بسمه تعالی

نام جزوه: دینامیک سازه ها

نام استاد: دکتر خسرو برگی

دانشگاه: تهران

دانشکده فنی دانشگاه تهران

مجموعه مطالب کلاسی درس

دینامیک سازه‌ها

دکتر خسرو برگی
عضو هیات علمی دانشکده فنی
دانشگاه تهران

توجه مهم   پیشگفتار

مجموعه پیوست در حقیقت کپی مطالب مورد بحث در کلاس دینامیک سازه ها می باشد که بصورت ترانسپران (کاغذ شفاف) بوده و برای صرفه جوئی در وقت کلاس و افزایش راندمان آن در اختیار دانشجویان قرار می گیرد تا دانشجو با دقت بیشتر به مطالب توجه نماید و وقت وی صرف نوشتن مطالب از روی ترانسپران نشود.

بنابراین مجموعه این مطالب بصورت کلی و کلان بوده و همراه با مباحث شفاهی اینجانب در کلاس و توضیحات تکمیلی، کامل می باشد و به تنهایی دارای تمامی جزئیات نخواهد بود.

جهت کتب رفرنس (مرجع) و کتب تمرینات به کتابهای زیر مراجعه شود:

۱ـ دینامیک سازه ها   چاپ ~~چهارم~~ ششم دانشگاه تهران   تالیف   خسرو برگی

۲ـ دینامیک سازه ها و شیرآلات چاپ اول دانشگاه تهران   ترجمه خسرو برگی

* کتاب اول دارای تئوری دینامیک سازه ها و مثال های حل شده و حل نشده است و کتاب دوم نیز دارای مباحث دینامیک سازه ها (بسیاری از مباحث جدید و کاربردی) و همینطور تعداد زیادی مساله حل شده و تمرینات می باشد.

خسرو برگی

بسمه تعالی

دینامیک سازه ها - کارشناسی ارشد - ۳ واحد

کتاب مرجع : دینامیک سازه ها ، خسروبرگی - انتشارات دانشگاه تهران

اهم مطالب مورد بحث در طول سال

۱- ضرورت آموزش و ارائه درس (امور تحصیلی - امور حرفه ای مهندسی و طراحی)

۲- یادآوری اصول دینامیک سازه ها (با توجه به درس اصول مهندسی زلزله در مقطع کارشناسی)

الف - خصوصیات (متغیر زمان - تفاوت تحلیل دینامیکی و استاتیکی - ارتعاش)

ب - درجه آزادی و روش های کاهش (جرم متمرکز - تغییر مکان تعمیم داده شده - اجزای محدود)

ج - نیروهای مقاوم (الاستیک و میرایی - رفتار و مکانیزم هر یک)

د - سختی و حالتهای مختلف برای سیستم های ساده و پیچیده

هـ - روش های تعیین معادلات حاکم بر رفتار سازه (تعادل دینامیکی - دالامبر - کار مجازی - روش انرژی ...) در حالت سیستم های یک درجه آزادی

و - ارتعاش آزاد و حل معادله مربوط - حالتهای بحرانی و زیر بحرانی و فوق بحرانی

ز - بررسی معادله حرکت و حل آن در بارگذاری هارمونیکی و نتایج آن - انتگرال دوهامل

۳- تحلیل سیستم های معادل یکدرجه آزادی در برابر بارگذاری ضربه ای و نتایج بحث

۴- روش های عددی تحلیل دینامیکی سازه ها برای سیستم های یک درجه آزادی

۵- رفتار غیر خطی سازه ها در حالت تحلیل دینامیکی برای سازه های یکدرجه آزادی

۶- روش رایله در تحلیل دینامیکی سازه ها و کاربرد آن در تعیین خصوصیات دینامیکی

۷- تعیین معادله حرکت برای سیستم های چند درجه آزادی و بررسی ارتعاش آزاد آنها و سیستم های پیوسته

۸- تحلیل دینامیکی سازه های چند درجه آزادی به روش آنالیز مودال و نتایج حاصل

۹- روش تبدیل فوریه در تحلیل دینامیکی سازه ها و کاربرد و نتایج آن

۱۰- روش های عددی تحلیل دینامیکی برای سازه های چند درجه آزادی و پایداری آنها - رفتار غیر خطی

فصل اول - ضرورت ارائه درس دینامیک سازه ها

در رشته مهندسی عمران اکثر سازه ها (ابنیه) تحت اثر نیروهای دینامیکی هستند. نیروهایی که مقدار (شدت)، جهت و احتمالاً نقطه اثر آنها با زمان تغییر می کنند و البته نرخ تغییرات فوق به حدی است که پدیده ارتعاش که مشخصه اصلی رفتار دینامیکی است در سازه بوجود می آید.

$P(t)$

ابنیه مهم و بارگذاری دینامیکی وارد

انواع سدها - زلزله، هیدرودینامیک (پدیده اندرکنش سازه - خاک - آب)
ارتعاش تجهیزات و ماشین های نیروگاه

انواع پل ها - زلزله، ترافیک، ترمز، باد، ضربه، جریان رودخانه

سیلو ها - ویدائز (تخلیه سریع مواد ذخیره شده)، زلزله، حرکت تسمه ها

برج آب - زلزله، هیدرودینامیک، باد

اسکله و موج شکن - امواج دریا، زلزله، برخورد کشتی، جریانهای دریایی، باد

دکل و دودکش و برج های خنک کننده - زلزله، باد

استحکامات و پناهگاهها - انفجار (دور - نزدیک - مجاور - برخورد مستقیم)، زلزله

تأسیسات هسته ای - انفجار هسته ای، زلزله، برخورد هواپیما

ورزشگاه ها - تشویق تماشاچیان، زلزله

لوله ها - زلزله، عبور سیال

برج های ساختمانی - زلزله، باد

تونل ها - عبور و ترافیک قطار، زلزله

هدف : تطبیق و سازگاری تحلیل با رفتار واقعی (دینامیکی)

روش برخورد در گذشته : به دلیل پیچیدگی و سختی ← حالت معادل استاتیکی

تغییر و تحول اخیر : پیشرفت چشمگیر در فن‌آوری سخت‌افزاری و نرم‌افزاری
(کامپیوترها)

روش امروزی : بکارگیری روش های تحلیل دینامیکی در حد امکانات

اصلاح آیین‌نامه های طراحی مطابق با نتایج حاصل

تغییرات آتی : درنظر گرفتن حالتهای واقعی بارگذاری (اتفاقی و تصادفی)
حالت های تحلیل تصادفی (تحلیل ریسک و قابلیت اعتماد)
بارگذاری منفرد و معین ← طیف بارگذاری

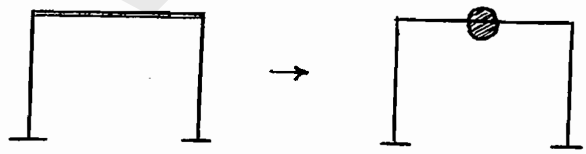
فصل دوم - یادآوری اصول دینامیک سازه ها

- قانون حاکم : اصل دوم نیوتن $\quad \sum \vec{F} = m\ddot{\vec{u}}$

u : تغییرمکان $\quad \dot{u}$: سرعت $\quad \ddot{u}$: شتاب

- درجه آزادی و روش های کاهش آن متناسب با امکانات در دسترس

الف - روش تمرکز جرم $\quad$ Lumped-mass Procedure

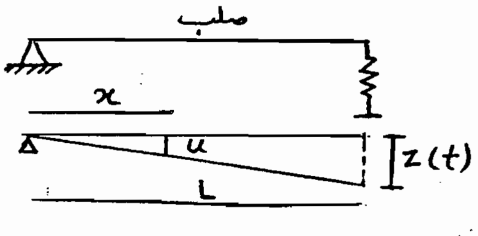


ب - روش تغییرمکان های تعمیم داده شده $\quad$ Generalized Displacement

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{n} a_i(t)\,\phi_i(x)$$

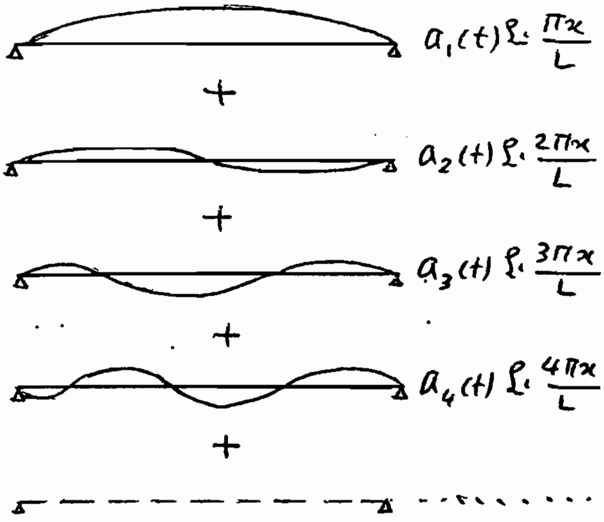
$a_i(t)$ تابع زمانی

$\phi_i(x)$ تابع مکانی (شرایط حدی و سازگاری)



تشابه مثلث ← $u(x,t) = \frac{x}{L} \cdot z(t)$

فرض : تیر صلب ← $n=1$



$$U(x,t)=\sum_{i=1}^{n} a_i(t)\sin\frac{i\pi x}{L}$$

=

$U(x,t)$

ج - روش اجزاء محدود Finite Element concept

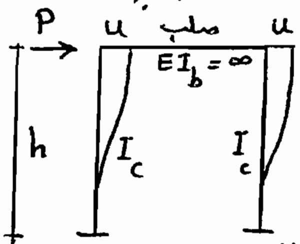
- مبانی خاص خود در تمرکز خواص رفتاری سازه در تعداد محدود گره (درجه آزادی)

د - روش اجزاء مرزی

- تمرکز خواص رفتاری محیط مورد نظر در نقاطی در مرز با محیط (سازه) دیگر

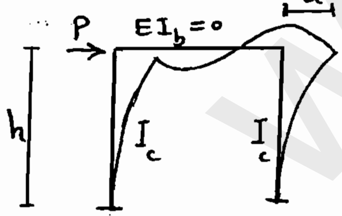
- نیروهای مؤثر در رفتار دینامیکی

الف - نیروی سختی (فنرها، رکابی، الاستیک ...) f_s بعنوان نیروی مقاوم در برابر حرکت



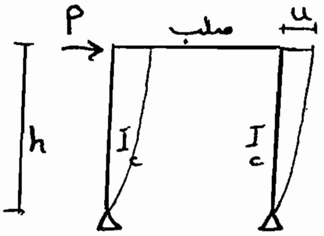
از تحلیل سازه‌ها $\longrightarrow P=\frac{24EI_c u}{h^3}\rightarrow u=1\rightarrow P=K=\frac{24EI_c}{h^3}$

$$P=f_s=Ku$$

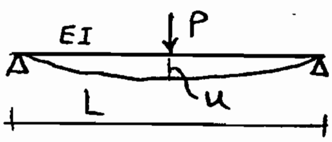


$$K=\sum_{\text{تعداد ستونها}}\frac{3EI_c}{h^3}=\frac{6EI_c}{h^3}$$

حالت خطی (رفتاری) مدنظر است.



$$K=\sum\frac{3EI_c}{h^3}=\frac{6EI_c}{h^3}$$



$$P=\frac{48EIu}{L^3}\rightarrow u=1\rightarrow K=\frac{48EI}{L^3}$$

$$P=\frac{3EIu}{L^3}\rightarrow u=1\rightarrow K=\frac{3EI}{L^3}$$

* در تجزیه سختی ، جهت و نقطه موردنظر باید معلوم باشد (درجه آزادی)
* در حالت چند درجه آزادی ← ماتریس سختی با عناصر K_{ij}

K_{ij} نیرو در درجه آزادی i وقتی تغییرمکان یا چرخش واحد در درجه آزادی j اعمال می شود و سایر درجات آزادی گرفته می شوند.

در تجزیه سختی : مدل سازی و تجزیه درجات آزادی خیلی مهم است.

ب - نیروی میرایی (استهلاک) f_D بعنوان نیروی مقاوم در برابر حرکت

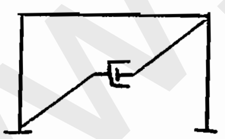
این نیرو از مکانیزم های مختلف اتلاف انرژی در حرکت (ارتعاش) ناشی می شود، اصطکاک در اتصالات ، ترک ها ، مصالح و .....

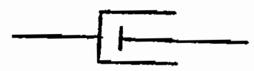
مکانیزم های پیچیده و نامعلوم ← روش مناسب لحاظ کردن در معادلات رفتاری آنها است که معادل میرایی لزجی فرض شوند.

حالت خطی مدنظر است. Viscous damper → $f_D = c\dot{u}$

پدیده میرایی به ابعاد و هندسه سازه ارتباطی ندارد ولی به نوع مصالح و نوع اتصالات وابسته است،

تبدیل مکانیزم های واقعی اتلاف انرژی به مکانیزم لزجی از طریق آزمایش روی مدل





مدل Damper
(کمک فنر)

ضریب میرایی c یا درصد میرایی در عمل بصورت تجربی تعیین می شود

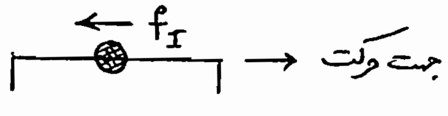
ج - نیروی اینرسی (لختی) f_I از قانون دوم نیوتن بدست می آید

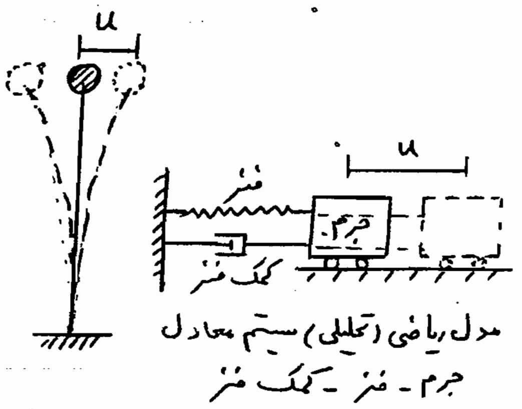
$$\sum \vec{F} = m\vec{\ddot{u}} \rightarrow \sum \vec{F} - m\vec{\ddot{u}} = 0$$

علامت منفی : مقاوم در برابر حرکت

$$f_I = m\ddot{u}$$

چون از قانون ناشی می شود، ارائه مدل فیزیکی بی معنی است





نیرو و درصد میرایی در سیستم های مرتعش

در سیستم مرتعش روبرو، وقتی جرم به اندازه u جابجا شود، کشش آمدگی ارتجاعی ستون (کشیدگی فنر) بکار می آید تا جرم به موقعیت اولیه برگردد، این نیرو در ستون یا فنر که تابع تغییر مکان u می باشد، بنام نیروی فنر (سختی) موسوم است (f_s). البته اگر u کوچک باشد، این نیرو تابع خطی u است. جرم موردنظر با یک سرعت مشخص به موقعیت اولیه برگشته و به سمت دیگر پرت خواهد شد و بنابراین مرتعش می شود.

چنانچه سیستم ارتجاعی باشد و اتلاف انرژی وجود نداشته باشد، جرم برای همیشه مرتعش خواهد بود، ولی در عمل، اصطکاک با هوا، اصطکاک بین ذرات سیستم یا در اتصالات، تسلیم مصالح و بوجود آمدن ترک ها و اصطکاک بین آنها و غیره، باعث اتلاف انرژی ارتعاش شده، به طوریکه طی زمان، ارتعاش مستهلک شده و از بین می رود. نیروهایی که باعث اتلاف انرژی می شوند بنام نیروهای میرایی (استهلاک) Damping موسوم هستند.

اگر نیروی میرایی متناسب با سرعت حرکت جرم باشد، به آن میرایی لزجی گفته می شود، اگرچه در عمل، میرایی بطور خالص، لزجی نمی باشد ولی فرض می گردد که چنین باشد که این امر به دلیل سهولت حل معادلات حرکت می باشد. معمولاً برای میرایی غیر لزجی می توان میرایی لزجی معادل آنرا که دارای تأثیر مشابه در حرکت باشد، بدست آورد که این امر کاملاً تجربی است.

همانطوریکه قبلاً گفته شد، میرایی یک سازه بستگی به مصالح آن، ماهیت اتصالات، کیفیت ساخت، نوع پی و .... دارد. نیروی میرایی لزجی معادل $f_D = C\dot{u}$

انتخاب میرایی در یک سیستم، معمولاً دلخواه است بویژه به این دلیل که میرایی با کرنش مصالح و طبیعت و جزئیات ساخت، متغیر است.

میرایی در تحلیل دینامیکی سازه ها بصورت درصد میرایی بکار می رود: $\xi = \frac{C_{\text{موجود}}}{C_{cr}}$

حدود درصد میرایی برای مصالح مختلف به شرح زیر است:

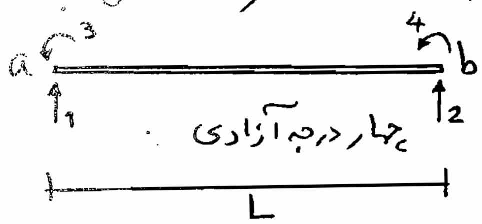
بتن	5 - 10%	افزایش با کرنش
فولاد	2 - 5%	" "
بنائی	4 - 10%	" "
خاک	10 - 30%	" "

چوب 2-10% به دلیل تفاوت زیاد تغییرات در کیفیت چوب، مقادیر نامطمئن است.

محاسبه سختی یک قاب خمشی

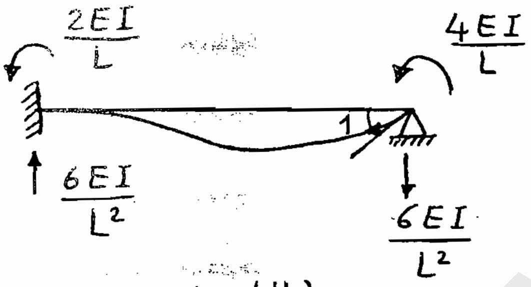
یادآوری: برای محاسبه لنگر و برش در یک المان سازه‌ای (تیر یا ستون)، ضرایب سختی برای المان مورد نیاز است. موضوع برای یک المان همگن بطول L و ممان اینرسی I و مدول ارتجاعی E، بطور شماتیک ارائه می‌شود.

ضرایب سختی برای چرخش گره در شکل الف و برای انتقال گره در شکل ب نشان داده شده است.

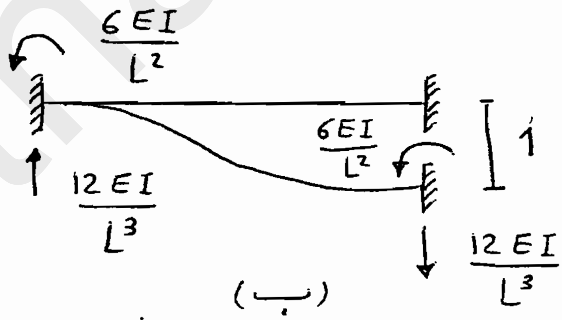


به جهت‌ها و شماره‌گذاری توجه شود.

K_{ij} (ضرایب سختی) طبق تعریف: نیرو در i وقتی تغییرمکان واحد در j داده می‌شود.



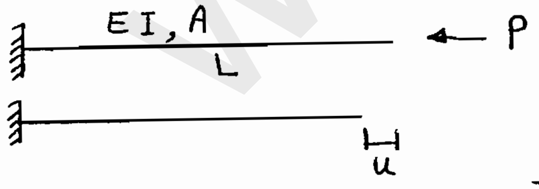
(الف)



(ب)

برای محاسبه ضرایب سختی، در درجه آزادی مربوط تغییرمکان یا چرخش واحد اعمال می‌شود در حالی که سایر درجات آزادی مقید و گرفته می‌شوند.

درجه آزادی محوری به دلیل صلبیت زیاد در نظر گرفته نشده است.



$$\sigma = E\varepsilon$$

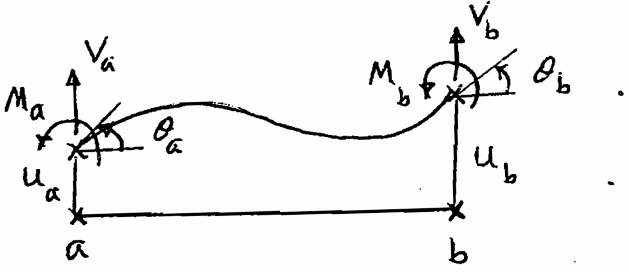
$$\frac{P}{A} = E\,\frac{u}{L} \Rightarrow P = \frac{EAu}{L}$$

تعریف ضریب سختی ←

$$u = 1 \longrightarrow P \to K \Rightarrow K = \frac{EA}{L}$$

عدد بزرگ

بنابراین برای المان تیر و با توجه به چهار درجه آزادی نشان داده شده مربوط به تغییرمکان‌های u_a، u_b و چرخش‌های θ_a و θ_b، لنگر خمشی و نیروی برشی در گره‌ها برابر خواهد بود با:



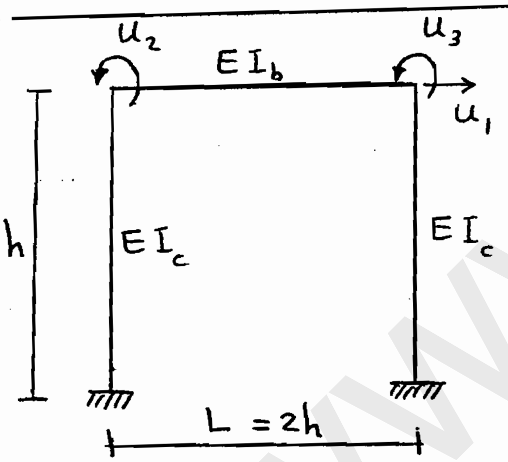
تغییر شکل کلی تیر خمشی

$$M_a = \frac{4EI}{L}\theta_a + \frac{2EI}{L}\theta_b + \frac{6EI}{L^2}u_a - \frac{6EI}{L^2}u_b$$

$$M_b = \frac{2EI}{L}\theta_a + \frac{4EI}{L}\theta_b + \frac{6EI}{L^2}u_a - \frac{6EI}{L^2}u_b$$

$$V_a = \frac{12EI}{L^3}u_a - \frac{12EI}{L^3}u_b + \frac{6EI}{L^2}\theta_a + \frac{6EI}{L^2}\theta_b$$

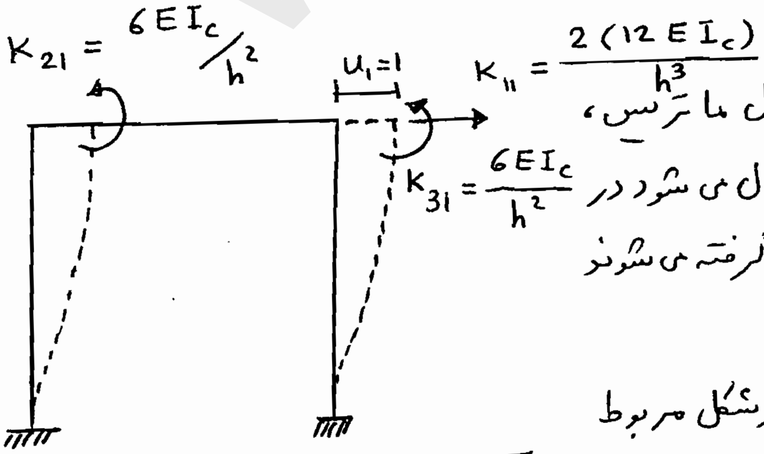
$$V_b = -\frac{12EI}{L^3}u_a + \frac{12EI}{L^3}u_b - \frac{6EI}{L^2}\theta_a - \frac{6EI}{L^2}\theta_b$$



مثال - مطلوبست محاسبه سختی جانبی قاب نشان داده شده با توجه به درجات آزادی مورد نظر؟

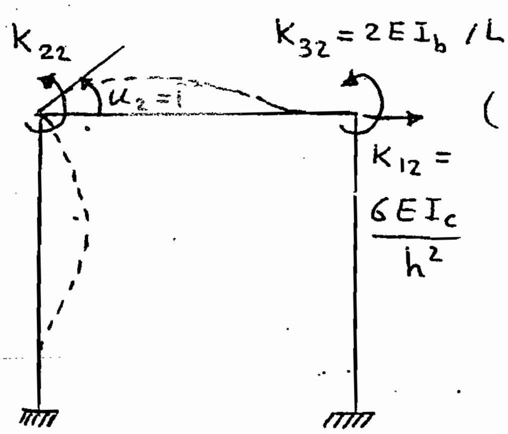
از روش های مختلف تحلیل سازه از جمله پخش لنگر و غیره می توان مساله را حل نمود. در اینجا از تعریف ضرایب تأثیر سختی استفاده می شود.

سه درجه آزادی داریم ← ماتریس سختی 3×3 خواهد بود.



برای بدست آوردن ضرایب ستون اول ماتریس، در تغییر مکان u_1 ، تغییر مکان واحد اعمال می شود در حالی که سایر تغییر مکانهای درجات آزادی گرفته می شوند یعنی؛ $u_1 = 1$ و $u_2 = u_3 = 0$

نیروهای K_{i1} (ضرایب سختی) و تغییر شکل مربوط در شکل روبرو نمایش داده شده است (از تحلیل سازه ۲ یادآوری):



برای تعیین ضرایب ستون دوم ماتریس سختی (K_{i2}) خواهیم داشت: $u_1=u_3=0$ و $u_2=1$

برای ضرایب K_{i3} (ستون سوم ماتریس). مشابه حالت دو عمل می شود: $u_1=u_2=0$ و $u_3=1$

$$K_{22}=\frac{4EI_c}{h}+\frac{4EI_b}{L}$$

اگر در حالت خاص $I_b=I_c$ و $L=2h$ باشد، ماتریس سختی بصورت زیر خواهد بود:

$$[K]=\frac{EI_c}{h^3}\begin{bmatrix}24 & 6h & 6h\\ 6h & 6h^2 & h^2\\ 6h & h^2 & 6h^2\end{bmatrix}$$

اگر قاب تحت اثر نیروی جانبی (مثلاً f_s) قرار داشته باشد، معادله حاکم برای تغییر شکل قاب بصورت زیر خواهد بود ($[K]\{u\}=\{f_s\}$):

$$\frac{EI_c}{h^3}\begin{bmatrix}24 & 6h & 6h\\ 6h & 6h^2 & h^2\\ 6h & h^2 & 6h^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}f_s\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}$$

از معادلات ردیف ۲ و ۳ خواهیم داشت:

$$\begin{Bmatrix}u_2\\ u_3\end{Bmatrix}=-\begin{bmatrix}6h^2 & h^2\\ h^2 & 6h^2\end{bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix}6h\\ 6h\end{Bmatrix}u_1=-\frac{6}{7h}\begin{Bmatrix}1\\ 1\end{Bmatrix}u_1$$

رابطه اخیر در معادله حاکم رفتاری قرار گیرد، خواهیم داشت:

$$f_s=\left(\frac{24EI_c}{h^3}-\frac{EI_c}{h^3}\,\frac{6}{7h}\langle 6h \quad 6h\rangle\begin{Bmatrix}1\\ 1\end{Bmatrix}\right)u_1$$

$$f_s=\frac{96}{7}\left(\frac{EI_c}{h^3}\right)u_1$$

$u_1=1 \rightarrow f_s \rightarrow K \Rightarrow$ سختی جانبی قاب $\boxed{K=\frac{96}{7}\frac{EI_c}{h^3}}$

این روش که همراه با حذف چرخش های گره هاست، به عنوان روش حذف استاتیکی معروف است،

- با توجه به مباحث پایه‌ای مطرح در حالت سازه‌های معادل یکدرجه آزادی
مطالب بعدی در این حالت خواهد بود. SDOF

Single-Degree-of-Freedom systems

- نوشتن معادلات رفتاری (معادله حرکت)

الف - کاربرد مستقیم اصل دوم نیوتن

$$\Sigma F = m\ddot{u}$$

$$P(t) - f_s - f_D = m\ddot{u}$$

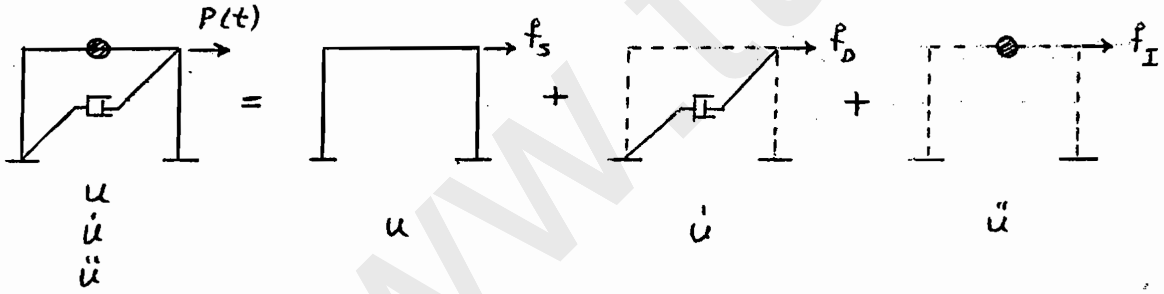
$$m\ddot{u} + f_D + f_s = P(t)$$

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + Ku = P(t)$$

ب - تعادل دینامیکی (اصل دالامبر) (D'Alembert's Principle)

مشابه حالت اول با بیان متفاوت: نیروی $m\ddot{u}$ از ابتدا نیروی مقاوم است.

ج - ترکیب مولفه‌های نیروهای سختی، میرایی و جرم
در حالت رفتار خطی و در اصول مشابه حالتهای الف و ب

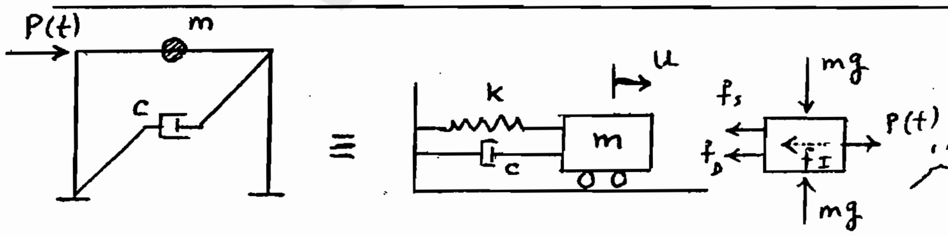


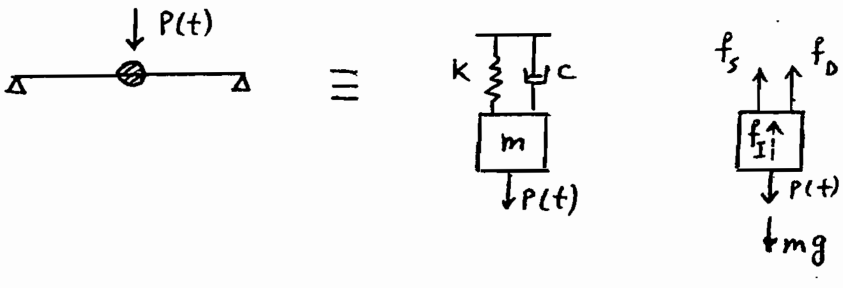
د - روش کار مجازی: تصور تغییر مکان کاذب و صفر بودن کار انجام شده

ه - اصل انرژی: اصل بقای انرژی (جنبشی و پتانسیل ...)

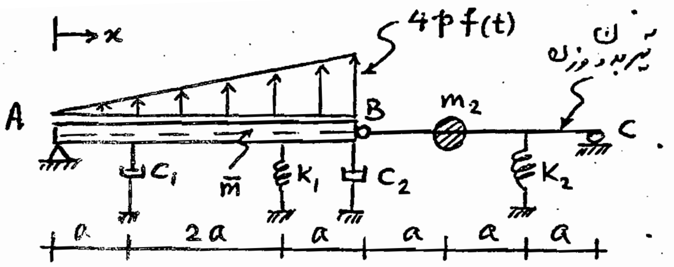
مدل سازی رفتاری

سیستم جرم - فنر - کمک فنر





* مطلوبست تعیین معادله حرکت سیستم داده شده در روبرو ؟

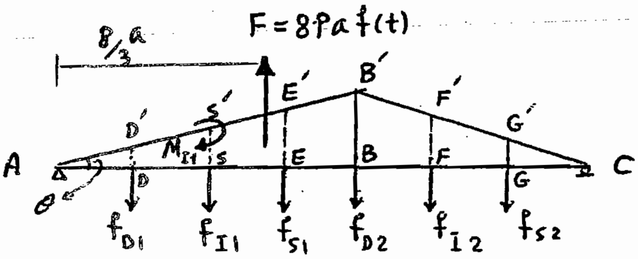


حل :

از روش متعارف تعادل استفاده می کنیم :

ارتعاش در دامنه ی کوچک است (رفتار خطی) ،

سیستم را در یک لحظه (مثلاً t) در حالت تغییر شکل نشان می دهیم (به همراه نیروی موثر) :



سیستم معادل یک درجه آزادی ← نقطه شاخص یا درجه آزادی شاخص را $Z(t) = BB'$ انتخاب می کنیم.

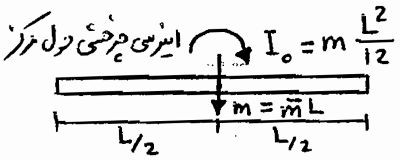
$$DD' = \frac{Z}{4}, \quad EE' = \frac{3}{4}Z, \quad FF' = \frac{2}{3}Z, \quad GG' = \frac{1}{3}Z, \quad SS' = \frac{Z}{2}$$

تعیین نیروی موثر :

$$f_{s1} = k_1(EE') = k_1 \frac{3}{4} Z(t), \quad f_{s2} = k_2(GG') = k_2 \frac{1}{3} z(t), \quad f_{D1} = c_1(\dot{DD'}) = c_1 \frac{1}{4}\dot{z}(t)$$

$$f_{D2} = c_2 \dot{z}(t), \quad f_{I1} = m_1(\ddot{SS'}) = m_1 \frac{\ddot{z}(t)}{2} = \bar{m}\, 2a\, \ddot{z}(t)$$ ← AB اینرسی انتقالی المان

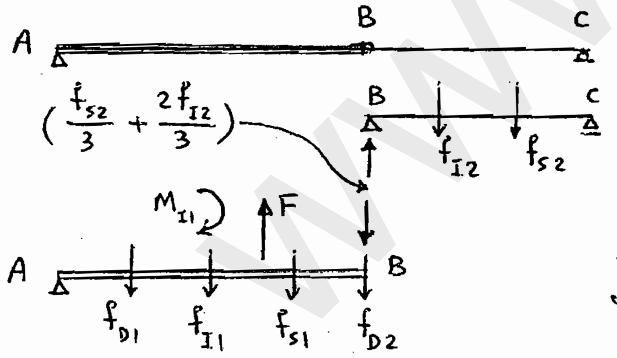
$$f_{I2} = m_2(\ddot{FF'}) = m_2 \frac{2}{3}\ddot{z}(t)$$



المان تیری شکل

$$\begin{cases} M_{I1} = I_0\ddot{\theta} = \left[4a\bar{m} \times \frac{(4a)^2}{12}\right]\frac{\ddot{z}(t)}{4a} = \frac{4}{3}a^2\bar{m}\ddot{z}(t) \\ \theta = \frac{BB'}{4a} = \frac{Z}{4a} \rightarrow \ddot{\theta} = \frac{\ddot{Z}}{4a} \end{cases}$$

دسترسی به معادله حرکت از روش تعادل ← $\Sigma M_{/A} = 0$



$\Sigma M_{/A} = 0$

$$\underbrace{f_{I1} \times 2a + M_{I1} + \frac{2f_{I2}}{3} \times 4a}_{\text{اینرسی جرمی}} + \underbrace{f_{D1} \times a + f_{D2} \times 4a}_{\text{میرایی}} + \underbrace{f_{s1} \times 3a + \frac{f_{s2}}{3} \times 4a}_{\text{سختی}} = \underbrace{8pa f(t) \times \frac{8}{3}a}_{\text{نیروی خارجی تحمیلی}}$$

پس از جاگذاری عبارت ها و ساده کردن روابط در نهایت خواهیم داشت :

$$\underbrace{\left(\frac{4}{3}\bar{m}a + \frac{4}{9}m_2\right)}_{\text{جرم موثر}}\ddot{z}(t) + \underbrace{\left(\frac{c_1}{16} + c_2\right)}_{\text{میرایی موثر}}\dot{z}(t) + \underbrace{\left(\frac{9}{16}k_1 + \frac{k_2}{9}\right)}_{\text{سختی موثر}} z(t) = \underbrace{\frac{16}{3}pa f(t)}_{\text{نیروی موثر}}$$

$$\underline{m^*\ddot{z}(t) + c^*\dot{z}(t) + k^* z(t) = P^*(t)}$$

معادله سیستم معادل یکدرجه آزادی

با جرم موثر، میرایی موثر، سختی موثر و نیروی موثر

توجه : با توجه به ارائهٔ درس مهندسی زلزله در نیمسال بعدی ، حالتهای حرکت زمین بعنوان عامل ارتعاش در سازه‌ها در مدل‌سازی و تحلیل‌ها در درس دینامیک سازه‌ها ارائه نمی‌شود.

– روش‌های حل معادلات حرکت

الف – روش کلاسیک و متعارف (مستقیم) Classical Solution

حل معادله دیفرانسیل – حل عمومی و جواب خصوصی با اعمال شرایط اولیه

ب – روش انتگرال دوهامل Duhamel's Integral رفتار خطی

ج – روش‌های تبدیل Transform Methods رفتار خطی

تبدیل لاپلاس و فوریه ← تحلیل در میدان فرکانس

* مناسب برای تحلیل های اندرکنش محیط های غیر یکنواخت

* روش عددی قوی و سریع FFT

د – روش‌های عددی Numerical Methods رفتار خطی و غیرخطی

الگوریتم های مختلف و پایداری روش

– پاسخ ، واکنش سازه Response

از حل معادله حرکت ← $u(t)$ بدست می‌آید

مفهوم پاسخ شامل همه نوع مجهول محاسباتی و طراحی می‌تواند باشد

تغییر مکان ، سرعت ، شتاب ، تنش ، نیرو و .....

معمولاً در طراحی u_{max} و پاسخ های حداکثر بکار گرفته می‌شوند.

– نیروهای اجزاء Element Forces

از حل معادله حرکت (دینامیکی) ← $u(t)$ حاصل می‌شود و برای تیر و ستونها

می‌توان لنگر خمشی و نیروی برشی حاصل شود.

$f_s(t) = K\,u(t)$

توجه : برای طراحی ، از تنش های مجازی استفاده می‌شود که از آزمایش استاتیکی مصالح

بدست می‌آید و کافی است از f_s برای ارزیابی نیروها استفاده شود.

برای بدست آوردن پاسخ کامل باید از جواب دینامیکی واستاتیکی (ترکیب) استفاده شود: تغییر مکان تحت اثر وزن باید ملحوظ شود.

$$u^t(t) = u_b(t) + u_s$$

دستگاه واحد (مقیاس)

رابطه اساسی $f = ma$

نیرو = جرم x شتاب

دستگاه SI →

- واحد نیرو = N نیوتن
- شتاب = m/s^2 متر بر ثانیه توان ۲
- جرم = kg کیلوگرم kg mass
  $= N.s^2/m$

دستگاه MKS →

- واحد نیرو = kgf
- شتاب = m/s^2
- جرم = $kgf.s^2/m$

$$1 \ kgf = 9.81 \ N$$

شتاب ثقل $g = 9.81 \ m/s^2 = 981 \ cm/s^2$

$$= 386 \ in/s^2 = 32.2 \ ft/s^2$$

$$1 \ kip = 1000 \ lbf = 453.4 \ kgf = 4448.2 \ N$$

$$1 \ psi = 6894.8 \ N/m^2 = 0.7 \ t/m^2$$

$$1 \ kip/in = 175126 \ N/m$$

$$1 \ in = 2.54 \ cm$$

$m = \frac{W}{g}$ برای بکارگیری جرم (m)، مناسب است در فرمول ها از استفاده شود (W وزنه).

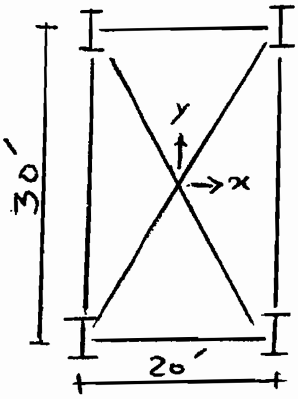
* وزنه مانند نیرو است.

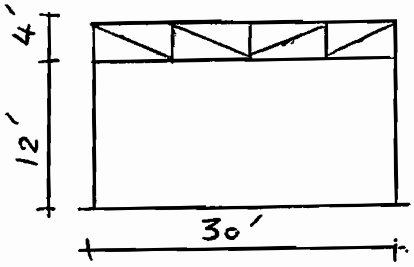
مثال - یک ساختمان صنعتی یک طبقه $20' \times 30'$ - در جهت شمال جنوب قاب خمشی و در جهت شرقی - غربی بصورت مهاربندی شده است. وزن در سقف $30\ \mathrm{lb/ft^2}$ و مهار های افقی در سقف زیر خرپای سقف است. ممان اینرسی ستونها:

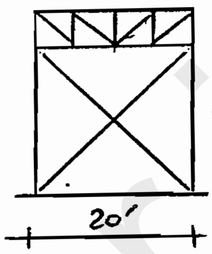
$$\begin{cases} I_x = 82.8\ \mathrm{in^4} \\ I_y = 18.3\ \mathrm{in^4} \end{cases}$$

مهارها تمام میلگرد به قطر $1''$ و $E = 29000\ \mathrm{ksi}$ و

مطلوبست تعیین معادله حرکت در جهات شمال جنوب - غرب و شرق







$$m = \frac{W}{g} = \frac{30 \times (30 \times 20)}{386} = 46.63\ \mathrm{lb\text{-}s^2/in}$$

* با توجه به ضربدری های افقی سقف می توان عملکرد سقف را بصورت دیافراگم فرض نمود.

الف - جهت شمال - جنوب: سختی جانبی دو قاب خمشی عبارت است از

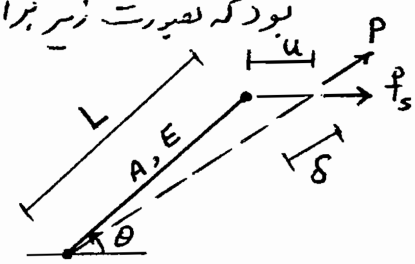
$$K_{N-S} = 4\left(\frac{12EI_x}{h^3}\right) = 4\,\frac{12(29 \times 10^3)(82.8)}{(12 \times 12)^3} = 38.58\ \mathrm{kips/in}$$

معادله حرکت S-N : $\underline{m\ddot{u} + K_{N-S}\,u = 0}$

ب - جهت شرقی - غربی: معمولاً وقتی از مهار استفاده می شود، فرض می گردد که قاب ها صلب بوده و برای انتقال نیروی قائم (بار مرده و زنده) هستند و بار جانبی توسط مهارها تحمل می شود (با اتصال مفصلی). بنابراین سختی جانبی جمع سختی هر یک از مهارها خواهد بود که بصورت زیر برآورد می شود:

$$P = \frac{AE}{L}\delta \qquad (1)$$

$$\begin{cases} A = 0.785\ \mathrm{in^2} \\ L = 23.3\ \mathrm{ft} \end{cases}$$



$$f_s = P\cos\theta \quad , \quad u = \delta/\cos\theta$$

$$P = f_s/\cos\theta \quad , \quad \delta = u\cos\theta \xrightarrow{\text{در معادله } 1}$$

$$f_s = K_{\text{مهار}}\,u \rightarrow K_{\text{مهار}} = \frac{AE}{L}\cos^2\theta \quad \text{و} \quad \cos\theta = \frac{20}{\sqrt{12^2+20^2}} = 0.8575$$

$$K_{\text{مهار}} = \frac{0.785(29 \times 10^3)}{23.3 \times 12}(0.8575)^2 = 59.8\ \mathrm{kips/in}$$

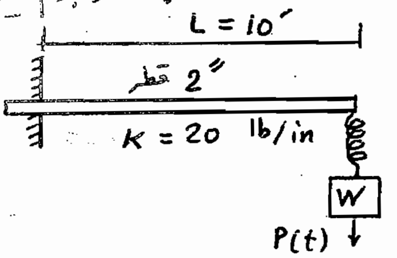
هر قاب دارای دو مهار است ولی یکی در کشش است که مقاومت جانبی را ایجاد می‌نماید و دیگری در فشار رها می‌کند که فرض می‌شود به کمانش برسد (در اثر بار محوری) و بسیار کم در مقاومت جانبی مشارکت می‌نماید. چون دو قاب مهار بود پس:

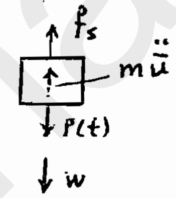
$$K_{E-W} = 2 \times 59.8 = 119.6 \quad kips/in$$

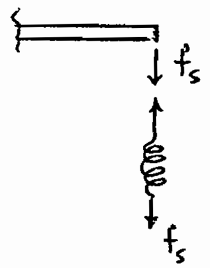
معادله حرکت : $\underline{m\ddot{u} + K_{E-W}\,u = 0}$

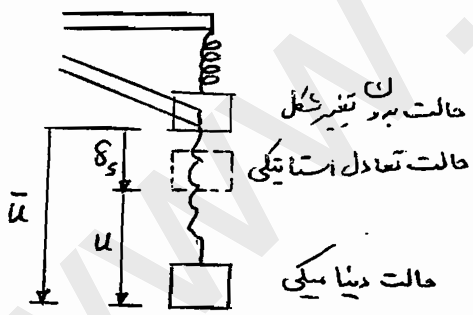
توجه: سختی یک ستون در جهت شرق-غرب $K_{\text{ستون}} = \frac{12 E I_y}{h^3} = 2.13 \; kips/in$ است که به هر حال از نظر نسبی قابل توجه نمی‌باشد (پس صرف‌نظر شد).

مثال - با توجه به سیستم زیر که وزنه W توسط فنری از انتهای یک تیر طره آویزان است، معادله حرکت وزنه W را بنویسید، تیر فلزی است $(E = 29000 \; ksi)$ دارای جرم تیر و فنر صرف‌نظر می‌شود.









$$m\ddot{\bar{u}} + f_s = W + P(t)$$

$$f_s = K_e \bar{u}$$

$$m\ddot{\bar{u}} + K_e \bar{u} = W + P(t)$$

$$\bar{u} = \delta_s + u$$

$$\ddot{\bar{u}} = 0 + \ddot{u}$$

δ_s تغییرمکان در اثر W (استاتیکی)

u " " " $P(t)$ (دینامیکی)

$K_e \delta_s = W \quad \rightarrow \quad \underline{m\ddot{u} + K_e u = P(t)}$ معادله حرکت

K_e باید محاسبه شود.

ملاحظه می‌شود وقتی معادله برحسب تغییرمکان دینامیکی u است، وزن در معادله اثر ندارد. معمولاً معادله حرکت از حالت استاتیکی به بعد نوشته و حل می‌شود پس اثر حالت استاتیکی ملحوظ می‌شود (اگر رفتار خطی باشد).

محاسبه سختی موثر

$$f_s = K_e \bar{u} \qquad ①$$

$$\bar{u} = \delta_{\text{فنر}} + \delta_{\text{تیر}} \qquad ②$$

$\delta_{\text{تیر}}$ عبارت از تغییرشکل انتهای تیر طره است

$\delta_{\text{فنر}}$ " " " " " فنر است.

با توجه به شکل کوچک صفحه قبل:

$$f_s = K\delta_{\text{فنر}} = K_{\text{تیر}}\,\delta_{\text{تیر}} \qquad ③$$

در معادله ② بجای $\bar{u}$ از ① و بجای δها از ③ قرار می‌دهیم:

$$\frac{f_s}{K_e} = \frac{f_s}{K} + \frac{f_s}{K_{\text{تیر}}} \qquad \text{یا} \qquad K_e = \frac{K\,K_{\text{تیر}}}{K + K_{\text{تیر}}}$$

$$K = 20 \ \text{lb/in} \rightarrow , \qquad K_{\text{تیر}} = \frac{3EI}{L^3} = \frac{3(29\times10^6)[\pi(1)^4/4]}{(10\times12)^3} = 39.54 \ \text{lb/in}$$

$$\Rightarrow \underline{K_e = 13.28 \ \text{lb/in}}$$

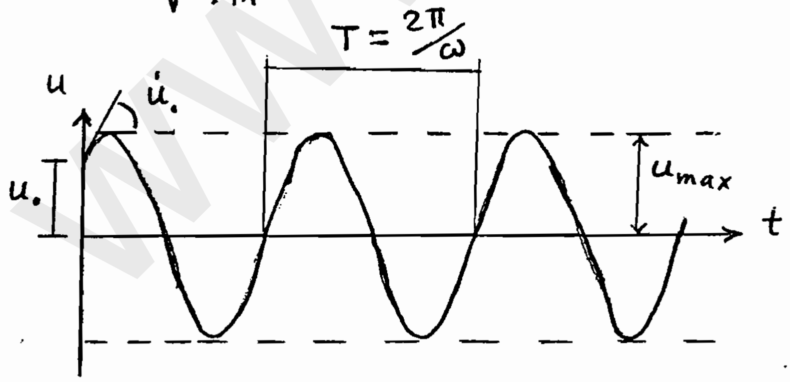
ارتعاش آزاد SDOF

الف - بدون میرایی

$$m\ddot{u} + ku = 0$$

شرایط اولیه $u_0 , \dot{u}_0 \longrightarrow u(t) = u_0 \cos\omega t + \frac{\dot{u}_0}{\omega}\sin\omega t$

$$\omega = \sqrt{k/m}$$



$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

پریود، فرکانس و فرکانس زاویه‌ای طبیعی سیستم

$$\delta_s = W/K = mg/K \Rightarrow$$

$$\omega = \sqrt{g/\delta_s} \ , \quad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{g/\delta_s} \ , \quad T = 2\pi\sqrt{\delta_s/g}$$

دامنه حرکت $u_{max} = \sqrt{u_0^2 + \left(\frac{\dot{u}_0}{\omega}\right)^2}$

پاسخ ارتعاش آزاد یک سیستم معادل یک درجه آزادی بدون میرائی

$f_I + f_s = 0$

فرض: شرایط اولیه $\begin{cases} u(t=0)=u_0 \\ \dot{u}(t=0)=\dot{u}_0 \end{cases}$

$m\ddot{u} + ku = 0 \rightarrow \ddot{u} + \frac{k}{m}u = 0$

$m \neq 0 \,,\, k \neq 0 \rightarrow k/m = \omega^2$: فعلاً ω مفهوم فیزیکی ندارد.

(1) $\ddot{u} + \omega^2 u = 0 \longrightarrow$ برای حل $\rightarrow$ پاسخ فرضی $u(t) = \bar{c}\, e^{st}$

$\dot{u} = \bar{c} s e^{st} \rightarrow \ddot{u} = \bar{c} s^2 e^{st} \Rightarrow$ در معادله (1) $\bar{c} e^{st}(s^2+\omega^2) = 0$

$\bar{c} e^{st} \neq 0 \rightarrow s^2 + \omega^2 = 0 \rightarrow s = \pm i\omega \quad (i=\sqrt{-1})$

$\Rightarrow$ پاسخ معادله $u(t) = \bar{c}_1 e^{i\omega t} + \bar{c}_2 e^{-i\omega t}$ (2)

ترجیح می دهیم، رابطه از حالت تابع اکسپوننسیل به حالت هارمونیک نوشته شود.

از رابطه مثلثاتی اولر استفاده می کنیم: $e^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm i \sin\theta$

$\Rightarrow (2) \rightarrow u(t) = \bar{c}_1 \cos\omega t + i\bar{c}_1 \sin\omega t + \bar{c}_2 \cos\omega t - i\bar{c}_2 \sin\omega t$

$$u(t) = \underbrace{(\bar{c}_1 + \bar{c}_2)}_{A} \cos\omega t + \underbrace{(i\bar{c}_1 - i\bar{c}_2)}_{B} \sin\omega t$$

$$u(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

برای تعیین ضرایب ثابت A و B از شرایط اولیه استفاده می کنیم:

$u(t=0) = u_0 = A\times 1 + B\times 0 \rightarrow A = u_0$

$\dot{u}(t) = -A\omega \sin\omega t + B\omega\cos\omega t$

$\dot{u}(t=0) = \dot{u}_0 = -A\omega\times 0 + B\omega\times 1 \rightarrow B = \dot{u}_0/\omega$

$$\boxed{u(t) = u_0 \cos\omega t + \frac{\dot{u}_0}{\omega}\sin\omega t}$$

به کمک روابط مثلثاتی $u(t) = \rho \sin(\omega t + \alpha)$

$\rho = u_{max} = \sqrt{u_0^2 + (\frac{\dot{u}_0}{\omega})^2}$

$\alpha = Arc\,tg\, \frac{\omega u_0}{\dot{u}_0}$

پاسخ بصورت تابع هارمونیکی است با دامنه ρ (u_{max}) و سیکل تناوب با فاصله زمانی T (پریود تابع)، فاصله زمانی T عبارت است از مدتی که آرگومان تابع یعنی $(\omega t + \alpha)$ با مقدار 2π افزایش می یابد:

$(\omega t + \alpha) + 2\pi = \omega(t+T) + \alpha \Rightarrow T = 2\pi/\omega$

فرکانس: تعداد سیکل در یک ثانیه f

$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \rightarrow \omega = 2\pi f$

پس ω تعداد سیکل تناوب در 2π ثانیه که به فرکانس زاویه ای موسوم است.

مثال - در ساختمان صنعتی مثال های قبل مطلوبست برآورد ω ، T و f در دو جهت؟

$$\omega_{N-S} = \sqrt{K/m} = \sqrt{\frac{38.58}{0.04663}} = 28.73 \quad Rad/sec$$

$$T_{N-S} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{28.73} = 0.219 \quad sec$$

$$f_{N-S} = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.219} = 4.57 \quad Hz$$

$$\omega_{E-W} = \sqrt{\frac{119.6}{0.04663}} = 50.64 \quad Rad/sec$$

$$T_{E-W} = \frac{2\pi}{50.64} = 0.124 \quad Sec \quad , \quad f_{E-W} = \frac{1}{0.124} = 8.06 \quad Hz$$

$$\omega_{N-S} < \omega_{E-W}$$

مثال - در مثال های قبل (طره با وزنه در انتها)، مطلوبست تعیین f و T

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{g/\delta_s} \quad , \quad \delta_s = \frac{W}{K_e} = \frac{20}{13.28} = 1.494 \quad in$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{386}{1.494}} = 2.56 \quad Hz \quad , \quad T = \frac{1}{f} = 0.391 \quad Sec$$

ارتعاش آزاد SDOF

ب - حالت با میرایی

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0$$

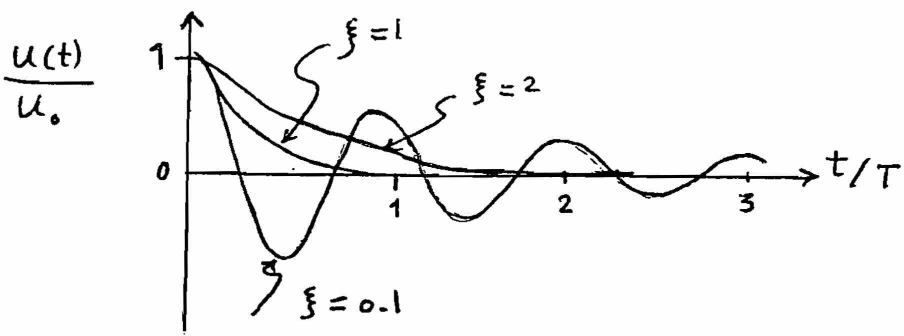
$$K/m = \omega^2 \quad , \quad \underbrace{C_{cr}}_{\text{میرایی بحرانی}} = 2m\omega \quad \Rightarrow \quad \ddot{u} + 2\xi\omega\dot{u} + \omega^2 u = 0$$

$$\xi = \frac{\overset{\text{موجود}}{C}}{\underset{\text{بحرانی}}{C_{cr}}} \quad \text{درصد میرایی}$$

$C = C_{cr} \rightarrow \xi = 1$ حالت بحرانی

$C > C_{cr} \rightarrow \xi > 1$ حالت فوق بحرانی

در عمل (واقعیت): حالت زیر بحرانی $\xi < 1$ یا $C < C_{cr}$



برای ساختمانها، پل، سد، تأسیسات هسته‌ای، سازه‌های دریایی و .... $\xi < 0.1$

پاسخ ارتعاش آزاد یک سیستم معادل یکدرجه آزادی با میرائی

$$f_I + f_D + f_s = 0$$

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + Ku = 0 \rightarrow m \neq 0 \rightarrow \ddot{u} + \frac{c}{m}\dot{u} + \frac{k}{m}u = 0 \quad ①$$

جواب فرضی : $u(t) = \bar{c}e^{st}$, $\dot{u} = \bar{c}se^{st}$, $\ddot{u} = \bar{c}s^2e^{st} \rightarrow$ در ①

$$\bar{c}e^{st}\left(s^2 + \frac{c}{m}s + \omega^2\right) = 0 \longrightarrow s^2 + \frac{c}{m}s + \omega^2 = 0 \Rightarrow$$

$$S = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega^2} \rightarrow$$ سه حالت برای زیر رادیکال متصور است

اگر $\frac{c}{2m} = \omega \longrightarrow$ مقدار c را بحرانی نامند $\Rightarrow \boxed{C_{cr} = 2m\omega}$

اگر از درصد استهلاک استفاده شود $\xi = \frac{C_{\text{موجود}}}{C_{cr}} \rightarrow S = -\xi\omega \pm \omega\sqrt{\xi^2 - 1}$

$$\frac{C}{2m} = \frac{C\omega}{2m\omega} = \frac{C\omega}{C_{cr}} = \xi\omega \nearrow$$

تابع پاسخ اکسپوناسیل $\rightarrow$ جواب S عدد حقیقی $\rightarrow$ حالت بحرانی $\xi = 1$ یا 100% $\rightarrow$ زیر رادیکال صفر

" " " $\rightarrow$ جواب S دو عدد حقیقی $\rightarrow$ حالت فوق بحرانی $\xi > 1$ $\rightarrow$ زیر رادیکال مثبت

که در عمل ، ارتعاش آزاد کلیه ابنیه (سازه های متعارف عمرانی) دارای میرائی خیلی کمتر از بحرانی است و

تابع پاسخ دارای حالت نوسانی (ارتعاش) است : 100% یا $\xi \ll 1$, $C_{\text{موجود}} \ll C_{cr}$

برای بدست آوردن تابع پاسخ :

$$S = -\xi\omega \pm i\omega\sqrt{1-\xi^2} \quad , \quad \omega\sqrt{1-\xi^2} = \omega_D$$ فرض می کنیم $\Rightarrow$

$$S = -\xi\omega \pm i\omega_D \Rightarrow u(t) = \bar{C}_1 e^{-\xi\omega t + i\omega_D t} + \bar{C}_2 e^{-\xi\omega t - i\omega_D t}$$

$$u(t) = e^{-\xi\omega t}\left(\bar{C}_1 e^{i\omega_D t} + \bar{C}_2 e^{-i\omega_D t}\right)$$

عبارت داخل پرانتز شبیه پاسخ ارتعاش آزاد بدون میرایی است فقط ω به ω_D تبدیل شده ،

پس می توانه به کمک رابطه اولر مثلثاتی ، پاسخ را بصورت هارمونیک نوشت :

$$u(t) = e^{-\xi\omega t}\left(A\cos\omega_D t + B\sin\omega_D t\right)$$

$\dot{u}_0$, u_0 از شرایط اولیه $\Rightarrow A = u_0$, $B = \frac{\dot{u}_0 + \xi\omega u_0}{\omega_D}$

$$\boxed{u(t) = e^{-\xi\omega t}\left(u_0\cos\omega_D t + \frac{\dot{u}_0 + \xi\omega u_0}{\omega_D}\sin\omega_D t\right)}$$

می توان دو تابع هارمونیک را تبدیل به یک تابع نمود :

$$u(t) = e^{-\xi\omega t}\rho\sin(\omega_D t + \alpha) = e^{-\xi\omega t}\rho\cos(\omega_D t - \theta)$$

که $\rho = \sqrt{A^2 + B^2}$, $\alpha = \mathrm{Arctan}\, A/B$, $\theta = \mathrm{Arctan}\, B/A$

$$u(t) = e^{-\xi\omega t}\left[u_0 \cos\omega_D t + \left(\frac{\dot{u}_0 + \xi\omega u_0}{\omega_D}\right)\sin\omega_D t\right]$$

$$\omega_D = \omega\sqrt{1-\xi^2}$$ فرکانس زاویه‌ای میرایی

$\omega_D \# \omega$

برای $\xi < 0.2$

$$T_D = \frac{T}{\sqrt{1-\xi^2}}$$ پریود طبیعی میرایی

دامنه حرکت در ارتعاش آزاد با میرایی در هر سیکل حرکت کاهش می‌یابد و پوش آنها:

$$\pm \rho e^{-\xi\omega t} \quad , \quad \rho = \sqrt{u_0^2 + \left(\frac{\dot{u}_0 + \xi\omega u_0}{\omega_D}\right)^2}$$

$$\frac{u_i}{u_{i+1}} = \exp\left(\frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) \rightarrow \delta = \ln\frac{u_i}{u_{i+1}} = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\sqrt{1-\xi^2} \simeq 1 \Rightarrow \delta \simeq 2\pi\xi$$

کاهندگی لگاریتمی

معمولاً بهتر است بجای دو سیکل متوالی از چند سیکل فاصله برای کاهندگی لگاریتمی استفاده شود،

$$\frac{u_1}{u_{j+1}} = \frac{u_1}{u_2}\,\frac{u_2}{u_3}\,\frac{u_3}{u_4}\cdots\frac{u_j}{u_{j+1}} = e^{j\delta}$$

$$\Rightarrow \quad \delta = \frac{1}{j}\ln\frac{u_1}{u_{j+1}} \simeq 2\pi\xi$$

رابطه بیان کننده تعداد سیکل لازم برای کاهش 50% دامنه حرکت:

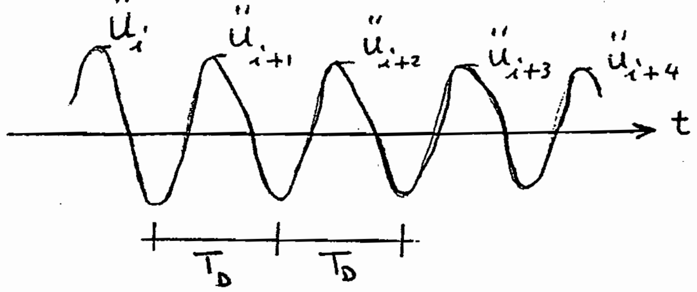
$$j_{50\%} \simeq \frac{0.11}{\xi}$$

تعیین تحلیلی درصد میرایی ممکن نیست لذا از روش های تجربی استفاده می شود. یکی از این روش ها، حالت ارتعاش آزاد سازه واقعی است،

$$\xi = \frac{1}{2\pi j}\ln\frac{u_i}{u_{i+j}} \qquad \text{یا} \qquad \xi = \frac{1}{2\pi j}\ln\frac{\ddot{u}_i}{\ddot{u}_{i+j}}$$

اگر آزمایش اجازه ثبت u را بدهد — اگر آزمایش اجازه ثبت شتاب را بدهد

معمولاً در عمل حالت ثبت شتاب سازه در آزمایش ارتعاش آزاد سهل تر است.



شتاب نگاشت ارتعاش آزاد سازه

از شتاب نگاشت می توان ارتعاش آزاد را بررسی و پریود واقعی را محاسبه نمود و از روش تحلیلی و کاربرد سختی و جرم نیز محاسبه و مقایسه کرد تا دقت تعیین سختی و جرم ارزیابی شود.

مثال - مطلوبست تعیین پریود طبیعی و درصد میرایی یک قاب (مدل) که تحت آزمایش ارتعاش آزاد قرار گرفته است. نتیجه آزمایش بصورت زیر است:

Peak	Time, t_i (sec)	Peak, $\ddot{u}_i$ (g)
1	1.110	0.915
11	3.844	0.076

$$T_D = \frac{3.844 - 1.110}{10} = 0.273 \text{ sec}$$

$$\xi = \frac{1}{2\pi(10)} \ln \frac{0.915g}{0.076g} = 0.0396 \quad \text{یا} \quad 3.96\%$$

مثال - یک مخزن آب هوایی که خالی است درنظر گرفته می شود، یک کابل به مخزن متصل بوده و نیروی افقی 16.4 kips اعمال شده که باعث ″2 تغییرمکان افقی مخزن شده است، کابل بصورت ناگهانی قطع و ارتعاش آزاد رخ می دهد، در پایان چهار سیکل کامل، زمان ۲ ثانیه و دامنه حرکت ″1 می باشد. با اطلاعات فوق مطلوبست محاسبه: الف) درصد میرایی ب) پریود طبیعی بدون میرایی ج) سختی موثر سیستم د) وزن موثر سیستم ه) ضریب میرایی و) تعداد سیکل لازم برای اینکه دامنه حرکت به ″0.2 کاهش یابد.

الف) در ۴ سیکل دامنه از ۲ به ۱ رسیده

$$j_{50\%} \simeq \frac{0.11}{\xi} \rightarrow \xi = \frac{0.11}{4} = 0.0275 = 2.75\%$$

ب) $T_D = \frac{2.0}{4} = 0.5 \text{ sec}$, $T \simeq T_D = 0.5 \text{ sec}$ و ج) $k = \frac{16.4}{2} = 8.2 \ \frac{\text{kips}}{\text{in}}$

د) $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.5} = 12.57 \ \text{Rad/s}$

$$m = \frac{k}{\omega^2} = \frac{8.2}{(12.57)^2} = 0.0519 \ \text{kip-sec}^2/\text{in}$$

$$W = mg = (0.0519)\,386 = 20.03 \quad \text{kips}$$

ه) $C = \xi\,(2\sqrt{km}) = 0.0275\left[2\sqrt{8.2\,(0.0519)}\right] = 0.0359$ kip-sec/in

و) $\xi \simeq \frac{1}{2\pi j}\ln\frac{u_1}{u_{1+j}} \rightarrow j \simeq \frac{1}{2\pi(0.0275)}\ln\frac{2}{0.2} = 13.32 \sim 13$ سیکل

مثال ـ وزن آب لازم برای پرکردن مخزن آب هوایی در مثال قبل برابر 80 kips می‌باشد، مطلوبست پیشینه پریود طبیعی و درصد میرایی مخزن پر؟

$$W = 20.03 + 80 = 100.03 \quad \text{kips}$$

$$m = \frac{100.03}{386} = 0.2591 \quad \text{kip-s}^2/\text{in}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0.2591}{8.2}} = 1.12 \quad \text{sec}$$

$$\xi = \frac{C}{2\sqrt{km}} = \frac{0.0359}{2\sqrt{8.2\,(0.2591)}} = 0.0123 = 1.23\%$$

انرژی ارتعاش آزاد

انرژی یک سیستم SDOF در اثر ارتعاش آزاد (شرایط اولیه u_0 و $\dot{u}_0$) ؛ در لحظه شروع :

$$E_I = \frac{1}{2}k(u_0)^2 + \frac{1}{2}m(\dot{u}_0)^2$$

در هر لحظه از ارتعاش آزاد، انرژی کل از جمع دو انرژی است ؛ انرژی جنبشی E_K و انرژی پتانسیل از کرنش E_s :

$$E_K = \frac{1}{2}m\dot{u}^2(t) \quad , \quad E_s = \frac{1}{2}k u^2(t)$$

بجای $u(t)$ از معادلش در حالت ارتعاش بدون میرایی قرار می‌دهیم :

$$E_s(t) = \frac{1}{2}k\left[u_0\cos\omega t + \frac{\dot{u}_0}{\omega}\sin\omega t\right]^2$$

$$E_K(t) = \frac{1}{2}m\omega^2\left[-u_0\sin\omega t + \frac{\dot{u}_0}{\omega}\cos\omega t\right]^2$$

انرژی کل :

$$E_K(t) + E_s(t) = \frac{1}{2}k u_0^2 + \frac{1}{2}m\dot{u}_0^2$$

مقدار کل انرژی در هر لحظه مستقل از زمان بوده و برابر انرژی لحظه ابتدایی است (میرایی صرفنظر شده).

واکنش سیستم‌های SDOF در بارگذاری هارمونیک

این بخش از مباحث کلاسیک و پایه‌ای دینامیک سازه‌هاست. چرا؟
از یک طرف اکثر بارها بصورت هارمونیکی بیان می‌شوند (نیروی نامتعادل ماشین‌های چرخان، امواج دریا، زلزله، بارهای پریودیک و .....)،
از طرف دیگر، درک رفتار سازه‌ها در برابر نیروهای هارمونیک کمک فراوانی به درک واکنش سازه در برابر سایر نیروها می‌نماید.
در ضمن نوع تابع هارمونیک و نتایج حاصل از تحلیل و تفسیر آنها ساده می‌باشد.

$$P(t) = P_0 \sin \Omega t$$

الف - حالت بدون میرایی:

$$m\ddot{u} + Ku = P_0 \sin \Omega t \qquad \beta = \frac{\Omega}{\omega}$$

$$u(t) = \left[u_0 \cos \omega t + \left(\frac{\dot{u}_0}{\omega} - \frac{P_0}{K}\frac{\beta}{1-\beta^2}\right)\sin \omega t\right] + \frac{P_0}{K}\frac{1}{1-\beta^2}\sin \Omega t$$

اگر شرایط اولیه صفر باشد: $u_0 = \dot{u}_0 = 0$

$$u(t) = \frac{P_0}{K}\frac{1}{1-\beta^2}(\underbrace{\sin \Omega t}_{\text{پایدار}} - \underbrace{\beta \sin \omega t}_{\text{گذرا}})$$

$$R(t) = \frac{u(t)}{u_{st}} \quad \text{ضریب رفتار} \quad \leftarrow \quad u_{st} = \frac{P_0}{K}$$

$$R_{max}(t) = D = \frac{u_{max}(t)}{u_{st}} = \frac{\frac{P_0}{K}\frac{1}{1-\beta^2}\overset{1}{\cancel{\sin \Omega t}}}{P_0/K} = \frac{1}{|1-\beta^2|}$$

ضریب بزرگنمایی تغییرمکان

حالت تشدید (رزونانس) $\Omega = \omega \rightarrow \beta = 1 \rightarrow D = \frac{1}{0} = \infty$

$u(t) \nearrow \infty \longrightarrow$ با رفع ابهام:

$$u(t) = -0.5\frac{P_0}{K}(\omega t \cos \omega t - \sin \omega t)$$

اگر میرایی درنظر گرفته شود ، برای محاسبه انرژی جنبشی و پتانسیل باید از $u(t)$ حالت ارتعاش آزاد با میرایی استفاده نمود .

انرژی کل در این حالت دارای تابع کاهشی در زمان خواهد بود چون مقداری از انرژی بصورت لزجی استهلاک میشود که در مدت زمان صفر تا t برابر :

$$E_D = \int_0^u f_D(t)\,du = \int_0^u c\dot{u}\,du = \int_0^t c\dot{u}^2\,dt$$

مقدار انرژی کل اولیه (لحظه اول شروع ارتعاش) به مرور مستهلک خواهد شد .

ب- حالت با میرایی :

$$m\ddot{u}+c\dot{u}+Ku=P_0\sin\Omega t$$

$$u(t)=e^{-\xi\omega t}(A\cos\omega_D t+B\sin\omega_D t)+M\sin\Omega t+N\cos\Omega t$$

A و B از شرایط اولیه بدست می‌آید.

$$M=\frac{P_0}{K}\frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}$$

$$N=\frac{P_0}{K}\frac{-2\xi\beta}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}$$

اگر از جواب گذرا صرفنظر شود :

$$u(t)\simeq u_p(t)=\rho\sin(\Omega t-\alpha)$$

$$\rho=\frac{P_0}{K}\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}}$$

$$\alpha=\operatorname{Arctan}\left(\frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}\right)$$

$$D=\frac{\rho}{P_0/K}=\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}}$$

$\beta\to1\Rightarrow D=\frac{1}{2\xi}$ در رزونانس

توجه: حداکثر D در مقادیری قدری کمتر از $\beta=1$

$$\frac{dD}{d\beta}=-4\beta(1-\beta^2)+8\xi^2\beta=0\to\beta^2=1-2\xi^2$$

برای مثال $\xi=15\%$ ← حداکثر D به ازاء $\beta=0.977$ حاصل می‌شود.

اگر از جواب گذرا صرفنظر نشود (با شرایط اولیه صفر $u_0=\dot{u}_0=0$) :

$$u(t)=\frac{P_0}{K}\frac{1}{2\xi}\left[e^{-\xi\omega t}\left(\cos\omega_D t+\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_D t\right)-\cos\omega t\right]$$

ترم sin در عبارت بالا کوچک است (صرفنظر می‌شود) , $\omega_D\simeq\omega$:

$$u(t)\simeq\frac{P_0}{K}\frac{1}{2\xi}(e^{-\xi\omega t}-1)\cos\omega t$$

برای حالت حذف جواب گذرا :

۱- اگر $\beta << 1$ (تغییرات نیرو آهسته است) ، ضریب بزرگنمایی D کمی بزرگتر از یک است و مستقل از میرایی ، پس $u_{max} \simeq \rho \simeq \frac{P_0}{K}$

رفتار دینامیکی مانند تغییر شکل استاتیکی است.

* سختی سیستم کنترل کننده است . $D \simeq 1$

۲ـ اگر $\beta \gg 1$ (تغییرات نیرو سریع است) ، با افزایش β مقدار D به سمت صفر میل می کند و میرایی اثر زیادی ندارد . برای مقادیر بزرگ β ، ترم β^4 در بیان عبارت D تعیین کننده است و تقریباً داریم :

$$D = \frac{\rho}{P_0/K} \simeq \frac{1}{\beta^2} = \frac{\omega^2}{\Omega^2}$$

* جرم کنترل کننده است . دامنه حرکت $\rho \simeq \frac{P_0}{K}\frac{\omega^2}{\Omega^2} = \frac{P_0}{m\Omega^2}$

۳ـ اگر $\beta \simeq 1$ (فرکانس بارگذاری و فرکانس طبیعی سیستم تقریباً برابر است) ، مقدار D بسیار به درصد میرایی حساس است . تغییر شکل دینامیکی خیلی از تغییر شکل استاتیکی بزرگتر است . $\rho = \frac{P_0/K}{2\xi} = \frac{P_0}{C\omega}$

* میرایی کنترل کننده است .

مثال ـ دامنه حرکت (با تقریب ρ) یک سیستم معادل یک درجه آزادی تحت اثر دو حالت بارگذاری هارمونیکی بصورت زیر است ؛ مطلوبست تخمین درصد میرایی سیستم ؟

$\Omega = \omega \rightarrow \rho = 5''$ و $\Omega = 5\omega \rightarrow \rho = 0.02''$ ،

$\omega = \Omega$:

$$\rho = \frac{P_0}{k}\frac{1}{2\xi} = 5$$

$$\downarrow$$

$$\xi = 0.05 = 5\%$$

$\Omega = 5\omega$

$$\rho \simeq \frac{P_0}{k}\frac{1}{\beta^2} = \frac{P_0/k}{25} = 0.02 \rightarrow \frac{P_0}{K} = 0.5''$$

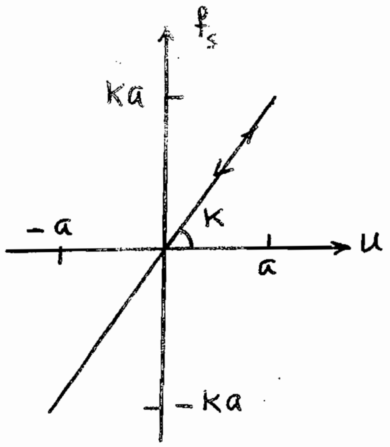
صفحه ۲۲ وجود ندارد .

براورد درصد میرایی از روش تشدید هارمونیکی

تئوری : نوسان کنندهٔ سادهٔ مستهلک شونده با فرکانس زاویه ای ω

$$P(t) = P_0 \sin \omega t \qquad , \quad \Omega = \omega \rightarrow \beta = 1$$

$$u(t) \simeq u_p(t) = \frac{P_0}{K} \frac{1}{(2\xi\beta)^2} (-2\xi\beta \cos \omega t)$$



$$u(t) = -\frac{P_0}{2K\xi} \cos \omega t$$

الف ـ نیروی f_s در فنر $\quad f_s = k u(t)$

دامنه $\quad a = P_0 / 2K\xi$

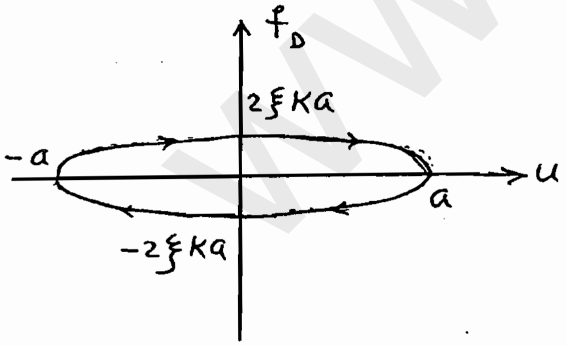
ب ـ نیروی f_D در میراگر $\quad f_D = c . \dot{u}(t)$

$$\frac{c}{m} = 2\xi\omega \rightarrow c = 2m\xi\omega \rightarrow f_D = 2m\xi\omega\dot{u}$$

$$u(t) = -a \cos \omega t \rightarrow \dot{u}(t) = a\omega \sin \omega t$$

$$f_D = 2m\xi\omega a \omega \sin \omega t = 2m\xi\omega^2 a \sin \omega t$$

$$\omega^2 = k/m \rightarrow \omega^2 m = k \rightarrow f_D = 2K\xi a \sin \omega t$$



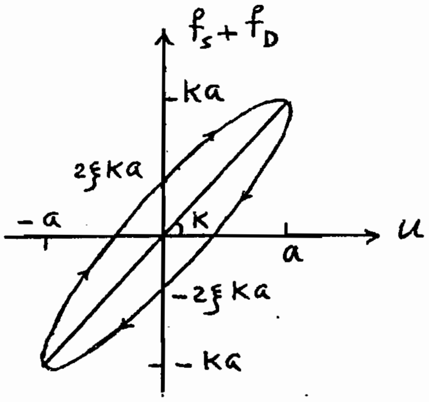
$$\frac{f_D}{2K\xi a} = \sin \omega t \rightarrow \left(\frac{f_D}{2K\xi a}\right)^2 = \sin^2 \omega t$$

$$\sin^2 \omega t = 1 - \cos^2 \omega t = 1 - u^2/a^2$$

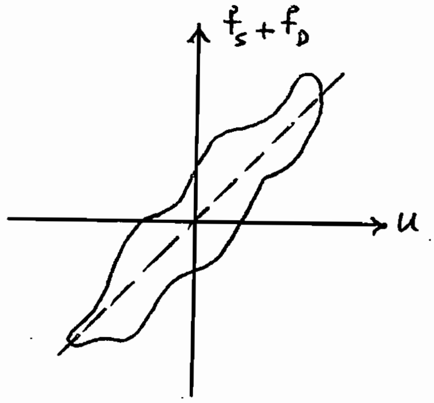
تابع بیضی $\quad f_D^2 / (2K\xi a)^2 = 1 - u^2/a^2$

در یک سیکل کامل ، مقدار انرژی پتانسیل در فنر تماماً پس داده می شود ولی انرژی استهلاک شده در میراگر مصرف می شود و مقدار آن برابر سطح زیر بیضی است :

$$A = 2\pi a^2 K\xi \quad \Rightarrow \quad \boxed{\xi = \frac{A}{2\pi a^2 K}}$$



رابطه بین مجموع دو نیروی f_s و f_D و تغییر مکان u :
شکل بدست آمده برای حالت تئوریک وایده آل بوده است ،



(منحنی در حالت واقعی)

از شکل مساحت بیضی ، مقدار a و K محاسبه و درصد میرایی نسبی تخمین زده می شود

$$\xi = A / 2\pi a^2 K$$

بتن مسلح 7% بتن پیش تنیده 5%

فولادی پیچ و مهره 7% فولادی جوش شده 4%

(توصیه سازمان انرژی اتمی آمریکا)

مقدار انرژی مستهلک شده یک سیستم SDOF در یک سیکل تحت اثر $P(t) = P_0 \sin\Omega t$

(جواب پایدار) :
$$E_D = \int f_D\,du = \int_0^{2\pi/\Omega} (c\dot u)\dot u\,dt = \int_0^{2\pi/\Omega} c\dot u^2\,dt$$

$$= c\int_0^{2\pi/\Omega} [\Omega\rho\cos(\Omega t-\alpha)]^2\,dt = \pi c\Omega\rho^2$$

توجه از قبل داشتیم : $u(t) \simeq u_p(t) = \rho\sin(\Omega t-\alpha)$

مثال - نیروی مقاوم برای حرکت جسمی در یک سیال با توان دو سرعت رابطه دارد $f_D = \pm b\dot u^2$
مطلوبست تعیین ضریب میرایی معادل لزجی C_{eq} برای چنین نیرویی که بر سیستم مرتعش تحت اثر نیروی هارمونیکی با دامنه حرکت ρ و فرکانس زاویه ای Ω و همچنین تخمین ρ در حالت $\Omega=\omega$ ؟

حل : اگر زمان از حالت تغییر مکان حداکثر منفی درنظر باشد : $u(t) = -\rho\cos\Omega t$

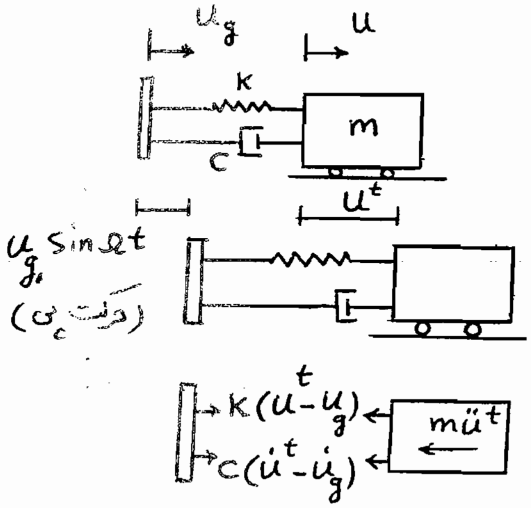
$$E_D = \int f_D\,du = \int_0^{2\pi/\Omega} f_D\,\dot u\,dt = 2\int_0^{\pi/\Omega} f_D\,\dot u\,dt = 2\int_0^{\pi/\Omega} (b\dot u^2)\,\dot u\,dt =$$

$$2b\Omega^3\rho^3\int_0^{\pi/\Omega}\sin^3\Omega t\,dt = \frac{8}{3}b\Omega^2\rho^3$$

$$\pi C_{eq}\Omega\rho^2 = 8/3\, b\Omega^2\rho^3 \rightarrow \underline{C_{eq} = 8/3\pi\; b\Omega\rho}$$

از قبل $\rightarrow \Omega=\omega \rightarrow \rho = \frac{P_0}{c\omega} \longrightarrow \underline{\rho = \left(\frac{3\pi}{8b}\,\frac{P_0}{\omega^2}\right)^{1/2}}$

کاهندگی ارتعاش



الف - انتقال حرکت از تکیه گاه به سازه

ماشین آلات - عبور قطار - انفجار - زلزله ...

$$u_g(t) = u_{g_0}\sin\Omega t \rightarrow \dot u_g = u_{g_0}\,\Omega\cos\Omega t$$

برای سادگی u^t را با u نشان می دهیم.

$$m\ddot u + c(\dot u-\dot u_g) + k(u-u_g) = 0$$

$$m\ddot u + c\dot u + ku = \underbrace{k u_{g_0}\sin\Omega t + c\Omega u_{g_0}\cos\Omega t}_{P_0\sin(\Omega t+\alpha)}$$

$$\frac{c\Omega}{k} = \frac{2c\Omega}{2m\omega^2} = \frac{2c\Omega}{\underbrace{2m\omega}_{c_{cr}}\times\omega} = 2\xi\beta$$

$$P_0 = u_{g_0}\sqrt{k^2+(c\Omega)^2} = u_{g_0}\,k\sqrt{1+(2\xi\beta)^2} \quad , \quad \tan\alpha = \frac{c\Omega}{k} = 2\xi\beta$$

$$m\ddot u + c\dot u + ku = P_0\sin(\Omega t+\alpha) \rightarrow u_{max} = \frac{P_0}{k}\,\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}}$$

$\downarrow$

حداکثر تغییر مکان منتقله از پی سازه به خود سازه وقتی پی بصورت $u_{g_0}\sin\Omega t$ ارتعاش می کند.

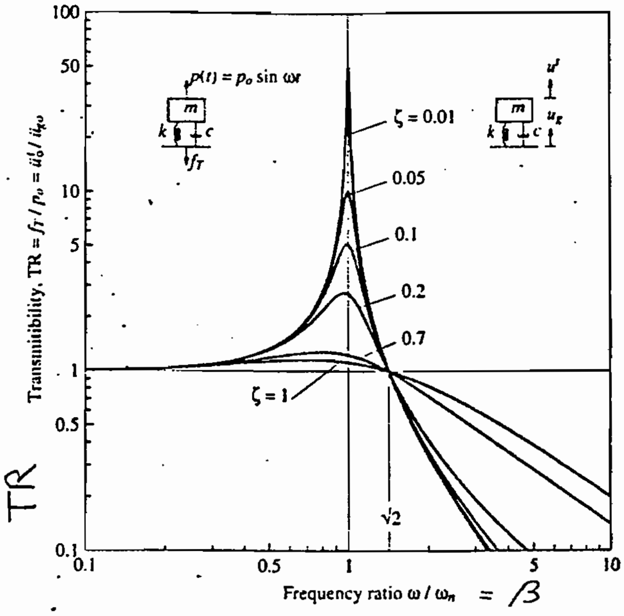
مساله مهم در کاهندگی ارتعاش: حفاظت سیستم از ارتعاشات مزاحم ناشی از حرکت تکیه گاه است.

ضریب قابلیت انتقال: معیاری جهت تعیین میزان انتقال حرکت از پی به دستگاه

$$TR = \frac{u_{max}}{u_{g_0}} = \frac{\frac{P_0}{k}\,\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}}}{P_0/k\,\frac{1}{\sqrt{1+(2\xi\beta)^2}}} = \frac{\sqrt{1+(2\xi\beta)^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}}$$

$$\Leftarrow \quad D = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}} \leftarrow$$ در بارگذاری sin

$$\boxed{TR = D\sqrt{1+(2\xi\beta)^2}}$$



- به ازای $\beta = \sqrt{2}$ همه منحنی ها از یک نقطه عبور و TR=1 (حداکثر تغییرمکان منتقله به سیستم برابر حداکثر (دامنه) ارتعاش پی).

- هرچه β از $\sqrt{2}$ بزرگتر باشد، ضریب انتقال کاهش پیدا می‌کند، بنابراین تغییرمکان منتقله کمتر می‌شود.

- هرچه ξ کمتر باشد، ضریب انتقال کمتر می‌شود! تأثیر نیروی میرایی هم و هرچه کمتر باشد، بهتر است.
نقش نیروی میرایی؟ نامطلوب!

u_{max} تغییرمکان حداکثر سیستم است ولی برای نیروی داخلی سازه در اثر حرکت تکیه‌گاهی باید تغییرمکان نسبی معلوم باشد: u_r

$$u_r = u - u_g$$

$$m\ddot{u}_r + c\dot{u}_r + Ku_r = -m\ddot{u}_g = mu_{g_0}\Omega^2 \sin \Omega t$$

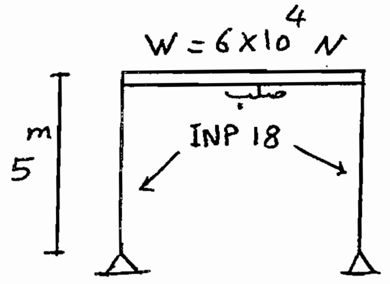
$$P_{eff} = -m\ddot{u}_g$$

$$u_{r\,max} = \frac{mu_{g_0}\Omega^2}{K} \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

$$\frac{m\Omega^2}{K} = \frac{\Omega^2}{\omega^2} = \beta^2 \rightarrow \frac{u_{r\,max}}{u_{g_0}} = \frac{\beta^2}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

$$u_{r\,max} = u_{g_0} D \beta^2$$

مثال ـ



تغییر مکان وارده به پی $u_g(t) = 0.4 \sin 4t$ (cm)

$$\begin{cases} E = 2.1\times10^{6}\ \mathrm{kg/cm^2} \\ I = 1450\ \mathrm{cm^4} \end{cases}$$

$\xi = 5\%$

$TR = ?$

حداکثر تنش موجود در ستون‌ها ؟

$$K = \frac{6EI}{h^3} = 146.2\ \mathrm{kgf/cm} = \frac{6\times2.1\times10^{6}\times1450}{(500)^3}$$

$$K = 146.2\times9.8\times100 = 143276\ \mathrm{N/m} \quad , \quad u_{g_0} = 0.4\ \mathrm{cm}$$

$$\omega = \sqrt{K/m} = \sqrt{\frac{143276\times9.8}{6\times10^4}} = 4.84\ \mathrm{Rad/s}$$

$$\Omega = 4\ \mathrm{Rad/s} \rightarrow \beta = 4/4.84 = 0.826$$

$$D = \frac{1}{\sqrt{(1-0.826^2)^2+(2\times0.05\times0.826)^2}} = 3.046$$

$$TR = 3.046\sqrt{1+(2\times0.05\times0.826)^2} = 3.056$$

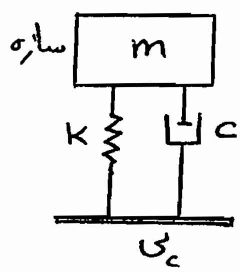
$$u_{r\,max} = u_{g_0} D \beta^2 = 0.4\times3.046\times(0.826)^2 = 0.83\ \mathrm{cm}$$

$$\text{نیروی هر ستون} = \frac{146.2\times0.83}{2} = 60.67\ \mathrm{kgf}$$

لنگر حداکثر هر ستون $M_{max} = 60.67\times500 = 30335\ \mathrm{kgf\text{-}cm}$

$$\sigma_{max} = \frac{M}{I/h} = \frac{30335}{1450/9} = 188.3\ \mathrm{kgf/cm^2}$$

$INP18 \rightarrow h=9$



ب ـ انتقال نیرو از سازه به تکیه‌گاه

در طراحی پی های ماشین‌های مرتعش بکار می‌رود .
سازه مرتعش است و هدف تعیین مقدار نیروی منتقله از سازه به تکیه‌گاه است .

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = P_0 \sin\Omega t$$

جواب پایدار $\quad u(t) = \rho \sin(\Omega t - \alpha)$

$$\rho = P_0/k \; \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} = \frac{P_0}{k} \times D$$

برآیند نیروهای انتقال یافته از سازه به پی برابر مجموع نیروهای فنر و کمک فنر است.
در استاتیک فقط نیروی ku منتقل می شود اما در دینامیک، ku و $c\dot{u}$ منتقل می شود:

$$R = f_s + f_D = ku + c\dot{u}$$

$$R = \rho\left[k\sin(\Omega t - \alpha) + c\Omega\cos(\Omega t - \alpha)\right] = \rho\sqrt{k^2 + c^2\Omega^2}\,\sin(\Omega t - \alpha + \gamma)$$

$$\gamma = \operatorname{Arctan}\left(\frac{c\Omega}{k}\right) = 2\xi\beta$$

$$(\alpha - \gamma) = \theta \quad \text{زاویه فاز} \rightarrow \quad \tan\theta = \frac{\tan\alpha - \tan\gamma}{1 + \tan\alpha\tan\gamma} = \frac{2\xi\beta^2}{1 - \beta^2 + 4\xi^2\beta}$$

$$R = \rho k\sqrt{1 + \left(\frac{c\Omega}{k}\right)^2}\,\sin(\Omega t - \theta) = \rho k\sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}\,\sin(\Omega t - \theta)$$

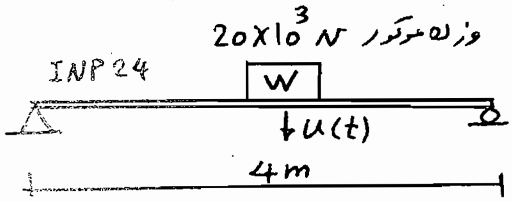
$$R_{max} = \frac{P_0\sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

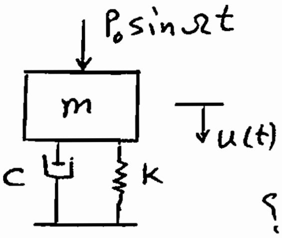
TR: قابلیت انتقال در این حالت عبارت از نسبت حداکثر نیروی انتقال یافته به تکیه گاه
به حداکثر نیروی هارمونیکی وارد بر سازه است.

$$TR = \frac{R_{max}}{P_0} = \frac{\sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} = D\sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}$$

شبیه حالت الف
انتقال حرکت از تکیه گاه به سازه و انتقال نیرو از سازه به تکیه گاه از یک قانون پیروی می کنند.
(منحنی تغییرات TR مشابه است).

مثال ـ





$\xi = 10\%$

نیروی انتقال یافته از موتور به تیر؟

$P(t) = (3\times10^4)\sin 40t \quad N$ از وزن تیر صرف‌نظر می‌گردد.

$I_x = 4250 \ cm^4 \quad , \quad E = 2.1\times10^6 \ kg/cm^2$

حل:

$$K = \frac{48EI}{L^3} = \frac{48\times2.1\times10^6\times4250}{(400)^3} = 6694 \quad kgf/cm$$

$$K = 6694\times9.8\times100 = 6560120 \quad N/m$$

$$\omega = \sqrt{K/m} = \sqrt{\frac{6560120\times9.8}{20\times10^3}} = 56.7 \quad Rad/s$$

$$\beta = \Omega/\omega = \frac{40}{56.7} = 0.7$$

$$u_{st} = P_0/K = \frac{3\times10^4}{6560120}\times100 = 0.46 \ cm$$

$$D = \frac{1}{\sqrt{(1-0.7^2)^2+(2\times0.1\times0.7)^2}} = 1.89$$

$$\rho = \frac{P_0}{K}D = 0.46\times1.89 = 0.87 \ cm$$ حداکثر تغییر مکان

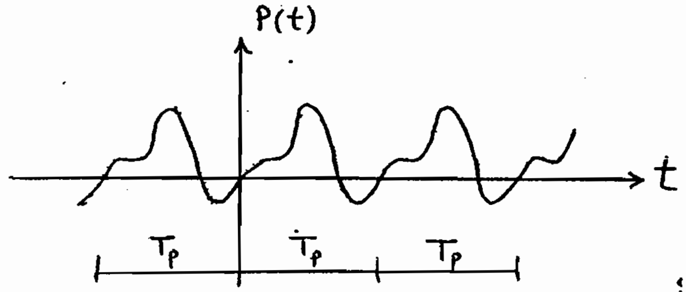
$$TR = D\sqrt{1+(2\xi\beta)^2} = 1.89\sqrt{1+(2\times0.1\times0.7)^2} = 1.91$$

$$P_{max} = P_0\times TR = 3\times10^4\times1.91 = 5.73\times10^4 \quad N$$

تأثیر نیروی دینامیکی

Periodic Excitation — پاسخ سیستم SDOF به بارگذاری پریودیک

نیروی پریودیک نیرویی که تابع آن پس از یک پریود ثابت، عیناً تکرار شود (پریود T_p).



نیروی پروانه کشتی، امواج روی سکوهای دریایی،

نیروی گردابی باد بر ساختمانهای بلند و لاغر و

خیلی نیروهای دیگر، پریودیک یا نزدیک به آن هستند؛

شبیه‌سازی زلزله و حرکت اتومبیل روی دهانه بلند پل‌ها به دلیل اثر بلند مدت خزش از آن جمله می‌باشند.

با کمک بسط سری فوریه، نیروی پریودیک به ترم های هارمونیک تبدیل می‌شود (رفتار سازه خطی).

$$P(t)_{\text{پریودیک}} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\Omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\Omega t)$$

$$a_0 = \frac{1}{T_p}\int_0^{T_p} P(t)\,dt$$ مقدار متوسط $P(t)$ در یک پریود

$$\begin{cases} \Omega = \dfrac{2\pi}{T_p} \\ n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

$$a_n = \frac{2}{T_p}\int_0^{T_p} P(t)\cos(n\Omega t)\,dt \quad , \quad b_n = \frac{2}{T_p}\int_0^{T_p} P(t)\sin(n\Omega t)\,dt$$

در تئوری ∞ ترم ولی در عمل چند ترم اول برای همگرایی کافی است.

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = P(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\Omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\Omega t)$$

$$\beta_n = \frac{\Omega_n}{\omega} = \frac{\frac{2\pi n}{T_p}}{\frac{2\pi}{T}} = \frac{nT}{T_p} = \frac{n\Omega_1}{\omega} \quad , \quad \Omega_n = n\Omega_1$$

از حل معادله برای هر ترم بارگذاری $\Rightarrow u(t)$

$$u(t) = \frac{a_0}{k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k}\,\frac{1}{(1-\beta_n^2)^2 + (2\xi\beta_n)^2}\Big\{\left[2\xi\beta_n a_n + (1-\beta_n^2) b_n\right]\sin\Omega_n t +$$

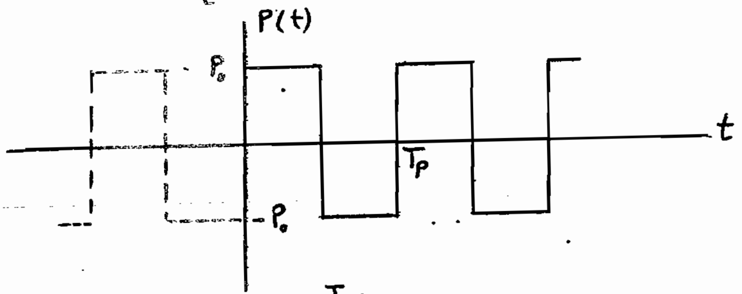
$$+\left[(1-\beta_n^2) a_n - 2\xi\beta_n b_n\right]\cos\Omega_n t\Big\}$$

$u(t)$ یک تابع پریودیک با پریود T_p

تأثیر نسبی هر ترم بستگی مستقیم به مقدار a_n و b_n از مولفه نیروی $P(t)$ و همینطور ضریب β_n دارد.

مثال - مطلوبست تحلیل یک SDOF تحت اثر نیروی پریودیک

$$P(t) = \begin{cases} P_0 & 0 \leqslant t \leqslant T_p/2 \\ -P_0 & T_p/2 \leqslant t \leqslant T_p \end{cases}$$



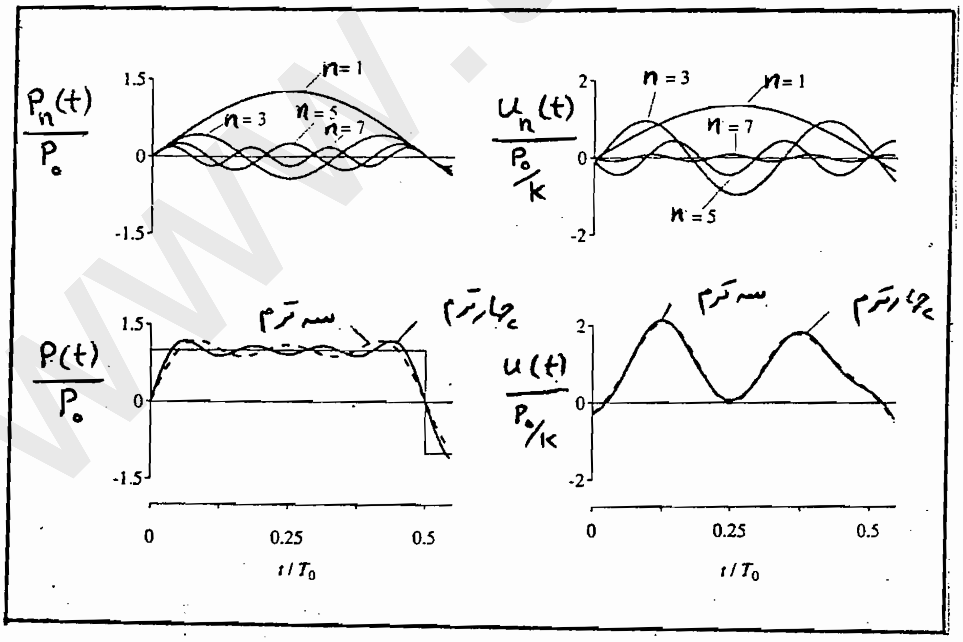
$$a_0 = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} P(t)\,dt = 0$$

$$a_n = \frac{2}{T_p}\left[P_0 \int_0^{T_p/2} \cos(n\Omega t)\,dt + (-P_0)\int_{T_p/2}^{T_p} \cos(n\Omega t)\,dt\right] = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T_p}\left[P_0 \int_0^{T_p/2} \sin(n\Omega t)\,dt + (-P_0)\int_{T_p/2}^{T_p} \sin(n\Omega t)\,dt\right] = \begin{cases} 0 & n \text{ زوج} \\ \dfrac{4P_0}{n\pi} & n \text{ فرد} \end{cases}$$

$$P(t) = \sum P_n(t) = \frac{4P_0}{\pi} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n\Omega t)$$

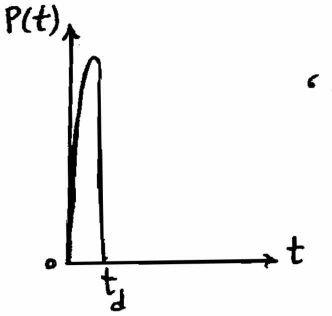
$$u(t) = \frac{P_0}{k}\,\frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n}\,\frac{(1-\beta_n^2)^2 \sin(n\Omega t) - 2\xi\beta_n \cos(n\Omega t)}{(1-\beta_n^2)^2 + (2\xi\beta_n)^2}$$



تحلیل دینامیکی SDF در بارگذاری اختیاری و کلی (انتگرال دو هامل)

Duhamel's integral (Response to ARBITRARY Force)

قبل از پرداختن به بارگذاری کلی (بدون محدودیت خاص) ، تحلیل دینامیکی در برابر بار آنی دیده می شود. مدت زمان اعمال بار بقدری کوتاه که سیستم فرصت عکس العمل ندارد ، بنابراین تغییرمکان در فاز بارگذاری تقریباً صفراست. میرایی در این نوع بارگذاری اثر بسیار ناچیز دارد. جواب سیستم در فاز ارتعاش آزاد خواهد بود: $t > t_d$



$\bar{t} = t - t_d$

شرایط اولیه در لحظه t_d برآورد شده و رابطه ارتعاش آزاد (بدون میرایی) نوشته می شود.

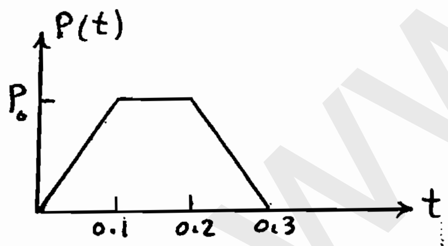
$$\text{ضربه} = \text{اندازه مقدار حرکت} \Rightarrow \int_0^{t_d} p(t)\,dt = m\Delta\dot{u} = m(\dot{u}_{t_d} - \overset{\text{صفر}}{\cancel{\dot{u}_0}}) = m\dot{u}_{t_d}$$

$u_{t_d} \neq 0$ و $\dot{u}_{t_d} = \dfrac{\int p(t)\,dt}{m}$

$$\text{رابطه ارتعاش آزاد} \quad u(\bar{t}) = \frac{\dot{u}_{t_d}}{\omega}\sin\omega\bar{t} + \overset{\text{صفر}}{\cancel{u_{t_d}\cos\omega t}} = \frac{\int_0^{t_d} p(t)\,dt}{m\omega}\sin\omega\bar{t}$$

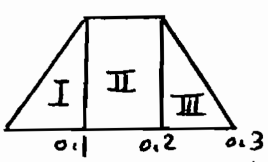
معمولاً اگر $t_d \leq \frac{T}{4}$ باشد ، جواب تقریبی فوق ، قابل قبول خواهد بود.

مثال - یک سیستم SDF با $T = 0.4\ sec$ تحت بار ذوزنقه ای شکل است. $u(t=1.8) = ?$



$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.4} = 15.7\ Rad/s \quad , \quad t_d = 0.3 > \frac{T}{4}$$

روش مستقیم یا ...



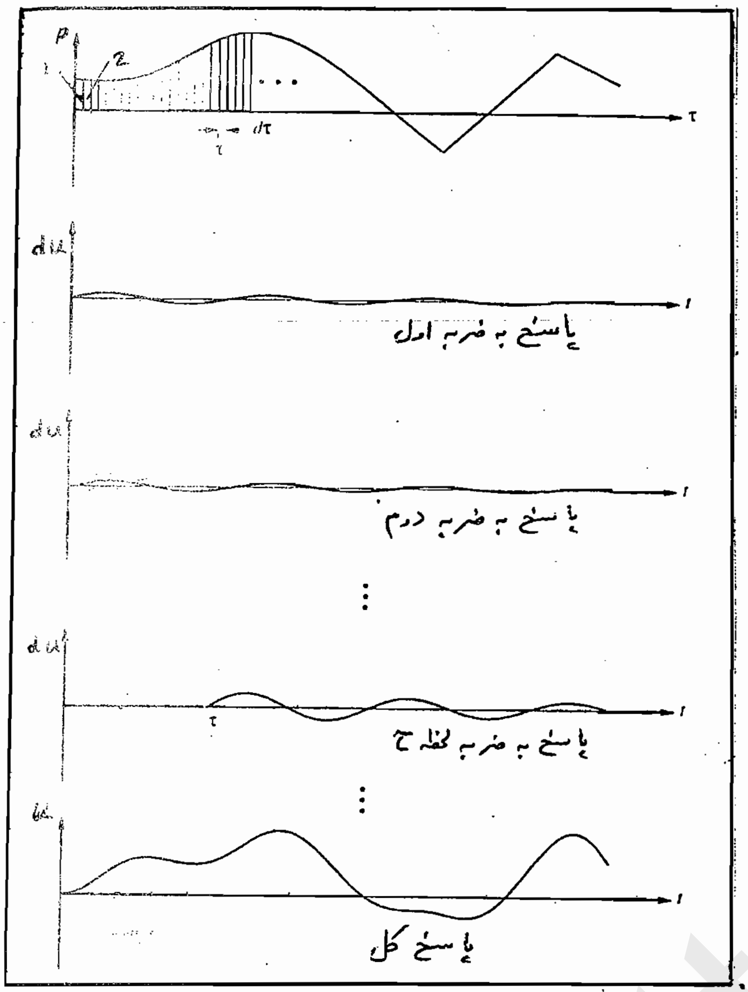
I مقطع فاز $\quad t_d = 0.1 = \frac{T}{4} \rightarrow u_1(\bar{t}=1.7) = \dfrac{0.1P_0}{2m\omega}\sin(1.7\omega)$

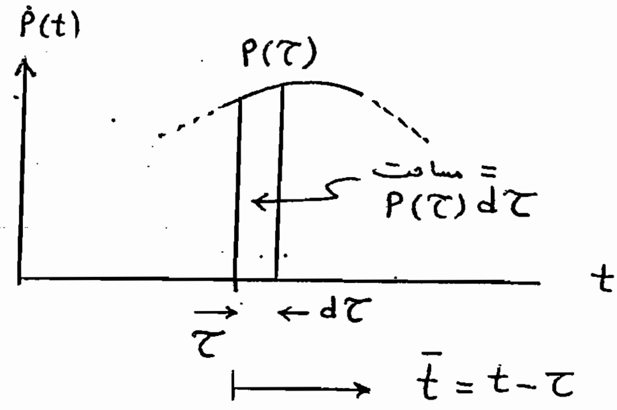
II مقطع فاز $\quad t_d = 0.1 = \frac{T}{4} \rightarrow u_2(\bar{t}=1.6) = \dfrac{0.1P_0}{m\omega}\sin(1.6\omega)$

III مقطع فاز $\quad t_d = 0.1 = \frac{T}{4} \rightarrow u_3(\bar{t}=1.5) = \dfrac{0.1P_0}{2m\omega}\sin(1.5\omega)$

$$\text{سیستم خطی} \rightarrow u(t=1.8) = u_1 + u_2 + u_3 = \frac{0.1P_0}{2m\omega}(\sin 1.7\omega + 2\sin 1.6\omega + \sin 1.5\omega)$$

اینک روش انتگرال دوهامل تشریح می‌شود:





$$du(\bar{t}) = \frac{P(\tau)\,d\tau}{m\omega}\sin\omega\bar{t}$$

$$\int_0^t du = u(t) = \frac{1}{m\omega}\int_0^t P(\tau)\sin\omega(t-\tau)\,d\tau$$

انتگرال دیوهامل برای حالت بدون میرایی

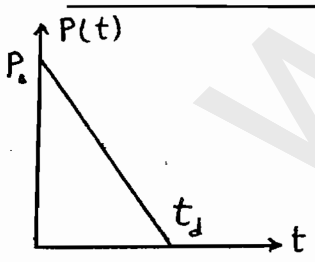
جواب خیلی دقیق است چون $d\tau \ll \frac{T}{4}$

پاسخ انتگرال دوهامل برای حالت با میرایی

$$u(t) = \frac{1}{m\omega_D}\int_0^t P(\tau)\,e^{-\xi\omega(t-\tau)}\sin\omega_D(t-\tau)\,d\tau$$

اگر تابع $P(t)$ پیچیده باشد یا شکل خاصی نداشته باشد، از روش برآورد عددی استفاده می‌شود،

در عمل، روش های عددی انتگرال دوهامل از کارایی خوبی برخوردار نمی‌باشد.



مثال - مطلوبست تحلیل یک SDF باروش انتگرال دوهامل برای بارگذاری زیر:

حالت بدون میرایی:

$$P(t) = P_0\left(1-\frac{t}{t_d}\right) \qquad 0 \le t \le t_d$$

$$u(t) = \frac{1}{m\omega}\int_0^t P_0\left(1-\frac{\tau}{t_d}\right)\sin\omega(t-\tau)\,d\tau$$

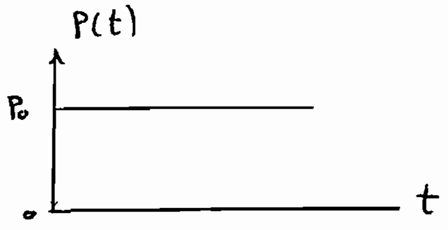
پس از عملیات پر حجم انتگرال گیری (شرایط اولیه صفر فرض شده است):

$$u(t) = \frac{P_0}{K}\left[1-\frac{t}{t_d}-\cos\omega t+\frac{1}{\omega t_d}\sin\omega t\right] \qquad 0 \le t \le t_d$$

برای $t>t_d$ (ارتعاش آزاد):

باید u و $\dot{u}$ در لحظه t_d برآورد شود و در رابطه ارتعاش آزاد قرار گیرد.

پاسخ سیستم SDF در چند حالت بارگذاری خاص



الف - STEP Force $\quad m\ddot{u}+ku=P(t)=P_0$

جواب بدون میرایی $\quad u(t)=\frac{P_0}{k}(1-\cos\omega t)$

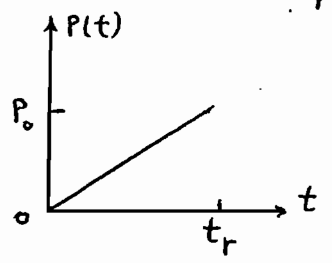
در این حالت $u(t)_{max} = 2\frac{P_0}{k}$ به ازای لحظه‌ای که پاسخ حداکثر می‌شود.

حالت با میرایی:

$$u(t)=\frac{P_0}{k}\left[1-e^{-\xi\omega t}\left(\cos\omega_D t+\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_D t\right)\right]$$

تحلیل بالا از روش مستقیم (حل معادله دیفرانسیل) یا انتگرال دوهامل قابل حصول است.

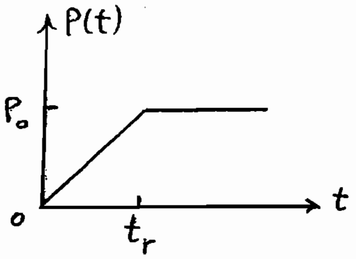
ب - RAMP Force (نیروی افزاینده خطی) $\quad P(t)=P_0\frac{t}{t_r}$



رفتار سازه خطی است و $\xi=0$:

$$u(t)=\frac{P_0}{k}\left(\frac{t}{t_r}-\frac{\sin\omega t}{\omega t_r}\right)$$

ج - STEP Force with FINITE RISE time (بدون میرایی)



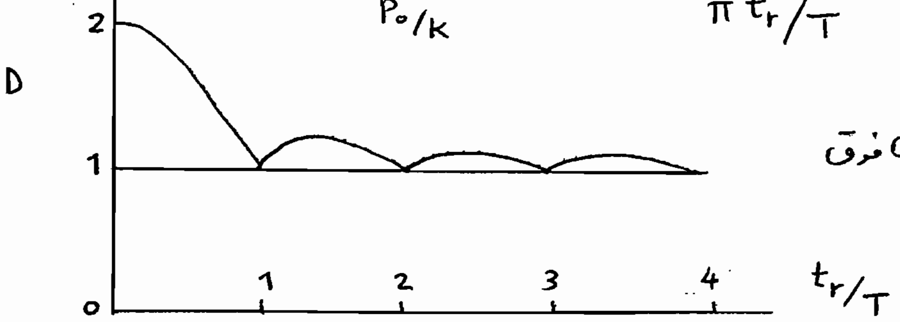
$$P(t)=\begin{cases}P_0\,(t/t_r) & t\le t_r\\ P_0 & t\ge t_r\end{cases}$$

$$u(t)=\frac{P_0}{k}\left(\frac{t}{t_r}-\frac{\sin\omega t}{\omega t_r}\right)\qquad t\le t_r$$

$$u(t)=P_0/k\left\{1-\frac{1}{\omega t_r}\left[\sin\omega t-\sin\omega(t-t_r)\right]\right\}\qquad t\ge t_r$$

$$u(t)_{max}=P_0/k\left\{1+\frac{1}{\omega t_r}\sqrt{(1-\cos\omega t_r)^2+(\sin\omega t_r)^2}\right\}\qquad t\ge t_r$$

ضریب بزرگنمایی دینامیکی $\quad D=\frac{u_{max}}{P_0/k}=1+\frac{|\sin(\pi t_r/T)|}{\pi t_r/T}$

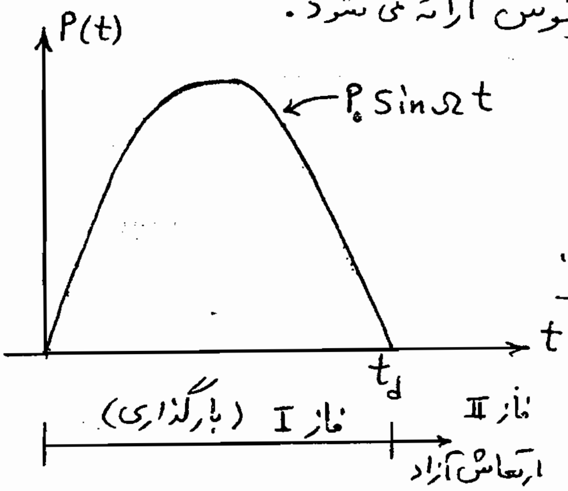


طیف جواب برای بارگذاری فوق
حالت بدون میرایی

تحلیل دینامیکی سیستم SDF در برابر بارگذاری ضربه‌ای PULSE Excitation

انواع بارگذاری ضربه‌ای مثلثی ، مستطیلی ، نصف هارمونیک و ... بر سازه‌ها اثر می‌کنند .

* جزئیات تحلیل برای نمونه در مورد بار ضربه‌ای نصف سینوس ارائه می‌شود .



موج انفجار ، ترمز جرثقیل های بزرگ ، افزایش ناگهانی نیروی موتور از جمله بارهای ضربه‌ای هستند ، معمولاً اثر میرایی خیلی کم است .

تحلیل در دو فاز انجام می‌شود ؛ فاز I و فاز II

تحلیل فاز بارگذاری (I) $0 \leqslant t \leqslant t_d$

شرایط اولیه صفر است .

$$m\ddot{u} + Ku = P_0 \sin \Omega t$$

$$u(t) = \frac{P_0}{K}\frac{1}{(1-\beta^2)}(\sin \Omega t - \beta \sin \omega t)$$

آیا u_{max} در فاز I است یا II ؟

$$\frac{du}{dt} = \frac{P_0}{K}\frac{1}{(1-\beta^2)}(\Omega \cos \Omega t - \beta \omega \cos \omega t) = 0$$

$$\Omega \cos \Omega t - \Omega \cos \omega t = 0 \Rightarrow \cos \Omega t = \cos \omega t$$

$$\Omega t = 2\pi n \pm \omega t \rightarrow \text{لحظه پاسخ حداکثر} \quad t_{max} = \frac{2\pi n}{\Omega \pm \omega} = \frac{2\pi n}{\Omega\left(1 \pm \frac{2t_d}{T}\right)}$$

$$\beta = \frac{\Omega}{\omega} = \frac{2\pi / 2t_d}{2\pi / T} = \frac{T}{2t_d}$$

برای اینکه حداکثر در فاز I باشد باید $t_{max} < t_d$

بارگذاری نصف sin پس سیکل اول $(n=1)$ و اگر با علامت منفی ادامه دهیم خواهیم داشت

$\beta \leqslant -1$ که معنی ندارد پس رابطه شرطی را با $n=1$ و علامت + بررسی می‌کنیم .

$$t_{max} = \frac{2\pi}{\Omega\left(1+\frac{1}{\beta}\right)} = \frac{2\pi}{\Omega\left(1+\frac{2t_d}{T}\right)} \leqslant t_d \Rightarrow \frac{2\pi}{1+\frac{1}{\beta}} \leqslant \Omega t_d = \pi \Rightarrow$$

$$\Omega = \frac{2\pi}{T_p} = \frac{2\pi}{2t_d} = \frac{\pi}{t_d} \rightarrow \Omega t_d = \pi \qquad \Rightarrow \boxed{\beta \leqslant 1 \ \text{یا}\ \Omega \leqslant \omega \ \text{یا}\ \frac{T}{2} \leqslant t_d}$$

تحلیل فاز ارتعاش آزاد (II) $t > t_d$

برای رابطه ارتعاش آزاد $u(\bar t) = \frac{\dot u(\bar t = 0)}{\omega}\sin\omega\bar t + u(\bar t = 0)\cos\omega\bar t$ باید تغییرمکان و سرعت در لحظه t_d تعیین شوند (لحظه $\bar t = 0$ یعنی $t = t_d$).

از رابطه فاز I مقادیر u_{t_d} و $\dot u_{t_d}$ محاسبه می‌شوند: $\Omega t_d = \pi \rightarrow \sin\Omega t_d = \sin\pi = 0$

$$u(t_d) = \frac{P_0}{K}\frac{1}{(1-\beta^2)}\left(\sin\Omega t_d - \beta\sin\omega t_d\right)$$

$$\beta = \frac{\Omega}{\omega} \rightarrow \omega = \Omega/\beta \rightarrow \omega t_d = \frac{\Omega t_d}{\beta} = \frac{\pi}{\beta} \Rightarrow u(t_d) = -\frac{P_0}{K}\frac{\beta\sin\frac{\pi}{\beta}}{(1-\beta^2)}$$

برای محاسبه $\dot u(t_d)$:

$$\dot u(t_d) = \frac{P_0}{K}\frac{1}{(1-\beta^2)}\left(\Omega\cos\Omega t_d - \Omega\cos\omega t_d\right)$$

$$\dot u(t_d) = -\frac{P_0}{K}\frac{\Omega}{(1-\beta^2)}\left(1 + \cos\pi/\beta\right)$$

پس:

$$u(\bar t) = -\frac{P_0}{K}\frac{\beta}{(1-\beta^2)}\left[(1+\cos\pi/\beta)\sin\omega\bar t + \sin\frac{\pi}{\beta}\cos\omega\bar t\right]$$

برآورد حداکثر تغییرمکان در فاز II:

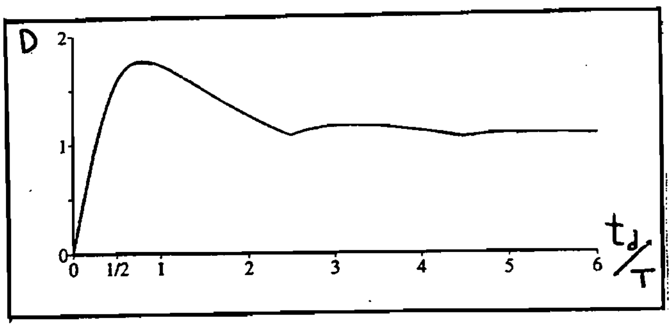
$u(\bar t) = \rho\sin(\omega t + \alpha)$ که $\rho = \sqrt{u_{t_d}^2 + \left(\frac{\dot u_{t_d}}{\omega}\right)^2}$

$u_{max}(\bar t) = \rho$ که اگر بجای u_{t_d} و $\dot u_{t_d}$ از معادل آنها استفاده شود:

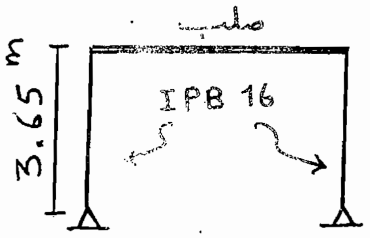
$$u_{max} = \frac{P_0}{K}\frac{2\beta}{(1-\beta^2)}\cos\pi/2\beta \quad \text{در فاز II}$$

تهیه طیف پاسخ بارگذاری نصف سینوسی

با توجه به تعیین تغییرمکان حداکثر در فاز I و II می‌توان ضریب بزرگنمایی را محاسبه و برحسب $\frac{t_d}{T}$ های مختلف، منحنی مربوط ترسیم شود.



مثال - قاب یک طبقه مطابق شکل مفروض است . پریود طبیعی قاب برابر 0.5^{sec} و ستون ها از مقطع IPB 16 می باشد $(E = 2.1 \times 10^{6}\ kg/cm^2)$. مطلوبست تعیین پاسخ حداکثر قاب تحت اثر بار ضربه ای نیم سینوس با حداکثر مقدار 1.8^{ton} و $t_d = 0.25^{sec}$. منظور از پاسخ در این مساله حداکثر تغییر مکان در بالای قاب و حداکثر تنش خمشی در ستون ها ؟



$$IPB\ 16 \longrightarrow I_x = 2492\ cm^4 \ , \ W_x = 311\ cm^3$$

$$t_d/T = \frac{0.25}{0.5} = 0.5 \xrightarrow{\text{طیف مربوط}} D = 1.5$$

$$K_{\text{یک ستون}} = \frac{3EI}{h^3} = \frac{3(2.1\times10^6)2492}{(3.65\times100)^3} = 322.85\ kg/cm$$

$$K_{\text{قاب}} = 2\times322.85 = 645.7\ kg/cm$$

$$P_o/K = \frac{1800}{645.7} = 2.79\ cm$$

$$U_{max} = \frac{P_o}{K}\times D = 2.79\times1.5 = 4.185\ cm$$

$$M = \frac{3EI}{h^2}U_{max} = \frac{3\times2.1\times10^6\times2492}{(365)^2}\times4.185 = 493171.86\ kg-cm$$

$$\# 4.93\ t-m$$

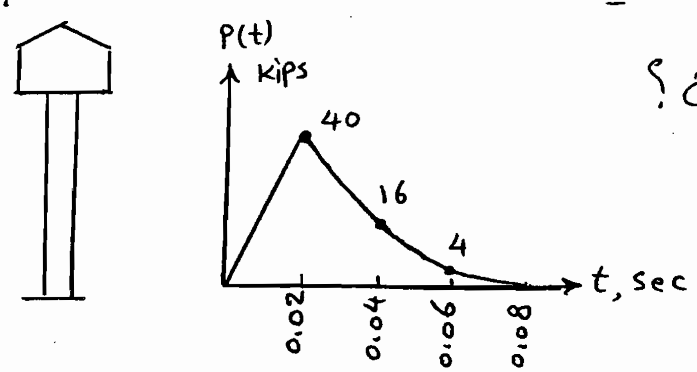
برآورد لنگر از روش دیگر !

$$f_{s\,max} = KU_{max} = P_o\times D = 1.8\times1.5 = 2.7\ ton$$

$$M = \frac{f_{s\,max}}{2}\times h = \frac{2.7}{2}\times3.65 \# 4.93\ ton-m$$

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{4.93\times10^5}{311} = 1585\ kg/cm^2$$

مثال - برج آب مثال های قبل با ارتفاع $80'$ تحت اثر نیروی $P(t)$ ناشی از انفجار قرار می گیرد. مطلوبست تعیین حداکثر برش و لنگر خمشی در پای برج ؟



از مثال های قبل :

$$\begin{cases} K_{\text{برج}} = 8.2\ kips/in \\ T_{\text{برج}} = 1.12\ sec \end{cases}$$

حل مثال - $t_d/T = \frac{0.08}{1.12} = 0.071 < 0.25 \rightarrow$ OK روش تقریبی

از قانون ذوزنقه برای محاسبه انتگرال (مساحت منحنی بارگذاری) استفاده می شود :

$$\int_0^{0.08} P(t)\,dt = \frac{0.02}{2}\left[0 + 2(40) + 2(16) + 2(4) + 0\right] = 1.2 \text{ kip-sec}$$

$$u(t) = \frac{\int P(t)\,dt}{m\omega} \sin\omega t \rightarrow u_{max} = \frac{\int P(t)\,dt}{m\omega} = \frac{I}{m\omega}$$

$$u_{max} = \frac{I}{K}\,\frac{2\pi}{T} = \frac{(1.2)\,2\pi}{(8.2)(1.12)} = 0.821 \text{ in}$$

$$f_{s\,max} = K\,u_{max} = (8.2)(0.821) = 6.73 \text{ kips}$$

$\Rightarrow$ برش حداکثر $V_b = 6.73$ kips , $M_b = 6.73 \times 80 = 538$ kip-ft

---

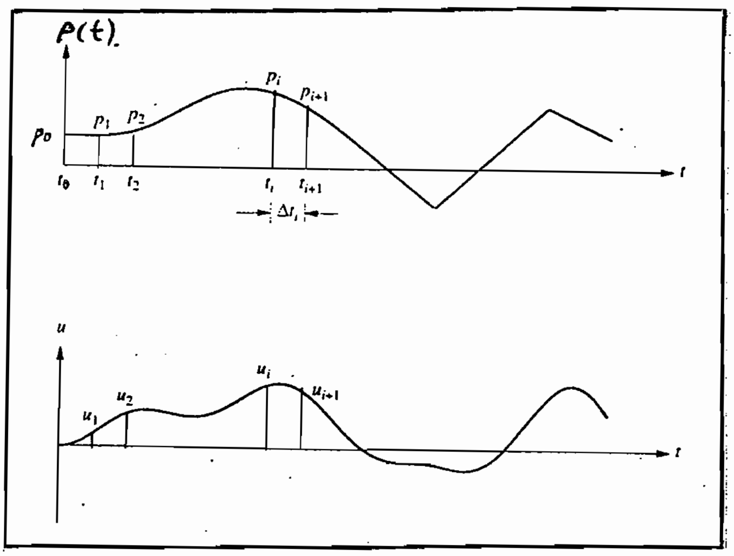
ارزیابی پاسخ دینامیکی سیستم SDF به روش عددی

Numerical Evaluation of Dynamic Response of SDF

$P(t)$: برای انواع بارگذاری دینامیکی بویژه اگر نیرو دارای تابع ریاضی مشخصی نباشد :

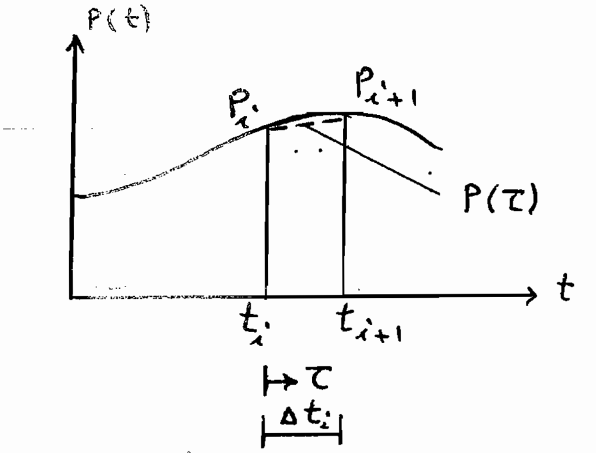
مسائل مهم : دقت ، همگرایی ، پایداری ، و نکات برنامه نویسی و اجرا در کامپیوتر در مورد روش عددی مورد نظر

انواع روش : سه روش کلی عددی : درون یابی تابع نیرو - تفاضل محدود در بیان سرعت و شتاب - فرض تغییرات شتاب

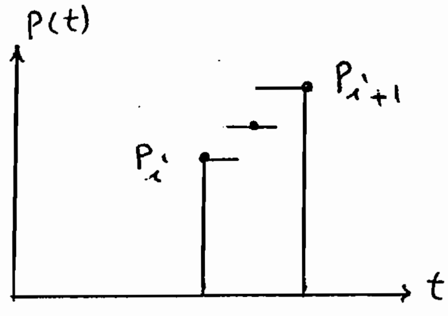


الف - روش های عددی متکی بر درون یابی در تابع نیرو

Numerical Solution Based on interpolation of the Excitation



درون یابی خطی تابع نیرو



درون یابی ثابت تابع نیرو

$$\tilde{P}_i = P(\tau) = P_i \text{ یا } P_{i+1} \text{ یا } \frac{P_i + P_{i+1}}{2}$$

$$P(\tau) = P_i + \left(\frac{\Delta P_i}{\Delta t_i}\right)\tau$$

۱- درون یابی ثابت تابع نیرو

برای سادگی ؛ از میرایی صرفنظر می کنیم - جواب کل از دو قسمت تشکیل شده است :

- جواب سیستم تحت اثر نیروی ثابت در فاصله زمانی Δt_i بدون شرایط اولیه

- جواب سیستم در حالتی که نیرو وجود ندارد و فقط شرایط اولیه وجود دارد (ارتعاش آزاد)

$$m\ddot{\tilde{u}} + k\tilde{u} = \tilde{P}_i \longrightarrow \tilde{u}_p = \frac{\tilde{P}_i}{k} \qquad (1)$$

$$\tilde{u}_c = A_1 \sin\omega\tau + A_2 \cos\omega\tau$$

$$\tilde{u}(\tau) = \frac{\tilde{P}_i}{k} + A_1 \sin\omega\tau + A_2 \cos\omega\tau \qquad (\tilde{u}(0) = \dot{\tilde{u}}(0) = 0)$$

$$A_1 = 0 \;,\; A_2 = -\tilde{P}_i/k \longrightarrow \underline{\tilde{u}(\tau) = \frac{\tilde{P}_i}{k}(1 - \cos\omega\tau)}$$

(۲) ارتعاش آزاد (نیرو $\tilde{P}_i$ وجود ندارد) : $\hat{u}(\tau) = u_i \cos\omega\tau + \frac{\dot{u}_i}{\omega}\sin\omega\tau$

$$u(\tau) = \tilde{u}(\tau) + \hat{u}(\tau)$$

$$u(\tau) = u_i \cos\omega\tau + \frac{\dot{u}_i}{\omega}\sin\omega\tau + \frac{\tilde{P}_i}{k}(1 - \cos\omega\tau)$$

$$\dot{u}(\tau) = \omega\left[-u_i \sin\omega\tau + \frac{\dot{u}_i}{\omega}\cos\omega\tau + \frac{\tilde{P}_i}{k}\sin\omega\tau\right]$$

اگر در روابط قبلی $\tau=\Delta t_i$ قرار گیرد، تغییر مکان و سرعت در لحظه t_{i+1} بدست می‌آید،

$$u_{i+1}=u_i\cos(\omega\Delta t_i)+\frac{\dot{u}_i}{\omega}\sin(\omega\Delta t_i)+\frac{\tilde{P}_i}{K}\left[1-\cos(\omega\Delta t_i)\right]$$

$$\dot{u}_{i+1}=\omega\left\{-u_i\sin(\omega\Delta t_i)+\frac{\dot{u}_i}{\omega}\cos(\omega\Delta t_i)+\frac{\tilde{P}_i}{K}\sin(\omega\Delta t_i)\right\}$$

---

۲ ـ درون یابی خطی تابع نیرو $\qquad P(\tau)=P_i+\left(\frac{\Delta P_i}{\Delta t_i}\right)\tau$

جزئیات حالت بدون میرایی ارائه می‌شود. جواب کل از سه قسمت تشکیل شده است:

نیروی ثابت P_i بدون شرایط اولیه + شرایط اولیه بدون نیرو (ارتعاش آزاد) + نیروی خطی $\frac{\Delta P_i}{\Delta t_i}\tau$ بدون
شرایط اولیه (جزئیات دو مورد اول در حالت ۱ دیده شد و اینجا جزئیات مورد سوم)!

$$m\ddot{\bar{u}}+K\bar{u}=\left(\frac{\Delta P_i}{\Delta t_i}\right)\tau \qquad \left(\bar{u}(0)=\dot{\bar{u}}(0)=0 \quad , \quad 0<\tau<\Delta t_i\right)$$

$$\bar{u}_p=\frac{1}{K}\left(\frac{\Delta P_i}{\Delta t_i}\right)\tau \quad , \quad \bar{u}_c=A_1\sin\omega\tau+A_2\cos\omega\tau$$

$$\bar{u}(\tau)=\bar{u}_p+\bar{u}_c=\left(\frac{\Delta P_i}{K\Delta t_i}\right)\tau+A_1\sin\omega\tau+A_2\cos\omega\tau$$

$$\bar{u}(0)=0\rightarrow A_2=0 \quad , \quad \dot{\bar{u}}(0)=0\rightarrow A_1=-\frac{\Delta P_i}{\omega K\Delta t_i}$$

$$\bar{u}(\tau)=\left(\frac{\Delta P_i}{K}\right)\left(\frac{1}{\omega\Delta t_i}\right)(\omega\tau-\sin\omega\tau)$$

اگر $\tau=\Delta t_i$ پاسخ در لحظات t_{i+1} بدست می‌آید (جواب ۲ مورد اول نیز لحاظ شده است):

$$u_{i+1}=u_i\cos\omega\Delta t_i+\frac{\dot{u}_i}{\omega}\sin\omega\Delta t_i+\frac{P_i}{K}(1-\cos\omega\Delta t_i)+\frac{\Delta P_i}{K}\left(\frac{1}{\omega\Delta t_i}\right)(\omega\Delta t_i-\sin\omega\Delta t_i)$$

$$\dot{u}_{i+1}=\omega\left\{-u_i\sin\omega\Delta t_i+\frac{\dot{u}_i}{\omega}\cos\omega\Delta t_i+\frac{P_i}{K}\sin\omega\Delta t_i+\frac{\Delta P_i}{K}\left(\frac{1}{\omega\Delta t_i}\right)(1-\cos\omega\Delta t_i)\right\}$$

روابط مربوط به درون‌یابی خطی تابع نیرو در حالت میرایی

$$\begin{cases} u_{i+1} = A P_i + B P_{i+1} + C u_i + D \dot{u}_i \\ \dot{u}_{i+1} = A' P_i + B' P_{i+1} + C' u_i + D' \dot{u}_i \end{cases}$$

$$A = \frac{1}{k}\left\{\frac{2\xi}{\omega \Delta t} + e^{-\xi\omega\Delta t}\left[\left(\frac{1-2\xi^2}{\omega_D \Delta t} - \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)\sin\omega_D \Delta t - \left(1+\frac{2\xi}{\omega\Delta t}\right)\cos\omega_D\Delta t\right]\right\}$$

$$B = \frac{1}{k}\left[1 - \frac{2\xi}{\omega\Delta t} + e^{-\xi\omega\Delta t}\left(\frac{2\xi^2-1}{\omega_D \Delta t}\sin\omega_D\Delta t + \frac{2\xi}{\omega\Delta t}\cos\omega_D\Delta t\right)\right]$$

$$C = e^{-\xi\omega\Delta t}\left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_D\Delta t + \cos\omega_D\Delta t\right) \quad \Bigg| \quad D = e^{-\xi\omega\Delta t}\left(\frac{1}{\omega_D}\sin\omega_D\Delta t\right)$$

$$A' = \frac{1}{k}\left\{-\frac{1}{\Delta t} + e^{-\xi\omega\Delta t}\left[\left(\frac{\omega}{\sqrt{1-\xi^2}} + \frac{\xi}{\Delta t\sqrt{1-\xi^2}}\right)\sin\omega_D\Delta t + \frac{1}{\Delta t}\cos\omega_D\Delta t\right]\right\}$$

$$B' = \frac{1}{k\Delta t}\left[1 - e^{-\xi\omega\Delta t}\left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_D\Delta t + \cos\omega_D\Delta t\right)\right]$$

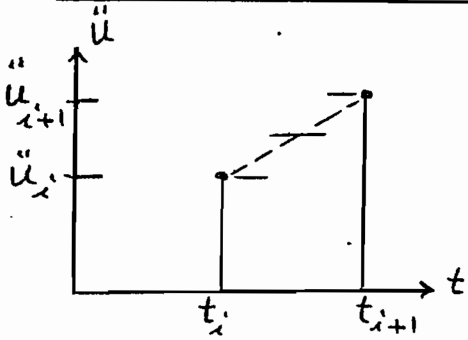
$$C' = -e^{-\xi\omega\Delta t}\left(\frac{\omega}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_D\Delta t\right) \quad \Bigg| \quad D' = e^{-\xi\omega\Delta t}\left(\cos\omega_D\Delta t - \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_D\Delta t\right)$$

اگر Δt ثابت فرض شود، ضرایب A تا D' یکبار محاسبه می‌شود. دقت روش وابسته به Δt است که هرچه کوچکتر باشد، بهتر است. در حالت $\Delta t \leq \frac{T}{10}$ جوابها قابل قبول است، مساله در حالت خطی صادق است. مثال: جزئیات صورت مساله و جدول پاسخ در ورق جداگانه

ب - روش‌های عددی تحلیل دینامیکی SDF استوار بر تغییرات مختلف شتاب (گام به گام)

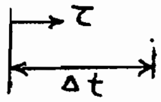
Numerical solution Based on Approximating Derivative

(Step-by-Step Numerical integration)



اساس روش‌ها: در یک گام زمانی، تغییرات شتاب در حالتهای مختلف فرض می‌شود (ثابت، متوسط یا خطی) و با انتگرال گیری از رابطه شتاب، رابطه تغییرمکان حاصل می‌شود.

$0 \leq \tau \leq \Delta t$



۱- روش عددی گام به گام با شتاب ثابت ابتدای گام

$$\ddot{u}(\tau) = \ddot{u}_i \quad (۱) \xrightarrow{\text{انتگرال}} \dot{u}(\tau) = \ddot{u}_i \tau + A \rightarrow$$ اعمال شرایط اولیه در $\tau = 0$

$$\dot{u}(0) = \dot{u}_i \rightarrow A = \dot{u}_i \rightarrow \dot{u}(\tau) = \ddot{u}_i \tau + \dot{u}_i \quad (۲)$$

$$\tau = \Delta t \longrightarrow \dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \Delta t \, \ddot{u}_i \quad (۳)$$

انتگرال رابطه (۲) $\rightarrow u(\tau) = \frac{1}{2} \ddot{u}_i \tau^2 + \dot{u}_i \tau + B \rightarrow \tau = 0 \,,\; u(0) = u_i$

$$\rightarrow B = u_i \rightarrow u(\tau) = u_i + \dot{u}_i \tau + \frac{1}{2} \ddot{u}_i \tau^2 \quad (۴)$$

$$\tau = \Delta t \rightarrow u_{i+1} = u_i + \Delta t \, \dot{u}_i + \frac{(\Delta t)^2}{2} \ddot{u}_i \quad (۵)$$

برای بدست آوردن $\ddot{u}_{i+1}$ و سرشکن کردن خطاها از رابطه اصلی تعادل کمک گرفته می‌شود:

$$m \ddot{u}_{i+1} + c \dot{u}_{i+1} + k u_{i+1} = P_{i+1} \quad (۶)$$

بجای u_{i+1} از (۵) و بجای $\dot{u}_{i+1}$ از (۳) قرار می‌دهیم:

$$\ddot{u}_{i+1} = \frac{1}{m} \left\{ P_{i+1} - k u_i - (c + k \Delta t) \dot{u}_i - \left(c \Delta t + \frac{k \Delta t^2}{2}\right) \ddot{u}_i \right\} \quad (۷)$$

۲- روش عددی گام به گام با شتاب متوسط

$$\ddot{u}(\tau) = \frac{1}{2}(\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1})$$

$$\xrightarrow{\text{انتگرال}} \dot{u}(\tau) = \frac{1}{2}(\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1}) + A_1 \rightarrow \tau = 0 , \dot{u}(0) = \dot{u}_i$$ اعمال شرایط اولیه

$$\rightarrow A_1 = \dot{u}_i \rightarrow \dot{u}(\tau) = \dot{u}_i + \frac{1}{2}(\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1})\tau \rightarrow \tau = \Delta t \rightarrow$$

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \frac{\Delta t}{2}(\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1}) \Rightarrow \Delta\dot{u}_i = \frac{\Delta t}{2}(\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1}) \quad (1)$$

$$\dot{u}(\tau) \text{ از انتگرال} \rightarrow u(\tau) = \dot{u}_i \tau + \frac{1}{4}(\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1})\tau^2 + A_2$$

$$\tau = 0 \rightarrow u(0) = u_i \rightarrow A_2 = u_i \rightarrow u(\tau) = u_i + \dot{u}_i \tau + \frac{1}{4}(\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1})\tau^2$$

$$\tau = \Delta t \rightarrow u_{i+1} = u_i + \dot{u}_i \Delta t + \frac{\Delta t^2}{4}(\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1}) \quad (2)$$

$$u_{i+1} - u_i = \Delta u_i = \dot{u}_i \Delta t + \frac{\Delta t^2}{4}(2\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i) = \dot{u}_i \Delta t + \frac{\Delta t^2}{4}(2\ddot{u}_i) + \frac{\Delta t^2}{4}\Delta\ddot{u}_i$$

$$\Delta\ddot{u}_i = \frac{4}{\Delta t^2}(\Delta u_i - \dot{u}_i \Delta t) - 2\ddot{u}_i \quad (3)$$

$$(2) \rightarrow \Delta u_i = \dot{u}_i \Delta t + \frac{\Delta t^2}{4}(\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1}) \Rightarrow \frac{\Delta t}{2}(\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1}) = \frac{2}{\Delta t}(\Delta u_i - \dot{u}_i \Delta t)$$

$$(1) \rightarrow \Delta\dot{u}_i = \frac{\Delta t}{2}(\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1}) = \frac{2}{\Delta t}(\Delta u_i - \dot{u}_i \Delta t) \Rightarrow$$

$$\Delta\dot{u}_i = \left(\frac{2}{\Delta t}\right)\Delta u_i - 2\dot{u}_i \quad (4)$$

$$m\ddot{u}_{i+1} + c\dot{u}_{i+1} + ku_{i+1} = P_{i+1} \quad , \quad m\ddot{u}_i + c\dot{u}_i + ku_i = P_i$$

$$\Rightarrow \quad m\Delta\ddot{u}_i + c\Delta\dot{u}_i + ku_i = \Delta P_i \quad (5)$$

در رابطه (۵) بجای $\Delta\ddot{u}_i$ و $\Delta\dot{u}_i$ از روابط (۳) و (۴) استفاده می کنیم:

$$m\left[\frac{4}{\Delta t^2}\Delta u_i - \frac{4}{\Delta t^2}\dot{u}_i \Delta t - 2\ddot{u}_i\right] + c\left[\frac{2}{\Delta t}\Delta u_i - 2\dot{u}_i\right] + k\Delta u_i = \Delta P_i$$

$$K_i^* \Delta u_i = \Delta P_i^* \leftarrow (6) \quad K_i^* = K + \frac{2c}{\Delta t} + \frac{4m}{\Delta t^2}$$

$$\Delta P_i^* = \Delta P_i + \left[\left(\frac{4m}{\Delta t}\right) + 2c\right]\dot{u}_i + 2m\ddot{u}_i$$

بنابراین از رابطه ۶ مقدار Δu_i و در حقیقت u_{i+1} و سپس از روابط ٤ و ۳ مقادیر $\Delta \dot{u}_i$ و $\Delta \ddot{u}_i$ که $\dot{u}_{i+1}$ و $\ddot{u}_{i+1}$ را ارائه می‌دهند ، حاصل می‌شوند ،

برای سرشکن کردن خطاها در هر گام می‌توان $\ddot{u}_{i+1}$ را از رابطه تعادل محاسبه نمود:

$$\ddot{u}_i = \frac{1}{m}\left(P_i - c\dot{u}_i - k u_i\right)$$

روش فوق را روش $\left(\beta=\frac{1}{4} , \gamma=\frac{1}{2}\right)$ NEWMARK'S β گویند

۳- روش عددی گام به گام با شتاب خطی

$0 \le \tau \le \Delta t$

$$\ddot{u}(\tau) = \ddot{u}_i + \frac{\Delta \ddot{u}_i}{\Delta t}\tau \xrightarrow{\text{انتگرال}} \dot{u}(\tau) = \ddot{u}_i \tau + \frac{\Delta \ddot{u}_i}{\Delta t}\frac{1}{2}\tau^2 + A_1$$

اعمال شرایط اولیه $\dot{u}(0) = \dot{u}_i \rightarrow A_1 = \dot{u}_i \rightarrow \dot{u}(\tau) = \dot{u}_i + \ddot{u}_i \tau + \frac{\Delta \ddot{u}}{2\Delta t}\tau^2$

$$m\Delta \ddot{u}_i + c\Delta \dot{u}_i + k\Delta u_i = \Delta P_i \qquad (1)$$

$$\tau = \Delta t \rightarrow \dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \ddot{u}_i \Delta t + \frac{1}{2}\frac{\Delta \ddot{u}_i}{\Delta t}\Delta t^2$$

$$\Delta \dot{u}_i = \ddot{u}_i \Delta t + \frac{\Delta t}{2}\Delta \ddot{u}_i \qquad (۲)$$

$\dot{u}(\tau)$ انتگرال از $\rightarrow u(\tau) = \dot{u}_i \tau + \frac{\ddot{u}_i}{2}\tau^2 + \frac{\Delta \ddot{u}_i}{\Delta t}\frac{\tau^3}{6} + A_2$

$$u(0) = u_i \rightarrow A_2 = u_i \rightarrow u(\tau) = u_i + \dot{u}_i \tau + \frac{\ddot{u}_i}{2}\tau^2 + \frac{\Delta \ddot{u}_i}{\Delta t}\frac{\tau^3}{6}$$

$$\tau = \Delta t \rightarrow u_{i+1} = u_i + \dot{u}_i \Delta t + \frac{\ddot{u}_i}{2}\Delta t^2 + \frac{\Delta \ddot{u}_i}{\Delta t}\frac{\Delta t^3}{6}$$

$$\Delta u_i = \dot{u}_i \Delta t + \ddot{u}_i \frac{\Delta t^2}{2} + \Delta \ddot{u}_i \frac{\Delta t^2}{6} \qquad (۳)$$

از رابطه ۳ $\Rightarrow \Delta \ddot{u}_i = \frac{6}{\Delta t^2}\Delta u_i - \frac{6}{\Delta t}\dot{u}_i - 3\ddot{u}_i \qquad$ (٤)

در رابطه ۲ بجای $\Delta \ddot{u}_i$ از ٤ $\Leftarrow \quad \Delta \dot{u}_i = \frac{3}{\Delta t}\Delta u_i - 3\dot{u}_i - \frac{\Delta t}{2}\ddot{u}_i \qquad$ (۵)

در رابطه ۱ یعنی معادله جزئی حرکت بجای $\Delta \ddot{u}_i$ و $\Delta \dot{u}_i$ از معادل آنها از ٤ و ۵ قرار می‌دهیم :

$$m\left[\frac{6}{\Delta t^2}\Delta u_i - \frac{6}{\Delta t}\dot{u}_i - 3\ddot{u}_i\right] + C\left[\frac{3}{\Delta t}\Delta u_i - 3\dot{u}_i - \frac{\Delta t}{2}\ddot{u}_i\right] +$$

$$+ K\Delta u_i = \Delta P_i \quad \Rightarrow$$

$$\tilde{K}\,\Delta u_i = \Delta\tilde{P}_i \qquad (4) \rightarrow \tilde{K} = K + \frac{6}{\Delta t^2}m + \frac{3}{\Delta t}C$$

$$\Delta\tilde{P}_i = \Delta P_i + m\left[\frac{6}{\Delta t}\dot{u}_i + 3\ddot{u}_i\right] + C\left[3\dot{u}_i + \frac{\Delta t}{2}\ddot{u}_i\right]$$

به این روش ، روش $(\beta = \frac{1}{6}, \gamma = \frac{1}{2})$ NEWMARK'S β می‌گویند .

در هرگام می‌توان مقدار C و K آن لحظه را قرار داد (برای رفتار غیر خطی) .

در این روش نیز می‌توان برای سرشکن کردن خطاها ، مقدار $\ddot{u}_{i+1}$ را از معادله حرکت محاسبه نمود .

مساله به Δt حساس است (از نظر پایداری و دقت) :

اشاره : پایداری روش های Newmark بصورت زیر بیان می‌شود :

جزئیات در مباحث پیشرفته دینامیک سازه‌ها $\longleftarrow \quad \frac{\Delta t}{T} \leqslant \frac{1}{\pi\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{\gamma - 2\beta}}$

برای حالت شتاب متوسط $\gamma = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{4} \longleftarrow \quad \frac{\Delta t}{T} < \infty$

یعنی روش شتاب متوسط به ازای هرمقدار Δt ، پایدار است . البته در عمل مقادیر منطقی درنظر گرفته می‌شود .

برای حالت شتاب خطی $\gamma = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{6} \longleftarrow \quad \frac{\Delta t}{T} \leqslant 0.551$

یعنی پایداری روش مشروط است . البته در عمل ، معمولاً Δt کوچک فرض می‌شود و این شرط برقرار است . برای مثال در حالت زلزله ، برای درنظر گرفتن تغییرات شتاب زلزله ثبت شده معمولاً Δt برابر 0.02 یا 0.01 درنظر گرفته می‌شود که با توجه به پریود طبیعی سازه‌ها ، این Δt کمتر از $0.551\,T$ خواهد بود .

معمولاً $\Delta t \leqslant \frac{T}{10}$ مناسب است .

خلاصه نتایج روش های عددی گام به گام

۱ـ روش شتاب ثابت ابتدای گام

$$u_{i+1} = u_i + \Delta t\,\dot{u}_i + \frac{\Delta t^2}{2}\,\ddot{u}_i$$

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \Delta t\,\ddot{u}_i$$

$$\ddot{u}_{i+1} = \frac{1}{m}\left\{P_{i+1} - k u_i - (c + k\Delta t)\,\dot{u}_i - \left(c\Delta t + \frac{k\Delta t^2}{2}\right)\ddot{u}_i\right\}$$

۲ـ روش شتاب متوسط

$$u_{i+1} = \left\{P_{i+1} + m\left(\frac{4}{\Delta t^2}u_i + \frac{4}{\Delta t}\dot{u}_i + \ddot{u}_i\right) + c\left(\frac{2}{\Delta t}u_i + \dot{u}_i\right)\right\} \Big/ \left(\frac{4m}{\Delta t^2} + \frac{2c}{\Delta t} + k\right)$$

$$\dot{u}_{i+1} = -\dot{u}_i + \frac{2}{\Delta t}\left(u_{i+1} - u_i\right)$$

$$\ddot{u}_{i+1} = \frac{4}{\Delta t^2}\left(u_{i+1} - u_i - \Delta t\,\dot{u}_i\right) - \ddot{u}_i$$

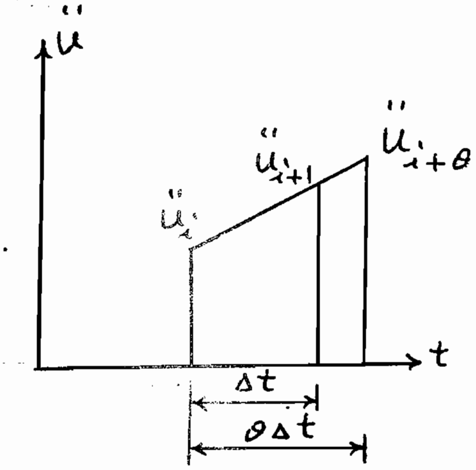
۳ـ روش شتاب خطی

I $$u_{i+1} = \left\{P_{i+1} + m\left(\frac{6}{\Delta t^2}u_i + \frac{6}{\Delta t}\dot{u}_i + 2\ddot{u}_i\right) + c\left(\frac{3}{\Delta t}u_i + 2\dot{u}_i + \frac{\Delta t}{2}\ddot{u}_i\right)\right\} \Big/ \left(\frac{6m}{\Delta t^2} + \frac{3c}{\Delta t} + k\right)$$

II $$\dot{u}_{i+1} = \frac{3}{\Delta t}\left(u_{i+1} - u_i\right) - 2\dot{u}_i - \frac{\Delta t}{2}\ddot{u}_i$$

III $$\ddot{u}_{i+1} = \frac{6}{\Delta t^2}\left(u_{i+1} - u_i - \Delta t\,\dot{u}_i - \frac{\Delta t^2}{3}\ddot{u}_i\right)$$

روش عددی گام به گام WILSON - θ



اساس روش مشابه روش گام به گام شتاب خطی است با این تفاوت که E.L. WILSON فرض می کند شتاب در فاصله زمانی کمی بزرگتر از Δt ، خطی است $(\theta\Delta t)$.

این امر برای تضمین پایداری روش شتاب خطی است و مقدار θ معمولاً بین 1.4 تا 2 در نظر گرفته می شود، روابط اصلی این روش مشابه روابط I ، II و III از روش شتاب خطی است وفقط بجای $i+1$ از $i+\theta$ و بجای Δt از $\theta\Delta t$ استفاده شده است.

$$\ddot{u}_{i+\theta} = \frac{6}{(\theta\Delta t)^2}\left\{u_{i+\theta} - u_i - \theta\Delta t\,\dot{u}_i - \frac{(\theta\Delta t)^2}{3}\ddot{u}_i\right\} \qquad (a)$$

$$\dot{u}_{i+\theta} = \frac{3}{\theta\Delta t}\left(u_{i+\theta} - u_i\right) - 2\dot{u}_i - \frac{\theta\Delta t}{2}\ddot{u}_i \qquad (b)$$

$$u_{i+\theta} = \left\{P_{i+\theta} + m\left[\frac{6u_i}{(\theta\Delta t)^2} + \frac{6}{\theta\Delta t}\dot{u}_i + 2\ddot{u}_i\right] + c\left[\frac{3}{\theta\Delta t}u_i + 2\dot{u}_i + \frac{\theta\Delta t}{2}\ddot{u}_i\right]\right\} \Big/ \left[\frac{6m}{(\theta\Delta t)^2} + \frac{3c}{\theta\Delta t} + k\right] \qquad (c)$$

چونکه فرض شده که شتاب بطور خطی از زمان $i\Delta t$ تا $(i+\theta)\Delta t$ تغییر می کند، بنابراین نیروی مؤثر هم فرض می شود که در این فاصله زمانی، خطی تغییر می کند و $P_{i+\theta}$ بصورت:

$$P_{i+\theta} = P_i + \left(\frac{P_{i+1} - P_i}{\Delta t}\right)\theta\Delta t = P_i(1-\theta) + P_{i+1}\theta \qquad (d)$$

از رابطه (c) مقدار $u_{i+\theta}$ بدست آمده و آنرا در رابطه (a) قرار داده و $\ddot{u}_{i+\theta}$ محاسبه می شود.

شتاب در گام زمانی معمولی Δt از رابطه زیر بدست می آید:

$$\ddot{u}_{i+1} = \ddot{u}_i + \frac{\ddot{u}_{i+\theta} - \ddot{u}_i}{\theta} \qquad (e)$$

مقدار $\ddot{u}_{i+1}$ را در رابطه (f) $\quad \dot{u}_{i+1}=\dot{u}_i+\frac{\Delta t}{2}(\ddot{u}_i+\ddot{u}_{i+1})$

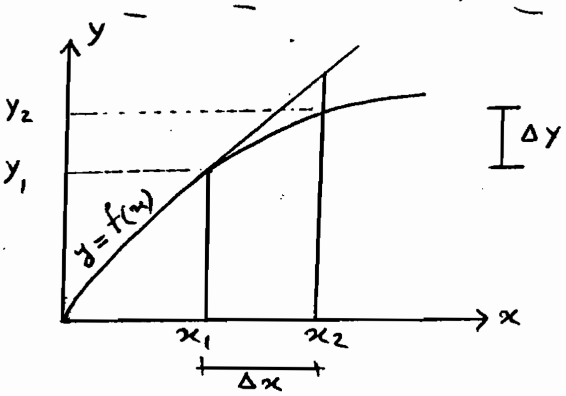
و همینطور در رابطه (g) $\quad u_{i+1}=u_i+\Delta t\,\dot{u}_i+\frac{\Delta t^2}{3}\ddot{u}_i+\frac{\Delta t^2}{6}\ddot{u}_{i+1}$

از روابط شتاب خطی قرار داده و سرعت و تغییر مکان در نقطه t_{i+1} بدست می‌آید.

ج - روش عددی تحلیل دینامیکی SDF استوار بر تفاضل محدود سرعت و شتاب

CENTRAL DIFFERENCE METHOD (Finite Difference F.D.)

یکی از روش های حل دستگاه معادله دیفرانسیل آن است که به نحوی شتاب و سرعت را برحسب تغییر مکان بیان کرد، در این حالت مساله دینامیکی به صورت استاتیکی تبدیل می‌شود.



$$\frac{\Delta y}{\Delta x}\neq\frac{dy}{dx}\xrightarrow{\text{ریاضیات}}\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

در ریاضیات کاربردی $\quad \frac{\Delta y}{\Delta x}\simeq\frac{dy}{dx}$

$$\dot{u}(t)=\underbrace{\frac{du}{dt}}_{\text{شکل مشکل برای حل}}\simeq\frac{\Delta u}{\Delta t}=\underbrace{\frac{u(t+\Delta t)-u(t)}{\Delta t}}_{\text{شکل آسان برای حل}}$$

$u(t-2\Delta t)\quad u(t-\Delta t)\quad u(t)\quad u(t+\Delta t)\quad u(t+2\Delta t)$

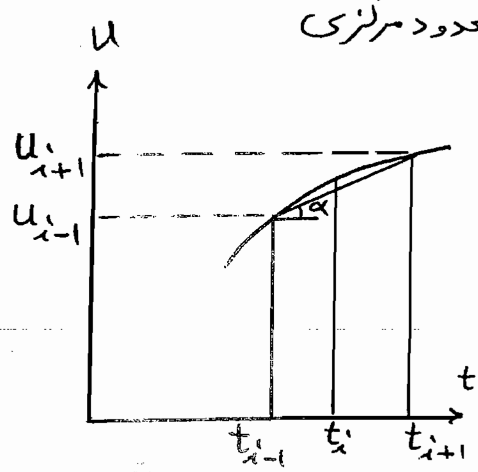
$$\frac{du}{dt}\simeq\left(\frac{\Delta u}{\Delta t}\right)_t=\frac{u(t+\Delta t)-u(t)}{\Delta t}$$ Forward F.D. تفاضل محدود پیش رونده

$$\frac{du}{dt}\simeq\left(\frac{\Delta u}{\Delta t}\right)_t=\frac{u(t)-u(t-\Delta t)}{\Delta t}$$ Backward F.D. تفاضل محدود پس رونده

$$\frac{du}{dt}\simeq\left(\frac{\Delta u}{\Delta t}\right)_t=\frac{u(t+\Delta t)-u(t-\Delta t)}{2\Delta t}$$ Central F.D. تفاضل محدود مرکزی

معمولاً در روش های عددی، روش تفاضل محدود مرکزی از خطای کمتری نسبت به دو روش دیگر برخوردار است.

جزئیات روش عددی تحلیل دینامیکی SDF از طریق تفاضل محدود مرکزی

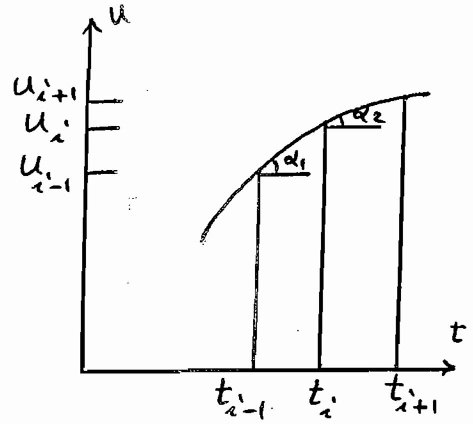


با توجه به اصول روش تفاضل محدود مرکزی:

$$\alpha = \dot{u}_i = \frac{1}{2\Delta t}\left(u_{i+1} - u_{i-1}\right) + R \quad \text{خطا} \qquad ①$$

$$\alpha_1 = \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta t} \quad , \quad \alpha_2 = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta t}$$

$$\frac{\text{(سرعت)}\ \alpha\ \text{تغییرات}}{\text{زمان}} = \text{شتاب} = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\Delta t} = \ddot{u}_i$$



$$\ddot{u}_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta t)^2}$$

$$\ddot{u}_i = \frac{1}{\Delta t^2}\left(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}\right) + R \qquad ②$$

$$m\ddot{u}_i + c\dot{u}_i + ku_i = P_i \qquad ③$$

از خطا صرفنظر و از دو رابطه ① و ② در ③ قرار داده و u_{i+1} را محاسبه می‌کنیم:

$$\left(\frac{m}{\Delta t^2} + \frac{c}{2\Delta t}\right)u_{i+1} = P_i + \left(-k + \frac{2m}{\Delta t^2}\right)u_i + \left(\frac{c}{2\Delta t} - \frac{m}{\Delta t^2}\right)u_{i-1} \qquad ④$$

پس از تعیین u_{i+1} از روابط ① و ② می‌توان $\dot{u}_i$ و $\ddot{u}_i$ را تعیین کرد.

با توجه به رابطه ④ و در شروع کار، نیاز به u_0 و u_{-1} می‌باشد. روابط ۱ و ۲ برای لحظه $t=0$ نوشته شده و بطور همزمان حل می‌شوند تا رابطه u_{-1} حاصل شود:

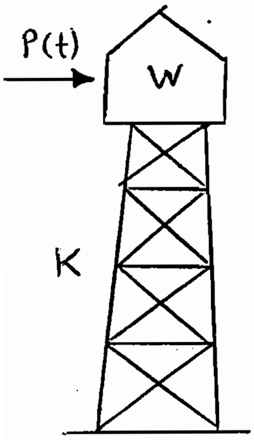
$$u_{-1} = u_0 + \frac{(\Delta t)^2}{2}\ddot{u}_0 - \Delta t\,\dot{u}_0 \qquad ⑤$$

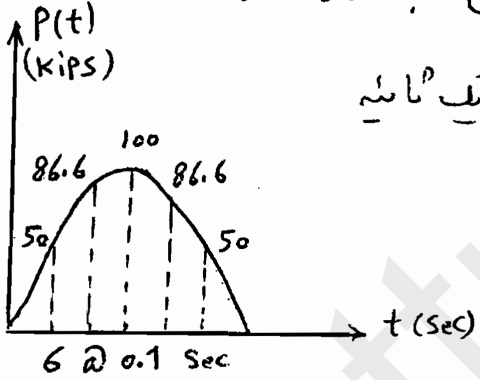
در یک مساله واقعی، دو پارامتر از سه پارامتر u_0، $\dot{u}_0$ و $\ddot{u}_0$ کافی است.

توجه: در تمام روش‌ها، یکی از سه رابطه اصلی بکار گرفته شده، رابطه حرکت در لحظه t_{i+1} بوده بجز روش تفاضل محدود مرکزی که معادله حرکت در لحظه t_i بکار رفت.

روش هایی که معادله حرکت در لحظه $i+1$ را لازم دارند ، روش های ضمنی Implicit گویند.
و روش هایی که معادله حرکت در لحظه i را لازم دارند ، روش های صریح explicit گویند.
در تحلیل سیستم های چند درجه آزادی ، عملیات محاسباتی بیشتری در روش ضمنی نسبت به روش صریح وجود خواهد داشت ، درضمن روش های صریح فقط بصورت مشروط پایدار خواهند بود در حالی که برخی روش های ضمنی بصورت غیر مشروط پایدار می باشند.

مثال - مطلوبست تحلیل دینامیکی برج آب داده شده





تحت بار نصف سینوس مطابق شکل در یک ثانیه

با $\Delta t = 0.1$ sec ؛ $\xi = 10\%$

معادل پایه $K = 100$ kips/in

$W = 978.8$ kips

$$m = \frac{W}{g} = \frac{978.8}{386.4} = 2.533 \ \frac{kips-s^2}{in}$$

$$\omega = \sqrt{K/m} = \sqrt{\frac{100}{2.533}} = 6.283 \ Rad/s$$

برای مقایسه ، از ۵ روش عددی شتاب ثابت ، متوسط ، خطی ، ویلسون و تفاضل محدود مرکزی استفاده می شود.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{6.283} \# 1 \ sec$$

$$\Delta t = 0.1 = \frac{T}{10}$$

در فرمول ها مقدار c لازم است ؛

$$c = 2\xi\omega m = 3.183 \ kip-s/in$$

شرایط اولیه صفر است ؛

$$u_0 = \dot{u}_0 = \ddot{u}_0 = 0$$

روابط اصلی ۵ روش به شرح زیر بدست می آید ؛

الف ـ روش شتاب ثابت ابتدای گام

$$u_{i+1} = u_i + 0.1\,\dot{u}_i + 0.005\,\ddot{u}_i \qquad (a)$$

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + 0.1\,\ddot{u}_i \qquad (b)$$

$$\ddot{u}_{i+1} = \frac{1}{2.533}\left(P_{i+1} - 100\,u_i - 13.183\,\dot{u}_i - 0.8183\,\ddot{u}_i\right) \qquad (c)$$

نتایج حاصل برای یک ثانیه در جدول اول

ب ـ روش شتاب متوسط

$$1176.9\,u_{i+1} = P_{i+1} + 11076.9\,u_i + 104.5\,\dot{u}_i + 2.533\,\ddot{u}_i \qquad (d)$$

$$\dot{u}_{i+1} = 20\,(u_{i+1} - u_i) - \dot{u}_i \qquad (e)$$

$$\ddot{u}_{i+1} = 400\,(u_{i+1} - u_i) - 40\,\dot{u}_i - \ddot{u}_i \qquad (f)$$

نتایج حاصل برای یک ثانیه در جدول دوم

ج ـ روش شتاب خطی

$$1715.3\,u_{i+1} = P_{i+1} + 1615.3\,u_i + 158.35\,\dot{u}_i + 5.225\,\ddot{u}_i \qquad (g)$$

$$\dot{u}_{i+1} = 30\,(u_{i+1} - u_i) - 2\,\dot{u}_i - 0.05\,\ddot{u}_i \qquad (h)$$

$$\ddot{u}_{i+1} = 600\,(u_{i+1} - u_i) - 60\,\dot{u}_i - 2\,\ddot{u}_i \qquad (i)$$

نتایج حاصل برای یک ثانیه در جدول سوم

د ـ روش WILSON-θ $\quad$ $\theta = 1.5$ فرض می‌کنیم

از روابط روش که با حروف لاتین در جزئیات آمده بود استفاده می‌شود.

مقادیر m ، c و k و Δt و θ را در رابطه (c) قرار می‌دهیم.

$$839.13\,u_{i+\theta} = P_{i+\theta} + 739.13\,u_i + 107.69\,\dot{u}_i + 5.305\,\ddot{u}_i$$

$P_{i+\theta}$ از رابطه (d) محاسبه می‌شود.

$$\ddot{u}_{i+\theta} = 266.7(u_{i+\theta} - u_i) - 40\dot{u}_i - 2\ddot{u}_i$$

رابطه (a)

از رابطه (e)

$$\ddot{u}_{i+1} = 0.6667\,\ddot{u}_{i+\theta} + 0.3333\,\ddot{u}_i$$

در نهایت رابطه اخیر را در معادلات (f) و (g) قرارداده :

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + 0.05\,(\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1})$$

$$u_{i+1} = u_i + 0.1\,\dot{u}_i + 0.00333\,\ddot{u}_i + 0.00167\,\ddot{u}_{i+1}$$

نتایج مراحل گام به گام در یک ثانیه در جدول چهارم

ه - روش تفاضل محدود مرکزی

مقادیر m ، c ، k و Δt را در رابطه (۴) قرارداده خواهیم داشت :

$$269.21\,u_{i+1} = P_i + 406.6\,u_i - 237.39\,u_{i-1}$$

روابط (۱) و (۲) :

$$\dot{u}_i = 5(u_{i+1} - u_{i-1})$$

$$\ddot{u}_i = 100\,(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1})$$

برای شروع از رابطه (۵) مقدار u_{-1} محاسبه می‌شود، چون در مساله u_0 ، $\dot{u}_0$ و $\ddot{u}_0$ صفر است پس u_{-1} هم صفر است.

نتایج مراحل گام به گام در یک ثانیه در جدول پنجم

توجه شود در جداول بجای i از n استفاده شده است.

روابط مربوط به محاسبه نتایج دقیق تحت اثر بار نصف sin :

$$\Omega = \frac{2\pi}{T_p} = \frac{2\pi}{2t_d} = \frac{2\pi}{2\times 0.6} = \frac{\pi}{0.6} = 5.236 \quad Rad/s$$

$$P_0 = 100 \quad kips \qquad P(t) = P_0 \sin \Omega t = 100 \sin(5.236t)$$

$$\omega = 6.283 \rightarrow \beta = \frac{\Omega}{\omega} = 0.833$$

برای $t>0.6$ (ارتعاش آزاد) باید شرایط اولیه آن در $t=0.6$ برآورد شود.

$$\omega_D = \omega\sqrt{1-\xi^2} = 6.283\sqrt{1-0.1^2} = 6.2515 \quad Rad/s$$

پاسخ سازه برای حالت بارگذاری (میرا)

$$u(t) = \frac{P_0}{K}\frac{1}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}\left\{(1-\beta^2)\sin\Omega t - 2\xi\beta\cos\Omega t\right\}+$$

$$\frac{P_0}{K}\frac{e^{-\xi\omega t}}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}\left\{2\xi\beta\cos\omega_D t + \frac{\Omega}{\omega_D}\left(1+\beta^2-2\frac{\omega_D^2}{\omega^2}\right)\sin\omega_D t\right\}$$

در رابطه $t=0.6$ قرار داده و $u(t=0.6)$ تعیین می شود.

از فرمول $u(t)$ مشتق گرفته و در لحظه $t=0.6$ سرعت $\dot{u}(t=0.6)$ بدست می آید

رابطه ارتعاش آزاد بصورت زیر است:

$$u(t) = e^{-\xi\omega(t-0.6)}\left\{\frac{\dot{u}(0.6)+u(0.6)\xi\omega}{\omega_D}\sin\omega_D(t-0.6)+\right.$$

$$\left. u(0.6)\cos\omega_D(t-0.6)\right\}$$

نتایج شتاب متوسط و خطی خوب است ولی شتاب ثابت خوب نیست.

برای شتاب ثابت باید از Δt خیلی کوچکتر استفاده شود.

پایداری و خطاهای محاسباتی در روش‌های عددی

Stability & Computational Error of Numerical Procedures

* پایداری روش عددی یعنی الگوریتم روش طوری باشد که با تغییر کوچک در گام زمانی Δt جوابهای مساله زیاد تغییر نکند (در روش های ناپایدار به ازای برخی Δt، جوابها اشتباه و خیلی دور از جواب واقعی خواهد بود).

* با بررسی معیار خطا بر حسب Δt های مختلف برای یک روش عددی، می توان شرط پایداری را تعیین نمود (روش‌های پایدار غیرمشروط - روش‌های پایدار مشروط).

روش عددی شتاب متوسط پایدار غیرمشروط - شتاب خطی و تفاضل محدود مرکزی پایدار مشروط

* در سیستم‌های معادل یکدرجه آزادی، مساله پایداری روش عددی معمولاً مطرح نیست چون Δt بطور محسوسی کوچکتر از حد پایداری خواهد بود (به دلیل T کوچک این سیستم ها).

در سیستم های چند درجه آزادی به دلیل نقش پریود های مودهای بالاتر، مناسب و لازم است از روش های غیر مشروط استفاده کنیم.

خطاهای محاسباتی از چند طریق وارد روش عددی می شود:

الف - Round-off error ناشی از گرد کردن اعداد تولید شده بوسیله محاسبات تکراری

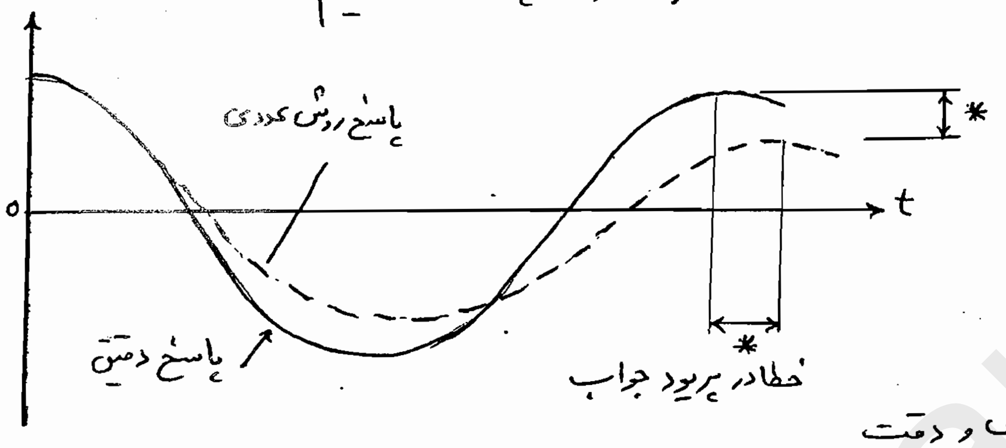
$$\frac{1}{5} = 0.2 \quad , \quad \frac{1}{3} = 0.333......$$

ب - Propagated error خطای گسترش تولید شده در اثر جایگزینی معادله دیفرانسیل بوسیله تفاضل محدود معادل

ج - Truncation error تولید شده در اثر بیان U_{i+1} یا $\dot{U}_{i+1}$ توسط تعداد محدود عبارت در بسط سری تیلور

$$u_{i+1} = \sum_{l=i-k}^{i} A_l u_l + \sum_{l=i-k}^{i+1} B_l \dot{u}_l + \sum_{l=i-k}^{i+1} C_l \ddot{u}_l + R$$ خطا

A_l ، B_l و C_l ضرایب ثابت که برخی صفر می‌شوند. در روش‌های عددی با توجه به الگوریتم روش، فقط برخی عبارات از سری کلی بالا وجود دارد، پس خطا خواهیم داشت.



بطور کلی در مسائل متعارف رعایت $\Delta t \leq \frac{T}{10}$ پایداری و دقت قابل قبول را باعث می‌شود.

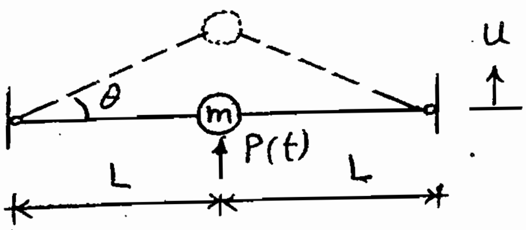
تحلیل دینامیکی سیستم‌های غیرخطی — Analysis of Nonlinear Response

از دو طریق رفتار سیستم‌ها از حالت خطی به غیرخطی تبدیل می‌شود؛ هندسی و فیزیکی: تغییر مکانهای بزرگ (غیرخطی هندسی) و عدم پیروی اجزاء و مصالح از قانون هوک (غیرخطی فیزیکی).

اساس روش‌های تحلیل دینامیکی، صادق بودن قانون جمع آثار قوا بوده است که در رفتار خطی مصداق دارد و در حال حاضر تنها روش تحلیل دینامیکی برای سیستم‌های غیرخطی، روش‌های عددی می‌باشد.

دلایل دیگری برای بکارگیری روش‌های عددی وجود دارد: اندرکنش خاک ـ سازه ـ آب که تحلیل در میدان فرکانس را ضروری می‌سازند، ضربه‌های خیلی ناگهانی (انفجار) که باعث تحریک مودهای بالا می‌شود و روش مناسب، روش عددی است.

مثال - سیستم ساده جرم که توسط دو کابل کشیده نگهداشته شده است، معادله حرکت؟

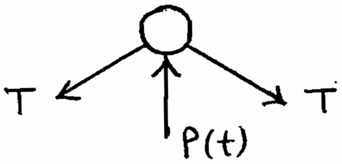


T_0: کشش اولیه در حالت بدون تغییر مکان ریسمان

اجزاء سازه از قانون هوک پیروی می کنند: $\sigma = \varepsilon E$

تغییر طول کابل

$$\delta = \sqrt{L^2+u^2} - L$$



$$\varepsilon = \frac{\delta}{L} \;,\; \sigma = \frac{T}{A} \Rightarrow T = \frac{EA}{L}\delta$$

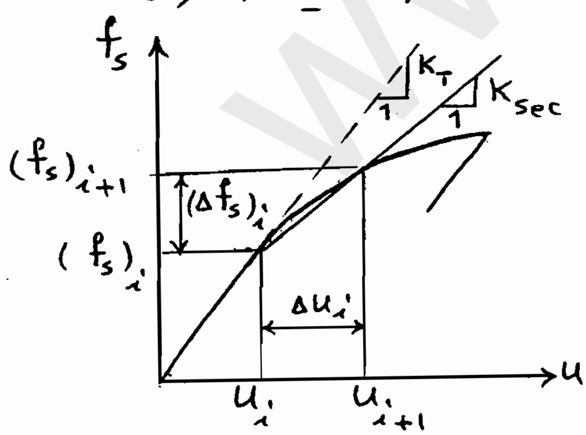
$$\Sigma F = m\ddot{u} \to P(t) - 2T\sin\theta = m\ddot{u}$$

$$\sin\theta = \frac{u}{\sqrt{L^2+u^2}} \quad \Rightarrow m\ddot{u} + 2\left\{T_0 + \frac{EA}{L}\left[(L^2+u^2)^{\frac{1}{2}} - L\right]\right\}\frac{u}{\sqrt{L^2+u^2}} = P(t)$$

رابطه غیرخطی هندسی رفتار جرم m

اگر $u \ll L \;\to\; m\ddot{u} + 2T_0\dfrac{u}{L} = P(t)$ ← رابطه خطی

رفتار غیرخطی فیزیکی از متغیر بودن جرم، میرایی و سختی وارد مساله می شود. معمولاً جرم با زمان تغییر نمی کند و با توجه به عدم قطعیت در تعیین دقیق میرایی، خطی در نظر داشتن آنه دور از واقعیت نخواهد بود. بنابراین منشاء اصلی رفتار غیرخطی در سیستم های متعارف همانا عدم پیروی از قانون هوک در اجزاء و مصالح سازه خواهد بود. این رفتار توسط مبانی علم تئوری پلاستیسیته تعیین می شود:



(منحنی رفتاری سازه)

در فاصله زمانی i و $i+1$ معادله جزئی حاکم:

$$m\Delta\ddot{u}_i + c\Delta\dot{u}_i + (\Delta f_s)_i = \Delta P_i \qquad ①$$

$$(\Delta f_s)_i = (K_i)_{sec}\,\Delta u_i \qquad ②$$

سختی سکانت Secant stiffness در فاصله گام زمانی به دلیل اینکه u_{i+1} مشخص نمی باشد نمی تواند بکار رود چون معلوم نیست. اگر فاصله زمانی Δt کوچک باشد، می توان از سختی مماسی K_T استفاده کرد:

$$(\Delta f_s)_i \simeq (K_i)_T\,\Delta u_i \qquad ③$$

بنابراین در الگوریتم روش‌های عددی قبلی تغییر کلی رخ نمی دهد بلکه فقط مقدار K در هر گام ثابت بوده و مقدار آن برابر K_T (سختی مماسی ابتدای گام) خواهد بود.

برای نمونه کلیات روش نیومارک (شتاب خطی) در این حالت بیان می شود:

$$\Delta u = \Delta t\, \dot{u}_i + \frac{\Delta t^2}{2}\ddot{u}_i + \frac{\Delta t^2}{6}\Delta\ddot{u} \qquad ④$$ از قبل داشتیم:

$$u_{i+1} = u_i + \Delta u \quad , \quad \ddot{u}_{i+1} = \ddot{u}_i + \Delta\ddot{u}$$

از رابطه ④ $\rightarrow$ $$\Delta\ddot{u} = \frac{6}{(\Delta t)^2}\left(\Delta u - \Delta t\,\dot{u}_i - \frac{(\Delta t)^2}{2}\ddot{u}_i\right) \qquad ⑤$$

در روش نیومارک $\rightarrow$ $$\Delta\dot{u} = \Delta t\,\ddot{u}_i + \frac{\Delta t}{2}\Delta\ddot{u} \qquad ⑥$$

که $\Delta\dot{u} = \dot{u}_{i+1} - \dot{u}_i$ با بکارگیری ⑤ در ⑥:

$$\Delta\dot{u} = \frac{3}{\Delta t}\Delta u - 3\dot{u}_i - \frac{\Delta t}{2}\ddot{u}_i \qquad ⑦$$

حال اگر ③، ⑤ و ⑦ را در ① قرار دهیم:

$$\left(\frac{6m}{\Delta t^2} + \frac{3c}{\Delta t} + K_T\right)\Delta u = \Delta P + m\left(\frac{6\dot{u}_i}{\Delta t} + 3\ddot{u}_i\right) + c\left(3\dot{u}_i + \frac{\Delta t}{2}\ddot{u}_i\right)$$

یا $$K_T^*\Delta u = \Delta P^* \qquad ⑧$$

که

$$\begin{cases} K_T^* = \dfrac{6m}{\Delta t^2} + \dfrac{3c}{\Delta t} + K_T \\ \Delta P^* = \Delta P + m\left(\dfrac{6\dot{u}_i}{\Delta t} + 3\ddot{u}_i\right) + c\left(3\dot{u}_i + \dfrac{\Delta t}{2}\ddot{u}_i\right) \end{cases}$$

پس از تعیین Δu از رابطه ⑧، مقدار آن را در ⑥ قرارداده و $\Delta\dot{u}$ محاسبه می شود.

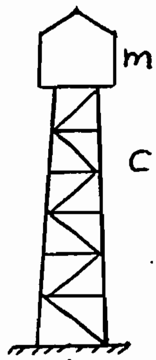
و بنابراین با داشتن Δu، $\Delta\dot{u}$ می توان u_{i+1} و $\dot{u}_{i+1}$ را تعیین نمود.

مقدار شتاب می تواند از رابطه ⑤ یا برای سرشکن کردن خطای سختی مماسی از رابطه تعادل کلی در زمان $i+1$ تعیین شود:

$$\ddot{u}_{i+1} = \frac{1}{m}\left\{P_{i+1} - f_s(t+\Delta t) - c\dot{u}_{i+1}\right\} \qquad ⑨$$

مثال - برج آب با جرم m و میرایی c تحت انفجار قرار می‌گیرد، منحنی رفتاری $f_s - u$ داده شده است،

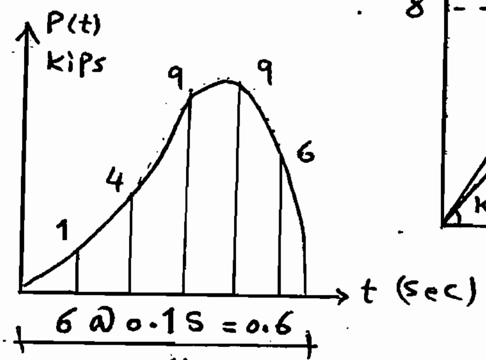
مطلوبست واکنش برج در لحظه 0.8 sec با روش عددی شتاب متوسط؟



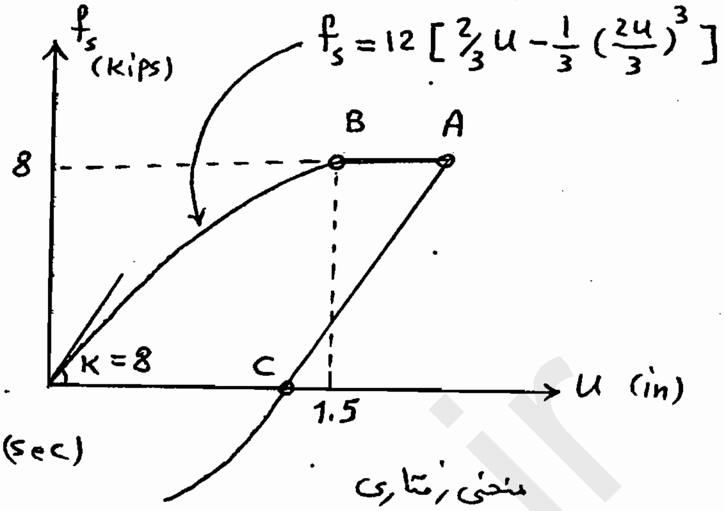
برج آب

$m = 0.1 \ \frac{kip-s^2}{in}$

$C = 0.2 \ \frac{kip-s}{in}$



منحنی بارگذاری



منحنی رفتاری

حل:

از الگوریتم روش شتاب متوسط:

$$\Delta\ddot{u} = \frac{4}{\Delta t^2}\left(\Delta u - \Delta t\,\dot{u}_i - \frac{\Delta t^2}{2}\ddot{u}_i\right)$$

$$\Delta\dot{u} = \frac{2}{\Delta t}\Delta u - 2\dot{u}_i = 20\,\Delta u - 2\dot{u}_i \quad \text{و} \quad K^*\Delta u = \Delta P^*$$

$$K^* = \left(\frac{4m}{\Delta t^2} + \frac{2c}{\Delta t} + K_T\right) = 44 + K_T$$

$$\Delta P^* = \Delta P + m\left(\frac{4\dot{u}_i}{\Delta t} + 2\ddot{u}_i\right) + 2c\,\dot{u}_i = \Delta P + 4.4\,\dot{u}_i + 0.2\,\ddot{u}_i$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_{\text{اولیه}}}} = 0.702 \ \text{sec} \quad , \quad \Delta t = 0.1 \simeq \frac{1}{7}T$$

جدول مربوط تکمیل می‌شود. به نکات زیر توجه شود:

* برای $u > 1.5^{in}$، نیروی f_s برابر 8 kips می‌باشد،

* در فاصله زمانی 0.4 به 0.5 تغییر مکان از 1.1128 به 1.7093 می‌رسد (بزرگتر از 1.5) و f_s از رابطه خود به مقدار ثابت 8 تغییر کند ولی چون Δt بزرگ است، محل و زمان دقیق این تغییر نامشخص.

* در فاصله زمانی 0.5 به 0.6، سرعت تغییر علامت داده، یعنی صفر شده سپس تغییر علامت، بنابراین سختی از صفر باید به 8 تبدیل شود (پس از نقطه A منحنی رو به پایین است) ولی محل دقیق مشخص نیست.

* در گام های بعد از 0.6، K_T به 8 تغییر می‌کند و نیروی فنر در بخش تنزلی منحنی رفتار قرار دارد، مثلاً در 0.7 ثانیه:

$$f_s = 8 + 8\Delta u = 8 - 8\times 0.3459 = 5.2328 \ \text{kips}$$

---

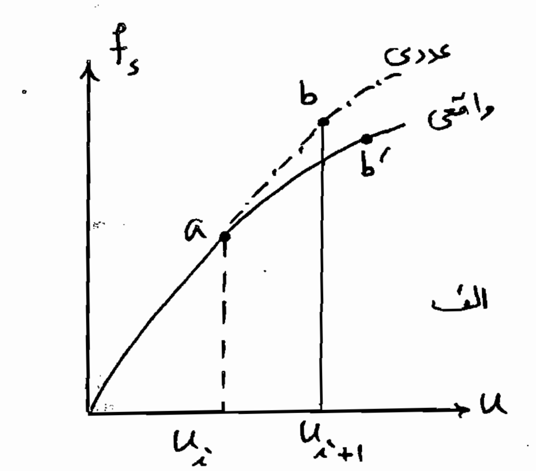
* جدول حل مثال در صفحه ۶۲ بالای صفحه جدول الف

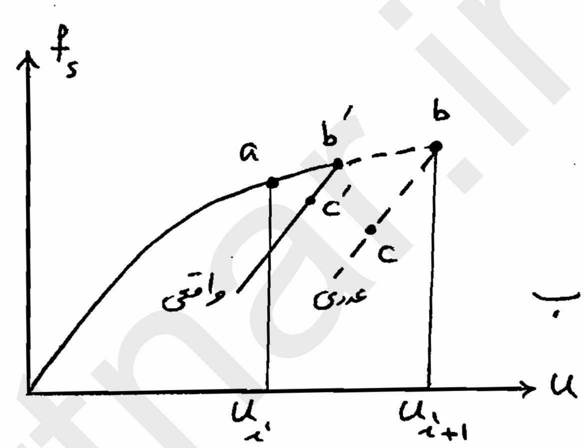
خطا در تحلیل غیرخطی دینامیکی سیستم ها

علاوه بر خطاهای رایج روش های عددی ، خطاهای دیگری که مختص حالت غیرخطی است ، بوجود می آید (در بکارگیری سختی از رابطه و منحنی نیرو - تغییرمکان) :

الف - خطای ناشی از استفاده سختی مماسی ابتدای گام به جای سختی واقعی

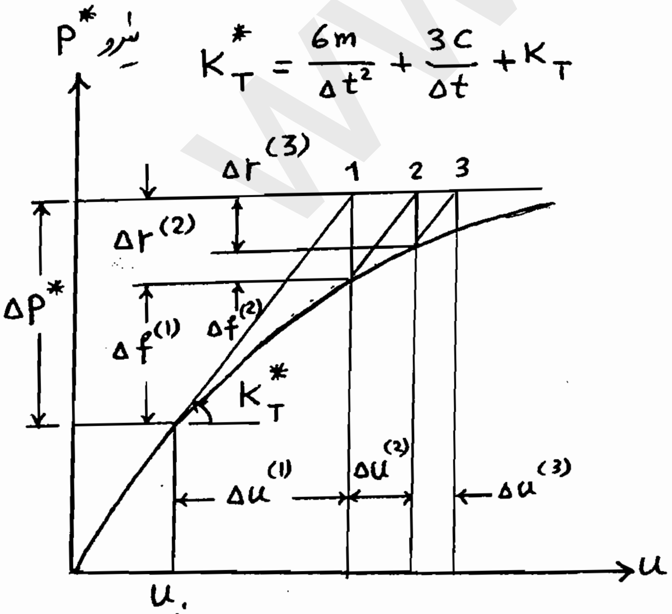
ب - تأخیر در آشکار سازی گذرای رابطه نیرو - تغییرمکان



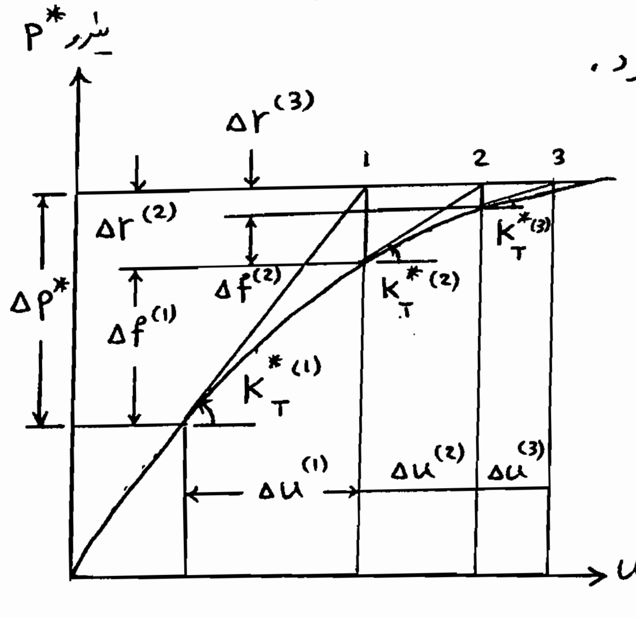


برای کاهش اثر خطاهای حالت ب می توان در محل های تغییر جهت منحنی ، از Δt کوچکتر استفاده شود که معمولاً از $\frac{\Delta t}{4}$ استفاده می شود (کنترل و اعمال توسط کامپیوتر) ،

خطای ناشی از بکارگیری سختی مماسی با بکارگیری روش تکراری در هر گام ، می تواند حداقل شود .



(tangent stiffness)



(current tangent stiffness)

Modified NEWTON - RAPHSON ITERATION | Original N. - R. method

با توجه به شکل $u-f_s$ برای خطای مورد نظر و جهت دسترسی به نقطه ´b واقعی از طریق نقطه b ، روش تکراری Iteration در یک گام بکار می رود (به شرح زیر):

رابطه ۸ روش نیومارک شتاب خطی

$$K_T^* \Delta u^{(1)} = \Delta P^* \qquad (۸)$$

در حالت غیرخطی که سختی فنر با افزایش تغییرمکان، کاهش می یابد، نیروی فنر معادل ناشی از تغییرمکان $\Delta u^{(1)}$ کمتر از مقداری است که رابطه ۸ ارائه می دهد، بعنوان نتیجه، یک نیروی اضافی باقی می ماند که در شکل ملاحظه می شود و آن را با $\Delta r^{(2)}$ نشان داده ایم، تغییرمکان اضافی در اثر این نیروی باقی مانده بصورت زیر است:

$$K_T^* \Delta u^{(2)} = \Delta r^{(2)} = \Delta P^* - \Delta f^{(1)} \qquad (۹)$$

از این تغییرمکان اضافی، نیروی باقی مانده جدید پیدا شده و مسأله به همین ترتیب ادامه می یابد تا همگرایی حاصل شود، مراحل تکرار در یک گام زمانی به شرح زیر است:

$$K_T^* \Delta u^{(K)} = \Delta r^{(K)}$$

$$u_{i+1}^{K} = u_{i+1}^{K-1} + \Delta u^{(K)} \qquad (۱۰)$$

$$\Delta f^{(K)} = f_s^{(K)} - f_s^{K-1} + \frac{6m}{\Delta t^2}\Delta u^{(K)} + \frac{3c}{\Delta t}\Delta u^{(K)} \qquad K=1,\hat{K}$$

$$\Delta r^{K+1} = \Delta r^{(K)} - \Delta f^{(K)}$$

از رابطه ۸ مشخص است که مرحله تکرار با $\Delta r^{(1)} = \Delta P^*$ شروع می شود.

وقتی مراحل تکرار، همگرا شد یعنی $\Delta r^{(K)}$ یا $\Delta u^{(K)}$ به اندازه کافی کوچک شد، تغییرمکان کل نموی از رابطه $\Delta u = \sum_{K=1}^{\hat{K}} \Delta u^{(K)}$ حاصل می شود.

نرخ همگرایی می تواند بهتر شود چنانچه بجای سختی مماسی اولیه از جریان مماسی سختی استفاده شود که البته برآورد سختی مماسی جدید مستلزم محاسبات بیشتر است.

مثال - برج آب مثال قبل مورد نظر است تحت اثر همان بارگذاری ، منحنی این بار در منحنی رفتار غیرخطی از روش تکراری استفاده شود. تست انتقال A نیز با دقت بیشتری بررسی شود. روش عددی شتاب متوسط بکار می رود با $\Delta t = 0.1$ که در مرحله تغییر فاز از Δt کوچکتر استفاده خواهد شد.

$$K_T^* \Delta u^{(k)} = \Delta r^{(k)} \quad , \quad u_{i+1}^{(k)} = u_{i+1}^{(k-1)} + \Delta u^{(k)}$$

$$\Delta f^{(k)} = f_s^{(k)} - f_s^{(k-1)} + \frac{4m}{\Delta t^2} \Delta u^{(k)} + \frac{2c}{\Delta t} \Delta u^{(k)}$$

$$K_T^* = \frac{4m}{\Delta t^2} + \frac{2c}{\Delta t} + K_T = 44 + K_T \quad \text{که} \quad \Delta r^{(k+1)} = \Delta r^{(k)} - \Delta f^{(k)}$$

$$\Delta P^* = \Delta P + m\left(\frac{4}{\Delta t}\dot{u}_i + 2\ddot{u}_i\right) + 2c\dot{u}_i = \Delta P + 4.4\dot{u}_i + 0.2\ddot{u}_i \quad \text{و}$$

نتایج 0.8 ثانیه و مراحل تکرار در قسمت غیرخطی در جدول ارائه شده است :

برای نمونه مراحل مربوط به فاصله زمانی 0.3 تا 0.4 به شرح زیر خواهد بود :

$$\Delta u^{(1)} = \frac{1}{K_T^*} \Delta r^{(1)} = \frac{1}{K_T^*} \Delta P^* = \frac{31.3839}{51.0968} = 0.6142$$

پس :

$$u^{(1)}(0.4) = u^{(1)}(0.3) + 0.6142 = 1.1182$$

$$\Delta f^{(1)} = f_s(1.1182) - f_s(0.5040) + \frac{4m}{\Delta t^2} \Delta u^{(1)} + \frac{2c}{\Delta t} \Delta u^{(1)}$$

$$= 7.2885 - 3.8803 + 44 \times 0.6142 = 30.4330$$

$$\Delta r^{(2)} = 31.3839 - 30.4330 = 0.9509$$

$$\Delta u^{(2)} = \frac{0.9509}{51.0968} = 0.0186 \rightarrow u^{(2)}(0.4) = 1.1182 + 0.0186 = 1.1368$$

$$\Delta f^{(2)} = f_s(1.1368) - f_s(1.1182) + 44 \times 0.0186$$

$$= 7.3532 - 7.2885 + 44 \times 0.0186 = 0.8831$$

$$\Delta r^{(3)} = \Delta r^{(2)} - \Delta f^{(2)} = 0.9509 - 0.8831 = 0.0678$$

$$\Delta u^{(3)} = \frac{0.0678}{51.0968} = 0.0013 \longrightarrow$$ و ادامه ....

* بین 0.6 و 0.7 ثانیه ، سرعت از مثبت به منفی تبدیل می شود . بوسیله عملیات تکراری ، زمان $\dot{u}=0$ برابر 0.60339 ثانیه است ، بعد از این لحظه ، سختی به 8 $kips/in$ برمی گردد .

محاسبات بین 0.6 و 0.60339 با $\Delta t = 0.00339$ انجام شده است ،

بطور مشابه محاسبات بین 0.60339 و 0.7 ثانیه با $\Delta t = 0.09661$ انجام گردید ،

بعد از لحظه $t = 0.60339$ ، نیروی فنر f_s در قسمت تنزلی به طرف پائین می افتد طوریکه نیروی فنر به $8\Delta u$ کاهش می یابد (در هر گام زمانی) ،

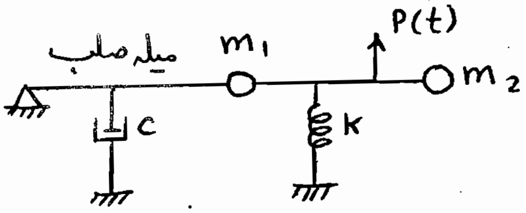
با مقایسه نتایج دو جدول در دو مثال اخیر ، ملاحظه می شود اگر در فاصله زمانی که تغییر مکان و نیرو در منحنی رفتار ، غیرخطی است ، از روش تکراری استفاده نشود ، در اصلاح نتایج و ملحوظ داشتن مسأله غیرخطی در محاسبات ، اشتباه قابل توجهی خواهیم داشت .

تحلیل دینامیکی سیستم های معادل یک درجه آزادی تعمیم داده شده

Dynamic Analysis of Generalized SDF systems

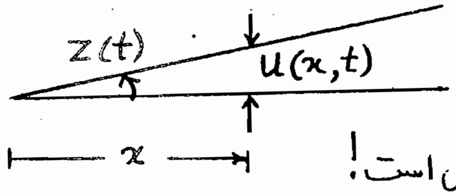
سیستم های پیچیده تر از حالت های یک درجه آزادی که مشابه حالت SDF تحلیل می شوند ، اگر سیستم از اجزاء صلب سرهم بندی شده تشکیل شده باشد و فقط در یک حالت تغییر شکل بدهد بطور دقیق و اگر سیستم با جرم گسترده و انعطاف پذیر باشد ، بطور تقریبی تحلیل خواهد شد .

در حالت تقریبی (انعطاف پذیر) دقت فرکانس زاویه ای بستگی به شکل ارتعاشی مفروض خواهد داشت ،



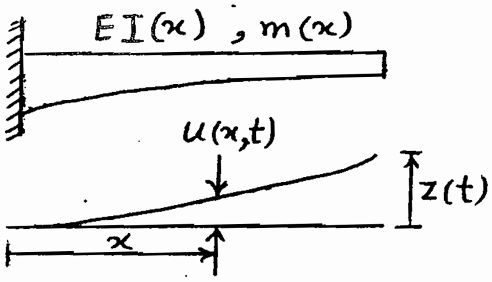
سیستم روبرو : صلب ← $u(x,t) = \psi(x) Z(t)$

مختصات شاخص SDF : می تواند چرخش $Z(t)$ باشد



تابع تغییر شکل ، چونکه میله صلب ← $\psi(x) = x$

چونکه دو جرم متمرکز وجود دارد ← سیستم معادل SDF یک جرم شکل است!



سیستم روبرو : جرم و سختی گسترده متغیر (انعطاف پذیر) دارای بینهایت درجه آزادی ـ فرکانس اصلی (اول) در ارتعاش بسیار مهم ـ بطور تقریبی می توان تابع تغییر شکل حالت ارتعاش اصلی (مود اول) را (فقط) درنظر گرفت $\psi(x)$ و در این حالت یک مختصات شاخص را انتخاب نمود $Z(t)$ ، مثلاً انتهای تیر طره .

هردو سیستم حالت تعمیم داده شده دارند چون تغییر مکان هر نقطه با رابطه $u(x,t)=\psi(x)Z(t)$ مشخص می شوند ،

$$m^*\ddot{Z} + c^*\dot{Z} + K^*Z = P^*(t)$$

جرم ، میرایی ، سختی و نیروی تعمیم داده شده (علامت ستاره) . حل معادله از روش های متعارف امکان پذیر است . مرحله اصلی تحلیل سیستم جدید تعمیم داده شده ، همانا ارزیابی مشخصات تعمیم داده شده می باشد .

حالت الف ـ سیستم های صلب سرهم بندی شده

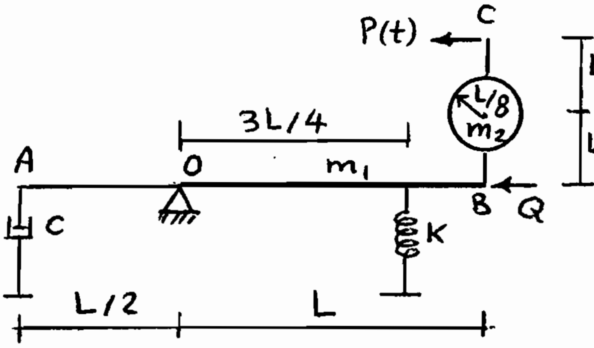
در این نوع سیستم ، اجزاء صلب همراه جرم گسترده و جرم متمرکز و سختی و میرایی متمرکز وجود دارند که تحت اثر نیروی دینامیکی قرار می گیرند . برای تشکیل معادله حرکت ، روش قانون دوم نیوتن مشکل بوده و بهتر است از روش دالامبر استفاده شود (نیروهای اینرسی در پیکره آزاد سیستم لحاظ شوند) .

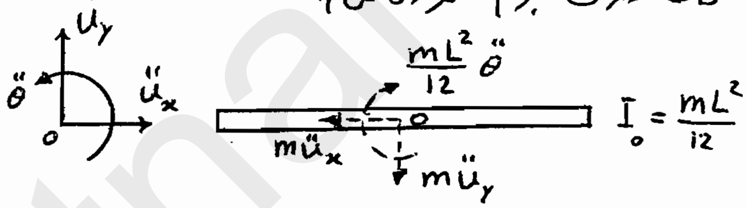
نیروی اینرسی گسترده برای یک جسم صلب با جرم گسترده با دو مولفه جایگزین (بیان) می‌شود:

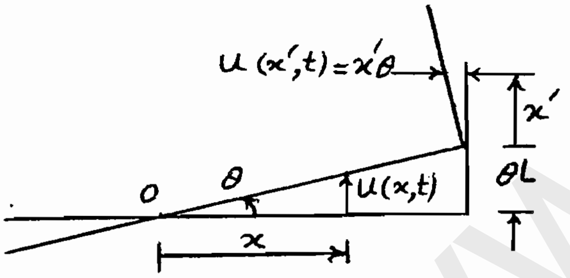
نیروی اینرسی منتجه کل جرم در مرکز ثقل و ممان اینرسی جسم.

مثال - در سیستم سرهم بندی شده زیر مطلوبست تعیین ۱- معادله حرکت ۲- فرکانس طبیعی ۳- درصد میرایی ۴- پاسخ سیستم بدون میرایی تحت اثر ناگهانی نیروی P_0 ۵- اصلاح معادله حرکت وقتی نیروی افقی Q در میله افقی اثر می‌کند ۶- نیروی بحرانی (کمانشی). تغییر مکانها کوچک و مختصات شاخص، چرخش حول نقطه O در نظر است.

حل: سیستم صلب - OA و BC بدون جرم - OB دارای جرم گسترده کل m_1

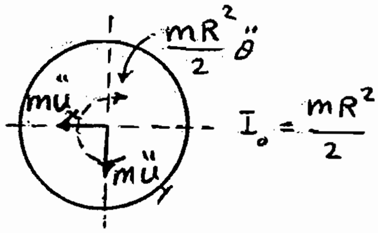




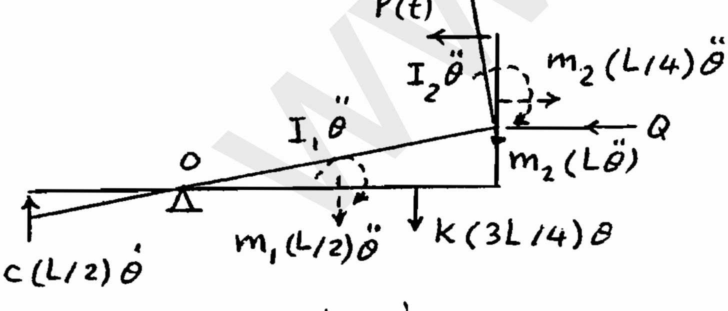


(تغییر مکانها)

$$U(x,t) = x\,\theta(t)$$



با توجه به نیروها، نسبت به نقطه O لنگر می‌گیریم:



(نیروها)

$$I_1\ddot{\theta} + \left(m_1\frac{L}{2}\ddot{\theta}\right)\frac{L}{2} + I_2\ddot{\theta} + (m_2L\ddot{\theta})L + \left(m_2\frac{L}{4}\ddot{\theta}\right)\frac{L}{4} + \left(c\frac{L}{2}\dot{\theta}\right)\frac{L}{2} + \left(k\frac{3L}{4}\theta\right)\frac{3L}{4} = P(t)\frac{L}{2}$$

$$I_1 = m_1L^2/12 \quad , \quad I_2 = m_2(L/8)^2/2 = m_2L^2/128$$

$$\left(\frac{m_1L^2}{3} + \frac{137}{128}m_2L^2\right)\ddot{\theta} + \frac{cL^2}{4}\dot{\theta} + \frac{9kL^2}{16}\theta = P(t)\frac{L}{2}$$

$$m^*\ddot{\theta} + c^*\dot{\theta} + k^*\theta = P^*(t)$$ ← معادله حرکت

$$m^* = \left(\frac{m_1}{3} + \frac{137}{128} m_2\right) L^2 \quad , \quad C^* = \frac{CL^2}{4} \quad , \quad K^* = \frac{9KL^2}{16} \quad , \quad P^*(t) = P(t)\frac{L}{2}$$

$$\omega^* = \sqrt{K^*/m^*} \quad , \quad \xi = \frac{C^*}{C_{cr}} = \frac{C^*}{2m^*\omega^*} = \frac{C^*}{2\sqrt{K^* m^*}}$$

از حل معادله حرکت :

$$P^*(t) = \frac{P(t)L}{2} = \frac{P_0 L}{2} \equiv P_0^*$$

$$\theta(t) = \frac{P_0^*}{K^*}(1-\cos\omega t) = \frac{8P_0}{9KL}(1-\cos\omega t)$$

$$u(x,t) = x\,\theta(t) \quad , \quad u(x',t) = x'\theta(t)$$

اگر نیروی افقی Q باشد : در لنگرگیری : $QL\theta$

$$m^*\ddot{\theta} + C^*\dot{\theta} + (K^* - QL)\theta = P^*(t)$$

نیروی افقی فشاری ، سختی را کاهش می دهد .

$$K^* - QL = 0$$

$$Q_{cr} = \frac{K^*}{L} = \frac{9KL}{16}$$

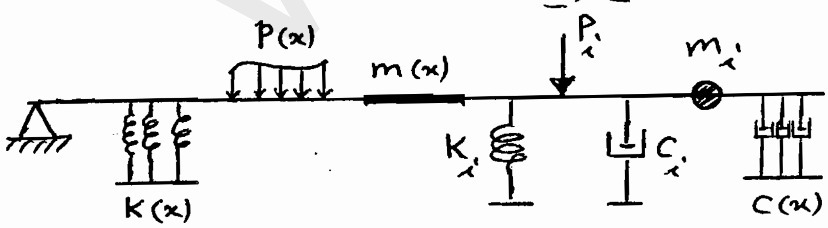
حالت ب سیستم های انعطاف پذیر

سیستم با بینهایت درجه آزادی با سختی و جرم گسترده در حالت مرتعش (غیرصلب)

دقت مساله بستگی به تابع شکل $\Psi(x)$ دارد $\quad u(x,t) = \Psi(x)\,Z(t)$

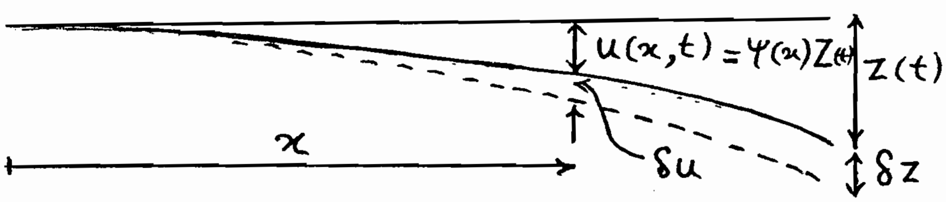
که تا چه حدی شرایط مرزی (هندسی) و شرایط فیزیکی مساله را ارضاء می نماید .

حالت کلی :



کاربرد اصل کار مجازی :

کار نیروها برابر صفر



کار مجازی الاستیک $\quad W_s = -\int \overbrace{k(x)u(x,t)dx}^{\text{نیروی غیرگسترده}} \cdot \delta u \quad - \sum_i k_i u_i \cdot \delta u_i$

$$\begin{cases} u(x,t) = \psi(x) z(t) \rightarrow \quad \delta u = \psi(x)\delta z \\ u_i = \psi_i \; z(t) \rightarrow \quad \delta u_i = \psi_i \; \delta z \end{cases}$$

$$W_s = -\left\{ \int k(x)\psi^2(x)\,dx + \sum_i k_i \psi_i^2 \right\} . z\,\delta z$$

کار مجازی نیروهای میرایی $\quad W_D = -\int c(x)\dot{u}(x,t)dx \cdot \delta u \quad - \sum_i c_i \dot{u}_i \cdot \delta u_i$

$$\begin{cases} \dot{u}(x,t) = \psi(x)\dot{z}(t) \rightarrow \quad \delta u = \psi(x)\,\delta z \\ \dot{u}_i = \psi_i \; \dot{z}(t) \rightarrow \quad \delta u_i = \psi_i \; \delta z \end{cases}$$

$$W_D = -\left\{ \int c(x)\psi^2(x)\,dx + \sum_i c_i \psi_i^2 \right\} \dot{z}\,\delta z$$

به همین ترتیب ؛ کار مجازی نیروی اینرسی :

$$W_I = -\left\{ \int m(x)\psi^2(x)\,dx + \sum_i m_i \psi_i^2 \right\} \ddot{z}\,\delta z$$

$W_p = \int p(x)\,dx \cdot \delta u + \sum_i p_i\,\delta u_i$ $\qquad$ کار مجازی نیروهای خارجی :

$$W_p = \left\{ \int p(x)\psi(x)\,dx + \sum_i p_i \psi_i \right\} \delta z$$

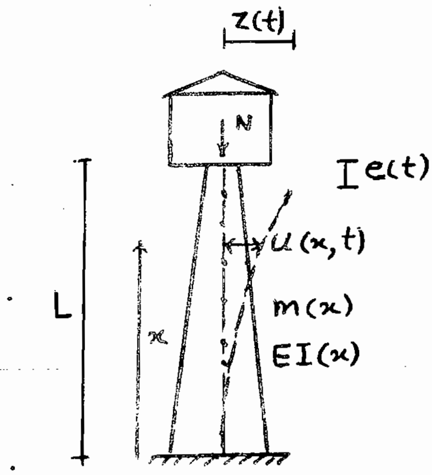
با توجه به جهت نیروها و جهت تغییر مکان مجازی و علامت کارها ، خواهیم داشت : $\quad \delta z \neq 0$

معادله حرکت سیستم معادل SDF : $\qquad m^*\ddot{z} + c^*\dot{z} + k^* z = p^*(t)$

$$m^* = \int m(x)\psi^2(x)\,dx + \sum_i m_i \psi_i^2 \qquad \Big| \qquad k^* = \int k(x)\psi^2(x)\,dx + \sum_i k_i \psi_i^2$$

$$c^* = \int c(x)\psi^2(x)\,dx + \sum_i c_i \psi_i^2 \qquad \Big| \qquad p^* = \int p(x)\psi(x)\,dx + \sum_i p_i \psi_i$$

جرم ، میرایی ، سختی و نیروی مؤثر معادل سیستم SDF تعمیم داده شده با تابع $\psi(x)$



جزئیات بیشتر در یک حالت خاص

$$u(x,t)=\psi(x)Z(t)$$

از مبانی انرژی استفاده می کنیم (انرژی جنبشی و پتانسیل):

انرژی جنبشی $T=\int_0^L \frac{1}{2}m(x)\dot{u}^2(x,t)\,dx=$

$$\frac{1}{2}\int_0^L m(x)\left[\psi^2(x)\dot{z}^2\right]dx \equiv \frac{1}{2}m^*\dot{z}^2=T$$

جرم مؤثر معادل $m^*=\int_0^L m(x)\psi^2(x)\,dx$

برای بیان سختی معادل مؤثر K^* از اصول مقاومت مصالح (انرژی پتانسیل تغییر شکل):

انرژی یا کار لنگر (ممان) $V=\frac{1}{2}\int_0^L \frac{M^2}{EI}dx$, $u''(x,t)=\frac{d^2u(x,t)}{dx^2}=\frac{M}{EI}$

$$M=EIu'' \quad , \quad u''=\psi''(x)z(t)$$

$$V=\frac{1}{2}\int_0^L \frac{(EI)^2}{EI}(u'')^2dx \Rightarrow V=\frac{1}{2}\int_0^L EI(x)\left(\psi''(x)z(t)\right)^2dx$$

$V=\frac{1}{2}K^*Z^2$ که $K^*=\int_0^L EI(x)\psi''^2(x)\,dx$

سختی هندسی معادل مؤثر؛ نیروی محوری (قائم) N ← افت راس برج آب e

از مقاومت مصالح؛ $e(t)=\frac{1}{2}\int_0^L u'^2(x,t)\,dx$

انرژی پتانسیل آن $V_N=-\frac{N}{2}\int_0^L u'^2(x,t)\,dx$

انرژی پتانسیل نیروی N در اثر افت $e(t)$ کم می شود ← علامت منفی

اگر وزنه متغیر باید مدنظر باشد، $N(x)$

$$V_N=-\frac{1}{2}\int_0^L N(x)u'^2(x,t)\,dx=-\frac{1}{2}\int_0^L N(x)\left[\psi'(x)Z\right]^2dx$$

$V_N=-\frac{1}{2}K_G^*Z^2$ که $K_G^*=\int_0^L N(x)\psi'^2(x)\,dx$

$$\bar{K}^* = K^* - K_G^* = \int_0^L EI(x)\,\psi''^2(x)\,dx - N_{cr}\int_0^L \psi'^2(x)\,dx = 0$$

بار بحرانی کمانش $N_{cr} = \dfrac{\int_0^L EI(x)\,\psi''^2(x)\,dx}{\int_0^L \psi'^2(x)\,dx}$

محاسبه فرکانس زاویه‌ای معادل موثر $\omega^* = \sqrt{K^*/m^*}$

مثال - در برج آب قبلی $EI(x)$ و $m(x)$ در طول ارتفاع ثابت فرض می‌شود. مطلوبست برآورد ω^* برای توابع مختلف شکل $\psi(x)$ (جرم گسترده m).

الف - اگر از شکل مود اول در پایداری سازه‌ها استفاده کنیم $\psi(x) = 1 - \cos\dfrac{\pi x}{2L}$

$$m^* = \int_0^L m\,\psi^2(x)\,dx = m\int_0^L \left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx = 0.228\,mL$$

$$K^* = \int_0^L EI\,\psi''^2(x)\,dx = EI\int_0^L \left(\frac{\pi^2}{4L^2}\cos\frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx = \frac{\pi^4}{32}\,\frac{EI}{L^3}$$

$$\omega^* = \sqrt{K^*/m^*} = \sqrt{\frac{\pi^4 EI}{32L^3 \times 0.228\,mL}} = \frac{3.653}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}$$

ب - اگر شکل ارتعاش برج را سهمی فرض کنیم: $\psi(x) = \dfrac{x^2}{L^2}$

$$m^* = 0.2\,mL\ ,\ K^* = \frac{4EI}{L^3}\ ,\ \omega^* = \sqrt{\frac{4EI}{L^3 \times 0.2\,mL}} = \frac{4.472}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}$$

* جواب دقیق از حل سیستم پیوسته: $\omega^* = \dfrac{3.517}{L^2}\sqrt{\dfrac{EI}{m}}$

در حالت ب، $\psi(x) = \dfrac{x^2}{L^2} \rightarrow \dfrac{d^2u}{dx^2} = Z\psi'' = Z\underbrace{\dfrac{2}{L^2}}_{\text{عدد ثابت}}$ و $\dfrac{d^2u}{dx^2} = \dfrac{M}{EI} = Z\dfrac{2}{L^2}$

یعنی لنگر در طول ارتفاع ثابت است در صورتیکه در انتهای برج صفر و در تکیه‌گاه حداکثر است پس تابع مد نظر $\psi(x)$ یکی از شرایط فیزیکی را ارضاء نکرده و جواب از واقعیت دور است.

ج - در این حالت سعی می شود با ارضاء شرایط مرزی و فیزیکی بیشتر، به یک تابع

شکل $\Psi(x)$ بهتر دست یابیم. یک تابع درجه ۳ (چند جمله ای) فرض می کنیم:

چهار ضریب پس چهار شرط لازم است. $\Psi(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

۱- تغییر مکان در تکیه گاه صفر است: $u = 0 \rightarrow \Psi(x=0) = 0$

۲- ضریب زاویه در تکیه گاه گیردار صفر است: $u' = 0 \rightarrow \Psi'(x=0) = 0$

۳- لنگر در انتهای برج صفر است: $u'' = 0 \rightarrow \Psi''(x=L) = 0$

٤- همیشه در نقطه شاخص (مختصات شاخص): $u(x,t) = z(t) \rightarrow \Psi(L) = 1$

اعمال شرایط $\Rightarrow a = -\dfrac{1}{2L^3}\,,\ b = \dfrac{3}{2L^2}\,,\ c = d = 0 \Rightarrow$

$$\Psi(x) = -\frac{x^3}{2L^3} + \frac{3x^2}{2L^2}\,,\quad \Psi''(x) = \frac{3}{L^2}\left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

$$K^* = \frac{3EI}{L^3}\,,\quad m^* = 0.2357\,mL \Rightarrow \omega^* = \frac{3.568}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}$$

برآورد سختی هندسی و نیروی N_{cr}:

حالت الف $\rightarrow \Psi(x) = 1 - \cos\dfrac{\pi x}{2L} \rightarrow K_G^* = \int_0^L N\,\Psi'^2(x)\,dx$

$$K_G^* = N\int_0^L \left(\frac{\pi}{2L}\right)^2 \left(\sin\frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx = \frac{N\pi^2}{8L} \rightarrow N_{cr} = 2.467\,\frac{EI}{L^2}$$

حالت ب $\rightarrow \Psi(x) = x^2/L^2 \rightarrow K_G^* = \dfrac{4}{3}\dfrac{N}{L} \rightarrow N_{cr} = \dfrac{3EI}{L^2}$

حالت ج $\rightarrow \Psi(x) = -\dfrac{x^3}{2L^3} + \dfrac{3x^2}{2L^2} \rightarrow K^* = \dfrac{6}{5}\dfrac{N}{L} \rightarrow N_{cr} = 2.5\,\dfrac{EI}{L^2}$

حالت واقعی $\rightarrow N_{cr} = 2.67\,\dfrac{EI}{L^2}$

RAYLEIGH'S Method for ω — تعیین فرکانس زاویه‌ای بوسیله روش رایله

در سال ۱۸۷۳ با استفاده از اصل بقای انرژی ، روش ساده برای برآورد ω (ارتعاش آزاد)

الف - سیستم جرم و فنر (سختی و جرم مؤثر معادل) $u(t) = u_0 \sin\omega t$

$$\dot{u}(t) = u_0\,\omega\cos\omega t \quad , \quad u_{max} = u_0 \quad , \quad \dot{u}_{max} = u_0\,\omega$$

حداکثر انرژی پتانسیل $V_{max} = \frac{1}{2} K u_{max}^2 = \frac{1}{2} K u_0^2$

حداکثر انرژی جنبشی $T_{max} = \frac{1}{2} m \dot{u}_{max}^2 = \frac{1}{2} m u_0^2 \omega^2$

$$T_{max} = V_{max} \Rightarrow \omega^2 = K/m$$

ب - سیستم با جرم و سختی گسترده بطول L $u(x,t) = \psi(x)\, z(t)$

$z(t) = z_0 \sin\omega t$ تغییر مکان نقطه شاخص

$$u(x,t) = \psi(x)\, z_0 \sin\omega t \rightarrow u_{max} = \psi(x)\, z_0$$

$$\dot{u}(x,t) = \psi(x)\, z_0\,\omega\cos\omega t \rightarrow \dot{u}_{max} = \psi(x)\, z_0\,\omega$$

$$u''(x,t) = \psi''(x)\, z_0 \sin\omega t \rightarrow u''_{max} = \psi''(x)\, z_0$$

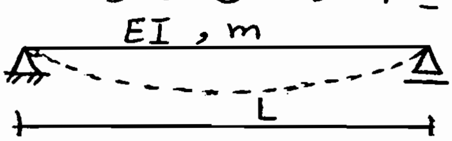
انرژی پتانسیل $V = \frac{1}{2}\int_0^L EI(x)\, u''^2\, dx \rightarrow V_{max} = \frac{1}{2} z_0^2 \int_0^L EI(x)\, \psi''^2(x)\, dx$

انرژی جنبشی $T = \frac{1}{2}\int_0^L m(x)\, \dot{u}^2\, dx \rightarrow T_{max} = \frac{1}{2} z_0^2\, \omega^2 \int_0^L m(x)\, \psi^2(x)\, dx$

$$T_{max} = V_{max} \rightarrow \omega^2 = \int_0^L EI(x)\, \psi''^2(x)\, dx \Big/ \int_0^L m(x)\, \psi^2(x)\, dx = K^*/m^*$$

Rayleigh's quotient   خارج قسمت رایله

مثال - مطلوبست تعیین ω یک تیر ساده خمشی به روش رایله؟ مود اصلی مورد نظر است.



الف - $\psi(x) = \frac{x}{L}\left(\frac{x}{L} - 1\right)$ ب - $\psi(x) = \sin\frac{\pi x}{L}$

الف - $\psi''(x)=\frac{2}{L^2}$, $V_{max}=\frac{1}{2}Z_0^2 EI\int_0^L\left(\frac{2}{L^2}\right)^2dx=\frac{1}{2}Z_0^2\,\frac{4EI}{L^3}$

$$T_{max}=\frac{1}{2}Z_0^2\omega^2 m\int_0^L\left[\frac{x}{L}\left(\frac{x}{L}-1\right)\right]^2dx=\frac{1}{2}Z_0^2\omega^2\,\frac{mL}{30}$$

$$T_{max}=V_{max}\longrightarrow\quad \omega=\frac{10.95}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}$$

ب - $\psi(x)=\sin\frac{\pi x}{L}\rightarrow\psi'(x)=\frac{\pi}{L}\cos\frac{\pi x}{L}\rightarrow\psi''(x)=-\frac{\pi^2}{L^2}\sin\frac{\pi x}{L}$

$$V_{max}=\frac{1}{2}Z_0^2 EI\int_0^L\left(-\frac{\pi^2}{L^2}\sin\frac{\pi x}{L}\right)^2dx=\frac{1}{2}Z_0^2 EI\,\frac{\pi^4}{L^4}\int_0^L\sin^2\frac{\pi x}{L}\,dx$$

$$T_{max}=\frac{1}{2}Z_0^2\omega^2 m\int_0^L\sin^2\frac{\pi x}{L}\,dx$$

$$T_{max}=V_{max}\longrightarrow\quad EI\,\frac{\pi^4}{L^4}=\omega^2 m\rightarrow\quad\omega=\frac{9.87}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}$$

انتخاب تابع شکل $\psi(x)$ - پیشنهاد رایله

$f_I+f_s=0$ ارتعاش آزاد بدون میرایی

تشریح حالت : تغییرمکان u در اثر اعمال نیروی اینرسی : $m\ddot{u}=-ku$

$$u(x,t)=\psi(x)Z(t)\rightarrow f_I=-m(x)\psi(x)Z_0\omega^2\sin\omega t$$

دقت نتایج بستگی به درستی $\psi(x)$ دارد. $f_I\propto m(x)\psi(x)$

* پیشنهاد رایله : فرض می‌کنیم شکل تغییرمکان تحت اثر وزن سیستم بوجود می‌آید: mg

با اینکار پارامتر اصلی (جرم) اثر کرده و شرایط تکیه‌گاهی نیز ارضاء می‌شود.

اساس روش رایله : نیرو $P(x)\xrightarrow{\text{باعث}}u(x)$ تغییرمکان

حداکثر انرژی پتانسیل حاصل $V_{max}=\frac{1}{2}\int_0^L P(x)u_{max}(x)\,dx$

$$u(t)=u_0\sin\omega t\rightarrow u_{max}=u_0\quad,\ \dot{u}(t)=u_0\omega\cos\omega t\rightarrow\dot{u}_{max}=u_0\omega$$

حداکثر انرژی جنبشی $T_{max}=\frac{1}{2}\int_0^L m\dot{u}_{max}^2dx=\frac{1}{2}\int_0^L m u_{max}^2\omega^2dx$

$$T_{max} = V_{max} \rightarrow \frac{1}{2}\int_0^L m\,u_{max}^2\,\omega^2\,dx = \frac{1}{2}\int_0^L p(x)\,u_{max}\,dx$$

فرض رایله $\quad p(x) = m(x)\,g \quad \Rightarrow$

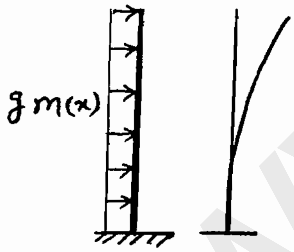
$$\frac{\omega^2}{2}\int_0^L m(x)\,u^2(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^L m(x)\,g\,u(x)\,dx$$

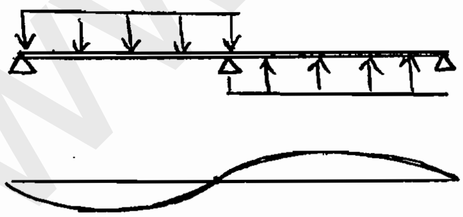
$$\omega^2 = \frac{g\int_0^L m(x)\,u(x)\,dx}{\int_0^L m(x)\,u^2(x)\,dx} = \frac{g\int_0^L m(x)\,\psi(x)\,dx}{Z_0\int_0^L m(x)\,\psi^2(x)\,dx}$$

در حالت سیستم با جرم های متمرکز (قاب های برشی) داریم:

$$\omega^2 = \frac{g\sum_{i=1}^{n} m_i u_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i u_i^2}$$

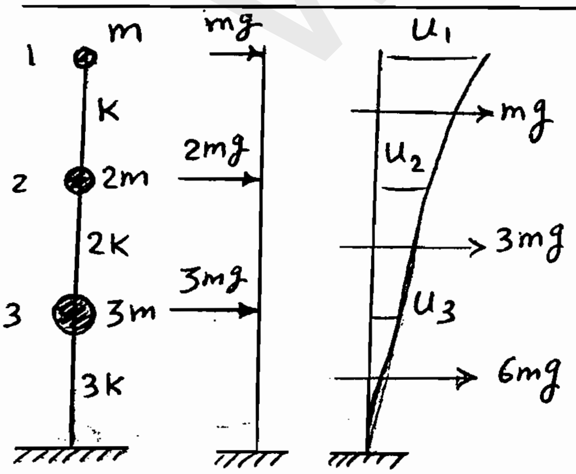
توجه! در فرض رایله، وزن گسترده یا متمرکز در جهت ارتعاش و بصورتی که باعث تغییر شکل در مود ارتعاشی مورد نظر باشد، در نظر گرفته می شود.





رعایت شرایط مرزی و سازگاری

و شکل ارتعاشی:



مثال - مطلوبست تعیین ω اصلی سیستم سه جرمی روبرو؟

$$\Delta u_3 = \frac{F_3}{K_3} = \frac{6mg}{3K}$$

$$u_3 - \cancel{u_{\text{زمین}}}^{\text{صفر}} = u_3 = \frac{2mg}{K}$$

$$\Delta u_2 = u_2 - u_3 = \frac{F_2}{K_2} = \frac{3mg}{2K}$$

$$u_2 = \frac{3mg}{2K} + \frac{2mg}{K} = \frac{7mg}{2K} = 3.5\,\frac{mg}{K}$$

$$\Delta u_1 = u_1 - u_2 = \frac{F_1}{k_1} = \frac{mg}{K} \rightarrow u_1 = \frac{mg}{K} + \frac{3.5\,mg}{k} = 4.5\,\frac{mg}{K}$$

$$\omega^2 = \frac{g\sum_1^3 m_i u_i}{\sum_1^3 m_i u_i^2} = \frac{g\times\left(\frac{mg}{k}\right)(1\times4.5 + 2\times3.5 + 3\times2)}{\left(\frac{mg}{k}\right)^2\left(1\times4.5^2 + 2\times3.5^2 + 3\times2^2\right)} =$$

$$\frac{K}{m}\,\frac{17.5}{56.25} = 0.312\,K/m \rightarrow \underline{\omega = 0.56\sqrt{K/m}}$$

روش رایله اصلاح شده

یک روش ساده با تکرار مراحل (Iteration) و مناسب برای ساختمانهای برشی

فرض تغییرمکان اولیه برای شکل ارتعاشی یا محاسبه آن از طریق اعمال وزن سازه: $u^{(0)}(x,t)$

$$\left.\begin{aligned} V_{max}^{(0)} &= \frac{1}{2}\int EI(x)\, {u''^{(0)}}^2 dx \ \text{یا}\ \frac{1}{2}\sum K_i\, {\Delta u_i^{(0)}}^2 \\ T_{max}^{(0)} &= \frac{1}{2}\int m(x)\, {\dot{u}^{(0)}}^2 dx = \frac{1}{2}\omega^2\int m(x)\, {u^{(0)}}^2 dx \ \text{یا}\ \frac{1}{2}\omega^2\sum m_i {u^{(0)}}^2 \end{aligned}\right\} \quad T_{max}^{(0)} = V_{max}^{(0)} \quad \omega_{R00}\ \text{معلوم}$$

نیروی که باعث ایجاد تغییرمکان $u^{(0)}$ می‌شود $P_i^{(0)} = K_i u_i^{(0)}$

$$K_i = m_i\omega^2 \rightarrow P_i^{(0)} = m_i\,\omega^2 u_i^{(0)}$$

تحت اثر نیروی اخیر، تغییرمکان جدید را محاسبه می‌کنیم $u_i^{(1)}$ و پس انرژی پتانسیل جدید

$$V_{max}^{(1)} = \frac{1}{2}\int P^{(0)} u^{(1)} dx \ \text{یا}\ \frac{1}{2}\sum P_i^{(0)} u_i^{(1)}$$

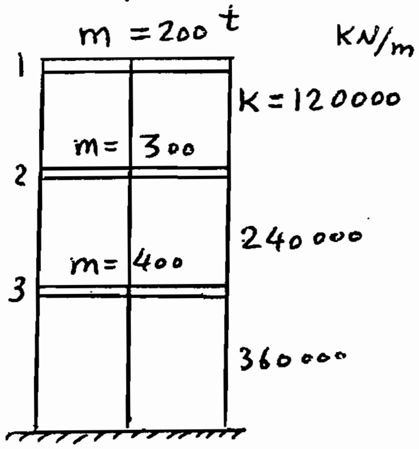
$$V_{max}^{(1)} = T_{max}^{(0)} \rightarrow \omega_{R01}\ \text{معلوم}$$

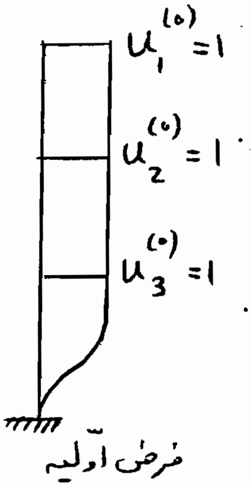
اگر انرژی جنبشی جدید را نیز از طریق تغییرمکان جدید $u^{(1)}$ محاسبه کنیم:

$$T_{max}^{(1)} = \frac{1}{2}\int m(x)\, {\dot{u}^{(1)}}^2 dx \ \text{یا}\ \frac{1}{2}\sum m_i\,\omega^2 {u_i^{(1)}}^2$$

$$T_{max}^{(1)} = V_{max}^{(1)} \rightarrow \omega_{R11}\ \text{معلوم} \xrightarrow[\text{ادامه}]{\text{بهمین ترتیب}} P_i^{(1)} = m_i\,\omega^2 u_i^{(1)} \ \text{- - - - - -}$$

مثال ـ مطلوبست تعیین ω تا سه طبقه به روش رایله اصلاح شده؟ (سقف‌ها صلب).





$$u_1^{(0)} = u_2^{(0)} = u_3^{(0)} = 1$$

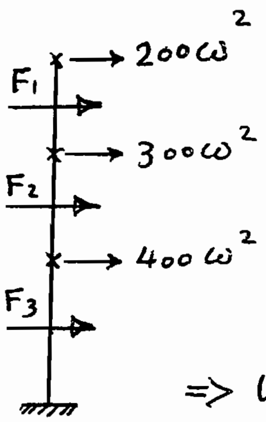
$$\dot{u}^{(0)} = \omega u^{(0)}$$

$$T_{max}^{(0)} = \frac{1}{2}\sum m_i \dot{u}_i^{(0)^2} = \frac{1}{2}\omega^2(900)$$

$$V_{max}^{(0)} = \frac{1}{2}\sum K_i \Delta u_i^{(0)^2} = \frac{1}{2}\left[K_1(1-1)^2 + K_2(1-1)^2 + K_3(1-0)^2\right] = \frac{1}{2}(360000)$$

$$T_{max}^{(0)} = V_{max}^{(0)} \rightarrow \omega^2 = \frac{360000}{900} = 400 \rightarrow \omega_{R00} = 20 \ Rad/s$$

$$P_i^{(0)} = m_i \omega^2 u_i^{(0)} \rightarrow P_1^{(0)} = 200\omega^2,\ P_2^{(0)} = 300\omega^2,\ P_3^{(0)} = 400\omega^2$$



برش طبقات: $F_1 = 200\omega^2,\ F_2 = 500\omega^2,\ F_3 = 900\omega^2$

محاسبه $u_i^{(1)}$: $\Delta u_3^{(1)} = u_3^{(1)} - u_{\text{زمین}} \rightarrow \frac{F_3}{K_3} = u_3^{(1)} - 0 \Rightarrow$

$$u_3^{(1)} = 900\omega^2/360000 = 0.0025\omega^2$$

$$\Rightarrow u_2^{(1)} = 0.004583\omega^2,\ u_1^{(1)} = 0.006253\omega^2$$

$$V_{max}^{(1)} = \frac{1}{2}\sum P_i^{(0)} u_i^{(1)} = \frac{1}{2}\omega^4(3.625)$$

$$V_{max}^{(1)} = T_{max}^{(0)} \rightarrow \frac{1}{2}(3.625)\omega^4 = \frac{900}{2}\omega^2 \rightarrow \omega_{R01} = 15.75 \ Rad/s$$

$$T_{max}^{(1)} = \frac{1}{2}\sum m_i \omega^2 u_i^{(1)^2} = \frac{1}{2}\omega^6(0.01661)$$

$$T_{max}^{(1)} = V_{max}^{(1)} \rightarrow \frac{1}{2}\omega^6(0.01661) = \frac{1}{2}\omega^4(3.625) \Rightarrow \omega_{R11} = 14.77 \ Rad/s$$

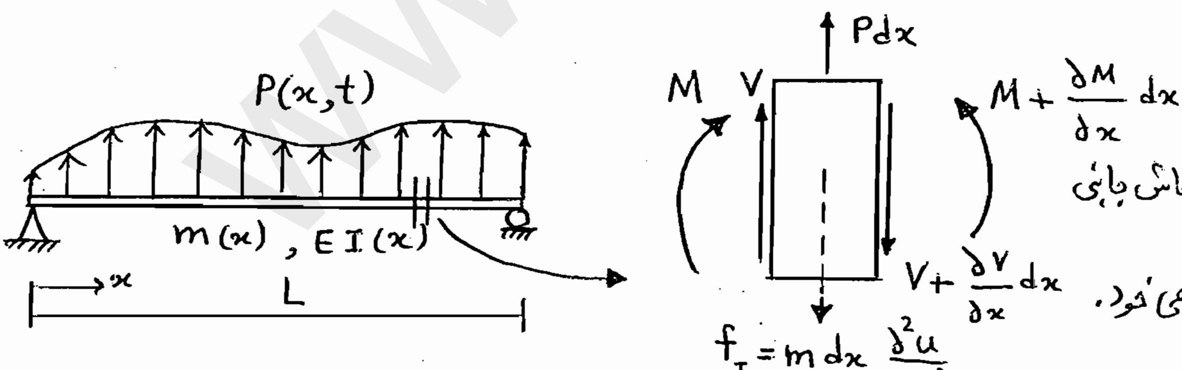
جوابها به سمت همگرایی میل می‌کند. برای دقت بیشتر می‌توان

$$P_i^{(1)} = m_i \omega^2 u_i^{(1)} \ \ldots\ldots$$

معادلات سیستم‌های پیوسته با جرم و سختی گسترده

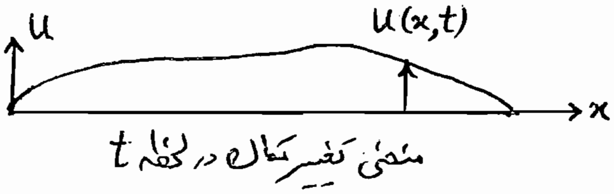
Systems with Distributed Mass and Elasticity

اکثر سازه‌ها می‌توانند بصورت جرم متمرکز (در یک یا چند نقطه) مدل شوند (ساختمانهای چند طبقه با کف صلب و ساختمان‌هایی با اجزاء تیر-ستون با جرم ناچیز). بخش بزرگی از درس به تجزیه و تحلیل این نوع مدل‌ها پرداخته و می‌پردازد، به دو دلیل: اول اینکه چنین مدل‌هایی بصورت بسیار مناسب و مؤثر رفتار دینامیکی سازه را بیان می‌دارد بویژه ساختمانهای چند طبقه و دوم اینکه روش‌های محاسباتی مناسب با کامپیوتر جهت حل معادلات دیفرانسیل معمولی حرکت این سازه‌ها به تعداد زیاد موجود است. با این حال برای برخی سازه‌ها با جرم و سختی گسترده نظیر دودکش‌ها، سدهای قوسی و سازه راکتورهای هسته‌ای و ... روش فوق مناسب نیست و باید از روش تحلیل سیستم‌های پیوسته کمک گرفت. در این بخش به مسائل یک بعدی با جرم گسترده نظیر تیرها و برج‌ها و تحلیل آنها پرداخته می‌شود. معادله حرکت (حالت بدون میرایی) برای نیروی اعمالی بصورت زیر بیان می‌شود:



یک جزء دیفرانسیلی تیر

یک تیر مستقیم با ارتعاش جانبی و با شرایط تکیه‌گاهی خود. از تعادل نیروها در جهت قائم داریم:



منحنی تغییر شکل در لحظه t

$$\frac{\partial V}{\partial x} = P - m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (1)$$

* در رابطه روبرو، اگر نیروی اینرسی نبود، رابطه کلاسیک بین برش و نیروی گسترده در تیرهای تحت بار گسترده حاصل می‌شود.

در مقاومت مصالح اگر از لنگر اینرسی مرتبط (وابسته) به شتاب زاویه‌ای جزء صرفنظر کنیم،

از تعادل چرخشی المان رابطه استاندارد روبرو را داریم

$$V = \frac{\partial M}{\partial x} \qquad (۲)$$

باز هم در مقاومت مصالح اگر از تغییر شکل های برشی صرفنظر کنیم، داریم:

$$M = EI\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (۳)$$

اگر روابط ۲ و ۳ را در رابطه ۱ قرار دهیم، معادله حاکم بر تغییرمکان (ارتعاش) جانبی $u(x,t)$ تیر حاصل می‌شود:

$$m(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EI(x)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] = P(x,t) \qquad (۴)$$

برای حل معادله نیاز به دو شرط مرزی در هر یک از انتهای تیر و تغییرمکان و سرعت اولیه داریم.

مهمترین بخش حل معادله، مرحله ارتعاش آزاد آن است؛ برای سادگی $m\,,\,EI$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{EI}{m}\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] = 0 \qquad (۵)$$

برای حل فرض می‌کنیم پاسخ بصورت روبرو باشد:

$$u(x,t) = \phi(x)\,.\,q(t) \qquad (۶)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \phi(x)\,.\,\ddot{q}(t) \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \phi''(x)\,q(t) \qquad (۷)$$

با بکارگیری روابط ۷ در ۵:

$$\phi(x)\,\ddot{q}(t) + \frac{EI}{m}\,q(t)\,[\phi''(x)]'' = 0$$

$$\phi(x)\,\ddot{q}(t) + \frac{EI}{m}\,\phi^{IV}(x)\,q(t) = 0 \qquad (۸)$$

$$-\frac{\ddot{q}(t)}{q(t)} = \frac{EI}{m}\,.\,\frac{\phi^{IV}(x)}{\phi(x)} = \text{مقدار ثابت} = \omega^2$$

$$\begin{cases} \ddot{q}(t) + \omega^2 q(t) = 0 \qquad (۹) \leftarrow \ddot{u} + \omega^2 u = 0 \\ \phi^{IV}(x) - \dfrac{m\omega^2}{EI}\phi(x) = 0 \quad , \quad \dfrac{m\omega^2}{EI} = \lambda^4 \end{cases}$$

رابطه کلاسیک ارتعاش آزاد بدون میرایی

$$\phi^{IV}(x) - \lambda^4\,\phi(x) = 0 \qquad (۱۰) \qquad \text{یا} \qquad [EI\,\phi''(x)]'' - \omega^2 m\,\phi(x) = 0$$

از معادله ۹ به ازای هر ω_n با توجه به شرایط اولیه، تابع $q(t)$ مشخص خواهد شد:

$$q(t) = \frac{\dot{q}_0}{\omega_n}\sin\omega_n t + q_0\cos\omega_n t \qquad (۱۱)$$

برای حل معادله ۱۰

$$\phi(x) = \bar{C} e^{sx} \rightarrow (s^4 - \lambda^4)\bar{C} e^{sx} = 0$$

$$s^4 - \lambda^4 = 0 \rightarrow s = \pm\lambda \ , \ \pm i\lambda \Rightarrow$$

$$\phi(x) = A_1 e^{i\lambda x} + A_2 e^{-i\lambda x} + A_3 e^{\lambda x} + A_4 e^{-\lambda x}$$

یا

$$\phi(x) = B_1 \cosh(\lambda x) + B_2 \sinh(\lambda x) + B_3 \cos\lambda x + B_4 \sin\lambda x \quad (12)$$

با اعمال شرایط مرزی در تکیه‌گاه‌ها به معادلات مثلثاتی خواهیم رسید که ما را به بینهایت ω هدایت خواهد کرد (سیستم پیوسته پس بینهایت درجه آزادی). بنابراین جواب ارتعاش آزاد جمع کلیه جوابها خواهد بود:

$$\omega_i \rightarrow \phi_i(x) \ , \ q_i(t) \Rightarrow$$

$$u_c(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) \cdot q_i(t) \quad (13)$$

با توجه به شرایط تکیه‌گاهی و شرایط مرزی در انتهای آزاد تیرها داریم:

تغییرمکان صفر	$\phi(x) = 0$	لنگر خمشی صفر	$\frac{d^2\phi}{dx^2} = 0$
شیب صفر	$\frac{d\phi}{dx} = 0$	برش صفر	$\frac{d^3\phi}{dx^3} = 0$

در انتهای آزاد، لنگر و برش صفر - در تکیه‌گاه گیردار، تغییرمکان و شیب صفر - در تکیه‌گاه مفصلی، تغییرمکان و لنگر صفر پس در هر انتها به هرحال دو شرط مرزی خواهیم داشت.

روش ساده شده:

$$\cosh \equiv ch \ , \ \sinh \equiv sh$$

$$ch(\lambda x) + \cos(\lambda x) = S \rightarrow S' = \lambda(sh(\lambda x) - \sin(\lambda x)) = \lambda V$$

$$sh(\lambda x) + \sin(\lambda x) = T \rightarrow T' = \lambda(ch(\lambda x) + \cos(\lambda x)) = \lambda S$$

$$ch(\lambda x) - \cos(\lambda x) = U \rightarrow U' = \lambda(sh(\lambda x) + \sin(\lambda x)) = \lambda T$$

$$sh(\lambda x) - \sin(\lambda x) = V \rightarrow V' = \lambda(ch(\lambda x) - \cos(\lambda x)) = \lambda U$$

رابطه ۱۲ را بصورت روبرو می‌نویسیم:

$$\phi(x) = C_1 S + C_2 T + C_3 U + C_4 V$$

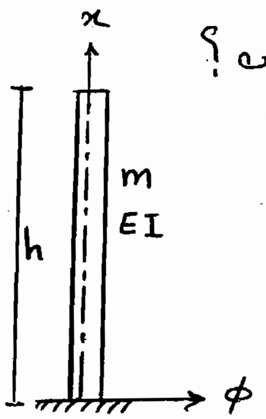
$$\frac{d\phi}{dx} = C_1 S' + C_2 T' + C_3 U' + C_4 V' = \lambda(C_1 V + C_2 S + C_3 T + C_4 U)$$

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \cdots\cdots = \lambda^2(C_1 U + C_2 V + C_3 S + C_4 T)$$

$$\frac{d^3\phi}{dx^3} = \lambda^3(C_1 T + C_2 U + C_3 V + C_4 S)$$

با توجه به شرایط مرزی و استفاده از روابط ساده بین ضرایب C_1 ، C_2 ، C_3 و C_4 می‌توان این ضرایب را محاسبه نمود.

مثال - مطلوبست برآورد فرکانس های طبیعی یک تیر (ستون) طره پیوسته همگن؟



$$(\phi)_{x=0} = 0 \quad (1)$$

$$\left(\frac{d\phi}{dx}\right)_{x=0} = 0 \quad (2)$$

$$\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)_{x=h} = 0 \quad (3)$$

$$\left(\frac{d^3\phi}{dx^3}\right)_{x=h} = 0 \quad (4)$$

از شرایط مرزی بالا $C_1 = C_2 = 0$ و

$$\begin{cases} C_3[ch(\lambda h) + \cos(\lambda h)] + C_4[sh(\lambda h) + \sin(\lambda h)] = 0 & (5) \\ C_3[sh(\lambda h) - \sin(\lambda h)] + C_4[ch(\lambda h) + \cos(\lambda h)] = 0 & (6) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} ch(\lambda h) + \cos(\lambda h) & sh(\lambda h) + \sin(\lambda h) \\ sh(\lambda h) - \sin(\lambda h) & ch(\lambda h) + \cos(\lambda h) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

C_3 و C_4 نمی‌توانند صفر باشند چون در آنصورت ارتعاشی وجود نخواهد داشت پس دترمینان ماتریس ضرایب صفر است، از آنجا داریم:

$$[ch(\lambda h) + \cos(\lambda h)]^2 - [sh(\lambda h) + \sin(\lambda h)][sh(\lambda h) - \sin(\lambda h)] = 0$$

$$\underline{ch^2(\lambda h)} + \cos^2(\lambda h) + 2ch(\lambda h)\cos(\lambda h) - \underline{sh^2(\lambda h)} + \sin^2(\lambda h) = 0$$

$$1 + 1 + 2ch(\lambda h)\cos(\lambda h) = 0 \rightarrow \underline{ch(\lambda h)\cos(\lambda h) + 1 = 0} \qquad (8')$$

از روش ساده امکان حل معادله بالا وجود ندارد پس به کمک روش عددی حل شده و داریم :

$$\lambda_i h = 1.8751,\ 4.6941,\ 7.8548,\ 10.996,\ 14.137,\ 17.279, \ldots$$

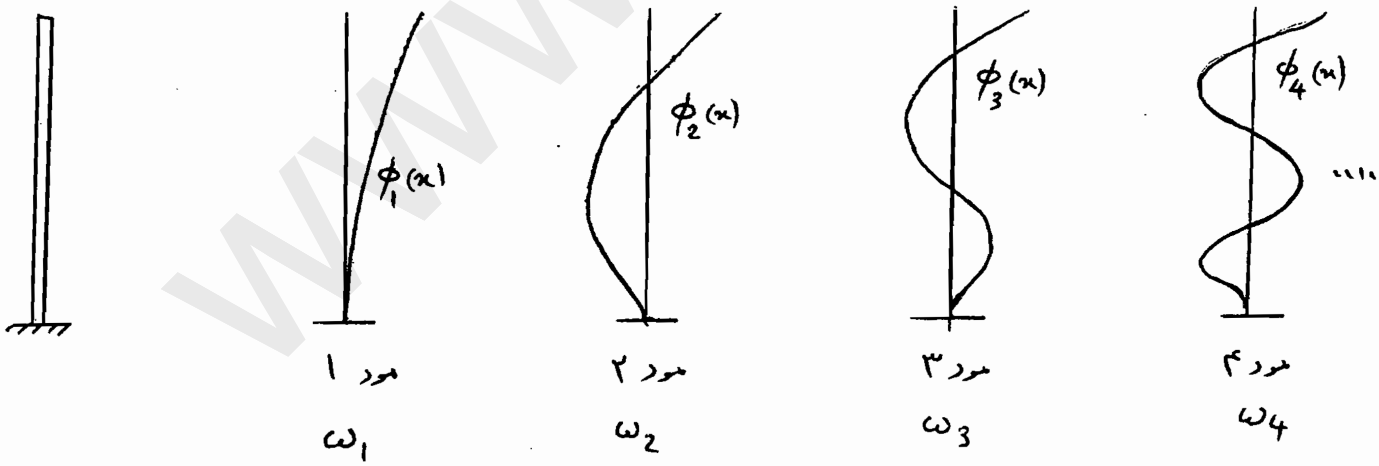
$\omega^2 = \dfrac{\lambda^4 EI}{m}$ با توجه به $\lambda_i h \simeq \dfrac{(2n-1)\pi}{2}$ تقریباً $i>4$ برای

$$\omega_1 = \frac{3.516}{h^2}\sqrt{\frac{EI}{m}},\quad \omega_2 = \frac{22.03}{h^2}\sqrt{\frac{EI}{m}},\quad \omega_3 = \frac{61.70}{h^2}\sqrt{\frac{EI}{m}},$$

$$\omega_4 = \frac{120.9}{h^2}\sqrt{\frac{EI}{m}} \qquad\qquad \underline{\omega_i = \lambda_i^2\sqrt{\frac{EI}{m}}}$$

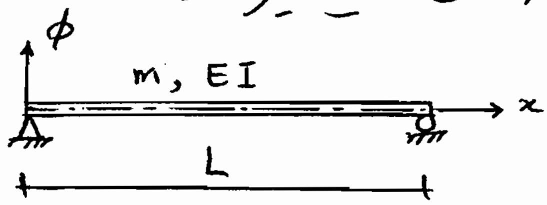
اگر C_3 را برحسب C_4 بنویسیم (رابطه ۵') و آنرا در رابطه (۱۲ درس) قرار دهیم و از روابط بقیه ضرایب در شرایط مرزی کمک بگیریم ، تابع $\phi_i(x)$ بصورت زیر خواهد بود :

$$\phi_i(x) = C_4\left[ch(\lambda_i x) - \cos(\lambda_i x) - \frac{ch(\lambda_i h) + \cos(\lambda_i \lambda)}{sh(\lambda_i h) + \sin(\lambda_i h)}\left(sh(\lambda_i x) - \sin(\lambda_i x)\right)\right]$$



$$T = 2\pi/\omega \Rightarrow T_i = \frac{2\pi h^2}{(\lambda_i h)^2}\sqrt{\frac{m}{EI}}$$

مثال - مطلوبست تعیین فرکانس ها و شکل تغییر مکانی ارتعاش آزاد یک تیر ساده.



در دو انتها با توجه به تکیه‌گاه ها، تغییر مکان و لنگر صفر است.

$$u(0)=0 \rightarrow \phi(0)=0 \rightarrow B_3+B_1=0$$

$$M(0)=0 \rightarrow EI\phi''(0)=0 \rightarrow \lambda^2(-B_3+B_1)=0 \Rightarrow B_1=B_3=0 \Rightarrow$$

$$\phi(x) = B_4\sin(\lambda x) + B_2\,sh(\lambda x)$$

$$x=L \rightarrow u(L)=0 \rightarrow \phi(L)=0 \rightarrow B_4\sin(\lambda L)+B_2\,sh(\lambda L)=0$$

$$M(L)=0 \rightarrow EI\phi''(L)=0 \rightarrow \lambda^2(-B_4\sin(\lambda L)+B_2\,sh(\lambda L))=0$$

از جمع دو رابطه اخیر ← $B_2\,sh(\lambda L)=0$ در اینحالت $sh(\lambda L)$ نمی‌تواند صفر شود چون که ω صفر می‌شود که در ارتعاش بی معنی است پس $B_2=0$ ← $B_4\sin(\lambda L)=0$

اگر $B_4=0$ داریم $\phi(x)=0$ که معنی ندارد پس $\Leftarrow \sin(\lambda L)=0$

$\lambda L = n\pi$ برای $n=1,2,3,\dots \Rightarrow$

با توجه به $\lambda^4=\dfrac{\omega^2 m}{EI}$ ← $\omega_n=\dfrac{n^2\pi^2}{L^2}\sqrt{\dfrac{EI}{m}}\ ,\ n=1,2,3,\dots$

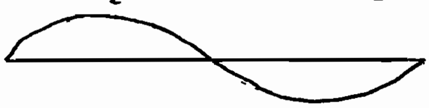
اگر $\lambda L=n\pi$ را در رابطه $\phi(x)$ بکار بریم؛ $\phi_n(x)=B_4\sin\dfrac{n\pi x}{L}$

که B_4 مقدار اختیاری است.

$\phi_1(x)=\sin(\frac{\pi x}{L})$

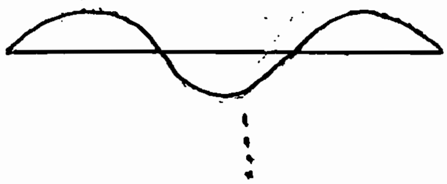
$\omega_1=\dfrac{\pi^2}{L^2}\sqrt{\dfrac{EI}{m}}$ نصف سینوس

$\phi_2(x)=\sin(2\pi x/L)$



$\omega_2=\dfrac{4\pi^2}{L^2}\sqrt{\dfrac{EI}{m}}=4\omega_1$ یک سینوس

$\phi_3(x)=\sin(3\pi x/L)$



$\omega_3=\dfrac{9\pi^2}{L^2}\sqrt{\dfrac{EI}{m}}=9\omega_1$ یک و نیم سینوس

رابطه ارتعاش آزاد سیستم پیوسته براساس تئوری تیر تیموشنکو

اگر از لنگر اینرسی چرخشی تیر صرفنظر نشود و تغییرشکل حاصل از تنش برشی ملحوظ شود (تئوری تیر تیموشنکو)، معادله ارتعاش آزاد بصورت زیر در می‌آید:

$$m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EI\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - mr^2\left(1+\frac{E}{kG}\right)\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 t^2} + \frac{m^2 r^2}{kGA}\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} = 0$$

G مدول ارتجاعی برشی، $r=\sqrt{\frac{I}{A}}$ شعاع ژیراسیون مقطع، A سطح مقطع و K ضریب شکل مقطع (مربوط به غیریکنواخت بودن تنش برشی در مقطع) که مثلاً برابر $\frac{5}{6}$ در مقطع مستطیلی و $\frac{9}{10}$ در مقطع دایره‌ای است (مقاومت مصالح).

رابطه تعامد مودال در سیستم های پیوسته — Modal ORTHOGONALITY

در این بخش خاصیت عمود بودن مودهای ارتعاش آزاد در سیستم های پیوسته ملاحظه می شود. برای سهولت بیان از یک تیر یک دهانه با انتهای مفصلی، گیردار یا آزاد و بدون جرم متمرکز در انتها استفاده می شود. برای شروع رابطه ۱۰ (معادله دیفرانسیل تفکیک شده تابع شکلی ϕ) برای مود r ام بازنویسی می شود

$$\phi^{IV}(x) - \lambda^4\phi(x) = 0 \quad (۱۰) \quad \left(\frac{m\omega^2}{EI} = \lambda^4\right)$$

$$[EI(x)\phi_r''(x)]'' = \omega_r^2\, m(x)\,\phi_r(x) \quad (۱۴)$$

طرفین را در $\phi_n(x)$ ضرب نموده و از صفر تا L انتگرال می‌گیریم:

$$\int_0^L \phi_n(x)\,[EI(x)\phi_r''(x)]''\,dx = \omega_r^2\int_0^L m(x)\phi_n(x)\phi_r(x)\,dx \quad (۱۵)$$

طرف چپ را بصورت جزء به جزء انتگرال می‌گیریم (روش های انتگرال گیری):

$$\int_0^L \phi_n(x)\,[EI(x)\phi_r''(x)]''\,dx = \Big\{\phi_n(x)\,[EI(x)\phi_r''(x)]'\Big\}_0^L - \Big\{\phi_n'(x)\,[EI(x)\phi_r''(x)]\Big\}_0^L + \int_0^L EI(x)\,\phi_n''(x)\,\phi_r''(x)\,dx \quad (۱۶)$$

به سادگی ملاحظه می‌شود ، مقادیر داخل آکولادها در $x=0$ و L (انتهای تیر بصورت آزاد، ساده یا گیردار) برابر صفر هستند . زیرا اگر گیردار باشد داریم $\phi=0$ و $\phi'=0$ و اگر ساده باشد داریم $\phi=0$ و به دلیل لنگر صفر $\phi''=0$ و اگر آزاد باشد ، لنگر و برش صفر پس $\phi''=0$ و $\phi'''=0$

در این مرحله مقدار رابطه ۱۶ را در ۱۵ قرار می‌دهیم :

$$\int_0^L EI(x)\,\phi_n''(x)\,\phi_r''(x)\,dx = \omega_r^2 \int_0^L m(x)\,\phi_n(x)\,\phi_r(x)\,dx \qquad (17)$$

اینک مجدداً از ابتدا شروع کرده و رابطه ۱۰ را برای مود n ام می‌نویسیم و طرفین را در $\phi_r(x)$ ضرب کرده و از صفر تا L انتگرال می‌گیریم که مشابه حالت قبل خواهیم داشت :

$$\int_0^L EI(x)\,\phi_n''(x)\,\phi_r''(x)\,dx = \omega_n^2 \int_0^L m(x)\,\phi_n(x)\,\phi_r(x)\,dx \qquad (18)$$

رابطه ۱۷ را از رابطه ۱۸ تفریق می‌کنیم :

$$(\omega_n^2-\omega_r^2)\int_0^L m(x)\,\phi_n(x)\,\phi_r(x)\,dx = 0 \qquad (19)$$

در نتیجه با توجه $\omega_n \neq \omega_r$ خواهیم داشت :

$$\int_0^L m(x)\,\phi_n(x)\,\phi_r(x)\,dx = 0 \qquad (20)$$

با استفاده از رابطه ۲۰ در رابطه ۱۵ داریم :

$$\int_0^L \phi_n(x)\,[EI(x)\,\phi_r''(x)]''\,dx = 0 \qquad (21)$$

روابط ۲۰ و ۲۱ روابط تعامد مودها نامیده می‌شوند .

تحلیل دینامیکی سیستم پیوسته به روش مودال

MODAL Analysis of Forced Dynamic Response

رابطه (معادله) حرکت سیستم پیوسته را می‌نویسیم (رابطه ۴) :

$$m(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EI(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] = P(x,t)$$

اگر سیستم را برای حالت ارتعاش آزاد حل کرده باشیم و ω_r و ϕ_r معلوم باشند

جواب (واکنش) بصورت روبرو خواهد بود (رابطه ۱۳) : $u(x,t) = \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r(x) q_r(t)$.

ترکیب خطی مودها که در حقیقت جمع جوابهای حاصل از معادله دیفرانسیل است .

بنابراین، پاسخ $u(x,t)$ از جمع آثار هریک از مودهاست (ترم rام در سری

بالا مقدار مشارکت (تأثیر) مود rام در کل پاسخ است).

ϕ را مود و q را مختصات مودال می‌نامند که مجهول است . البته مجهول اصلی

$u(x,t)$ است . جواب مفروض (رابطه ۱۳) را در معادله ۴ قرار می‌دهیم :

$$\sum_{r=1}^{\infty} m(x)\phi_r(x)\ddot{q}_r(t) + \sum_{r=1}^{\infty}\left[EI(x)\phi_r''(x)\right]'' q_r(t) = P(x,t)$$

اینک هر ترم را در $\phi_n(x)$ ضرب و در طول تیر انتگرال می‌گیریم :

$$\sum_{r=1}^{\infty}\ddot{q}_r(t)\int_0^L m(x)\phi_n(x)\phi_r(x)\,dx + \sum_{r=1}^{\infty} q_r(t)\int_0^L \phi_n(x)\left[EI(x)\phi_r''(x)\right]''dx = \int_0^L P(x,t)\phi_n(x)\,dx$$

با توجه به خاصیت تعامد مودها (روابط ۲۰ و ۲۱) همه ترم‌ها در ترکیب عبارات سمت چپ

برابر صفر است بجز ترم مربوط $r=n$ که خواهیم داشت :

$$\ddot{q}_n(t)\int_0^L m(x)[\phi_n(x)]^2dx + q_n(t)\int_0^L \phi_n(x)\left[EI(x)\phi_n''(x)\right]''dx = \int_0^L P(x,t)\phi_n(x)\,dx$$

که بصورت ساده روبرو می‌نویسیم : (۲۲)

$$\underline{M_n\ddot{q}_n(t) + K_n q_n(t) = P_n(t)}$$

که : (۲۳)

$$M_n = \int_0^L m(x)[\phi_n(x)]^2dx \quad , \quad K_n = \int_0^L \phi_n(x)\left[EI(x)\phi_n''(x)\right]''dx$$

$$P_n(t) = \int_0^L P(x,t)\phi_n(x)\,dx$$

با توجه به روابط بخش خاصیت تعامد مودها : (۲٤)

$$K_n = \int_0^L EI(x)[\phi_n''(x)]^2dx$$

M_n و K_n عبارت از جرم و سختی تعمیم داده شده (generalized) برای مود

nام می باشد که رابطه کلی فرکانس میان آنها برقرار است $\omega_n^2 = \frac{K_n}{M_n} \rightarrow K_n = \omega_n^2 M_n$

رابطه اخیر با نوشتن معادله ۱۴ برای مود nام و ضرب طرفین رابطه در $\phi_n(x)$ و انتگرال (۲۵)

گیری از صفر تا L و استفاده از بیان M_n و K_n (روابط ۲۳) بدست می آید.

$P_n(t)$ نیروی تعمیم داده شده برای مود nام است. معادله ۲۲ یک معادله دیفرانسیل

معمولی است که مجهول آن $q_n(t)$ می باشد (مشابه SDF) و فقط به مود nام یعنی

$\phi_n(x)$ ارتباط دارد. بنابراین می توانیم بینهایت معادله مشابه معادله ۲۲ برای هریک

از مود ها داشته باشیم. در حقیقت معادله دیفرانسیل اولیه (معادله ۴) که بصورت

Partial بود و مجهول آنه $u(x,t)$ است تبدیل به بینهایت معادله دیفرانسیل معمولی

(رابطه ۲۲) با مجهول $q_n(t)$ می شود که هرکدام مستقل می باشد و بصورت مجزا و کلاسیک

قابل حل می باشند (با توجه به نوع بارگذاری $P(x,t)$). وقتی $q_n(t)$ معلوم باشد (مود nام)

می توان میزان مشارکت مود nام در تغییرمکان $u(x,t)$ را بصورت زیر بدست آورد:

$$u_n(x,t) = \phi_n(x)\, q_n(t) \qquad (۲۶)$$

کل تغییرمکان از جمع آثار هریک از مود ها حاصل می شود

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x)\, q_n(t) \qquad (۲۷)$$

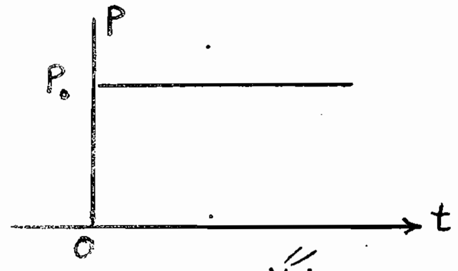
لنگر خمشی و نیروی برشی در هر مقطع از تیر ناشی از تغییرمکان آن نقطه در لحظه t

بصورت زیر می باشد:

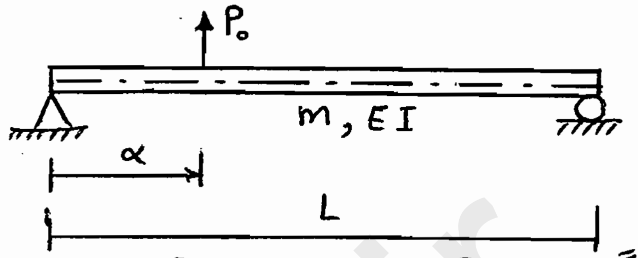
$$M(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} EI(x)\, \phi_n''(x)\, q_n(t) \qquad (۲۸)$$

$$V(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[EI(x)\, \phi_n''(x) \right]' q_n(t) \qquad (۲۹)$$

مثال - یک تیر ساده تحت بارگذاری داده شده مد نظر است، مطلوب است واکنش تیر (تغییر مکان و لنگر خمشی) وقتی که نیروی متمرکز در فاصله α از تکیه‌گاه سمت چپ اثر می‌کند. حالت خاص وقتی نیرو در وسط دهانه اثر کند.



بارگذاری



قبلاً ارتعاش آزاد تیر ساده را تحلیل نموده بودیم:

$$\begin{cases} \omega_n = \dfrac{n^2\pi^2}{L^2}\sqrt{\dfrac{EI}{m}} \\ \phi_n(x) = \sin\dfrac{n\pi x}{L} \end{cases} \qquad (a)$$

مقدار $\phi_n(x)$ را در روابط ۲۳ قرار می‌دهیم:

$$M_n = \frac{mL}{2} \quad , \quad K_n = \frac{n^4\pi^4 EI}{2L^3} \qquad (b)$$

$$P(x,t) = P_0\,\delta(x-\alpha)$$ ← $\delta(x-\alpha)$ دلتای دیراک متمرکز در α

$$P_n(t) = P_0\,\phi_n(\alpha) \qquad (c)$$

$$M_n\,q_n''(t) + K_n\,q_n(t) = P_0\,\phi_n(\alpha) \qquad (d)$$ ← معادله مودال nام

قبلاً حل یک سیستم SDF در بارگذاری پله‌ای (Step) ملاحظه شده بود فقط پارامتر $u(t)$ به $q_n(t)$ و $u_{st} = P_0\,\phi_n(\alpha)/K_n$ حداکثر، خواهد بود:

$$q_n(t) = \frac{P_0\,\phi_n(\alpha)}{K_n}\,(1-\cos\omega_n t) = \frac{2P_0L^3}{\pi^4EI}\,\frac{\phi_n(\alpha)}{n^4}\,(1-\cos\omega_n t) \qquad (e)$$

رابطه e را در معادله ۲۷ قرار داده و توجه شود که $\phi_n(x)$ از رابطه a معلوم است، پس $u(x,t)$ بدست می‌آید.

در حالت خاص $\alpha = \frac{L}{2}$، مقدار فوق را در معادله e قرار می‌دهیم سپس در رابطه ۲۷:

$$u(x,t) = \frac{2P_0L^3}{\pi^4EI}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi_n(L/2)}{n^4}\,(1-\cos\omega_n t)\,\sin\frac{n\pi x}{L} \qquad (f)$$

که

$$\phi_n\left(\frac{L}{2}\right) = \begin{cases} 0 & n = 2, 4, 6, \cdots \\ 1 & n = 1, 5, 9, \cdots \\ -1 & n = 3, 7, 11, \cdots \end{cases} \qquad (g)$$

مقدار g را در f قرارداده :

$$u(x,t) = \frac{2P_0 L^3}{\pi^4 EI}\left(\frac{1-\cos\omega_1 t}{1}\sin\frac{\pi x}{L} - \frac{1-\cos\omega_3 t}{81}\sin\frac{3\pi x}{L} + \frac{1-\cos\omega_5 t}{625}\sin\frac{5\pi x}{L} - \frac{1-\cos\omega_7 t}{2401}\sin\frac{7\pi x}{L} + \cdots\right) \qquad (h)$$

تغییر مکان در وسط تیر :

$$u\left(\frac{L}{2},t\right) = \frac{2P_0 L^3}{\pi^4 EI}\left(\frac{1-\cos\omega_1 t}{1} + \frac{1-\cos\omega_3 t}{81} + \frac{1-\cos\omega_5 t}{625} + \frac{1-\cos\omega_7 t}{2401} + \cdots\right) \qquad (i)$$

ضرایب 1 ، 81 ، 625 و 2401 وبقیه در مخرج کسر نشان می دهد که مشارکت وتأثیر مود اول تعیین کننده است و سری سریعاً همگرا می شود .

لنگر خمشی از قرارداده رابطه h در ۲۸ بدست می آید :

$$M(x,t) = -\frac{2P_0 L}{\pi^2}\left(\frac{1-\cos\omega_1 t}{1}\sin\frac{\pi x}{L} - \frac{1-\cos\omega_3 t}{9}\sin\frac{3\pi x}{L} + \frac{1-\cos\omega_5 t}{25}\sin\frac{5\pi x}{L} - \frac{1-\cos\omega_7 t}{49}\sin\frac{7\pi x}{L} + \cdots\right) \qquad (j)$$

لنگر خمشی در وسط دهانه :

$$M\left(\frac{L}{2},t\right) = -\frac{2P_0 L}{\pi^2}\left(\frac{1-\cos\omega_1 t}{1} + \frac{1-\cos\omega_3 t}{9} + \frac{1-\cos\omega_5 t}{25} + \frac{1-\cos\omega_7 t}{49} + \cdots\right) \qquad (k)$$

در مجموعه اخیر با توجه به n^2 در مخرج کسر ، همگرایی کند است البته نسبت به رابطه (i) که در مخرج n^4 را دارد . از این مطلب در می یابیم که مشارکت (تأثیر) مودهای بالاتر در نیرو بیشتر است نسبت به تغییر مکان .

---

* توضیح مختصر در خصوص مشکلات تحلیل سیستم های پیوسته در عمل

مشکل متغیر بودن $m(x)$, $EI(x)$ در روابط و انتگرال گیری مشکل - ارضاء مشکل شرایط مرزی در تیرهای سرتاسری (امکان پذیر ولی پیچیده و طولانی) - گره های ارتباطی تیر و ستون در قابها

اصول تحلیل دینامیکی در حوزه فرکانس

Dynamic Analysis in the Frequency Domain

به چند دلیل ، تحلیل دینامیکی در حوزه فرکانس بر تحلیل در حوزه زمانی ترجیح دارد :

۱ـ در بارگذاری زلزله (تابع غیرمشخص ـ مشکل انتگرال دوهامل ـ طیف طرح ـ FFT)

۲ـ اندرکنش خاک و سازه (مدل سازی خاک ـ FE ، BE ـ امپدانس خاک)

۳ـ پدیده های تصادفی (آمار و احتمالات ـ ارتعاشات تصادفی ـ تحلیل ریسک)

<u>شکل نمایی سری فوریه برای بارگذاری دینامیکی (پریودیک)</u>

$$P(t) = a_0 + \sum_{1}^{\infty} a_n \cos \frac{2\pi n t}{T_p} + \sum_{1}^{\infty} b_n \sin \frac{2\pi n t}{T_p}$$

$$\beta = \frac{\Omega}{\omega} = \frac{2\pi/T_p}{2\pi/T} = T/T_p$$

$$\beta_1 = \frac{\Omega_1}{\omega} = T/T_p \quad , \quad \beta_2 = \frac{\Omega_2}{\omega} = \frac{2 \times 2\pi/T_p}{2\pi/T} = \frac{2T}{T_p} = \frac{2\Omega_1}{\omega}$$

$$\beta_n = \frac{\Omega_n}{\omega} = \frac{n \times 2\pi/T_p}{2\pi/T} = \frac{nT}{T_p} = \frac{n\Omega_1}{\omega} \Rightarrow \Omega_n = n\Omega_1$$

$$\sin\Omega_n t = \sin n\Omega_1 t = \frac{e^{in\Omega_1 t} - e^{-in\Omega_1 t}}{2i}$$

$$\cos\Omega_n t = \cos n\Omega_1 t = \frac{e^{in\Omega_1 t} + e^{-in\Omega_1 t}}{2}$$

$$\Rightarrow \text{①} \quad P(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{P}_n \, e^{in\Omega_1 t}$$

ضرایب $\bar{P}_n$ مجهول است و مانند ضرایب a_n و b_n باید معلوم شوند.

خاصیت تعامد تابع اکسپوننسیل

$$\int_0^{T_p} e^{in\Omega_1 t} \, e^{-im\Omega_1 t} \, dt = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ T_p & n = m \end{cases}$$

با توجه به خاصیت تعامد ، طرفین رابطه ① را در عبارت $e^{-im\Omega_1 t}$ ضرب و از صفر تا T_p انتگرال می گیریم :

$$\begin{cases} \bar{P}_n = \dfrac{1}{T_p} \displaystyle\int_0^{T_p} p(t)\, e^{-in\Omega_1 t}\, dt & n \quad \text{سایر مقادیر} \qquad (۲) \\ \\ \bar{P}_0 = \dfrac{1}{T_p} \displaystyle\int_0^{T_p} p(t)\, dt & n = 0 \qquad (۳) \end{cases}$$

تحلیل سیستم SDF در حوزه فرکانس

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = P(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \bar{P}_n\, e^{in\Omega_1 t} \qquad (٤)$$

از جواب گذرا صرفنظر می‌شود - برای سهولت، جزئیات برای $n=1$ ارائه می‌شود؛

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = \bar{P}_1\, e^{i\Omega_1 t}$$

چون $\bar{P}_1$ ضریب و ثابت است (فاکتور)

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = e^{i\Omega_1 t}$$

پس برای سهولت بیشتر در ابتدا درنظر گرفته می‌شود ←

$$u(t) = \bar{H}\, e^{i\Omega_1 t}, \quad \dot{u} = \bar{H} i \Omega_1 e^{i\Omega_1 t}, \quad \ddot{u} = -\bar{H}\Omega_1^2\, e^{i\Omega_1 t} \qquad (i^2 = -1)$$

$$e^{i\Omega_1 t}\, \bar{H}\left[-\Omega_1^2 m + c\Omega_1 i + k\right] = e^{i\Omega_1 t} \qquad e^{i\Omega_1 t} \neq 0$$

$$\bar{H} = \frac{1}{-\Omega_1^2 m + i\Omega_1 c + k} = \frac{1}{k\left(-\dfrac{\Omega_1^2 m}{k} + \dfrac{i\Omega_1 c}{k} + 1\right)}$$

$$\beta_1 = \frac{\Omega_1}{\omega}, \quad \xi = \frac{c}{c_{cr}}, \quad c_{cr} = 2m\omega$$

$$\frac{\Omega_1 c}{k} = \frac{\Omega_1}{k} \times \frac{c}{c_{cr}}\, c_{cr} = \frac{\Omega_1}{k}\, \xi (2m\omega) = \frac{\Omega_1}{\omega^2}\, \xi 2\omega = 2\beta_1 \xi$$

$$\bar{H}(\Omega_1) = \frac{1}{k\left(-\beta_1^2 + 2i\beta_1\xi + 1\right)}$$

در حالت کلی Ω_n :

$$\bar{H}(\Omega_n) = \bar{H}(n\Omega_1) = \frac{1}{k\left(-n^2\beta_1^2 + 2in\beta_1\xi + 1\right)} \qquad (۵)$$

بنابراین در حالت کلی با توجه به فاکتور ثابت $\bar{P}_n$ در تابع نیرو و ترکیب بار از جملات

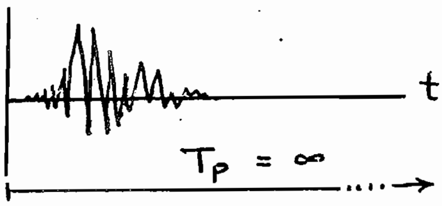
تابع اکسپوناسیل، جواب معادله موردنظر بصورت زیر خواهد بود:

رفتار سازه باید خطی باشد.

$$\bar{u}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{H}(n\Omega_1)\, \bar{P}_n\, e^{in\Omega_1 t} \qquad (۶)$$

تحلیل سیستم SDF در بارگذاری غیرتناوبی - تبدیل فوریه

نیروهایی که تابع آنها شکل خاصی ندارد و پریودیک نمی باشند (زلزله - امواج تلی).



فرض: یک نیروی پریودیک با زمان تناوب ∞

تغییر متغیر زمان به فرکانس $t \to \Omega$

برای حل معادله دیفرانسیل تعادل دینامیکی از تغییر متغیر استفاده می شود؛ چند تعریف:

$$\Omega_1 = \frac{2\pi}{T_p} = \Delta\Omega \quad , \quad n\Omega_1 = \Omega_n$$

$$\bar{P}(\Omega_n) = T_p \bar{P}_n = \frac{2\pi}{\Omega_1}\bar{P}_n = \frac{2\pi}{\Delta\Omega}\bar{P}_n$$

$$\bar{P}_n = \bar{P}(\Omega_n)\frac{\Delta\Omega}{2\pi}$$

$$P(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \bar{P}_n e^{in\Omega_1 t} = \frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{\infty} \bar{P}(\Omega_n)\, e^{in\Omega_1 t}\,\Delta\Omega$$

$$P(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{\infty} \bar{P}(\Omega_n)\, e^{i\Omega_n t}\,\Delta\Omega \qquad (۷)$$

برای یافتن عبارت $\bar{P}(\Omega_n)$، طرفین عبارت $\bar{P}_n = \frac{1}{T_p}\int_0^{T_p} P(t)\, e^{-i\Omega_n t}\, dt$ را

که از قبل داشتیم در T_p ضرب می کنیم:

$$\bar{P}_n T_p = \bar{P}(\Omega_n) = \int_{-T_p/2}^{+T_p/2} P(t)\, e^{-i\Omega_n t}\, dt$$

$$\Delta\Omega = \frac{2\pi}{T_p} \qquad \text{اگر } T_p \to \infty \quad \Rightarrow \quad \Delta\Omega \to d\Omega$$

Ω_n که به ازای n های مختلف دارای مقدار منفرد (نقطه‌ای) بود، حالا بصورت متغیر پیوسته‌ای از Ω در می‌آید. در ضمن شکل بیانی $P(t)$ که بصورت $\sum$ بود، به شکل انتگرال در می‌آید که به آن انتگرال فوریه می‌گویند:

$$p(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{\infty} \bar{P}(\Omega_n)\, e^{i\Omega_n t}\,\Delta\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{P}(\Omega)\, e^{i\Omega t}\, d\Omega \qquad (8)$$

که در این انتگرال فوریه مقدار $\bar{P}(\Omega)$ ← (۹)

$$\bar{P}(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t)\, e^{-i\Omega t}\, dt \qquad (9)$$

دو رابطه اخیر (۸) و (۹) را زوج تبدیل فوریه گویند.

$\bar{P}(\Omega)$ را تبدیل فوریه $p(t)$ و $p(t)$ را تبدیل معکوس فوریه $\bar{P}(\Omega)$ می‌نامند.

شرط لازم وجودی تبدیل فوریه آن است که $\int_{-\infty}^{+\infty} p(t)\,dt$ موجود باشد که البته اکثر توابع فیزیکی نظیر نیروها چنین خصوصیتی را دارند.

خلاصه نتایج روش برای متغیر فرکانسی $f = \frac{\Omega}{2\pi}$ بصورت زیر می‌شود:

$$p(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{P}(f)\, e^{i(2\pi f t)}\, df \quad (10) \quad , \quad \bar{P}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t)\, e^{-i(2\pi f t)}\, dt \qquad (11)$$

$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{H}(f)\, \bar{P}(f)\, e^{i(2\pi f t)}\, df \qquad (12)$$

یا بصورت دیگر زیر:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{U}(f)\, e^{i(2\pi f t)}\, df \quad (13) \quad \text{که} \quad \bar{U}(f) = \bar{H}(f)\, \bar{P}(f) \qquad (14)$$

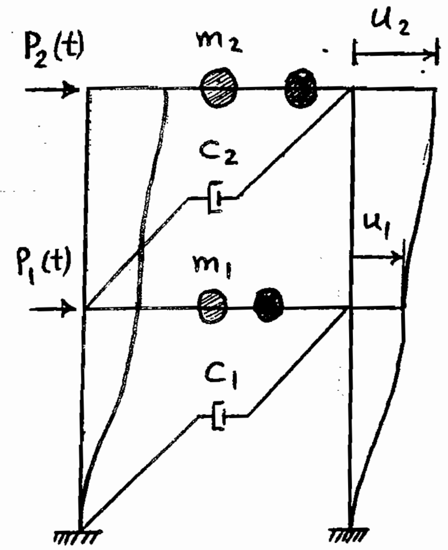
تعیین انتگرال اخیر احتیاج به محاسبه انتگرال مرزی در صفحه مختلط دارد.

کاربرد مطالب
در تهیه طیف
فوریه بارگذاری
(زلزله ....)

$$\begin{tikzcd} p(t) \arrow[r, "(11)"] & \bar{P}(f) \arrow[d, "(14)"] \\ u(t) & \bar{U}(f) \arrow[l, "(12)"'] \end{tikzcd}$$

برنامه FREQ-RESP
در کتاب - در حالت زلزله
برای انتگرال ها از روش عددی

Multi Degree of Freedom Systems (MDF) سیستم های چند درجه آزادی

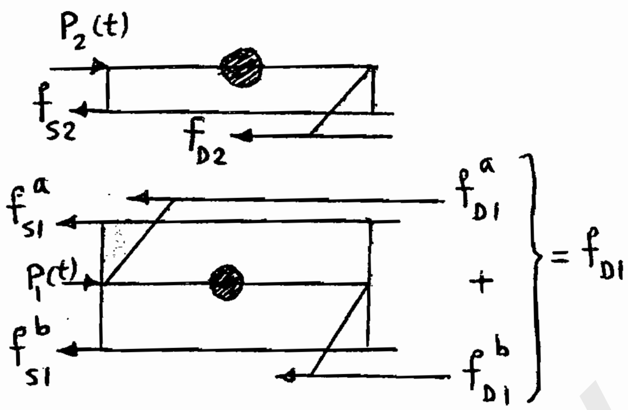


سیستم ساده (قاب برشی دو طبقه)

برای سادگی فرض می شود تیرها و کف صلب هستند.

از تغییر شکل محوری تیرها و ستون ها و از اثر نیروی محوری در سختی ستون ها صرفنظر می شود، رفتار خطی است.

تعداد درجات آزادی مستقل برابر دو است (u_1, u_2).



قانون دوم نیوتن برای حرکت هر یک از جرم ها:

$$p_i - f_{Si} - f_{Di} = m_i \ddot{u}_i \qquad (i=1,2)$$

$$\begin{cases} m_1\ddot{u}_1 + f_{s1} + f_{D1} = P_1 \\ m_2\ddot{u}_2 + f_{s2} + f_{D2} = P_2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_{D1} \\ f_{D2} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_{s1} \\ f_{s2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix}$$

معادله برداری حرکت MDF:
$$[m]\{\ddot{u}\} + \{f_D\} + \{f_s\} = \{P\}$$

نیروی سختی $\{f_s\}$ بستگی به بردار تغییر مکان طبقات $\{u\}$ دارد، سختی جانبی هر طبقه K_i که بستگی به برش طبقه V_i داشته و رابطه بین آن و تغییرمکان طبقه است:
$$V_i = K_i \Delta_i$$

$\Delta_i = u_i - u_{i-1}$ و سختی هر طبقه (در قاب برشی) برابر سختی جانبی کل ستون‌های طبقه می باشد:

$$K_i = \sum_{\text{ستونها}} \frac{12\,E I_c}{h^3}$$

نیروی سختی مؤثر در سقف طبقه اول از دو بخش تشکیل می شود: f_{s1}^a از طبقه بالا و f_{s1}^b از طبقه پائین:

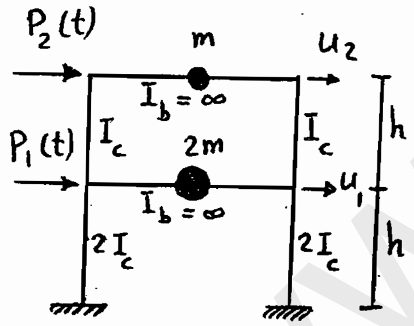
$$f_{s1} = f_{s1}^b + f_{s1}^a$$

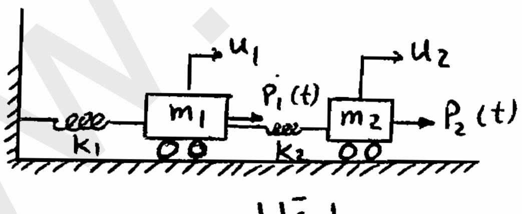
$\Delta_1 = u_1$, $\Delta_2 = u_2 - u_1 \rightarrow f_{s1} = k_1 u_1 + k_2 (u_1 - u_2)$

$f_{s2} = k_2 (u_2 - u_1)$ توجه شود که f_{s1}^{a} و f_{s2} هردو بیان کننده برش در طبقه دوم هستند پس در مقدار مساوی ولی مختلف العلامت می باشند . پس :

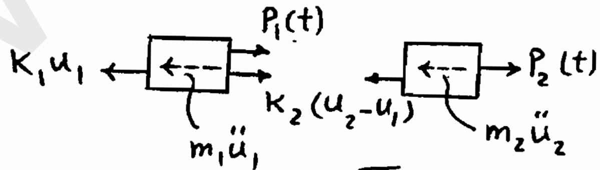
$$\begin{Bmatrix} f_{s1} \\ f_{s2} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}}_{\text{ماتریس سختی}} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad \text{یا} \quad \{f_s\} = [k]\{u\}$$

بطور مشابه می توان برای نیروی میرایی نیز اقدام نمود که البته به دلیل مسائل مطرح در تعیین میرایی در عمل ، معمولاً بصورت درصد میرایی و در معادلات تفکیک شده اعمال می گردد . درنهایت معادله حرکت بصورت معادله دیفرانسیل برداری نوشته می شود که مجهولات u_1 و u_2 بوده و معادله بصورت وابسته است (coupled) که بنابراین معادله باید بصورت همزمان حل شود . مثال ـ مطلوبست تعیین معادله حرکت قاب برشی زیر؟ مدول الاستیسیته E





مدل تحلیلی



$m_1 = 2m$, $m_2 = m$

پیکره آزاد

$$k_1 = 2\frac{12(2EI_c)}{h^3} = \frac{48EI_c}{h^3} \qquad k_2 = 2\frac{12(EI_c)}{h^3} = \frac{24EI_c}{h^3}$$

$$[m] = m\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad [k] = \frac{24EI_c}{h^3}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

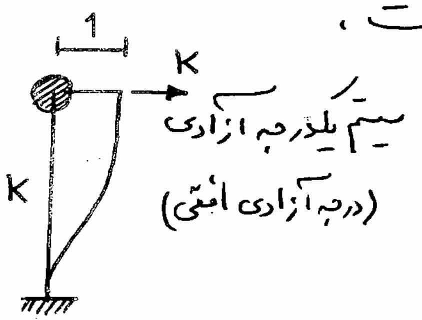
$$m\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + 24\frac{EI_c}{h^3}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{Bmatrix}$$

با استفاده از مدل جرم متمرکز ، ماتریس جرم همیشه قطری خواهد بود (قانون دوم نیوتن)،

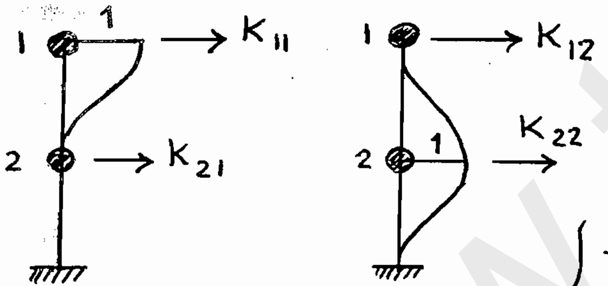
برای تشکیل ماتریس سختی ، چگونگی استفاده از سختی طبقه در سازه‌های برشی ملاحظه شد،

البته در حالت کلی از ضرایب سختی برای تشکیل ماتریس سختی استفاده می‌شود که در ابتدای شروع درس ، اشاراتی به آنها شد (جلسات اول درس دینامیک سازه‌ها). یادآوری خلاصه :

K_{ij} نیرو در درجه آزادی i وقتی تغییرمکان واحد در j اعمال می‌شود و سایر درجات آزادی گرفته (قفل) شده است.



$$f_s = K\underbrace{(u-0)}_{\text{تغییرمکان نسبی}} = Ku$$



$$f_{s1} = K_{11}u_1 + K_{12}u_2$$

$$f_{s2} = K_{21}u_1 + K_{22}u_2$$

$$\begin{Bmatrix} f_{s1} \\ f_{s2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

جزئیات تشکیل ماتریس سختی در درس تحلیل سازه‌ها تشریح می‌شود.

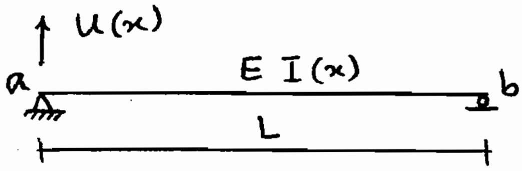
طریقه تعیین ضرایب ماتریس‌های سختی و جرم با استفاده از اصول اجزاء محدود

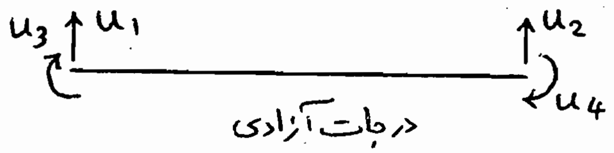
اساس : شبکه بندی ، عناصر انتخابی ، گره‌ها ، توابع شکلی (Shape Function)

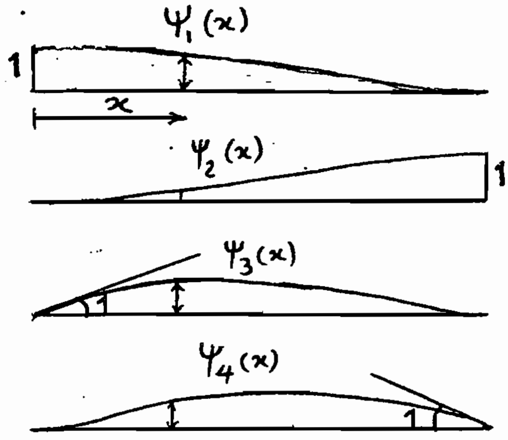
$\psi(x)$ با توجه به حالت بارگذاری (صفحه یا ....) چندجمله‌ای هرمیتی یا لاگرانژی ....

خواص چندجمله‌ای‌ها : ارضاء شرایط تغییرشکلی مورد نظر در المان مورد بررسی

جزئیات روش اجزاء محدود در درس مربوط بوده و اینجا فقط به نحوه تعیین k_{ij} و m_{ij} پرداخته می‌شود.







$$u_a = u_1 = 1 \rightarrow \psi_1(x) = 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3$$

$$u_b = u_2 = 1 \rightarrow \psi_2(x) = 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3$$

$$\theta_a = u_3 = 1 \rightarrow \psi_3(x) = x\left(1 - \frac{x}{L}\right)^2$$

$$\theta_b = u_4 = 1 \rightarrow \psi_4(x) = \frac{x^2}{L}\left(\frac{x}{L} - 1\right)$$

چندجمله‌ای های هرمیتی

در حالت کلی تغییر مکان یک نقطه از تیر بصورت زیر خواهد بود :

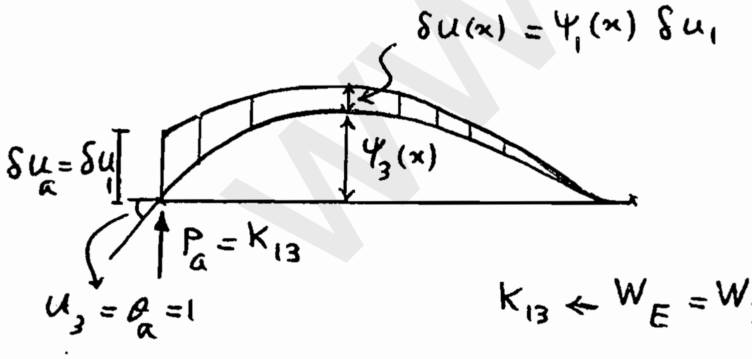
$$u(x) = \psi_1(x)\,u_1 + \psi_2(x)\,u_2 + \psi_3(x)\,u_3 + \psi_4(x)\,u_4$$

برای تعیین ضرایب می توان از روش تعادل ، انرژی ، کار مجازی استفاده کرد . اینجا کار مجازی :

تساوی کار نیروهای خارجی با کار نیروهای داخلی در یک تغییر مکان مجازی

برای نمونه جزئیات مراتب برای ضریب K_{13} ارائه می شود، نیروی تمام ایجاد شده در گره a

براثر چرخش واحد در همان نقطه .



در تیر چرخش واحد در a اعمال شده و

یک تغییر مکان تمام مجازی در a درنظر می گیریم .

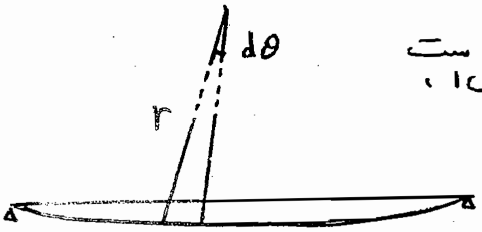
تساوی کار نیروهای داخلی با کار نیروهای خارجی $K_{13} \leftarrow W_E = W_I$

در این حالت کار خارجی فقط توسط مولفه تمام نیرو در نقطه a انجام می شود زیرا تغییر مکانهای

مجازی در گره های دیگر صفر است .

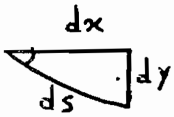
$$W_E = \delta u_a\, P_a = \delta u_1\, K_{13}$$

کار مجازی داخلی توسط لنگرهای داخلی ناشی از $\theta_a = 1$ بر روی انحناهای مجازی انجام می شود .



در یک تیر تحت خمش: $\frac{1}{r}$ انحناء و $d\theta$ ، $\frac{1}{r}dx=d\theta$ مقدار چرخش است،

$Md\theta$ کار مربوطه می باشد



$$ds \# dx \quad , \quad d\theta = \frac{ds}{r} \rightarrow \frac{1}{r} = \frac{d\theta}{dx}$$

از طرفی $\rightarrow d\theta = \frac{dy}{dx}$

مقدار انحناهای مجازی با مدنظر کردن از اثرات ناشی از تغییر شکل برشی عبارت از:

$$\frac{1}{r} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

در حالت مورد نظر در اینجا، تغییر مکان مجازی δu می باشد: $y=\delta u$

$$\frac{1}{r} = \frac{d^2}{dx^2}(\delta u(x)) = \frac{d^2}{dx^2}(\psi_1(x)\,\delta u_1) = \psi_1''(x)\,\delta u_1$$

لنگر داخلی ناشی از چرخش $\theta_a=1$ با توجه به $\frac{M}{EI}=y''$ ، $\Leftarrow y=\psi_3(x)$

$$M(x) = EI(x)\,\psi_3''(x) \rightarrow \text{کار داخلی} \quad Md\theta = M\frac{dx}{r}$$

$$W_I = \delta u_1 \int_0^L EI(x)\,\psi_1''(x)\,\psi_3''(x)\,dx$$

$$W_I = W_E \Rightarrow K_{13} = \int_0^L EI(x)\,\psi_1''(x)\,\psi_3''(x)\,dx$$

در حالت کلی ضرایب سختی مربوط به خمش تیر:

$$\boxed{K_{ij} = \int_0^L EI(x)\,\psi_i''(x)\,\psi_j''(x)\,dx}$$

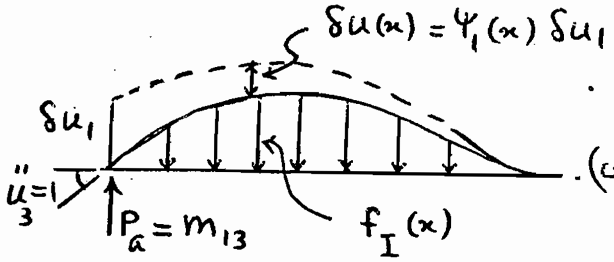
در حالت کلی با تعیین ضرایب دیگر ماتریس سختی به روش فوق برای تیر مورد نظر خواهیم داشت. $\rightarrow$

$$[K] = \frac{2EI}{L^3}\begin{bmatrix} 6 & -6 & 3L & 3L \\ -6 & 6 & -3L & -3L \\ 3L & -3L & 2L^2 & L^2 \\ 3L & -3L & L^2 & 2L^2 \end{bmatrix}$$

ماتریس کل یک سازه از سرهم بندی ماتریس اجزاء

Consistent mass matrix

تعیین ضرایب ماتریس جرم سازگار (تیر)



مشابه حالت k_{ij} عمل می شود (تساوی کارهای داخلی و خارجی).

برای نمونه m_{13} مورد نظر است،

اگر تیر تحت اثر شتاب زاویه ای واحد در انتهای چپ قرار گیرد $\ddot{u}_3 = \ddot{\theta}_a = 1$ (بقیه صفر)

شتابهائی در طول تیر ایجاد می شود: $u(x) = \psi_1 u_1 + \psi_2 u_2 + \psi_3 u_3 + \psi_4 u_4$

$$\ddot{u}(x) = 0 + 0 + \psi_3(x)\ddot{u}_3 + 0 \Rightarrow \underline{\ddot{u}(x) = \psi_3(x)\ddot{u}_3}$$

نیروی اینرسی (طبق اصل دالامبر) مقاوم در برابر این شتاب:

$$f_I(x) = m(x)\ddot{u}(x) = m(x)\psi_3(x)\ddot{u}_3$$

ضرایب تأثیر جرم مربوط به این شتاب به عنوان نیروهای اینرسی گره ای ناشی از آن تعریف می شوند. این نیروها به کمک اصل تغییر مکانهای مجازی از نیروی اینرسی گسترده معادل محاسبه می شوند، مثلاً با ایجاد تغییر مکان مجازی متناظر و مساوی قرار دادن کار انجام شده توسط نیروی گره ای خارجی P_a با کار انجام شده توسط نیروهای اینرسی گسترده $f_I(x)$، نیروی متناظر در انتهای چپ محاسبه می شود (همان m_{13}):

$$W_E = W_I \rightarrow P_a\,\delta u_a = \int_0^L f_I(x)\,\delta u(x)\,dx$$

$$m_{13}\,\delta u_1 = \int_0^L \underbrace{(m(x)\psi_3(x)\times 1)}_{f_I(x)} \times \underbrace{\psi_1(x)\,\delta u_1}_{\delta u(x)}\,dx$$

$$m_{13} = \int_0^L m(x)\psi_1(x)\psi_3(x)\,dx \longrightarrow \boxed{m_{ij} = \int_0^L m(x)\psi_i(x)\psi_j(x)\,dx}$$

با تعیین سایر ضرایب از توابع شکلی خود در نهایت ماتریس جرم سازگار المان تیری بصورت زیر: $m(x)=\bar{m}$

$$[m]=\frac{\bar{m}L}{420}\begin{bmatrix}156 & 54 & 22L & -13L\\ 54 & 156 & 13L & -22L\\ 22L & 13L & 4L^2 & -3L^2\\ -13L & -22L & -3L^2 & 4L^2\end{bmatrix}$$

برای ماتریس میرایی نیز بطور مشابه می‌توان عمل کرد $\quad c_{ij}=\int_0^L c(x)\,\psi_i(x)\,\psi_j(x)\,dx$

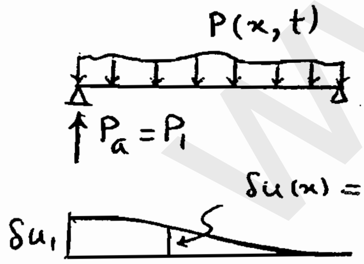
ولی مشکل ارزیابی $c(x)$ که بیانگر مشخصه استهلاک ویسکوز پیوسته برای هر المان است، می‌باشد.

در عمل اثر میرایی بصورت درصد میرایی در معادلات نهایی در نظر گرفته می‌شود.

بردار بارگذاری

برای تعیین بردار بارگذاری مربوط به درجات آزادی مربوط، ساده‌ترین روش استفاده از اصول ساده استاتیک است که بار بین گره‌ها را بطور ساده به درجات آزادی گره‌ها تقسیم و انتقال می‌دهد.

البته می‌توان از بارهای گره‌ای سازگار نیز استفاده کرد، مثلاً تعیین نیروی سازگار متناظر با u_1 با استفاده از اصل کار مجازی: نتیجه:



$\delta u(x)=\psi_1(x)\,\delta u_1$

$$P_1(t)=\int_0^L P(x,t)\,\psi_1(x)\,dx$$

در حالت کلی:

$$P_i(t)=\int_0^L P(x,t)\,\psi_i(x)\,dx$$

معادله حرکت در حالت کلی $[m]\{\ddot{u}\} + [c]\{\dot{u}\} + [k]\{u\} = \{P(t)\}$

① معادله ارتعاش آزاد بدون میرایی $[m]\{\ddot{u}\} + [k]\{u\} = \{0\}$

اگر تعداد درجات آزادی N باشد پس N معادله دیفرانسیل همزمان وابسته coupled خواهیم داشت. حل معادله ارتعاش آزاد با میرایی امکان پذیر است ولی مستلزم داشتن (تعیین) ماتریس میرایی $[c]$ می باشیم!

جواب معادله بصورت روبرو درنظر گرفته می شود ② $\{u(t)\} = q_i(t)\{\phi\}_i$

$\{\phi\}_i$ بردار تغییر شکل که وابسته به زمان نمی باشد و متغیر زمان با تابع $q_i(t)$ وارد مساله می شود: $q_i(t) = A_i \cos\omega_i t + B_i \sin\omega_i t = D_i \sin(\omega_i t + \alpha)$

A_i و B_i ضرایب ثابت که از شرایط اولیه بدست می آید.

$$\{u(t)\} = \{\phi\}_i (A_i \cos\omega_i t + B_i \sin\omega_i t) \quad ③$$

توجه شود که ω_i و $\{\phi\}_i$ مجهول هستند. رابطه (جواب) ② در معادله ① !

$$\left[-\omega_i^2 [m]\{\phi\}_i + [k]\{\phi\}_i\right] q_i(t) = \{0\} \quad ④$$

$q_i(t) \neq 0$ پس:

$$\left[[k] - \omega_i^2 [m]\right]\{\phi\}_i = \{0\} \quad ⑤ \text{ یا } [k]\{\phi\}_i = \omega_i^2 [m]\{\phi\}_i$$

معادله مشخصه: $\det\left[[k] - \omega_i^2 [m]\right] = 0$ ⑥ ؛ پس $\{\phi\}_i \neq \{0\}$

$\Rightarrow \omega_i^2$ چند جمله ای مرتبه N برحسب $\Rightarrow \omega_i \quad i = 1$ تا N معلوم

ریشه های معادله مشخصه یعنی ω_i: مقادیر مشخصه، eigenvalues، فرکانس زاویه ای

از رابطه ۵ می توان بردار $\{\phi\}_i$ را به ازای ω_i ها بدست آورد (البته مقادیر نسبی دامنه حرکت و نه مقادیر مطلق آنها).

$$\{\phi\}_i = \begin{Bmatrix} \phi_{1i} \\ \phi_{2i} \\ \vdots \\ \phi_{Ni} \end{Bmatrix}$$

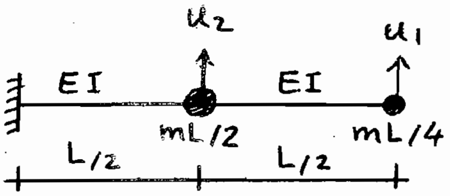
بردار مود طبیعی، شکل مود ارتعاش، eigenvectors، بردار مشخصه، ...

$$\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 \dots < $$

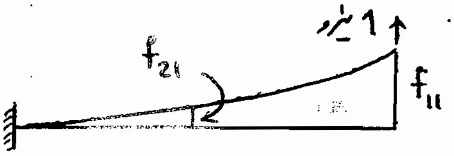
ترتیب شماره گذاری فرکانس ها و پریودها

$$T_1 > T_2 > \dots\dots$$

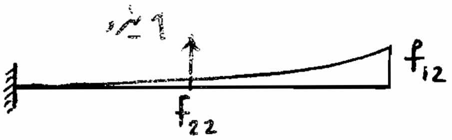
مثال - مطلوب است تعیین فرکانس زاویه‌ای و مود شکل های سیستم زیر؟



ابتدا باید معادله حرکت نوشته شود (ماتریس سختی و جرم)!
از روش ماتریس نرمی استفاده می شود (اعمال نیروی واحد و محاسبه تغییر مکانهای حاصل در درجات آزادی) از تحلیل سازه!



$$[f] = \frac{L^3}{48EI}\begin{bmatrix}16 & 5\\ 5 & 2\end{bmatrix}$$ ماتریس نرمی



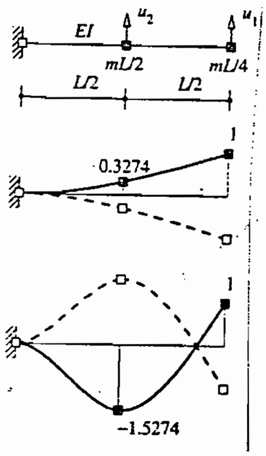
$$[k] = [f]^{-1} = \frac{48EI}{7L^3}\begin{bmatrix}2 & -5\\ -5 & 16\end{bmatrix}$$

$$[m] = \begin{bmatrix} mL/4 & 0\\ 0 & mL/2\end{bmatrix} \rightarrow [m]\{\ddot{u}\} + [k]\{u\} = \{0\}$$

$$\left[[k] - \omega^2[m]\right] = \frac{48EI}{7L^3}\begin{bmatrix}2-\lambda & -5\\ -5 & 16-2\lambda\end{bmatrix} \leftarrow \lambda = \frac{7mL^4}{192\,EI}\,\omega^2$$ برای سادگی

$$\det\begin{bmatrix}2-\lambda & -5\\ -5 & 16-2\lambda\end{bmatrix} = 0 \Rightarrow 2\lambda^2 - 20\lambda + 7 = 0$$

$$\lambda_1 = 0.36319 \;,\; \lambda_2 = 9.6368 \rightarrow \begin{cases}\omega_1 = 3.15623\sqrt{\dfrac{EI}{mL^4}}\\[2mm] \omega_2 = 16.2580\sqrt{\dfrac{EI}{mL^4}}\end{cases}$$



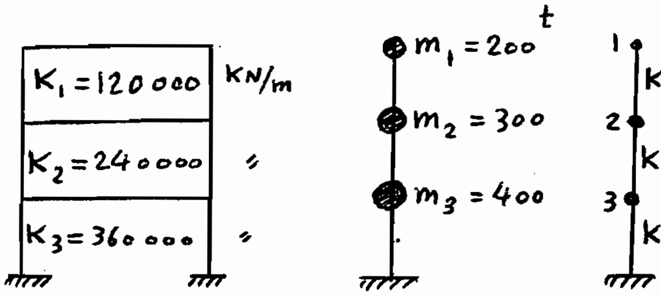
$$\left[[k] - \omega_i^2[m]\right]\{\phi\}_i = \{0\}$$

$$\left[[k] - \omega_1^2[m]\right]\begin{Bmatrix}1.0\\ \phi_2\end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix} \rightarrow \phi_{21} = 0.3274$$

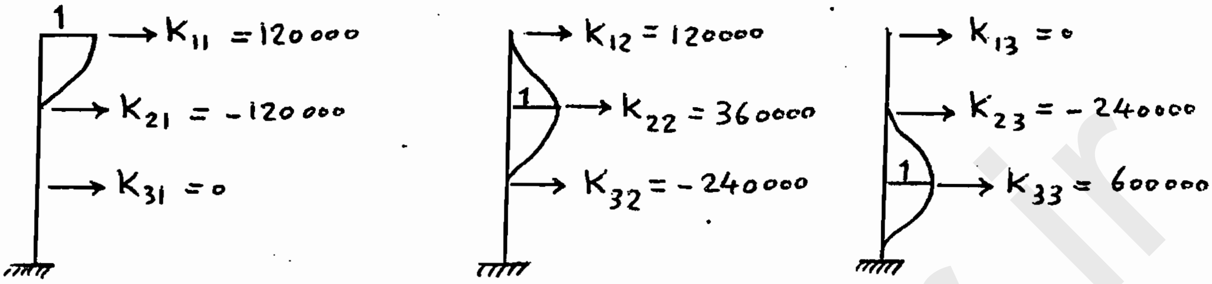
$$\left[[k] - \omega_2^2[m]\right]\begin{Bmatrix}1.0\\ \phi_2\end{Bmatrix}_2 = \begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix} \rightarrow \phi_{22} = -1.5274$$

$$\{\phi\}_1 = \begin{Bmatrix}1.0000\\ 0.3274\end{Bmatrix} \;,\; \{\phi\}_2 = \begin{Bmatrix}1.0000\\ -1.5274\end{Bmatrix}$$

مثال – در قاب سه طبقه داده شده مطلوب است تعیین ω_i و $\{\phi\}_i$ ؟



$$f_{s1} = k_1(u_1-u_2)$$
$$f_{s2} = k_2(u_2-u_3)-k_1(u_1-u_2)$$
$$f_{s3} = k_3u_3-k_2(u_2-u_3)$$



$u_1=1\ ,\ u_2=u_3=0$ $\qquad$ $u_2=1\ ,\ u_1=u_3=0$ $\qquad$ $u_3=1\ ,\ u_1=u_2=0$

$$[K] = 120\times10^3\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 3 & -2\\ 0 & -2 & 5\end{bmatrix} \quad , \quad [m] = 200\begin{bmatrix}1.0 & 0 & 0\\ 0 & 1.5 & 0\\ 0 & 0 & 2.0\end{bmatrix}$$

برای سادگی $\lambda_i = \omega_i^2/600$

$$\left[[K]-\omega^2[m]\right] = 120\times10^3\begin{bmatrix}1-\lambda_i & -1 & 0\\ -1 & 3-1.5\lambda_i & -2\\ 0 & -2 & 5-2\lambda_i\end{bmatrix}$$

دترمینان ماتریس اخیر صفر ←

$$\lambda_i^3-5.5\lambda_i^2+7.5\lambda_i-2=0$$

$\lambda_1 = 0.351 \quad , \quad \lambda_2 = 1.61 \quad , \quad \lambda_3 = 3.54$

$\omega_1^2 = 210 \quad , \quad \omega_2^2 = 966 \quad , \quad \omega_3^2 = 2124$

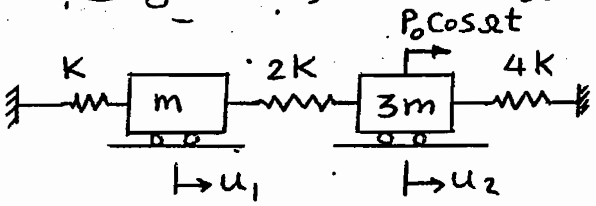
$\omega_1 = 14.5\ \text{Rad/s} \quad , \quad \omega_2 = 31.1 \quad , \quad \omega_3 = 46.1$

$$\left[[K]-\omega_i^2[m]\right]\{\phi\}_i = \{0\}$$

$$\left[\begin{array}{c|cc}1-\lambda_i & -1 & 0\\ \hline -1 & 3-1.5\lambda_i & -2\\ 0 & -2 & 5-2\lambda_i\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}\phi_1=1\\ \hdashline \phi_2\\ \phi_3\end{array}\right\}_i = \begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix}-1\\0\end{Bmatrix}\times1 + \begin{bmatrix}3-1.5\lambda_i & -2\\ -2 & 5-2\lambda_i\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\phi_2\\ \phi_3\end{Bmatrix}_i = \begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}$$

مثال - یک سازه دو درجه آزادی بصورت زیر مدل شده است. مطلوبست تحلیل آن؟



$$\begin{cases} K = 1000 \quad , \quad m = 0.5 \\ \xi = 2\% \qquad \text{واحدها هماهنگ است.} \\ \Omega = 1.03\,\omega_1 \end{cases}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 3K & -2K \\ -2K & 6K \end{bmatrix} \quad , \quad [m] = m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det \Big[[K] - \omega^2 [m] \Big] = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} 3K - \omega^2 m & -2K \\ -2K & 6K - 3\omega^2 m \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \omega_1^2 = 1.2417\ K/m \quad , \quad \omega_2^2 = 3.7584\ K/m$$

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 1.0000 & 1.0000 \\ 0.8792 & -0.3792 \end{bmatrix} \quad , \quad \Omega = 1.03\,\omega_1 = 51.32\ Rad/s$$

$$M_1 = \{\phi\}_1^T [m] \{\phi\}_1 = 3.319\, m \quad , \quad M_2 = 1.4314\, m$$

$$K_1 = \{\phi\}_1^T [K] \{\phi\}_1 = 4.1212 K \quad , \quad K_2 = 5.3798 K$$

$$\{P(t)\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P_0 \cos \Omega t \end{Bmatrix} \quad , \quad \{\phi\}_1^T \{P(t)\} = P_1 = 0.8792\, P_0 \cos \Omega t$$

$$\{\phi\}_2^T \{P(t)\} = P_2 = -0.3792\, P_0 \cos \Omega t$$

$$\ddot{q}_i + 2 \xi_i \omega_i \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = \frac{P_i}{M_i}$$

$$\{u\} = [\Phi]\{q\} = \sum_{i=1}^{2} \{\phi\}_i q_i$$

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{Bmatrix} 2.9008 \\ 2.5500 \end{Bmatrix} \frac{P_0}{K} \cos(\Omega t - 2.5468)}_{\text{اثر مود اول}} -$$

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} 0.1084 \\ -0.0411 \end{Bmatrix} \frac{P_0}{K} \cos(\Omega t - 0.0364)}_{\text{اثر مود دوم}}$$

$$[m][\Phi]\{\ddot{q}\} + [c][\Phi]\{\dot{q}\} + [k][\Phi]\{q\} = \{P(t)\}$$

طرفین رابطه را در $\{\phi\}_i^T$ ضرب می کنیم:

$$\underbrace{\{\phi\}_i^T[m][\Phi]\{\ddot{q}\}} + \{\phi\}_i^T[c][\Phi]\{\dot{q}\} + \{\phi\}_i^T[k][\Phi]\{q\} = \{\phi\}_i^T\{P(t)\}$$

$$\begin{Bmatrix}\phi_{1i}\\ \phi_{2i}\\ \vdots\\ \phi_{Ni}\end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} m_{11} & & 0\\ & m_{22} & \\ 0 & & \ddots & m_{NN}\end{bmatrix} \left[\begin{Bmatrix}\phi_{11}\\ \phi_{21}\\ \vdots\\ \phi_{N1}\end{Bmatrix} \begin{Bmatrix}\phi_{12}\\ \phi_{22}\\ \vdots\\ \phi_{N2}\end{Bmatrix} \cdots \begin{Bmatrix}\phi_{1i}\\ \phi_{2i}\\ \vdots\\ \phi_{Ni}\end{Bmatrix} \cdots \begin{Bmatrix}\phi_{1N}\\ \phi_{2N}\\ \vdots\\ \phi_{NN}\end{Bmatrix} \right] \begin{Bmatrix}\ddot{q}_1\\ \ddot{q}_2\\ \vdots\\ \ddot{q}_N\end{Bmatrix}$$

$$\underbrace{\{\phi\}_i^T[m]\{\phi\}_1\ddot{q}_1}_{\text{صفر}} + \underbrace{\{\phi\}_i^T[m]\{\phi\}_2\ddot{q}_2}_{\text{صفر}} + \cdots + \underbrace{\{\phi\}_i^T[m]\{\phi\}_i}_{M_i}\ \underset{\ddot{q}_i}{\ddot{q}_i} + \cdots$$

برای در نظر گرفتن میرایی معمولاً با روش رایله عمل می شود $[c] = \alpha[m] + \beta[k]$

بنابراین خاصیت تعامد مودها نسبت به ماتریس میرایی نیز برقرار می شود:

$$\{\phi\}_r^T[c]\{\phi\}_s = 0 \quad , \quad \{\phi\}_i^T[c]\{\phi\}_i = C_i$$

در نهایت:

$$M_i\ddot{q}_i + C_i\dot{q}_i + K_i q_i = P_i$$

$$\{\phi\}_i^T[k]\{\phi\}_i = K_i \quad , \quad \{\phi\}_i^T\{P(t)\} = P_i$$

با توجه به روابط بین جرم، سختی و میرایی

معادله یک درجه آزادی مستقل

$$\ddot{q}_i + 2\xi_i\omega_i\dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = P_i/M_i$$

$i = 1$ تا N

$\Rightarrow$ q_i معلوم

$$\{u\} = [\Phi]\{q\} = \sum_{i=1}^{N}\{\phi\}_i q_i$$

مودهای اولیه مهم است، می توان چند مود اول را در نظر گرفت

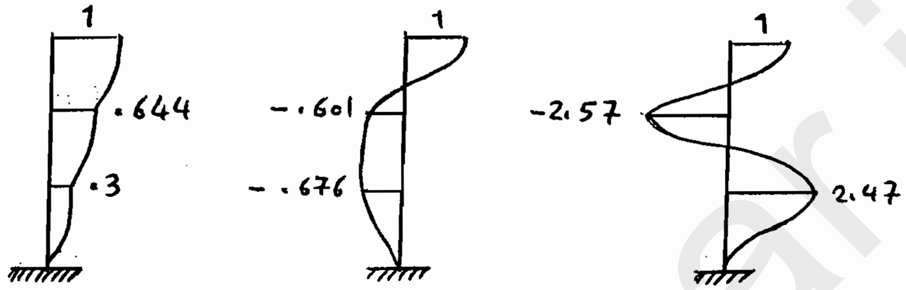
$$\{u\} = \sum_{i=1}^{r}\{\phi\}_i q_i \qquad r \ll N$$

$$\begin{bmatrix} 3-1.5\lambda_i & -2 \\ -2 & 5-2\lambda_i \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\phi_{2i}\\ \phi_{3i}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix}$$

$$\lambda_1=0.351 \rightarrow \begin{bmatrix} 2.475 & -2 \\ -2 & 4.3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\phi_{21}\\ \phi_{31}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}\phi_{21}=0.644\\ \phi_{31}=0.300\end{cases}$$

$$\lambda_2=1.61 \rightarrow \phi_{22}=-0.601 \quad , \quad \phi_{32}=-0.676$$

$$\lambda_3=3.54 \rightarrow \phi_{23}=-2.57 \quad , \quad \phi_{33}=2.47$$



مود اول   مود دوم   مود سوم

ORTHOGONALITY OF MODES   خاصیت تعامد مودها

معادله مشخصه $[[K]-\omega_i^2[m]]\{\phi\}_i=\{0\}$ را برای مود شماره r می‌نویسیم:

$$[K]\{\phi\}_r-\omega_r^2[m]\{\phi\}_r=\{0\}$$

طرفین رابطه را در $\{\phi\}_s^T$ ضرب می‌کنیم:

$$\{\phi\}_s^T[K]\{\phi\}_r-\omega_r^2\{\phi\}_s^T[m]\{\phi\}_r=0 \qquad (1)$$

حال معادله را برای مود S ام می‌نویسیم:

$$[K]\{\phi\}_s-\omega_s^2[m]\{\phi\}_s=\{0\}$$

طرفین رابطه را در $\{\phi\}_r^T$ ضرب می‌کنیم:

$$\{\phi\}_r^T[K]\{\phi\}_s-\omega_s^2\{\phi\}_r^T[m]\{\phi\}_s=0 \qquad (2)$$

چون $[K]$ و $[m]$ متقارن است، رابطه (2) $\leftarrow$

$$\{\phi\}_s^T[K]\{\phi\}_r-\omega_s^2\{\phi\}_s^T[m]\{\phi\}_r=0 \qquad (3)$$

رابطه (1) _ رابطه (3) $=(\omega_s^2-\omega_r^2)\{\phi\}_s^T[m]\{\phi\}_r=0 \Rightarrow$

رابطه تعامد مودها نسبت به ماتریس سختی و جرم

$$\{\phi\}_s^T[m]\{\phi\}_r=0 \quad , \quad \{\phi\}_s^T[K]\{\phi\}_r=0$$

NORMALIZATION OF MODES — مقیاس کردن مودها

$\{\phi\}_i$ — الف ـ با تقسیم مولفه های بردار مود بر بزرگترین عدد آنها ، بردار مود به عدد یک مقیاس می شود.

$$\{\phi\} = \begin{Bmatrix} 2.0 \\ 1.0 \end{Bmatrix} \rightarrow \{\phi\} = \begin{Bmatrix} 1.0 \\ 0.5 \end{Bmatrix}$$

ب ـ مقیاس نمودن برحسب ماتریس جرم به نحویکه $\{\phi\}_i^T [m] \{\phi\}_i = 1$

$$\{\phi\}_i'^{T} [m] \{\phi\}_i' = M_i \rightarrow \{\phi\}_i = \frac{1}{\sqrt{M_i}} \{\phi\}_i'$$

ماتریس مودال

$$[\Phi] = \left[\{\phi\}_1 , \{\phi\}_2 \ldots . \{\phi\}_N \right]$$

ماتریس مقادیر مشخصه (فرکانسی)

$$[\Omega^2] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & 0 \\ & \omega_2^2 & \\ 0 & & \ddots \; \omega_N^2 \end{bmatrix}$$

در مثال قبل :

$$\{\phi\}_1'^{T} [m] \{\phi\}_1' = M_1 = 360.2$$

$$\{\phi\}_1 = \begin{Bmatrix} 1.0 / \sqrt{M_1} \\ 0.644 / \sqrt{M_1} \\ 0.3 / \sqrt{M_1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0527 \\ 0.0339 \\ 0.0158 \end{Bmatrix} \Rightarrow \{\phi\}_1^T [m] \{\phi\}_1 = 1$$

MODAL ANALYSIS — تحلیل دینامیکی سیستم های چند درجه آزادی به روش مودال

$$[m]\{\ddot{u}\} + [c]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{P(t)\}$$

از تحلیل ارتعاش آزاد مقادیر ω_i و $\{\phi\}_i$ معلوم است ($i = 1$ تا N).

تغییر متغیر از مجهول فیزیکی $\{u\}$ به مجهول مودال : $\{u\} = [\Phi]\{q\}$

$$\{u(t)\} = \sum_{i=1}^{N} \{\phi\}_i \, q_i(t)$$

$$[m][\Phi]\{\ddot{q}\} + [c][\Phi]\{\dot{q}\} + [k][\Phi]\{q\} = \{P(t)\}$$

طرفین رابطه را در $\{\phi\}_i^T$ ضرب می‌کنیم:

$$\underbrace{\{\phi\}_i^T[m][\Phi]\{\ddot{q}\}} + \{\phi\}_i^T[c][\Phi]\{\dot{q}\} + \{\phi\}_i^T[k][\Phi]\{q\} = \{\phi\}_i^T\{P(t)\}$$

$$\begin{Bmatrix} \phi_{1i} \\ \phi_{2i} \\ \vdots \\ \phi_{Ni} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} m_{11} & & 0 \\ & m_{22} & \\ 0 & & \ddots & m_{NN} \end{bmatrix} \left[\begin{Bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \\ \vdots \\ \phi_{N1} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \\ \vdots \\ \phi_{N2} \end{Bmatrix} \cdots \begin{Bmatrix} \phi_{1i} \\ \phi_{2i} \\ \vdots \\ \phi_{Ni} \end{Bmatrix} \cdots \begin{Bmatrix} \phi_{1N} \\ \phi_{2N} \\ \vdots \\ \phi_{NN} \end{Bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \vdots \\ \ddot{q}_N \end{Bmatrix}$$

$$\underbrace{\{\phi\}_i^T[m]\{\phi\}_1\ddot{q}_1}_{\text{صفر}} + \underbrace{\{\phi\}_i^T[m]\{\phi\}_2\ddot{q}_2}_{\text{صفر}} + \cdots + \underbrace{\{\phi\}_i^T[m]\{\phi\}_i}_{M_i}\ \underset{\ddot{q}_i}{\ddot{q}_i} + \cdots$$

برای درنظرگرفتن میرایی معمولاً با روش رایله عمل می‌شود $[c] = \alpha[m] + \beta[k]$

بنابراین خاصیت تعامد مودها نسبت به ماتریس میرایی نیز برقرار می‌شود:

$$\{\phi\}_r^T[c]\{\phi\}_s = 0 \quad \text{و} \quad \{\phi\}_i^T[c]\{\phi\}_i = C_i$$

در نهایت:

$$M_i\ddot{q}_i + C_i\dot{q}_i + K_i q_i = P_i$$

$$\{\phi\}_i^T[k]\{\phi\}_i = K_i \quad \text{و} \quad \{\phi\}_i^T\{P(t)\} = P_i$$

با توجه به روابط بین جرم، سختی و میرایی

معادله یک درجه آزادی مستقل

$$\ddot{q}_i + 2\xi_i\omega_i\dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = P_i/M_i$$

$i = 1$ تا N

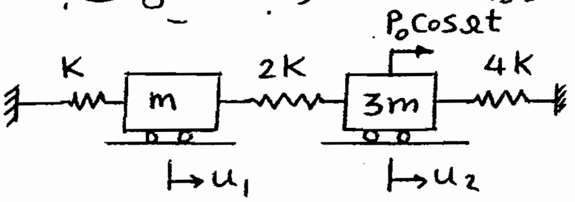
$\Rightarrow \quad q_i$ معلوم

$$\{u\} = [\Phi]\{q\} = \sum_{i=1}^{N}\{\phi\}_i q_i$$

مودهای اولیه مهم است، می‌توان چند مود اول را درنظر گرفت

$$\{u\} = \sum_{i=1}^{r}\{\phi\}_i q_i \qquad r \ll N$$

مثال ـ یک سازه دو درجه آزادی بصورت زیر مدل شده است. مطلوبست تحلیل آن؟



$$\begin{cases} K = 1000 \;,\; m = 0.5 \\ \xi = 2\% \quad \text{مودها هماهنگ است.} \\ \Omega = 1.03\,\omega_1 \end{cases}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 3K & -2K \\ -2K & 6K \end{bmatrix} \;,\quad [m] = m\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det\left[[K] - \omega^2 [m]\right] = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 3K - \omega^2 m & -2K \\ -2K & 6K - 3\omega^2 m \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \omega_1^2 = 1.2417\ K/m \;,\quad \omega_2^2 = 3.7584\ K/m$$

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 1.0000 & 1.0000 \\ 0.8792 & -0.3792 \end{bmatrix} \;,\quad \Omega = 1.03\omega_1 = 51.32\ \text{Rad/s}$$

$$M_1 = \{\phi\}_1^T [m] \{\phi\}_1 = 3.319\,m \;,\quad M_2 = 1.4314\,m$$

$$K_1 = \{\phi\}_1^T [K] \{\phi\}_1 = 4.1212\,K \;,\quad K_2 = 5.3798\,K$$

$$\{P(t)\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P_0 \cos\Omega t \end{Bmatrix} \;,\quad \{\phi\}_1^T \{P(t)\} = P_1 = 0.8792\,P_0 \cos\Omega t$$

$$\{\phi\}_2^T \{P(t)\} = P_2 = -0.3792\,P_0 \cos\Omega t$$

$$\ddot{q}_i + 2\xi_i \omega_i \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = \frac{P_i}{M_i}$$

$$\{u\} = [\Phi]\{q\} = \sum_{i=1}^{2} \{\phi\}_i q_i$$

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{Bmatrix} 2.9008 \\ 2.5500 \end{Bmatrix} \frac{P_0}{K} \cos(\Omega t - 2.5468)}_{\text{اثر مود اول}} -$$

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} 0.1084 \\ -0.0411 \end{Bmatrix} \frac{P_0}{K} \cos(\Omega t - 0.0364)}_{\text{اثر مود دوم}}$$