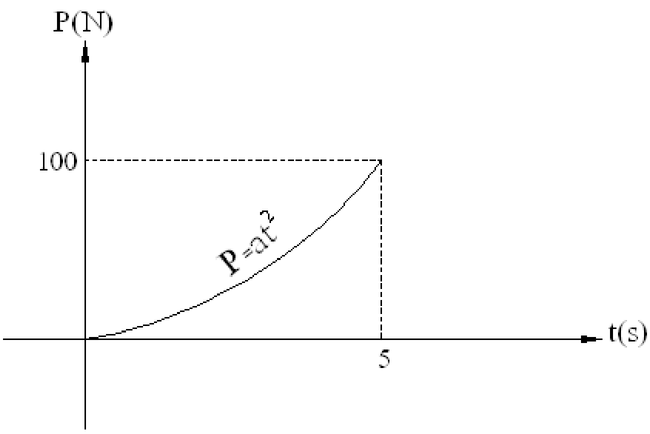
www.20file.org

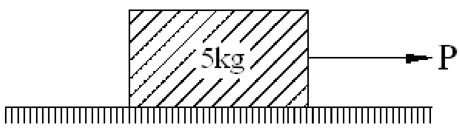
www.20file.org

۴-لغزنده ای به جرم 10kg توسط نیروی ثابت 500N به سمت بالای سطح شیبدار حرکت می کند.سختی فنر متصل به لغزنده 100N/m بوده و دارای کشیدگی 40cm در نقطه A می باشد که در این نقطه لغزنده از حال سکون رها می گردد. اگر ضریب اصطکاک جنبشی بین لغزنده و سطح $\mu_k = 0.3$ باشد سرعت لغزنده را به هنگام گذشتن از نقطهC محاسبه کنید.(۱۵ نمره)



۵-نیروی P که بصورت زیر بر حسب زمان تغییر می کند به جعبه ای به جرم 5kg که در حال سکون است وارد می شود. اگر ضریب اصطکاک ایستایی $\mu_s = 0.5$ و ضریب اصطکاک جنبشی $\mu_k = 0.4$ باشد سرعت جعبه را پس از ۵ ثانیه محاسبه کنید.(۱۰ نمره)

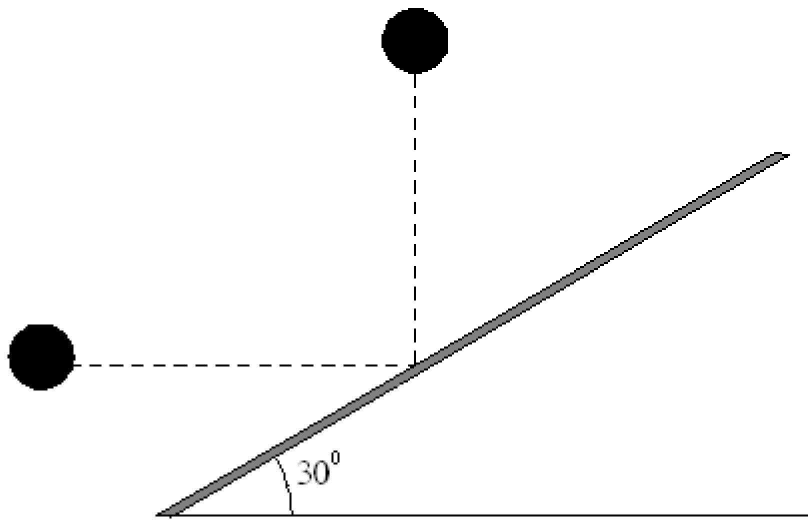




www.20file.org

www.20file.org

۶-گلوله ای مطابق شکل به صفحه ای که با افق زاویه ۳۰ درجه می سازد برخورد می کند.اگر امتداد سرعت گلوله درست در لحظه پس از برخورد افقی باشد ضریب بازگشت e را تعیین کنید.(۱۰ نمره)



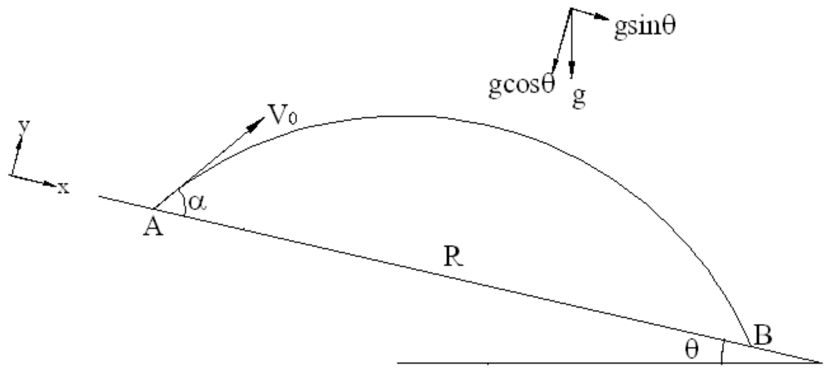
موفق باشید.

www.20file.org

www.20file.org

پاسخ سوالات میان ترم دینامیک

حل سوال ۱:



$$V_{0x} = V_0 cos\alpha$$

$$V_{0y} = V_0 sin\alpha$$

$$V_x = V_{0x} + (\mathrm{g}\sin\theta)\mathrm{t} \rightarrow V_x = V_0 cos\alpha + (\mathrm{g}\sin\theta)\mathrm{t}$$

$$V_y = V_{0y} - (\mathrm{g}\cos\theta)\mathrm{t} \rightarrow V_y = V_0 sin\alpha - (\mathrm{g}\cos\theta)\mathrm{t}$$

$$1): \mathrm{x} = \int V_x \mathrm{dt} = \int (V_0 cos\alpha + (\mathrm{g}\sin\theta)\mathrm{t})\mathrm{dt} = (V_0 cos\alpha)t + \frac{1}{2}\mathrm{g}t^2\sin\theta$$

$$2): y = \int V_y \mathrm{dt} = \int (V_0 sin\alpha - (\mathrm{g}\cos\theta)\mathrm{t})\mathrm{dt} = (V_0 sin\alpha)t - \frac{1}{2}\mathrm{g}t^2\cos\theta$$

در لحظه بر خورد به سطح داریم $y=0$ بنابراین از معادله (2) داریم:

$$y = 0 \rightarrow (V_0 sin\alpha)t - \frac{1}{2}\mathrm{g}t^2\cos\theta = 0 \rightarrow \mathrm{t}(V_0 sin\alpha - \frac{1}{2}\mathrm{gt}\cos\theta) = 0$$

$$t_A = 0 \text{ و } \quad V_0 sin\alpha - \frac{1}{2}\mathrm{gt}\cos\theta = 0 \rightarrow t_B = \frac{2V_0 sin\alpha}{\mathrm{g}\cos\theta}$$

حال اگر در معادله (1) جایگذاری کنیم $t = t_B$ برد پرتابه بدست می آید بنابراین:

$$1): \mathrm{R} = (V_0 cos\alpha)t_B + \frac{1}{2}\mathrm{g}t_B{}^2\sin\theta$$

$$R = \frac{2V_0{}^2 sin\alpha\, cos\alpha}{\mathrm{g}\cos\theta} + \frac{1}{2}\mathrm{g}(\frac{2V_0 sin\alpha}{\mathrm{g}\cos\theta})^2\sin\theta$$

www.20file.org

www.20file.org

$$R = \frac{2{V_0}^2 sin\alpha \ cos\alpha}{\mathrm{gcos\theta}} + \frac{2{V_0}^2 sin^2\alpha}{\mathrm{gcos^2\theta}}\mathrm{sin\theta}$$

$$\boxed{\mathrm{R} = \frac{2{V_0}^2 sin\alpha \ \ cos\alpha + sin\alpha \ tan\mathrm{\theta})}{\mathrm{gcos\theta}}}$$

حل سوال ۲:

الف:

$$x = cos\theta \rightarrow \dot{x} = -\dot{\theta} sin\theta \rightarrow \ddot{x} = -\ddot{\theta} sin\theta - \dot{\theta}^2 cos\theta$$

$$y = sin\theta \rightarrow \dot{y} = \dot{\theta} cos\theta \rightarrow \ddot{y} = \ddot{\theta} cos\theta - \dot{\theta}^2 sin\theta$$

$$z = \theta \rightarrow \dot{z} = \dot{\theta} \rightarrow \ddot{z} = \ddot{\theta}$$

$$V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \sqrt{\dot{\theta}^2 sin^2\theta + \dot{\theta}^2 cos^2\theta + \dot{\theta}^2} = \dot{\theta}\sqrt{(sin^2\theta + cos^2\theta + 1)}$$

$$V = \sqrt{2}\dot{\theta}$$

چون سرعت ثابت است پس:

$$V = \sqrt{2}\dot{\theta} \rightarrow \dot{V} = \sqrt{2}\ddot{\theta} = 0 \rightarrow \ddot{\theta} = 0$$

$$\ddot{x} = -\dot{\theta}^2 cos\theta \ , \ \ddot{y} = -\dot{\theta}^2 sin\theta \ , \ddot{z} = 0$$

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} = \sqrt{\dot{\theta}^4 sin^2\theta + \dot{\theta}^4 cos^2\theta} = \dot{\theta}^2\sqrt{sin^2\theta + cos^2\theta}$$

$$a = \dot{\theta}^2$$

$$V = \sqrt{2}\dot{\theta} \rightarrow V^2 = 2\dot{\theta}^2 \rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{V^2}{2}$$

$$\boxed{a = \frac{V^2}{2}}$$

ب:چون سرعت ثابت است بنابراین شتاب مماسی $a_t = 0$ و شتاب بدست آمده معرف شتاب نرمال است پس:

www.20file.org

www.20file.org

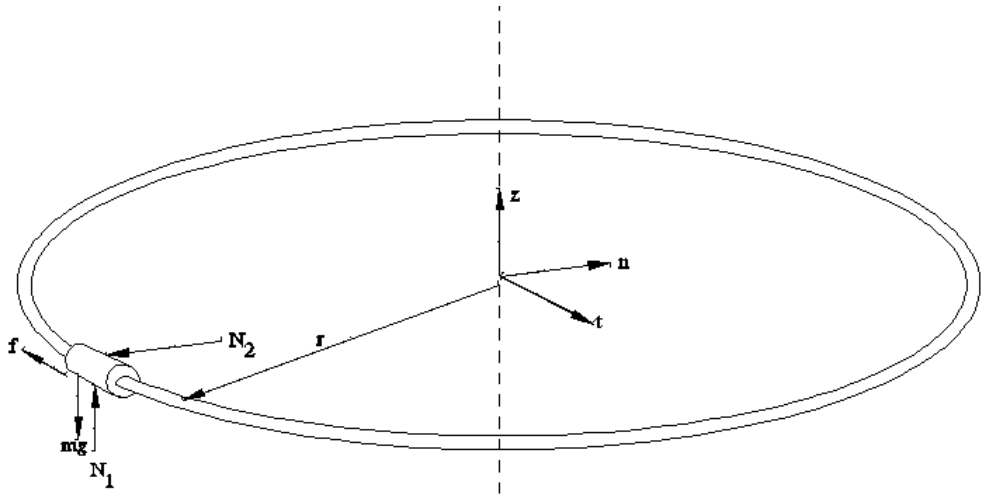
$$a_n = a = \frac{V^2}{2}$$

$$a_n = \frac{V^2}{\rho} \to \frac{V^2}{2} = \frac{V^2}{\rho} \to \rho = 2$$

$$\boxed{\rho = 2}$$

حل سوال ۳:

دیاگرام آزاد را رسم می کنیم:



$$\sum F_t = ma_t \to -f = ma_t \to (1): -\mu_k N = ma_t$$

$$\sum F_n = ma_n \to -N_2 = ma_n \to (2): N_2 = -m\frac{V^2}{r}$$

$$\sum F_z = ma_z \to N_1 - mg = 0 \to (3): N_1 = mg$$

$$N = \sqrt{{N_1}^2 + {N_2}^2} = \sqrt{m^2g^2 + m^2V^4/r^2} \to N = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{r}}\sqrt{r^2g^2 + V^4}$$

$$1) \to -\mu_k\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{r}}\sqrt{r^2g^2 + V^4} = ma_t \to a_t = -\frac{\mu_k}{\mathrm{r}}\sqrt{r^2g^2 + V^4}$$

$$a_t\mathrm{ds} = \mathrm{VdV} \to -\frac{\mu_k}{\mathrm{r}}\sqrt{r^2g^2 + V^4}ds = \mathrm{VdV} \to ds = -\frac{r}{\mu_k}\frac{\mathrm{VdV}}{\sqrt{r^2g^2 + V^4}}$$

www.20file.org

$$\int ds=\int_{V_0}^{0}-\frac{r}{\mu_k}\frac{\text{VdV}}{\sqrt{V^4+r^2g^2}}\rightarrow s=\frac{r}{\mu_k}\int_{0}^{V_0}\frac{\text{VdV}}{\sqrt{V^4+r^2g^2}}$$

$$u=V^2\rightarrow du=2VdV$$

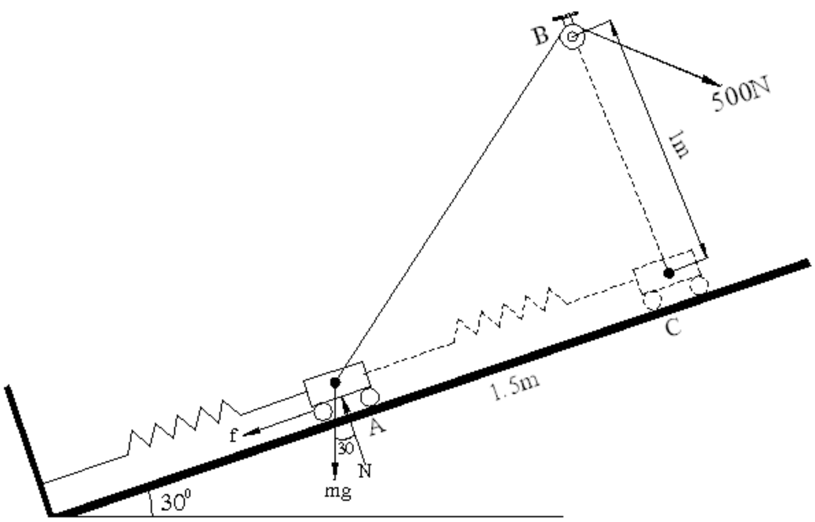
$$\mathrm{s}=\frac{r}{2\mu_k}\int_0^{{V_0}^2}\frac{\text{du}}{\sqrt{u^2+r^2g^2}}\rightarrow \mathrm{s}=\frac{r}{2\mu_k}\left[\ln\left(u+\sqrt{u^2+r^2g^2}\right)\right]_0^{{V_0}^2}$$

$$\mathrm{s}=\frac{r}{2\mu_k}\left(\ln\left({V_0}^2+\sqrt{{V_0}^4+r^2g^2}\right)-\ln\left(rg\right)\right)$$

$$\boxed{\mathrm{s}=\frac{r}{2\mu_k}ln\left(\frac{{V_0}^2+\sqrt{{V_0}^4+r^2g^2}}{\mathrm{r}g}\right)}$$

حل سوال ۴:

دیاگرام آزاد شکل را رسم می کنیم.



در اینجا نیروی 500N و نیروی اصطکاک نیروی خارجی هستن و داریم:

$$W=U_f+U_F$$

www.20file.org

$$W = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$$

$$U_f = -f \times \overline{AC} = -\mu_k N d \rightarrow U_f = -\mu_k mgd\cos\theta$$

$$U_f = -0.3 \times 10 \times 9.81 \times 1.5 \times \cos 30° = -38.2\text{j}$$

$$U_F = F \times (\overline{AB} - \overline{BC}) = 500 \times \left(\sqrt{1.5^2 + 1^2} - 1\right) = 401.4\text{j}$$

$$W = 401.4 - 38.2 = 363.2j$$

$$\Delta T = \frac{1}{2}m({v_C}^2 - {v_0}^2) = \frac{1}{2} \times 10 \times ({v_C}^2 - 0^2) = 5{v_C}^2$$

$$\Delta V_g = mg\Delta h = 10 \times 9.81 \times 1.5\sin 30° = 73.6j$$

$$\Delta V_e = \frac{1}{2}k({x_C}^2 - {x_A}^2) = \frac{1}{2} \times 100 \times ((1.5 + 0.4)^2 - 0.4^2) = 172.5j$$

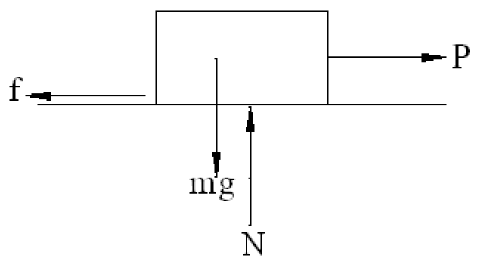
$$W = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e \rightarrow 363.2 = 5{v_C}^2 + 73.6 + 172.5$$

$$5{v_C}^2 = 117.1 \rightarrow {v_C}^2 = 23.4 \rightarrow v_C = \sqrt{23.4}$$

$$\boxed{v_C = 4\,84 m/s}$$

حل سوال ۵:

$$P = \text{a}t^2 \rightarrow 100 = \text{a}(5)^2 \rightarrow \text{a} = \frac{100}{25} = 4$$
$$P = 4t^2$$



www.20file.org

www.20file.org

از اصل مومنتم خطی داریم:

$$\Delta G = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum F\right) \mathrm{dt} \rightarrow (1): m(v - v_0) = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum F\right) \mathrm{dt}$$

ابتدا باید ببینم تا چه زمانی نیروی اصطکاک نیروی غالب بوده و مانع حرکت جسم می شود.

$$f_s = 4t^2 \rightarrow \mu_s N = 4t^2 \rightarrow \mu_s mg = 4t^2 \rightarrow 0.5 \times 5 \times 9.81 = 4t^2 \rightarrow t^2 = 6.13$$

$$t = \sqrt{6.13} = 2.48s$$

بنابراین تا زمان $t = 2.48s$ جسم ساکن است وپس از آن جسم حرکت کرده و نیروی اصطکاک جنبشی داریم بنابراین:

$$1) \rightarrow m(v - v_0) = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum F\right) \mathrm{dt} \rightarrow v - v_0 = \frac{1}{m} \int_{t_1}^{t_2} (\mathrm{P} - f_\mathrm{k}) \mathrm{dt}$$

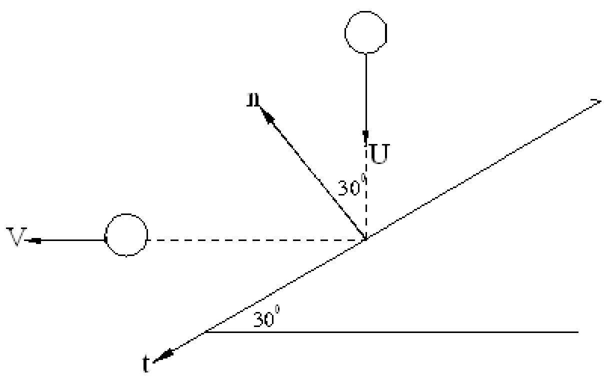
$$v_0 = 0 \rightarrow v = \frac{1}{5} \int_{2.48}^{5} (4t^2 - \mu_k mg) \mathrm{dt} = \frac{1}{5} \int_{2.48}^{5} (4t^2 - 19.6) \mathrm{dt}$$

$$v = \frac{1}{5} \left[\frac{4}{3} t^3 - 19.6t\right]_{2.48}^{5}$$

$$v = \frac{1}{5} \left[\left(\frac{4}{3}(5)^3 - 19.6(5)\right) - \left(\frac{4}{3}(2.48)^3 - 19.6(2.48)\right)\right]$$

$$\boxed{v = 19\ 4m/s}$$

حل سوال ۶:



فرض کنیم سرعت گلوله قبل از برخورد U وبعد از برخورد V باشد.

www.20file.org

www.20file.org

$$v_{1)t} = v'_{1)t}$$

$$e = \frac{v'_{2)n} - v'_{1)n}}{v_{1)n} - v_{2)n}}$$

که در اینجا زیرنویس 1 مربوط به گلوله و زیر نویس 2 مربوط به صفحه می باشد.چون صفحه ساکن است بنابراین:

$$e = \frac{-v'_{1)n}}{v_{1)n}}$$

$$v_{1)n} = -Ucos30°$$

$$v'_{1)n} = Vsin30°$$

$$1): e = \frac{-v'_{1)n}}{v_{1)n}} \rightarrow e = \frac{Vsin30°}{Ucos30°} = \frac{V}{\mathrm{U}} tan30°$$

$$2): v_{1)t} = v'_{1)t} \rightarrow Usin30° = Vcos30° \rightarrow \frac{V}{\mathrm{U}} = tan30°$$

$$2) in(1) \rightarrow e = \frac{V}{\mathrm{U}} tan30° \rightarrow e = (tan30°)^2 \rightarrow e = (\frac{\sqrt{3}}{3})^2$$

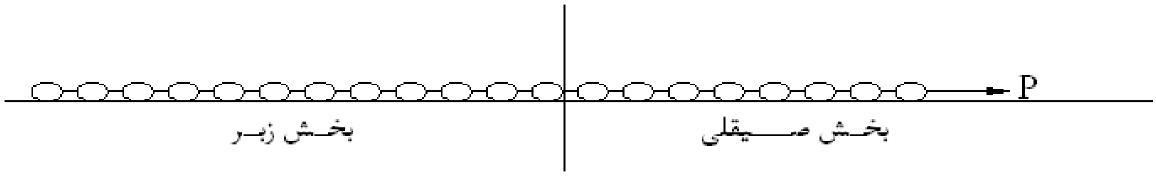
$$\boxed{e = \frac{1}{3}}$$

www.20file.org

www.20file.org

سوالات پایان ترم دینامیک

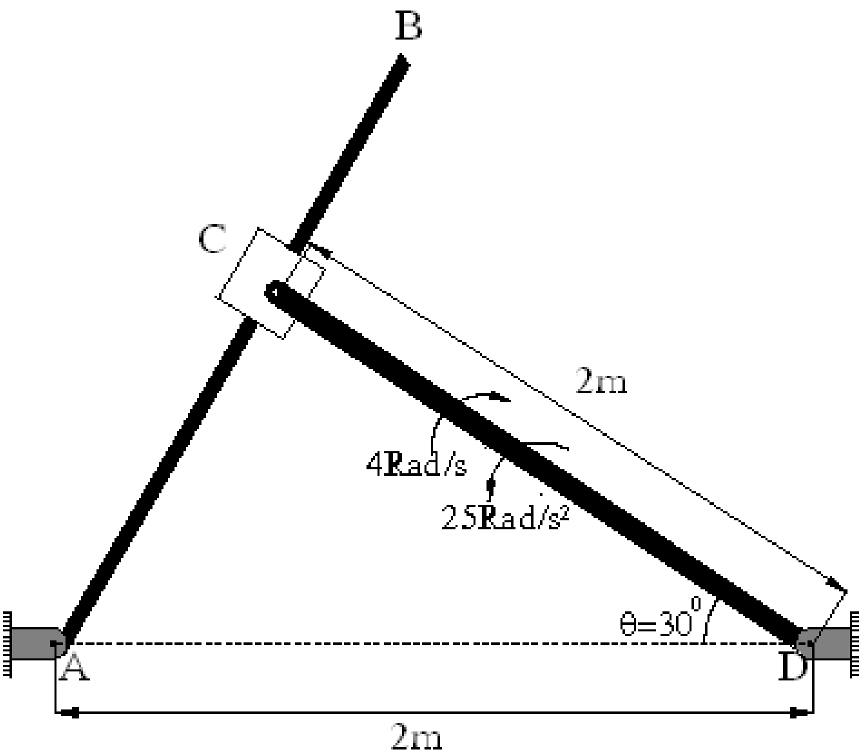
۱-یک زنجیر سنگین به طول L و جرم ρ بر واحد طول، با نیروی ثابت P در امتداد یک سطح افقی کشیده می شود.این سطح از دو قسمت صیقلی و زبر تشکیل شده است.در ابتدا زنجیر روی بخش زبر قرار دارد .اگر ضریب اصطکاک دینامیکی بین زنجیر و سطح زبر μ_k باشد سرعت زنجیر را هنگامی که آخرین دانه آن قسمت زبر را ترک می کند بیابید.(۱۵ نمره)



۲-میله CD در لحظه نشان داده شده دارای سرعت زاویه ای 4Rad/s ساعتگرد و شتاب زاویه ای $25Rad/s^2$ پادساعتگرد می باشد.مطلوب است:

الف:سرعت وشتاب لغزنده C(۱۵ نمره)

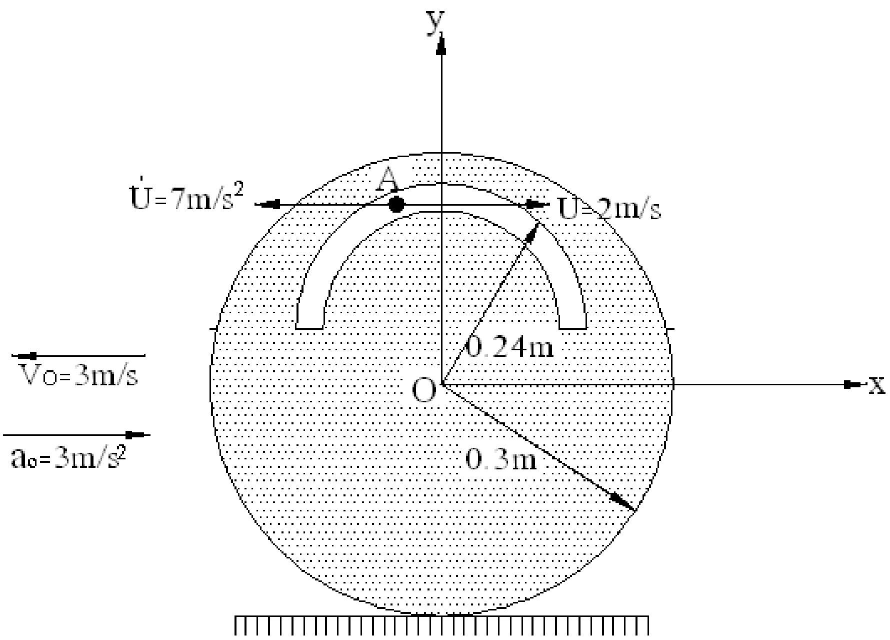
ب:سرعت زاویه ای و شتاب زاویه ای میله AB(۱۵ نمره)



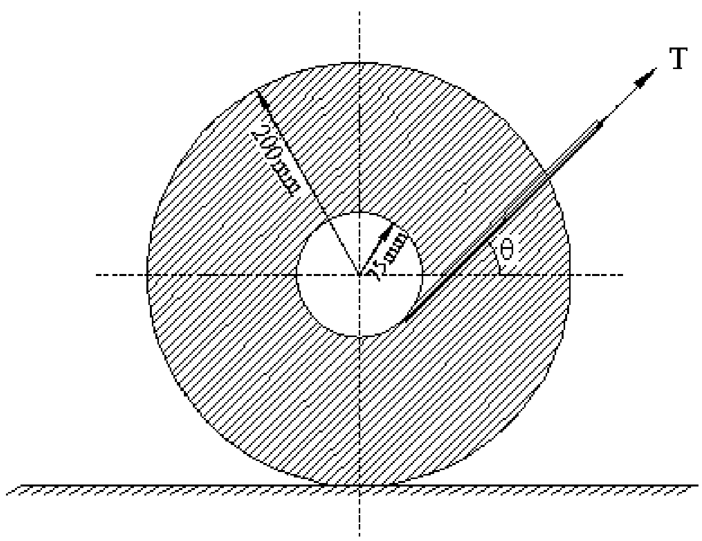
www.20file.org

www.20file.org

۳-دیسک ذیل بدون لغزش روی سطح افقی می غلتد و در لحظه نشان داده شده مرکز آن دارای سرعت وشتاب مشخص شده در شکل می باشد.در این لحظه ذره A دارای تندی حرکت $U = 2m/s$ و میزان تغییرات تندی $\dot{U} = 7m/s^2$ نسبت به دیسک مطابق شکل می باشد.سرعت و شتاب مطلق ذره A را تعیین کنید.(۱۵ نمره)



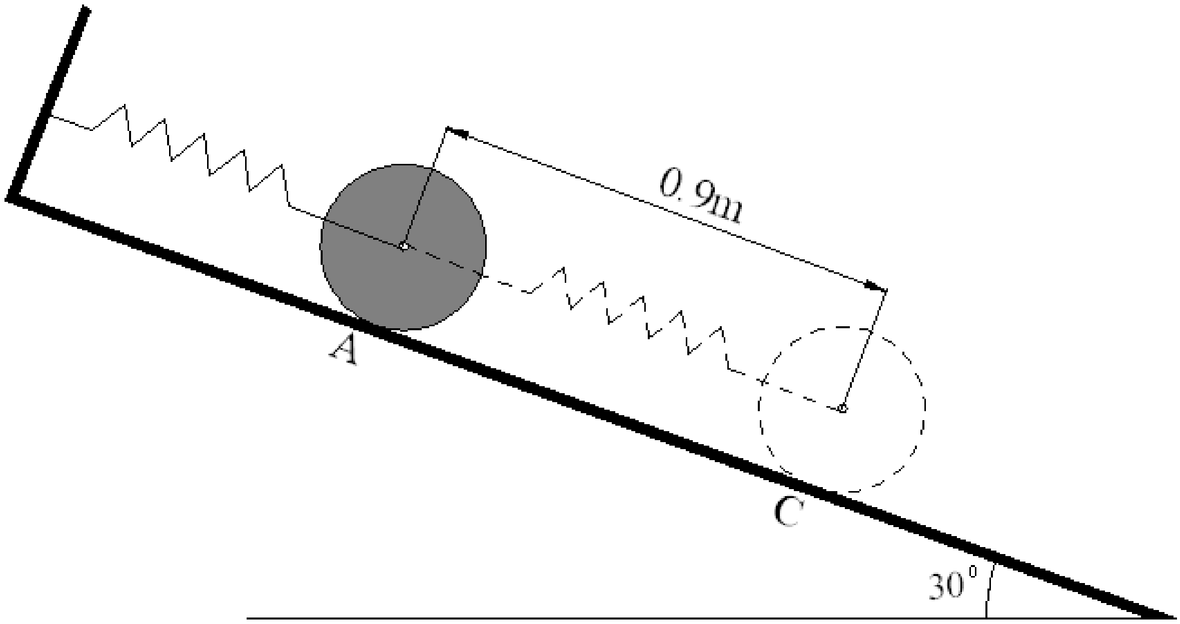
۴-دیسک مدوری به شعاع 200mm،جرم25kg و شعاع ژیراسیون $\rho_G = 175mm$ دارای یک شیار مدور هم مرکز به شعاع 75mmمی باشد.نیروی پایای T تحت زاویه θ به ریسمان پیچانده شده دور شیار،مطابق شکل اعمال می شود.اگر T=40N،θ=۳۰°، μ_s =0.09 و μ_k =0.07 باشند شتاب زاویه ای و شتاب مرکز دیسک را محاسبه کنید.(۲۵ نمره)



www.20file.org

www.20file.org

۵-استوانه ای به جرم 10kg و شعاع$r=250mm$ بر روی یک سطح شیب دار مطابق شکل در نقطه A که کشیدگی فنر20cm است رها شده و غلتش خالص می کند.اگر سختی فنر 20N/m و ضریب اصطکاک جنبشی $\mu_k = 0.25$ باشد سرعت زاویه ای استوانه را در موقعیت C بیابید.(۲۵ نمره)



موفق باشید.

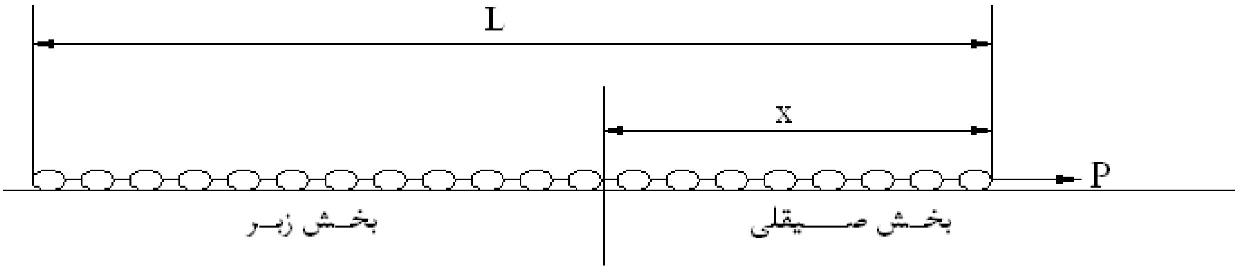
www.20file.org

www.20file.org

پاسخ سوالات پایان ترم دینامیک

حل سوال ۱:

فرض طول قسمتی از زنجیر که روی سطح صیقلی قرار داردx باشد.بنابراین در ابتدا که زنجیر روی سطح زبر قرار دارد x=0 و زمانی که زنجیر بخش زبر را ترک می کند x=Lاست.



نیروی اصطکاک:

$$f_k = \mu_k \rho g (L - x)$$

قانون دوم نیوتن:

$$\sum F = ma \rightarrow P - \mu_k \rho g (L - x) = \rho L a \rightarrow a = \frac{P}{\rho L} - \frac{\mu_k g (L - x)}{\mathrm{L}}$$

$$V dV = a dx \rightarrow V dV = \left[\frac{P}{\rho L} - \frac{\mu_k g (L - x)}{\mathrm{L}}\right] dx$$

$$\int_0^{\mathrm{V}} V dV = \int_0^L \left[\frac{P}{\rho L} - \frac{\mu_k g (L - x)}{\mathrm{L}}\right] dx$$

$$\frac{1}{2} V^2 = \left[\frac{P}{\rho L} x - \frac{\mu_k g}{\mathrm{L}}\left(\mathrm{L}x - \frac{x^2}{2}\right)\right]_0^{\mathrm{L}} \rightarrow \frac{1}{2} V^2 = \left[\frac{P}{\rho L}(\mathrm{L}) - \frac{\mu_k g}{\mathrm{L}}\left(\mathrm{L}^2 - \frac{\mathrm{L}^2}{2}\right)\right]$$

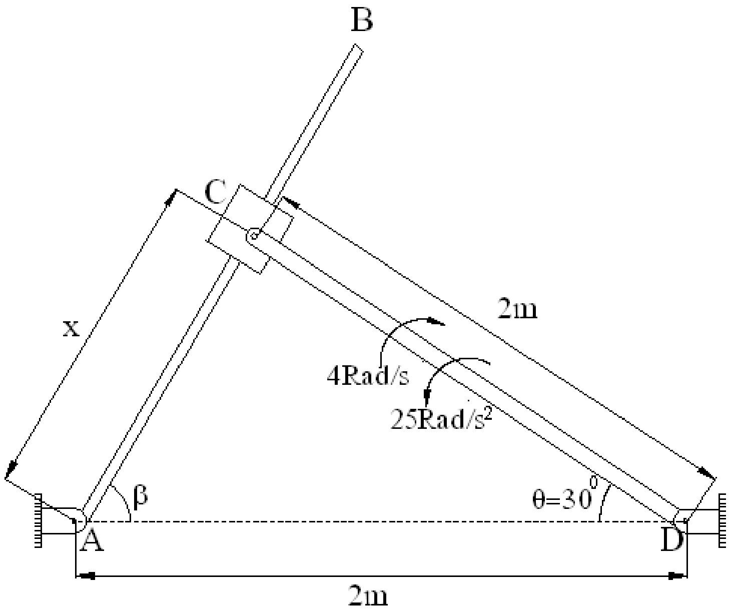
$$\frac{1}{2} V^2 = \frac{P}{\rho} - \frac{1}{2}\mu_k g L \rightarrow V^2 = \frac{2P}{\rho} - \mu_k g L$$

$$\boxed{V = \sqrt{\frac{2P}{\rho} - \mu_k g L}}$$

www.20file.org

www.20file.org

حل سوال ۲:



الف:ازنجایی که طول قسمتهای AD وCD برابر است پس:

$$\overline{AC} = 2\overline{AD}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \rightarrow (1): x = 4\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$2): \dot{x} = 4 \times \frac{1}{2}\dot{\theta}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \rightarrow \dot{x} = 2\omega_{CD}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \rightarrow V_C = 2 \times (-4) \times \cos 15°$$

$$\boxed{V_C = -7\ 72 m/s}$$

$$2) \rightarrow \ddot{x} = 2\ddot{\theta}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \dot{\theta}^2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \rightarrow a_C = 2\alpha_{CD}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - {\omega_{CD}}^2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$a_C = 2 \times 25 \times \cos 15° - (4)^2\sin 15°$$

$$\boxed{a_C = 44\ 15 m/s^2}$$

ب:از قضیه سینوس ها در مثلث داریم:

$$3): \frac{\sin\beta}{2} = \frac{\sin\theta}{x} \rightarrow x\sin\beta = 2\sin\theta$$

www.20file.org

www.20file.org

$4): \dot{x}\sin\beta \quad + x\dot{\beta}\cos\beta = 2\dot{\theta}\cos\theta \rightarrow \dot{x}\sin\beta \quad + x\omega_{AB}\cos\beta = 2\omega_{CD}\cos\theta$

$1) \rightarrow x = 4\sin 15° = 1.035m$

$$3) \rightarrow \frac{\sin\beta}{2} = \frac{\sin 30°}{1.035} \rightarrow \sin\beta = \frac{2\sin 30°}{1.035} = 0.966 \rightarrow \beta = \sin^{-1} 0.966 = 75°$$

از معادله(2) جایگذاری می کنیم: $\dot{x} = -7.72m/s$

$4) \rightarrow -7.72\sin 75° + 1.035\omega_{AB} = 2(-4)\cos 30°$

$1.035\omega_{AB} = 0.528 \rightarrow \omega_{AB} = 0.51Rad/s$

$\boxed{\omega_{AB} = 0.51Rad/s \text{ پاد ساعتگرد}}$

$4) \rightarrow \ddot{x}\sin\beta \quad + 2\dot{x}\dot{\beta}\cos\beta + x\ddot{\beta}\cos\beta - x\dot{\beta}^2\sin\beta = 2\ddot{\theta}\cos\theta - 2\dot{\theta}^2\sin\theta$

$44.15 \times \sin 75° + 2 \times (-7.72) \times 0.51 \times \cos 75° + 1.035 \times \alpha_{AB}\cos 75°$

$-1.035 \times (0.51)^2\sin 75° = 2 \times 25\cos 30° - 2(4)^2\sin 30°$

$40.3 + 0.27\alpha_{AB} = 27.3 \rightarrow 0.27\alpha_{AB} = -13 \rightarrow \alpha_{AB} = -48.15$

$\boxed{\alpha_{AB} = 48.15Rad/s^2 \text{ ساعتگرد}}$

حل سوال ۳:

از صورت مسله داریم:

$\overrightarrow{V_O} = -3i \;, \overrightarrow{a_O} = 5i \,, \overrightarrow{V_{rel}} = Ui = 2i \,, \overrightarrow{a_{rel}} = \dot{U}i = -7i$

$$\vec{\omega} = \frac{V_O}{r}k \rightarrow \vec{\omega} = \frac{3}{0.3}k = 10k$$

$$\vec{\alpha} = -\frac{a_O}{r}k \rightarrow \vec{\alpha} = \frac{-5}{0.3}k = -16.67k$$

www.20file.org

www.20file.org

$$\overrightarrow{V_A} = \overrightarrow{V_O} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{A/O} + \overrightarrow{V_{rel}} \to \overrightarrow{V_A} = -3i + 10k \times 0.24j + 2i$$

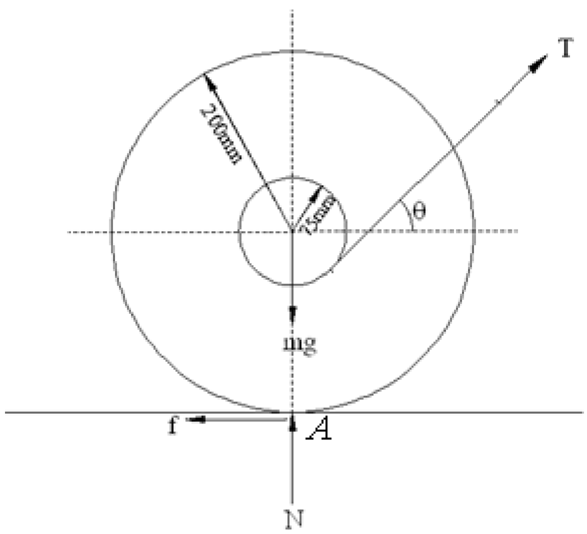
$$\boxed{\overrightarrow{V_A} = -3.4i}$$

$$\overrightarrow{a_A} = \overrightarrow{a_O} + \vec{\alpha} \times \vec{r}_{A/0} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{A/0}) + 2\vec{\omega} \times \overrightarrow{V_{rel}} + \overrightarrow{a_{rel}}$$

$$\overrightarrow{a_A} = 5i + (-16.67k) \times (0.24j) + 10k \times (10k \times 0.24j) + 2 \times 10k \times 2i - 7i$$

$$\boxed{\overrightarrow{a_A} = 2i + 16j}$$

حل سوال۴:



ابتدا فرض غلتش بدون لغزش را بررسی می کنیم یعنی $f<f_{max}$ که در آن f نیروی اصطکاک است:

$$\sum F_x = m\bar{a} \to (1): T cos\theta - f = m\bar{a}$$

$$\sum F_y = 0 \to N + T sin\theta - mg = 0 \to (2): N = mg - T sin\theta$$

$$N = 25 \times 9.81 - 40 sin 30° \to N = 225.25N$$

$$f_{max} = \mu_s N = 0.09 \times 225.25 \to f_{max} = 20.27N$$

$$\sum M_A = I_A \alpha \to (3): T cos\theta (R_o - R_i) = (\bar{I} + m{R_o}^2)\alpha$$

www.20file.org

www.20file.org

$$\bar{I} = m\rho_G{}^2, (3) \to T\cos\theta(R_o - R_i) = m(\rho_G{}^2 + R_o{}^2)\alpha$$

$$\alpha = \frac{T\cos\theta(R_o - R_i)}{m(\rho_G{}^2 + R_o{}^2)} = \frac{40\cos30°(0.2 - 0.075)}{25(0.175^2 + 0.2^2)} \to \alpha = 2.45Rad/s^2$$

$$\bar{a} = R_o\alpha = 0.2 \times 2.45 \to \bar{a} = 0.5m/s^2$$

$$1) \to T\cos\theta - f = m\bar{a} \to 40\cos30 - f = 25 \times 0.5 \to f = 22.14N$$

ملاحظه می شود که $f > f_{max}$ لذا فرض غلتش بدون لغزش صحیح نیست بنابراین:

$$\bar{a} \neq R_o\alpha \ , \ f = \mu_k N \to f = 0.07 \times 225.25 = 15.76N$$

$$\sum F_x = m\bar{a} \to T\cos\theta - f = m\bar{a} \to \bar{a} = \frac{T\cos\theta - f}{m} = \frac{40\cos30° - 15.76}{25}$$

$$\boxed{\bar{a} = 0\ 75m/s^2}$$

$$\sum M_o = \bar{I}\alpha \to T\cos\theta \times (R_o - R_i) - fR_o = m\rho_G{}^2\alpha$$

$$\alpha = \frac{T\cos\theta \times (R_o - R_i) - fR_o}{m\rho_G{}^2} = \frac{40\cos30° \times (0.2 - 0.075) - 15.76 \times 0.2}{25 \times 0.175^2}$$

$$\boxed{\alpha = 1\ 53Rad/s^2}$$

حل سوال ۶:

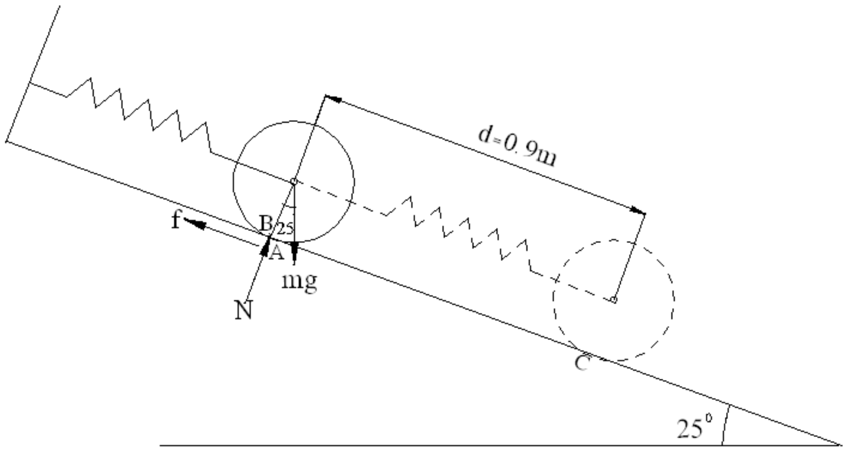
$$W = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$$

تنها نیروی خارجی موجود در مسئله نیروی اصطکاک است که داریم:

$$W = f_k\overline{AC}\cos\alpha \to W = \mu_k N d\cos180° \to W = -\mu_k N d$$

www.20file.org

www.20file.org



$$\sum F_y = 0 \rightarrow N - mgcos\theta = 0 \rightarrow N = mgcos\theta = 10 \times 9.81 \times cos25°$$

$\mathrm{N} = 88.9N$

$W = -\mu_{\mathrm{k}} Nd \rightarrow W = -0.25 \times 88.9 \times 0.9 \rightarrow W = -20j$

$$\Delta T = \frac{1}{2} I_{\mathrm{B}}({\omega_C}^2 - {\omega_A}^2) = \frac{1}{2} I_{\mathrm{B}} {\omega_C}^2$$

$$I_{\mathrm{B}} = \bar{I} + mR^2 = \frac{1}{2} mR^2 + mR^2 = \frac{3}{2} mR^2 \rightarrow \Delta T = \frac{3}{4} mR^2 {\omega_C}^2$$

$$\Delta T = \frac{3}{4} \times 10 \times (0.25)^2 {\omega_C}^2 = 0.468 {\omega_C}^2$$

$\Delta V_g = mg\Delta h = -mgdsin\theta \rightarrow \Delta V_g = -10 \times 9.81 \times 0.9 \times sin25° = -37.3j$

$$\Delta V_e = \frac{1}{2} k(x_C^2 - x_A^2) = \frac{1}{2} \times 20 \times ((0.9 + 0.2)^2 - 0.2^2) \rightarrow \Delta V_e = 11.7j$$

$W = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e \rightarrow -20 = 0.468 {\omega_C}^2 - 37.3 + 11.7$

$$0.468 {\omega_C}^2 = 5.6 \rightarrow {\omega_C}^2 = \frac{5.6}{0.468} = 12 \rightarrow \omega_{\mathrm{C}} = \sqrt{12}$$

$$\boxed{\omega_{\mathrm{C}} = 3.46 Rad/s}$$

www.20file.org

www.20file.org

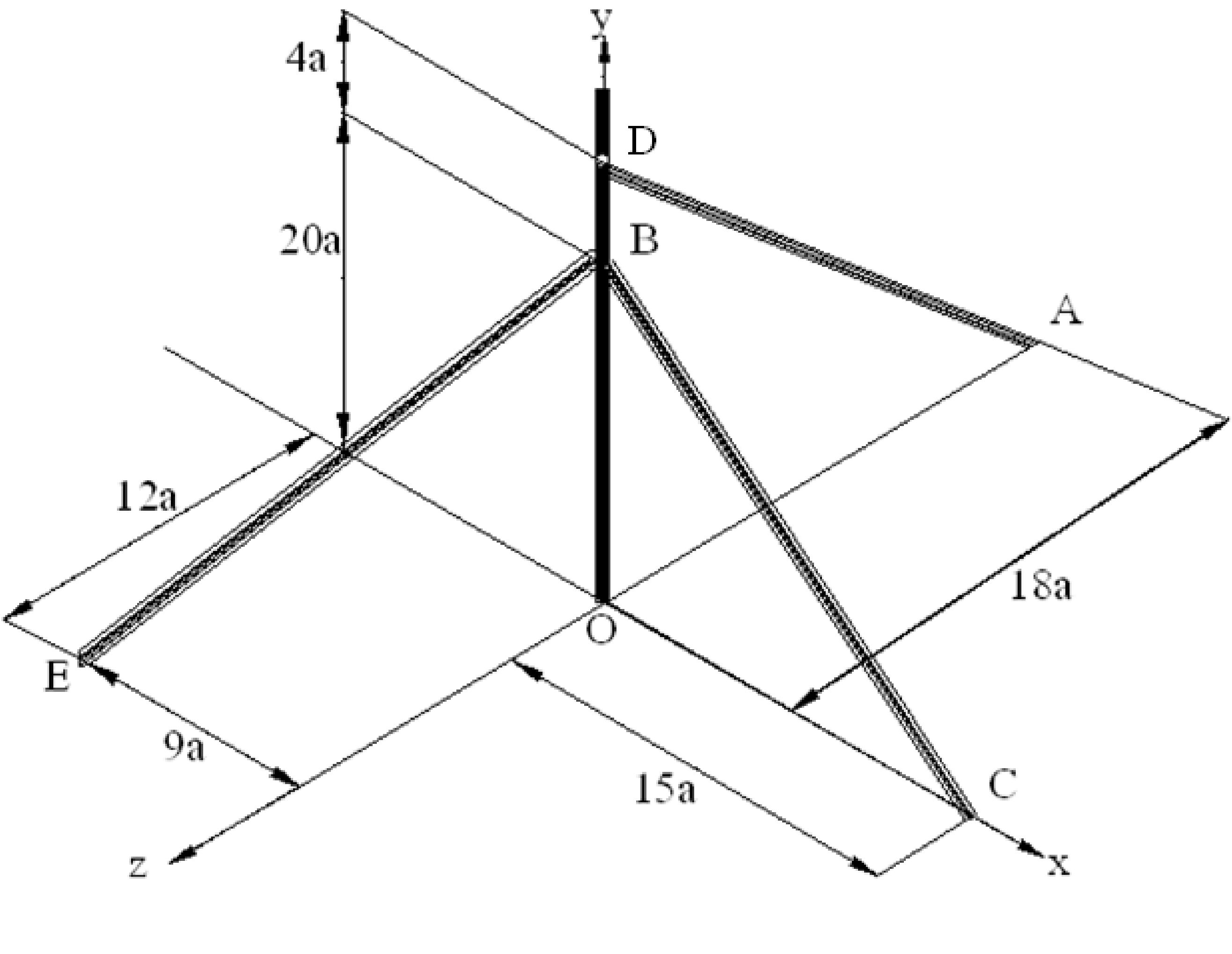
سوالات میان ترم استاتیک

۱-میله OB توسط سه کابل مطابق شکل مهار شده است.اگر بزرگی کشش در کابلها P باشد. می خواهیم نیروهای وارد بر میله را توسط یک رنچ معادل جایگزین کنیم مطلوب است:

الف)نیروی برآیندR. (۱۰ نمره)

ب)گام رنچ. (۱۰ نمره)

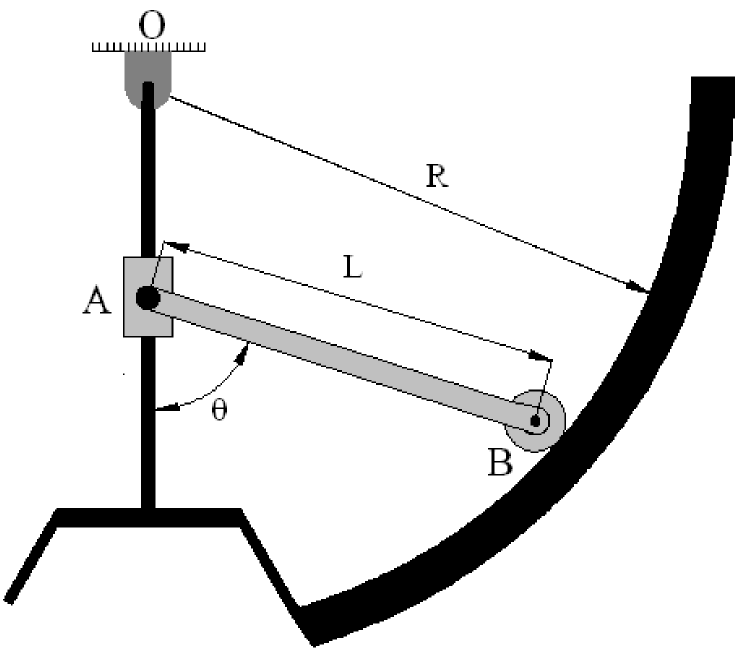
ج)محل تلاقی محور رنچ با صفحه xz. (۱۰ نمره)



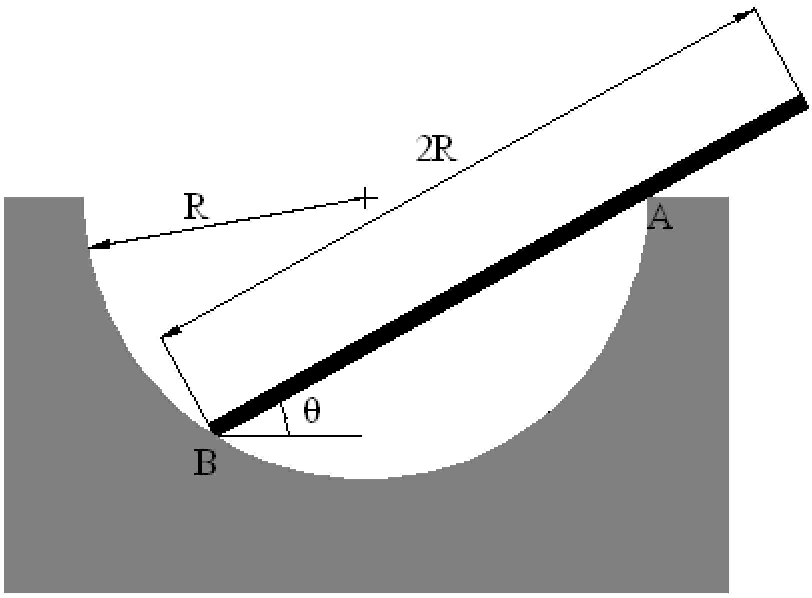
www.20file.org

www.20file.org

۲-میله نازکی به طول L و وزن W در A به طوقه ای متصل شده و در B به چرخ کوچکی وصل شده است. فرض کنیدچرخ آزادانه در امتداد یک سطح استوانه ای فاقد اصطکاک به شعاع R می غلطد.معادله ای بر حسب R,L و θ برای حالت تعادل بیابید و برای حالت $R=1.5L$ زاویهθ را محاسبه کنید.(۲۰ نمره)



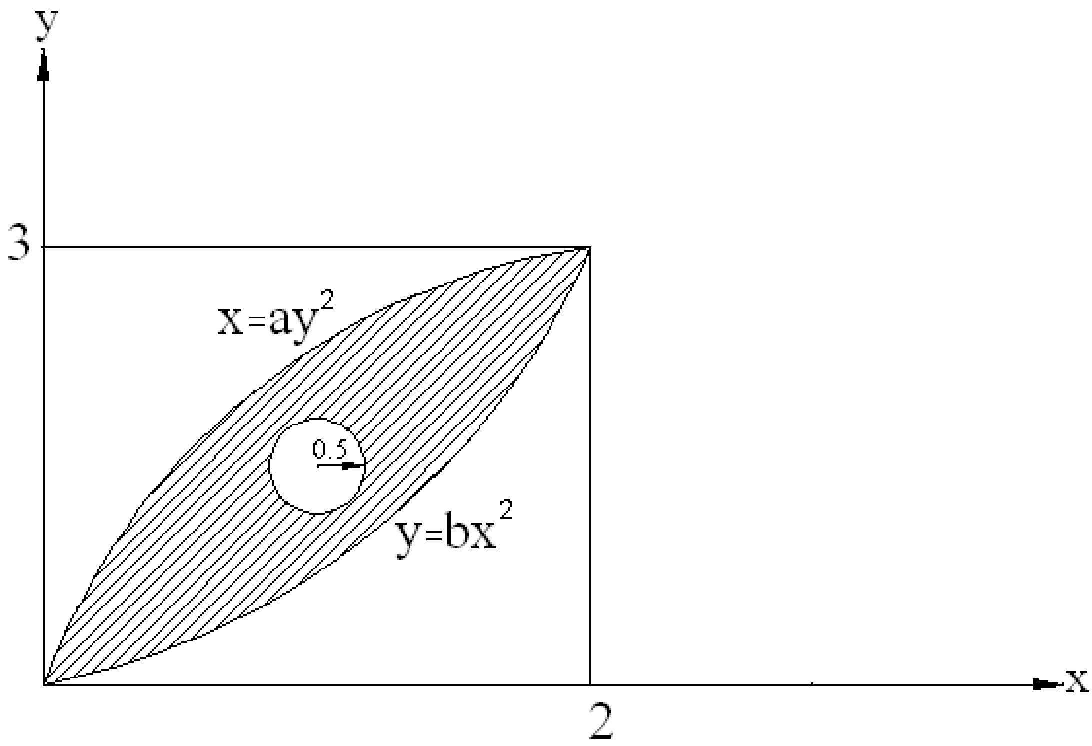
۳-میله یکنواخت AB به طول $2R$ مطابق شکل در داخل یک ظرف نیم کروی به شعاع R قرار دارد. با صرفنظر از اصطکاک زاویه θ متناظر با تعادل را تعیین کنید.(۱۰ نمره)



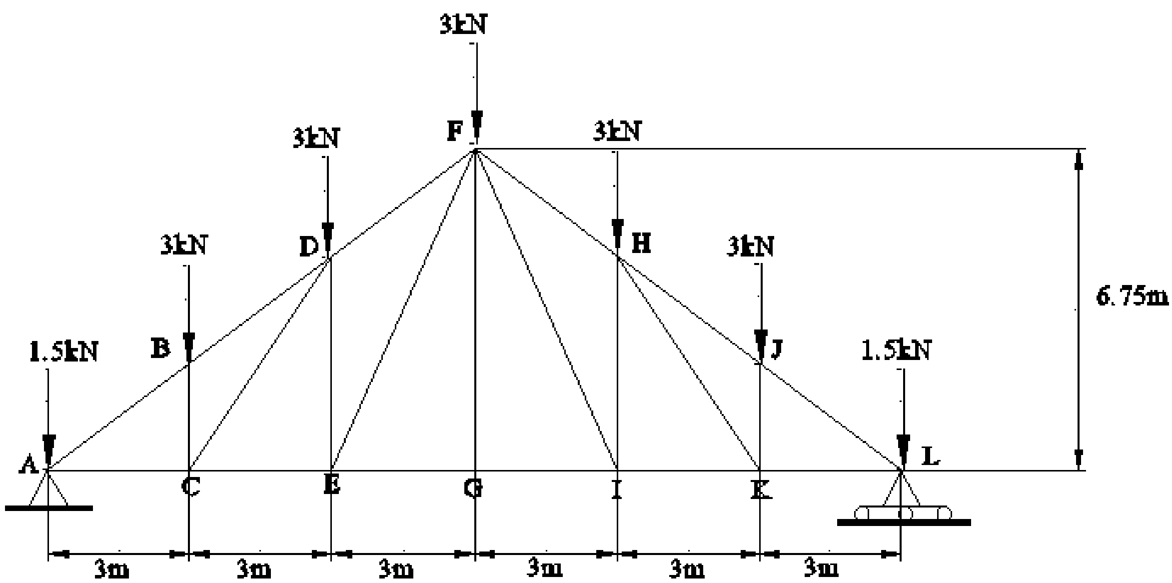
www.20file.org

www.20file.org

۴- مرکز دایره بر مرکز مستطیل منطبق است، با استفاده از انتگرال گیری مرکز سطح قسمت هاشور خورده را بدست آورید.(۱۵نمره)



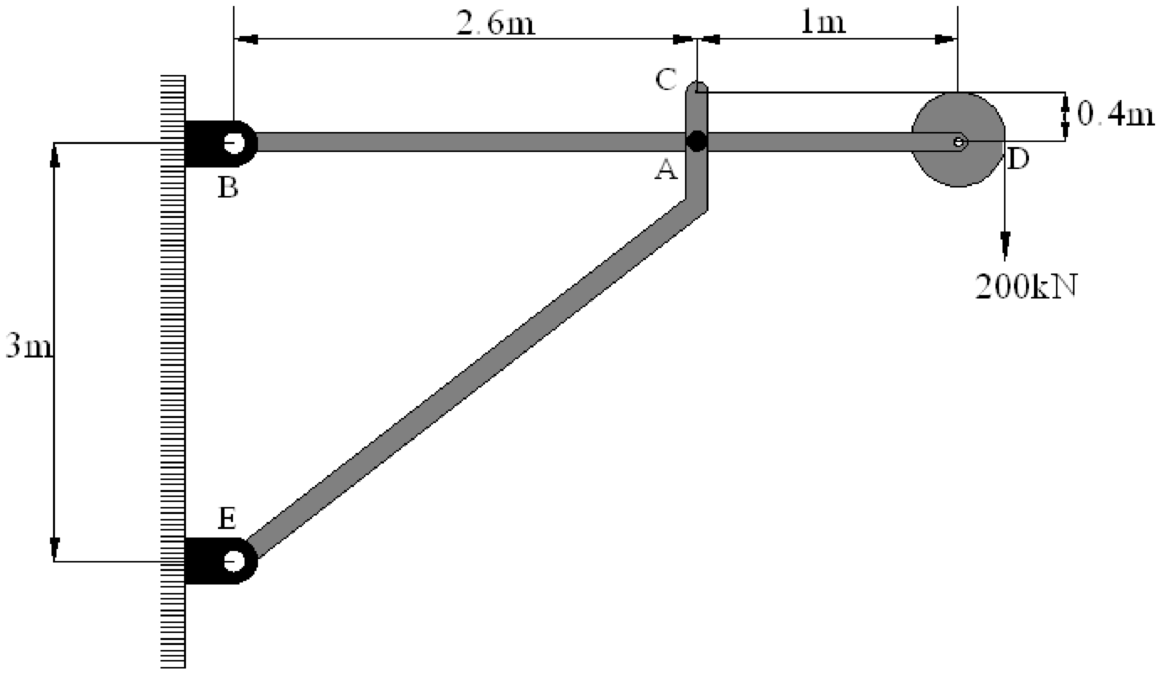
۵-خرپایی مطابق شکل بارگذاری شده است نیرو در اعضای CE,DE وDF را تعیین کنید.(۱۵ نمره)



www.20file.org

www.20file.org

۶-در قاب زیر عکس العمل تکیه گاههای E و B را بیابید.(۱۰ نمره)



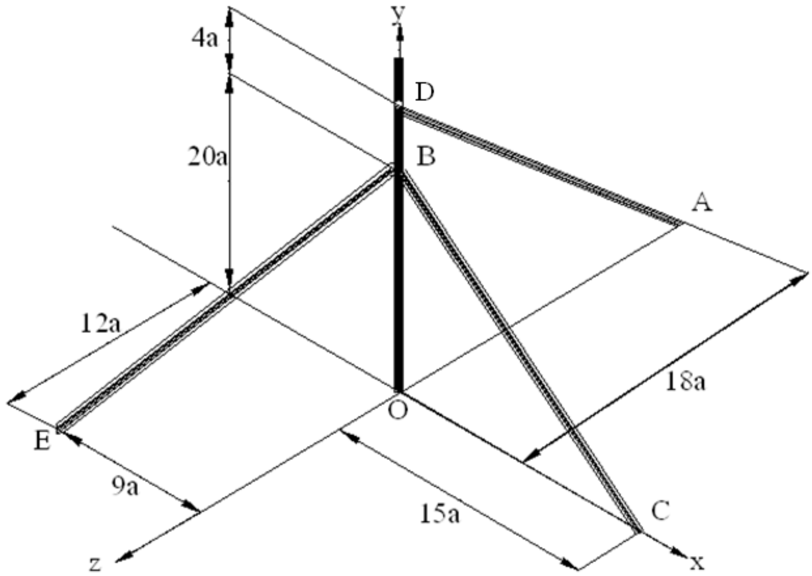
موفق باشید.

www.20file.org

www.20file.org

پاسخ سوالات میان ترم استاتیک

حل سوال ۱:



الف):با توجه به شکل ابتدا کشش در کابلها را بصورت برداری و بر حسب بردارهای یکه می نویسیم:

$$A(0,0,-18a)\,,B(0,20a,0),C(15a,0,0),D(0,24a,0),E(-9a,0,12a)$$

$$\vec{T}_{DA}=P\overrightarrow{\lambda_{DA}}=P\frac{\overrightarrow{DA}}{|DA|}=P\frac{a(-24i-18k)}{a\sqrt{(24^2+18^2)}}=P\frac{(-24i-18k)}{30}$$

$$\vec{T}_{DA}=P\left(-\frac{4}{5}i-\frac{3}{5}k\right)$$

$$\vec{T}_{BC}=P\overrightarrow{\lambda_{BC}}=P\frac{\overrightarrow{BC}}{|BC|}=P\frac{a(15i-20j)}{a\sqrt{(15^2+20^2)}}=P\frac{(15i-20j)}{25}$$

$$\vec{T}_{BC}=P\left(\frac{3}{5}i-\frac{4}{5}j\right)$$

$$\vec{T}_{BE}=P\overrightarrow{\lambda_{BE}}=P\frac{\overrightarrow{BE}}{|BE|}=P\frac{a(-9i-20j+12k)}{a\sqrt{(9^2+20^2+12^2)}}=P\frac{(-9i-20j+12k)}{25}$$

$$\vec{T}_{BE}=P\left(-\frac{9}{25}i-\frac{4}{5}j+\frac{12}{25}k\right)$$

$$\overrightarrow{R}=\vec{T}_{DA}+\vec{T}_{BC}+\vec{T}_{BE}$$

$$\vec{R}=P\left(-\frac{4}{5}i-\frac{3}{5}k\right)+P\left(\frac{3}{5}i-\frac{4}{5}j\right)+P\left(-\frac{9}{25}i-\frac{4}{5}j+\frac{12}{25}k\right)$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\vec{R}=-P\left(\frac{14}{25}i+\frac{8}{5}j+\frac{3}{25}k\right)\\ |R|=1.7P\end{array}}$$

www.20file.org

www.20file.org

ب):برای گام رنچ باید از رابطه زیر استفاده کنیم:

$$\rho = \frac{\vec{R}.\vec{M}_0^{\mathrm{R}}}{\mathrm{R}^2}$$
$$\vec{M}_0^{\mathrm{R}} = \overrightarrow{OD} \times \vec{T}_{DA} + \overrightarrow{OB} \times \vec{T}_{BC} + \overrightarrow{OB} \times \vec{T}_{BE}$$

$$\vec{M}_0^{\mathrm{R}} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 24a & 0 \\ \frac{-4}{5}P & 0 & \frac{-3}{5}P \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 20a & 0 \\ \frac{3}{5}P & \frac{-4}{5}P & 0 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 20a & 0 \\ \frac{-9}{25}P & \frac{-4}{5}P & \frac{12}{25}P \end{vmatrix} = \frac{24}{5}aP(-i+3k)$$

$$\rho = \frac{\vec{R}.\vec{M}_0^{\mathrm{R}}}{\mathrm{R}^2} = \frac{-P\left(\frac{14}{25}i+\frac{8}{5}j+\frac{3}{25}k\right).\frac{24}{5}aP(-i+3k)}{(1.7\mathrm{P})^2} = \frac{0.96aP^2}{2.89P^2}$$

$$\boxed{\rho = \ .33a}$$

ج):فرض کنیم نقطه برخورد با صفحه xz نقطه(x,z) =N باشد.

$$\overrightarrow{M_1} = \rho\vec{R} = -0.33aP\left(\frac{14}{25}i+\frac{8}{5}j+\frac{3}{25}k\right)$$

$$\overrightarrow{M_1} + (xi+zk)\times\vec{R} = \vec{M}_0^{\mathrm{R}}$$

$$-0.33aP\left(\frac{14}{25}i+\frac{8}{5}j+\frac{3}{25}k\right) + (xi+zk)\times\left(-P\left(\frac{14}{25}i+\frac{8}{5}j+\frac{3}{25}k\right)\right) = \frac{24}{5}aP(-i+3k)$$

با حذف P از طرفین معادله داریم:

$$-0.18ai - 0.53aj - 0.04ak + 1.6zi + (0.56z - 0.12x)j - 1.6xk = -4.8ai + 14.4ak$$

ضرایب i وk طرفین معادله را برابر قرار می دهیم:

$$-0.18a + 1.6z = -4.8a \rightarrow 1.6z = -4.62a \rightarrow z = -\frac{4.62\mathrm{a}}{1.6} = -2.9\mathrm{a}$$
$$-0.04a - 1.6x = 14.4a \rightarrow -1.6x = 14.44a \rightarrow x = -\frac{14.44\mathrm{a}}{1.6} = -9\mathrm{a}$$

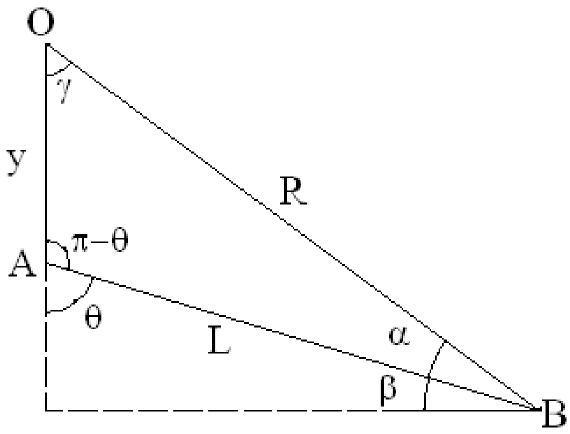
$$\boxed{\mathrm{N} = \ -9\mathrm{a}, 0, -2.9a)}$$

www.20file.org

www.20file.org

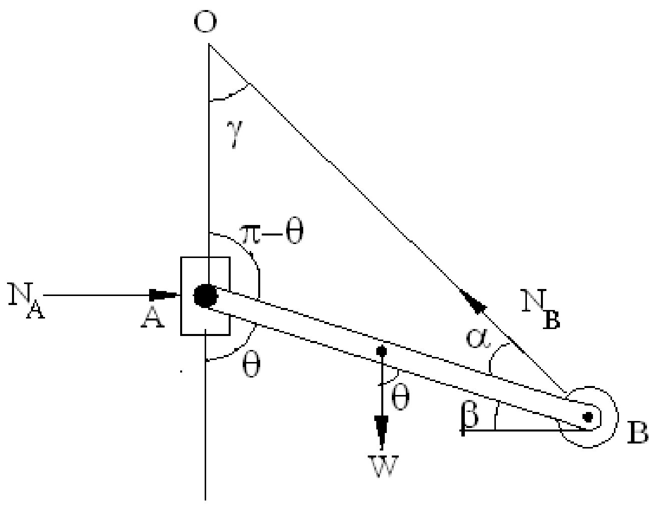
حل سوال ۲:

در مثلث OAB داریم:



$$\frac{\sin(\pi-\theta)}{R}=\frac{sin\gamma}{L}\rightarrow\frac{\sin\theta}{R}=\frac{sin\gamma}{L}\rightarrow(1): sin\gamma=\frac{L}{R}\sin\theta$$
$$\alpha+\gamma=\theta\rightarrow(1^{*}): \alpha=\theta-\gamma$$
$$\beta+\theta=\frac{\pi}{2}\rightarrow(1^{**}): \beta=\frac{\pi}{2}-\theta$$

با توجه به دیاگرام آزاد داریم:



$$\sum F_x=0\rightarrow(2): N_A=N_B\cos(\alpha+\beta)$$

$$\sum F_y=0\rightarrow(3): W=N_B\sin(\alpha+\beta)$$
$$\sum M_B=0\rightarrow W\left(\frac{L}{2}\right)\sin\theta=N_A L\cos\theta\rightarrow(4): \frac{W}{N_A}=2cot\,\theta$$

www.20file.org

www.20file.org

$$(3)\big/(2) \rightarrow \frac{W}{N_A} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \tan(\alpha+\beta)$$

$$4) \rightarrow \tan(\alpha+\beta) = 2\cot\theta$$

از معادلات(1^* و 1^{**}) داریم:

$$\tan(\alpha+\beta) = 2\cot\theta \rightarrow \tan\left((\theta-\gamma)+\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right) = 2\cot\theta$$

$$\tan\left(\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)\right) = 2\cot\theta \rightarrow \cot\gamma = 2\cot\theta \rightarrow \frac{\cos\gamma}{\sin\gamma} = 2\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

از معادله (۱) داریم: $\sin\gamma = (L/R)\sin\theta$ پس:

$$\frac{\cos\gamma}{\left(\frac{L}{R}\right)\sin\theta} = 2\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \rightarrow \frac{R}{L}\cos\gamma = 2\cos\theta \rightarrow \frac{R}{L}\sqrt{1-\sin^2\gamma} = 2\cos\theta$$

$$\rightarrow \frac{R}{L}\sqrt{1-(\frac{L}{R}\sin\theta)^2} = 2\cos\theta$$

طرفین را به توان ۲ می رسانیم:

$$\left(\frac{R}{L}\right)^2\left(1-\left(\frac{L}{R}\sin\theta\right)^2\right) = 4\cos^2\theta \rightarrow 1-\frac{L^2}{R^2}\sin^2\theta = 4\frac{L^2}{R^2}(1-\sin^2\theta)$$

$$1-\frac{L^2}{R^2}\sin^2\theta = 4\frac{L^2}{R^2}-4\frac{L^2}{R^2}\sin^2\theta \rightarrow 3\frac{L^2}{R^2}\sin^2\theta = 4\frac{L^2}{R^2}-1$$

$$\sin^2\theta = \frac{4}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{R^2}{L^2}\right)$$

$$\boxed{\sin\theta = \sqrt{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{R}{L}\right)^2}}$$

$$R = 1.5L \rightarrow \sin\theta = \sqrt{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}(1.5)^2} \rightarrow \sin\theta = 0.76 \rightarrow \theta = \sin^{-1}0.76$$

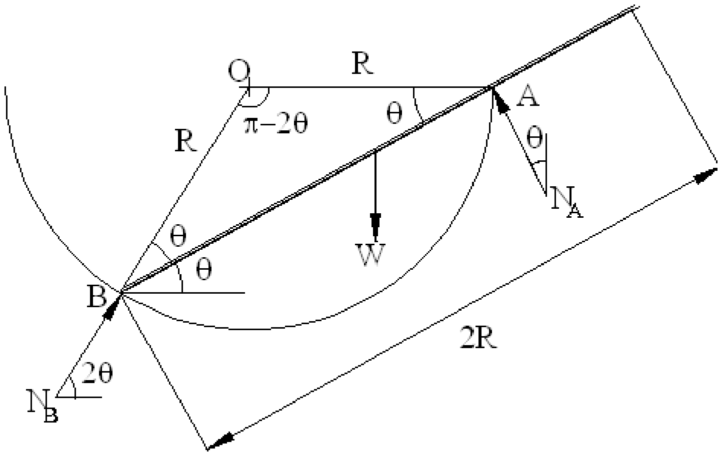
$$\boxed{\theta = 50^0}$$

www.20file.org

www.20file.org

حل سوال۳:

با توجه به دیاگرام آزاد داریم:



$$\rightarrow^{+} \sum F_x = 0 \rightarrow N_B cos2\theta - N_A \sin\theta = 0 \rightarrow (1): \frac{N_B}{N_A} = \frac{sin\theta}{cos2\theta}$$

$$\uparrow^{+} \sum F_y = 0 \rightarrow (2): N_B sin2\theta + N_A \cos\theta = W$$

$$\sum M_B = 0 \rightarrow (3): N_A \times AB = Wcos\theta \times R$$

درمثلث OAB داریم:

$$\frac{AB}{\sin(\pi - 2\theta)} = \frac{R}{\sin\theta} \rightarrow \frac{AB}{\sin 2\theta} = \frac{R}{\sin\theta} \rightarrow \frac{AB}{2sin\theta cos\theta} = \frac{R}{\sin\theta} \rightarrow AB = 2Rcos\theta$$

$$3) \rightarrow N_A \times 2Rcos\theta = Wcos\theta \times R \rightarrow \frac{W}{N_A} = 2$$

طرفین معادله(2) را بر N_A تقسیم می کنیم و با استفاده از معادلات(3)و(1   داریم:

$$\frac{N_B}{N_A} sin2\theta + \cos\theta = \frac{W}{N_A} \rightarrow \frac{sin\theta}{cos2\theta} sin2\theta + cos\theta = 2$$

$$\frac{2sin^2\theta cos\theta}{1 - 2sin^2\theta} + cos\theta = 2 \rightarrow 2sin^2\theta cos\theta = (2 - cos\theta)(1 - 2sin^2\theta)$$

$$2sin^2\theta cos\theta = 2 - 4sin^2\theta - cos\theta + 2sin^2\theta cos\theta \rightarrow 2 - 4sin^2\theta - cos\theta = 0$$

www.20file.org

www.20file.org

$$2-4sin^2\theta - cos\theta = 0 \rightarrow 2-4(1-cos^2\theta) - cos\theta = 0$$
$$4cos^2\theta - cos\theta - 2 = 0$$

$$cos\theta = \frac{1 \pm \sqrt{1-4(4)(-2)}}{8} \rightarrow cos\theta = \begin{cases} 0.843 \\ -0.59 \end{cases}$$

که چون زاویه حاده مورد نظر است پس:

$$cos\theta = 0.843 \rightarrow \theta = \cos^{-1} 0.843$$

$$\boxed{\theta = 32\ 5^0}$$

حل سوال۴:

$$\bar{x} = \frac{\sum A_i \bar{x}_i}{\sum A_i}$$
$$\bar{y} = \frac{\sum A_i \bar{y}_i}{\sum A_i}$$

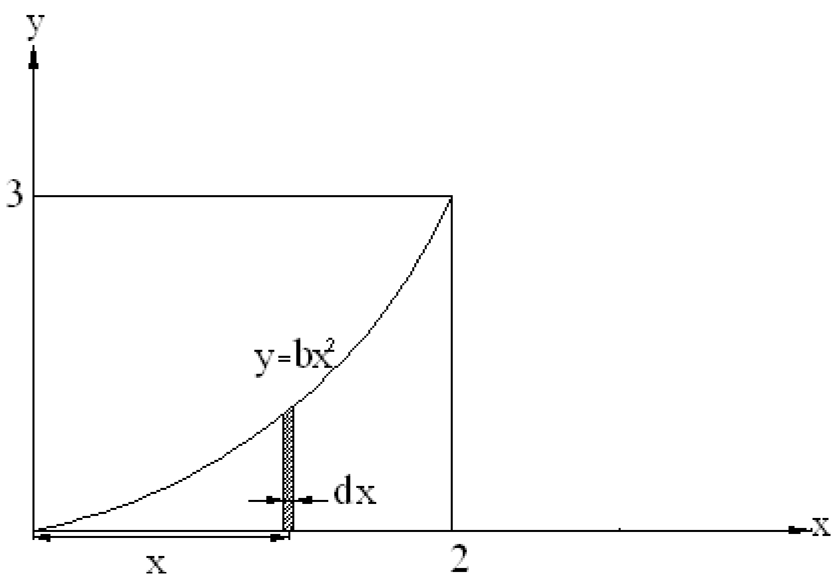
مرکز سطح مستطیل ،مرکز آن است:

$A_{\text{مستطیل}} = 2 \times 3 = 6$ $\quad \bar{x}_{\text{مستطیل}} = 1$ $\quad \bar{y}_{\text{مستطیل}} = 1.5$

مرکز سطح دایره نیز مرکز آن است چون مرکز دایره ومستطیل بر هم منطبق است پس:

$A_{\text{دایره}} = \pi \times 0.5^2 = 0.785$ $\quad \bar{x}_{\text{دایره}} = 1$ $\quad \bar{y}_{\text{دایره}} = 1.5$

برای سهمی(۱) از انتگرال گیری، مرکز سطح را محاسبه می کنیم:



www.20file.org

www.20file.org

$$A=\int ydx=\int_0^2 bx^2dx=b\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2=\frac{8}{3}b$$

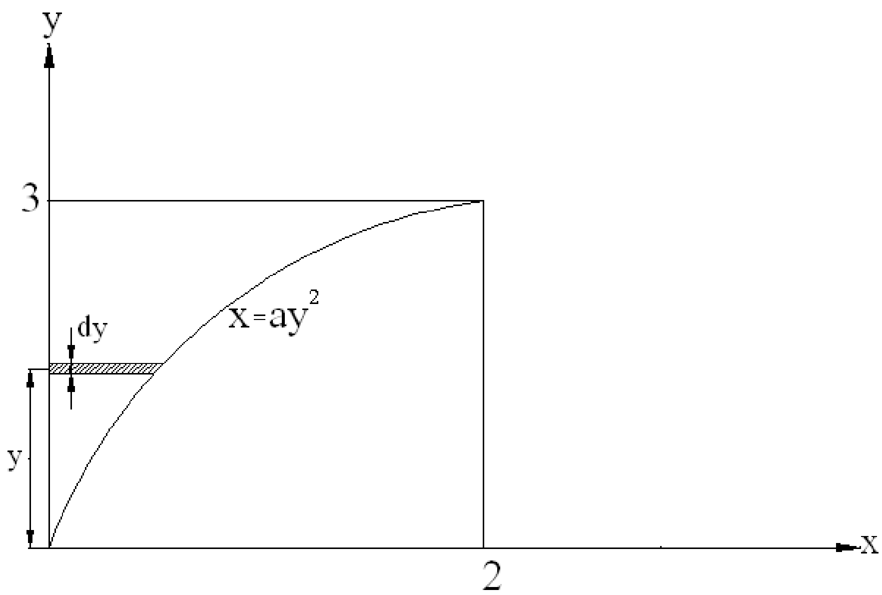
$$y=bx^2\rightarrow 3=b\times 2^2\rightarrow b=\frac{3}{4}$$

$$A=\frac{8}{3}\times\frac{3}{4}=2$$

$$\bar{x}=\frac{\int \bar{x}_{el}dA}{\mathrm{A}}=\frac{\int \mathrm{xydx}}{2}=\frac{1}{2}\int_0^2 \mathrm{bx^3dx}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2=\frac{3}{2}=1.5$$

$$\bar{y}=\frac{\int \bar{y}_{el}dA}{\mathrm{A}}=\frac{\int \frac{\mathrm{y}}{2}\mathrm{ydx}}{2}=\frac{1}{4}\int_0^2 \mathrm{y^2dx}=\frac{1}{4}\int_0^2 (\frac{3}{4}x^2)^2\mathrm{dx}=\frac{9}{64}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^2=\frac{9}{10}=0.9$$

برای سهمی (۲):



$$A=\int xdy=\int_0^2 ay^2dy=a\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^3=9a$$

$$x=ay^2\rightarrow 2=a\times 3^2\rightarrow a=\frac{2}{9}$$

$$A=9\times\frac{2}{9}=2$$

$$\bar{x}=\frac{\int \bar{x}_{el}dA}{\mathrm{A}}=\frac{\int \frac{\mathrm{x}}{2}\mathrm{xdy}}{2}=\frac{1}{4}\int_0^3 \mathrm{x^2dy}=\frac{1}{4}\int_0^3 (\frac{2}{9}y^2)^2\mathrm{dy}=\frac{1}{81}\left[\frac{y^5}{5}\right]_0^3=\frac{3}{5}=0.6$$

$$\bar{y}=\frac{\int \bar{y}_{el}dA}{\mathrm{A}}=\frac{\int \mathrm{yxdy}}{2}=\frac{1}{2}\int_0^3 \frac{2}{9}\mathrm{y^3dy}=\frac{1}{9}\left[\frac{y^4}{4}\right]_0^3=\frac{81}{36}=\frac{9}{4}=2.25$$

www.20file.org

www.20file.org

$$\bar{x}=\frac{\sum A_i\bar{x}_i}{\sum A_i}=\frac{A_{\text{مستطیل}}\times\bar{x}_{\text{مستطیل}}-A_{\text{دایره}}\times\bar{x}_{\text{دایره}}-A_{\text{سهمی ۱}}\times\bar{x}_{\text{سهمی ۱}}-A_{\text{سهمی ۲}}\times\bar{x}_{\text{سهمی ۲}}}{A_{\text{مستطیل}}-A_{\text{دایره}}-A_{\text{سهمی ۱}}-A_{\text{سهمی ۲}}}$$

$$\bar{x}=\frac{6\times 1-0.785\times 1-2\times(1.5)-2(0.6)}{6-0.785-2-2}=\frac{1.015}{1.215}$$

$$\boxed{\bar{x}=0.835}$$

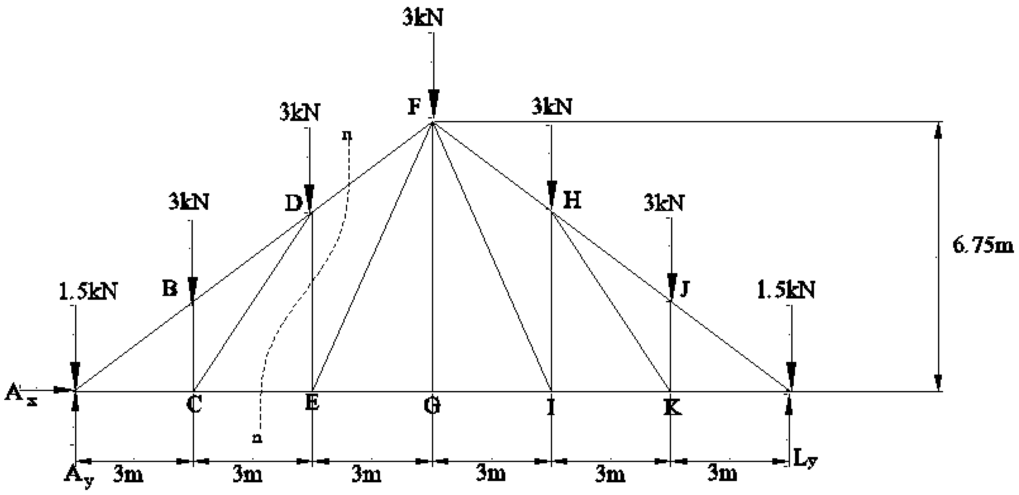
$$\bar{y}=\frac{\sum A_i\bar{y}_i}{\sum A_i}=\frac{A_{\text{مستطیل}}\times\bar{y}_{\text{مستطیل}}-A_{\text{دایره}}\times\bar{y}_{\text{دایره}}-A_{\text{سهمی ۱}}\times\bar{y}_{\text{سهمی ۱}}-A_{\text{سهمی ۲}}\times\bar{y}_{\text{سهمی ۲}}}{A_{\text{مستطیل}}-A_{\text{دایره}}-A_{\text{سهمی ۱}}-A_{\text{سهمی ۲}}}$$

$$\bar{y}=\frac{6\times 1.5-0.785\times 1.5-2\times(0.9)-2(2.25)}{6-0.785-2-2}=\frac{1.5225}{1.215}$$

$$\boxed{\bar{y}=1.253}$$

حل سوال۵:

عکس العمل تکیه گاهها:



$$\sum F_x=0\rightarrow A_x=0$$

$$\sum F_y=0\rightarrow (1): A_y+L_y=2\times 1.5+5\times 3=18$$

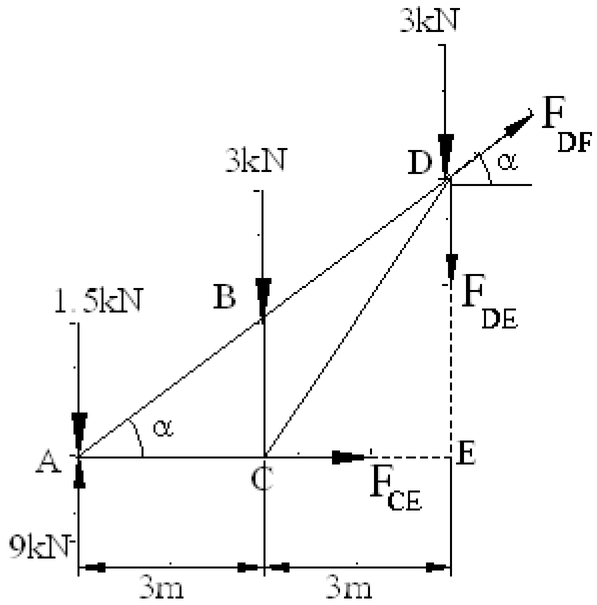
www.20file.org

www.20file.org

$$\sum M_L = 0 \rightarrow \mathrm{A_y} \times 18 - 1.5(18) - 3(15 + 12 + 9 + 6 + 3) = 0$$
$$18A_{\mathrm{y}} = 162 \rightarrow A_{\mathrm{y}} = 9\mathrm{kN}$$

$$1): 9 + \mathrm{L_y} = 18 \rightarrow \mathrm{L_y} = 9kN$$

از برش n-n داریم:



$$\sum M_D = 0 \rightarrow F_{CE} \times DE + 1.5 \times 6 + 3 \times 3 - 9 \times 6 = 0$$

از شکل اصلی و از قضیه تالس داریم:

$$\frac{DE}{6.75} = \frac{6}{9} \rightarrow DE = \frac{6 \times 6.75}{9} = 4.5m$$

پس:

$$\sum M_D = 0 \rightarrow F_{CE} \times 4.5 - 36 = 0 \rightarrow F_{CE} = \frac{36}{4.5}$$

$$\boxed{F_{CE} = 8kN \text{ کششی}}$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow F_{DE} \times 6 + 3 \times 6 + 3 \times 3 = 0 \rightarrow 6F_{DE} + 27 = 0$$
$$F_{DE} = \frac{-27}{6} = -4.5$$

$$\boxed{F_{DE} = 4\ 5kN \text{ فشاری}}$$

www.20file.org

www.20file.org

$$\sum F_x = 0 \rightarrow F_{CE} + F_{DF} cos\alpha = 0$$

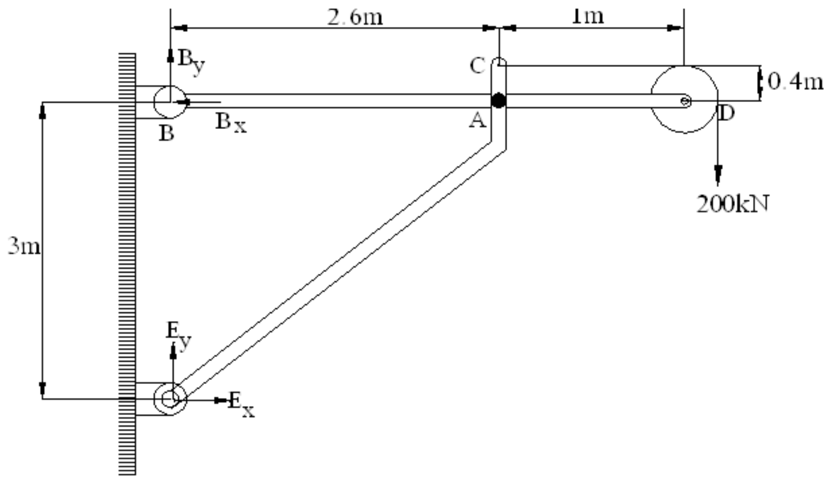
$$tan\,\alpha = \frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{AE}} = \frac{4.5}{6} = 0.75 \rightarrow \alpha = \tan^{-1} 0.75 = 36.9^0$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow 8 + F_{DF} cos36.9^0 = 0 \rightarrow 0.8F_{DF} = -8 \rightarrow F_{DF} = \frac{-8}{0.8} = -10$$

$F_{DF} = 10kN$ فشاری

حل سوال ۶:

با توجه به دیاگرام آزاد:



$$\rightarrow^+ \sum \mathrm{F_x} = 0 \rightarrow \mathrm{E_x} - \mathrm{B_x} = 0 \rightarrow (1): \mathrm{E_x} = \mathrm{B_x}$$

$$\uparrow^+ \sum \mathrm{F}_y = 0 \rightarrow \mathrm{B_y} + \mathrm{E_y} - 200 = 0 \rightarrow (2): \mathrm{B_y} + \mathrm{E_y} = 200$$

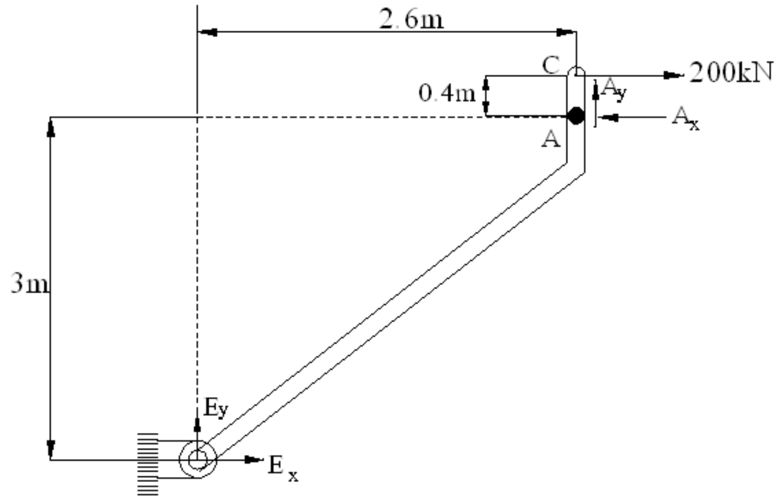
$$\sum \mathrm{M}_E = 0 \rightarrow \mathrm{B_x} \times 3 - 200 \times 4 = 0 \rightarrow 3\mathrm{B_x} = 800 \rightarrow \mathrm{B_x} = 266.67kN$$

$$1) \rightarrow \mathrm{E_x} = \mathrm{B_x} \rightarrow \mathrm{E_x} = 266.67kN$$

www.20file.org

www.20file.org

در قاب EAC داریم:



$$\sum M_A = 0 \rightarrow E_x \times 3 - E_y \times 2.6 - 200 \times 0.4 = 0$$

$$E_x = 266.67kN \rightarrow 266.67 \times 3 - 2.6E_y - 80 = 0 \rightarrow 2.6E_y = 720$$

$$E_y = 276.9\text{kN} \uparrow$$

$$2) \rightarrow B_y + 276.9 = 200 \rightarrow B_y = -76.9kN \rightarrow B_y = 76.9kN \downarrow$$

$$\boxed{B = \sqrt{{B_x}^2 + {B_y}^2} = \sqrt{\ 266.67)^2 + \ \ 76.9)^2} = 277.5kN}$$

$$\boxed{E = \sqrt{{E_x}^2 + {E_y}^2} = \sqrt{\ 266.67)^2 + \ \ 276.9)^2} = 384.4kN}$$

www.20file.org

www.20file.org

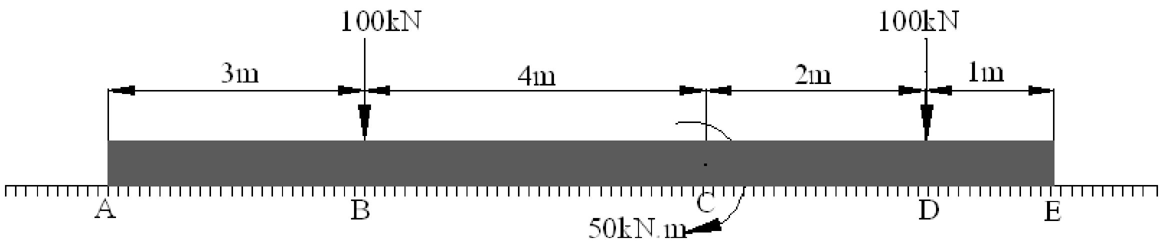
سوالات پایان ترم استاتیک

۱-تیری مطابق شکل روی سطح زمین قرار گرفته است. اگر نیروی وارد از زمین به تیر بطور یکنواخت در طول آن گسترده شده باشد مطلوب است:

الف:معادلات نیروی برشی و گشتاور خمشی(۱۵نمره)

ب:رسم نمودارهای برش و گشتاور خمشی (۱۰ نمره)

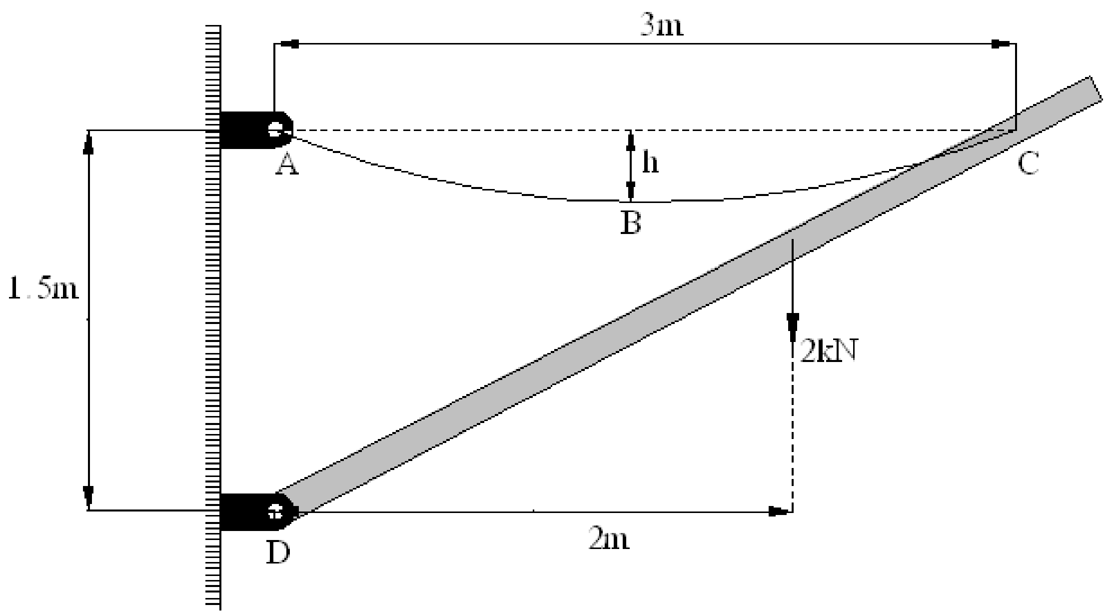
ج: گشتاور خمشی ماکزیمم و محل آن.(۵ نمره)



۲-جرم کابل ABC، 20kg است.فرض کنید کابل به شکل سهمی و جرم آن در امتداد افقی به طور یکنواخت توزیع شده باشد مطلوب است:

الف:شکم دادگی h(۱۰نمره)

ب:شیب کابل در نقطه A(۵نمره)



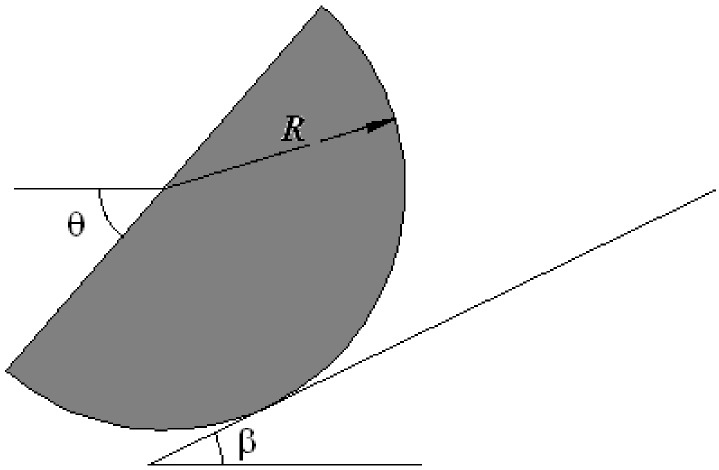
۳-نیمکره همگنی به شعاع R و وزن W بر روی یک سطح شیب دار قرار گرفته است. اگرضریب اصطکاک ایستایی بین نیمکره و سطح، $\mu_s=0.25$ باشد مطلوب است:

www.20file.org

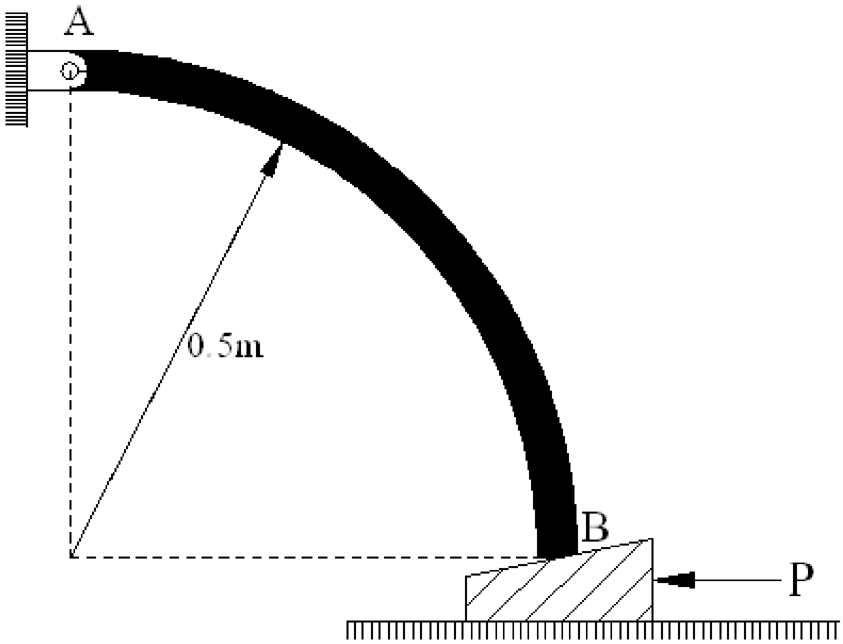
www.20file.org

الف:مقدارβ بطوریکه نیمکره در آستانه لغزش باشد.(۵ نمره)

ب:مقدار θ متناظر با تعادل(۵ نمره)



۴-می خواهیم یک گوه^o 10 را به انتهای B ،میله AB برانیم. جرم میله 10kg است. اگر ضریب اصطکاک ایستایی بین گوه ومیله 0.4 وبین گوه و زمین 0.2 باشدحداقل نیروی لازم P برای بالا بردن انتهای B چقدر است؟(۱۵ نمره)



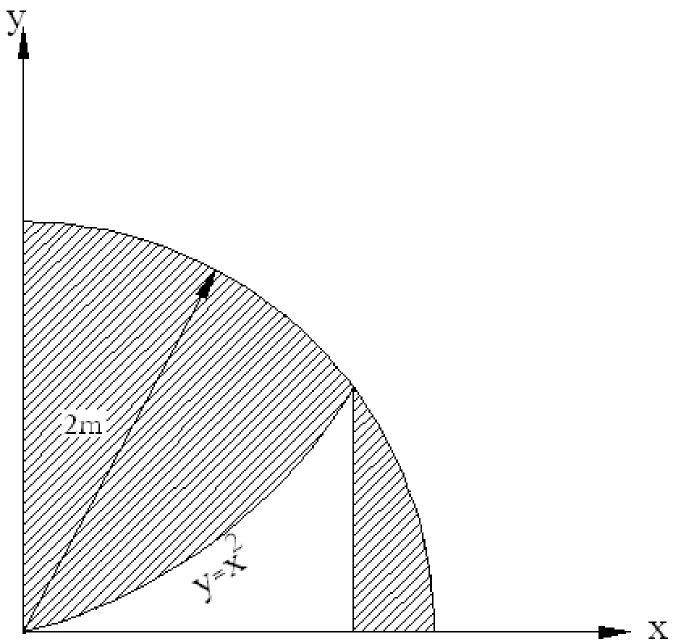
۵- با توجه به شکل برای سطح هاشور خورده:

الف: با استفاده از انتگرال گیری گشتاور لختی نسبت به محورهای مختصات.(۱۵ نمره)

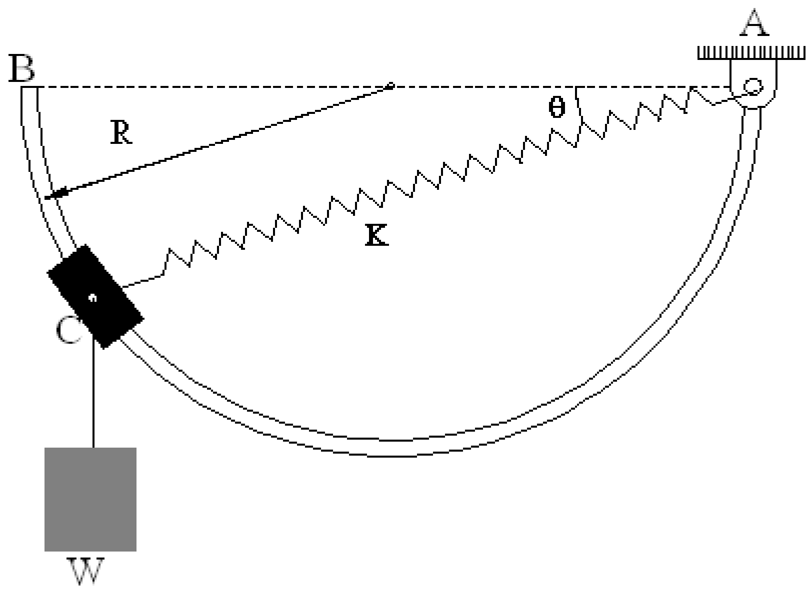
www.20file.org

www.20file.org

ب:شعاع های چرخش نسبت به محورهای مختصات(۵ نمره)



۶-طوقه C می تواند آزادانه روی نیم دایره ای بلغزد.ثابت فنر K=1.5kN/m وطول آزاد فنر برابر شعاع نیمدایره R=90mm می باشد.با استفاده از روش کار مجازی برای زاویه تعادل$\theta=30^{\circ}$،وزن Wرا محاسبه کنید.(۱۰ نمره)



موفق باشید.

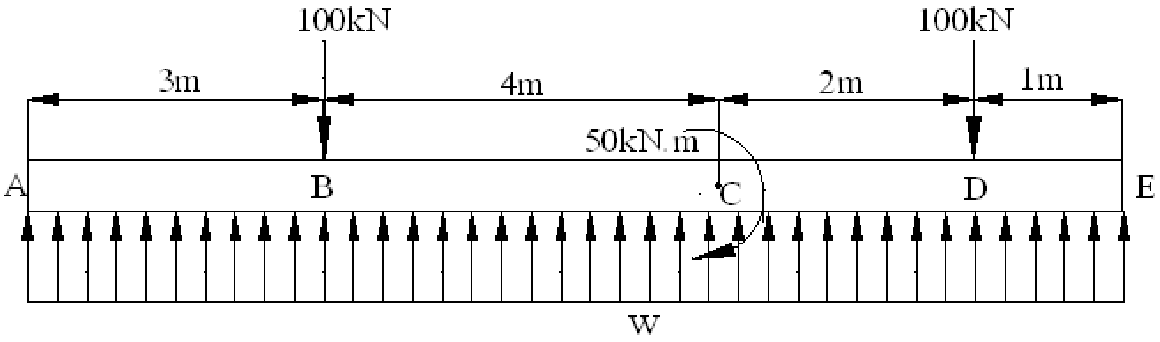
www.20file.org

www.20file.org

پاسخ سوالات پایان ترم استاتیک

حل سوال ۱:

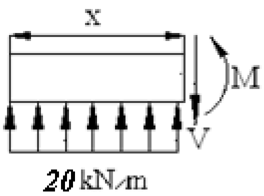
ابتدا نیروی گسترده زمین را با استفاده ازشکل محاسبه می کنیم.فرض کنیم نیروی گسترده وارده از زمین به تیر W باشد پس:



$$\sum F_y = 0 \rightarrow W \times 10 - 200 = 0 \rightarrow W = \frac{200}{10} = 20kN/m$$

الف:

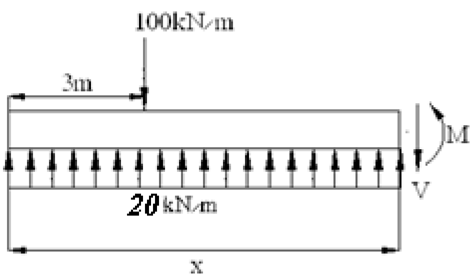
$$0 \leq x < 3$$



$$\sum F_y = 0 \rightarrow V - 20x = 0 \rightarrow V = 20x$$

$$\sum M = 0 \rightarrow M - 20x\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \rightarrow M = 10x^2$$

$$3 \leq x < 7$$



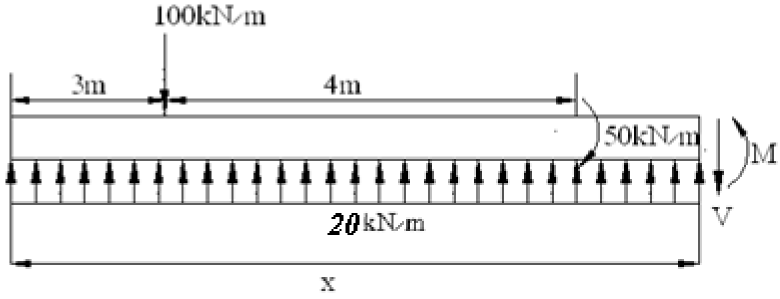
$$\sum F_y = 0 \rightarrow V + 100 - 20x = 0 \rightarrow V = 20x - 100$$

$$\sum M = 0 \rightarrow M - 20x\left(\frac{x}{2}\right) + 100(x-3) = 0 \rightarrow M = 10x^2 - 100x + 300$$

www.20file.org

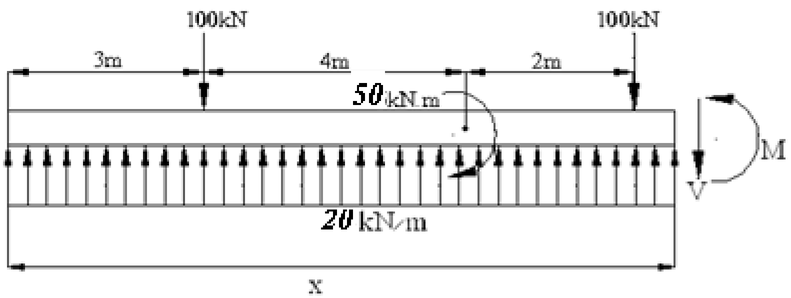
www.20file.org

$7 \leq x < 9$



$$\sum F_y = 0 \rightarrow V + 100 - 20x = 0 \rightarrow V = 20x - 100$$
$$\sum M = 0 \rightarrow M - 20x\left(\frac{x}{2}\right) + 100(x-3) - 50 = 0$$
$$M = 10x^2 - 100x + 350$$

$9 \leq x \leq 10$



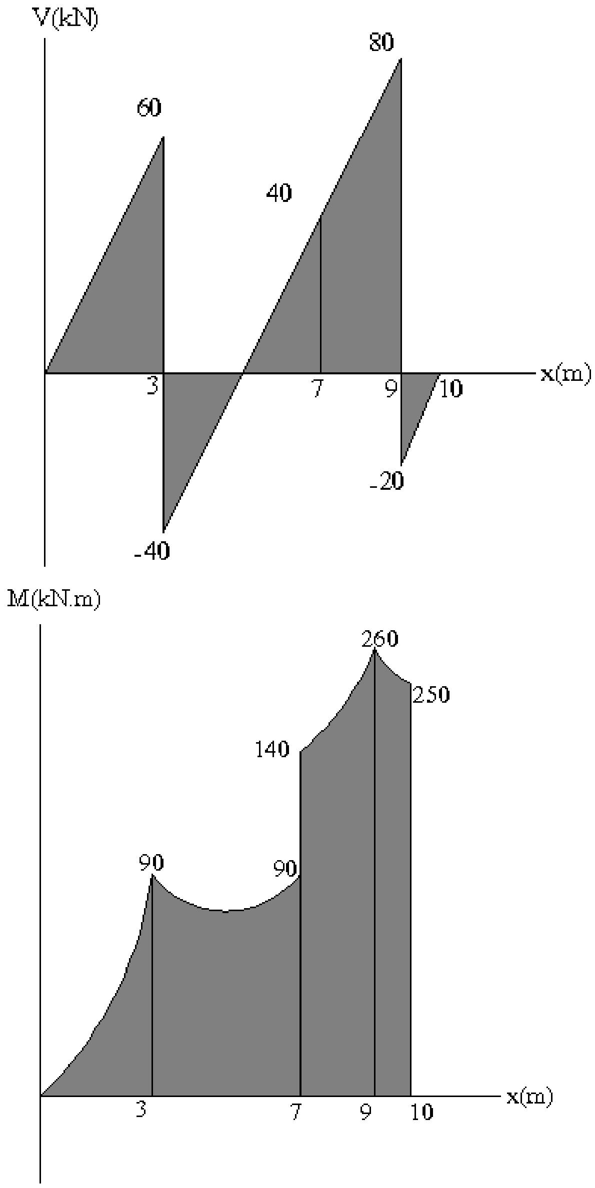
$$\sum F_y = 0 \rightarrow V + 100 + 100 - 20x = 0 \rightarrow V = 20x - 200$$
$$\sum M = 0 \rightarrow M - 20x\left(\frac{x}{2}\right) + 100(x-3) + 100(x-9) - 50 = 0$$
$$M = 10x^2 - 200x + 1250$$

ب: با توجه به معادلات و نقاط ابتدایی و انتهایی نمودارهای برش وگشتاور خمشی را رسم می کنیم که درصفحه بعد آورده شده است.

ج: با توجه به نمودار گشتاور خمشی مشخص می شود که ماکزیمم تنش خمشی در $x=9m$ رخ می دهد و مقدار آن $M_{max}=260\ kN.m$ است.

www.20file.org

www.20file.org



حل سوال۲:

وزن کابل، تابع خطی از طول آن می باشد یعنی:

$$m = kx \rightarrow 20 = 3k \rightarrow k = \frac{20}{3} \rightarrow m = \frac{20}{3}x$$

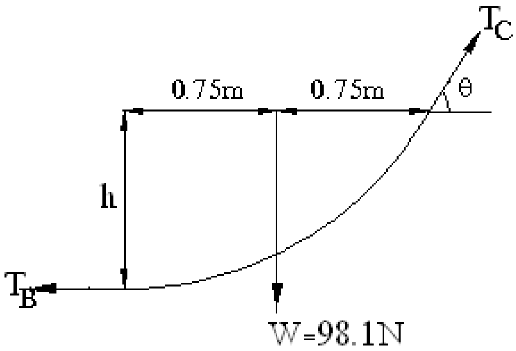
$$W = mg = \frac{20g}{3}x = \frac{20 \times 9.81}{3}x \rightarrow W = 65.4x$$

الف: مطابق شکل کابل را در نقطه B برش می زنیم دیاگرام آزاد کابل را رسم می کنیم(صفحه بعد). چون کابل در نقطه B به دو قسمت تقسیم می شود پس داریم :

$$W = 65.4x = 65.4 \times 1.5 = 98.1N$$

www.20file.org

www.20file.org



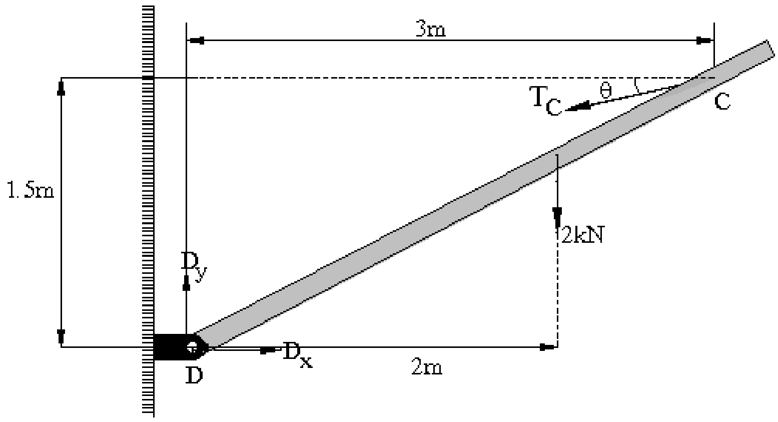
$$\sum M_C = 0 \rightarrow T_B \times h - 0.75 \times 98.1 = 0 \rightarrow (1): T_B = \frac{73.6}{h}$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow (2): T_c cos\theta = T_B \rightarrow T_c = \frac{T_B}{cos\theta}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow (3): T_c sin\theta = 98.1 \rightarrow T_c = \frac{98.1}{sin\theta}$$

$$(3)\Big/_{(2)} \rightarrow (4): tan\theta = \frac{98.1}{T_B}$$

از دیاگرام آزاد میله DC داریم:



$$\sum M_D = 0 \rightarrow T_C cos\theta \times 1.5 - T_C sin\theta \times 3 - 2 \times 2000 = 0$$

از معادلات (2)و(3) به جای T_c جایگذاری می کنیم پس داریم:

$$\frac{T_B}{cos\theta} cos\theta \times 1.5 - \frac{98.1}{sin\theta} sin\theta \times 3 - 4000 = 0 \rightarrow 1.5T_B = 4294.3$$

$$T_B = 2862.9\text{N}$$

www.20file.org

www.20file.org

از معادله (1) داریم:

$$1): T_B = \frac{73.6}{h} \rightarrow h = \frac{73.6}{T_B} = \frac{73.6}{2862.9} = 0.025m$$

$$\boxed{h = 25mm}$$

ب:

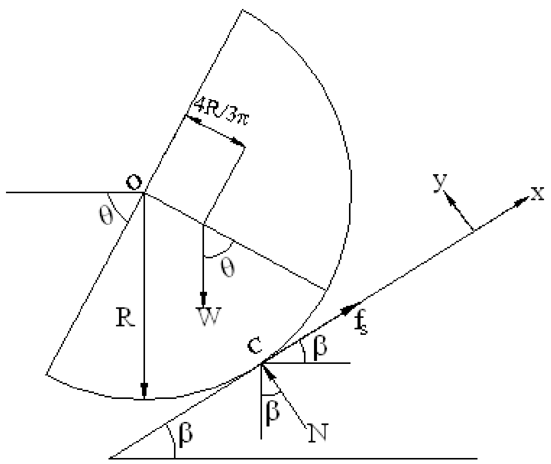
چون شکم دادگی حداکثر در وسط کابل رخ داده بنابراین شیب نقاط A و C مساوی وبرابر θ می باشد، پس از معادله(4) داریم:

$$4): tan\theta = \frac{98.1}{T_B} = \frac{98.1}{2862.9} = 0.0343 \rightarrow \theta = \tan^{-1} 0.0343$$

$$\boxed{\theta = 2°}$$

حل سوال ۳:

الف) از دیاگرام آزاد شکل داریم:



$$\sum F_x = 0 \rightarrow f_s - Wsin\beta = 0 \rightarrow (1): f_s = Wsin\beta$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow \mathrm{N} - Wcos\beta = 0 \rightarrow (2): \mathrm{N} = Wcos\beta$$

$$(1)/(2) \rightarrow \frac{f_s}{\mathrm{N}} = \tan\beta \rightarrow \tan\beta = \frac{\mu_s \mathrm{N}}{\mathrm{N}} \rightarrow \beta = \tan^{-1}\mu_s \rightarrow \beta = \tan^{-1} 0.25$$

$$\boxed{\beta = 14°}$$

www.20file.org

www.20file.org

ب)

$$\sum M_O = 0 \rightarrow f_s \times R - W sin\theta \times \frac{4R}{3\pi} = 0$$

از معادله(1) داریم:

$$f_s = W sin\beta \rightarrow W sin\beta \times R - W sin\theta \times \frac{4R}{3\pi} = 0$$

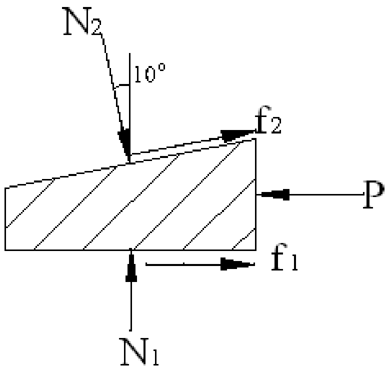
با حذفRوW از طرفین داریم:

$$sin\beta = \frac{4 sin\theta}{3\pi} \rightarrow sin\theta = \frac{3\pi sin\beta}{4} \rightarrow sin\theta = \frac{3\pi sin14^\circ}{4} = 0.57$$

$$\boxed{\theta = \sin^{-1} 0\ 57 = 34.75^\circ}$$

حل سوال۴:

با توجه به دیاگرام آزاد گوه داریم:



$$\overset{+}{\leftarrow} \sum F_x = 0 \rightarrow P - f_1 - f_2 cos10^\circ - N_2 sin10^\circ = 0$$

$$1): P = \mu_1 N_1 + N_2(\mu_2 cos10^\circ + sin10^\circ)$$

$$\uparrow^{+} \sum F_y = 0 \rightarrow N_1 + f_2 sin10^\circ - N_2 cos10^\circ = 0$$

$$N_1 + \mu_2 N_2 sin10^\circ - N_2 cos10^\circ = 0 \rightarrow (2): N_1 = N_2(cos10^\circ - \mu_2 sin10^\circ)$$

با جایگذاری N_1 از معادله (2) در معادله(1) داریم:

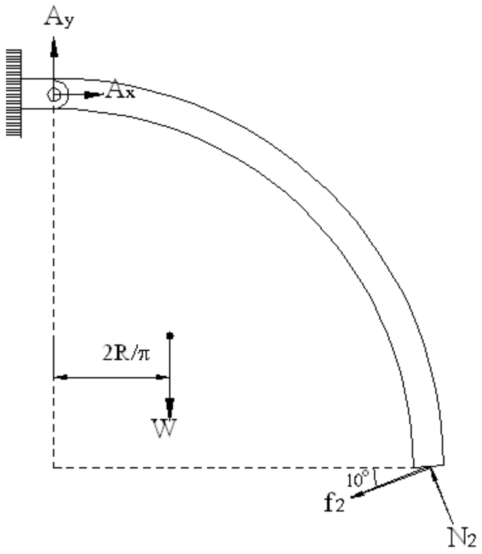
$$P = \mu_1 N_2(cos10^\circ - \mu_2 sin10^\circ) + N_2(\mu_2 cos10^\circ + sin10^\circ)$$

$$3): P = N_2[cos10^\circ(\mu_1 + \mu_2) + sin10^\circ(1 - \mu_1\mu_2)]$$

www.20file.org

www.20file.org

از دیاگرام آزاد میله AB داریم:



$$\sum M_A = 0 \rightarrow \mathrm{W} \times (2R/\pi) + f_2 cos10° \times R + f_2 sin10° \times R + N_2 sin10° \times R$$
$$-N_2 cos10° \times R = 0$$

با حذف R از طرفین داریم:

$$N_2 cos10° - \mu_2 N_2 cos10° - \mu_2 N_2 sin10° - N_2 sin10° = \frac{2W}{\pi}$$

$$N_2[cos10°(1-\mu_2) - sin10°(1+\mu_2)] = \frac{2W}{\pi}$$

$$4): N_2 = \frac{2W}{\pi[cos10°(1-\mu_2) - sin10°(1+\mu_2)]}$$

با جایگذاری N_2 از معادله (4) در معادله(3) داریم:

$$P = \frac{2W[cos10°(\mu_1+\mu_2) + sin10°(1-\mu_1\mu_2)]}{\pi[cos10°(1-\mu_2) - sin10°(1+\mu_2)]}$$

حال مقادیر را جایگذاری می کنیم:

$$W = 10kg \times 9.81 = 98.1N, \mu_1 = 0.2, \mu_2 = 0.4$$

$$P = \frac{2 \times 98.1[cos10°(0.2+0.4) + sin10°(1-0.2 \times 0.4)]}{\pi[cos10°(1-0.4) - sin10°(1+0.2)]}$$

$$\boxed{P = 122.5\mathrm{N}}$$

www.20file.org

www.20file.org

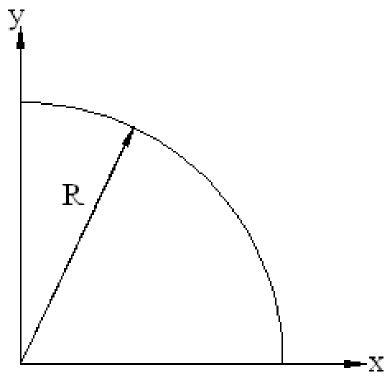
حل سوال۵:

الف:

$$I_{xx} = I_{xx\ \text{ربع دایره}} - I_{xx_{\text{سهمی}}}$$

$$I_{yy} = I_{yy_{\text{ربع دایره}}} - I_{yy_{\text{سهمی}}}$$

برای ربع دایره:



$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{\pi}{16} R^4$$

$$R = 2m \rightarrow I_{xx} = I_{yy} = \pi = 3.14m^4$$

برای سهمی از انتگرال گیری استفاده می کنیم.

ابتدا نقطه تلاقی سهمی و ربع دایره را بدست می آوریم بنابراین از تلاقی معادلات داریم:

$$y = x^2 \text{ و } x^2 + y^2 = 4 \quad \rightarrow x^2 + (x^2)^2 = 4 \rightarrow (x^2)^2 + x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} = 1.56 \rightarrow x = \sqrt{1.56} = 1.25$$

$$I_{yy_{\text{سهمی}}} = \int x^2\, dA = \int x^2 y dx = \int_0^{1.25} x^2 (x^2)\, dx$$

$$I_{yy_{\text{سهمی}}} = \int_0^{1.25} x^4 dx = \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^{1.25} = 0.61m^4$$

$$dI_{xx} = \frac{1}{3} y^3 dx \rightarrow I_{xx_{\text{سهمی}}} = \frac{1}{3} \int y^3 dx$$

www.20file.org

www.20file.org

$$I_{xx_{\text{سهمی}}} = \frac{1}{3}\int_{0}^{1.25}(x^2)^3 dx = \frac{1}{3}\int_{0}^{1.25} x^6 dx = \left[\frac{x^7}{21}\right]_0^{1.25} = 0.227m^4$$

$$\boxed{I_{xx} = I_{xx\ \text{ربع دایره}} - I_{xx_{\text{سهمی}}} = \ \ .14 - 0.61 = 2.53m^4}$$

$$\boxed{I_{yy} = I_{yy\text{ربع دایره}} - I_{yy_{\text{سهمی}}} = 3.14 - \ \ .227 = 2.91m^4}$$

ب:

$$K_{xx} = \sqrt{\frac{I_{xx}}{\mathrm{A}}}$$

$$K_{yy} = \sqrt{\frac{I_{yy}}{\mathrm{A}}}$$

$$\mathrm{A} = A_{\ \text{ربع دایره}} - A_{\ \text{سهمی}} = \frac{\pi}{4}(2)^2 - \int_{0}^{1.25} y dx = \pi - \int_{0}^{1.25} x^2 dx = \pi - \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{1.25}$$

$$A = 2.5m^2$$

$$\boxed{K_{xx} = \sqrt{\frac{I_{xx}}{\mathrm{A}}} = \sqrt{\frac{2.53}{2.5}} = 1m}$$

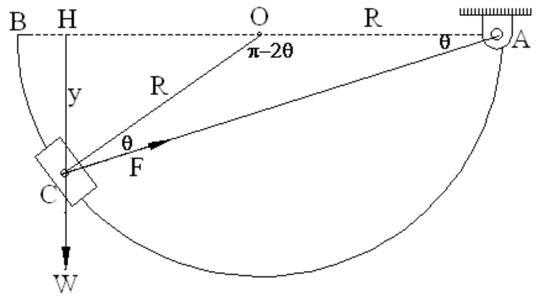
$$\boxed{K_{yy} = \sqrt{\frac{I_{yy}}{\mathrm{A}}} = \sqrt{\frac{2.91}{2.5}} = 1.08m}$$

www.20file.org

www.20file.org

حل سوال ۶:

ابتدا دیاگرام آزاد را رسم می کنیم:



با استفاده ار کار مجازی داریم:

$$1): W\delta y + F\delta s = 0$$

در این معادله F نیروی فنر، s تغییر طول فنر می باشد. همچنین y جابجایی وزن W است.

$$F = Ks$$
$$s = l - l_0$$

که l طول فنر و l_0 طول آزاد فنر می باشد.

$$l = AC \quad , \quad l_0 = R$$

از مثلث AOC در دیاگرام آزاد با توجه به برابر بودن زاویه های A و C داریم:

$$AC = 2Rsin\left(\frac{\pi - 2\theta}{2}\right) = 2Rsin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = 2Rcos\theta$$
$$s = l - l_0 = 2Rcos\theta - R = R(2cos\theta - 1)$$
$$\delta s = -2Rsin\theta\delta\theta$$

از مثلث ACH نیز داریم:

$$y = ACsin\theta \to y = 2Rcos\theta sin\theta = Rsin2\theta$$
$$\delta y = 2Rcos2\theta\delta\theta$$

از معادله (1) داریم:

$$1): W\delta y + F\delta s = 0 \to 2RWcos2\theta\delta\theta - KR(2cos\theta - 1) \times 2Rsin\theta\delta\theta = 0$$

$$2RWcos2\theta\delta\theta = 2KR^2(2cos\theta - 1)sin\theta\delta\theta$$

$$W = \frac{KR(2cos\theta - 1)sin\theta}{cos2\theta}$$

حال مقادیر عددی راجایگزین می کنیم:

$$\theta = 30° \ , \quad K = 1.5kN/m \quad , \quad R = 90mm$$

$$W = \frac{KR(2cos\theta - 1)sin\theta}{cos2\theta} = \frac{1500 \times 0.09 \times (2cos30° - 1)sin30°}{cos60°}$$

$$\boxed{W = 98.8N}$$

www.20file.org

www.20file.org

www.20file.org