میان ترم آخر فصل ۳

Subject:
Year. Month. Date. (1)

بسم الله الرحمن الرحیم

فضا: محیطی که حرکت در آن انجام می‌شود. حرکت فضایی: 3D * حرکت صفحه‌ای: 2D * حرکت خطی: 1D

ذره: جسمی که حرکت خطی دارد و نقاط مختلفش جابجایی یکسانی دارند

جسم صلب: نقاط مختلف جسم سرعت و شتاب و جابجایی متفاوتی دارند و حتی ممکن است که فاصله‌ی ذرات یکی باشد.

اگر جابجایی را نسبت به یک دستگاه ثابت در نظر بگیریم به آن اندازه‌ی مطلق می‌گوییم و اگر نسبت به دستگاه متحرک باشد اندازه‌گیری نسبی داریم. «دستگاه مطلق یا اینرسیال»

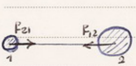
قانون اول نیوتن: اگر نیرویی به جسمی وارد نشود یا برآیند نیروهای وارد بر جسم صفر باشد به حرکت خود روی مسیر راست با سرعت ثابت ادامه می‌دهد. «هر جسمی که روی خط غیر راست حرکت کند حتماً شتاب دارد.»

«سرعت ثابت حتماً مقدار و جهت باید ثابت باشد»

قانون دوم نیوتن: $\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$ که باید جهت شتاب و جهت برآیند یکسان باشند

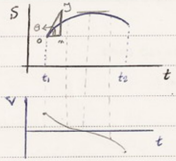
قانون سوم نیوتن: هنگامی که جسمی به جسم دیگر نیرو وارد می‌کند جسم دوم به جسم اول هم نیرو وارد می‌کند با همان مقدار و در راستای مخالف

قانون جاذبه عمومی: نیروی کششی که در همه‌ی اجسام وجود دارد و خط اثر آن در راستایی است که مراکز دو جسم را به هم متصل می‌کند.



$$F = k\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

$k = 6.673 \times 10^{-11}$



روش ترسیمی حل روابط بدست آمده

$om = 1 \rightarrow mn = \tan\theta$

حل ترسیمی، تقریبی است و دقیق نیست.

$$v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow \int_{s_1}^{s} ds = \int_{t_1}^{t} v\,dt \Rightarrow S = S_1 + ($$ سطح زیر منحنی $v-t$ از t_1 تا t)

– در حل بصورت ریاضی ساده ترین حالت این است که $s = s(t)$ در این حالت با مشتق گیری سرعت و شتاب را بدست آوریم.

– حال در حالتی که شتاب ثابت است داریم:

$$a = \frac{dv}{dt} \rightarrow \int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} a\,dt \Rightarrow v - v_0 = a(t - t_0)$$

$$\int_{s_0}^{s} ds = \int v\,dt = \int_0^t (v_0 + a(t))\,dt \Rightarrow s - s_0 = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

– حال در حالتی که $a = f(v)$

$$* \quad a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow f(v) = \frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{f(v)} = dt \Rightarrow \int \frac{dv}{f(v)} = \int dt$$

$$* \quad a\,ds = v\,dv \Rightarrow f(v)\,ds = v\,dv \Rightarrow ds = \frac{v\,dv}{f(v)}$$

مثال ۱   ذره‌ای در مسیر مستقیم حرکت می‌کند

$$S = 4t^3 + 3t^2 - 18t + 5$$

$$v = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = ? \\ a = ? \end{cases} \qquad v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow v = 12t^2 + 6t - 18 \Rightarrow 12t^2 + 6t - 18 = 0 \Rightarrow \boxed{t = 1\,s}$$

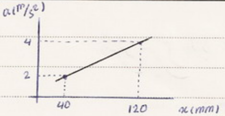
$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow a = 24t + 6 \xrightarrow{t=1} a = 24(1) + 6 = 30\ \frac{m}{s^2} \Rightarrow \boxed{a = 30\ \frac{m}{s^2}}$$

Subject:

Year. Month. Date. (4)

2-22

مثال 2



$$\begin{cases} x = 40 \\ v = 0.4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 120\ (mm) \\ v = ? \end{cases}$$

«اگر معادله ی خط نمودار را بنویسیم رابطه ی a و x بدست می آید»

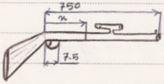
$$a\,dx = v\,dv$$

$$a - 2 = \frac{4-2}{0.12-0.04}(x - 0.04) \Rightarrow \boxed{a = 25x + 1}$$

$$(25x+1)\,dx = v\,dv \Rightarrow \int_{0.04}^{0.12} (25x+1)\,dx = \int_{0.4}^{v} v\,dv \Rightarrow \dots \Rightarrow \boxed{v = 0.8\ m/s}$$

2-48

مثال 3



$$a = \frac{k}{x} \qquad \begin{cases} x = 7.5 \\ \text{از حال سکون} \to v = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 750 \\ v = 600\ \frac{m}{s} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 375 \\ a = ?\ m/s^2 \end{cases}$$

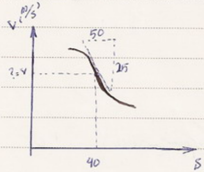
$$a\,dx = v\,dv \Rightarrow k\frac{dx}{x} = v\,dv$$

$$k\int_{0.0075}^{0.75} \frac{dx}{x} = \int_{0}^{600} v\,dv \Rightarrow \dots \Rightarrow k = 39086 \quad : \quad a = \frac{39086}{x}$$

$$x = 375\ mm \Rightarrow a = \frac{39086}{0.375} \Rightarrow \boxed{a = 104230\ m/s^2}$$

تمرین : 2 . 8 . 15 . 23 . 29 . 36 . 41 . 48 . 54 .

مثال



سرعت متحرک در چه زمانی $30\ \frac{m}{s}$ می شود

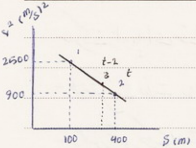
$$a = -30\ m/s^2 \qquad a\,ds = v\,dv$$

$$v = a\left(\frac{ds}{dv}\right)$$

از شکل : $\frac{dv}{ds} = -\frac{25}{50} = -1/2$

$$v = -30(-2) = +60\ \frac{m}{s}$$

PAPCO



مثال

جسمی روی خط راست حرکت می‌کند.

$\begin{cases} \Delta t = 2 & \text{دو ثانیه آخر} \\ \Delta S = ? \end{cases}$

در دو ثانیه آخر چه مسافتی را می‌پیماید؟

① $v = \dfrac{dS}{dt}$ معادله خط : $v^2 - 2500 = \dfrac{900-2500}{400-100}(S-100)$

$v^2 = 2500 - \dfrac{16}{3}(S-100) \Rightarrow v = \sqrt{-\dfrac{16}{3}S + 3033}$ ②

$\xrightarrow{①\ \text{در}\ ②} \sqrt{-\dfrac{16}{3}S + 3033} = \dfrac{dS}{dt} \qquad \displaystyle\int_{t-2}^{t} dt = \int_{S_3}^{400} \dfrac{dS}{\sqrt{-\frac{16}{3}S + 3033}}$

$\cdots \Rightarrow \Delta S = 400 - S_3 \qquad \underbrace{S_3}_{400-\Delta S} \qquad \Rightarrow \boxed{\Delta S = 65.3}\ m$

برای انتگرال‌گیری : $-\dfrac{16}{3}S + 3033 = u^2 \Rightarrow -\dfrac{16}{3}dS = 2u\,du$ و ...

2-57

مثال

ذره‌ای بر خط مستقیم حرکت می‌کند شتاب آن داده شده.

$a = k_1 t - k_2^2 x$

$t = 0 \begin{cases} x = 0 \\ \dot{x} = 0 \end{cases} \qquad x = f(t) = ? \qquad a = \dfrac{d^2S}{dt^2} = \ddot{S}$

$\ddot{x} = k_1 t - k_2^2 x \Rightarrow \ddot{x} + k_2^2 x = k_1 t$ ① معادله دیفرانسیل

$x = x_g(t) + x_p(t)$

$\ddot{x} + k_2^2 x = 0 \Rightarrow x_g = A \sin k_2 t + B \cos k_2 t$ ③ $\qquad x_p = ct$ ④

$\xrightarrow{①\ \text{در}\ ④} k_2^2 ct = k_1 t \qquad x_p(t) = \dfrac{k_1}{k_2^2} t$ ⑤ $\qquad x(t) = A \sin k_2 t + B \cos k_2 t + \left(\dfrac{k_1}{k_2^2}\right) t$

$\begin{cases} t = 0 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow B = 0$

$\begin{cases} t = 0 \\ \dot{x} = 0 \end{cases} \rightarrow A k_2 + \dfrac{k_1}{k_2^2} = 0 \Rightarrow A = -\dfrac{k_1}{k_2^3} \therefore x(t) = -\dfrac{k_1}{k_2^3} \sin k_2 t + \dfrac{k_1}{k_2^2} t$

Subject:
Year. Month. Date. (6)

حرکت زاویه‌ای خط

- هم برای حرکت ذرات و با استفاده از مختصات قطبی
- و همچنین تحلیل حرکت اجسام صلب

وضعیت زاویه‌ای خط : θ سرعت زاویه‌ای : $\omega = \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$

شتاب زاویه‌ای : $\alpha = \ddot{\theta} = \dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt}$

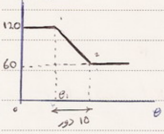
رویه افزایش مثبت و رویه کاهش منفی ⇐ بر حسب درجه - گراد - رادیان - دور : θ (rad, rev)

ω : rad/s - rpm (دور بر دقیقه) در حال افزایش مثبت

$$\frac{\text{دور}}{\text{دقیقه}} \times \frac{2\pi \text{ رادیان}}{1 \text{ دور}} \times \frac{1 \text{ دقیقه}}{60 \text{ ثانیه}} = \frac{2\pi}{60} \frac{\text{رادیان}}{\text{ثانیه}}$$

α : rad/s^2 ⇐ هم جهت ω مثبت و خلاف جهت ω منفی

$$\theta \ * \ \omega = \frac{d\theta}{dt} \ * \ \alpha = \frac{d\omega}{dt} \ * \ \alpha \, d\theta = \omega \, d\omega$$



مثال $t = ?$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\omega - 120\left(\frac{2\pi}{60}\right) = \frac{(60-120)\left(\frac{2\pi}{60}\right)}{10\,(2\pi)} (\theta - \theta_1)$$

دور تبدیل به رادیان

$$\Rightarrow \omega = 4\pi - \frac{1}{10}(\theta - \theta_1)$$

$$\boxed{d\omega = -\frac{1}{10} d\theta} \Rightarrow d\theta = -10\, d\omega$$

$$dt = \frac{d\theta}{\omega} \Rightarrow dt = \frac{-10\, d\omega}{\omega} \Rightarrow \int_t^{t+\Delta t} dt = \int_{120\left(\frac{2\pi}{60}\right)}^{60\left(\frac{2\pi}{60}\right)} \frac{-10\, d\omega}{\omega}$$

$$\boxed{\Rightarrow \Delta t = 6.93\ s}$$

Subject:
Year. Month. Date. ۷

- بردارها هنگامی مشتق دارند که حداقل یکی از دو کمیت مقدار و جهت بردار ثابت نباشد

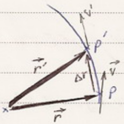
$\vec{P}$, $\vec{Q}$ $$\frac{d(\vec{P}\pm\vec{Q})}{dt}=\frac{d\vec{P}}{dt}\pm\frac{d\vec{Q}}{dt}$$

$$\frac{d(\vec{P}\overset{\cdot}{\times}\vec{Q})}{dt}=\frac{d\vec{P}}{dt}\overset{\cdot}{\times}\vec{Q}+\vec{P}\overset{\cdot}{\times}\frac{d\vec{Q}}{dt}$$ در ضرب خارجی ترتیب جملات مهم است

کمیت اسکالر u متغیر $$\frac{d(\vec{P}u)}{dt}=\frac{d\vec{P}}{dt}u+\vec{P}\frac{du}{dt}$$

کمیت اسکالر ثابت α $$\frac{d(\alpha\vec{P})}{dt}=\alpha\frac{d\vec{P}}{dt}$$

در حرکت دو بعدی:



$\vec{r}$: بردار وضعیت

$\vec{\Delta r}$: بردار جابجایی

$\bar{\vec{v}}=\frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t}$: سرعت متوسط * جهت $\bar{\vec{v}}$ با جهت $\vec{\Delta r}$ باید یکی باشد
مقدار آن هم از تقسیم طول $\vec{\Delta r}$ بر زمان بدست می آید *

$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}$
$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}$

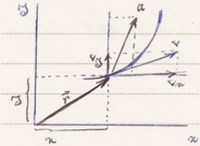
$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}$: سرعت لحظه ای * بردار سرعت لحظه ای همیشه بر مسیر مماس است *

$\bar{\vec{a}}=\frac{\vec{\Delta v}}{\Delta t}$: شتاب متوسط * جهت $\bar{\vec{a}}$ در جهت $\vec{\Delta v}$ و مقدار آن از تقسیم طول $\vec{\Delta v}$ بر Δt *

$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}$: شتاب لحظه ای

دستگاه مختصات : کارتزین $x-y$
قطبی $r-\theta$
تماسی $n-t$

Subject:
Year. Month. Date. 8



$$\begin{cases} \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} \\ \vec{v} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} \Rightarrow \vec{v} = \frac{d}{dt}(x\vec{i} + y\vec{j}) = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_x = \dot{x} \quad , \quad V_y = \dot{y}$$

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} \quad \vec{a} = \frac{d}{dt}(\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}) = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j}$$

$$\Rightarrow a_x = \ddot{x} \quad , \quad a_y = \ddot{y}$$

- مقدار بردار $\sqrt{x^2+y^2}$ و جهت آن از $\tan\theta$ بدست آید.

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} \qquad \vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} \qquad \vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j}$$

- همیشه بردار شتاب در سمت مقعر منحنی قرار دارد

مثال: متحرکی در صفحه $x-y$ در حال حرکت است رابطه:

$x = 2t^2 + 3t$

$y = \frac{t^3}{3} - 8$

در $t=3$ ، $|V|$ ، $|a|$ ، θ_v ، θ_a چقدر می‌باشند.

$$\vec{r} = (2t^2 - 3t)\vec{i} + (\frac{t^3}{3} - 8)\vec{j}$$

$$\vec{v} = (4t-3)\vec{i} + (t^2)\vec{j} \qquad \vec{a} = 4\vec{i} + 2t\vec{j}$$

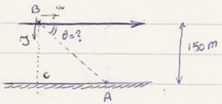
$$t=3 \Rightarrow v = 15\vec{i} + 9\vec{j} \Rightarrow |V| = \sqrt{15^2+9^2} = 17.5 \ m/s$$

$$a = 4\vec{i} + 6\vec{j} \Rightarrow |a| = \sqrt{4^2+6^2} = 7.2 \ m/s^2$$

$$\theta_v = \tan^{-1}(\frac{v_y}{v_x}) = tg^{-1}(\frac{9}{15}) = 30.1^\circ$$

$$\theta_a = tg^{-1}(\frac{a_y}{a_x}) = tg^{-1}(\frac{6}{4}) = 56^\circ$$

Subject:
Year. Month. Date. (9)



مثال: هواپیما می‌خواهد بسته‌ای را از نقطه‌ی B رها کند تا به نقطه‌ی A برخورد کند.
خط دید چقدر باید باشد؟

$V_0 = 200 \; km/h$

$tg\,\theta = \dfrac{150}{AC}$ $\qquad \dot{x} = \dfrac{200}{3.6} \; m/s \qquad \dot{x} = V_x = \dfrac{dx}{dt} \Rightarrow \int_0^x dx = \int_0^t \dot{x}\,dt$

« ثابت چون در راستای افقی نیرو وارد نمی‌شود »

$\Rightarrow x = \dfrac{200}{3.6}\, t$ ①

حال $y(t) = ?$:

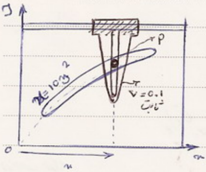
$a_y = g = 9.8 \; m/s^2 = dV_y/dt \Rightarrow dV_y = g\,dt$

$\int_0^{V_y} dV_y = g\int_0^t dt \Rightarrow V_y = gt \qquad V_y = \dfrac{dy}{dt} \Rightarrow \int_0^y dy = g\int_0^t t\,dt \Rightarrow y = \frac{1}{2} g t^2$

$150 = \frac{1}{2}(9.81)\, t^2 \Rightarrow t = 5.53 \, s$

$\xrightarrow{①} x = CA = \dfrac{200}{3.6}(5.53) = 307.6 \, (m) \qquad tg\,\theta = \dfrac{150}{307.6} \Rightarrow \theta = 26^\circ$

نمرات 60, 65, 67, 75, 78, 82, 85, 89, 93, 95



مهره‌ی P بین دو شیار عمودی و قوسی حرکت می‌کند

$\begin{cases} x = 0.1 \; m \\ \vec{V}, \vec{a} = ? \end{cases} \qquad V = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} \qquad a = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j}$

$\Rightarrow \boxed{\dot{x} = 0.1 \; m/s}$ ثابت $\Rightarrow \boxed{\ddot{x} = 0}$

$x = 10y^2 \Rightarrow \dot{x} = 20y\dot{y} \Rightarrow \dot{y} = \dfrac{\dot{x}}{20y} \Rightarrow \boxed{\dot{y} = \dfrac{0.1}{20(0.1)} = 0.05 \; m/s}$

$x = 0.1 \Rightarrow 0.1 = 10y^2 \Rightarrow \boxed{y = 0.1}$

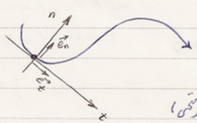
$\dot{x} = 20y\dot{y} \Rightarrow \ddot{x} = 20(\dot{y}^2 + y\ddot{y}) \Rightarrow 0 = 20(\dot{y}^2 + y\ddot{y}) \Rightarrow \ddot{y} = -\dfrac{\dot{y}^2}{y}$

$\ddot{y} = -\dfrac{(0.05)^2}{0.1} = \boxed{-0.025 \; m/s^2}$

$\begin{cases} \vec{V} = 0.1\vec{i} + 0.05\vec{j} \; (m/s) \\ \vec{a} = -0.025\vec{j} \; (m/s^2) \end{cases}$

Subject:
Year. Month. Date. 10

دستگاه قائم - مماسی $(n-t)$



مبدأ: همیشه روی متحرک

محورها:
- t: همیشه مماس بر مسیر (در جهت حرکت مثبت است)
- n: عمود بر محور t (جهت مثبت همیشه رو به مرکز انحنا)

- این دستگاه دستگاهی متحرک است برخلاف کارتزین

بردارهای حرکت در این دستگاه

از بردار $\vec{v}$ شروع می‌کنیم چون همیشه بر مسیر حرکت مماس است.

$$* \ \vec{v} = v\,\vec{e}_t = \rho\dot{\theta}$$

$$\Delta S = \rho\,\Delta\theta$$

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\rho\,\Delta\theta}{\Delta t}$$

$\dot{\theta}$: سرعت زاویه‌ای محور n

$$v = \rho\frac{d\theta}{dt} = \rho\dot{\theta}$$

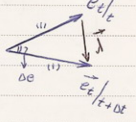
$\dot{\theta}$: سرعت زاویه‌ای دستگاه مختصات n و t

ρ: شعاع انحنا در نقطه‌ای که سرعت را می‌خواهیم.

$$\vec{v} \begin{cases} v_t = \rho\dot{\theta} \\ v_n = 0 \end{cases}$$

$$* \ \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\vec{e}_t) \Rightarrow \vec{a} = \dot{v}\vec{e}_t + v\frac{d}{dt}\vec{e}_t$$

$$\frac{d\vec{e}_t}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{e}_t|_{t+\Delta t} - \vec{e}_t|_t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\lambda}}{\Delta t}$$



* در حالت حدی
چون $\Delta\theta \to 0$
پس $\vec{\lambda} = \vec{e}_n$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(1 \times \Delta\theta)\vec{e}_n}{\Delta t}$$

$$\frac{d\vec{e}_t}{dt} = \vec{e}_n \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \dot{\theta}\,\vec{e}_n$$

" مشتق $\vec{e}_t$: 90° تغییر جهت داده "

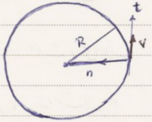
$$\frac{d\vec{e}_n}{dt} = -\dot{\theta}\,\vec{e}_t$$

$$\vec{a} = \dot{v}\vec{e}_t + v\dot{\theta}\,\vec{e}_n \begin{cases} a_t = \dot{v} & \text{شتاب مماسی} \\ a_n = v\dot{\theta} = \rho\dot{\theta}^2 = \dfrac{v^2}{\rho} \end{cases}$$

شتاب قائم - شتاب جانب مرکز

Subject:
Year. Month. Date. 19

در حرکت دورانی

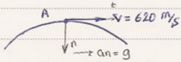


$$\vec{v} = R\omega \vec{e}_t$$

$$\vec{a} = R\alpha \vec{e}_t + R\omega^2 \vec{e}_n$$

شتاب مماسی بستگی به جهت α دارد * شتاب جانب مرکز همیشه به سمت مرکز

مثال

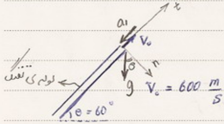


$\rho_A = ?$

* « هرگاه شعاع انحنا را خواستیم باید از شتاب جانب مرکز استفاده کنیم » *

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} \Rightarrow \frac{v^2}{\rho} = g \Rightarrow \rho = \frac{v^2}{g} = \frac{(620)^2}{9.8} = \boxed{39185\ m}$$

مثال



شتاب { ۱- خلاف جهت سرعت
۲- شتاب جاذبه

« مقاومت هوا در راستای سرعت »

در لحظه‌ی خروج از لوله ?= ρ

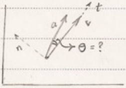
$$a_n = \frac{v^2}{\rho} \qquad a_n = g\cos\theta \Rightarrow g\cos\theta = \frac{v^2}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{v^2}{g\cos\theta} = \boxed{73400\ m}$$

مثال

$$\vec{r} = \frac{3}{2}t^2 \vec{i} + \frac{2}{3}t^3 \vec{j} \qquad t = 2\ s \qquad \rho = ?$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} \ * \ \vec{v} = 3t\vec{i} + 2t^2\vec{j} \ * \ \vec{a} = 3\vec{i} + 4t\vec{j} \ * \xrightarrow{t=2} |v| = 10\ m/s \quad 910$$

$$\xrightarrow{t=2} \vec{a} = 3\vec{i} + 8\vec{j} \qquad \vec{v} = 6\vec{i} + 8\vec{j}$$



$$\vec{v}\cdot\vec{a} = |v||a|\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{18+64}{(10)(\sqrt{73})} \Rightarrow \theta = 16.3^\circ$$

$$a_n = a\sin\theta \Rightarrow a_n = \sqrt{73}\sin 16^\circ$$

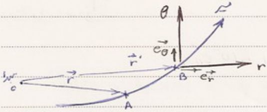
$$\Rightarrow \rho = 41.7$$

128 - 123 - 118 - 113 - 104 - 99

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. 12

دستگاه قطبی $(r-\theta)$



مبداء همیشه روی تحرک

محور r در امتداد $\vec{r}$ — محور θ عمود بر r

بردارهای واحد $\vec{e_r}$ ، $\vec{e_\theta}$ — امتداد محور r جهت افزایش r جهت ⊕

— محور θ در جهت افزایش زاویه ⊕

بردارهای حرکت :

— سرعت‌ها در دستگاه

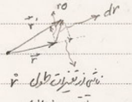
— اگر اندازه‌ها بر حسب طول و زاویه باشد

— اگر مؤلفه‌ها بصورت زاویه‌ای و ... باشد

$$\vec{r} = r\,\vec{e_r}$$

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{r} = \frac{d}{dt}(r\vec{e_r}) = \dot{r}\vec{e_r} + r\underbrace{\frac{d}{dt}\vec{e_r}}_{\dot{\theta}\vec{e_\theta}}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta} \Rightarrow \text{“} v_r = \dot{r} \;,\; v_\theta = r\dot{\theta} \text{”}$$



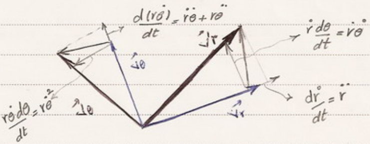
$$|V| = \sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2}$$

$\dot{r}$ ناشی از تغییرات طول

تقسیم بر زمان

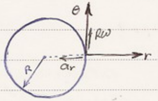
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta}\right] = (\ddot{r}\vec{e_r} + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e_\theta}) + (\dot{r}\dot{\theta}\vec{e_\theta} + r\ddot{\theta}\vec{e_\theta} - r\dot{\theta}^2\vec{e_r})$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e_r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e_\theta} \quad \text{“} \vec{a_r} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \;,\; a_\theta = (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \text{”}$$



Subject:

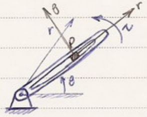
Year. Month. Date. 13



$$\vec{v} = R\omega\, \vec{e_\theta}$$

$$\vec{a} = -R\omega^2\, \vec{e_r} + r\alpha\, \vec{e_\theta}$$

مثال



$N = 80$ rpm سرعت زاویه‌ای

$\alpha = -280$ rpm/s کاهش

$r = 250$ (mm)

r به طور ثابت $300 \frac{mm}{s}$ در حال کاهش است.

$a_p = ?$ $\quad V_p = ?$

شتاب زاویه‌ای محور مختصات

" $r, \dot{r}, \ddot{r}, \theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}$ همگی اسکالراند "

- کلاً در دستگاه قطبی 5 کمیت داریم

- اندازه ثابت و جهت متغیر چون در راستای r است

$r = 0.25$ (m) $\ast$ $\dot{r} =$ تغییرات r نسبت به زمان $= -0.3\ m/s$ $\ast$ $\ddot{r} = 0$

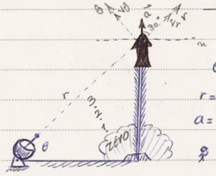
$\dot{\theta} = 80\left(\frac{2\pi}{60}\right) = \frac{8\pi}{3}$ rad/s $\qquad \ddot{\theta} = -280$ rpm/s $\times \frac{2\pi}{60} = -29.3$ rad/s²

$$\boxed{\vec{V}_p = \left(-0.3\,\vec{e_r} + \frac{2\pi}{3}\,\vec{e_\theta}\right)}$$

$$\vec{a}_p = \left(-\tfrac{1}{4} \times \frac{64\pi^2}{9}\right)\vec{e_r} + \left(-\tfrac{1}{4} \times 29.3 + 2\,\frac{8\pi}{3} \times (-0.3)\right)\vec{e_\theta}$$

$$\boxed{\vec{a}_p = -17.6\,\vec{e_r} - 12.4\,\vec{e_\theta}}$$

مثال



133-138-144-149-157
162-166
تمرین

$\theta = 60^\circ \quad \dot{\theta} = 0.03$ rad/s

$r = 7500$ m

$a = 20$ m/s² $\quad \ddot{r}, \ddot{\theta} = ?$

- روش هندسی

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\vec{e_r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\vec{e_\theta}$$

$$20\,(\cos 30^\circ\,\vec{e_r} + \sin 30^\circ\,\vec{e_\theta}) = \left[\ddot{r} - 7500(0.03)^2\right]\vec{e_r} + \left[7500(\ddot{\theta}) + 2\overset{?}{\dot{r}}(0.03)\right]\vec{e_\theta}$$

$$\begin{cases} 10\sqrt{3} = \ddot{r} - 9(0.75) \Rightarrow \ddot{r} = 24.1\ m/s^2 \\ 10 = 7500\ddot{\theta} + 0.06\dot{r} \end{cases}$$

$\nearrow$ $V_r\cos\theta - V_\theta\sin\theta = 0 \Rightarrow \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta = 0 \Rightarrow \dot{r}\left(\frac{1}{2}\right) - 7500(0.03)\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

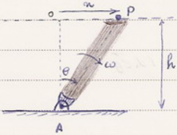
PAPCO

$\dot{r} = 389.7$ m/s

$10 = 7500\ddot{\theta} + 0.06(389.7) \Rightarrow \ddot{\theta} = 0.00178$ rad/s²

Subject:
Year.　Month.　Date. 14

مثال



ω ثابت　　$a_p = ?$

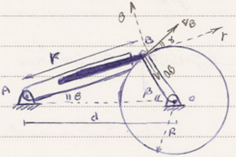
* در اغلب اوقات ما با روابط هندسی
بیشتر گسستن ها را به جمع روابط مشتق *

$x = Tg\,\theta$

$\dot{x} = h\dot{\theta}(1+Tg^2\theta)$

$\dot{x} = h\omega(1+Tg^2\theta) = v_p$

$\ddot{x} = h\omega\left(2\dot{\theta}Tg\theta(1+Tg^2\theta)\right) \Rightarrow \ddot{x} = a_p = 2h\omega^2 Tg\theta(1+Tg^2\theta)$



$R = 90$　　$\dot{\beta} = 60\ \frac{rad}{s}$ ثابت

$d = 300$　　$\beta = 30^\circ$　$\begin{cases} \dot{r}\,;\ \ddot{r} = ? \\ \dot{\theta}\,;\ \ddot{\theta} = ? \end{cases}$

روش ۱

$\overset{\triangle}{OAB}: r^2 = R^2 + d^2 - 2Rd\cos\beta$ ①　قضیه کسینوس ها $\xrightarrow{\beta=30}$ $r = 0.227\ m$

مشتق ① $\Rightarrow 2r\dot{r} = +2Rd\dot{\beta}\sin\beta$ ② $\Rightarrow \dot{r} = 3.57\ \frac{m}{s}$

مشتق ② $\Rightarrow \dot{r}^2 + r\ddot{r} = Rd\dot{\beta}^2\cos\beta \Rightarrow \ddot{r} = 314.7\ \frac{m}{s^2}$

$\frac{r}{\sin\beta} = \frac{R}{\sin\theta} \Rightarrow r\sin\theta = R\sin\beta \Rightarrow \theta = 11.43^\circ$

$\dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta = R\dot{\beta}\cos\beta \Rightarrow \dot{\theta} = 17.84\ \frac{rad}{s}$

$\Rightarrow \ddot{r}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\theta}\cos\theta + r\ddot{\theta}\cos\theta - r\dot{\theta}^2\sin\theta = -R\dot{\beta}^2\sin\beta$

$\Rightarrow \ddot{\theta} = -1510\ \frac{rad}{s^2}$

روش ۲　با استفاده از دستگاه قطبی مبدا را روی متحرک که نقطه B است در نظر می گیریم.

$v_B = \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta}$　　$|v_B| = R\dot{\beta}$

با قضیه کسینوس ها γ بدست می آید :

$R\dot{\beta}(\cos\gamma\,\vec{e_r} + \sin\gamma\,\vec{e_\theta}) = \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta}$

معادله ی برداری را به 2 معادله ی اسکالر تبدیل می کنیم :

$\begin{cases} R\dot{\beta}\cos\gamma = \dot{r} \\ R\dot{\beta}\sin\gamma = r\dot{\theta} \end{cases}$　　$\gamma = 90 - (\theta+\beta)$

θ از رابطه ی sin ها بدست می آید ← γ بدست می آید .

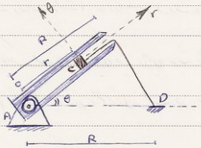
Subject:

Year.   Month.   Date. 15

$\vec{a_B} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e_r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e_\theta}$ فقط شتاب جانب مرکز دارد.

$R\dot{\beta}^2 (\sin\gamma\, \vec{e_r} - \cos\gamma\, \vec{e_\theta}) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e_r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e_\theta}$

$$\begin{cases} R\dot{\beta}^2 \sin\gamma = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \Rightarrow \ddot{r} = \\ -R\dot{\beta}^2\cos\gamma = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} = \end{cases}$$



$\dot{\theta} = 4 \ \frac{rad}{s}$ ثابت (ccw)

$\theta = 0 \Rightarrow r = 0$

$R = 0.4m \qquad \theta = 30^\circ \Rightarrow V_c, a_c = ?$

از دستگاه قطبی که مبدا روی c است استفاده می‌کنیم.

$r = BD$

$\overset{\triangle}{OBD}: \ (r = BD)^2 = 2R^2 - 2R^2\cos\theta \Rightarrow r = BD = 0.207\ m$

$2r\dot{r} = +2R^2\dot{\theta}\sin\theta \Rightarrow \dot{r} = 1.55\ m/s$

$\dot{r}^2 + r\ddot{r} = R^2\dot{\theta}^2\cos\theta \Rightarrow \ddot{r} = -0.83\ m/s^2$ $\dot{\theta} = 4\ \frac{rad}{s}$, $\ddot{\theta} = 0$

$\vec{V_c} = \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta} \Rightarrow \vec{V_c} = 1.55\,\vec{e_r} + 0.828\,\vec{e_\theta}$

$\vec{a_c} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e_r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e_\theta} \Rightarrow \vec{a_c} = -4.14\,\vec{e_r} + 12.4\,\vec{e_\theta}$

در دستگاه کارتزین داده شده $\rightarrow \begin{cases} x = 100 \\ y = 75 \end{cases}$

در دستگاه قطبی داده شده $\rightarrow a_r = 25\ m/s^2$, $a_\theta = 0$

$|v| = ?$

$\ddot{r} = ?$

$\ddot{\theta} = ?$

دستگاه مماس-قائم $\rightarrow \rho = ?$

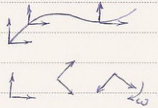
$a_t = ?$

PAPCO

میان‌ترم: یکشنبه 86.9.11

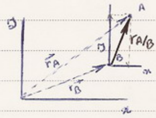
حرکت نسبی در صفحه

- دستگاهی که جای ساکن نیست و اندازه‌ها نسبت به آن دستگاه سنجیده شود، دستگاه متحرک نام دارد.



- این دستگاه‌ها هم خاصیت انتقالی دارند هم خاصیت چرخشی.
- سرعت و شتاب حرکت آنچه در این دو دستگاه با هم متفاوت است.
- صرف اینکه مسیر حرکت روی یک دایره باشد دلیل نمی‌شود که دستگاه چرخان باشد
هم می‌تواند انتقالی و هم می‌تواند هر دو باشد.

روابط کمیت‌های حرکت



$$\vec{r}_A = \vec{r}_B + \vec{r}_{A/B}$$

روابط سرعت‌ها
$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B}$$

روابط شتاب‌ها
$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{A/B}$$

$$\vec{r}_{A/B} = x\vec{i} + y\vec{j} \qquad \vec{v}_{A/B} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} \qquad \vec{a}_{A/B} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j}$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B} \quad *$$
$$\vec{v}_B = \vec{v}_C + \vec{v}_{B/C}$$
$$\vec{v}_A = \vec{v}_C + \vec{v}_{A/C} \quad *$$

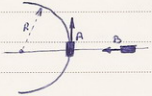
$$\vec{v}_B + \vec{v}_{A/B} = \vec{v}_C + \vec{v}_{A/C} \Rightarrow \vec{v}_C + \vec{v}_{B/C} + \vec{v}_{A/B} = \vec{v}_C + \vec{v}_{A/C}$$

$$\vec{v}_{A/C} = \vec{v}_{A/B} + \vec{v}_{B/C} \qquad \vec{v}_{1/n} = \vec{v}_{1/2} + \vec{v}_{2/3} + \cdots + \vec{v}_{n-1/n}$$

Subject:
Year.   Month.   Date. 17

دو روش برای حل مسأله: ترسیمی و تحلیلی «خطا باید زیر ۳٪ یا ۴٪ باشد»

مثال



$R = 150\ m$

$V_A = 54\ km/h$ ثابت

$V_B = 81\ km/h$

سرعت B در هر ثانیه $3\ m/s$ کاهش می‌یابد.

$\vec{V}_{A/B} = ?$ و $\vec{a}_{A/B} = ?$

«دستگاه مختصات را می‌توان روی متحرک گذاشت و باز از همان روابط استفاده کرد»

«$V_{A/B}$ و $V_{B/A}$ قرینه‌ی هم‌اند از لحاظ مقداری یکی‌اند»

روش تحلیلی: ابتدا بردارهای موجود را تصویر می‌کنیم

$\vec{V}_A = \frac{54}{3.6}\vec{j}$

$\vec{V}_B = \frac{81}{3.6}\vec{i}$

$\vec{V}_{A/B} = ?$ نه مقدارش را داریم و نه جهتش را

$$\frac{54}{3.6}\vec{j} = \frac{81}{3.6}\vec{i} + \vec{V}_{A/B} \Rightarrow \vec{V}_{A/B} = -22.5\vec{i} + 15\vec{j}\ \ m/s \qquad |V_{A/B}| = 27\ m/s$$

$$a_A = \vec{a}_A)_n = \frac{V_A^2}{\rho}\vec{i} = \frac{\left(\frac{54}{3.6}\right)^2}{150}\vec{i}$$

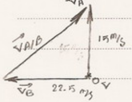
«هر حرکت منحنی‌الخط شتاب دارد حالا چه اندازه‌ی سرعتش ثابت باشه»

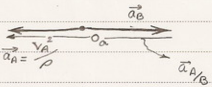
$\vec{a}_A = 1.5\vec{i}\ \ m/s^2$

$\vec{a}_B = -3\vec{i}$

$$\vec{a}_{A/B} = ? \Rightarrow 1.5\vec{i} = -3\vec{i} + \vec{a}_{A/B} \Rightarrow \vec{a}_{A/B} = 4.5\vec{i}\ \ m/s^2$$

روش ترسیمی: با اندازه‌گیری گونیا و نقاله بدست می‌آید.

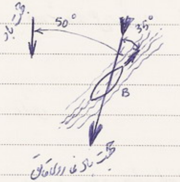




Subject:

Year. Month. Date. 18

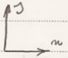
مثال



$V_B = 6.5$

$V_\omega = ?$

$$\vec{V}_w = \vec{V}_B + \vec{V}_{w/B}$$



$$\vec{V}_w = -V_w\,\vec{j}$$

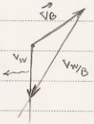
$$\vec{V}_B = 6.5\,(\sin 50\,\vec{i} + \cos 50\,\vec{j})$$

$$\vec{V}_{w/B} = V_{w/B}\,(-\sin 15\,\vec{i} - \cos 15\,\vec{j})$$

$$-V_w\,\vec{j} = 6.5\,(\sin 50\,\vec{i} + \cos 50\,\vec{j}) - V_{w/B}\,(\sin 15\,\vec{i} + \cos 15\,\vec{j})$$

$$\begin{cases} 0 = +6.5\sin 15 - V_{w/B}\sin 15 \Rightarrow V_{w/B} = 19.24 \\ -V_w = 6.5\cos 50 - V_{w/B}\cos 15 \Rightarrow V_w = 14.4 \end{cases}$$

روش ترسیمی :



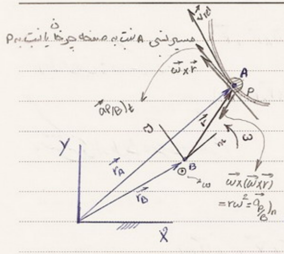
ابتدا کشیدیم ولی مقدارش را نداشتیم

تمرین : 185 - 189 - 195 - 201 - 204 - 205

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. 19

حرکت نسبی دستگاه چرخان



$$① \; \vec{r}_A = \vec{r}_B + \vec{r}$$

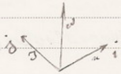
$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \omega\vec{j} \qquad \frac{d\vec{j}}{dt} = -\omega\vec{i}$$

$$\omega\vec{j} = \vec{\omega}\times\vec{i}$$

$$-\omega\vec{i} = \vec{\omega}\times\vec{j}$$

$$\frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{k}$$



$$\vec{\omega}\times\vec{i} = |\omega||i|\sin(\omega, i)\vec{e} = \omega(1)(1)\vec{j} = \omega\vec{j}$$

$\vec{j}$ با قانون دست راست بدست آمده است.

$$\vec{\omega}\times\vec{j} = |\omega||j|\sin(\omega, j)\vec{e} = \omega(1)(1)(-\vec{i}) = -\omega\vec{i}$$

یک نتیجه گیری کلی :

$$\frac{d\vec{e}}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{e}$$

حال :

if $(\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j})$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = (\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}) + \vec{\omega}\times\vec{r}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\vec{i} + y\vec{j}) = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + x(\vec{\omega}\times\vec{i}) + y(\vec{\omega}\times\vec{j})$$

$$* \; \dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = (\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}) + \left\{\vec{\omega}\times x\vec{i} + \vec{\omega}\times y\vec{j}\right\} = \dot{\vec{r}} + \vec{\omega}\times(x\vec{i} + y\vec{j}) = \dot{\vec{r}} + \vec{\omega}\times\vec{r}$$

$$\frac{d\dot{\vec{r}}}{dt} = \underbrace{(\ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j})}_{\ddot{\vec{r}}} + \vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} = \vec{v}_{rel}$$

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} = \vec{a}_{rel}$$

$\vec{\omega}\times\vec{r} = r\omega \leftarrow$ اندازه

جهت ـــ خطی عمود بر $\vec{r}$ و $\vec{\omega}$ که در صفحه xy می باشد

PAPCO

Subject:

Year. Month. Date. 20

$$\vec r_A = \vec r_B + \vec r \Rightarrow V_A = V_B + \overbrace{\vec\omega\times\vec r}^{\vec V_{P/B}} + \dot{\vec r}$$

رابطه ی سرعت ها در دستگاه چرخان

$$V_A = \underbrace{V_B}_{\text{سرعت مبداء مختصات دستگاه چرخان}} + \vec\omega\times\vec r + \vec V_{rel} \rightarrow \vec V_{A/P}$$

با مشتق گیری از روابط سرعت ها داریم

$$\vec a_A = \vec a_B + \dot{\vec\omega}\times\vec r + \vec\omega\times(\dot{\vec r} + \vec\omega\times\vec r) + \ddot{\vec r} + \vec\omega\times\dot{\vec r}$$

« ω و ω̇ در جهت $\vec Z$ اند »

$$\vec a_A = \vec a_B + \dot{\vec\omega}\times\vec r + \vec\omega\times(\vec\omega\times\vec r) + 2\vec\omega\times\dot{\vec r} + \ddot{\vec r}$$ شتاب کوریولیس

$$\vec a_A = \vec a_B + \underbrace{\dot{\vec\omega}\times\vec r}_{\vec a_{P/B})_t} + \underbrace{\vec\omega\times(\vec\omega\times\vec r)}_{\vec a_{P/B})_n} + 2\vec\omega\times\vec V_{rel} + \vec a_{rel} \rightarrow \vec a_{A/P} \quad \frac{V_{rel}^2}{\rho}$$ حرکت دایره ای جانب مرکز

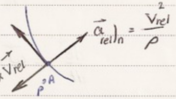
$\vec a_A$: شتاب مطلق ذره اصلی

$\vec a_B$: شتاب مبداء دستگاه چرخان

P : نقطه ای از صفحه ی چرخان که A در این لحظه بر آن منطبق است .

$$\vec V_A = \vec V_B + \vec V_{P/B} + \vec V_{A/P} \qquad \vec V_A = \vec V_P + \vec V_{A/P}$$

$\vec a_{rel})_t$ از رابطه ی مماسی

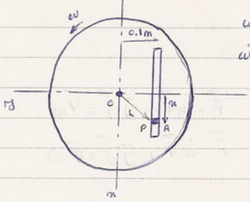


شتاب کوریولیس = شتاب مکمل = شتاب مرکب

* هر جسمی که هم حرکت و هم چرخش داشته باشد شتاب کوریولیس خواهیم داشت *

r : فاصله ی ذره اصلی تا مبداء دستگاه

مثال



$\omega = 5\ rad/s$

$\dot\omega = -10\ rad/s^2$

$x = 0.1 m$

$\dot x = 0.15\ m/s$

$\ddot x = 0.5\ m/s^2$

$\vec V_A = ?$

$\vec a_A = ?$

Subject:
Year. Month. Date. 21

$$\vec{V}_A = \vec{V}_o + \vec{\omega}\times\vec{r} + \vec{V}_{rel}$$

$\vec{V}_o = 0$ $\quad \vec{\omega} = 5\vec{k}$ $\quad \vec{r} = \vec{OA} = x\vec{i} - 0.1\vec{j} = 0.1\vec{i} - 0.1\vec{j}$

$\vec{V}_{rel} =$ سرعت تحرک در مسیر نسبی $= \dot{x}\vec{i} + \underbrace{\dot{y}}_{0}\vec{j} = \dot{x}\vec{i} = 0.15\vec{i}$

$$\vec{V}_A = 0 + (-5\vec{k})\times(0.1\vec{i} - 0.1\vec{j}) + 0.15\vec{i} = -0.5\vec{j} - 0.5\vec{i} + 0.15\vec{i}$$

$$\boxed{\vec{V}_A = -0.35\vec{i} - 0.5\vec{j}}$$

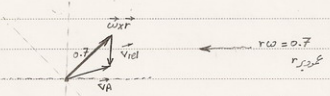
$\dot{\omega}$ ω

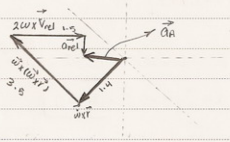
$$a_A = a_o + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) + 2\vec{\omega}\times\vec{V}_{rel} + \vec{a}_{rel}$$

$a_o = 0$ $\quad \dot{\vec{\omega}} = 10\vec{k}$ $\quad \vec{a}_{rel} =$ شتاب نسبت به مسیر نسبی $= \ddot{x}\vec{i} + \underbrace{\ddot{y}}_{0}\vec{j} = 0.5\vec{i}$

$$\boxed{\vec{a}_A = -\vec{i} + 2\vec{j}}$$

حل از روش ترسیمی :

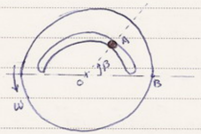




یعنی بردار $\vec{r}$ 90° در جهت $\vec{\dot\omega}$ بچرخد $\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}$

تمرین : 151 و 158 ، 163 و 169 ، 173 و 175 از فصل 5

Subject:
Year. Month. Date. 22



$\omega = 10\ rad/s$ ثابت $\dot{\beta} = 5\ rad/s$ ثابت

$OA = 150\ mm$ $V_A, a_A = ?$ تغییرات زاویه OA نسبت به OB

* مبدا را روی نقطه‌ی P از صفحه در نظر می‌گیریم که A در آن لحظه از P می‌گذرد *

$\vec{V}_A = \vec{V}_P + \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{V}_{rel}$

$\vec{V}_P = OP \cdot \omega \vec{j} = (0.15)(10)\vec{j} =$

$\boxed{\vec{V}_P = 1.5 \vec{j}}$

$\vec{\omega} = 10 \vec{k}$ $\vec{r} = 0$

فاصله‌ی متحرک تا مبدا

$\vec{V}_{rel} =$ سرعت متحرک با این فرض که دستگاه ساکن باشد

$\vec{V}_{rel} = OA \cdot \dot{\beta} \vec{j} = (0.15)(5) = 0.75 \vec{j}$

$\vec{V}_A = 1.5\vec{j} + 0.75\vec{j}$

$\boxed{\vec{V}_A = 2.25 \vec{j}}$ m/s

$\vec{a}_P = (OP)(\omega)^2(-\vec{i}) =$ فقط شتاب جانب مرکز only

$= -15\vec{i}$

$\dot{\vec{\omega}} = 0$ $\vec{a}_{rel} = \vec{a}_{A/P} =$ خط OA با سرعت ثابت $\dot{\beta}$ حرکت می‌کند

$= \vec{a}_{rel})_n = (OA)(\dot{\beta})^2(-\vec{i}) = -3.75\vec{i}$

$\boxed{\vec{a}_A = -33.75\,\vec{i}}$ m/s^2

حال دستگاه را روی نقطه‌ی O در نظر می‌گیریم :

$\vec{V}_O = 0$ $\vec{\omega} = 10\vec{k}$ $\vec{r} = \vec{OA} = 0.15\vec{i}$ $\vec{V}_{rel} = 0.75\vec{j}$

$\vec{V}_A = V_O + \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{V}_{rel}$

$\vec{V}_A = 1.5\vec{j} + 0.75\vec{j} = \boxed{2.25\vec{j}}$

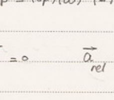
$\vec{a}_O = 0$ $\dot{\vec{\omega}} = 0$ $\vec{a}_{rel} = -3.75\vec{i}$

$\boxed{\vec{a}_A = -33.75\vec{i}}$

این تمرین را می‌توان از دستگاه قطبی حل کرد :

$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$

$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta$



* برای تعیین θ آن را از یک محور ثابت می‌سنجیم *

$\dot{r} = 0$ $\ddot{r} = 0$

$\dot{\theta} =$ خط OA در یک ثانیه نسبت به محور ثابت چقدر جابجا می‌شود $= \omega + \dot{\beta}$

$\dot{\theta} = 10 + 5 = 15\ rad/s$

$\ddot{\theta} = \dot{\omega} + \ddot{\beta} = 0$

PAPCO

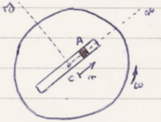
Subject:
Year. Month. Date. 23

$$\vec{v} = (0.15)(15)\,\vec{e}_\theta = 2.25\,\vec{e}_\theta = \boxed{2.25\,j}$$

$$\vec{a} = (0.15)(15)^2\,\vec{e}_r = -33.75\,\vec{e}_r = \boxed{-33.75\,i}$$

از قسمت ج هم می‌شد استفاده کرد
به عنوان تمرین از قسمت ج حل شود *

مثال



$\alpha = 15\ rad/s^2$

$\dot{x} = 100\ mm/s$ ثابت $\omega = 12\ rad/s$

$\vec{V}_A , \vec{a}_A = ?$: در لحظه‌ی عبور از مرکز O

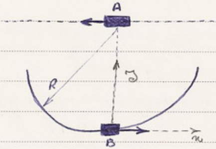
$\vec{V}_0 = 0 \quad \vec{\omega} = 12\,\vec{k}\ rad/s \quad \vec{r} = 0 \quad \vec{V}_{rel} = \dot{x} = 0.1\,\vec{i}\ m/s \quad (\dot{\vec{r}} = \vec{V}_{rel} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j})$

$$\vec{V}_A = \vec{V}_0 + \vec{\omega}\times\vec{r} + \vec{V}_{rel} \Rightarrow \vec{V}_A = 0 + 0 + 0.1\,\vec{i} \Rightarrow \boxed{\vec{V}_A = 0.1\,\vec{i}}$$

$\vec{a}_0 = 0 \quad \vec{\dot{\omega}} = 15\,\vec{k}\ rad/s^2 \quad \vec{a}_{rel} = 0 = \ddot{x}$ ⟵ $\dot{x}$ ثابت است

$$\vec{a}_A = 0 + 0 + 0 + 2(12\vec{k})\times(0.1\vec{i}) + 0 \Rightarrow \boxed{\vec{a}_A = 2.4\,\vec{j}}$$

مثال



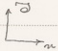
$V_A = V_B = 50\ km/h$ ثابت

$R = 150\ m$

؟ شتاب A از دید سرنشین خودرو B $= \vec{a}_{rel}$

اگر گفته بود شتاب B از دید A دستگاه چرخان نخواهد بود و انتقالی است

پس $a_A = a_B + \underbrace{\sim\sim\sim}_{⊛}$ ⊛ جواب ما نخواهد بود.



دستگاه چرخان چسبیده به متحرک B

Subject:
Year. Month. Date. 24

$\vec{a}_A = 0 \quad \vec{a}_B = \frac{V_B^2}{R}\vec{j} = \frac{\left(\frac{50}{3.6}\right)^2}{150}\vec{j} \qquad \vec{\omega} = \left(\frac{V_B}{R}\right)\vec{k} = \left(\frac{50/3.6}{150}\right)\vec{k}$

$\dot{\vec{\omega}} = 0$ چون ω ثابت است $\qquad \vec{r} = \vec{BA} = R = 150\vec{j}$

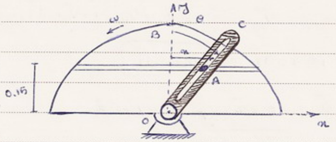
$\vec{V}_{rel} =$ باید از رابطه‌ی سرعت‌ها بدست آید

$\vec{V}_A = -\frac{50}{3.6}\vec{i} \quad \vec{V}_B = \frac{50}{3.6}\vec{i} \quad \vec{\omega} = \left(\frac{50/3.6}{150}\right)\vec{k} \quad \vec{r} = 150\vec{j}$

در رابطه‌ی سرعت‌ها : $-\frac{50}{3.6}\vec{i} = \frac{50}{3.6}\vec{i} + \left(\left(\frac{50/3.6}{150}\right)\vec{k} \times (150\vec{j})\right) + \vec{V}_{rel}$

$\boxed{\vec{V}_{rel} = -13.9\,\vec{i}} \Longrightarrow \boxed{\vec{a}_{rel} = 2.58\,\vec{i}}$

مثال



$\omega = 3\ rad/s$ ثابت

$\dot{\theta} = 2\ rad/s$ ثابت

$\theta = 30^\circ \ , \ \ddot{\theta} > 0 \qquad a_A = ?$

* اگر $\omega = 0$ پس نقطه‌ی A خط [illegible] *

$\vec{a}_A = \vec{a}_o + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2\vec{\omega} \times \vec{V}_{rel} + \vec{a}_{rel}$

$\vec{a}_o = 0 \quad \vec{\omega} = 3\vec{k} \quad \dot{\vec{\omega}} = 0 \qquad \vec{r} = \vec{OA} = \vec{OD} + \vec{x} = 0.15\vec{j} + x\,\vec{i}$

$\vec{V}_{rel} = \dot{x} = 0.4\,\vec{i} \qquad \overset{\triangle}{ODA} : \ tg\,\theta = \frac{x}{0.15} \Rightarrow x = 0.15\,tg\,\theta \xrightarrow{\theta = 30} x = 0.087$

$\vec{a}_{rel} = \ddot{x} = (0.231)(4)\,\vec{i} \qquad \vec{r} = \vec{OA} = 0.15\vec{j} + 0.087\,\vec{i}$

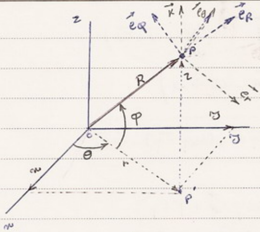
با جایگذاری :

$* \ \dot{x} = 0.15\,\dot{\theta}\,(1 + tg^2\theta) = 0.15(2)(1 + tg^2 30) = 0.4\,\vec{i}$

$\boxed{\vec{a}_A = 0.14\vec{i} + 1.05\vec{j}} \ m/s^2$

$* \ \ddot{x} = 0.3\left(2\dot{\theta}\,tg\theta\,(1 + tg^2\theta)\right) = (0.231)(4)\,\vec{i}$

حرکت ذره در فضا



کارتزین :

① $\vec{R} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

② $\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$

③ $\vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$

$v_x = \dot{x} \quad , v_y = \dot{y} \quad , v_z = \dot{z}$

$a_x = \ddot{x} \quad , a_y = \ddot{y} \quad , a_z = \ddot{z}$

- دستگاه استوانه‌ای شبیه دستگاه کارتزین ثابت نیست چون روی متحرک قرار داریم

④ $\vec{R} = r\vec{e_r} + Z\vec{k}$ ⑤ $\vec{v} = \underbrace{\dot{r}}_{v_r}\vec{e_r} + \underbrace{r\dot{\theta}}_{v_\theta}\vec{e_\theta} + \underbrace{\dot{Z}}_{v_z}\vec{k}$

⑥ $\vec{a} = \underbrace{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)}_{a_r}\vec{e_r} + \underbrace{(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})}_{a_\theta}\vec{e_\theta} + \underbrace{\ddot{Z}}_{a_z}\vec{k}$

- دستگاه کروی :

* محور R : در امتداد بردار موقعیت

* محور θ : عمود بر R موازی افق (در امتداد محور θ استوانه‌ای)

* محور φ : عمود بر R و θ در جهت افزایش φ [$\vec{e}_\varphi$ در صفحه‌ی OP'P (r, R, Z) قرار میگیرد]

- مبدا روی متحرک قرار میگیرد ، پس دستگاه متحرک است .

Subject:
Year. Month. Date. 26

⑦ $\vec{R} = R\vec{e_R}$ $\qquad \vec{V} = \dot{R}\vec{e_R} + R\dfrac{d\vec{e_R}}{dt} \qquad \left(\dfrac{d\vec{e_R}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{e_R}\right)$

$\left(\vec{\omega} = \dot{\theta}\vec{k} - \dot{\varphi}\vec{e_\theta}\right)$ $\left(\vec{K} \perp \vec{e_\theta}\right.$ و $\vec{K}, \vec{e_\varphi}, \vec{e_R}$ در یک صفحه اند و $\left.\right)$

$\left(\vec{K} = \sin\varphi\,\vec{e_R} + \cos\varphi\,\vec{e_\varphi}\right)$ $\boxed{\vec{\omega} = \dot{\theta}(\sin\varphi\,\vec{e_R} + \cos\varphi\,\vec{e_\varphi}) - \dot{\varphi}\vec{e_\theta}}$

$$\frac{d\vec{e_R}}{dt} = \begin{vmatrix} \vec{e_R} & \vec{e_\theta} & \vec{e_\varphi} \\ \dot{\theta}\sin\varphi & -\dot{\varphi} & \dot{\theta}\cos\varphi \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{e_R}}{dt} = \dot{\theta}\cos\varphi\,\vec{e_\theta} + \dot{\varphi}\,e_\varphi}$$

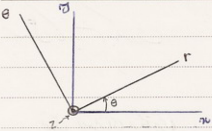
⑧ $\vec{V} = \dot{R}\vec{e_R} + R\dot{\theta}\cos\varphi\,\vec{e_\theta} + R\dot{\varphi}\,\vec{e_\varphi}$ $\left[V_R = \dot{R}\ ,\ V_\theta = R\dot{\theta}\cos\varphi\ ,\ V_\varphi = R\dot{\varphi}\right]$

$$\vec{a} = \ddot{R}\vec{e_R} + \dot{R}(\dot{\theta}\cos\varphi\,\vec{e_\theta} + \dot{\varphi}\vec{e_\varphi}) + \dot{R}\dot{\theta}\cos\varphi\,\vec{e_\theta} + R\ddot{\theta}\cos\varphi\,\vec{e_\theta} - R\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\varphi\,\vec{e_\theta} + R\dot{\theta}\cos\varphi\,(-\dot{\theta}\cos\varphi\,\vec{e_R} + \dot{\theta}\sin\varphi\,\vec{e_\varphi}) + \dot{R}\dot{\varphi}\,\vec{e_\varphi} + R\ddot{\varphi}\,\vec{e_\varphi} + R\dot{\varphi}(-\dot{\varphi}\,\vec{e_R} - \dot{\theta}\sin\varphi\,\vec{e_\theta})$$

$$\frac{d\vec{e_\theta}}{dt} = \begin{vmatrix} \vec{e_R} & \vec{e_\theta} & \vec{e_\varphi} \\ \dot{\theta}\sin\varphi & -\dot{\varphi} & \dot{\theta}\cos\varphi \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-\dot{\theta}\cos\varphi\,\vec{e_R} + \dot{\theta}\sin\varphi\,\vec{e_\varphi})$$

⑨
$$\begin{cases} \vec{a}_R = \ddot{R} - R\dot{\theta}^2\cos^2\varphi - R\dot{\varphi}^2 \\ \vec{a}_\theta = 2\dot{R}\dot{\theta}\cos\varphi + R\ddot{\theta}\cos\varphi - 2R\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\varphi \\ \vec{a}_\varphi = 2\dot{R}\dot{\varphi} + R\dot{\theta}^2\sin\varphi\cos\varphi + R\ddot{\varphi} \end{cases}$$

Subject:
Year. Month. Date. 27



V_x , V_y , V_z ✓

V_r , V_θ , V_z ?

تبدیل کارتزین به استوانه‌ای :

« اگر مولفه‌ها را در کارتزین داشتیم
فقط کافی است θ را داشته باشیم »

$$V_r = V_x \cos\theta + V_y \sin\theta + V_z (0)$$

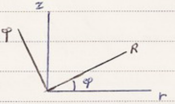
$$V_\theta = -V_x \sin\theta + V_y \cos\theta + V_z (0)$$

$$V_z = V_x (0) + V_y (0) + V_z (1)$$

$$\begin{bmatrix} V_r \\ V_\theta \\ V_z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{ماتریس تبدیل}} \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} \Rightarrow \{V\}_{r\theta z} = [T^\theta] \{V\}_{xyz}$$

$\vec{F} = 4\vec{i} - 7\vec{j} + 5\vec{k}$, $\theta = 30^\circ$ $\Rightarrow$ F (در استوانه‌ای) = ?

تبدیل استوانه‌ای به کروی :



$$V_R = V_r \cos\varphi + V_\theta (0) + V_z \sin\varphi$$

$$V_\theta = V_r (0) + V_\theta (1) + V_z (0)$$

$$V_\varphi = -V_r \sin\varphi + V_\theta (0) + V_z \cos\varphi$$

$$\begin{Bmatrix} V_R \\ V_\theta \\ V_\varphi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_r \\ V_\theta \\ V_z \end{Bmatrix} \Rightarrow \{V\}_{R\varphi\theta} = [T^\varphi] \{V\}_{r\theta z}$$

تبدیل کارتزین به کروی

$$\{V\}_{R\theta\varphi} = [T^{\varphi}][T^{\theta}]\{V\}_{xyz}$$

تبدیل استوانه‌ای به کارتزین

$$\{V\}_{xyz} = [T^{\theta}]^{-1}\{V\}_{r\theta z}$$

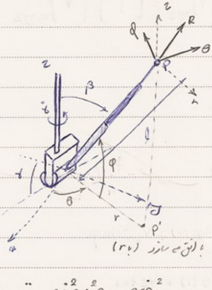
تبدیل کروی به کارتزین

$$\{V\}_{xyz} = [T^{\theta}]^{-1}[T^{\varphi}]^{-1}\{V\}_{R\theta\varphi}$$

* معکوس ماتریس تبدیل را از تغییر جای سطر و ستون آن بدست می‌آید

تمرین : 173 ، 176 ، 178 ، 181 ، 183

مثال اول



$l = 1.2\,m \quad \beta = 45^\circ$

$\dot{\gamma} = 2\ rad/s \quad \dot{\beta} = 1.5\ rad/s \quad \dot{l} = 0.9\ m/s \quad (cte)$

$a_R,\ a_\theta,\ a_\varphi = ?$

R : بردار موقعیت متحرک نسبت به یک نقطه‌ی ثابت

θ : زاویه‌ای در صفحه‌ی افق . θ دوران حول محور عمود بر افق ؛ φ : زاویه‌ای که R با افق می‌سازد (با r)

که r و یک محور ثابت

$a_R = \ddot{R} - R\dot{\theta}^2\cos^2\varphi - R\dot{\varphi}^2$

$R = l = 1.2\,m \quad \dot{R} = 0.9\ m/s = \dot{l} \quad \ddot{R} = \ddot{l} = 0$

$\dot{\theta} = \dot{\gamma} = 2\ rad/s \quad \ddot{\theta} = \ddot{\gamma} = 0$

$\varphi = \frac{\pi}{2} - \beta = 45^\circ \quad \dot{\varphi} = -\dot{\beta} = -1.5\ \frac{rad}{s} \quad \ddot{\varphi} = -\ddot{\beta} = 0$

$a_R = -5.1 \quad a_\theta = 7.6 \quad a_\varphi = -0.3\ m/s^2$

Subject:
Year. Month. Date. 29

حال فرض شود $\theta = 30^\circ$ میخواهیم مولفه‌های شتاب را در دستگاه استوانه‌ای بدست آوریم :

$$\vec{OP} = \vec{R} = r\vec{e_r} + \rho\rho\vec{K}$$

$$\vec{R} = l\cos\varphi\,\vec{e_r} + l\sin\varphi\,\vec{K} \qquad \vec{v} = \dot{l}\cos\varphi\,\vec{e_r} - l\dot{\varphi}\sin\varphi\,\vec{e_r} + l\cos\varphi\,\dot{\theta}\,\vec{e_\theta} + \dot{l}\sin\varphi\,\vec{K} + l\dot{\varphi}\cos\varphi\,\vec{K}$$

$$\vec{a} = \ddot{l}\cos\varphi\,\vec{e_r} - \dot{l}\dot{\varphi}\sin\varphi\,\vec{e_r} + \dot{l}\dot{\theta}\cos\varphi\,\vec{e_\theta} - \{\dot{l}\dot{\varphi}\sin\varphi\,\vec{e_r} + l\ddot{\varphi}\sin\varphi\,\vec{e_r} + l\dot{\varphi}^2\cos\varphi\,\vec{e_r} +$$

$$l\dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\varphi\,\vec{e_\theta}\} + \{\dot{l}\dot{\theta}\cos\varphi\,\vec{e_\theta} - l\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\varphi\,\vec{e_\theta} + l\ddot{\theta}\cos\varphi\,\vec{e_\theta} - l\dot{\theta}^2\cos\varphi\,\vec{e_r}\} +$$

$$\{\ddot{l}\sin\varphi\,\vec{K} + \dot{l}\dot{\varphi}\cos\varphi\,\vec{K}\} + \{\dot{l}\dot{\varphi}\cos\varphi\,\vec{K} + l\ddot{\varphi}\cos\varphi\,\vec{K} - l\dot{\varphi}^2\sin\varphi\,\vec{K}\}$$

این یک راه از حل مسئله شکل .

مولفه‌ها در دستگاه کارتزین :

$$a_x = \ddot{x} \quad x = l\cos\varphi\cos\theta$$
$$a_y = \ddot{y} \quad y = l\cos\varphi\sin\theta$$
$$a_z = \ddot{z} \quad z = l\sin\varphi$$

روش دوم استفاده از تبدیلات می‌باشد :

$$\{a\}_{r\theta\varphi} = [T^\varphi]\{a\}_{r\theta z} \qquad \{a\}_{r\theta z} = [T^\varphi]^{-1}\{a\}_{r\theta\varphi}$$

$$[T^\varphi] = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix} \Rightarrow [T^\varphi]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

$$\varphi = 45^\circ \Rightarrow [T^\varphi]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} a_r \\ a_\theta \\ a_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -5.1 \\ 7.6 \\ -0.3 \end{Bmatrix}$$

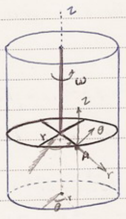
$$a_r = -(\frac{\sqrt{2}}{2})(5.1) + (0)(7.6) + (\frac{\sqrt{2}}{2})(0.3)$$

$$a_\theta = 0\,(5.1) + 1(7.6) - (0)(0.3)$$

$$a_z = \frac{\sqrt{2}}{2}(-5.1) + 0\,(7.6) - (\frac{\sqrt{2}}{2})(0.3)$$

Subject:
Year. Month. Date. 30

مثال دوم



ω ثابت

$z = z_0 \sin 2\pi n t$

$a_A)_{max} = ?$

« بهترین دستگاه، استوانه‌ای است »

$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \qquad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \qquad a_z = \ddot{z}$

$r = r \quad \dot{r} = 0 \quad \ddot{r} = 0 \qquad \dot{\theta} = \omega$ ثابت $\ddot{\theta} = \dot{\omega} = 0$

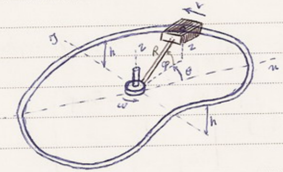
$\ddot{z} =$

$z = z_0 \sin 2\pi n t \Rightarrow \dot{z} = 2\pi n z_0 \cos 2\pi n t \Rightarrow \ddot{z} = -z_0 (2\pi n)^2 \sin 2\pi n t$

$a_r = -r(\omega)^2 \qquad a_\theta = 0 \qquad a_z = -z_0 (2\pi n)^2 \sin 2\pi n t$

$$|a_A| = \sqrt{(r^2\omega^4) + (z_0^2 (2\pi n)^4 \sin^2 2\pi n t)} \Rightarrow a_{max} = \sqrt{r^2\omega^4 + z_0^2 (2\pi n)^4}$$

مثال سوم



$\dot{\theta} = \omega$ ثابت

$z = \frac{h}{2}(1 - \cos 2\theta)$

$\theta = \frac{\pi}{4}$ rad $\Rightarrow v = ?$

از دستگاه کروی استفاده می‌کنیم :

$v_R = \dot{R} \qquad v_\theta = R\dot{\theta}\cos\varphi \qquad v_\varphi = R\dot{\varphi}$

$R = R \Rightarrow \dot{R} = 0$ طول بازو ثابت تغییرات آن نسبت به زمان صفر $\qquad \dot{\theta} = \omega =$

$\sin\varphi = \frac{z}{R} = \frac{h}{2R}(1 - \cos 2\theta) \qquad \cos\varphi = \frac{r}{R} = \frac{\sqrt{R^2 - z^2}}{R} = \sqrt{1 - (\frac{z}{R})^2}$

$\dot{\varphi}\cos\varphi = \frac{h}{2R}(+2\dot{\theta}\sin 2\theta) \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{\frac{h}{R}\dot{\theta}\sin 2\theta}{\cos\varphi} \xrightarrow{\theta = \frac{\pi}{4}} \cos\varphi = \sqrt{1 - (\frac{h}{2R})^2}$

PAPCO

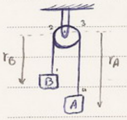
$$\dot{\varphi} = \frac{\omega h/R}{\sqrt{1-\left(\frac{h}{2R}\right)^2}} \qquad v_R = 0 \qquad v_\theta = R\omega\sqrt{1-\frac{h^2}{4R^2}} \qquad v_\varphi = \frac{\omega h}{\sqrt{1-h^2/4R^2}}$$

حرکت سیستم های مقید

کلید حل : رابطه قید

روش حل :

① تعریف بردار وضعیت برای هر متحرک (بردارهای وضعیت باید نسبت به یک نقطه‌ی ساکن باشد ، جهت دلخواه است ، مبدا هم متحرک را نمی‌توان گرفت ، حتماً در امتداد حرکت ها باشند)



② نوشتن رابطه‌ی قید

$r_B + l_1 + r_A = l$

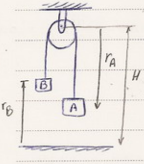
$r_A + r_B = l_2$

$v_A + v_B = 0$

$a_A + a_B = 0$

③ رابطه‌ی سرعت‌ها : مشتق اول رابطه قید

④ رابطه شتاب ها: مشتق دوم رابطه قید



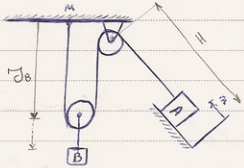
$H - r_B + l_2 + r_A = l_3 \Rightarrow r_A - r_B = l_3$

$v_A - v_B = 0 \Rightarrow v_A = v_B$

$a_A - a_B = 0 \Rightarrow a_A = a_B$

به دلیل تفاوت انتخاب ۲ علامت ها تغییر کرده

Subject:
Year. Month. Date. 32

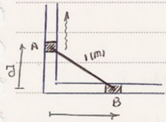


$\ddot{x}$ تغییرات $= 0.044\ m/s^2$

$a_B = ?$

$$(y_B - l_1) + l_2 + (y_B - l_3) + l_4 + H - x = l \Rightarrow \boxed{2y_B - x = C}$$

$$2V_B - V_A = 0 \Rightarrow V_A = 2V_B \rightsquigarrow a_A = 2a_B \Rightarrow a_B = 0.022\ m/s^2$$



$V_A = 0.3\ m/s \qquad a_A = 2\ m/s^2$

$V_B\ ,\ a_B = ? \qquad x = 0.4\ m$

$$x^2 + y^2 = l^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow 2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 0$$

$$x\dot{x} + y\dot{y} = 0 \Rightarrow xV_B + yV_A = 0 \Rightarrow V_A = \frac{-x}{y}V_B \Rightarrow V_B = -\frac{0.917}{0.4}(0.3) = -0.69$$

$$\dot{x}^2 + x\ddot{x} + \dot{y}^2 + y\ddot{y} = 0 \Rightarrow V_B^2 + xa_B + V_A^2 + ya_A = 0$$

$$\Rightarrow a_B = \frac{-(V_A^2 + V_B^2 + ya_A)}{x} \Rightarrow a_B = -6\ m/s^2$$

$x = 0.4 \rightsquigarrow y = 0.917$

تمرین : 208 ، 211 ، 216 ، 220

مرور : 224 ، 228 ، 232 ، 237

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. 33

فصل سوم — سینتیک ذرات

قانون دوم نیوتن یک رابطه‌ی تجربی است.
$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$F_1 \rightarrow a_1$

$$F_1 \rightarrow a_1,\quad F_2 \rightarrow a_2,\quad \vdots \quad F_n \rightarrow a_n \Rightarrow \frac{F_1}{a_1} = \frac{F_2}{a_2} = \frac{F_3}{a_3} = \dots = \frac{F_n}{a_n}$$

$F \xrightarrow{(1)} a_1 \quad , \quad F \xrightarrow{(2)} a_2 \quad , \quad F \xrightarrow{(3)} a_3 \quad , \dots , \quad F \xrightarrow{(n)} a_n$

$m_1 a_1 = F \quad , \quad m_2 a_2 = F \quad , \dots$

- اینرسی یا لختی خاصیتی است که در مقابل سرعت مقاومت ایجاد می‌کند.

- در رابطه‌ی قانون دوم "a" شتاب مطلق جسم است.

- واحدها در قانون دوم:
$$\left.\begin{array}{l} m: kg \\ a: m/s^2 \\ F: N = kg.\frac{m}{s^2} \end{array}\right\}$$

- مثلاً در جسم در حال سقوط:
$$w = mg = ma \Rightarrow a = g = 9.81$$

- معادله حرکت معادله‌ای گفته می‌شود که نیروهای تأثیرگذار را به شتاب، سرعت، جابجایی جسم مربوط می‌کند.

مهم‌ترین معادله‌ی حرکت:
$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\sum F_x = m a_x \qquad\qquad r\text{-}\theta \left\{\begin{array}{l} \sum F_r = m a_r \\ \sum F_\theta = m a_\theta \end{array}\right.$$
$$\sum F_y = m a_y$$

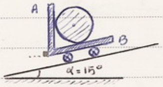
- برآیند کلیه نیروهای خارجی وارد بر جسم (سیستم) را باید برابر حاصلضرب شتاب مطلق در جرم قرار دهیم.

روش حل کلی مسائل : ۱_ انتخاب سیستم

2 _ رسم دیاگرام آزاد نیروها (مهم است)

3 _ دستگاه مختصات

4 _ معادله حرکت

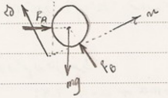


$m_{\text{استوانه}} = 25\ kg$ $F_A , F_B = ?$

$a = 2g$ به سمت بالای شیب " استوانه صیقلی است "

" اگر استوانه و ارابه را با هم در دستگاه بگیریم F_A و F_B نیروی داخلی محسوب میشوند "

استوانه را به عنوان سیستم در نظر میگیریم :

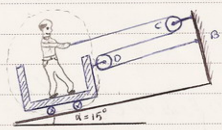


$\sum F_x = m a_x \Rightarrow -mg \sin\alpha + F_A \cos\alpha = m a_x$

$F_A \cos\alpha - mg \sin\alpha = m(2g) \Rightarrow F_A = 574\ (N)$

$\sum F_y = m a_y \Rightarrow F_B - mg\cos\alpha - F_A \sin\alpha = m \underbrace{a_y}_{0} \Rightarrow F_B = 385\ (N)$

چون در جهت عمود بر محور مختصات حرکت نداریم

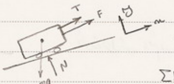


$m_{\text{شخص}} + m_{\text{ارابه}} = 100\ kg$

$T = 250\ (N)$

$\mu = 0$ جرم قرقره ناچیز

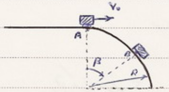
$a = ?$



$\Rightarrow F = 2T$

$\sum F_x = ma_x \Rightarrow T + 2T - mg\sin\alpha = m\,a_x$

$3(250) - 100(9.81)\sin(45^\circ) = 100\,a_x \Rightarrow \boxed{a_x = 4.96}\ m/s^2$



$\mu = 0 \quad \beta = ? \quad V = ?$

در چه زاویه‌ای از سطح جدا می‌شود ؟

* چون فرض می‌کنیم در نقطه‌ی B از سطح جدا می‌شود N را دیگر نیز نداریم

$\sum F_t = m a_t \Rightarrow mg\sin\beta = m a_t \Rightarrow a_t = g\sin\beta$

$\sum F_n = m a_n \Rightarrow mg\cos\beta = m\frac{V^2}{R} \Rightarrow V_B^2 = Rg\cos\beta$ ①

$\sum F_t = ma_t \Rightarrow mg\sin\theta = ma_t \Rightarrow a_t = g\sin\theta$

چون سرعت به زاویه‌ی θ بستگی دارد $\sum F_t$ را در بین کردیم.

$a_t\,dS = V\,dV \Rightarrow (g\sin\theta)(R\,d\theta) = V\,dV$

$$\Rightarrow \int_0^\beta g\sin\theta\,R\,d\theta = \int_{V_0}^{V_B} V\,dV \Rightarrow -Rg\cos\theta\Big|_0^\beta = \tfrac{1}{2}(V_B^2 - V_0^2)$$

② $V_B^2 = V_0^2 + 2Rg(1-\cos\beta) \Rightarrow$ ① = ② $\Rightarrow Rg\cos\beta = V_0^2 + 2Rg(1-\cos\beta)$

$\cos\beta = \frac{2}{3} + V_0^2/3Rg \Rightarrow \beta = \dots$ $\qquad \frac{V_0^2}{3Rg} \leq 1/3 \Rightarrow V_0^2 \leq Rg$

* چون حد cosβ $\frac{2}{3}$ است * * حتماً قبل از 90 جدا می‌شود چون عبارت مثبت را با هیچ وقت صفر نمی‌شود *

تمرین : ۴ ، ۱۲ ، ۱۹ ، ۲۹ ، ۳۵ ، ۴۳ ، ۴۹ ، ۵۴ ، ۶۰ ، ۶۹ ، ۷۴ ، ۸۰ ، ۸۶ ، ۹۲ ، ۹۹ ، ۱۰۲

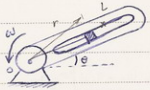
Subject:

Year. Month. Date. 36

مثال ۱

$m_p = 2kg \quad \mu = 0$

حرکت حول محور ثابتی در O



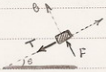
$\dot{r} = 0.1\ m/s \quad r = 375\ mm$

$\omega = 3\ rad/s \quad \dot{\omega} = -2\ rad/s^2$

$F = ?$ نیروی وارد از طرف شیار بر ذره

$T = ?$ نیروی کشش سیم

وجه تکیه‌ی لغزنده ؟



« ذره به بالا حرکت ندارد چون طول سیم ثابت است »

« حرکت ما در صفحه افقی در نظر گرفتیم » « نیروی وزن را در نظر نمی‌گیریم چون در راستای محور z است »

« فرض می‌کنیم که به یکی از دیواره‌ها تکیه می‌کند »

$\sum F_r = m a_r$

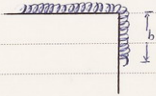
$\sum F_\theta = m a_\theta \Rightarrow F = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \Rightarrow F = 2(0.375(-2) + 2(0.1)(3)) \Rightarrow F = -0.3\ N$

« فرض اشتباه بوده و نیرو از طرف بالا به جسم وارد می‌شود » « پس به سمت بالا تکیه کرده است »

$\sum F_r = m a_r \Rightarrow -T = 2(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = 2(0 - 0.375(3)^2) \Rightarrow T = 6.75\ N$

پس ذره تمایل به حرکت به سمت بیرون را دارد

مثال ۲



طول زنجیر l

حرکت از حالت سکون

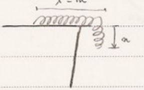
ضریب اصطکاک f

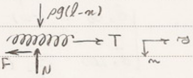
نهایی $V = ?$

از اصطکاک گوشه‌ها صرف نظر می‌کنیم.

« زنجیر را به دو قسمت تقسیم می‌کنیم چون راستای حرکت دو ... بخش شتاب آنها متفاوت است »

« مسئله را در قسمت میانی در نظر نمی‌گیریم مثلاً لحظاتی از حرکت که به مقدار کم زنجیر آویزان شده است »





μ چقدر بزرگ‌تر

$\sum F_y = 0 \Rightarrow N = \rho g(l-x)$ ①

« $F = \mu N$ »

$\sum F_y = m a_y \Rightarrow T - F = \rho(l-x) a_y$

$T - \mu(\rho g(l-x)) = \rho(l-x) a_y$ ②

$a_y = a_x = a$

$\sum F_x = m a_x \Rightarrow \rho g x - T = \rho x a_x$ ③

$T = \rho x(g-a)$ ④

$\xrightarrow{④ \text{ در } ②} \rho x(g-a) - \mu \rho g(l-x) = \rho(l-x)a$

$\Rightarrow a = \frac{g}{l}x - \frac{g}{\mu}(l-x)$ ⑤

$a\,dx = v\,dv \rightsquigarrow$ برای هر دو قسمت فرقی نمی‌کند چون a یکی است $\int_b^l a\,dx = \int_0^v v\,dv$

$\Rightarrow v^2 = \frac{g}{l}(l^2 - b^2) - \frac{2gl}{\mu}(l-b) + \frac{g}{\mu}(l^2-b^2)$

شروع حرکت : $\sum F_x = 0 \Rightarrow b = \frac{\mu l}{1+\mu}$

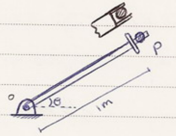
$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{gl}{(1+\mu)}}$

MAX سرعت وقتی است که اصطکاک نداشته باشیم

« اگر اصطکاک نداشت حرکت بصورت سقوط آزاد می‌شد ولی چون جرم آویزان متغیر است $\sqrt{2gh}$ نمی‌شود »

$\rightsquigarrow$ در چنین حالتی تا وقتی کل زنجیر پایین نیامده شتاب‌دار حرکت

مثال 3



$m_p = 2\,kg$

حرکت در صفحه قائم

$$\theta = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dot{\theta} = 50 \ \frac{\text{درجه}}{\text{ثانیه}} \ (cw) \\ \ddot{\theta} = 200 \ \frac{\text{درجه}}{s^2} \ (ccw) \end{cases}$$

تغییر طول میله $= 500 \ \frac{mm}{s}$ ثابت

$\mu = 0.5 \qquad P_{min} = ? \qquad \frac{P_{min}}{P_{st}} = ?$

« حداقل نیروی فنرها برای نگه داری مهره که نلغزد = ؟ »

« در حالت دوم هم در حالت استاتیکی حل شود »

« جهت نیروی اصطکاک را نداریم و نمی‌خواد در نظر بگیریم چون امکان حرکت در دو جهت باشد »

$① \ \sum F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$

$② \ \sum F_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})$

$① \rightsquigarrow -2F\cos\alpha - mg\sin\theta = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$

$* \ -2F\cos\alpha - 2(9.81)\sin(0) = 2\left(0 - 1\times\left(50\times\frac{2\pi}{360}\right)^2\right)$

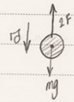
$② \rightsquigarrow 2F\sin\alpha - mg\cos\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})$

$* \ 2F\sin\alpha - 2(9.81)1 = 2\left(1\left(200\times\frac{2\pi}{360}\right) + 2(0.5)\left(50\ \frac{2\pi}{360}\right)\right)$

$\Rightarrow \alpha = -72.13^\circ \quad , \quad F = \mu P_{min} \Rightarrow P_{min} = 27\,(N)$

$F = \ldots$

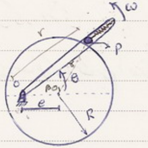
در حالت استاتیکی :



$\sum F_y = 0 \Rightarrow mg - 2F = 0 \Rightarrow F = \frac{mg}{2}$

$F = \mu P_{st} \Rightarrow P_{st} = \frac{mg}{2\mu} \Rightarrow P_{st} = 19.6 \ N$

مثال ۴



ω ثابت

$m_p = m_o$

$\theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow F = ?$

حرکت در صفحه افق

P نیروی فنر

نیروی وارده از بازوی شیاردار بر پین $P = ?$

$\mu = 0$

« only پین به عنوان سیستم در نظر می‌گیریم »

$\sum F_r = m a_r$

$-P + N\cos\gamma = m_o(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$

$\sum F_\theta = m a_\theta$

$F + N\sin\gamma = m_o(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})$

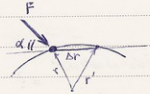
$\overset{\Delta}{OPO_1}: \quad r^2 = e^2 + R^2 - 2eR\cos\beta \qquad \frac{R}{\sin\theta} = \frac{r}{\sin\beta} \Rightarrow r = f(\theta)$

$\dot{\theta} = \omega \Rightarrow \ddot{\theta} = 0 \qquad \dot{r} = \quad \ddot{r} =$

$$\Rightarrow \begin{cases} N = \\ F = -m_o e\omega^2 \frac{R^2}{R^2 - e^2} - \frac{Pe}{\sqrt{R^2 - e^2}} \end{cases}$$

روش کار و انرژی

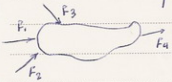
- برای مسائلی که با مکانیزم ها روبرو هستیم.



$$du = \vec{F} \cdot \vec{dr}$$

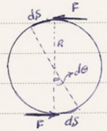
کار:
- اسکالر است
- + - یا صفر است
- واحد $J = N.m$

- اگر به جسمی چندین نیرو وارد شود کار تک تک نیروها را بدست آورده با هم جمع جبری می کنیم



$$du = \vec{F_1} \cdot \vec{dr} + \vec{F_2} \cdot \vec{dr} + \dots$$

$$du = (\vec{F_1} + \vec{F_2}) \cdot \vec{dr} = \sum \vec{F} \cdot \vec{dr}$$



$$du = F\,ds + F\,ds \qquad (ds = R\,d\theta)$$

$$du = F(2R)\,d\theta \Rightarrow du = M\,d\theta$$ ← دو بعدی

$$du = \vec{M} \cdot \vec{d\theta}$$ ← در حالت کلی

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

$$du = \vec{F}\cdot d\vec{r} = m\vec{a}\cdot d\vec{r} = ma_t\,ds$$

$$\int_1^2 du = m\int_{v_1}^{v_2} v\,dv \Rightarrow U_{1.2} = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2)$$

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow U_{1-2} = T_2 - T_1 = \Delta T$$

سرعت‌های لحظه‌ای متفاوت مهم نیست فقط سرعت در ابتدا و انتها

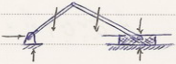
* کار برآیند نیروها با تغییرات انرژی جنبشی در بین این دو نقطه برابر است * این کار، کار برآیند نیروهاست *

- مزایای روش کار و انرژی :

۱) نیازی به محاسبه‌ی $\vec{a}$ نداریم

* برای اینکه کار باشد نیرو باعث حرکت شود. پس بار نیروهایی که نقطه اثرشان ثابت است را حذف می‌کنیم

۲) عدم نیاز به محاسبه‌ی نیروهای غیرفعال



۳) عدم دخالت نیروهای داخلی (معمولاً وقتی اجزای سیستم تعدادشان زیاد باشد)

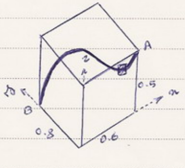
مثال

$m = 2kg$

مسیر ثابت و صیقلی

$\vec{F} = -15\vec{i} + 10\vec{j} + 15\vec{k}$

$v_A = 0 \longrightarrow v_B = ?$



گام ها:
1) تعیین مراحل ۱ و ۲
2) تعیین سیستم
3) رسم دیاگرام نیروی (فعال)
4) استفاده از رابطه

$U = \Delta T$

1: متحرک در A 2: متحرک در B

$$U_{1-2} = \int_1^2 \underbrace{(-15\vec{i} + 10\vec{j} + 15\vec{k} - 19.6\vec{k})}_{\Sigma F} \cdot (dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k})$$

$$U_{1-2} = \int (-15dx + 10dy - 4.6dz)$$

$$U_{A-B} = \int_{0.6}^{0} -15dx + \int_0^{0.8} 10dy + \int_{0.5}^{0} -4.6dz \Rightarrow U_{A-B} = 19.3\ J$$

$$\Delta T = \frac{1}{2} m (V_B^2 - V_A^2) \Rightarrow \Delta T = V_B^2 \longrightarrow V_B^2 = 19.3 \Rightarrow \boxed{V_B = 4.39}$$

- انرژی پتانسیل

* نیروی پایستار یا $\vec{F}_c$ نیروی است که کار آن به مسیر بستگی نداشته باشد

* اگر φ تابع پتانسیل باشد $\vec{F}_c = \vec{\nabla}\varphi$

$$\text{«} \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \text{»}$$

$$\vec{F}_c = -\vec{\nabla}\varphi \Rightarrow F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right)$$

$$du = F_x dx + F_y dy + F_z dz \qquad \text{«} \vec{F}_c = -\underbrace{\vec{\nabla} V}_{\text{تابع پتانسیل}} \text{»}$$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz$$

$$du = F_x dx + F_y dy + F_z dz = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}d\vec{x} + \frac{\partial V}{\partial y}d\vec{y} + \frac{\partial V}{\partial z}d\vec{z}\right)$$

$$du = -dV$$

Subject :
Year . Month . Date . 143

$du = -dV$ $\qquad \vec\nabla \times \vec F_c = 0$ کرل نیروی پایستار صفر است

$$\begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial F_z}{\partial y} - \dfrac{\partial F_y}{\partial z} = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial F_x}{\partial z} - \dfrac{\partial F_z}{\partial x} = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial F_y}{\partial x} - \dfrac{\partial F_x}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

معیاری برای تعیین نیروهای پایستار

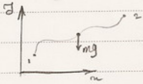
* به عبارتی به عبارت نیرو وقتی که پایستار باشد

* مثلاً $\vec F = -15\vec j + 10\vec i + 4\vec k$ هم نیروی پایستار است چون تابع x, y, z نیست و شرایط بالا را دارد.

* $-mg\vec k$ نیروی پایستار است *

* تعداد نیروهای پایستار نامحدود است * * وقتی انتگرال‌گیری می‌کنیم که تحرک به مسیر بستگی ندارد و ... در نیروهای پایستار ... "

نیروهای کانسرواتیو مهم : ۱: نیروی وزن 2: نیروی فنر



$$U = \int (-mg\,\vec j)\cdot(dx\,\vec i + dy\,\vec j)$$

$$U = -\int_{y_1}^{y_2} mg\,dy = -mgh = U_g$$

پس به اختلاف ارتفاع بستگی دارد.

V_g و V_e توابع پتانسیل نیروهای وزن و فنر هستند.

$du = -mg(h_2 - h_1) = -(V_2 - V_1)$

$$\Rightarrow V_g = mgh$$

h: ارتفاع نسبت به هر نقطه‌ای دلخواه

$$\Rightarrow V_e = \frac{1}{2} K x^2$$

x: مقدار تغییر طول فنر نسبت به حالت آزاد فنر

Subject:
Year. Month. Date. 44

$$U = \Delta T \Rightarrow U_g + U_e + U_{nc} = \Delta T$$

$$-\Delta V_g - \Delta V_e + U_{nc} = \Delta T \Rightarrow U_{nc} = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$$

U_{nc} : کار کلیه نیروهای وارد بر سیستم بجز نیروهای وزن و فنر

ΔT : تغییرات انرژی جنبشی سیستم بین دو حالت 1 و 2 $\quad \Delta T = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2)$

ΔV_g : تغییرات تابع پتانسیل وزن $\quad \Delta V_g = mg(h_2 - h_1)$

ΔV_e : تغییرات تابع پتانسیل فنر $\quad \Delta V_e = \frac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2)$

اصل بقای انرژی مکانیکی

$$E_M = \underbrace{T}_{\text{جنبشی}} + \underbrace{V}_{\text{پتانسیل}}$$

فرض کنیم : $U_{nc} = 0$

$$\Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e = 0 \Rightarrow \Delta(T+V) = 0 \Rightarrow \Delta E_M = 0$$

$E_M = cte$ اصل بقای انرژی مکانیکی

Power توان

برای حرکت خطی

$$P = \frac{\text{کار انجام شده}}{\text{زمان}} = \frac{\vec{F}\cdot d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \vec{P} = \vec{F}\cdot\underbrace{\vec{V}}_{\text{سرعت}}$$

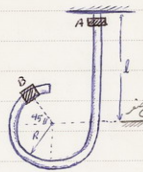
$$\underbrace{P = \frac{\vec{M}\cdot d\theta}{dt}}_{\text{برای حرکت دورانی}} \Rightarrow \vec{P} = \underbrace{\vec{M}}_{\text{گشتاور}}\cdot\underbrace{\vec{\omega}}_{\text{سرعت زاویه‌ای}}$$

چون هر دو عمود بر صفحه‌ی حرکت : $P = M\omega$

PAPCO

Subject :
Year . Month . Date . 45

مثال ۱

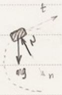


$l = 0.6\,m \quad R = 0.15\,m$

$m = 0.25\,kg \quad V_A = 0$

$N_B = ?$

سیم صیقلی



$\Sigma F_n = m a_n \Rightarrow -N + mg\sin 45 = m\frac{V_B^2}{R}$ ①

روش طولانی‌تر
- نسبت به سیستم
- دیاگرام آزاد جسم
- مراحل ۱ و ۲ (A , B)

② $U_{nc} = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e \Rightarrow U_{nc} = \boxed{U_N = 0}$

" N در هر نقطه عمود بر مسیر حرکت است "

$\Delta T = \frac{1}{2} m (V_B^2 - V_A^2) \Rightarrow \Delta T = \frac{1}{2}(0.25)(V_B^2) \Rightarrow \boxed{\Delta T = 0.125 V_B^2}$ ④

$\Delta V_g = mg(h_2 - h_1) \Rightarrow h_1 = l \;,\; h_2 = R\sin\theta = 0.15 \times \frac{\sqrt{2}}{2}$

⑤ $\Delta V_g = 0.25(9.8)\left(\frac{0.15\sqrt{2}}{2} - 0.6\right)$ « در بالای سطح پتانسیل h جسم مثبت و در پایین آن h منفی است »

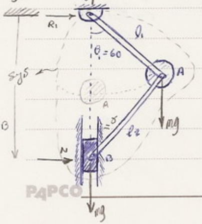
⑥ $\Delta V_e = 0$ فنر نداریم

$\xrightarrow{\text{۳ تا ۶ در ۲}} 0 = 0.125 V_B^2 + \frac{9.8}{4}\left(\frac{0.15\sqrt{2}}{2} - 0.6\right) + 0$

$\boxed{V_B = 3.11\ m/s}$

$\xrightarrow{①} \boxed{N = -14.4\ N}$ چون جسم رو به داخل می‌خواهد حرکت کند مرکز گریز

مثال ۲



$l_1 = 0.2\,m$

$l_2 = 0.25\,m$

$m_A = m_B = m$

جرم میله ناچیز

$V_{1A} = 0 \quad \mu = 0$

$V_{2A} = ?$

وقتی A از راستای قائم می‌گذرد

$U_{nc} = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$

برای کل سیستم : $\begin{cases} 1: \theta = 60^\circ \\ 2: \theta = 0^\circ \end{cases}$

عمود بر حرکت

$U_{nc} = U_{R_1,R_2} + U_N = 0 + 0 = 0$

نقطه اثر ثابت است

② « ΔV_g برای بیش از دو جسم: برای هر کدام جداگانه »

$\Delta V_g = \Delta V_g)_A + \Delta V_g)_B \Rightarrow \Delta V_g = mg(h_2 - h_1)_A + mg(h_2 - h_1)_B$

$A: \begin{cases} -l_1\cos 60^\circ = h_1 \\ -l = h_2 \end{cases} \qquad B: \begin{cases} h_1 = -(l_1\cos\theta_1 + l_2\cos\gamma) \\ h_2 = -(l_1 + l_2) \end{cases}$

γ را نداریم:

$\overset{\triangle}{OAB}$: قضیه $\sin$ ها : $\dfrac{l_2}{\sin\theta} = \dfrac{l_1}{\sin\gamma} \Rightarrow \gamma = \ldots \Rightarrow$ ③ $\Delta V_g = -0.27\,mg$

④ $\Delta V_e = 0$ فنری در سیستم نداریم

$\Delta T = T_2 - \cancel{T_1}^{\,0} = T_2)_A + T_2)_B \Rightarrow \Delta T = \frac{1}{2} m V_{2A}^2 + \frac{1}{2} m V_{2B}^2$

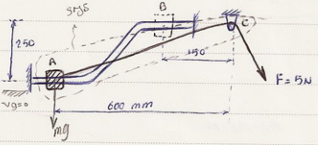
$y_B = l_1\cos\theta + l_2\cos\gamma \Rightarrow \dot{y}_B = -l_1\dot{\theta}\sin\theta - l_2\dot{\gamma}\sin\gamma = 0 = V_{2B}$

⑤ $\Delta T = \frac{1}{2} m V_{2A}^2$

$\xrightarrow{\text{① در ⑤ و ②}} \quad 0 = \frac{1}{2} m V_{2A}^2 - 0.27\,mg + 0 \Rightarrow \boxed{V_{2A} = 2.3\ m/s}$

* به عنوان تمرین از روش معادله حرکت *

تمرین ۳



$m = 0.2\,kg$

$F = 5N$ ثابت

حرکت در صفحه قائم

$V_A = 0$

$V_B = ?$

$U_{nc} = \Delta T + \Delta V_g + \cancel{\Delta V_e}^{\,0} \Rightarrow U_{nc} = U_N + U_f = F(AC - BC)$ $\begin{cases} 1: A \\ 2: B \end{cases}$

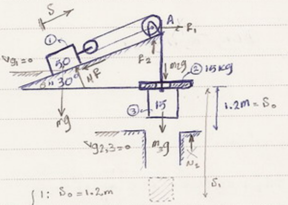
$\Delta T = \frac{1}{2} m v (V_B^2 - V_A^2) = 0.1\, V_B^2 \Rightarrow \Delta V_g = mg(h_2 - h_1)$ $\begin{cases} h_1 = 0 \\ h_2 = 0.25 \end{cases}$

$\Delta V_g = 0.2(9.8)(0.25 - 0) \Rightarrow V_B = 4.48\ m/s$

تمرین : 105 - ۱۱۰ - 116 - ۱۲۴ - 129 - ۱۳۹ - 143 - ۱۵۰ - 157 - ۱۴۴ - 168 - ۱۷۴

* برای اجسام متفاوت سطح پتانسیل صفر متفاوت می‌توان گرفت *

مثال ۱



صفحه‌ی ② پس از رسیدن به تکیه‌گاه باقی می‌ماند.

ساکن : وضع قبلی

$\mu_k = 0.3$

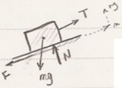
$S = ?$ جابجایی m_1 روی سطح شیب‌دار

$\begin{cases} 1: S_0 = 1.2m \\ 2: S_0 = S_1 \end{cases}$

$U_{nc} = \Delta T + \Delta V_g + \cancel{\Delta V_e}^{\,0}$ ①

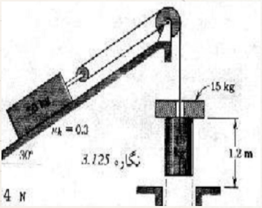
$U_{nc} = (N_1, N_2, F_1, F_2) \Rightarrow U_{nc} = U_F = \int_0^S \vec{F}_k \cdot d\vec{s}$

عمود — نقطه اثر ثابت



$\sum F_y = 0 \Rightarrow N - m_1 g\cos\theta \Rightarrow N = m_1 g \cos\theta$

$F_k = \mu_k (N) = \mu_k\, m_1 g \cos\theta$ ثابت است



② $U_{nc} = (\mu_k m_1 g \cos\theta)\, S$

$\Delta T = T_2 - T_1 = 0$ در حال سکون

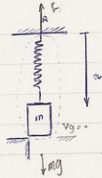
$\Delta V_g = \Delta V_g)_1 + \Delta V_g)_2 + \Delta V_g)_3$

$m_1 \begin{cases} h_1 = 0 \\ h_2 = S \sin\theta \end{cases}$ $m_2 \begin{cases} h_1 = 1.2\ m \\ h_2 = 0 \end{cases}$ $m_3 \begin{cases} h_1 = 1.2\ m \\ h_2 = -(S_1 - 1.2) \end{cases}$

$S_1 = 2S \quad = -(2S - 1.2)$

$\boxed{S = 2.25\ m}$

مثال ۲



$K = 450\ (N/m)$ $\qquad$ تغییر طول در همین حالت $\qquad$ طول فنر در همین حالت

$m = 10\ kg$ $\qquad x_1 = 0 \qquad (x = 1m)$

تکیه‌گاه را برمی‌داریم :

$V_{max} = ?$ $\qquad X = ? \quad : V_{max}$ در

$X_{max} = ?$

در اولین لحظه برداشتن تکیه‌گاه

$$\begin{cases} 1: x = 1m \\ 2: x = x_2 \end{cases}$$

① $U_{nc} = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e \qquad U_{nc} = U_F = 0$ ②

③ $\Delta T = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2} m v_2^2 = 5 v_2^2$

$$\Delta V_g = mg(h_2 - h_1) \begin{cases} h_1 = 0 \\ h_2 = -(x_2 - 1) \end{cases} \qquad ④\ \Delta V_g = mg(1 - x_2)$$

$$\Delta V_e = \frac{1}{2} k\left[(x_2-1)^2 - 0\right] = 225 (x_2 - 1)^2 \quad ⑤$$

$$① \xrightarrow{5\text{ و }2} \quad 0 = 5v_2^2 + mg(1 - x_2) + 225(x_2 - 1)^2 \quad ⑥$$

$$v_2 = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(x_2 - 1) = \dot{x}_2 \qquad \overset{⑥}{5\dot{x}_2^2 + 10g(1 - x_2) + 225(x_2 - 1)^2 = 0} \quad *$$

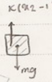
حال از رابطه‌ی * مشتق می‌گیریم :

$$10 \ddot{x}_2 \cancel{\dot{x}_2} + 10g(-\dot{x}_2) + 2(225)(\dot{x}_2)(x_2 - 1) = 0$$

$$-10g + 450(x_2 - 1) = 0 \Rightarrow x_2 - 1 = \frac{10g}{450} \Rightarrow \boxed{x_2 = 1.218}$$

$$x_2 \longrightarrow ⑥ \qquad \boxed{V_2 = V_{max} = 1.46\ m/s}$$

راه دیگر :



$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow mg = K(x_2 - 1)$

⋮

$V_2 = 0 \quad$ در رابطه ⑥ $\Rightarrow mg(1 - x_2) + 225(x_2 - 1)^2 = 0$

$$(x_2 - 1)\left[-mg + 225(x_2 - 1)\right] = 0$$

$$\begin{cases} x_2 = 1 \longrightarrow \text{ابتدای حرکت} \\ x_2 = 1 + \dfrac{mg}{225} = 1.44 \longrightarrow \text{انتهای مسیر حرکت} \end{cases}$$

Subject:

Year. Month. Date. 49

مثال ۳

$\vec{r} = 1.2t\,\vec{i} + 0.9t^2\,\vec{j} - 0.9(t^3 - 1)\,\vec{k}$

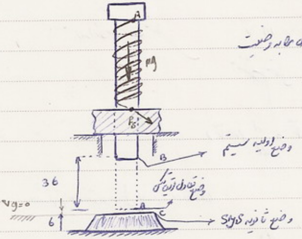
$\vec{F} = 60\,\vec{i} - 25\,\vec{j} - 40\,\vec{k}$ $\qquad t = 4\,s \qquad P = ?$

$P = \dfrac{du}{dt} = \dfrac{\vec{F}\cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v} \qquad \vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = 1.2\,\vec{i} + 1.8t\,\vec{j} - 0.9(3t^2)\,\vec{k}$

$\vec{v}\Big|_{t=4} = 1.2\,\vec{i} + 7.2\,\vec{j} - 43.2\,\vec{k} \qquad P = (60)(1.2) - (25)(7.2) - 40(-43.2)$

$\boxed{P = 1044\ \omega}$

مثال ۴



پیستون را از حالت استاتیکی خارج کرده که تا به وضعیت B رسانیم سپس رها کرده:

$m = 2.5\ kg$

$k = 1800\ N/m$

$\mu = 0$

$V_c = ?$

سیستم = فنر + پیستون

$\begin{cases} 1: & B \\ 2: & C \end{cases}$ $\qquad U_{nc} = U_{F_S} = 0$

نقطه اثر نیرو ثابت است

$\Delta T = \frac{1}{2} m (V_c^2 - V_B^2) = 1.25\, V_c^2$

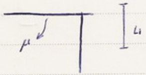
$\Delta V_g = mg(h_c - h_B) \quad \begin{cases} h_c = 0 \\ h_B = 0.042 \end{cases} \quad = 2.5(9.8)(0. - 0.042)$

$\Delta V_e = \frac{1}{2} k (x_c^2 - x_B^2)$

در حالت استاتیکی چقدر فشرده داریم : $\downarrow y$ $\qquad \sum F_y = 0 \Rightarrow mg = k\delta \Rightarrow \delta_{ST} = \frac{mg}{k} = 13.63\ mm$

$x_B = 36 - 13.63 = 22.37 \qquad x_c = 6 + 13.63 = 19.63\ mm \qquad \Delta V_e = -0.10395\ (J)$

$\boxed{V_c = 0.952\ m/s}$

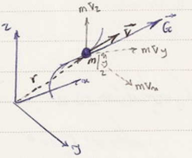


طول کل l

۱. در حالت $\mu = 0$

۲. در حالت داشتن μ $\quad V_2 = ?$

ضربه و اندازه حرکت (تکان و تکانه)



اندازه حرکت خطی $\quad \vec{G} = m\vec{v}$ ممنتوم خطی

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \qquad \sum \vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

$$\sum \vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{G} = \dot{\vec{G}}$$ مشتق ممنتوم خطی نسبت به زمان

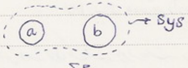
$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{F}\, dt = \int_{\vec{G}_1}^{\vec{G}_2} d\vec{G} \qquad \int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{F}\, dt = \vec{G}_2 - \vec{G}_1 = \Delta \vec{G}$$

ضربه خطی

قانون ضربه ـ ممنتوم خطی

اصل بقاء ممنتوم خطی

$$\text{if: } \sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{G}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{G} = \text{ثابت}$$



$\sum F = 0$

$$a \xrightarrow{F} \quad \int F\,dt = \Delta G_a$$

$$b \xleftarrow{} \quad \int -F\,dt = \Delta G_b$$

$$\Delta G_a + \Delta G_b = 0 \Rightarrow \Delta (G_a + G_b) = 0$$

اصل بقاء ممنتم برای سیستم ذرات $\quad G_a + G_b = cte$ ثابت

تعریف گشتاور ممنتم خطی H (ممنتم زاویه‌ای)

$$\vec{H_o} = \vec{r_o} \times \vec{G} = \vec{r_o} \times m\vec{v}$$

$$H_o = m \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}$$

$$H_x = m(yV_z - zV_y)$$

$$H_y = m(zV_x - xV_z)$$

$$H_z = m(xV_y - yV_x)$$

— G در هر لحظه برای هر جسم مقداری ثابت دارد ولی H متغیر است.

اگر $\sum F$ برایند نیروهای وارد بر یک جسم باشد

$$\sum \vec{M_o} = \vec{r} \times \sum \vec{F} = \vec{r} \times m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\left(\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt}\right)$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}) = \vec{r} \times m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\underbrace{\vec{v} \times m\vec{v}}_{0} + \vec{r} \times m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\Rightarrow \sum \vec{M_o} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{G}) \qquad \sum \vec{M_o} = \frac{d}{dt}(\vec{H_o}) = \dot{\vec{H}}_o$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{M_o}\,dt = \int_{\vec{H_1}}^{\vec{H_2}} d\vec{H_o}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{M_o}\,dt = \vec{H}_{20} - \vec{H}_{10}$$

تغییرات ممنتم زاویه‌ای

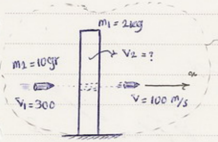
ضربه زاویه‌ای

قانون ضربه - ممنتم زاویه‌ای

اصل بقای مومنتوم زاویه‌ای $\quad$ if $\sum \vec{M}_o = 0 \Rightarrow \vec{H}_o =$ ثابت

ـ ممکن است حول یک محور برقرار باشد و در همان زمان حول محور دیگر اصل بقای مومنتوم زاویه‌ای برقرار نباشد.

مثال ۱: گلوله از مرکز دیسک عبور می‌کند



زمان: در حد یک لحظه قبل از برخورد و یک لحظه پس از برخورد

(اصطکاک) نیرو که در خنثی می‌شوند ⇐ در این محدوده زمانی $\quad \sum F_x = 0$

$\Rightarrow G_x =$ ثابت $\Rightarrow G_x = G'_x$ $\quad$ قبل و بعد از برخورد

$$G_{1x} + G_{2x} = G'_{1x} + G'_{2x} \qquad \begin{cases} 1: \text{دیسک} \\ 2: \text{گلوله} \end{cases}$$

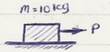
$$m_1 \underset{\text{ساکن بوده}}{\underbrace{V_{1x}}} + m_2 V_{2x} = m_1 V'_{1x} + m_2 V'_{2x} \Rightarrow 0.01(300) = 2V'_{1x} + 0.01(100)$$

$$\boxed{V'_{1x} = 1\ m/s}$$

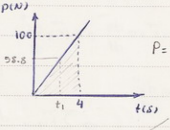
« در تمام مسائل برخورد اتلاف وجود دارد = تفاوت انرژی های قبل و بعد از برخورد تقسیم بر انرژی جنبشی اولیه = اتلاف »

درصد اتلاف انرژی $\quad \dfrac{K_2 - K_1}{K_1} \times 100$

مثال ۲

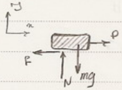


$V_1 = 0 \qquad \mu_s = 0.6 \qquad \mu_k = 0.4 \qquad \begin{cases} t = 4\ s \\ V = ? \end{cases}$



$P = 25t$

« می‌توان با استفاده از معادلات حرکت براحتی حل کرد »



$$\int \sum F_x\, dt = G_{2x} - G_{1x} = m(V_{2x} - \underset{0}{V_{1x}})$$

$$\int (P - F)\, dt = m(V_{2x}) \qquad [P = 25t,\ F = ? \Rightarrow \ldots]$$

$$\ldots \quad \sum F_y = 0 \Rightarrow N - mg = 0 \Rightarrow N = mg$$

$F_k = \mu_k (mg)$ مقدار ثابت

$$\int_{t_1}^{t_2=4} (P - F)\, dt = m V_{2x}$$

t_1 = زمان شروع به حرکت ≠ زمان اعمال نیرو

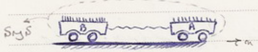
ابتدا باید نیروی اصطکاک حدی را کنیم

$$F_s = \mu_s (mg) = 0.6(10)g = 6(g) = 58.8\ N \Rightarrow \frac{58.8}{100} = \frac{t_1}{4} \Rightarrow t_1 = 2.35\ s$$

زمان شروع به حرکت

$$\int_{2.35}^{4} (25t - 0.4mg)\, dt = 10 V_{2x} \Rightarrow \boxed{V_{2x} = 6.63\ m/s}$$

مثال ۳



$m_A = m_B = m$

$V_{1A} = 1.2\ m/s \rightarrow$

$\Delta E = 40\% E_{1A} \Rightarrow V_B = ?$

$V_C = V_{A,B}$ سرعت نهایی ؟

ابتدا حرکت A تا طناب صاف شود و یکباره ناگهان به B وارد می‌شود و اتلاف انرژی خواهیم داشت و پس B شروع به حرکت می‌کند

$V_B = ?$

$$\sum_{Sys} F_x = 0 \Rightarrow G_x = 0$$

۱. درست قبل از شروع حرکت B

۲. درست پس از حرکت B

$$\Rightarrow G_x = G'_x \Rightarrow m_A V_A + m_B \cancel{V_B} = m_A V'_A + m_B V'_B$$

$$\Rightarrow 1.2 = V'_A + V'_B \quad ①$$

" انرژی پتانسیل Sys تغییری نمی‌کند $\Delta h = 0$ "

$$\frac{1}{2} m V_A^2 (0.6) = \frac{1}{2} m V_A'^2 + \frac{1}{2} m V_B'^2$$

$$\Rightarrow 0.6 V_A^2 = V_A'^2 + V_B'^2 \quad ②$$

$$①,② \Rightarrow V'_B = \begin{cases} 0.868 \Rightarrow V'_A = 0.332 \ \checkmark \\ 0.332 \Rightarrow V'_A = 0.868 \ \times \end{cases}$$

سرعت B نباید بیشتر از A باشد پس: دوباره برخوردی بین دو جسم اتفاق می‌افتد و پس با هم حرکت می‌کنند

$\sum F_x = 0 \Rightarrow G_x$ ثابت

1: لحظه‌ی قبل از رسیدن A به B

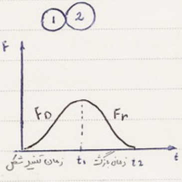
2: " " بعد " "

$$m V'_A + m V'_B = (m+m) V_C$$

$$V'_A + V'_B = 2 V_C \Rightarrow \boxed{V_C = 0.6\ m/s}$$

تمرین : ۱۸۲ - ۱۹۲ - ۱۹۹ - ۲۰۴ - ۲۱۱ - ۲۱۷ - ۲۲۵ - ۲۳۵ - ۲۴۴

برخورد



از زمان ۰ تا t_1 تغییر شکل در جسم لحظه به لحظه زیاد می‌شود چون نیرو در حال افزایش است

حالت عالی است که برگشت نیرو باشد و در صورتی است که اتلاف انرژی وجود نداشته باشد و شکل قرینه نباشد و F_r کوچکتر از F_D است.

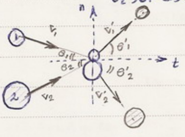
نیمه سمت چپ: ضربه‌ی تغییر شکل   نیمه سمت راست: ضربه‌ی بازگشت

فرض ها ← ۱- برخورد در صفحه‌ی افقی انجام می‌شود

۲- دو جسم در حین برخورد چرخش ندارند

۳- سرعت ها قبل از برخورد V_1 و V_2 با راستای θ_1 و θ_2

۴- سرعت ها پس از برخورد V_1' و V_2' با راستای θ_1' و θ_2'



- در حین برخورد نیروی عمودی وجود ندارد در حین برخورد نیرو در امتداد n است که مراکز دو جسم را به هم متصل می‌کند.

$$1:\ \sum F_t = 0 \Rightarrow G_{1t} = G'_{1t} \Rightarrow \cancel{m_1} V_1 \cos\theta_1 = \cancel{m_1} V_1' \cos\theta_1'$$

$$V_1 \cos\theta_1 = V_1' \cos\theta_1'$$

$$2:\ \sum F_t = 0 \Rightarrow G_{2t} = G'_{2t} \Rightarrow m_2 V_2 \cos\theta_2 = m_2 V_2' \cos\theta_2'$$

$$V_2 \cos\theta_2 = V_2' \cos\theta_2'$$

۲و۱ : $\sum F_n = 0 \Rightarrow G_{(1,2)n} = G'_{(1,2)n} \Rightarrow -m_1 v_1 \sin\theta_1 + m_2 v_2 \sin\theta_2 = m_1 v_1' \sin\theta_1' - m_2 v_2' \sin\theta_2'$

$$-m_1 v_1 \sin\theta_1 + m_2 v_2 \sin\theta_2 = m_1 v_1' \sin\theta_1' - m_2 v_2' \sin\theta_2'$$

Restitution coefficient — ضریب بازگشت (ضریب استرداد) = e

* برای هر دو جسم که با هم برخورد می‌کنند یکسان است

سرعت های بعد از برخورد

$$e = -\frac{(\text{سرعت نسبی دور شدن})_n}{(\text{سرعت نسبی نزدیک شدن})_n}$$

چون مختصات جهت سرعت ها را عوض کند از اصل رابطه استفاده می‌کنیم.

$$e = \frac{-(v_1' \sin\theta_1' - (-v_2' \sin\theta_2'))}{-v_1 \sin\theta_1 - v_2 \sin\theta_2} = \frac{v_1' \sin\theta_1' + v_2' \sin\theta_2'}{v_1 \sin\theta_1 + v_2 \sin\theta_2}$$

نسبت ضربه بازگشت به ضربه تغییر شکل‌ها e

$$0 \leq e \leq 1$$

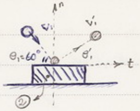
هر چه سطح زیر F_r کمتر شود مقدار e کم می‌شود. تا اینکه در حالتی وقتی دو جسم به هم برخورد می‌کنند به هم می‌چسبند که در این حالت $e = 0$ و به آن ضربه کاملاً پلاستیک می‌گویند.

انواع برخورد ها:
- کاملاً پلاستیک
- کاملاً الاستیک (اجسام برخورد و برمی‌گردند)
- و حالت‌های بین دو مورد بالا را غیر الاستیک می‌گویند.

برخورد:
- مستقیم (مرکزی)

- غیرمستقیم

مثال ۱



$v_1 = 24\ m/s \qquad e = 0.3$

$v_1' ,\ \theta_1' = ?$

«وقتی گفته می‌شود صفحه‌ی سنگین منظور این است که صفحه حرکت نمی‌کند»

$$\sum F_1)_t = 0 \Rightarrow G_1 = G_1' \Rightarrow m_1 v_1 \cos\theta_1 = m_1 v_1' \cos\theta_1' \quad ①$$

$$e = -\frac{\text{سرعت نسبی دور شدن}}{\text{سرعت نسبی نزدیک شدن}} \Rightarrow 0.3 = -\frac{v_1'\sin\theta_1' - 0}{-v_1\sin\theta_1 - 0} \Rightarrow v_1'\sin\theta_1' = 0.3\, v_1 \sin\theta_1 \quad ②$$

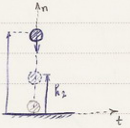
$$\frac{①}{②} \Rightarrow \theta_1' = 27.46^\circ \qquad v_1' = 13.52\ m/s$$

مثال ۲ — گلوله از ارتفاعی رها شده به زمین خورده و دوباره بالا می‌آید

مطلوبست:

$e = ?$

درصد اتلاف انرژی $= ?$



$$e = -\frac{\text{سرعت نسبی دور شدن}}{\text{سرعت نسبی نزدیک شدن}} = -\frac{\sqrt{2gh'} - 0}{-\sqrt{2gh} - 0} \Rightarrow e = \sqrt{\frac{h'}{h}}$$

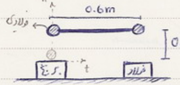
در حجم: گلوله و زمین

$\boxed{h' : h_2 ,\ h = h_1}$

$$E_1 = mgh_1 \qquad E_2 = mgh_2 \Rightarrow \%\Delta E = \frac{E_1 - E_2}{E_1} \times 100 \Rightarrow \frac{mg(h_1 - h_2)}{mg\,h_1} \times 100$$

$$\%\Delta E = \left[1 - \left(\frac{h_2}{h_1}\right)\right] \times 100 = (1 - e^2)\%$$

مثال ۳



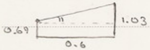
$e_S = 0.6$

$e_B = 0.4$

$\omega = ?$

سرعت زاویه‌ای میله پس از برخورد

$$e_B = -\frac{+v_B'}{-\sqrt{2gh}} \Rightarrow 0.4 = \frac{+v_B'}{\sqrt{2(9.81)(0.15)}} \Rightarrow v_B' = 0.69 \qquad e_S = \frac{-v_S'}{\sqrt{2gh}} \Rightarrow 0.6 = \frac{v_S'}{\sqrt{2(9.81)(0.15)}}$$

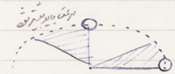


$$\omega = \frac{1.03 - 0.69}{0.6} = 0.57\ \frac{rad}{s}$$

تمرین: 248 - 254 - 259 - 264 - 270 - 212 - 317

حرکت مرکزی

قوانین کپلر — مدار حرکت (یک سیاره) : بیضی

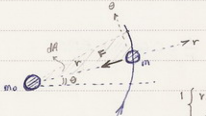


— در زمان‌های مساوی مساحت‌های مساوی طی می‌شود

$F = k\frac{mm_0}{r^2}$ ، $k = 6.673\times10^{-11}$

— $\tau^2 \propto a^3$ ، τ زمان تناوب ، a قطر

به قانون جاذبه‌ی عمومی چون راستای اثرش در راستای خطی است که مراکز دو جسم را به هم متصل می‌کند، نیروی مرکزی هم گفته می‌شود



$$\sum F_r = ma_r \Rightarrow -k\frac{mm_0}{r^2} = m(\ddot r - r\dot\theta^2)$$

$$\sum F_\theta = ma_\theta \Rightarrow 0 = m(r\ddot\theta + 2\dot r\dot\theta)$$

$$\begin{cases} r\ddot\theta + 2\dot r\dot\theta = 0 & (1) \\ \ddot r - r\dot\theta^2 = -\frac{km_0}{r^2} & (2) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{1} \frac{-2\dot r}{r} = \frac{\ddot\theta}{\dot\theta} \Rightarrow \ln r^{-2} = \ln\dot\theta - \ln c \Rightarrow \ln c = \ln r^2 + \ln\dot\theta \Rightarrow \ln r^2\dot\theta = \ln c$$

$$\Rightarrow r^2\dot\theta = c \Rightarrow \boldsymbol{r^2\dot\theta = k} \quad (3)$$

$dA = \frac{r}{2}(r\,d\theta)$ ← مثلث با مساحتی که این دو ضلع داریم r و $r\,d\theta$ $= \frac{1}{2}r^2 d\theta$

$$dA/dt = \frac{1}{2}r^2\, d\theta/dt \Rightarrow \dot A = \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot\theta = \frac{h}{2}$$

همان قانون دوم کپلر

$$\vec G = m(\vec V_r + \vec V_\theta) = m(\dot r\,\vec r_1 + r\dot\theta\,\vec\theta_1)$$

$$\vec H_0 = r\vec r_1 \times \left[m(\dot r\,\vec r_1 + r\dot\theta\,\vec\theta_1)\right] \Rightarrow \vec H_0 = mr^2\dot\theta\,\vec k$$ که مقداری ثابت است

$\sum \vec M_0 = \dot H_0 \Rightarrow H_0$ ممنتم حول مرکز مقداری ثابت است

$\xrightarrow{2}\quad \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{km_0}{r^2}$ از تغییر متغیر $r = \frac{1}{u}$ یا $u = \frac{1}{r}$ استفاده می‌کنیم

$$r = \frac{1}{u} \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{d}{d\theta}\cdot\underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{\dot{\theta}}\left(\frac{1}{u}\right) \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \dot{\theta}\left[\frac{-du/d\theta}{u^2}\right] = -r^2\dot{\theta}\left[du/d\theta\right] = -h\frac{du}{d\theta}$$

$$\ddot{r} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(-h\frac{du}{d\theta}\right) = -h\frac{d}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}\left(\frac{du}{d\theta}\right) \Rightarrow \ddot{r} = -h\dot{\theta}\left[\frac{d^2u}{d\theta^2}\right] \xrightarrow{r^2\dot{\theta} = h} -\frac{h^2}{r^2}\frac{d^2u}{d\theta^2} = -u^2h^2\frac{d^2u}{d\theta^2}$$

$$\xrightarrow{2}\quad +u^2h^2\frac{d^2u}{d\theta^2} + \frac{1}{u}h^2u^4 = +km_0u^2$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = km_0/h^2 \qquad \frac{d^2u}{d\theta^2} + u = km_0/h^2 \quad 4$$ معادله خطی با ضرایب ثابت درجه دو

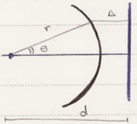
$$\alpha^2 + 1 = 0 \Rightarrow \alpha = \pm\sqrt{-1} \Rightarrow u = C\cos(\theta + \delta)$$

$$u_p = \frac{km_0}{h^2} \Rightarrow \quad u = C\cos(\theta + \delta) + \frac{km_0}{h^2} \qquad \frac{1}{r} = C\cos\theta + \frac{km_0}{h^2} \quad 5$$

ثابت از شرایط اولیه

* مقاطع مخروطی مکان هندسی نقاطی است که نسبت فاصله‌ی آنها از یک خط ثابت و از یک نقطه ثابت مقدار ثابتی است:

(دایره، بیضی، هذلولی، سهمی)



خط هادی $\quad \frac{r}{\Delta} = e \Rightarrow \frac{r}{d - r\cos\theta} = e \Rightarrow r = ed - re\cos\theta$

$$r(1 + e\cos\theta) = ed \Rightarrow r = \frac{ed}{1 + e\cos\theta}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + e\cos\theta}{ed}$$

- همان قانون اول کپلر که مدار حرکت هر جسم یک قطع مخروطی است.

$e = 0$ دایره

$e = 1$ سهمی

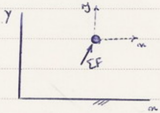
$0 < e \leqslant 1$ بیضی

$e > 1$ هذلولی

برای وقتی در مدار حرکت بیضی است : $\tau \propto a^{3/2}$

زمان یک دور — قطر بزرگ

اصل دالامبر و نیروی اینرسی



- نیروی گریز از مرکز فرضی است نیرو است مجازی، غیر واقعی.
- از دید ناظری که روی دستگاه متحرک روی جسم قرار گرفته شتاب صفر است
پس برایند نیروها صفر است

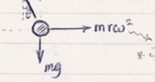
$$\sum F - m\vec{a} = 0$$

معادله استاتیکی

- استفاده از معادلات استاتیکی بجای معادلات دینامیکی را اصل دالامبر می‌گوییم.
- نیروی فرضی اضافه می‌کنیم مخالف جهت شتاب و مساوی ضرب جرم در شتاب تا مسئله مانند مسئله‌ای استاتیکی شود.
- تعادل دینامیکی یعنی ... تا به تعادل استاتیکی تبدیل شود.

$$\sum F_n = m a_n \Rightarrow T\sin\theta = m a_n$$

$$T\sin\theta = m r \omega^2$$

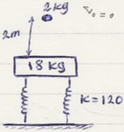


$$\sum F_n = 0 \Rightarrow T\sin\theta - m r \omega^2 = 0$$

* نیروی اینرسی که نیرو فرضی است *

Subject:
Year. Month. Date. 60

مثال



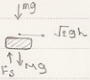
جابجایی اضافی فنر : δ

$\begin{cases} 1: \text{هنگام برخورد} \\ 2: \delta \end{cases}$

$$\int \sum F_y \, dt = G_{2y} - G_{1y}$$

$G_{2y} = (m+M)V'$

$\simeq 0$ (dt کوچک است و نیروها ...)



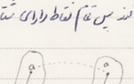
فصل 5

سینماتیک جسم صلب در صفحه

- نقاط مختلف جسم صلب در صفحات موازی هم حرکت می‌کنند.
- وقتی جسم صلب در صفحه حرکت می‌کند ۳ درجه آزادی دارد دو درجه آن که مربوط به مرکز جرم است و دیگری مربوط به دوران
- در حرکت صفحه‌ای جسم صلب 3 معادله داریم (3 معادله حرکت) و در حالت ۳ بعدی 6 معادله حرکت داریم.
- در این فصل a، v، x نقاط مختلف جسم صلب و α، ω، θ خود جسم صلب را می‌خواهیم بررسی کنیم
- جسم صلب است که نقاط مختلف آن می‌توانند خصوصیات سینماتیکی مختلفی داشته باشند.
- جسم صلب ۳ نوع حرکت می‌تواند داشته باشد:

① حرکت انتقالی: تمام نقاط جسم مسیرهای موازی و مساوی طی می‌کنند پس تمام نقاط دارای شتاب و سرعت برابرند.

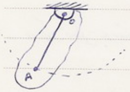
جابجایی هم برابر است



خط موازی ab همیشه موازی است.

اگر خطی دلخواه در نظر بگیریم حرکت طوری است که آن خط همیشه موازی امتداد اولیه است (در حرکت یک جسم در مسیر مستقیم، حرکت قطار در ریل راه آهن و ...)

② حرکت دورانی خالص

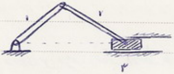


نقاطی از جسم سرعت صفر دارد و بقیه ی نقاط جسم حول آن نقطه می‌توانند بچرخند

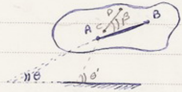
در این مورد سرعت و شتاب و جابجایی برای نقاط متفاوت فرق می‌کند.

③ حرکت کلی

نقطه‌ای از جسم سرعت صفر ندارد و ویژگی های حرکت انتقالی را ندارد.



جسم ۳ حرکت انتقالی دارد - جسم ۱ حرکت دورانی - جسم ۲ حرکت کلی



خطی دلخواه درون جسم و راستای دلخواه بیرونی در نظر می‌گیریم

میزان جابجایی زاویه‌ای با تغییرات زاویه θ یکی است

تغییرات زاویه‌ای خط با راستای دلخواه در زمان مشخص سرعت زاویه‌ای گویند.

و تغییرات سرعت زاویه‌ای خط دلخواه را شتاب زاویه‌ای می‌گویند.

$$\theta' = \theta + \beta \Rightarrow \dot{\theta}' = \dot{\theta} + 0$$

پس بسیار خطی دلخواه سرعت زاویه‌ای و شتاب زاویه‌ای خط دلخواه

سرعت و شتاب جسم را به ما می‌دهد.

$$v = \frac{ds}{dt} \qquad \omega = \frac{d\theta}{dt} \quad rad/s$$

اگر جهت α و ω هم جهت باشند α مثبت و غیر هم جهت α منفی است.

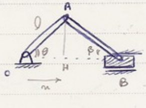
$$a = \frac{dv}{dt} \qquad \alpha = \frac{d\omega}{dt} \quad rad/s^2$$

اگر θ در حال افزایش باشد ω مثبت خواهد بود.

$$a\,ds = v\,dv \qquad \alpha\,d\theta = \omega\,d\omega$$

روی اجسام صلب دو روش داریم : حرکت مطلق و حرکت نسبی

- در حرکت مطلق با استفاده از هندسه ی شکل کمیت های خطی را به کمیت های زاویه ای مربوط می کنیم (با استفاده از روابط هندسی)



$\cos\theta = \frac{x}{l}$ $\qquad x = l\cos\theta \Rightarrow \dot{x} = -l\dot{\theta}\sin\theta$

تصویر سرعت A در افق

$\ddot{x} =$

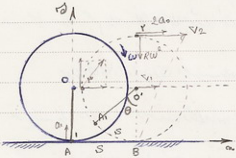
شتاب خطی نقطه ی A

« در حرکت مطلق روابط هندسی بین جابجایی های خطی و ... می نویسیم و مشتق می گیریم »

« اگر روابط بالا را در مورد β بنویسیم ⟵ سرعت خطی A نیست چون نقطه ی B ثابت نیست »

- در حرکت نسبی روابط بین سرعت و شتاب دو نقطه را می نویسیم و ... (سرعت و شتاب نسبی)

مثال در مورد حرکت مطلق



چرخ استوانه ای روی سطح افقی دارای حرکت غلتشی است (غلتش و بی لغزش)

مربوط به مرکز چرخ R, V_0, a_0

? سرعت و شتاب زاویه ای چرخ $1:\ \omega, \alpha$

? سرعت و شتاب نقاط روی محیط چرخ $2:\ V_A, a_A$

« در این موارد شکل ها مرکز جرم اصلاً ملاک نیست نقطه مرکز هندسی مورد نظر است »

خط OA را موازی در نظر می گیریم و زاویه اش را با امتداد قائم در نظر می گیریم.

مرکز به اندازه ی θR حرکت کرده.

S میزان جابجایی نقطه ی O در این زمان

$① S = R\theta$

$\dot{S} = R\dot{\theta} \Rightarrow V_0 = R\omega \Rightarrow \boxed{\omega = \frac{V_0}{R}}$

$$\dot{S} = R\dot{\theta} \Rightarrow \ddot{S} = R\ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} = \alpha = \frac{a_0}{R} \qquad \omega = \frac{v_0}{R}$$

« نقطه‌ای مانند O که در راستای مستقیم است هم دارای سرعت و شتاب $R\omega$ و $R\alpha$ است » $\alpha = \frac{a_0}{R}$

« اگر دو شرط حرکت موازی افق و غلتش باشد از دو رابطه‌ی بالا می‌توان استفاده کرد. »

$$A_1 \begin{cases} x = S - R\sin\theta \\ y = R - R\cos\theta \end{cases} \quad ((S = R\theta)) \quad \begin{cases} \dot{x} = R\dot{\theta} - R\dot{\theta}\cos\theta = R\dot{\theta}(1-\cos\theta) \\ \dot{y} = R\dot{\theta}\sin\theta \end{cases}$$

این روابط را برای همه‌ی نقاط روی محیط می‌توان نوشت.

$$1: \; \theta = 0 \begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \end{cases} \Rightarrow v_1 = 0$$

« اگر جسم حرکت غلتشی داشته باشد در هر لحظه سرعت نقطه‌ی تماس با زمین صفر است »

$$2: \; \theta = \pi \begin{cases} \dot{x} = 2R\omega = 2v_0 \\ \dot{y} = 0 \end{cases}$$

« در غلتش افقی v دو برابر سرعت مرکز جسم است »

$$3: \; \theta = \frac{\pi}{2} \begin{cases} \dot{x} = R\omega = v_0 \\ \dot{y} = R\omega = v_0 \end{cases}$$

$$\text{شتاب} \begin{cases} \ddot{x} = R\ddot{\theta}(1-\cos\theta) + R\dot{\theta}(\dot{\theta}\sin\theta) \\ \ddot{y} = R(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta) \end{cases} \qquad 1: \; \theta = 0 \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = R\omega^2 \end{cases}$$

نقطه‌ی روی زمین شتاب صفر ندارد

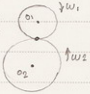
$$2: \; \theta = \pi \begin{cases} \ddot{x} = 2a_0 \\ \ddot{y} = -R\omega^2 \end{cases} \qquad 3: \; \theta = \frac{\pi}{2} \begin{cases} \ddot{x} = R\alpha + R\omega^2 = a_0 + R\omega^2 \\ \ddot{y} = R\alpha = a_0 \end{cases}$$

حرکت غلتشی و موازی با افق

سرعت مرکز $R\omega$ نقطه‌ی تماس با زمین همیشه $v = 0$ ← سرعت نسبی نقطه‌ی تماس با زمین صفر است

شتاب " $R\alpha$ " " " " شتابش صفر نیست

دو چرخ دنده



$$v_C = R_1\omega_1 = R_2\omega_2 \Rightarrow \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{R_1}{R_2}$$

تمرین : ۵-13-۱۹-۲۳-28-۳۶-38-۴۲-47-۵۰-52-۵۶

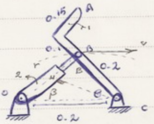
Subject:

Year. Month. Date. 64

v_o , a_o

$\omega , \alpha = ?$

و سرعت نقاط مختلف چرخ



$\frac{d}{dt} OB = 0.26 \ m/s$ ثابت

$\theta = 60^\circ \rightarrow a_{A})_n = ?$

" حرکت دورانی خالص است "

$a_{A})_n = (CA)\underbrace{\omega_1^2}$ $\qquad CA = \sqrt{(0.3)^2 + (0.15)^2} = 0.335 \ m$

CA ← شعاع

$\overset{\triangle}{OCB}$: ارتفاع را رسم می‌کنیم $\qquad CH = \frac{1}{2} OB = \frac{r}{2} = 0.2 \sin\frac{\theta}{2}$

$r = 0.4 \sin(\frac{\theta}{2})$ ⊛

$\dot{r} = 0.4 (\frac{1}{2} \dot{\theta} \cos\frac{\theta}{2}) \Rightarrow \omega_1 = \dot{\theta} = \frac{\dot{r}}{0.2 \cos\theta/2} \Rightarrow \omega_1 = \frac{0.26}{0.2 \cos 30^\circ} = 1.5 \ \frac{rad}{s}$

$\boxed{a_{A})_n = 0.335 (1.5)^2 = 0.755 \ m/s^2}$

$\ddot{r} = 0.2 \left[\ddot{\theta} \cos\frac{\theta}{2} - \frac{\dot{\theta}^2}{2} \sin\frac{\theta}{2} \right] \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{\frac{\dot{\theta}^2}{2} \sin\theta/2}{\cos\theta/2} = \frac{\dot{\theta}^2}{2} \tan\frac{\theta}{2}$

برای سرعت زاویه‌ای اهرم ۲ : $2\beta + \theta = 180 \Rightarrow 2\dot{\beta} + \dot{\theta} = 0 \Rightarrow \dot{\beta} = \frac{-\dot{\theta}}{2} = \omega_2 = -0.75$

$\ddot{\beta} = -\ddot{\theta}/2 \Rightarrow \dots$

حال می‌خواهیم سرعت نقطه B را بدست آوریم :

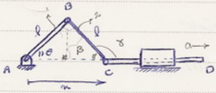
« می‌توان بردار موقعیت از نقطه‌ی O به B رسم کرد و $\dot{r}$ را بدست آورد ولی چون راستای r ثابت نیست پس $\dot{r}$ سرعت B نیست » « باید از دستگاه قطبی استفاده کنیم »

می‌توان سرعت B را از این رابطه بدست آورد

$v_B = BC(\omega_1)$

Subject:
Year. Month. Date. 65

مثال ۲



$a_{CD} = a = cte$

$x = 0 \Rightarrow V_{CD} = 0 \qquad \omega_{BC} = ?$

$$\frac{x}{2} = l\cos\theta \Rightarrow x = 2l\cos\theta$$

$\dot{x} = -2l\dot{\theta}\sin\theta \rightsquigarrow \omega_1 \qquad \Rightarrow \omega_1 = -\dot{x}/2l\sin\theta$

«یک راه برای تعیین β و θ و ... این است که محورهای مثبت را تعیین کنیم و زاویه‌ای با ... را با راستای مثبت محور در نظر بگیریم.»

$\gamma + \theta = 180 \Rightarrow \dot{\gamma} + \dot{\theta} = 0 \Rightarrow \dot{\gamma} = -\dot{\theta} \Rightarrow -\omega_1 = \omega_2$

$$\omega_2 = \frac{\dot{x}}{2l\sin\theta}$$

$a\,dx = v\,dv \Rightarrow a\int_0^x dx = \int_0^{\dot{x}} v\,dv$

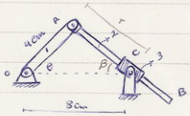
شتاب حرکت از CD به کل سیستم میرسد

شتاب را در نقطه C در نظر گرفتیم

$ax = \frac{1}{2}\dot{x}^2 \Rightarrow \dot{x} = \sqrt{2ax}$

$$\omega_2 = \frac{\sqrt{2ax}}{2l\sin\theta} = \frac{\sqrt{4al\cos\theta}}{2l\sin\theta}$$

مثال ۳



$\omega_1 = 3\,rad/s \quad (ccw)$

$\theta = 40° \Rightarrow \omega_2 = ?$

$$\frac{4}{\sin\beta} = \frac{r}{\sin\theta} \quad ①$$

$4\sin\theta = r\sin\beta \Rightarrow 4\dot{\theta}\cos\theta = \dot{r}\sin\beta + r\dot{\beta}\cos\beta \quad ②$

$[\text{cos}]\ r^2 = (4)^2 + (8)^2 - 2(4)(8)\cos\theta \Rightarrow r^2 = 80 - 64\cos\theta \xrightarrow{\theta=40°} r = 5.57\,cm$

$2r\dot{r} = +64\dot{\theta}\sin\theta \Rightarrow \dot{r} = 32\omega_1\sin\theta/r \Rightarrow \dot{r} = 32\left(\frac{3\sin 40}{5.57}\right) = 11.1\,cm/s$

$① \xrightarrow{\theta=40} \beta = 27.5°$

$② \rightsquigarrow \dot{\beta} = 0.825\ rad/s = \omega_2$ مقدار است بدون جهت

مثال ۴:

ثابت V

ضخامت نوار t

$\alpha = ? = f(r)$

$$V = r\omega \Rightarrow \dot{V} = \dot{r}\omega + r\dot{\omega} \Rightarrow 0 = \dot{r}\omega + r\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{-\dot{r}\omega}{r}$$

زاویه چرخش 2π — تغییر ضخامت t — هر دور کامل r به اندازه‌ی t تغییر میکند

$d\theta$ — $?$

2π — $-t$

$\omega(t)$ — $? \rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{-t \cdot \omega}{2\pi}$

ثابت

$$\dot{r} = \frac{-t \cdot \omega}{2\pi} \Rightarrow \alpha = + \frac{\omega}{r} \frac{t\omega}{2\pi} = \frac{+t\omega^2}{2\pi r} = \boxed{\frac{+V^2 t}{2\pi r^3}}$$

مثال ۵:

$a = 150\ mm$ $\quad \omega\ (ccw)$

$a_c)_n = 80$

$a_c)_t = 30$ $\quad m/s^2$ $\quad \dot{\theta}, \ddot{\theta} = ?$

① $a_c)_n = (OC)\omega^2$

② $a_c)_t = (OC)\alpha$

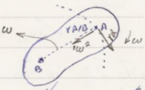
$OC = \frac{2}{3}(OH) = \frac{2}{3}(150 \sin 60)$ $\quad OC = 50\sqrt{3}$

① $\rightarrow \sqrt{\frac{80}{0.05\sqrt{3}}} = 30.4\ \frac{rad}{s}$ $\quad$ ② $\rightarrow \alpha = \frac{30}{0.05\sqrt{3}} = 346.4\ \frac{rad}{s^2}$

حرکت نسبی انتقالی

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B}$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{A/B}$$

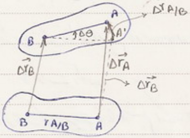


برای جسم صلب :

برای پیدا کردن سرعت نسبی سرعت B را فعلاً صفر و ثابت در نظر می‌گیریم و A حول B بچرخد

$$|v_{A/B}| = (r_{A/B})(\omega)$$

امتداد سرعت عمود بر آن و جهتش از جهت ω با بردار است ω جسم صلب



حرکت انتقالی ⟵ BA'

و به اندازه‌ی Δθ چرخید

در مثلث تشکیل شده داریم :

$$\frac{\Delta \vec{r}_A}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{r}_B}{\Delta t} + \frac{\Delta \vec{r}_{A/B}}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B}$$

در Δθ کوچک می‌توان $r\Delta\theta = \widehat{A'A}$

$$\frac{|\Delta r_{A/B}|}{\Delta t} = r_{A/B} \cdot \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \Rightarrow |v_{A/B}| = r\omega$$

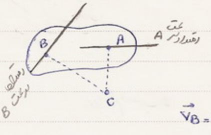
$$\vec{v}_{A/B} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

- امتداد سرعت نسبی عمود بر خطی است که دو نقطه را به هم متصل می‌کند.

- از این روش وقتی استفاده می‌کنیم که بین دو نقطه از یک جسم بخواهیم سرعت و شتاب را بدست آوریم.

مرکز آنی سرعت velocity center

نقطه‌ای درون جسم یا روی سطح جسم که در یک لحظه سرعت آن صفر است.

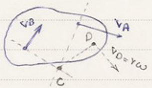


$V_c = 0$

$$\vec{V}_A = \vec{V}_c + \vec{V}_{A/c} \Rightarrow \vec{V}_A = \vec{V}_{A/c}$$

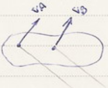
$$\vec{V}_B = \vec{V}_c + \vec{V}_{\frac{B}{c}} \Rightarrow \vec{V}_B = \vec{V}_{B/c}$$

برای پیدا کردن مرکز آنی سرعت باید امتداد سرعت‌ها را داشته باشیم اگر در دو نقطه A و B دو خط عمود بر امتداد سرعت‌ها رسم کنیم محل برخورد عمودها نقطه آنی سرعت است.



- اگر سرعت یک نقطه را داشتیم با استفاده از نقطه‌ی c می‌توان ω جسم را بدست آورد.

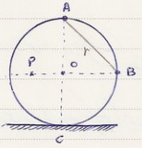
- اگر جهت یکی از سرعت‌ها را داشتیم آنگاه می‌توان جهت ω را مشخص کرد.



- اگر جسمی حرکت انتقالی داشته باشد مرکز آنی در بی‌نهایت قرار می‌گیرد و ω جسم صفر شود.

مثال ۱

حرکت غلتشی



$V_{B/A} = 1.5 \ m/s$

$V_P = ?$

$OB = 150$
$OP = 75 \ mm$

$$V_{A/B} = r\omega \qquad r = R\sqrt{2} \qquad \Rightarrow \omega = \frac{V_{A/B}}{R\sqrt{2}} \Rightarrow \omega = \frac{1.5}{0.15\sqrt{2}} = 5\sqrt{2} \ \frac{rad}{s}$$

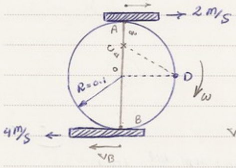
«در این مسئله c مرکز آنی سرعت است.»

$V_P = CP \cdot \omega \Rightarrow V_P = 1.186$

$CP = \sqrt{0.15^2 + (0.075)^2} = 0.167$

با کمک از رابطه‌ی سرعت نسبی هم می‌توان حل کرد
سرعت A یا O را داریم و توسط آن می‌توان سرعت P را بدست آورد

مثال ۲



$V_D = ?$ $C_V = ?$ مرکز آنی سرعت

* مرکز آنی O نیست چون سرعت ها غیر مساوی اند *

فرض کنیم C مرکز آنی است :

$V_A = x\omega$

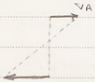
$V_B = (2R - x)\omega$

$\Rightarrow \frac{V_A}{V_B} = \frac{x}{0.2 - x} \Rightarrow x = 66.7\,mm$

$V_A = x\omega \Rightarrow 2 = \frac{0.2}{3}\omega \Rightarrow \omega = 30 \ \frac{rad}{s}$

$V_D = CD \cdot \omega = 3.16$

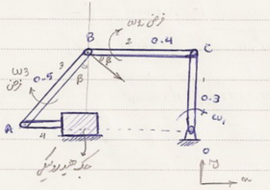
$CD = \sqrt{R^2 + (\frac{R}{3})^2} = \cdots$



با روش ترسیم هم می شد حل کرد

$\frac{V_A}{V_B} = \frac{x\ (\omega)}{2R - x\ (\omega)}$

مثال ۳



$\omega_1 = 2 \ \frac{rad}{s}$ ثابت

$V_A = 1.2 \ m/s \rightarrow$

BC افقی و OC قائم

$\omega_2 , \omega_3 = ?$

$V_B = V_C + V_{B/C}$ $\vec{V}_C = (OC)(\omega_1)\,\vec{i} = (0.3)(2)\,\vec{i} = 0.6\,\vec{i}$

$\vec{V}_{B/C} = (BC)(\omega_2) = 0.4\,\omega_2\,\vec{j}$ $\vec{V}_B = 0.6\,\vec{i} + 0.4\,\omega_2\,\vec{j}$ ①

$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{B/A} \Rightarrow \vec{V}_B$

$V_A = 1.2\,\vec{i}$ $\vec{V}_{B/A} = (AB)\,\omega_3$ $\beta = \cos^{-1}(0.6)$

$\vec{V}_{B/A} = (AB)\,\omega_3\,(\cos\beta\,\vec{i} - \sin\beta\,\vec{j}) =$

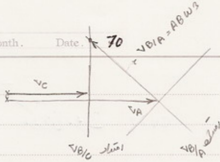
جهت واقعی عکس فرض است

$\vec{V}_B = 1.2\,\vec{i} + (0.5)(\omega_3)(0.6\,\vec{i} - 0.8\,\vec{j})$ ②

$$\text{①, ②} \rightsquigarrow 0.6\,\vec{i} + 0.4\,\omega_2\,\vec{j} = 1.2\,\vec{i} + 0.3\,\omega_3\,\vec{i} - 0.4\,\omega_3\,\vec{j}$$

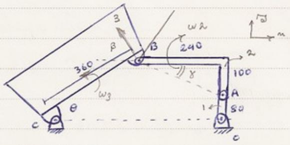
$$\begin{cases} 0.6 = 1.2 + 0.3\,\omega_3 \Rightarrow \omega_3 = -2 \ \frac{rad}{s} \\ 0.4\,\omega_2 = -0.4\,\omega_3 \Rightarrow \omega_2 = 2 \ \frac{rad}{s} \end{cases}$$

Subject:
Year. Month. Date.



روش ترسیمی سؤال قبل :

مثال ۴



$\omega_{OA} = 4\pi \ \frac{rad}{s} \ (cw)$

$\theta = 30^\circ \rightarrow \omega_2 , \omega_3 = ?$

$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{B/A}$ $\qquad \vec{V}_B = BC(\omega_3)$ $\qquad$ از جسم سوم بدست می‌آوریم

$\vec{V}_B = BC\,\omega_3(-\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j})$ $\qquad \vec{V}_B = (0.36)(\omega_3)(-\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j})$

$V_A = (OA)(\omega_1)\vec{i} = (0.08)(4\pi)i = 0.32\pi\,\vec{i}$

$\vec{V}_{B/A} = AB\omega^2 = AB\omega^2(\sin\gamma\,\vec{i} + \cos\gamma\,\vec{j}) = \sqrt{(0.1)^2 + (0.24)^2}\,.\,\omega_2(\sin\gamma\,\vec{i} + \cos\gamma\,\vec{j})$

$\tan\gamma = \frac{100}{240}$

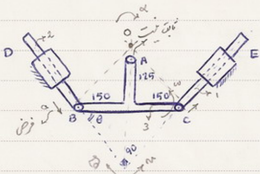
$-0.18\,\omega_3\,\vec{i} + 0.18\sqrt{3}\,\omega_3\,\vec{j} = 0.32\pi\,\vec{i} + \sqrt{(0.1)^2 + (0.24)^2}\,.\,\omega_2(\sin\gamma\,\vec{i} + \cos\gamma\,\vec{j})$

$\omega_2 = -4.21$

rad/s

$\omega_3 = -3.24$

مثال ۵



$\theta = 45^\circ$

$\omega_{ABC} = 20 \ rad/s \ (ccw)$

$\alpha_{ABC} = 100 \ \frac{rad}{s^2} \ (cw)$

$V_{CE} \ , \ a_{CE} = ?$

$OC = \sqrt{2}\ 150$ $\qquad V_C = OC\,.\,\omega_3 = \sqrt{2}\,(0.15)(20) = 4.24 \ m/s$

PAPCO

$V_{CE} = V_C = 4.24$. چون حرکت انتقالی است.

" برای شتاب نباید از مرکز آنی سرعت استفاده کنیم. "

$a_B = a_C + a_{B/C}$

$\vec{a}_B = a_B(-\vec{j})$

جهات فرضی

$\vec{a}_C = a_C(\vec{i})$

" نقاط B و C روی محور دو مولفه‌اند "

$$\vec{a}_{B/C} = \underbrace{BC\,\omega^2(\sin 45\,\vec{i} - \cos 45\,\vec{j})}_{\text{شتاب مرکزگرا } B/C \quad (a_{B/C})_n} + BC\cdot\alpha_3(\cos 45\,\vec{i} - \sin 45\,\vec{j})$$

$a_B =$ $\qquad$ $a_C = -106.1\ m/s^2$

تمرین : 60 - 67 - 74 - 87 - 93 - 100 - 107 - 112 - 116 - 119 - 126 - 132 - 140

و 80 - 86 - 90 - 95 - 103 - 110 - 116 - 123 - 131 - 138 - 146

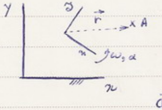
حرکت نسبی به محورهای چرخان

حرکت مطلق

انتقالی : ۲ نقطه‌ی مورد بررسی روی یک جسم باشند

چرخشی : هر یک از دو نقطه روی یک جسم

دو دستگاه چرخان داشتیم :



$\vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{\omega}\times\vec{r} + \vec{V}_{rel}$ → سرعت نسبت به دستگاه

$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) + 2\,\vec{\omega}\times\vec{V}_{rel} + \vec{a}_{rel}$

اگر روی یک جسم بود rel ها را صفر قرار می‌دهیم.

روی تعیین دو نقطه : A : نقطه‌ای از جسم ۱ ، P : نقطه‌ای از جسم ۲ که در آن لحظه بر A منطبق است

$V_A = V_P + V_{rel}$ → سرعت A نسبت به مسیر نسبی

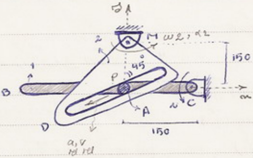
" دستگاه مختصات را روی جسم شیاردار قرار می‌دهیم "

$a_A = a_P + 2\vec{\omega}\times\vec{V}_{rel} + \vec{a}_{rel}$

سرعت و شتاب نقطه‌ای از جسم دیگر که A را منطبق است

یعنی نقطه‌ی دوم را ثابت کنیم ببینیم نقطه‌ی اول چگونه حرکت می‌کند

مثال



$N = 2 \frac{rad}{s}$ ثابت

$\omega_2 , \alpha_2 = ?$

P روی صفحه‌ی ۲ .

« دستگاه چسبیده به صفحه‌ی ۲ با مبدأ P ، ω و α مربوط به صفحه‌ی ۲ خواهد بود »

$\vec{V}_A = \overset{= r\omega}{(AC \cdot N)}(-\vec{j}) = -0.15 \times 2 \vec{j} = -0.3 \vec{j}$

⊛ $\vec{v}_p = (MP \cdot \omega_2)\vec{i} = 0.15\,\omega_2\,\vec{i}$

$\vec{v}_{rel} = V_{rel}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right)$

صفحه‌ی دو را ساکن در نظر می‌گیریم جهت حرکتش ↙ است

$\longrightarrow \vec{V}_A = \vec{V}_P + \vec{V}_{rel} \Rightarrow -0.3\vec{j} = 0.15\omega_2\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2} V_{rel}(\vec{i} + \vec{j})$

$$\begin{cases} 0 = 0.15\omega_2 - \frac{\sqrt{2}}{2} V_{rel} \\ -0.3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} V_{rel} \Rightarrow V_{rel} = 0.3\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow 0.15\omega_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(0.3\sqrt{2}) \Rightarrow \boxed{\omega_2 = 2} \frac{rad}{s}$$

$\vec{a}_A = AC \cdot \omega_1^2\,\vec{i} = 0.15(2)^2\,\vec{i} = 0.6\,\vec{i}$

$\vec{a}_p = MP \cdot \omega_2^2\,\vec{j} + (MP)(\alpha_2)\,\vec{i} = (0.15)(2^2)\vec{j} + 0.15(\alpha_2)\vec{i} = 0.6\vec{j} + 0.15\alpha_2\vec{i}$

$2\vec{\omega}_2 \times \vec{V}_{rel} = 2(2 \times 0.3\sqrt{2})\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right) = 1.2(\vec{i} - \vec{j})$

°90 در جهت چرخش ω (زوج خارج)

$\vec{a}_{rel} = a_{rel}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right)$

حرکت را در صفحه‌ی دو می‌گیریم جهت ↙ در نظر گرفته است.

$\vec{a}_A = \vec{a}_p + 2\vec{\omega} \times \vec{V}_{rel} + \vec{a}_{rel} \Rightarrow 0.6\vec{i} = 0.6\vec{j} + 0.15\alpha_2\vec{i} + 1.2(\vec{i} - \vec{j}) - \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} + \vec{j}) + \vec{a}_{rel}$

$0.6 = 0.15\alpha_2 + 1.2 - \frac{\sqrt{2}}{2} a_{rel}$

$0 = 0.6 - 1.2 - \frac{\sqrt{2}}{2} a_{rel} \Rightarrow \boxed{a_{rel} = -0.6\sqrt{2}}$

$-0.6 = 0.15\alpha_2 + 0.6 \Rightarrow \boxed{\alpha_2 = -8 \frac{rad}{s^2}}$

منفی دلیل غلط بودن جهت است.

روش دوم : حال دستگاه متحرک را روی M جسم دوم در نظر می‌گیریم .

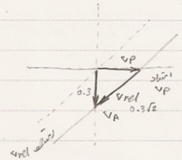
$\vec{V}_A = -0.3\vec{j}$ $*$ $\vec{V}_M = 0$ $*$ $\vec{\omega}\times\vec{r} = \omega\vec{k}\times(-MA)\vec{j} = 0.15\,\omega_2\,\vec{i}$

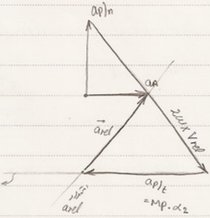
$\vec{V}_{rel} = V_{rel}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(-\vec{i}-\vec{j})$

به دستگاه ربطی ندارد ، جسم دوم را ثابت ...

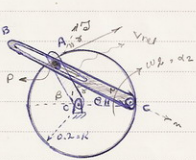
$$\vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{\omega}\times\vec{r} + \vec{V}_{rel} \Rightarrow -0.3\vec{j} = 0 + 0.15\,\omega_2\,\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}V_{rel}(\vec{i}+\vec{j}) \;, \ldots$$

حال به روش ترسیمی :





مثال ۲



$\omega_{OA} = \omega_1 = 10\,\frac{rad}{s}$ (cw) ثابت

$\theta = 30^\circ \rightarrow \omega_2 , \alpha_2 , a_{rel} = ?$

P روی میله‌ی BC منطبق بر A

m روی میله‌ی 2

$\vec{V}_A = \vec{V}_P + \vec{V}_{rel}$ $\quad$ $\vec{V}_A = OA.\omega_1(\sin\gamma\,\vec{i} + \cos\gamma\,\vec{j})$

$\gamma = \theta = 30^\circ$ $\quad$ $\vec{V}_A = 0.2\,(10)\left(\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}\right) = \vec{i} + \sqrt{3}\vec{j}$

$$\vec{v}_P = (CP)(\omega_2)\vec{j} = (2R\cos\theta)(\omega_2)\vec{j} = 2(0.2)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\omega_2\vec{j} = 0.2\sqrt{3}\,\omega_2\,\vec{j}$$

$$\vec{v}_{rel} = v_{rel}\,\vec{i}$$

$$v_A = v_P + v_{rel} \Rightarrow \vec{i} + \sqrt{3}\vec{j} = 0.2\sqrt{3}\,\omega_2\,\vec{j} + v_{rel}\,\vec{i}$$

$$v_{rel} = 1 \ m/s \quad * \quad \omega_2 = 5 \ rad/s$$

$$a_A = a_P + 2\vec{\omega}\times\vec{v}_{rel} + \vec{a}_{rel}$$

$$a_A = (0.2)(10)^2(\cos\gamma\,\vec{i} - \sin\gamma\,\vec{j}) = 10\sqrt{3}\,\vec{i} - 10\,\vec{j}$$ با هندسه تانژانت بین فوق کتاب جواب مرز دارد :

$$a_P = (CP)(\omega_2)^2\,\vec{i} + (CP.\alpha_2)\,\vec{j} = 5\sqrt{3}\,\vec{i} + 0.2\sqrt{3}\,\alpha_2\,\vec{j}$$

$$2\vec{\omega}_2 \times \vec{v}_{rel} = 2(5)(1)(-\vec{j}) = -10\,\vec{j}$$

$$\vec{a}_{rel} = a_{rel}\,\vec{i}$$

$$10\sqrt{3}\,\vec{i} - 10\,\vec{j} = 5\sqrt{3}\,\vec{i} + 0.2\sqrt{3}\,\alpha_2\,\vec{j} - 10\,\vec{j} + a_{rel}\,\vec{i}$$

$$10\sqrt{3} = 5\sqrt{3} + a_{rel} \Rightarrow \boxed{a_{rel} = 5\sqrt{3}} \ m/s^2$$

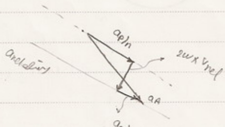
$$-10 = 0.2\sqrt{3}\,\alpha_2 - 10 \Rightarrow \boxed{\alpha_2 = 0}$$

می‌توانستیم مبدأ دستگاه را روی C در نظر بگیریم و ...

حل از روش مطلق:

$$\beta = 2\theta \Rightarrow \dot{\beta} = 2\dot{\theta} \Rightarrow \omega_1 = 2\omega_2 \Rightarrow \omega_2 = \tfrac{1}{2}\omega_1 = 5$$

$$\ddot{\beta} = 2\ddot{\theta} \Rightarrow \alpha_1 = 2\alpha_2 = 0$$

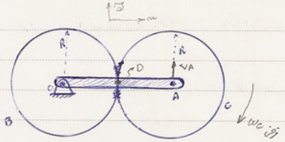


تمرین چرخان : ۱۵۲-۱۵۸-۱۶۴-۱۷۰-۱۷۸

تمرین موردی : ۱۸۱-۱۸۵-۱۹۲-۱۹۴

Subject:
Year. Month. Date. 75

مثال ۱



$\omega_{OA} = 4 \ \frac{rad}{s} \ (ccw)$

$\omega_C = ? \begin{cases} \omega_B = 0 \\ \omega_B = 2 \ \frac{rad}{s} \ (cw) \end{cases}$

$V_A = (OA)\omega_{OA} = (2R)(4) = 8R$

دو نقطه از چرخ دنده سرعت آن را داریم

$V_D = 0$

حالت الف)

$\vec{V}_A = \vec{V}_D + \vec{V}_{A/D} \Rightarrow \begin{cases} 8R\vec{j} = 0 + R\omega_C(-\vec{j}) \Rightarrow 8R = -R\omega_C \Rightarrow \\ \boxed{\omega_C = -8} \ \frac{rad}{s} \end{cases}$

حالت ب)

$\vec{V}_A = 8R\,\vec{j}$

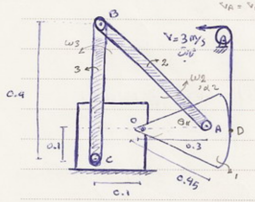
$\vec{V}_D = R \cdot \omega_B(-\vec{j}) \qquad 8R\vec{j} = -R\omega_B\vec{j} - R\omega_C\vec{j}$

$10R\vec{j} = -R\omega_C\vec{j} \Rightarrow \boxed{\omega_C = -10} \ \frac{rad}{s}$

$V_A = (2R)\omega_{OA} \qquad V_D = R\omega_B \qquad B\ \omega \qquad V_{A/D} = R\omega_C \qquad C\ \omega$

$V_A = V_D + V_{A/D}, \dots$

مثال ۲:



$\omega_{AB}, \alpha_{AB} = ?$

$V_D = 3\ m/s = 0.45(\omega_1)$

$\vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{V}_{A/B}$

$V_D = \frac{45}{100}\ \omega_1$

$\vec{V}_A = OA \cdot \omega_1 \vec{j}$

$V_A = \frac{0.3}{0.45}(3)\vec{j} = 2\vec{j}$

$\vec{V}_B = -BC(\omega_3)\vec{i} = -0.4\,\omega_3\vec{i} \qquad \vec{V}_{A/B} = AB \cdot \omega_2(\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j})$

$tg\theta = 0.75 = \frac{3}{4} \qquad \vec{V}_{A/B} = (0.5)\omega_2(0.6\vec{i} + 0.8\vec{j}) = 0.3\omega_2\vec{i} + 0.4\omega_2\vec{j}$

$V_A = V_B + V_{A/B} \Rightarrow 2\vec{j} = -0.4\omega_3\vec{i} + 0.3\omega_2\vec{i} + 0.4\omega_2\vec{j}$

$\begin{cases} 2 = 0.4\omega_2 \Rightarrow \omega_2 = 5 \ rad/s \\ 0.4\omega_3 = 0.3\omega_2 \Rightarrow \omega_3 = 3.75 \ rad/s \end{cases}$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{A/B} \qquad \vec{a}_A = OA(\omega_1^2)(-\vec{i})$$ ω ثابت شتاب مماسی نداریم،

$$\vec{a}_A = (0.3)\left(\frac{3}{0.45}\right)^2(-\vec{i})$$

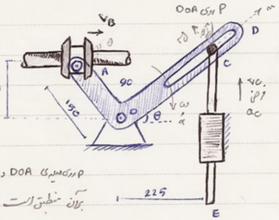
$$\vec{a}_B = BC(\omega_3)^2(-\vec{j}) - BC(\alpha_3)(\vec{i}) \Rightarrow \vec{a}_B = (-0.4)(3.75)^2(\vec{j}) - 0.4\alpha_3\vec{i}$$

$$\vec{a}_{A/B} = AB\,\omega_2^2\,(-\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}) + AB\alpha_2\,(\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j})$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{A/B} \Rightarrow (-0.3)\left(\frac{3}{0.45}\right)^2\vec{i} = -0.4(3.75)^2\vec{j} - 0.4\alpha_3\vec{i} + 0.5(5)^2(-0.8\vec{i} + 0.6\vec{j}) + 0.5\alpha_2(0.6\vec{i} + 0.8\vec{j})$$

$$\boxed{\alpha_2 = -4.7\ \frac{rad}{s^2}}$$

مسئله ۳



$V_B = 0.9\ m/s$ ثابت

$\theta = 30^\circ \rightarrow V_{CE}, a_{CE} = ?$

$$\vec{V}_C = \vec{V}_P + \vec{V}_{rel}$$

P روی مسیر DOA در این لحظه بر C منطبق است.

$$\vec{V}_C = V_C(\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}) \qquad \vec{V}_P = OP(\omega)(-\vec{j}) \Rightarrow \vec{V}_P = \frac{0.225}{\cos 30}(\omega)(-\vec{j})$$

$$\cos\theta = \frac{0.225}{OP} \Rightarrow OP = 0.225/\cos 30$$

$\vec{V}_{rel} =$ چرخش را نادیده می‌گیریم و نقطه‌ی C فقط در راستای شیار می‌تواند حرکت کند. $= V_{rel}\,\vec{i}$

«سرعت نقطه‌ی A و طوقه با هم برابر نیستند»
«در راستای افق با هم حرکت می‌کنند پس سرعت در افق A و طوقه برابرند»

$$② \quad v_C\left(\tfrac{1}{2}\vec{i} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}\right) = -\frac{0.225}{\sqrt{3}/2}\omega\vec{j} + V_{rel}\,\vec{i}$$

$$* \quad V_A\cos\theta = V_B \Rightarrow OA(\omega)\cos\theta = V_B$$

$$\frac{V_B}{OA\cos\theta} = \omega \Rightarrow \frac{0.9}{0.15\,\sqrt{3}/2} = \boxed{\omega = 6.93}\ \frac{rad}{s}$$

$$② \Rightarrow \begin{cases} V_C = -2.08 \\ V_{rel} = -1.04 \end{cases}$$

$$\vec{a}_c = \vec{a}_p + 2\vec{\omega} \times \vec{V}_{rel} + \vec{a}_{rel}$$

$$\vec{a}_c = a_c\,(\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j})$$

$$\vec{a}_p = (op.\omega^2.\vec{i}) - op.\alpha\,\vec{j} = \left(\frac{0.2}{\cos\theta}\right)(6.93)^2(-\vec{i}) - \frac{0.225}{\cos\theta}\,\alpha\,\vec{j}$$

$$2\vec{\omega} \times \vec{V}_{rel} = 2\,(6.93)(-1.04)(-\vec{j})$$

$$\vec{a}_{rel} = a_{rel}\,\vec{i}$$

$$a_c\left(\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}\right) = \frac{0.2}{\sqrt{3}/2}(6.93)^2(-\vec{i}) - \frac{0.225}{\sqrt{3}/2}\,\alpha\,\vec{j} + (2.08)(6.93)\,\vec{j} + a_{rel}\,\vec{i}$$

$$\omega = \frac{V_B}{OA\cos\theta} \Rightarrow \dot{\omega} = \alpha = \frac{V_B}{OA}\left(+\frac{\dot{\theta}\sin\theta}{\cos^2\theta}\right) \Rightarrow \alpha = -22.73\ \frac{rad}{s^2}$$

$$\Rightarrow a_c = 24.96\ m/s^2$$

« می‌توانستیم شتاب نقطه A را نوشته، و آن را در راستای افقی، صفر قرار دهیم »

$$\omega = \frac{V_B}{OA \cdot \cos\theta} \longrightarrow \dot{\omega} = \frac{V_B}{OA}\left(\dot{\theta}\,\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\right) \Rightarrow \alpha = -22.73 \;,\; a_c = 24.96$$

حرکت میله CE انتقالی است پس کافی است شتاب حرکت یک نقطه از آن را بدست آوریم (در اینجا C)

* * *

جلسه بیست و ششم : 86,9,6

فصل ۶ : « سینتیک جسم صلب در صفحه »

مقدمه

گشتاور لختی : منشأ و تعریف I

کاربرد

I برای مجموعه ذرات

شعاع چرخش

قضیه انتقال محورها

I جرمی و I سطحی

I اجسام مرکب

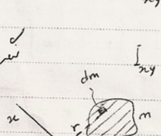
مثال و تمرین

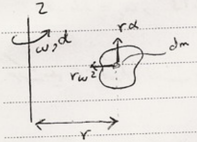
روشهای بررسی حرکت جسم صلب : ۱- روش معادله حرکت ۲- روش کار و انرژی ۳- روش ضربه و مومنتم

گشتاور دوم سطح یک خاصیت هندسی و مربوط به یک سطح است در حالیکه ممان اینرسی جرمی خاصیتی فیزیکی و مربوط به یک جرم است. گشتاور لختی با دو اندیس نشان داده می شود (برای تمایز با ممان اینرسی سطحی)

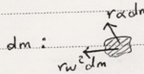
$I_{xx} = \int r^2\, dm$: گشتاور لختی $\qquad I_{xy} = \int x \cdot y \cdot dm$: حاصلضرب لختی

$I_x = \int r^2\, dA$: گشتاور دوم سطح $\qquad I_{xy} = \int x \cdot y\, dA$: حاصلضرب ماند





فرض کنیم جرم m حول محور z دوران می‌کند. هر المان شتاب مماسی و جانب مرکز دارد پس بر آن نیرو وارد می‌شود. این نیرو برآیند نیروهایی است که از طرف دیگر ذرات جسم بر آن وارد می‌شود، همین برآیند نیز از یک نیروی خارجی بوجود آمده است. وزن ذره نیز، نیروی دیگری است که به المان وارد می‌شود.

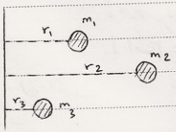


گشتاور حاصل از نیروهای وارد بر المان حول O :
$$dM = r^2 \alpha \, dm$$

محور دوران — گشتاور لختی

$$\Rightarrow M = \int dM = \int r^2 \alpha \, dm \Rightarrow M = \alpha \underbrace{\int r^2 dm}_{I} \Rightarrow \boxed{M = I\alpha} \; *$$

گشتاور لختی علاوه بر اینکه به جرم جسم بستگی دارد به محور گشتاورگیری نیز وابسته است زیرا باعث تغییرات r خواهد شد



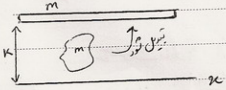
$$\left.\begin{aligned} I_1 &= r_1^2 m_1 \\ I_2 &= r_2^2 m_2 \\ I_3 &= r_3^2 m_3 \end{aligned}\right\} \quad \underbrace{I = \sum I_i = \sum r_i^2 m_i}$$

گشتاور لختی برای مجموعه ذرات ⟵

$$[I] : kg.m^2$$

شعاع چرخش (شعاع ژیراسیون):

فرض کنیم بتوانیم جسم m را به صورت یک میله باریک درآورده به طوری که جرم و گشتاور لختی آن ثابت بماند. جسم باید در فاصله خاصی قرار داده شود. این فاصله همان شعاع چرخش (k) است.



$$I = \int r^2 dm = \int k^2 dm = k^2 m$$

$$\Rightarrow k = \sqrt{\frac{I}{m}}$$

در واقع شعاع ژیراسیون نحوه توزیع جرم را حول محور نشان می‌دهد برای اینکه گشتاور لختی یکسانی داشته باشیم.

معمولاً ممان اینرسی حول محوری را داریم که از مرکز جرم جسم عبور کرده، می‌توان با قضیه انتقال محورها (محورهای موازی) ممان حول دیگر محورها را نیز محاسبه نمود.

$\bar{I}_{xx}$, $\bar{I}_{yy}$, $\bar{I}_{zz}$: تانسورهای لختی حول محوری که از مرکز جرم جسم گذشته

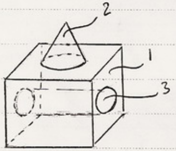
$$I_{x'x'} = \bar{I}_{xx} + md^2$$

قضیه انتقال محورها

$I_{x'x'}$: تانسور حول محوری است که موازی با محوری است که از مرکز جرم جسم گذشته.

d : فاصله دو محور موازی

در قضیه انتقال محورها، حتماً باید یکی از دو محور از مرکز جرم بگذرد.



ممان اجسام مرکب:

$$I = I_1 + I_2 - I_3$$

شماره جسم	$\bar{I}$	m	d	md^2	$\bar{I}+md^2$
					✓
					✓

Σ : جواب

برای جسم توخالی: از ابتدا m منفی باشد ← md^2 و $\bar{I}$ منفی شود

در ستون $\bar{I}+md^2$، منفی گذاشته شود

هیچ رابطه‌ای در حالت کلی بین تانسور لختی و ممان اینرسی سطح وجود ندارد چون برای دو چیز مختلف تعریف می‌شوند اما برای صفحه‌های نازک که به سطح شبیه‌اند می‌توان رابطه‌ای تقریبی بین آنها پیدا کرد.

ضخامت در جاهای ثابت

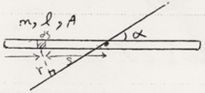
$$\begin{cases} I_x = \int r^2\, dA \\ I_{xx} = \int r^2\, dm \end{cases}$$

ضخامت

$$I_{xx} = \int r^2 dm = \int r^2 . \rho . dv = \int r^2 . t . dA . \rho$$

$$\Rightarrow I_{xx} = \rho t \int r^2 dA \Rightarrow I_{xx} = \rho t\, I_x$$

مثال ۲ : ممان اینرسی حول محوری را بیابید که از مرکز میله گذشته و با آن زاویه α می‌سازد :



$$I=\int r^2 dm \qquad \begin{cases} dm = \rho A = \rho A ds \\ r = s \cdot \sin\alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = \int s^2 \cdot \sin^2\alpha \cdot \rho A ds$$

$$\Rightarrow I_{oo} = (\rho A)\sin^2\alpha \int_{-l/2}^{l/2} s^2 \cdot ds = \frac{\rho A \sin^2\alpha}{3}\left(\frac{l^3}{8}+\frac{l^3}{8}\right)$$

$$\Rightarrow I_{oo} = \frac{1}{12}\rho A l^3 \sin^2\alpha$$

$$m=\rho A l \rightarrow \rho A = m/l \Rightarrow I_{oo} = \frac{1}{12} m l^2 \sin^2\alpha \; *$$

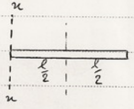
مهم

* گشتاور لختی میله‌های باریک، حول محوری که از مرکز جرم آن گذشته و با آن زاویه α می‌سازد

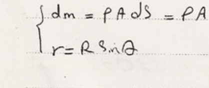
$$\alpha = 90 \rightarrow I_{oo} = \frac{1}{12} m l^2$$

$$I_{xx} = \frac{1}{12} m l^2 + \frac{m l^2}{4} = \frac{1}{3} m l^2$$

: گشتاور لختی میله باریک حول یکی از دو انتها



مثال ۳ :



$$I_{aa} = ? \qquad I_{oo} = ? \qquad \bar{I} = ?$$

$$\begin{cases} dm = \rho A ds = \rho A R d\theta \\ r = R\sin\theta \end{cases} \Rightarrow I_{aa} = \int R^2 \sin^2\theta \cdot \rho A R d\theta = R^3 \rho A \int \sin^2\theta d\theta$$

$$m = \pi R \cdot A \cdot \rho \Rightarrow \rho A = m/\pi R$$

$$\Rightarrow I_{aa} = \frac{1}{2} m R^2 \checkmark$$

Subject 84
Date

$$I_{oo} = \int R^2 . \rho A R d\theta = R^3 \rho A \pi = R^3 \times \frac{m}{\pi R} \times \pi \Rightarrow I_{oo} = mR^2$$

$$I_{oo} = \bar{I} + md^2 \Rightarrow mR^2 = \bar{I} + m\left(\frac{2R}{\pi}\right)^2 \Rightarrow \bar{I} = \checkmark$$

* * *

جلسه بیست و هفتم : ۱۰/۹/86

معادلات حرکت :

مقدمه

معادلات حرکت

اثبات معادله گشتاورها

فرم های مختلف معادله گشتاورها

سینماتیک و سینتیک

حرکت انتقالی

حرکت دورانی

مثال و تمرین

گشتاور لختی باعث مقاومت در برابر حرکت دورانی می شود.

معادلات حرکت (معادله اویلر ۲) :

حرکت در صفحه : 3 DOF →
$$\begin{cases} \sum F_x = m\bar{a}_x \\ \sum F_y = m\bar{a}_y \\ \sum \bar{M} = \bar{I}\alpha \end{cases}$$

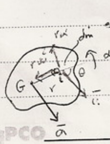
$\sum F_x = m\bar{a}_x$ → شتاب مرکز جرم جسم

$\sum \bar{M} = \bar{I}\alpha$ → شتاب زاویه ای

گشتاور لختی حول مرکز جرم

برآیند گشتاور کلیه نیروها حول مرکز جرم

M و I هر دو حول محوری محاسبه می شوند که از مرکز جرم جسم عبور کرده و بر صفحه حرکت عمود باشد.



$$dm: \quad \vec{a} = \vec{\bar{a}} + \vec{a}_{i/G}$$

Subject:
Year. Month. Date. 85

ما حرکت در صفحه‌ی جسم صلب را بررسی می‌کنیم . 3DOF

مثلا در دستگاه کارتزین

معادلات حرکت اجسام صلب

$$\begin{cases} \sum F_x = m\bar{a}_x \\ \sum F_y = m\bar{a}_y \\ \sum \bar{M} = \bar{I}\alpha \end{cases}$$

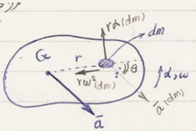
شتاب مرکز جرم

برآیند گشتاورهای نیروها حول مرکز جرم

$\bar{M}$: برآیند گشتاور در صفحه‌ی نیروها حول مرکز جرم (حول محوری که بر جسم عمود است)

$\bar{I}$: گشتاور اینرسی حول محوری که از مرکز جرم می‌گذرد است.

α : شتاب زاویه‌ای



$$\vec{a} = \vec{\bar{a}} + \vec{a}_{i/G}$$

$$d\vec{F} = dm\,(\vec{a})$$

$$d\vec{F} = dm\,(\vec{\bar{a}} + \vec{r\alpha} + \vec{r\omega^2})$$

$r\alpha(dm)$, $\bar{a}(dm)$, $r\omega^2(dm)$ } نیروهای ذره

$$dM = (r^2\alpha\, dm) - (r\bar{a}\sin\theta\, dm)$$

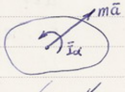
$$\sum \bar{M} = \int r^2\alpha\, dm - \int r\bar{a}\sin\theta\, dm = \int r^2\alpha\, dm - \int \bar{a} r_y\, dm$$

r_y است

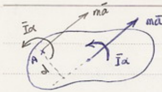
$$* \int \bar{a} r_y\, dm = \bar{a}\int r_y\, dm = \bar{a}\,\cancel{\bar{r}_y}\, m = 0 \Rightarrow \sum \bar{M} = \alpha\int r^2\, dm \Rightarrow \sum \bar{M} = \bar{I}\alpha$$

ـ یعنی اوقات لازم است بجای مرکز جرم $\sum \bar{M}$ را حول محور دیگری بدست آوریم.

دیاگرام آزاد



دیاگرام سینتیک



کوپل و نیروهای ناشی از مرکز جرم تغییر داد پس باید کوپل نیروها هم وارد کنیم.

$$\sum M_A = \bar{I}\alpha + m\bar{a}d \qquad \sum \vec{F} = m\vec{\bar{a}}$$

اگر نقطه‌ی گشتاورگیری را به نقطه‌ای دیگر منتقل کنیم $m\bar{a}$ انتقال دهیم، تغییری ایجاد نمی‌شود

چون نقطه‌ای دلخواه غیر از مرکز جرم

به منظور جهت بودن کوپل حاصل توجه شود

اگر هم جهت α بود + در غیر این صورت − است

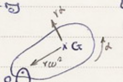
- برای هر سه شکل انتقال، دورانی خالص، کلی این معادلات کاربرد دارند.

مثلاً برای انتقال داریم:

$$\sum F_x = m\bar{a}_x$$
$$\sum F_y = m\bar{a}_y \qquad \sum \bar{M} = 0$$
$$\sum M_A = m\bar{a}d$$

برای دورانی خالص داریم:

$$\sum F_x = m\bar{a}_x \qquad \sum \bar{M} = \bar{I}\alpha$$
$$\sum F_y = m\bar{a}_y \qquad \sum M_A = \bar{I}\alpha + m\bar{a}d$$



$$\sum M_O = \bar{I}\alpha + mr^2\alpha = \alpha(\bar{I} + mr^2)$$

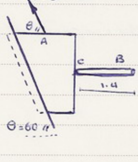
همیشه هم جهت‌اند

$$\sum M_O = I_O\alpha$$

- در این حالت دیگر نیروهای تکیه‌گاهی وارد مسئله نمی‌شوند.

مثال:

ریل و واگن.



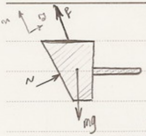
$m_A + m_B = 60$ kg

$m_B = 20$ kg

$a = ?$

$M_C, R_C = ?$

Subject:
Year. Month. Date. 87



حرکت جسم انتقالی است

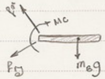
$\sum F_x = m\bar{a}_x$

$\sum F_y = m\bar{a}_y \qquad \sum \bar{M} = 0$

$\sum F_x = m a_x \Rightarrow F - mg\sin\theta = m\bar{a}_x \Rightarrow \bar{a}_x = a = \frac{F}{m} - g\sin\theta$

$a = \frac{800}{60} - (9.8)\sqrt{3}/_2 = 4.84 \ m/s^2$

دیاگرام آزاد را برای میله رسم می‌کنیم :



$\sum F_x = F_x - m_B g\sin\theta = m_B a \Rightarrow F_x = m_B a + m_B g\sin\theta =$

$F_x = 263 \ N$

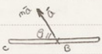
$\sum F_y = m_B a_y \Rightarrow F_y - m_B g\cos\theta = m(0) \Rightarrow F_y = m_B g\cos\theta \Rightarrow F_y = 98 \ N$

$\sum \bar{M} = \bar{I}\alpha = 0 \Rightarrow -M_C - F_x\sin\theta\,(\frac{l}{2}) - F_y\cos\theta\,(l/_2) = 0$

$M_C = -(\frac{1.4}{2})(263\sqrt{3}/_2 + 98.(1/_2)) \Rightarrow M_C = -196 \ N.m$

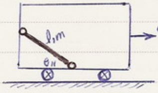
روش دوم این است که حول C گشتاور بگیریم :

$\sum M_C = m\bar{a}d \Rightarrow -M_C - mg(l/_2) = m_B(\bar{a}\sin\theta)(l/_2)$



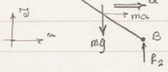
$M_C = -m_B(g\,l/_2 + \bar{a}\sin\theta\,\frac{l}{2}) = -196$

مثال ۲۸



$\mu = 0 \qquad a = ?$

میله نسبت به واگن ثابت بماند



PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. 88

$$\sum F_n = m\bar{a}_n = m a_n \Rightarrow F_1 = m a \Rightarrow a = \frac{F_1}{m}$$

$$\sum M_B = mad \Rightarrow -F_1(l\sin\theta) + mg(l/_2\cos\theta) = -ma(l/_2\sin\theta)$$

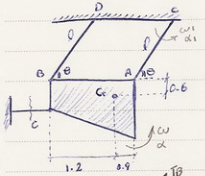
$$F_1 = \frac{1}{\sin\theta}\left[\frac{1}{2}mg\cos\theta + \frac{1}{2}ma\sin\theta\right]$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{m}\left[\frac{1}{2}mg\cot\theta + \frac{1}{2}ma\right] \Rightarrow a = \frac{g}{2}\cot g\,\theta + \frac{a}{2} \Rightarrow \boxed{a = g\cdot\cot g\,\theta}$$

تمرین : ۱ - ۸ - ۱۸ - ۲۳ - ۲۹ - ۳۹ - ۴۹ - ۵۰ - ۵۹ - ۴۲ - ۴۷

مثال

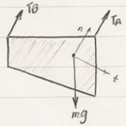
کشش در دو کابل بالا یک لحظه بعد از بریده شدن کابل C؟



$l = 1.5\,m$ $\quad m = 800\,kg$

$T_A,\ T_B = ?$ $\quad \theta = 60^\circ$

$$\begin{cases} \sum F_n = m\bar{a}_n \\ \sum F_y = m\bar{a}_y \\ \sum \bar{M} = \bar{I}\alpha \\ \sum M_A = \bar{I}\alpha + m\bar{a}d \end{cases}$$



دوران خالص : $\sum M_o = I_o\alpha$

$$\sum F_n = ma_n \Rightarrow \overset{?}{T_A} + \overset{?}{T_B} - mg\sin\theta = m\overset{?}{\bar{a}_n}$$

$$\sum F_t = m\bar{a}_t \Rightarrow mg\cos\theta = m\overset{?}{\bar{a}_t} \Rightarrow \bar{a}_t = g\cos\theta$$

$$\sum\bar{M} = \bar{I}\alpha \Rightarrow -T_A\cos\theta(0.6) + T_A\sin\theta(0.9) - T_B\cos\theta(0.6) - T_B\sin\theta(1.2) = \bar{I}\overset{?}{\alpha}$$

چون خط AB هنگام حرکت نسبت به DC موازی است $\omega = \alpha = 0$ ⇐ حرکت جسم انتقالی است

$$V_A = V_B + V_{A/B} \quad \begin{cases} \vec{V}_A = V_A\vec{e}_t \\ \vec{V}_B = V_B\vec{e}_t \end{cases} \quad \vec{V}_{A/B} = (AB)(\omega)(\sin\theta\,\vec{e}_n - \cos\theta\,\vec{e}_n)$$

$V_A \vec{e_t} = V_B \vec{e_t} + AB(\omega)\sin\theta\, \vec{e_n} - AB.\omega\cos\theta\, \vec{e_t}$

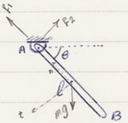
$AB\,\omega\sin\theta = 0 \Rightarrow \omega = 0$ پس حرکت انتقالی است

$a_A)_n = l.\omega_1^2$ " AC نقطه‌ای روی "

$a_A)_n = 0$ " چون در شروع حرکت سرعت اولیه صفر است. "

$\Rightarrow T_A = \qquad T_B = 1792\ (N)$

مثال ۲



$m = 5\,kg \quad l = 0.9\,m$

$\theta = 30^\circ \quad \dot\theta = 2\ rad/s$

$R_A = ? \quad \alpha = ?$

حرکت دورانی خاص :

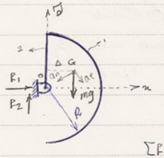
$\sum F_n = m\bar a_n \Rightarrow F_1 - mg\sin\theta = m(\frac{l}{2}\dot\theta^2) \Rightarrow F_1 = mg\sin\theta + m(\frac{l}{2}\dot\theta^2)$ $\hookrightarrow F_1 = 33.5$ "N"

$\sum F_t = m\bar a_t \Rightarrow -\overset{?}{F_2} + mg\cos\theta = m\overset{?}{\bar a_t} \Rightarrow$

$\sum M_A = I_A\alpha \Rightarrow (\cancel{m}g\cos\theta)\frac{\cancel{l}}{2} = \frac{1}{3}\cancel{m}l^{\cancel{2}}\alpha \Rightarrow \alpha = 14.15\ rad/s^2$

$-F_2 + mg\cos\theta = m(\frac{l}{2}\alpha) \Rightarrow +F_2 = 10.6$ "N"

مثال ۳



$m = 0.6\ kg/m$

حرکت در صفحهٔ عمودی - وضع قفل ساکن

$R_o = ?$ در شروع حرکت

$R = 0.2\ m$

$\sum F_x = m\bar a_x \Rightarrow \overset{?}{F_1} = m\overset{?}{\bar a_x}$

$\overset{?}{F_2} - mg = m\overset{?}{\bar a}$

$\sum M_o = I_o\alpha \Rightarrow mg(\Delta) = I_o\overset{?}{\alpha}$

Subject :
Year . Month . Date . 90

موقعیت مرکز جرم را باید بدست آوریم :

$$\bar{y} = \frac{\bar{y}_1 l_1 + \bar{y}_2 l_2}{l_1 + l_2} = \frac{(\pi R)(0) + R\left(\frac{R}{2}\right)}{\pi R + R} = \frac{R}{2(1+\pi)} = 0.024$$

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}_1 l_1 + \bar{x}_2 l_2}{l_1 + l_2} = \frac{\left(\frac{2R}{\pi}\right)(\pi R) + (0)(R)}{\pi R + R} = \frac{2R}{1+\pi} = 0.097$$

$$I_o = I_1)_o + I_2)_o = m_1 R^2 + \frac{1}{3} m_2 R^2$$

احتیاجی به قضیه انتقال نداریم

$$I_o = R^2\left(m_1 + \frac{m_2}{3}\right) =$$

$$\bar{a}_t = OG \cdot \alpha \qquad OG = \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}$$

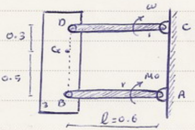
در شروع حرکت $\omega = 0 \Rightarrow a_n = 0$

$$\bar{a}_x = \bar{a}_t \sin\theta = OG \cdot \alpha \cdot \sin\theta \qquad \bar{a}_y = OG \cdot \alpha \cdot \cos\theta$$

$$\begin{cases} F_1 = m \cdot OG \cdot \alpha \cdot \sin\theta \\ F_2 = mg + m(-OG \cdot \alpha \cdot \cos\theta) \\ mg\bar{x} = I_o \cdot \alpha \Rightarrow \alpha = \end{cases}$$

$$\boxed{F_1 = 0.34\ N \qquad F_2 = 3.51\ N \qquad \alpha = 28.35\ \frac{rad}{s^2}}$$

مثال ۴:



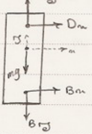
$m_3 = 25\ kg$

$m_1 = m_2 \simeq 0$

حرکت در صفحه قائم

$M_o = 200\ N.m \quad \omega = 5\ rad/s$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 = ? \qquad F_D = ?$



$\xrightarrow{1}\ B_x + D_x = m_3 \bar{a}_x$

$\xrightarrow{2}\ B_y + D_y - m_3 g = m\bar{a}_y$

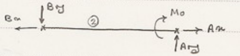
$\xrightarrow{3}\ D_x(0.3) - B_x(0.5) = \bar{I}_3 \cdot \alpha$

PAPCO

حرکت ۳ انتقالی است : $\alpha_3 = 0$

$$a_G)_x = \bar{a}_x = a_D)_x = (CD)\omega^2 = l\omega^2$$

دیاگرام آزاد را برای میله پایین رسم می‌کنیم



$\sum M_A = \overset{0}{I_A} \cdot \alpha_2$ چون جرم را صفر گرفتیم

$$B_y l - M_0 = 0 \Rightarrow B_y = M_0/l = 33.33\ N$$

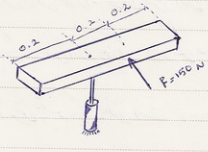
دیاگرام برای میله بالایی

$\sum M_C = \overset{0}{I_C} \cdot \alpha = 0$

$$\Rightarrow \boxed{D_y = 0}$$

$$\Rightarrow \boxed{D_x = 234.4\ N = F_D} \qquad \alpha_3 = 0$$

$$\bar{a}_y = a_D)_t = l\alpha_1 \Rightarrow \boxed{\alpha_1 = \alpha_2 = 5.87\ \frac{rad}{s^2}}$$



$m = 10\ kg$ حرکت در صفحه افقی

$F_0 = ?$ در شروع حرکت

Subject:
Year. Month. Date. 92

حرکت کلی

در حرکت کلی جسم تمام فرمول‌های قبلی کاربرد دارند

$\sum F_x = m\bar{a}_x$

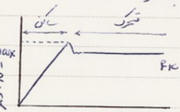
$\sum F_y = m\bar{a}_y$

$\sum \bar{M} = \bar{I}\alpha$ $\qquad \sum M_A = \bar{I}\alpha + m\bar{a}d$

چرخ غلتان

نیروی اصطکاک { خود شامل: غلتشی - لغزشی
....?

- نیروی اصطکاک در غلتشی جهت مشخصی ندارد (فقط در حرکت لغزشی اصطکاک خلاف جهت حرکت است)



- در حرکت غلتشی هیچ رابطه‌ای بین نیروی اصطکاک و نیروی عکس‌العمل سطح وجود ندارد.

$F_K = \mu_K . N$

- در حرکت لغزشی "$F_K = \mu_K . N$"
- و فقط در روابط غلتشی از رابطه "$a_0 = R\alpha$" استفاده شود.

* نکات بالا در موردی است که بدانیم حرکت لغزشی است یا غلتشی.

- راه اگر ندانیم حرکت غلتشی است یا لغزشی از روش صحیح و خطا استفاده کنیم.
- ابتدا مثلاً فرض می‌کنیم حرکت غلتشی است، حال از معادلات حرکت نیروی عکس‌العمل سطح و نیروی اصطکاک را بدست می‌آوریم و همچنین $F_{s\,max} = \mu_s . N$ (بیشترین مقدار اصطکاک بین دو سطح) اگر نیروی اصطکاک F که از معادلات حرکت آوردیم بزرگتر بود فرض اشتباه است و اگر $F < F_{s\,max}$ فرض صحیح است.

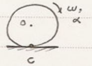
PAPCO

Subject:

Year. Month. Date. 93

$\sum M_o = I_o \alpha$ در حرکت غلتشی فقط حول نقطه‌ای استفاده می‌شود که آن نقطه شتاب نداشته باشد همچنین حول

نقطه‌ای که شتاب حاصل از مرکز آن و این شتاب از G می‌گذرد «مرکز جرم: G» «مرکز هندسی: O»

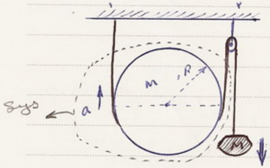


$$\sum M_c = I_c \alpha$$

- استفاده از این رابطه در مسئله‌ای که غلتش ممکن است باعث اشتباه شود چون در نظر گرفتن شرایط باید همراه با دقت زیادی باشد

مثال ۱:

در یک سیستم نشان داده شده، اگر m در حال پایین آمدن



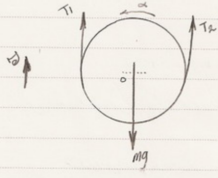
$R = 0.2$

$M = 16$

$m = 10$

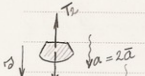
$a = ?$

شتاب $a = ?$



① $\sum F_{\text{رو}} = m\bar{a}_{\text{رو}} \Rightarrow T_1 + T_2 - mg = m\bar{a}$

② $\sum \bar{M} = \bar{I}\alpha \Rightarrow T_2(R) - T_1(R) = \underbrace{\tfrac{1}{2}MR^2}_{\text{جدول}}(\alpha)$



از روابط سینماتیک (سیستم‌های مقید)

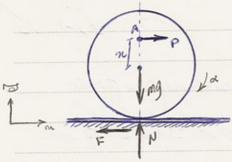
برای جرم m: ③ $\sum F_{\text{رو}} = m\bar{a}_{\text{رو}} \Rightarrow mg - T_2 = m(2\bar{a})$

شتاب مرکز استوانه: ④ $\bar{a} = R\alpha \xrightarrow{②} \alpha = \dfrac{\bar{a}}{R} \Rightarrow \bar{a} = 0.61\ m/s^2$

Subject:
Year.   Month.   Date. 95

مثال ۳

بررسی حرکت و مقدار نیروی اصطکاک



m, R, μ_s, μ_k

$$\sum F_x = m\bar{a}_x \Rightarrow P - \overset{?}{F} = m\overset{?}{\bar{a}_x} \quad ①$$

$$\sum F_y = m\bar{a}_y \Rightarrow N - mg = m(0) \Rightarrow N = mg \quad ②$$

$$\sum \bar{M} = \bar{I}\alpha \Rightarrow P.x + F.R = \frac{1}{2}mR^2\overset{?}{\alpha} \quad ③$$

فرض می‌کنیم حرکت غلتشی:

$$\bar{a} = R\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\bar{a}}{R}$$

$$\xrightarrow{③} P.x + F.R = \frac{1}{2}mR^2\left(\frac{\bar{a}}{R}\right) \quad ④$$

$$\xrightarrow{①} \bar{a} = \frac{P-F}{m} \xrightarrow{④} P.x + F.R = \frac{1}{2}mR\left(\frac{P-F}{m}\right)$$

$$F\left(R + \frac{R}{2}\right) = P\left(\frac{R}{2} - x\right) \Rightarrow F = \left(\frac{R/2 - x}{R + R/2}\right)P \Rightarrow F = \frac{R/2 - x}{\frac{3}{2}R}P$$

$$F = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{2x}{R}\right)P \Rightarrow F = \frac{P}{3}\left(1 - \frac{x}{R/2}\right)$$

$$\text{if} \begin{cases} x < \frac{R}{2} \Rightarrow F \leftarrow \\ x > \frac{R}{2} \Rightarrow F \rightarrow \end{cases}$$

داریم: $F < F_{max} = \mu_s . N = \mu_s . mg$

اما اگر P را خیلی زیاد کنیم از $F_{s\,max}$ بیشتر می‌شود و حرکت لغزشی می‌شود.

مقدار x هم در لغزش نیز تأثیر دارد.

PAPCO

کار - انرژی

$$U_{nc} = \Delta T + \Delta V_e + \Delta V_g$$

برای اجسام صلب هم از رابطهٔ روبرو استفاده می‌شود

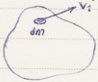
$$U_{nc} = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

- تعریف تمام کمیت‌ها که در رابطهٔ روبرو برای اجسام صلب هم همان است.

$$\Delta T = T_2 - T_1 \qquad \Delta V_e = \frac{1}{2} k (x_2^2 - x_1^2) \qquad \Delta V_g = mg(\bar{h}_2 - \bar{h}_1)$$

که میزان تغییر طول نسبت به طول آزاد

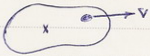
« چون جابجایی نقاط مختلف جسم صلب با هم متفاوت جابجا می‌شوند پس ما میزان تغییر ارتفاع را برای مرکز جرم محاسبه می‌کنیم. »



$$dT = \frac{1}{2} dm (v_i)^2 \Rightarrow T = \int dT$$

در حالت اول برای بدست آوردن T

- فرض شود حرکت انتقالی است.



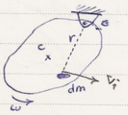
$$dT = \frac{1}{2} dm (v)^2 = \frac{1}{2} dm (\bar{v})^2$$

$$T = \int dT = \int \frac{1}{2} dm (\bar{v})^2$$

$$T = \frac{1}{2} (\bar{v})^2 \int_m dm \Rightarrow T = \frac{1}{2} m \bar{v}^2$$

بدون هیچ تفاوتی همان رابطه

- حالت دوم حرکت دورانی خالص باشد

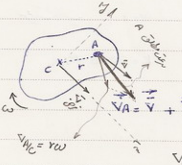


$$dT = \frac{1}{2}\,dm\,v_i^2$$

$$dT = \frac{1}{2}\,dm\,(r\omega)^2 \qquad T = \int dT = \int \frac{1}{2}\,dm\,(r^2\omega^2)$$

$$T = \frac{1}{2}\omega^2 \underbrace{\int r^2\,dm}_{\text{ممان اینرسی حول o}} \Rightarrow T = \frac{1}{2} I_o\,\omega^2$$

- در حالت سوم جسم حرکت کلی دارد



$$dT = \frac{1}{2}\,dm\,v^2$$

$$\vec{v}_A = \vec{\bar{v}} + \vec{v}_{A/C}$$

*زاویه بین $\bar{v}$ و $r\omega$ را θ می‌گیریم.

$$v_A^2 = \bar{v}^2 + (r\omega)^2 - 2\bar{v}(r\omega)\cos(\pi-\theta)$$

$$v_A^2 = \bar{v}^2 + (r\omega)^2 + 2\bar{v}(r\omega)\cos\theta$$

$$dT = \frac{1}{2}\,dm\left[\bar{v}^2 + r^2\omega^2 + 2\bar{v}(r\omega)\cos\theta\right]$$

$$T = \int \frac{1}{2}\bar{v}^2\,dm + \int \frac{1}{2} r^2\omega^2\,dm + \int \bar{v} r\omega\cos\theta\,dm$$

$$T = \frac{1}{2}m\bar{v}^2 + \frac{1}{2}\underbrace{\bar{I}}_{\text{حول مرکز جرم}}\omega^2 + \bar{v}\omega\int r\cos\theta\,dm$$

$$\int y\,dm = \bar{y}\,dm$$

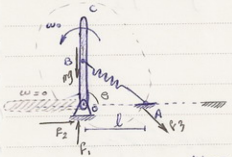
✓ چون مبدا مختصات را روی مرکز جرم گرفتیم پس $\bar{x}$ و $\bar{y} = 0$ ✓

$$T = \frac{1}{2}m\bar{v}^2 + \frac{1}{2}\bar{I}\omega^2$$

$$T = \frac{1}{2}m\bar{v}^2 \qquad T = \frac{1}{2}I_o\omega^2 \qquad T = \frac{1}{2}m\bar{v}^2 + \frac{1}{2}\bar{I}\omega^2$$

- اگر نتوانستیم تشخیص دهیم که چه نوع حرکتی داریم مجبوریم دو حرکت را که در نظر بگیریم اگر تعداد مجهولات زیاد شد باید از سینماتیک استفاده کرد.

مثال اول:



$2l, m$ $\quad m = 30\ kg$

$l = 1.2m$

$\omega_0 = ?$ سرعت اولیه

$\omega = 0$ در حالت افقی

$\Delta x = 0$ در وضع افقی

$k = 3000\ N/m$

$$\begin{cases} 1: \theta = 90^\circ \\ 2: \theta = 180^\circ \end{cases}$$

$$U_{nc} = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e \quad ①$$

$$U_{nc} = U_{F_1, F_2} + U_{F_3} = 0 \quad ②$$ نقطه اثر نیروها ثابت است

$$\Delta T = T_2 - T_1 = -\frac{1}{2} I_o \omega_0^2 \Rightarrow \Delta T = -\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3} m l^2\right)\omega_0^2 = -\frac{2}{3} m l^2 \omega_0^2 \quad ③$$

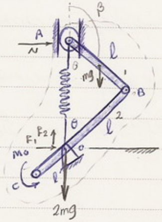
$$\Delta V_g = mg(\bar{h}_2 - \bar{h}_1) = mg(0 - l) = -mgl \quad ④$$

$$\Delta V_e = \frac{1}{2} k (x_2^2 - x_1^2) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2l - l\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \Delta V_e = \frac{k}{2} l^2 (2 - \sqrt{2})^2 \quad ⑤$$

$$0 = -\frac{2}{3} m l^2 \omega_0^2 - mgl + \frac{k}{2} l^2 (2 - \sqrt{2})^2 \Rightarrow \boxed{\omega_0 = 3.67} \ rad/s$$

Subject:

Year. Month. Date. 99



مثال دوم

$M_o = 12 \ N.m$

$\theta = 45^\circ$ ساکن   «صفحه ۳ تمرین»

$K = 140 \ N/m$ $\Delta x_1 = +150 \ mm$ افزایش طول

$m_{AB} = 3 \ kg$ $l = 0.25 m$

$\theta = 0 \Rightarrow \omega_1, \omega_2 = ?$

$$\begin{cases} 1: \theta = 45^\circ \\ 2: \theta = 0^\circ \end{cases} \qquad U_{nc} = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e \quad ①$$

$$U_{nc} = \underbrace{U_N}_{0} + \underbrace{U_{F_1, F_2}}_{0} + U_{M_o} = \int \vec{M} \cdot \vec{d\theta} = \int M d\theta$$

0 (همیشه بر راستای حرکت عمودی است)

0 نقطه اثر صفر

چون هر دو جهت یکی است کار مثبت خواهد بود

* اگر بخواهیم حدود را قرار دهیم از 0 تا $\frac{\pi}{4}$ در نظر می‌گیریم چون باید نتیجه مثبت باشد

$$U_{M_o} = \int M d\theta = M_o\left(\frac{\pi}{4}\right) = \boxed{3\pi \ J}$$

$$\Delta V_g = \Delta V_g)_1 + \cancel{\Delta V_g)_2}^{0} = mg(\bar{h}_2 - \bar{h}_1)_1 = mg\left(\frac{3}{2}l - \frac{3}{2}l\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \frac{3}{2}mgl\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\left(\left(\bar{h}_1 = \frac{3}{2} l \cos\theta = \frac{3}{2} l \cos 45^\circ \ , \ \bar{h}_2 = \frac{3}{2} l \right)\right) \qquad = \boxed{3.23 \ J}$$

$$\Delta V_e = \frac{1}{2}K(x_2^2 - x_1^2) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 150 \ mm = 0.15 \ m \\ x_2 = \underbrace{(2l - 2l\cos 45)}_{\text{تغییر طول نسبت به حالت اول}} + 0.15 = 0.296 \ m \end{cases}$$

$$\Delta V_e = \frac{1}{2}(140)\left[(0.296)^2 - (0.15)^2\right] = \boxed{4.58 \ J}$$

$$\Delta T = T_2 - \underbrace{\cancel{T_1}}_{0} = T_2)_1 + T_2)_2 = \frac{1}{2}m\bar{v}_1^2 + \frac{1}{2}\bar{I}_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}I_o\omega_2^2$$

0 sys ساکن

$$\bar{I}_1 = \frac{1}{12}ml^2 =$$

$$I_o)_2 = \frac{1}{12}(2m)(2l)^2 = \frac{2}{3}ml^2$$

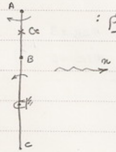
100

$\theta+\beta=180 \Rightarrow \dot{\theta}=-\dot{\beta} \Rightarrow \omega_1=-\omega_2=\omega$ سه مجهول داریم از سینماتیک مسأله استفاده کنیم :

* برای میله‌ی اول در لحظه‌ی $\theta=0$ چون A در یک لحظه مرکز دوران می‌شود پس می‌توانستیم از $\frac{1}{2} I_A \omega^2$ استفاده کنیم

* همچنین اگر x_A = ... معادله‌ی A تا لحظه‌ی تماس در نظر بگیریم :

$x_A = 2l\cos\theta \Rightarrow \dot{x}_A = -2l\dot{\theta}\sin\theta$



$\vec{V}_A = \vec{V}_G + \vec{V}_{A/G}$

$0 = \vec{V}_G + \frac{l}{2}\omega\vec{i}$

$\Rightarrow \vec{V}_G = \vec{V}_1 = \frac{l}{2}\omega$

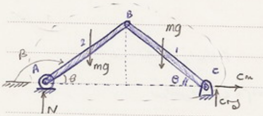
$\vec{V}_G = \vec{V}_B + \vec{V}_{G/B} \Rightarrow \vec{V}_G = -l\omega\vec{i} + \frac{l}{2}\omega\vec{i} = -\frac{l}{2}\omega\vec{i}$ *

$\Rightarrow \omega_1 = \omega_2 = \omega = 4.15 \ \frac{rad}{s}$

تمرین : 111 - 103 - 97 - 93 - 88 - 82

تمرین : ۱۵۲ - ۱۴۵ - ۱۴۱ - ۱۲۹ - ۱۲۲ - ۱۱۶

مثال ۱)



هر میله l و m ، حرکت در صفحه‌ی قائم

شروع حرکت از سکون $\theta=\theta_0$

در لحظه برخورد به زمین $v_B = ?$

$\omega_1 , \omega_2 = ?$

$U_{nc} = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e \qquad \Delta V_e = 0$

$\begin{cases} 1: \theta = \theta_0 \\ 2: \theta = 0 \end{cases} \qquad U_{nc} = U_N + U_{C_x, C_y} = 0$

$\Delta V_g = \Delta V_g)_1 + \Delta V_g)_2 = mg(\bar{h}_2 - \bar{h}_1)\big|_1 + mg(\bar{h}_2 - \bar{h}_1)\big|_2$

$\begin{cases} \bar{h}_1 = \frac{l}{2} \sin\theta_0 \\ \bar{h}_2 = 0 \end{cases}$

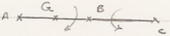
مثلث متساوی‌الساقین است پس مرکز جرم‌ها به یک مقدار بالا و پایین می‌روند

$\Delta V_g = 2(mg)(0 - \frac{l}{2}\sin\theta_0) \Rightarrow \Delta V_g = -mgl\sin\theta_0$

$\Delta T = T_2 - \underset{0}{T_1} = T_2)_1 + T_2)_2$

$= \frac{1}{2} I_C \omega_1^2 + \frac{1}{2} m\bar{v}_2^2 + \frac{1}{2}\bar{I}_2 \omega_2^2$

$\theta + \beta = 180 \Rightarrow \dot{\theta} = -\dot{\beta} \Rightarrow \omega_1 = -\omega_2$



$\Rightarrow \Delta T = \frac{1}{2} I_C \omega^2 + \frac{1}{2} m\bar{v}_2^2 + \frac{1}{2}\bar{I}_2 \omega^2$

$\vec{v}_G = \vec{v}_B + \vec{v}_{G/B} \Rightarrow \vec{v}_G = l\omega\vec{j} - \frac{l}{2}\omega\vec{j} = \frac{l}{2}\omega\vec{j} = \bar{v}_2$

$\Delta T = \frac{1}{2}(\frac{1}{3}ml^2)\omega^2 + \frac{1}{2}m(\frac{l^2}{4}\omega^2) + \frac{1}{2}(\frac{1}{12}ml^2)\omega^2 = ml^2\omega^2(\frac{1}{3})$

$0 = \frac{1}{3}ml^2\omega^2 - mgl\sin\theta_0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{g\sin\theta_0}{l/3} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g\sin\theta_0}{l}}$

$v_B = l\omega = \sqrt{3gl\sin\theta_0}$

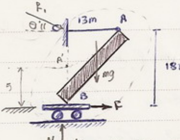
$x_A = 2l\cos\theta$

$v_A = \dot{x}_A = -2l\dot{\theta}\sin\theta$

دقت کنید: در $\theta=0$ ، A تغییر جهت می‌دهد

بنابراین ماکزیمم دارد A و ...

مثال ۲



$\mu = 0$

بعد از از بین رفتن نیروی F

$V_A = ?$ در وضعیتی که CA قائم است

System : مجموعه‌ی کابل، تیر و ارابه

$U_{nc} = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$

پس از شروع حرکت نیروی F را نداریم پس در محاسبات وارد نمی‌شود ؛ «وزن کابل و ارابه صرف نظر شده است»

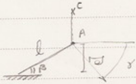
$U_{nc} = U_F + U_N = 0 \;*\qquad \Delta V_e = 0 \;*$

$\Delta V_g = mg(\bar{h}_2 - \bar{h}_1) \Rightarrow \begin{cases} \bar{h}_1 = 9 \\ \bar{h}_2 = 2.5 \end{cases} \qquad \Delta V_g = mg(2.5 - 9) = -6.5mg$

$\Delta T = T_2 - \underset{0}{T_1} = \frac{1}{2}m\bar{v}^2 + \frac{1}{2}\bar{I}\omega^2 \Rightarrow 0 = \frac{1}{2}m\bar{v}^2 + \frac{1}{2}\bar{I}\omega^2 - 6.5mg$

«ارتفاع $= l\sin\beta \Rightarrow$ ارتفاع$\dot{} = l\dot{\beta}\cos\beta \Rightarrow V_A)_{\text{ارتفاع}} = l\dot{\beta}\cos\beta = 0 \Rightarrow \dot{\beta} = 0$»

پس در این لحظه حرکت میله انتقالی می‌شود $V_A = V_G = V_B$



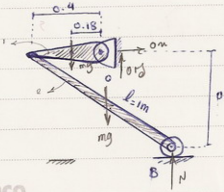
$\Rightarrow \omega = 0 \Rightarrow \bar{v} = V_A = \sqrt{13g} = 11.3\ m/s \qquad \sqrt{2gh} = V_G = \bar{v} \quad h = 9 - 2.5 = 7.5$

یا از این روش :

$\vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{V}_{A/B} \Rightarrow (AC)(\omega_{AC})\vec{i} = V_B\vec{i} + (AB)(\omega)(-\cos\gamma\,\vec{i} - \sin\gamma\,\vec{j})$

$0 = -AB.\omega.\sin\gamma \Rightarrow \omega = 0$

مثال ۳



$m_{OA} = 18\,kg$

$k_O = 0.22\,m$ شعاع ژیراسیون

$m_{AB} = 12\,kg$

وضع قبل ساکن

OA عمودی $\rightarrow V_B = ?$

$\omega_1 , \omega_2 = ?$

Subject:

Year. Month. Date. 103

$U_{nc} = U_N + U_{O_m, O_y} = 0 \quad * \quad \Delta V_e = 0$

$\Delta V_g = \Delta V_g)_1 + \Delta V_g)_2 = m_1 g (\bar{h}_2 - \bar{h}_1)\big|_1 + m_2 g (\bar{h}_2 - \bar{h}_1)\big|_2$

$① \begin{cases} \bar{h}_1 = 0.8 \\ \bar{h}_2 = 0.62 \end{cases} m \qquad ② \begin{cases} \bar{h}_1 = 0.4 \\ \bar{h}_2 = 0.2 \end{cases} m$

$\Delta V_g = 18g(0.62 - 0.8) + 12g(0.2 - 0.4) = \dots$

$\Delta T = T_2 - \underset{0}{T_1} = T_2)_1 + T_2)_2 = \frac{1}{2} I_o \omega^2 + \frac{1}{2} m_2 \bar{v}_2^2 + \frac{1}{2} \bar{I}_2 \underset{0}{\omega^2}$

$\omega = 0$ ⇐ یکی تغییر جهت میله – روش تعادل قبل – روش حرکت نسبی

$v_A = l'\omega$

$\Delta T = \frac{1}{2} I_o \omega^2 + \frac{1}{2} m_2 (l'\omega)^2$

$I_o = m_{OA} \cdot k_o^2 \Rightarrow \omega = 5.75\ rad/s$

$v_A = v_B = 0.4\omega \Rightarrow v_B = 2.3\ m/s$

مثال ۳

a ضلع مکعب = 0.25 m

m جرم مکعب

$\mu = 0$

$V_o = ?$

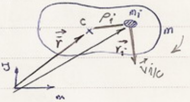
$\omega = ?$

در لحظه برخورد C به زمین

ضربه و اندازه حرکت در اجسام صلب

$$\vec{G} = m\vec{v} \qquad \vec{H}_o = \vec{r} \times m\vec{v}$$

$$\vec{G}_i = m_i \vec{v}_i$$



$$\vec{G} = \sum \vec{G}_i = \sum m_i \vec{v}_i = \sum m_i \frac{d}{dt}(\vec{r}_i)$$

$$\bar{r} = \int \vec{r}\,dm \Big/ m$$

$$G = \sum \frac{d}{dt}(m_i \vec{r}_i) = \frac{d}{dt}\sum (m_i \vec{r}_i)$$

$$G = \frac{d}{dt}(m\vec{\bar{r}}) \Rightarrow \boxed{\vec{G} = m\vec{\bar{v}}}$$

$$\sum \vec{F} = m\vec{\bar{a}} = m\left(\frac{d}{dt}\vec{\bar{v}}\right) = \frac{d}{dt}(m\vec{\bar{v}}) \Rightarrow \sum \vec{F} = \frac{d\vec{G}}{dt} = \dot{\vec{G}}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{F}\,dt = \int_{G_1}^{G_2} dG \qquad \int_{t_1}^{t_2} \sum F\,dt = \vec{G}_2 - \vec{G}_1$$

قانون ضربه و مومنتم خطی

$$\int \sum F_x\,dt = G_{2x} - G_{1x}$$

$$\text{if} \quad \sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \dot{G} = 0 \Rightarrow \vec{G} = cte$$

حال در مورد مومنتم زاویه ای

$$\vec{H} = \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \qquad \vec{\bar{H}}_i = \vec{\rho}_i \times m_i \vec{v}_i$$

مومنتم حول مرکز جرم

$$\vec{v}_i = \vec{\bar{v}} + \vec{v}_{i/c} \Rightarrow \vec{\bar{H}}_i = \vec{\rho}_i \times m_i(\vec{\bar{v}}_i + \vec{v}_{i/c})$$

$$\vec{\bar{H}} = \sum \vec{\bar{H}}_i = \sum \vec{\rho}_i \times m_i(\vec{\bar{v}}_i + \vec{v}_{i/c})$$

$$\vec{\bar{H}} = \underbrace{\sum \vec{\rho_i} \times m_i \vec{\bar{v}}}_{A} + \underbrace{\sum \vec{\rho_i} \times m_i \vec{v}_{i/C}}_{B}$$

$$A: \sum m_i \rho_i \times \vec{\bar{v}} = -\sum \vec{\bar{v}} \times m_i \rho_i = -\vec{\bar{v}} \times \sum m_i \vec{\rho_i}$$

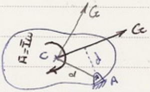
$$A: -\vec{\bar{v}} \times m \vec{\bar{\rho}} = 0 \qquad \bar{\rho} = 0$$

فاصله‌ی مرکز جرم تا مرکز جسم : $\bar{\rho}$

$$B: \quad v_{i/C} = \rho_i \omega \quad \sum m_i \rho_i (\rho_i \omega)\, \vec{k} \Rightarrow \vec{\bar{H}} = \omega \sum (m_i \rho_i^2)\, \vec{k}$$

$$\bar{H} = \bar{I}\omega$$

جهتش عمود بر صفحه‌ی حرکت است



می‌خواهیم H را حول مرکز دوران بدست آوریم

$$H_A = \bar{H} + dG = \bar{I}\omega + d(m\bar{v})$$

$$H_A = \bar{I}\omega + m\bar{v}d \rightsquigarrow$$

اگر A نقطه‌ای دلخواه باشد

اگر A مرکز دوران باشد :

$$H_A = \bar{I}\omega + m\bar{v}d = \bar{I}\omega + md^2(\omega)$$

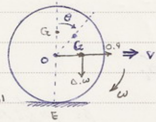
$$H_O = \omega(\bar{I} + md^2) \qquad H_O = I_O\,\omega$$

$$\sum \bar{M} = \frac{d}{dt}\bar{H} = \dot{\bar{H}}$$

$$\int \sum \vec{M}\, dt = \vec{H_2} - \vec{H_1}$$

قانون ضربه‌ی ممنتم زاویه‌ای

• مثال ۱ : بدون لغزش



استوانه

$V = 0.9\ m/s$

$m = 8\ kg$

$OG = \Delta = 75\ mm$ $\qquad R = 225\ mm$

$k_o = 150\ mm$ $\qquad H_o = ?\ \begin{cases} \theta = 0^\circ \\ \theta = 90^\circ \end{cases}$

$H_o = \bar{I}\omega + m\bar{v}d$ " تکیه‌ی o نقطه‌ای دلخواه است "

$\overset{\theta=0}{\Rightarrow} \quad I_o = \bar{I} + md^2 \Rightarrow mk_o^2 = \bar{I} + m\Delta^2$ " $I_o = \frac{1}{2}mr^2$ " استوانه‌ی توپر "

$\bar{I} = m(k_o^2 - \Delta^2) = 8[(0.15)^2 - (0.075)^2] = 0.135\ kg.m^2$

$V_o = R\omega \Rightarrow \omega = \frac{V_o}{R} = \frac{0.9}{0.225} = 4\ \frac{rad}{s}$

برای $\theta = 0$:

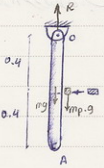
$+m\bar{v}d = m(EG.\omega)(\Delta) \Rightarrow m\bar{v}d = 8(0.3)(4)(0.075) = 0.72$

$H_o = (0.135)(4) + 0.72 \Rightarrow H_o = 1.26$ " $\frac{kg.m^2}{s}$ "

برای $\theta = 90^\circ$:

$m\bar{v}d = 8(\Delta\omega)(\Delta) = 8(0.075)^2(4) \Rightarrow m\bar{v}d = 0.72\ \frac{kg.m^2}{s}$

مثال ۲ :



$m_{OA} = 10\ kg$ $\qquad$ بلافاصله بعد از برخورد سرعت زاویه‌ای میله = ؟

$m_p = 30\ gr$

$V_p = 500\ m/s$ $\qquad$ از گشتاور نیروی وزن گلوله صرف‌نظر می‌کنیم

$\sum M_o = 0$ $\qquad$ در یک لحظه قبل از برخورد تا یک لحظه پس از برخورد

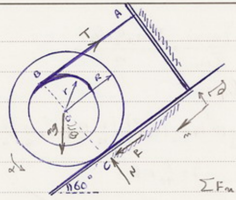
$H_o \simeq$ ثابت

$H_{o\ \text{ق از ب}} = H_{o\ \text{ب از ب}} \Rightarrow (H_{\text{گلوله}} + H_{\text{میله}})_{\text{ق}} = (H_{\text{گلوله}} + H_{\text{میله}})_{\text{ب}}$

$(m_p.V_1.\frac{l}{2}) + (I_o \overset{0}{\cancel{\omega_1}}) = (m_p.V_2.\frac{l}{2}) + (I_o\omega_2)$

$(0.03)(500)(0.4) + 0 = (0.03)(0.4.\omega)(0.4) + \frac{1}{3}(10)(0.8)^2\omega \Rightarrow 6 = 48\times10^{-4}\omega + 6.4/3\ \omega$

$\Rightarrow \omega = 2.81\ rad/s$



مثال ۱ :

$m = 30\ kg$

$\bar{k} = 450\ mm$ وضع فعلی ساکن

$\mu_s = 0.4 \quad \mu_k = 0.3$

$\bar{a} =$ در شروع حرکت

$\begin{cases} r = 0.3 \\ R = 0.6 \end{cases} m$

$$\Sigma F_x = m\bar{a}_x \Rightarrow \overset{?}{F} - \overset{?}{T} + mg\sin\theta = m\overset{?}{\bar{a}}_x \quad ①$$

$$\Sigma F_y = m\bar{a}_y \Rightarrow \overset{?}{N} - mg\cos\theta = m\bar{a}_y \Rightarrow N = mg\cos\theta$$

$$\Sigma \bar{M} = \bar{I}\alpha \Rightarrow -FR - Tr = m\bar{k}^2\overset{?}{\alpha} \quad ②$$

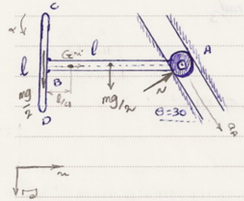
«حرکت در دو جهت دارای حرکت لغزشی است چون اگر لغزش باشد دو مرکز آنی داریم C و B پس با استفاده از سرعت نسبی ω هم نداریم و حرکتی نداریم»

$$F = \mu_k \cdot N = \mu_k \cdot mg\cos\theta \quad ③$$

حال باید از معادلات سینتیک استفاده کنیم :

چون نقطه B مرکز آنی شتاب است : $\bar{a}_x = r\alpha$

$$\begin{cases} \mu_k mg\cos\theta - T + mg\sin\theta = m\bar{a}_x \\ -(\mu_k mg\cos\theta)R - Tr = m\bar{k}^2 \bar{a}_x / r \end{cases} \Rightarrow \bar{a}_x = 1.25\ m/s^2$$



مثال ۲ :

m جرم میله

حرکت در صفحه قائم - وضع فعلی ساکن

$\mu = 0$ جرم غلطک ناچیز

$a_A = ?$ در شروع حرکت

Subject:
Year. Month. Date. 108

$$\sum F_x = m\bar{a}_x \Rightarrow \overset{?}{N}\sin\theta = m\overset{?}{\bar{a}}_x \quad (1)$$

$$\sum F_y = m\bar{a}_y \Rightarrow mg - N\cos\theta = m\overset{?}{\bar{a}}_y \quad (2)$$

$$\sum \bar{M} = \bar{I}\alpha$$

$$\frac{mg}{2}\left(\frac{l}{4}\right) - \frac{mg}{2}\left(\frac{l}{4}\right) + N\cos\theta\left(\frac{3}{4}l\right) = \bar{I}\overset{?}{\alpha}$$

$$\bar{x}' = \frac{\sum m_i x_i'}{\sum m_i} = \frac{\frac{m}{2}(0) + \frac{m}{2}(l_2)}{m}$$

$$\bar{x}' = l/4$$

$$\bar{I} = \left[\frac{1}{12}\frac{m}{2}(l^2) + m/_2 (l/_4)^2\right] + \left[\frac{1}{12}\left(\frac{m}{2}\right)(l)^2 + \frac{m}{2}\left(\frac{l}{4}\right)^2\right]$$

$$\bar{I} = \frac{7}{48}ml^2$$

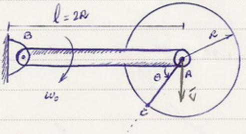
حال در سینماتیک مسئله رسته اولیه می‌شود : چون اصطکاک نداریم پس غلطک حرکت چرخشی دارد نه غلتشی

$$\vec{a}_G = \vec{a}_A + \vec{a}_{G/A} \Rightarrow \vec{a}_G = a_A(\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}) + \left(\tfrac{3}{4}l\alpha\right)\vec{j}$$

, $R\omega^2 = 0 \rightarrow \omega = 0$ چون

$$\begin{cases} \bar{a}_x = a_A\cos\theta \\ \bar{a}_y = a_A\sin\theta + \frac{3}{4}l\alpha \end{cases} \Rightarrow \boxed{a_A = \frac{149}{109}}\ m/s^2$$

مثال ۳ :



$R = 0.2m$

$m_{\text{دیسک}} = 25\,kg \qquad \omega_0 = 4\ rad/s$

a: دیسک به میله جوش شده است

b: دیسک در A پین شده و در انتقال منحنی الخط دارد

c: $\dot{\theta} = 8\ rad/s$

$H_B = ?$ در هر ۳ حالت

$$\begin{cases} \bar{H} = \bar{I}\omega \\ H_O = I_O\,\omega \\ H_A = \bar{I}\omega + m\bar{v}d \end{cases}$$

$* \ H_B = \bar{I}\omega + m\bar{v}d$

$$\bar{I} = \frac{1}{2}mR^2 = \frac{1}{2}(25)(0.2)^2 = 0.5\ kg.m^2$$

$m = 25\,kg \quad , \quad \bar{v} = l\omega_0 = 0.4(4) = 1.6\ m/s$

$a: \omega_D = \omega_0 = 4\ \frac{rad}{s} \qquad d = l = 0.4 \qquad H_B = (0.5)(4) + 25(1.6)(0.4) = 18\ \frac{kg.m^2}{s}$

PAPCO

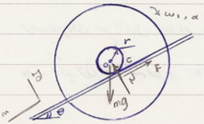
b: $\omega = 0$ $\quad d = l = 0.4$ $\quad H_B = 0 + 25(1.6)(0.4) = 16 \quad kg\,m^2/s$

بدون دوران / حرکت انتقالی / ثابت

c: $\underset{D}{\omega} = \omega_0 - \dot{\theta} = 4 - 8 = -4 \ \dfrac{rad}{s}$ $\quad d = 0.4m$

$$H_B = (0.5)(-4) + (25)(1.6)(0.4) \Rightarrow H_B = -2 + 16 = 14 \ \frac{kg.m^2}{s}$$

مثال ۴ :



$r = 75mm \quad \theta = 15°$

حرکت بدون لغزش

$t = 0 \rightarrow \omega = 4 \ rad/s \ (cw)$

$t = 16 \ (s) \rightarrow \omega = ?$ $\quad \bar{K} = 200 \ mm$

$\sum F_x = m\bar{a}_x \Rightarrow -\overset{?}{F} + mg\sin\theta = m\overset{?}{\bar{a}_x}$ ①

$\sum F_y = m\bar{a}_y \Rightarrow N - mg\cos\theta = m(0)$ ② $\Rightarrow N = mg\cos\theta$

$\sum \bar{M}_O = \bar{I}\alpha \Rightarrow -F(r) = m\bar{k}^2\overset{?}{\alpha}$ ③

$\bar{a}_x = -r\alpha$ = حرکت غلتشی $\Rightarrow \begin{cases} -F + mg\sin\theta = -mr\alpha \\ -Fr = m\bar{k}^2\alpha \end{cases}$

$$\frac{m\bar{k}^2\alpha}{r} + mg\sin\theta = -mr\alpha$$

$$\Rightarrow m\alpha\left(r + \frac{k^2}{r}\right) = -mg\sin\theta \Rightarrow \alpha = \frac{-g\sin\theta}{r + k^2/r}$$ مقدار ثابت است

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \int_4^{\omega} d\omega = \alpha \int_0^{16} dt \Rightarrow \omega - 4 = -\frac{g\sin\theta}{r + \bar{k}^2/r}(16)$$

$$\Rightarrow \omega = -62.7 \ rad/s$$

فصل هفتم

آشنایی با دینامیک سه بعدی اجسام صلب

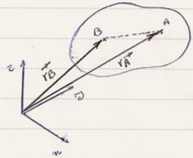
- سینماتیک جسم صلب به پیدا کردن ω و α برای جسم و یا v و a برای نقاط از جسم صلب گفته می‌شود

- انواع حالت‌های حرکت جسم صلب در سه بعد: انتقال، چرخش حول محور ثابت، حرکت کلی در صفحات موازی، چرخش حول نقطه ثابت، حرکت کلی

سرعت زاویه‌ای میله‌ی اول ω_1 است و سرعت زاویه‌ای میله دوم از جمع برداری $\vec{\omega}_1+\vec{\omega}_2$ بدست می‌آید چون ω_1 میله اول در ω_2 میله‌ی دوم تاثیر دارد و همچنین $\vec{\omega}_3=\vec{\omega}_1+\vec{\omega}_2+\vec{\omega}_3$

انتقالی

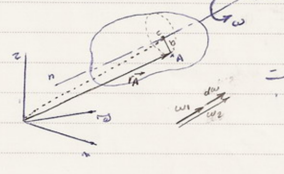
نقاط مختلف جسم صلب مسیرهای یکسان طی می‌کنند.



مثلاً اگر A بر روی دایره‌ای حرکت می‌کند B نیز بر روی دایره‌ای با همان شعاع حرکت می‌کند.

$$\vec{v}_A=\vec{v}_B \qquad \vec{\omega}=\vec{\alpha}=0$$
$$\vec{a}_A=\vec{a}_B$$

دوران حول محور ثابت



" n-n محور ثابت " هر نقطه روی این محور سرعت صفر دارند.

سرعت زاویه‌ای در امتداد محور دوران - راستای α همان راستای ω است

$$\omega=\omega\,\vec{e}_{nn}$$

$$\alpha=\frac{d\vec{\omega}}{dt}=\pm\dot{\omega}\,\vec{e}_{nn}$$

Subject:
Year. Month. Date. ۱۱۱

$\vec{V}_A = \vec{\omega} \times \vec{r} = \frac{dr}{dt}$

برای هر حرکتی چه دو بعدی چه سه بعدی صادق است

به شرطی که $\vec{r}$ نسبت به نقطه‌ای ثابت بچرخد

$\vec{r} = \vec{OC} + \vec{CA}$

$$\Rightarrow \vec{V}_A = \vec{\omega} \times (\vec{OC} + \vec{b}) \Rightarrow \vec{V}_A = \vec{\omega} \times \vec{b}$$

r بردار وضعیت نسبت به نقطه‌ای ثابت است

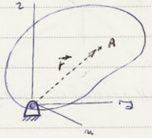
$$\vec{a}_A = \frac{d\vec{V}_A}{dt} = \underbrace{\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}}_{b\alpha} + \underbrace{\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})}_{b\omega^2}$$

ثابت $= \frac{dr}{dt}$

حرکت کلی در صفحات موازی

ناشی از حرکت کلی در فضا تبدیل (؟) می‌باشد

چرخش حول نقطه ثابت



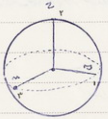
- دستگاه ثابت شبیه مفصل -

- در لحظات مختلف جهت ω در حال تغییر است.

- در هر لحظه، محوری در جسم حول آن می‌چرخد که محور آنی دوران گویند

- تمام نقاط در آن لحظه روی محور دوران باشند سرعت صفر دارند.

- اگر برای کمیت θ، $d\theta$ در نظر بگیریم می‌توان آنها را به صورت برداری جمع کرد. θ را نمی‌توان جمع برداری کرد ولی $d\theta$ را می‌توان.



$\theta_x = 90^\circ \Longrightarrow \theta_y = 90^\circ$

$\theta_y = 90^\circ \Longrightarrow \theta_x = 90^\circ$

نمی‌توان جمع برداری کرد

مثال کتاب

Subject:

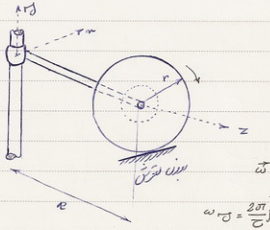
Year. Month. Date. 113

$$\vec{V}_A = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{a}_A = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

" دوران حول نقطه‌ی ثابت فقط یک نقطه سرعت صفر دارد ولی دوران حول محور ثابت نقاطی که روی این محور قرار دارند سرعت صفر دارند "

مثال:



زمان یک دور کامل حول $y = \tau$

$\alpha = ?$

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_z + \vec{\omega}_y$$

$$\omega_y = \frac{2\pi}{\tau}\vec{j} = \frac{d\theta}{dt} \qquad \omega_z = -\frac{2\pi}{\tau}\left(\frac{R}{r}\right)\vec{k}$$

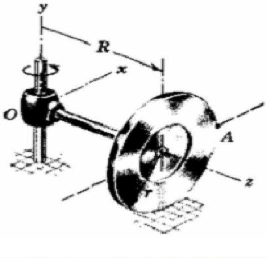
$$2\pi r \omega_z = 2\pi R \omega_y \Rightarrow \omega_z = \frac{R}{r}\omega_y = \frac{R}{r} \cdot \frac{2\pi}{\tau}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau}\vec{j} - \frac{R}{r}\frac{2\pi}{\tau}\vec{k}$$

$$|\omega| = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 + \left(\frac{R}{r}\frac{2\pi}{\tau}\right)^2} \quad \text{ثابت} \Rightarrow \vec{\alpha} = \vec{\Omega} \times \vec{\omega}$$

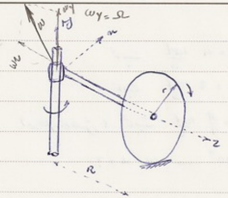
$$\vec{\alpha} = \left(\frac{2\pi}{\tau}\vec{j}\right) \times \left[\frac{2\pi}{\tau}\vec{j} - \frac{R}{r}\frac{2\pi}{\tau}\vec{k}\right] \Rightarrow \vec{\alpha} = -\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2\left(\frac{R}{r}\right)\vec{i}$$

$$\alpha = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \dot{\omega}_y \vec{j} + \omega_y \underbrace{\left(\frac{d\vec{j}}{dt}\right)}_{\vec{\omega}_y \times \vec{j}} - \dot{\omega}_z \vec{k} - \omega_z \underbrace{\frac{d\vec{k}}{dt}}_{\vec{\omega}_y \times \vec{k}} \qquad " \frac{d\vec{e}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{e} "$$

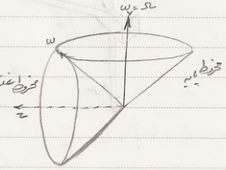


7/16 The wheel rolls without slipping in a circular arc of radius R and makes one complete turn about the vertical y-axis with constant speed in time τ. Determine the vector expression for the angular acceleration $\boldsymbol{\alpha}$ of the wheel and construct the space and body cones.

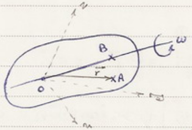
Ans. $\boldsymbol{\alpha} = -\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 \frac{R}{r}\mathbf{i}$



مخروط‌های پایه و غلتان را رسم کنید



مثال :



$\omega = 14 \ rad/s$ (ثابت)

دوران حول محور ثابت

O: مبدأ مختصات

$B\begin{vmatrix}0.2\\0.3\\0.6\end{vmatrix}$ $A\begin{vmatrix}0.2\\0.2\\0.1\end{vmatrix}$ $V_A \,,\, a_A = ?$

$\vec V_A = \vec\omega \times \vec r$ $\quad \vec a_A = \dot{\vec\omega}\times\vec r + \vec\omega\times(\vec\omega\times\vec r)$

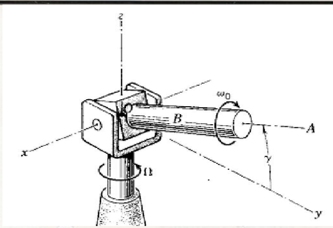
$\omega = 14\ \vec e_{OB}$ $\quad \vec e_{OB} = \dfrac{\vec{OB}}{|OB|} = \dfrac{0.2\vec i + 0.3\vec j + 0.6\vec k}{\sqrt{(0.2)^2+(0.3)^2+(0.6)^2}} = \dfrac{1}{0.7}(0.2\vec i + 0.3\vec j + 0.6\vec k)$

$\vec\omega = 4\vec i + 6\vec j + 12\vec k$

$\dot\omega = \dfrac{d\vec\omega}{dt} = 0$ $\quad \vec r = \vec{OA} = 0.2\vec i + 0.2\vec j + 0.1\vec k$

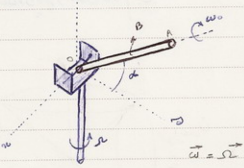
$$V_A = \begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ 4 & 6 & 12\\ 0.2 & 0.2 & 0.1\end{vmatrix} = -1.8\vec i + 2\vec j - 0.4\vec k \rightarrow V_A = 2.72\ m/s$$

$$\vec a = \begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ 4 & 6 & 12\\ -1.8 & 2 & -0.4\end{vmatrix} = -26.4\vec i - 20\vec j + 18.8\vec k \Rightarrow |\vec a| = 38.1\ m/s^2$$



7/6 The vertical shaft and attached clevis rotate about the z-axis at the constant rate $\Omega = 4$ rad/s. Simultaneously the shaft B revolves about its axis OA at the constant rate $\omega_0 = 3$ rad/s, and the angle γ is decreasing at the constant rate of $\pi/4$ rad/s. Determine the angular velocity $\boldsymbol{\omega}$ and the magnitude of the angular acceleration $\boldsymbol{\alpha}$ of shaft B when $\gamma = 30°$. The x-y-z axes are attached to the clevis and rotate with it.

Ans. $\boldsymbol{\omega} = -0.785\mathbf{i} - 2.598\mathbf{j} + 2.5\mathbf{k}$ rad/s
$\alpha = 11.44$ rad/s²



$\omega_0 = 3\ \frac{rad}{s}$ ثابت

$\dot{\gamma} = \frac{\pi}{4}\ \frac{rad}{s}$ ثابت (در حال کاهش)

$\gamma = 30° \longrightarrow \omega, \alpha = ?$

$$\vec{\omega} = \vec{\Omega} + \vec{\omega}_0 + \vec{\dot{\gamma}}$$

$$\vec{\omega} = \Omega \vec{k} - \dot{\gamma}\vec{i} + \omega_0 \vec{e}_{OA}$$

$$\vec{e}_{AO} = -\cos\gamma \vec{j} - \sin\gamma \vec{k}$$

$$\vec{\omega} = \Omega\vec{k} - \dot{\gamma}\vec{i} - \omega_0\cos\gamma\vec{j} - \omega_0 \sin\gamma\vec{k}$$

$$\vec{\omega} = -\dot{\gamma}\vec{i} - \omega_0\cos\gamma\vec{j} + (\Omega - \omega_0\sin\gamma)\vec{k} \quad ①$$

$$\vec{\omega} = -\frac{\pi}{4}\vec{i} - 3\cos 30\vec{j} + (4 - 3(1/2))\vec{k} = -\frac{\pi}{4}\vec{i} - 3\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j} + 2.5\vec{k}$$

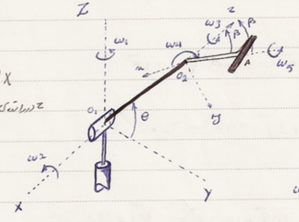
$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = -\dot{\gamma}(\vec{\Omega}\times\vec{i}) - \omega_0\left[-\dot{\gamma}\sin\gamma\vec{j} + (\cos\gamma)\vec{\Omega}\times\vec{j}\right] + (-\omega_0\dot{\gamma}\cos\gamma)\vec{k} + (\Omega - \omega_0\sin\gamma)(\vec{\Omega}\times\vec{k})$$

$$\vec{\alpha} = \frac{\pi}{4}(4\vec{k}\times\vec{i}) - 3\left[-\frac{\pi}{4}\times\frac{1}{2}\vec{j} - \frac{\sqrt{3}}{2}\times 4\vec{i}\right] - 3\times\frac{\pi}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{k}$$

$$\vec{\alpha} = 10.39\vec{i} - 4.32\vec{j} + \overset{?}{2.04\vec{k}}\ \ rad/s^2$$

« جهت $\vec{k}$ دوباره محاسبه شود
احتمالاً اشتباهی رخ داده »

مثال



$x \parallel X$

O_1O_2 راستای Z

$\omega_{O_1O_2} = \omega_2 = \dot{\theta}$

ω_3 : سرعت زاویه‌ای O_2A حول O_1O_2

$\omega_4 = \dot{\beta}$: سرعت زاویه‌ای O_2A حول محور x

ω_5 : « دیسک A حول O_2A

$\theta = 60°,\ \beta = 45°$ * $\omega_1 = 2,\ \omega_2 = 1.5,\ \omega_3 = \omega_4 = \omega_5 = 0$

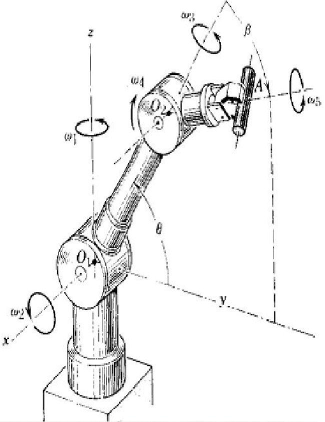
اندازه همه‌ی ω ها ثابت است *

$\alpha_{O_1,O_2} = ?$

ω دیسک $= ?$

7/10 The robot shown has five degrees of rotational freedom. The x-y-z axes are attached to the base ring, which rotates about the z-axis at the rate ω_1. The arm O_1O_2 rotates about the x-axis at the rate $\omega_2 = \dot{\theta}$. The control arm O_2A rotates about axis O_1-O_2 at the rate ω_3 and about a perpendicular axis through O_2 that is momentarily parallel to the x-axis at the rate $\omega_4 = \dot{\beta}$. Finally, the jaws rotate about axis O_2-A at the rate ω_5. The magnitudes of all angular rates are constant. For the configuration shown, determine the magnitude ω of the total angular velocity of the jaws for $\theta = 60°$ and $\beta = 45°$ if $\omega_1 = 2$ rad/s, $\dot{\theta} = 1.5$ rad/s, and $\omega_3 = \omega_4 = \omega_5 = 0$. Also express the angular acceleration α of arm O_1O_2 as a vector.

Ans. $\omega = 2.5$ rad/s, $\alpha = 3\mathbf{j}$ rad/s^2



«به بزرگ و کوچک حروف لاتین توجه شود - با تشکر»

$$\vec{\omega}_{O_2A} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3 + \vec{\omega}_4 + \vec{\omega}_5$$

$\vec{\omega}_1 = \omega_1 \vec{k}$ * $\vec{\omega}_2 = \omega_2 \vec{i}$ * $\omega_3 = \omega_3 k = \omega_3 (\cos\theta \vec{j} + \sin\theta \vec{k})$

$\vec{\omega}_4 = -\omega_4 \vec{i}$ * $\vec{\omega}_5 = \omega_5 (\sin(\beta + \frac{\pi}{2} - \theta)\vec{j} + \cos(\beta + \frac{\pi}{2} - \theta)\vec{k})$

$$\vec{\omega}_5 = \omega_5 (\cos(\theta - \beta)\vec{j} + \sin(\theta - \beta)\vec{k})$$

$$\vec{\omega}_{O_2A} = \omega_1\vec{k} + \omega_2\vec{i} + \omega_3(\cos\theta\vec{j} + \sin\theta\vec{k}) - \omega_4\vec{i} + \omega_5[\cos(\theta - \beta)\vec{j} + \sin(\theta - \beta)\vec{k}]$$

$$\vec{\omega}_{O_2A} = (\omega_2 - \omega_4)\vec{i} + [\omega_3\cos\theta + \omega_5\cos(\theta - \beta)]\vec{j} + [\omega_1 + \omega_3\sin\theta + \omega_5\sin(\theta - \beta)]\vec{k}$$

برای شرایط مسئله :

$$\vec{\omega} = 1.5\vec{i} + 2\vec{k} \Rightarrow |\omega| = 2.5 \ \frac{rad}{s}$$

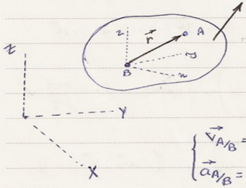
$\vec{\omega}_{O_1O_2} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 = \omega_2\vec{i} + \omega_1\vec{k} \Rightarrow \omega_{O_1O_2} = 1.5\vec{i} + 2\vec{k}$ $|\omega| = 2.5 \ \frac{rad}{s}$ ثابت

$\vec{\alpha}_{O_1O_2} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega}_{O_1O_2})$ $\alpha_{O_1O_2} = \Omega \times \omega = \omega_1\vec{k} \times (\omega_2\vec{i} + \omega_1\vec{k})$

$$\vec{\alpha}_{O_1O_2} = \omega_1\omega_2\vec{j} = 3\vec{j}$$

حرکت کلی جسم صلب [illegible]

- در حرکت کلی دو نقطه را در نظر می‌گیریم اگر دو نقطه روی یک جسم باشند از روابط انتقالی و اگر روی دو جسم باشند از دستگاه چرخان استفاده می‌شود



$xyz \parallel XYZ$

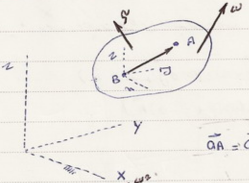
A و B هر دو روی یک جسم قرار دارند. (فرض)

$$\begin{cases} \vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{V}_{A/B} \\ \vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{A/B} \end{cases}$$

[illegible] محوری ω

$$\begin{cases} \vec{V}_{A/B} = \vec{\omega} \times \vec{r} \\ \vec{a}_{A/B} = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \end{cases}$$

شرایط سینماتیکی : $\omega_n \cdot r = 0$ و $\alpha_n \cdot r = 0$

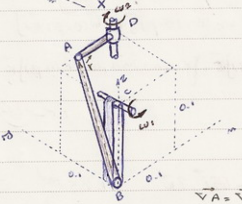


A و B روی یک جسم صلب نیستند. (از دستگاه چرخان استفاده می‌شود)

$$\vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{\Omega} \times \vec{r} + \vec{V}_{rel}$$

"Ω سرعت دستگاه مختصات"

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) + 2\vec{\Omega} \times \vec{V}_{rel} + \vec{a}_{rel}$$



مثال:

$AD = 0.05\,m$

$\omega_1 = 6\ rad/s$ (cte)

$\omega_2 = ?$

$\omega_n = \omega_{AB} = ?$ $\quad * \ \alpha_{AB} = \alpha_n = ?$

$$\vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{V}_{A/B}$$

$\vec{V}_A = (AD)(\omega_2)\vec{j} = 0.05\,\omega_2 \vec{j}$ ⊛

$\vec{r} = 0.05\vec{i} + 0.1\vec{j} + 0.1\vec{k}$

$\vec{V}_B = (BC)(\omega_1)\vec{i} = 0.1(6)\vec{i} = 0.6\vec{i}$ ⊛

$\vec{V}_{A/B} = \vec{\omega}_{AB} \times \vec{r}$ (سرعت نسبی دو نقطه روی یک میله) $= (\omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}) \times (0.05\vec{i} + 0.1\vec{j} + 0.1\vec{k})$

$$\vec{V}_{A/B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ 0.05 & 0.1 & 0.1 \end{vmatrix} = (0.1\omega_y - 0.1\omega_z)\vec{i} + (0.05\omega_z - 0.1\omega_x)\vec{j} + (0.1\omega_x - 0.05\omega_y)\vec{k}$$

$$0.05\,\omega_2 \vec{j} = 0.6\vec{i} + 0.1(\omega_y - \omega_z)\vec{i} + 0.05(\omega_z - 2\omega_x)\vec{j} + 0.05(2\omega_x - \omega_y)\vec{k}$$

$$\begin{cases} 0 = 0.6 + 0.1(\omega_y - \omega_z) \Rightarrow \omega_z - \omega_y = 6 \\ 0.05\,\omega_2 = 0.05(\omega_z - 2\omega_x) \Rightarrow \omega_2 = \omega_z - 2\omega_x \\ 0 = 0.05(2\omega_x - \omega_y) \Rightarrow \omega_y = 2\omega_x \end{cases} \Rightarrow \omega_2 = \omega_z - \omega_y = 6\ \frac{rad}{s}\ \checkmark$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_z - \omega_y = 6 \\ 6 = \omega_z - 2\omega_x \\ \omega_y = 2\omega_x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_{nz} - \omega_{ny} = 6 \\ 6 = \omega_{nz} - 2\omega_{nx} \\ \omega_{ny} = 2\omega_{nx} \end{cases} \quad \left(\left(\vec{\omega}_n \cdot \vec{r} = 0 \right)\right)$$

Subject:
Year. Month. Date. 119

$$0.5\,\omega_{nx}+0.1\,\omega_{ny}+0.1\,\omega_{nz}=0 \Rightarrow \tfrac{1}{2}\omega_{nx}+\omega_{ny}+\omega_{nz}=0$$

$$\Rightarrow \omega_{nx}+(2\omega_{nx})+(6+2\omega_{nx})=0 \Rightarrow \boxed{\omega_{nx}=}$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_{ny}=-} \quad , \quad \boxed{\omega_{nz}=} \quad \Rightarrow \vec{\omega}_n=-\frac{4}{3}\vec{i}-\frac{8}{3}\vec{j}+\frac{10}{3}\vec{k}$$

$$\vec{a}_A=\vec{a}_B+\vec{a}_{A/B} \qquad * \quad \vec{a}_A=(AD.\omega_2^2)\vec{i}+(AD.\alpha_2)\vec{j}$$

$$\vec{a}_A=0.05(6)^2\vec{i}+(0.05\alpha_2)\vec{j}=1.8\vec{i}+0.05\overset{?}{\alpha_2}\vec{j}$$

$$\vec{a}_B=BC.\omega_1^2\vec{k}=(0.1)(6)^2\vec{k}=3.6\vec{k}$$

$$\vec{a}_{A/B}=\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) \xrightarrow{\omega AB}$$

$$\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dot{\omega}_x & \dot{\omega}_y & \dot{\omega}_z\\ 0.05 & 0.1 & 0.1\end{vmatrix}=(\dot{\omega}_y(0.1)-0.1\dot{\omega}_z)\vec{i}+(0.05\dot{\omega}_z-0.1\dot{\omega}_x)\vec{j}+(0.1\dot{\omega}_x-\dot{\omega}_y)\vec{k}$$

$$\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -\frac{4}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{10}{3}\\ -0.6 & 0.3 & 0\end{vmatrix}=-1\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}$$

$$1.8\vec{i}+0.05\alpha_2\vec{j}=3.6\vec{k}-\vec{i}-2\vec{j}-2\vec{k}+0.1(\dot{\omega}_y-\dot{\omega}_z)\vec{i}+0.05(\dot{\omega}_z-2\dot{\omega}_x)\vec{j}$$
$$+0.05(2\dot{\omega}_x-\dot{\omega}_y)\vec{k}$$

$$\begin{cases}1.8=-1+0.1(\dot{\omega}_y-\dot{\omega}_z) & 1\\ 0.05\alpha_2=-2+0.05(\dot{\omega}_z-2\dot{\omega}_x) & 2\\ 0=3.6-2+0.05(2\dot{\omega}_x-\dot{\omega}_y) & 3\end{cases} \qquad \text{“}\dot{\omega}_n\cdot r=0\text{”}$$

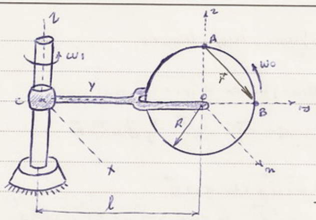
$$\xrightarrow{\text{شرط تبعیت}} 0.05\dot{\omega}_x+0.1\dot{\omega}_y+0.1\dot{\omega}_z=0 \quad 4$$

$$\alpha_2=-36\ \frac{rad}{s^2} \qquad \dot{\omega}_n)_{AB}=-8\vec{i}+16\vec{j}-12\vec{k}\ \ rad/s^2$$

Subject:

Year. Month. Date. 120

مثال ۲ :



$\vec{V}_A , \vec{V}_B = ?$

$\vec{V}_A = \vec{V}_C + \vec{\Omega} \times \vec{r} + \vec{V}_{rel}$

روش اول :

$\vec{V}_C = 0$

$\vec{\Omega} = \omega_1 \vec{k}$

$\vec{r} = \vec{CA} = \vec{CO} + \vec{OA} = l\vec{j} + R\vec{k}$

$\vec{V}_{rel} = R\omega_0 (-\vec{j})$

$\vec{V}_A = 0 + \omega_1 \vec{k} \times (l\vec{j} + R\vec{k}) - R\omega_0 \vec{j}$

$\Rightarrow V_A = -l\omega_1 \vec{i} - R\omega_0 \vec{j}$

روش دوم : " o نقطه‌ای از میله "

$\vec{V}_A = \vec{V}_o + \vec{\Omega} \times \vec{r} + \vec{V}_{rel}$

$\vec{V}_o = -l\omega_1 \vec{i} \quad * \ \vec{\Omega} = \omega_1 \vec{k} \quad * \ \vec{r} = \vec{OA} = R\vec{k} \quad * \ \vec{V}_{rel} = -R\omega_0 \vec{j}$

$\vec{V}_A = -l\omega_1 \vec{i} - R\omega_0 \vec{j}$

روش سوم : " انتقالی "

$\vec{V}_A = \vec{V}_o + \vec{V}_{A/o} \Rightarrow \vec{V}_o = -l\omega_1 \vec{i}$

$\vec{V}_{A/o} = \underbrace{\omega}_{\text{"ω مطلق جسم صلب"}} \times r = \begin{cases} \vec{\omega} = \omega_1 \vec{k} + \omega_0 \vec{i} \\ \vec{r} = \vec{OA} = R\vec{k} \end{cases}$

$\vec{V}_{A/o} = -R\omega_0 \vec{j} \Rightarrow \vec{V}_A = -l\omega_1 \vec{i} - R\omega_0 \vec{j}$

برای سرعت B همین روش‌ها و همچنین این روش :

(A و B روی یک جسم از انتقالی استفاده می‌شود)

$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{B/A}$

$\vec{V}_{B/A} = \vec{\omega} \times \vec{AB} = \vec{\omega} \times (\vec{AO} + \vec{OB}) \Rightarrow \vec{\omega} = \omega_1 \vec{k} + \omega_0 \vec{i} \quad , \ (\vec{r} = -R\vec{k} + R\vec{j})$

$\vec{V}_B = -l\omega_1 \vec{i} - R\omega_0 \vec{j} + (\omega_1 \vec{k} + \omega_0 \vec{i}) \times (-R\vec{k} + R\vec{j}) = -l\omega_1 \vec{i} - R\omega_0 \vec{j} - R\omega_1 \vec{i} + R\omega_0 \vec{j} + R\omega_0 \vec{k}$

$\vec{V}_B = -(l + R)\omega_1 \vec{i} + R\omega_0 \vec{k}$

PAPCO

49 - 46 - 41 - 37 - 29

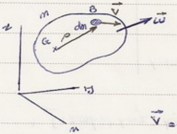
Subject:

Year. Month. Date. ۱۲۱

سینتیک سه بعدی جسم صلب

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \sum \vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{G}$$

$$\sum M = I\alpha \Rightarrow \sum \vec{M} = \frac{d}{dt}\vec{H}$$



$$\vec{H} = \vec{r} \times \vec{G}$$

$$d\vec{H} = \vec{\rho} \times (dm)(\vec{v})$$

$$\vec{v} = \vec{v}_c + \vec{\omega} \times \vec{\rho} = \bar{\vec{v}} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}$$

سرعت زاویه‌ای مطلق

$$d\vec{H} = \vec{\rho} \times (dm)(\bar{\vec{v}} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}) \Rightarrow \vec{H}_c = \int \vec{\rho} \times (\bar{\vec{v}} + \vec{\omega} \times \vec{\rho})\, dm$$

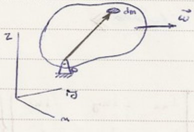
$$\vec{H}_c = \int \vec{\rho} \times \bar{\vec{v}}\, dm + \int \vec{\rho} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})\, dm$$

$$= -\int \bar{\vec{v}} \times \vec{\rho}\, dm + \dots$$

$$-\bar{\vec{v}} \times \int \vec{\rho}\, dm = -\bar{\vec{v}} \times (\bar{\vec{\rho}} m) = 0$$

$$\vec{H}_G = \int \vec{\rho} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})$$

فاصله تا مرکز جرم



$$d\vec{H}_o = \vec{r} \times (dm)\vec{v} = \vec{r} \times dm(\vec{\omega} \times \vec{r})$$

$$\vec{H}_o = \int \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})\, dm$$

$$\vec{H}_o = \int \vec{r} \times (\vec{m} \times \vec{r})\, dm$$

فاصله تا مرکز دوران

PAPCO

از قضیه‌ی انتقال برای ممان اینرسی‌ها در نقطه برای تنسور قطری قابل استفاده است. $\quad I = \bar{I} + md^2$

و برای حاصلضرب‌های لختی از قضیه‌ی انتقال بصورت روبرو استفاده می‌شود: $\quad I_{x'y'} = \bar{I}_{xy} + d_1 d_2 m$

- اگر دستگاه مختصات چسبیده به جسم باشد ممان اینرسی‌ها مستقل خواهند بود و در معادله‌ی حرکت وارد نمی‌شوند.

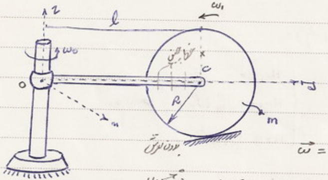
- در جسم یک محور وجود دارد که گشتاور لختی max و محوری عمود بر آن وجود دارد که گشتاور لختی min است و در اجسام سه بعدی یک محور به

این شکل وجود دارد که حاصلضرب‌های لختی در آن دستگاه صفر است.

در سه بعدی یکی از محورهای اصلی max دیگری min و سومی عمود بین این دو را به ما می‌دهد.

$$\vec{H}_A = \bar{H} + \vec{r} \times \vec{G}$$

مثال:



$H_o = ?$

$\{H\}_o = [I]_o \{\omega\}$

$2\pi R\omega_1 = 2\pi l\omega_0 \Rightarrow \omega_1 = \frac{l}{R}\omega_0$

$\vec{\omega} = -\frac{l}{R}\omega_0 \vec{j} + \omega_0 \vec{k}$

$$H = [I]\begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z \\ I_{yy}\omega_y - I_{yz}\omega_z \\ -I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z \end{Bmatrix}$$

Subject:
Year. Month. Date. 124

چرا؟!

$I_{yy} = \frac{1}{2} m R^2 \qquad I_{zz} = \frac{1}{4} m R^2 + m l^2$

$I_{xz} = \bar{I}_{xz} + d_x d_z \cdot m = 0$

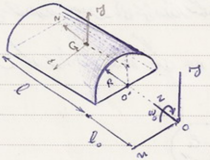
" d_z, d_y, d_x فواصل مرکز جرم تا مبدا مختصات "

$I_{yz} = \bar{I}_{yz} + d_y d_z m = 0 \qquad C = \begin{vmatrix} 0 \to d_x \\ l \to d_y \\ 0 \to d_z \end{vmatrix}$

$I_{xy} = \bar{I}_{xy} + d_x d_y m = 0$

$H_x = 0 \quad , \quad H_y = (\frac{1}{2} m R^2)(-\frac{l}{R} \omega_0) \quad , \quad H_z = (\frac{1}{4} m R^2 + m l^2)\omega_0$

مثال



$H_O = ?$ - ρm

$\omega = \omega_0 \vec{k}$

$\{H\} = [I] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_0 \end{Bmatrix}$

$G \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{4R}{3\pi} \\ l_0 + \frac{l}{2} \end{vmatrix}$

$\begin{cases} H_x = -I_{xz}\,\omega_0 \\ H_y = -I_{yz}\,\omega_0 \\ H_z = I_{zz}\,\omega_0 \end{cases}$

نیم‌استوانه دو صفحه تقارن دارد

$I_{xz} = \bar{I}_{xz} + d_x d_z m = 0$

$I_{yz} = \bar{I}_{yz} + d_y d_z m = (\frac{4R}{3\pi})(l_0 + \frac{l}{2}) m$

$I_{zz} = \frac{1}{2} m R^2$ (جدول) $\Rightarrow$

$\begin{cases} H_x = 0 \\ H_y = -\frac{4R}{3\pi}(l_0 + \frac{l}{2}) m \omega_0 \\ H_z = \frac{1}{2} m R^2 \omega_0 \end{cases}$

تمرین : ۵۳ - 57 - ۵۹ - 65 - ۴۹

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. 125

86.10.9

سینتیک اجسام صلب

$$* \ \sum \vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{G} = m\vec{a}$$

معادله نیرو و گشتاور

$$* \ \sum \vec{M} = \frac{d}{dt}\vec{H}$$

داشتیم : $\{H\} = [I]\{\omega\}$

در دستگاهی که به جسم چسبیده و با جسم حرکت کند ثابت است .

چون H برداری دوار است مشتق گیری از آن هم مطابق مشتق گیری از بردارهای دوار انجام می شود

مثلاً : $\vec{r_A} = \vec{r_B} + \vec{r}$

$\vec{v_A} = \vec{v_B} + \dot{r} + \vec{\omega} \times \vec{r}$

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \vec{\dot{H}} + \vec{\omega} \times \vec{H}$$

$$* \ \sum \vec{M} = \vec{\dot{H}} + \vec{\omega} \times \vec{H}$$

"ω" ی دستگاه و جسم یکی است

$$\sum \vec{M} = \begin{Bmatrix} \dot{H}_x \\ \dot{H}_y \\ \dot{H}_z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ H_x & H_y & H_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \sum M_x = \dot{H}_x + \omega_y H_z - \omega_z H_y \\ \sum M_y = \dot{H}_y + \omega_z H_x - \omega_x H_z \\ \sum M_z = \dot{H}_z + \omega_x H_y - \omega_y H_x \end{cases}$$

زیاد لازم نیست این بسط نوشته شود

$$\sum M_x = I_{xx}\dot{\omega}_x - I_{xy}\dot{\omega}_y - I_{xz}\dot{\omega}_z + \omega_y(-I_{zx}\omega_x - I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z)$$
$$- \omega_z(-I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y - I_{yz}\omega_z)$$

$\vdots$

Subject:
Year. Month. Date. 126

برای حالت خاص در محورهای ما محورهای اصلی باشند

$$\sum M_x = I_{xx}\dot{\omega}_x + I_{zz}\,\omega_y\omega_z - I_{yy}\,\omega_y\omega_z$$

$$\sum M_x = I_{xx}\dot{\omega}_x + \omega_y\omega_z\,(I_{zz} - I_{yy})$$

اون دوتا رو هم مثل این می‌نویسیم !!

حرکت در صفحات موازی

$$\begin{cases} \sum M_x = -I_{xz}\dot{\omega}_z + I_{yz}\,\omega_z^2 \\ \sum M_y = -I_{yz}\dot{\omega}_z + I_{xz}\,\omega_z^2 \\ \sum M_z = I_{zz}\dot{\omega}_z \end{cases}$$

اگر در این مورد محورهای ما محور اصلی باشند فقط $\sum M_z$ می‌ماند بقیه صفر می‌شوند.

بهتر است حالت کلی را حفظ باشیم و برای حالت خاص خودمان فرمول استخراج کنیم ☺

در روش کار و انرژی

$$U_{nc} = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$$

$$* \quad U_{nc} = \int \vec{F}\cdot d\vec{r} \quad \text{یا} \quad \int \vec{M}\cdot d\vec{\theta}$$

– ΔV_e و ΔV_g هر دو مانند حالات قبل محاسبه می‌شوند.

$$* \quad \Delta T = \frac{1}{2}m\bar{v}^2 + \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{\bar{H}}$$

« $\frac{1}{2}\bar{I}\omega^2 = \frac{1}{2}\{I\}\{\omega\}\omega$ »

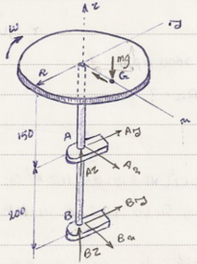
$$\Delta T = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{H}_o$$

دوران حول نقطه ثابت

« $\dot{\bar{H}}$ است نه $\bar{H}$ اشتباه نگیری »

PAPCO

مثال ۱



$m = 6\ kg$

$\omega = 10^4\ rpm$ ثابت

$OG = 0.05\ m$

"حرکت نقاط در صفحات موازی است"

RA , RB رنشی ?

$$\sum F_x = m\bar{a}_x \Rightarrow A_x + B_x = m(-OG)(\omega^2)$$

$$A_x + B_x = -0.05(6)(10^4 \times \frac{2\pi}{60})^2$$

$$A_x + B_x = -0.3(\frac{1000\pi}{3})^2$$

$$\sum F_y = m\bar{a}_y \Rightarrow A_y + B_y = 6(0) \Rightarrow A_y + B_y = 0$$

$$\sum M_x = \dot{H}_x + (\vec{\omega} \times \vec{H})_x \Rightarrow \qquad \{\omega\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \end{Bmatrix} \qquad \{H\} = [I]\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{Bmatrix}$$

$$\{H\} = [I]\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -I_{xz}\omega \\ -I_{yz}\omega \\ I_{zz}\omega \end{Bmatrix}$$

$$\sum \vec{M} = \dot{H} \text{ صفر شد} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -I_{xz}\omega & -I_{yz}\omega & I_{zz}\omega \end{vmatrix} = (-I_{yz}\omega^2)\vec{i} - I_{xz}\omega^2\vec{j}$$

$$\sum M_x = -I_{yz}\omega^2 \Rightarrow A_y(0.15) + B_y(0.35) = -I_{yz}\omega^2$$

$$\sum M_y = -I_{xz}\omega^2 \Rightarrow 6(9.8)(0.05) - A_x(0.15) - B_x(0.35) = -I_{xz}\omega^2$$

$I_{yz} = 0$ * چون محور z محور تقارن دیسک است * * همچنین می‌توانیم بگوییم همه‌ی نقاط $z=0$ دارند

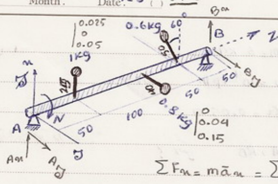
$I_{xz} = 0$

$A_x = +576$ $\qquad B_x = -247$

$A_y = B_y = 0$

Subject:
Year. Month. Date. 128

مثال ۲



$N = 3600 \text{ rpm}$

$R_A , R_B = ?$

$$\sum F_x = m\bar{a}_x = \sum m_i \bar{a}_{ix}$$

$$A_x + B_x - g - 0.6g - 0.8g = (1)(-0.025)(120\pi)^2 - (0.6)(0.05)(120\pi)^2 \cos 60^\circ$$

$$\sum F_y = \sum m_i \bar{a}_{iy} \Rightarrow A_y + B_y = (0.6)(0.05)(120\pi)^2 \sin 60 - \underset{m}{(0.8)}\underset{r}{(0.04)}\underset{\omega^2}{(120\pi)^2}$$

« عملاً در سیستم‌های دواری با سرعت بالا اثرات نیروی وزن در برابر جزئی است و می‌توان در محاسبات از آن صرف نظر کرد. »

$$\sum M_x = -I_{yz}\omega^2 \Rightarrow -B_y(0.25) = \dots$$

« چون اینرسی جرم‌ها حول محورهای مرکز جرم خودشان صفر است »

$$-B_y(0.25) = -\omega^2\left[-(0.05)\sin 60 \times 0.2 \times 0.6 + (0.04)(0.15)(0.8)\right]$$

« در نتیجه » $I_{xz} = \bar{I}_{xz} + d_x d_z m$

$$\sum M_y = -I_{xz}\omega^2 \Rightarrow B_x(0.25) - 1(9.8)(0.05) - 0.6(9.8)(0.2) - 0.8(9.8)(0.15) =$$

$$-\omega^2\left[1(0.025)(0.05) + (0.025)(0.2)(0.6)\right]$$

$A_x = -3269 \quad A_y = -1080 \quad B_x = 225 \quad B_y = -2416$

بدون در نظر گرفتن نیروی وزن

- با در نظر گرفتن وزن ...؟

در حالت استاتیکی: « بصورت خیلی تقریبی »

$$\begin{cases} A_x + B_x = 24 \longrightarrow A_x = -32 \\ A_y + B_y = 0 \longrightarrow A_y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -B_y(0.25) = 0 \longrightarrow B_y = 0 \\ B_x(0.25) = 14 \Rightarrow B_x = 56 \end{cases}$$

A_x ، A_y و B_y حدود ۱۰۰ برابر اختلاف دارند

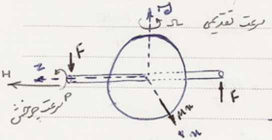
« پس استاتیک و نیروی وزن رو ولش

اصول دینامیکی رو بچسب »

تمرین: ۱۴۴ - ۱۳۳ - 92 - 91 - 83 - ۷۷ - ۷۴

تمرین: 99 - 65 - 57 - 53

حرکت ژیروسکوپی (جایرو)

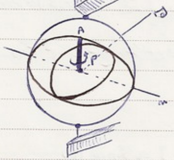


در حالت استاتیکی که دیسک قرار دارد و در حال دوران نباشد اگر کوپلی به آن وارد شود که M_x را ایجاد کند دیسک حول محور x می‌چرخد

- ولی اگر خود دیسک در حال دوران باشد با اعمال M_x حول z می‌چرخد به این خاصیت ژیروسکوپی گویند

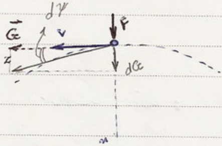
- دستگاه و محورها حالت گردند

$P \to M \to \Omega$



- هرچه سرعت زاویه‌ای ω بیشتر باشد سرعت زاویه‌ای Ω کاهش می‌یابد.

داشتیم:



$$\vec{G} = m\vec{v}$$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{G}}{dt} \Rightarrow d\vec{G} = \vec{F}\,dt$$

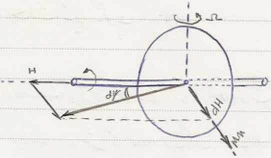
$$d(m\vec{v}) = \vec{F}\,dt$$

همراستااند

$$\tan d\psi = d\psi = d(m\vec{v}) / \vec{G}$$

$$d\psi = \frac{F\,dt}{G} \rightarrow F\,dt = (d\psi)\,G \Rightarrow F = \dot{\psi} \cdot m\vec{v}$$

$$\vec{F} = m\vec{v} \times \vec{\Omega}$$



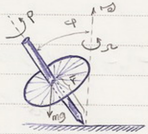
$$d\psi = \tan d\psi = \frac{dH}{H} = \frac{M\,dt}{H}$$

$$\frac{M\,dt}{dt} = H\frac{d\psi}{dt}$$

$$M = H\dot{\psi} \Rightarrow M = H\Omega$$

$$\vec{M} = \vec{\Omega} \times \vec{H}$$

- اگر هم P و هم Ω ثابت باشند یک حرکتی در حالت فوق گوییم با نام حرکت تقدیمی پایا «به این میگن جمله بندی ☺»



- فرفره ای در حال محور خودش بصورت مایل در حال چرخش باشد حول محور Ω هم همزمان شروع به چرخش میکند.

$$\sum\vec{M} = \frac{d\vec{H}}{dt}$$

$$M = mg.\bar{r}.\sin\varphi \Rightarrow mg\bar{r}\sin\varphi = I\,\Omega\sin\varphi\,(p)$$

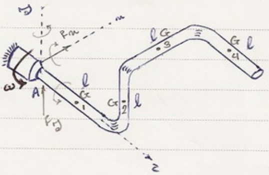
$$\Omega = \frac{mg\bar{r}}{I} = \frac{mg\bar{r}}{mk^2} = \frac{g\bar{r}}{k^2 p}$$

در معادلات حرکت میتوان :

$$\sum\vec{M} = \frac{d}{dt}\vec{H} = \dot{\vec{H}} + \vec{\omega}\times\vec{H}$$

- در کتاب از شکل های مسئله ارشد استفاده کنید خیلی باحاله!! (86.10.11 * رستم علیزاده * 9:00
« روز سه شنبه
IR.IN
M.IR
« M.K

« مفاهیم کنکورت را بمثال لازم نیست حل کنید ! 😮



چگالی طولی میله ρ

ω ثابت

$M_A = ?$ اغماض از گشتاور وزن میله

$$\sum \vec{M} = \frac{d\vec{H}}{dt} = \dot{\vec{H}} + \vec{\omega} \times \vec{H}$$

$$\Rightarrow \vec{\omega} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{Bmatrix} \longrightarrow \{H\} = \begin{Bmatrix} -I_{xz}\,\omega \\ -I_{yz}\,\omega \\ I_{zz}\,\omega \end{Bmatrix}$$

$$\vec{\omega} \times \vec{H} = (\omega \vec{k}) \times (-I_{xz}\omega \vec{i} - I_{yz}\omega \vec{j} + I_{zz}\vec{k})$$

$$\left\{ \sum M_x = I_{yz}\omega^2 \qquad \sum M_y = -I_{xz}\,\omega^2 \qquad \sum M_z = 0 \right\}$$

$$\sum M_z = 0 \Rightarrow \boxed{M_z = 0}$$

« برای محاسبه حاصل‌ضرب اینرسی از قضیه انتقال استفاده می‌کنیم و کل میله را به 4 میله تقسیم می‌کنیم »

$$G_1 \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ l/2 \end{vmatrix} \qquad G_2 \begin{vmatrix} 0 \\ l/2 \\ l \end{vmatrix} \qquad G_3 \begin{vmatrix} l/2 \\ l \\ l \end{vmatrix} \qquad G_4 \begin{vmatrix} l \\ l \\ \tfrac{3}{2}l \end{vmatrix}$$

$$M_x = \omega^2 \left[0 + \rho l \left(\tfrac{l}{2} \cdot l\right) + \rho l (l)^2 + \rho l \left(l \cdot \tfrac{3}{2} l\right) \right] \Rightarrow \boxed{M_x = 3\rho l^3 \omega^2}$$

$$M_y = -\omega^2 \left[0 + 0 + \rho l \left(l \cdot \tfrac{l}{2}\right) + \rho l (l)\left(\tfrac{3}{2} l\right) \right] \Rightarrow \boxed{M_y = -2\rho l^3 \omega^2}$$

« در نوشتن روابط کمی دقت می‌شد و ...

« به امید موفقیت شما »

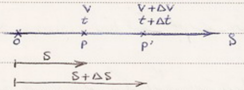
نمره %65

Subject:

Year. Month. Date. (2)

دقت و تقریب:
- ریاضی: مانند $\tan x = x$ ، $x < 7^\circ$
- فیزیک: مانند صرف‌نظر کردن از بعضی نیروها

فصل دوم — سینماتیک ذره



حرکت یک بعدی

- بردار $\vec{OP}$ بردار وضعیت جسم در زمان t است.
- بردار $\vec{OP'}$ " وضعیت در زمان $t+\Delta t$ است.
- بردار $\vec{PP'}$ بردار جابجایی جسم است.

ΔS : جابجایی متحرک

$\bar{v}$: سرعت متوسط $\rightsquigarrow \bar{v} = \dfrac{\Delta S}{\Delta t}$

v : سرعت لحظه‌ای $\rightsquigarrow v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta S}{\Delta t} = \dfrac{dS}{dt} = \dot{S} \rightsquigarrow$ مشتق نسبت به زمان

$\bar{a}$: شتاب متوسط $\rightsquigarrow \bar{a} = \dfrac{(v+\Delta v)-v}{\Delta t} = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$

a : شتاب لحظه‌ای $\rightsquigarrow a = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{dv}{dt} = \dot{v} = \ddot{S} = \dfrac{d^2 S}{dt^2}$

$$dt = \frac{ds}{v} \quad , \quad a = \frac{dv}{ds/v} \Rightarrow a\,ds = v\,dv$$

$$v = \frac{ds}{dt}$$
$$a = \frac{dv}{dt}$$
$$a\,ds = v\,dv$$

PAPCO