جزوه دینامیک

استاد: جناب آقای دکتر صادق اعتدالی

به نوشته ی محمد حسین سلیمانی

تنظیم : افشین طاهری

ترم دوم ۸۹ - ۱۳۸۸

Subject : بنام خدا
Year. Month. Date.

جلسه اول

تعریف علم مکانیک :

علمی است که اجسام را در وضعیت سکون و یا حرکت تحت تأثیر نیروها مورد بررسی و تحلیل می‌کند.

علم مکانیک به سه قسمت زیر تقسیم می‌شود.

۱- مکانیک اجسام صلب { الف) استاتیک (ایستایی) ← جسم ساکن است.
ب) دینامیک (پویایی) ← جسم متحرک است.

۲- مکانیک اجسام شکل‌پذیر

۳- مکانیک شاره‌ها (سیالات)

مفاهیم و اصول پایه :

مفاهیم بنیادی که در مکانیک به کار برده می‌شوند عبارتند از فضا، زمان، جرم و نیرو.

فضا : عبارت است از ناحیه‌ای هندسی که واقعه فیزیکی در درون آن اتفاق می‌افتد.

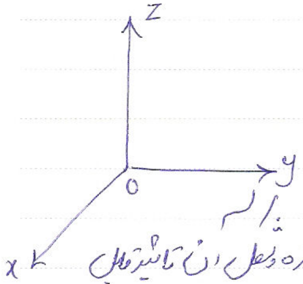
زمان : وسیله سنجش توالی وقایع فیزیکی است و واحد آن ثانیه می‌باشد.

جرم : سنجش کمی نیروی اینرسی که با نیروی جاذبه ثقل رابطه مستقیم دارد.

نیرو : عمل یک جسم بر جسم دیگر را نیرو می‌نامند؛ که دو جسم یا در تماس با یکدیگرند یا با هم تماس ندارند.

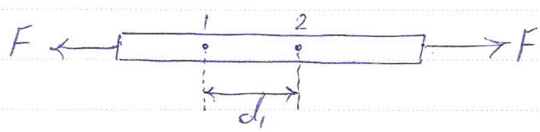
اینرسی: توانایی یک جسم برای مقاومت در برابر تغییر حرکت است.

دستگاه مرجع: یک سیستم مختصات ثابت است که حرکت نسبت به آن سنجیده می‌شود. خود حرکت نمی‌کند و در نقطه مرجع استوار است.



ذره مادی: نقطه بسیار کوچکی از ماده که در تغییر جهت نیرو، شکل ایجاد نمی‌کند و اندازه و شکل آن تاثیر قابل ملاحظه‌ای در حل مسئله ندارد.

جسم صلب: جسمی که فاصله نقاط آن در طول حرکت ثابت است یعنی جسم کشیده یا فشرده نمی‌شود.



منظور از بررسی سینماتیک، بررسی پارامترهای حرکت (موقعیت، سرعت، شتاب) بدون در نظر گرفتن عامل آن است.

منظور از بررسی سینتیک، بررسی عوامل بوجود آورنده حرکت یعنی نیروها باشد.

Subject :
Year. Month. Date.

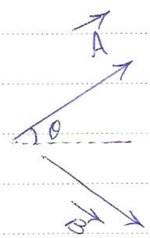
سیستم واحدهای اندازه گیری:

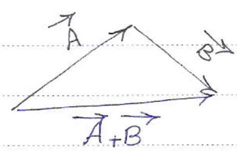
	زمان	طول	جرم
بین المللی (SI)	sec	m	kg
انگلیسی (FPS)	sec	ft	Lb

کمیت ها بر دو نوع اند:

۱- کمیت های عددی که فقط مقدار دارند، مانند: جرم، زمان و ...

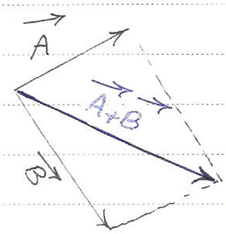
۲- کمیت های برداری که علاوه بر مقدار جهت نیز دارند.



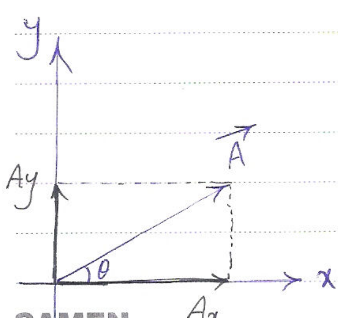


جمع برداری دو بردار:

روش ترسیمی
- ۱- روش مثلث
- ۲- روش متوازی الاضلاع



تجزیه بردارها در حالت دو بعدی



$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j}$$

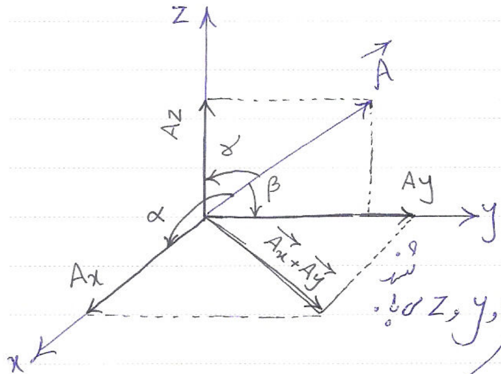
$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

SAMEN

$A_x = |A| \cos\theta$

$A_y = |A| \sin\theta$

$\tan\theta = \dfrac{A_y}{A_x} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\dfrac{A_y}{A_x}$



تجزیه بردار در فضای سه بعدی :

$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$

α و β و γ زوایای بردار A با جهت مثبت محور x و y و z می باشد.

$A_x = |A| \cos\alpha$

$A_y = |A| \cos\beta$

$A_z = |A| \cos\gamma$

$|A| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

$\vec{e}_A = \cos\alpha\,\hat{i} + \cos\beta\,\hat{j} + \cos\gamma\,\hat{k}$

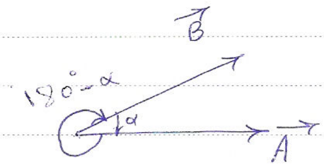
بردار واحد بردار $\vec{A}$ = $\vec{e}_A$

$\vec{e}_A = \dfrac{A}{|\vec{A}|}$

ضرب:

- اسکالر × اسکالر $3\times 5=15$
- اسکالر × بردار $C\vec{A}=\vec{B}$ ← اسکالر
- حاصلضرب برداری ←
  - حاصلضرب داخلی $\vec{A}\cdot\vec{B}$ ← عدد
  - حاصلضرب خارجی $\vec{A}\times\vec{B}$ ← بردار

حاصلضرب داخلی دو بردار



$$\vec{A}\cdot\vec{B}=|A||B|\cos\alpha$$

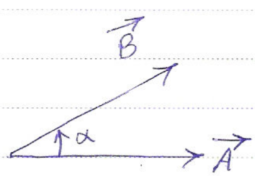
$$i\cdot i=j\cdot j=k\cdot k=1$$
$$i\cdot j=j\cdot k=i\cdot k=0$$

$$\vec{A}=A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k}$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$$

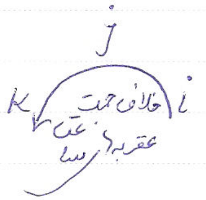
$$\vec{B}=B_x\vec{i}+B_y\vec{j}+B_z\vec{k}$$

حاصلضرب خارجی دو بردار



$$\vec{A}\times\vec{B}=|A||B|\sin\alpha=-(\vec{B}\times\vec{A})$$

حاصلضرب خارجی بردارهای یکه : $\vec i$ و $\vec j$ و $\vec k$



$\vec i \times \vec j = \vec k$ $\qquad$ $\vec i \times \vec k = -\vec j$

$\vec j \times \vec i = -\vec k$ $\qquad$ $\vec k \times \vec i = \vec j$

$\vec j \times \vec k = \vec i$ $\qquad$ $\vec k \times \vec j = -\vec i$

$\vec A = A_x\vec i + A_y\vec j + A_z\vec k$

$\vec B = B_x\vec i + B_y\vec j + B_z\vec k$

$$\vec A \times \vec B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec A \times \vec B = +(A_yB_z - A_zB_y)\vec i - (A_xB_z - A_zB_x)\vec j + (A_xB_y - A_yB_x)\vec k$$

بنام خدا

جلسه دوم

مشتق توابع برداری:

مشتق توابع برداری همواره یک بردار است.

$3\vec i + 4\vec j + 5\vec k$

تابع برداری : $f(t)\vec i + g(t)\vec j + h(t)\vec k$

فرض کنید که بخواهیم مشتق تابع برداری P نسبت به متغیر زمان (t) باشد، در این صورت اگر $\vec P = P_x\vec i + P_y\vec j + P_z\vec k$

آنگاه:

$$\frac{d\vec P}{dt} = \frac{dP_x}{dt}\vec i + \frac{dP_y}{dt}\vec j + \frac{dP_z}{dt}\vec k = \dot{\vec P}$$

4 $\rightarrow \vec P$ آهنگ تغییر بردار

$$\Rightarrow \vec{\dot P} = \dot P_x \vec i + \dot P_y \vec j + \dot P_z \vec k$$

$$\frac{d(P.Q)}{dt} = \frac{dP}{dt}.Q + P.\frac{dQ}{dt} \xrightarrow{\text{چون}}$$ تابع برحسب t

$$\frac{d(P\times Q)}{dt} = \frac{dP}{dt}\times Q + P\times\frac{dQ}{dt} \xrightarrow{\text{چون}}$$ تابع برداری برحسب $\vec i, \vec j, \vec k$

به عنوان مثال، مشتق تابع برداری A نسبت به زمان بصورت زیر نوشته می‌شود

$$\vec A = t^2(\sin 3t\,\vec i - \cos 3t\,\vec j) = (t^2\sin 3t)\vec i + (-t^2\cos 3t)\vec j$$

$$\frac{dA}{dt} = (2t\sin 3t + 3t^2\cos 3t)\vec i + (3t^2\sin 3t - 2t\cos 3t)\vec j$$

مثال:

$$\vec A = 5t\vec i + 8\vec j$$

$$\vec B = 3t^2\vec i + 4t^2\vec j$$

$$\vec A.\vec B = 15t^3 + 32t^2 \longrightarrow \frac{d(\vec A.\vec B)}{dt} = 45t^2 + 64t$$

$$\frac{d(\vec A.\vec B)}{dt} = \frac{d\vec A}{dt}.\vec B + \vec A.\frac{d\vec B}{dt} = (5\vec i)(3t^2\vec i + 4t^2\vec j) + (5t\vec i + 8\vec j)(6t\vec i + 8t\vec j)$$

$$= 15t^3 + 32t^2$$

$$\vec A\times\vec B = (20t^3 - 24t^2)\vec k$$

$$\frac{d(\vec A\times\vec B)}{dt} = (60t^2 - 48t)\vec k$$

$$\frac{d(\vec{A}\times\vec{B})}{dt} = \frac{d\vec{A}}{dt}\times\vec{B} + \vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{dt}$$

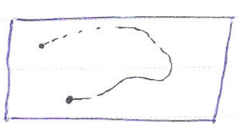
فصل اول: سینماتیک ذره مادی

یک ذره مادی، دو شکل حرکتی دارد، حرکت مستقیم الخط و حرکت منحنی (صفحه‌ای و فضایی)

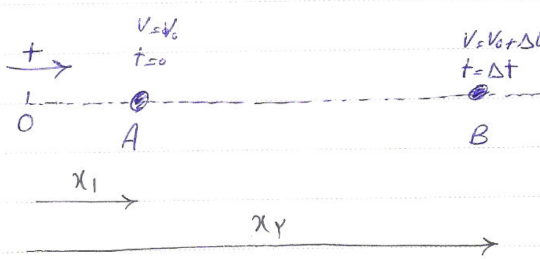
حرکتی که جسم بر روی یک مسیر راست دارد را حرکت مستقیم الخط گویند. مانند حرکت روی یک سطح شیبدار.

هرگاه حرکت یک جسم روی یک مسیر منحنی باشد، حرکت منحنی الخط خواهد بود. در اینصورت اگر در تمامی زمان‌ها حرکت، قیود صفحه‌ای را در نظر بگیریم که در آن موقعیت جسم در طول کل حرکت در آن صفحه انجام شود حرکت صفحه‌ای و در غیر اینصورت، حرکت فضایی است.

در حل مسائل ابتدا باید نقطه مرجع را تعیین نمود. انتخاب نقطه مرجع اختیاری است. ولی در طول حل مسئله نباید آن را تغییر دهیم. سپس باید جهت مثبت حرکت را تعیین کنیم.



حرکت مستقیم الخط ذره مادی:



سرعت متوسط $\overrightarrow{\bar{v}_{ave}} = \frac{\overrightarrow{\Delta x}}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{\Delta t}$

سرعت لحظه‌ای $\vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = \vec{\dot{x}}$

$$\Rightarrow \vec{V} = \frac{\overrightarrow{dx}}{dt} = \vec{\dot{x}}$$

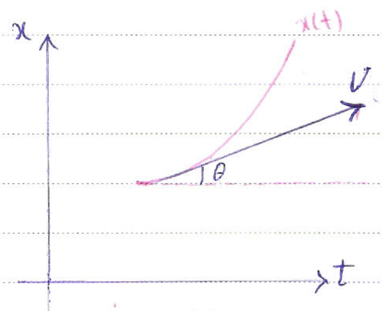
شتاب متوسط : $\bar{a}_{ave} = \frac{\overrightarrow{\Delta V}}{\Delta t}$

شتاب لحظه‌ای : $\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \vec{\ddot{x}}$

$$\Rightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dV}{dx} \times \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{V} = V\frac{dV}{dx}$$

بررسی تفاسیر نمودار و منحنی های حرکت :

1)



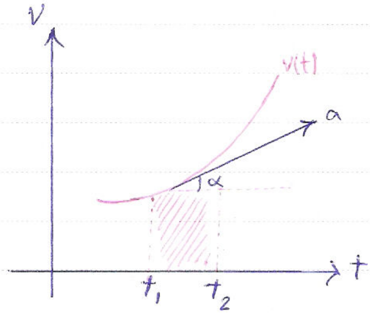
نمودار جابجایی - زمان

$V = \frac{dx}{dt} = \tan\theta$

$V(t) = \frac{dx}{dt} \to dx = V dt$

$$\to \int_{x_1}^{x_2} dx = \int_{t_1}^{t_2} V(t)\,dt \to x_2 - x_1 = \int_{t_1}^{t_2} V(t)\,dt$$

۲)



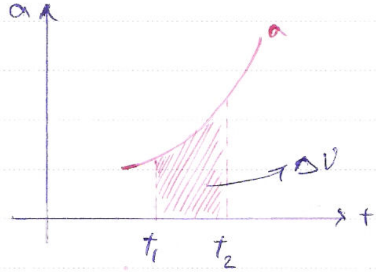
نمودار سرعت - زمان

$$a(t)=\frac{dv}{dt} \quad , \quad a=\frac{dv}{dt}=\tan\alpha$$

$$\Rightarrow \int_{v_1}^{v_2} dv = \int_{t_1}^{t_2} a(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \Delta v = v_2 - v_1 = \int_{t_1}^{t_2} a(t)\,dt$$

۳)



نمودار شتاب - زمان

۲) به عبارت دیگر Δx (تغییرات جابجایی) برابر است با مساحت محصور بین منحنی v و محور زمان در فواصل زمانی t_1 و t_2.

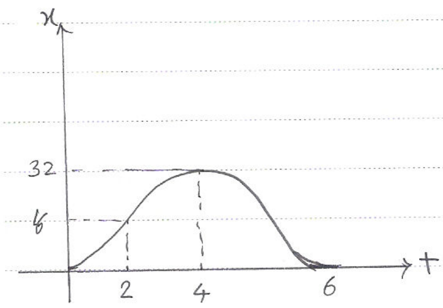
۳) به عبارت دیگر Δv (تغییرات سرعت) برابر است با مساحت محصور بین منحنی شتاب و محور زمان در فواصل زمانی t_1 و t_2.

مثال: ذره‌ای با معادله مکان $x = 6t^2 - t^3$، روی خط راست حرکت می‌کند. مطلوبست معادله‌های سرعت و شتاب و رسم منحنی‌های حرکت.

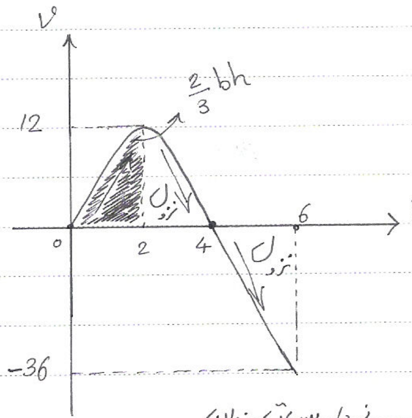
$$x = 6t^2 - t^3$$

$$v = 12t - 3t^2$$

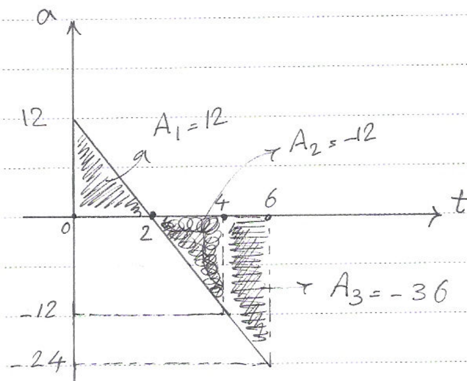
$$a = 12 - 6t$$



نمودار جابجایی - زمان



نمودار سرعت - زمان



نمودار شتاب - زمان

تعیین حرکت یک ذره مادی:

بسته به اینکه شتاب تابع از زمان، تغییرمکان، تابعی از سرعت و یا ثابت باشد، مسئله را دنبال می‌کنیم.

۱- شتاب تابعی از زمان باشد یعنی $a=f(t)$

حال بررسی می‌کنیم دو پارامتر دیگر حرکت یعنی سرعت و جابجا چگونه تغییر می‌کند؟

$$a=f(t)=\frac{dv}{dt} \longrightarrow dv=f(t)dt$$

$$\longrightarrow \int_{v_0}^{v} dv=\int_{t_0=0}^{t} f(t)dt \rightarrow v=v_0+\int_0^t f(t)dt$$

$$v = g(t)\, dt = \frac{dx}{dt} \longrightarrow dx = g(t)\, dt$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t g(t)\, dt \longrightarrow x = x + \int_0^t g(t)\, dt = h(t)$$

۲ـ شتاب تابعی از تغییر مکان باشد یعنی $a = f(x)$

$$a = v \frac{dv}{dx} = f(x) \Rightarrow a\, dx = v\, dv \longrightarrow f(x)\, dx = v\, dv$$

$$\Rightarrow \int f(x)\, dx = \int v\, dv \longrightarrow \frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = \int_{x_0}^{x} f(x)\, dx$$

$$\Rightarrow v^2 = v_0^2 + 2\int_{x_0}^{x} f(x)\, dx = g(x)$$

۳ـ شتاب تابعی از سرعت باشد یعنی $a = f(v)$

$$a = f(v) = \frac{dv}{dt} \longrightarrow dt = \frac{dv}{f(v)} \longrightarrow \int_0^t dt = \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{f(v)} = g(v)$$

$$\Rightarrow t = \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{f(v)} = g(v)$$

$$a = v\frac{dv}{dx} = f(v) \longrightarrow \frac{v\,dv}{f(v)} = dx \longrightarrow \int_{v_0}^{v} \frac{v\,dv}{f(v)} = \int_{x_0}^{x} dx$$

$$\Rightarrow x = x_0 + \int_{v_0}^{v} \frac{v\,dv}{f(v)}$$

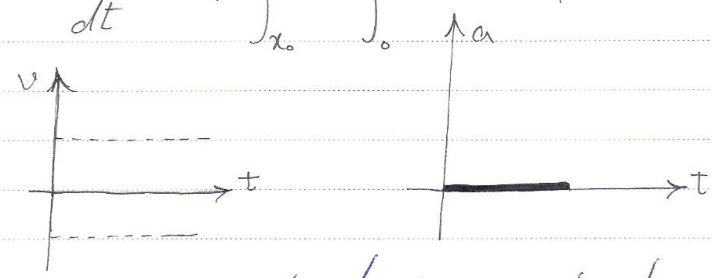
۴- شتاب ثابت ، دو حالت دارد ← الف) شتاب صفر باشد ، $a = 0$

← ب) شتاب ثابت باشد $a_t = a$

الف) شتاب صفر باشد که به این حرکت ، حرکت مستقیم الخط با سرعت یکنواخت گویند.

$$a = 0 \longrightarrow \frac{dv}{dt} = 0 \longrightarrow v = v_0 = cte$$

$$v = \frac{dx}{dt} \longrightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_{0}^{t} v\,dt \longrightarrow x = x + vt$$



ب) شتاب ثابت باشد که به این حرکت ، حرکت مستقیم الخط با شتاب یکنواخت گوییم.

if $a > 0$ شتاب تندشونده
if $a < 0$ شتاب کندشونده

if $av > 0$ حرکت تندشونده
if $av < 0$ حرکت کندشونده

شرایط اولیه : $t=0$ ، $V=V_0$ ، $x=x_0$

$$a=\frac{dv}{dt}\longrightarrow\int_{v_0}^{v}dv=\int_{0}^{t}\underbrace{a}_{\text{ثابت}}\,dt\longrightarrow v=at+v_0$$

$$v=\frac{dx}{dt}\longrightarrow\int_{x_0}^{x}dx=\int_{t_0=0}^{t}v\,dt\longrightarrow\int_{x_0}^{x}dx=\int_{t=0}^{t}(at+v_0)\,dt$$

$$\Rightarrow x-x_0=\frac{1}{2}at^2+v_0t\Rightarrow x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0$$

$$a=v\frac{dv}{dx}\longrightarrow\int_{x_0}^{x}a\,dx=\int_{v_0}^{v}v\,dv\longrightarrow a(x-x_0)=\frac{v^2}{2}-\frac{v_0^2}{2}$$

$$\Rightarrow v^2-v_0^2=2a(x-x_0)$$

بنام خدا :

جلسه سوم

حل چند مثال :

- در یک نوع بعضی از تفنگ‌ها رابطه $a=-kv$ که رابطه بین سرعت و شتاب پیستون و لوله تفنگ می باشد برقرار است :

الف) v برحسب t ب) x برحسب t ج) v برحسب x

$$v=\frac{dx}{dt} \quad , \quad a=\frac{dv}{dt} \quad , \quad a=\frac{v\,dv}{dx}$$

$$a=-kv=\frac{dv}{dt}$$

$$\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v}=\int_0^t -k\,dt \longrightarrow \ln v-\ln v_0=-kt \Rightarrow \ln\frac{v}{v_0}=-kt$$

$$\Rightarrow v=v_0e^{-kt}$$ الف

$$v=\frac{dx}{dt}=v_0e^{-kt} \longrightarrow \int_0^x dx=\int_0^t v_0e^{-kt}\,dt \Rightarrow x=v_0\left(-\frac{1}{k}e^{-kt}\right)\Big|_0^t$$

$$\Rightarrow x=\frac{v_0}{k}\left(1-e^{-kt}\right)$$ ب

$$a=-kv$$

$$a=\frac{v\,dv}{dx} \Rightarrow -kv=\frac{v\,dv}{dx} \Rightarrow v=v_0-kx$$

بررسی صحت محاسبات:

$$\begin{cases} V = V_0 e^{-kt} \longrightarrow e^{-kt} = \dfrac{V}{V_0} \\ x = \dfrac{V}{k}\left(1 - e^{-kt}\right) \xrightarrow{(2)} x = \dfrac{V}{k}\left(1 - \dfrac{V}{V_0}\right) = \dfrac{V_0}{k} - \dfrac{V}{k} \end{cases}$$

(1)

$$\Rightarrow V = V_0 - kx$$

* مثال: ذره‌ای بر روی خط راست با رابطه $x = t^3 - 6t^2 - 15t + 40$ توصیف می‌شود. (ft، sec)

الف) سرعت ذره در چه زمانی صفر است؟

ب) در این لحظه ذره در کجاست و چه مسافتی را پیموده است؟

ج) شتاب ذره در این لحظه چقدر است؟

د) ذره در فاصله زمانی 4 تا 6 ثانیه چه مسافتی را پیموده است؟

$$V = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 12t - 15$$

$$a = \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = 6t - 12$$

الف: $V = 0 \longrightarrow 3t^2 - 12t - 15 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = -1\,sec \quad \times \\ t = 5\,sec \end{cases}$$

ب) $x_{(t=5)} = -60\,ft$

برای تعیین مسافت ابتدا باید مشخص کنیم ذره در چه جهتی حرکت می‌کند. برای این کار لازم است ابتدا v را تعیین علامت کنیم.

$V = 3t^2 - 12t - 15$

	-1	sec	5	
موافق علامت a		مخالف علامت a		موافق علامت a
		$-$		$+$

$\Rightarrow$ if $\quad 0<t<5 \Rightarrow V<0$

$\Rightarrow$ if $\quad t>5 \Rightarrow V>0$

$\Rightarrow$ مسافت طی شده $= -60 - 40 = -100^{ft}$

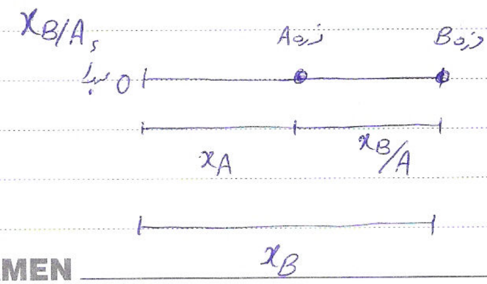
$$4 \leq t < 5 \;\; V<0 \begin{cases} x_5 = -60 \\ x_4 = -52 \end{cases} \longrightarrow \text{مسافت طی شده} = x_5 - x_4 = -8^{ft}$$

مسافت کل $= -50 + 60 = 10^{ft}$

$$5 \leq t \leq 6 \;\; V>0 \begin{cases} x_6 = -50 \\ x_5 = -60 \end{cases} \longrightarrow \text{مسافت طی شده} = |-8| + |10| = 18^{ft}$$

حرکت چندین ذره:

دو ذره A و B را در نظر بگیرید که روی یک خط راست حرکت می‌کنند. اگر با انتخاب مبدأ O، مختصات B,A را با x_A و x_B نمایش دهیم، آنگاه مختصه مکانی نسبی B نسبت به A را با $x_{B/A}$ نمایش می‌دهند.



$$x_{B/A} = x_B - x_A \quad \text{یا} \quad x_B = x_A + x_{B/A}$$

مشتق ↓

$$V_{B/A} = V_B - V_A \quad \text{یا} \quad V_B = V_A + V_{B/A}$$

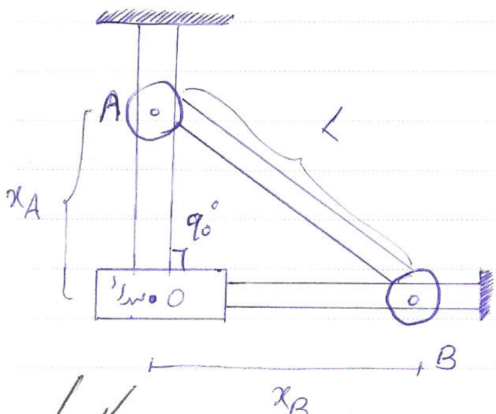
مشتق ↓

$$a_{B/A} = a_B - a_A \quad \text{یا} \quad a_B = a_A + a_{B/A}$$

حرکت‌های وابسته:

اگر مکان یک ذره به مکان ذره یا ذره‌های دیگر بستگی داشته باشد. به چنین حرکتی، حرکت وابسته گویند.

مثال:



رابطه وابستگی حرکت

$$x_A^2(t) + x_B^2(t) = L^2$$

مشتق ↓

$$2x_A(t)\frac{dx_A}{dt} + 2x_B(t)\frac{dx_B}{dt} = 0$$

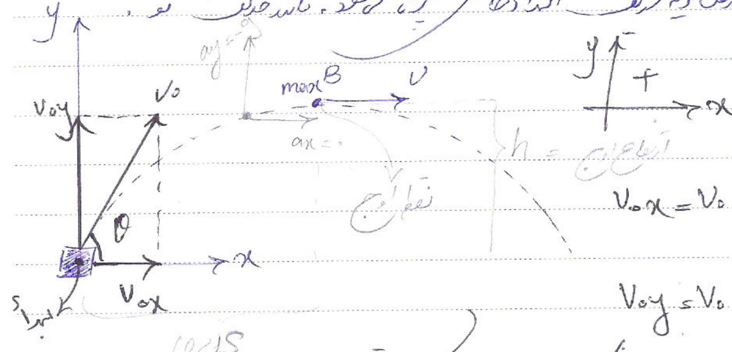
$$\Rightarrow x_A V_A + x_B V_B = 0 \longrightarrow \text{رابطه وابستگی سرعت}$$

$$\frac{dx_A}{dt} v_A + x_A \frac{dv_A}{dt} + \frac{dx_B}{dt} v_B + x_B \frac{dv_B}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow v_A^2 + v_B^2 + x_A a_A + x_B a_B = 0$$

حرکت منحنی الخط ذره های در صفحه:

هرگاه ذره ای روی مسیری غیر از خط راست حرکت کند، حرکت منحنی الخط است. نمونه ای از این حرکت‌ها، حرکت پرتابی است که در آن، جسم با یک سرعت اولیه در یک امتداد خاص پرتاب می شود. مانند حرکت توپ.



$V_{ox} = V_o \cos\theta$ $\quad a_x = 0$

$V_{oy} = V_o \sin\theta$ $\quad a_y = -g$

$a_x = 0 \Rightarrow$ حرکت در راستای x، حرکت با سرعت ثابت است.

$a_y = -g \Rightarrow$ در راستای y، حرکت با شتاب ثابت است.

شرایط اولیه: $t=0 \longrightarrow x=0$

$\qquad\qquad\qquad\searrow y=0$

حرکت در راستای افقی :

$$a_x = 0 \longrightarrow \frac{dv}{dt} = 0 \longrightarrow v_x = cte \Rightarrow \boxed{v_x = V_0 \cos\theta}$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} \longrightarrow (V_0 \cos\theta)\, dt = dx \Rightarrow x = (V_0 \cos\theta)\, t$$

$$a_y = -g \longrightarrow a_y = \frac{dv_y}{dt} \longrightarrow \int_{V_0 \sin\theta}^{v_y} dv_y = \int_0^t -g\, dt$$

$$\Rightarrow \boxed{v_y = V_0 \sin\theta - gt}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} \longrightarrow \int_0^y dy = \int_0^t v_y\, dt = \int_0^t (V_0 \sin\theta - gt)\, dt$$

$$\Rightarrow \boxed{y = (V_0 \sin\theta)\, t - \frac{1}{2} g t^2}$$

در نقطه B :

$$v_y = 0 \longrightarrow V_0 \sin\theta - gt = 0 \Rightarrow \boxed{t = \frac{V_0 \sin\theta}{g}} \longrightarrow$$ زمان اوج

S در راستای x : $x = (V_0 \cos\theta)\, t \Rightarrow S = (V_0 \cos\theta)\left(\frac{V_0 \sin\theta}{g}\right)$

$$\Rightarrow \boxed{S = \frac{V_0^2 \sin 2\theta}{2g}}$$

y در راستای h: $y=-\frac{1}{2}gt^2+(V_0\sin\theta)t$

$$\Rightarrow \boxed{h=\frac{V_0^2}{2g}\sin^2\theta}$$

معادله مسیر حرکت:

* ثابت کنید معادله حرکت پرتابه سهمی است!

$y=f(x)$

$y=-\frac{1}{2}gt^2+(V_0\sin\theta)t$

$x=(V_0\cos\theta)t \longrightarrow t=\frac{x}{V_0\cos\theta}$

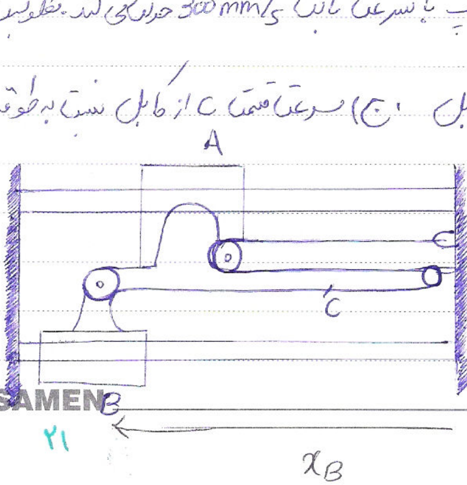
$$y=x\tan\theta-\frac{1}{2}g\frac{x^2}{V_0^2\cos^2\theta} \longrightarrow \boxed{y=x\tan\theta-\frac{1}{2}g\frac{x^2}{V_0^2}\sec^2\theta}$$

بنام خدا

جلسه چهارم

مثال: در وضعیت نشان داده شده طوقه B به سمت چپ با سرعت ثابت 300 mm/s حرکت می‌کند. مطلوبست

الف) سرعت طوقه A ، ب) سرعت قسمت C از کابل ، ج) سرعت قسمت C از کابل نسبت به طوقه B



$L=cte$

$\Rightarrow 2x_A+x_B+x_B-x_A=L=cte$

$\Rightarrow x_A+2x_B=l$

$\xrightarrow{\text{مشتق‌گیری}}$ $x_A + 2x_B = 0 \Rightarrow V_A + 2V_B = 0$

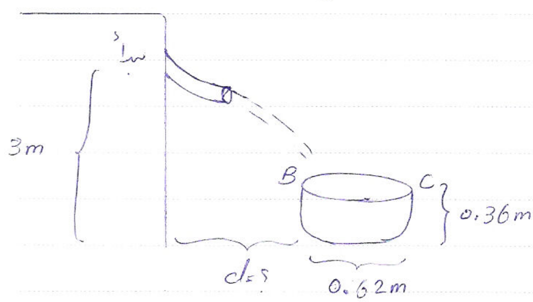
الف) $V_A = -2V_B = -600\ mm/s$

ب) $2x_A + x_C = cte$

$2V_A + V_C = 0 \longrightarrow V_C = -2V_A = 1200\ mm/s$

c) $V_{C/B} = V_C - V_B = 1200 - 300 = 900\ mm/s$

* مثال: از یک ناودان آب با سرعت اولیه $0.76\ m/s$ و با زاویه 15° نسبت به افق پایین می‌ریزد. محدوده مقادیر d را طوری تعیین کنید که آب داخل ظرف BC بریزد. (باید آب بین نقطه B و C فرود بیاید)



در راستای افق $d = d + 0.62$

در فاصله قائم $3 - 0.36 = 2.64$

حرکت قائم:

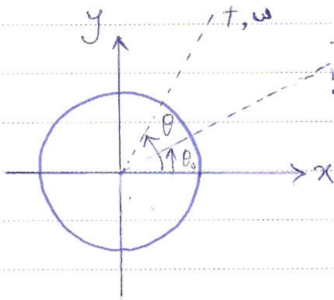
$$\begin{cases} y = y_0 + (v_{0y})t - \frac{1}{2}gt^2 \\ v_{0y} = -V_0 \sin 15^\circ = -0.76 \sin 15^\circ \\ \quad = -0.19670\ m/s \end{cases}$$

$y-y_0=3-0.36=2.64$

$4.905t^2+0.1967t-2.64=0 \rightarrow \begin{cases} t=0.7139 ✓ \\ t=-\infty ✗ \end{cases}$

حرکت افقی:

$x=(V_{0x})t=(V_0\cos 15^\circ)t=0.524\,m \Rightarrow \boxed{d<0.524\,m}$



حرکت ذره مادی بر روی مسیر دایره‌ای شکل:

ذره در لحظه $t=0$ با سرعت زاویه‌ای ω_0 در موقعیت θ_0 قرار دارد، و در لحظه t با سرعت زاویه‌ای ω در موقعیت θ قرار دارد.

سرعت زاویه‌ای $\vec{\omega}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=\frac{d\vec{\theta}}{dt}=\dot{\vec{\theta}} \Rightarrow \vec{\omega}=\dot{\vec{\theta}}$

شتاب زاویه‌ای $\vec{\alpha}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta t}=\frac{d\vec{\omega}}{dt}=\dot{\vec{\omega}}=\ddot{\vec{\theta}} \Rightarrow \vec{\alpha}=\dot{\vec{\omega}}=\ddot{\vec{\theta}}$

$\alpha=\frac{d\omega}{dt}=\frac{d\omega}{d\theta}\times\frac{d\theta}{dt}=\omega\frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \boxed{\alpha=\omega\frac{d\omega}{d\theta}}$

که شبیه همین پارامترهای حرکت خطی یعنی x، v، a می‌باشد. لذا روابط بین برای حالتهای مختلف زیر:

۱) $\alpha(t)$: α تابعی از زمان

۲) $\alpha(\omega)$: α تابعی از سرعت زاویه‌ای

۳) $\alpha(\theta)$: α تابعی از جابجایی زاویه‌ای

۴) $\alpha = 0$: سرعت زاویه‌ای ثابت

۵) $\alpha = cte$: شتاب زاویه‌ای یکنواخت

با یک ۳ ترا کنترل امکان پذیر.

به عنوان مثال (حالت 5)

$a \longrightarrow \alpha$

$v \longrightarrow \omega$

$x \longrightarrow \theta$

$$\alpha = cte \begin{cases} \theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t + \theta_0 \\ \omega = \omega_0 + \alpha t \\ 2\alpha(\theta - \theta_0) = \omega^2 - \omega_0^2 \end{cases}$$

	جابجایی	سرعت	شتاب
حرکت مستقیم الخط دو بعدی	$\vec{x}$	$\vec{V} = \dot{\vec{x}}$	$\vec{a} = \dot{\vec{V}} = \ddot{\vec{x}}$
حرکت زاویه‌ای	$\vec{\theta}$	$\vec{\omega} = \dot{\vec{\theta}}$	$\vec{\alpha} = \dot{\vec{\omega}} = \ddot{\vec{\theta}}$

مثال: حرکت زاویه‌ای عضوی از یک مکانیزم، چنان برنامه‌ریزی شده که میزان تغییرات سرعت زاویه‌ای به جابجایی زاویه‌ای برابر ثابت k است. در شرایط اولیه $t=0$، مقادیر θ صفر است و $\omega = \omega_0$، مطلوبست تعیین θ، ω و α برحسب زمان؟

$$\frac{\dot{\omega}}{\theta} = k \longrightarrow \frac{\ddot{\theta}}{\theta} = k \longrightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} - k\theta = 0$$

معادله دیفرانسیل

$$\begin{cases} t = 0 \\ \theta = 0 \\ \omega = 0 \end{cases} \qquad \theta = C_1 e^{\sqrt{k}t} + C_2 e^{-\sqrt{k}t}$$

$$\omega = \dot{\theta} = C_1\sqrt{k}\, e^{\sqrt{k}t} - C_2\sqrt{k}\, e^{-\sqrt{k}t}$$

شرایط اولیه $t=0$:

$$\begin{cases} \theta = 0 \longrightarrow C_1 + C_2 = 0 \\ \omega = \omega_0 \longrightarrow \omega_0 = C_1\sqrt{k} - C_2\sqrt{k} \Rightarrow C_1 - C_2 = \dfrac{\omega_0}{\sqrt{k}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = \dfrac{\omega_0}{2\sqrt{k}} \\ C_2 = \dfrac{-\omega_0}{+2\sqrt{k}} \end{cases}$$

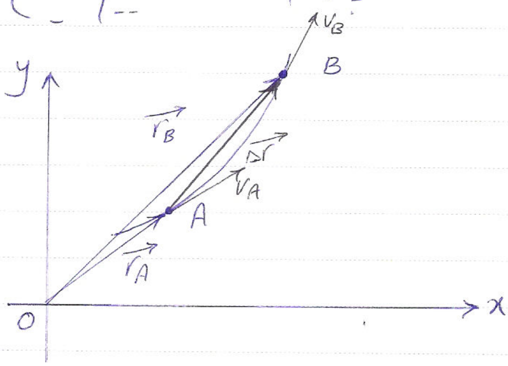
$$\theta = \frac{\omega_0}{2\sqrt{k}}\left(e^{\sqrt{k}t} - e^{-\sqrt{k}t}\right) = \frac{\omega_0}{\sqrt{k}} \sinh(\sqrt{k}\,t)$$

$$\omega = \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \omega_0 \,\mathrm{Ch}(\sqrt{k}\,t)$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = +\omega_0 \sqrt{k}\, \mathrm{Sinh}(\sqrt{k}\,t)$$

حرکت منحنی الخط یک ذره مادی :

اگر یک ذره مادی روی یک مسیر منحنی الخط حرکت کند به چنین حرکتی منحنی الخط گوییم. در این حرکت بردار سرعت مماس بر مسیر حرکت است.



$$\begin{cases} \vec{\Delta r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A \\ \vec{v}_{ave} = \dfrac{\vec{\Delta r}}{\Delta t} \\ v_t = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\vec{\Delta r}}{\Delta t} = \dfrac{dr}{dt} = \dot{\vec{r}} \end{cases}$$

مشتق تابع برداری

$$\begin{cases} \vec{a}_{ave} = \dfrac{\vec{\Delta v}}{\Delta t} \\ a(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\vec{\Delta v}}{\Delta t} = \dfrac{\vec{dv}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} \end{cases}$$

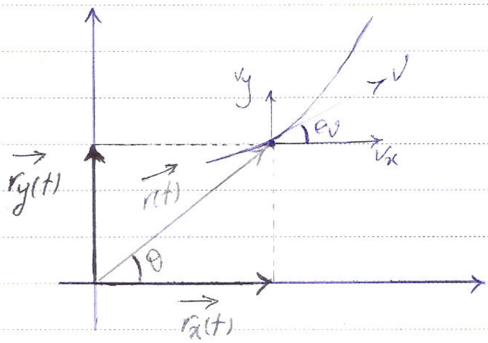
برای بررسی حرکت منحنی الخط در صفحه می توان از سه دستگاه مختصات استفاده کرد.

۱- دستگاه مختصات کارتزین (x - y)

۲- دستگاه مختصات عمود و مماس (T , N)

۳- دستگاه مختصات قطبی (شعاع و عمود بر شعاع)
$r \qquad \theta$

دستگاه مختصات کارتزین :



$$r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2}$$

$$\tan\theta = \frac{r_y}{r_x}$$

$$\vec{r} = \overrightarrow{r_x(t)\,i} + \overrightarrow{r_y(t)\,j} \xrightarrow{\text{مشتق}} \vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} \\ v_x = \dot{r}_x \\ v_y = \dot{r}_y \end{cases} \Rightarrow |v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad , \quad \tan\theta_v = \frac{v_y}{v_x}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(v_x(t)\vec{i} + v_y(t)\vec{j}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} \\ a_x = \dot{v}_x = \ddot{r}_x & |a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \\ a_y = \dot{v}_y = \ddot{r}_y & \tan\theta_a = \frac{a_y}{a_x} \end{cases}$$

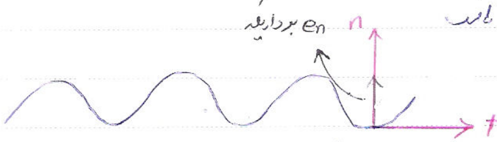
نمودارش مثل : حرکت پرتابی است.

به نام خدا

جلسه پنجم

۲- دستگاه عمودی و مماسی (t, n)

فرض کنیم یک متحرک روی مسیر منحنی حرکت کند در هر نقطه می توان مماسی بر آن رسم کرد که آن را t و در همان نقطه می توان عمودی رسم کرد که آن را n می نامند

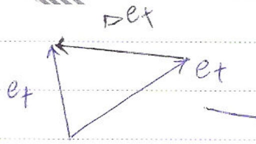


* در این دستگاه سرعت تنها در راستای t مولفه دارد زیرا چون سرعت مماس بر مسیر حرکت است

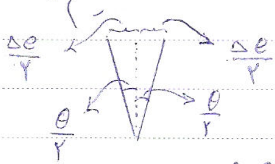
بردار سرعت $\vec{V}(t) = V(t) \cdot \vec{e_t}$

بردار شتاب $\vec{a} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv(t)}{dt} \cdot \vec{e_t} + \frac{v \cdot \vec{e_t}}{dt}$

اثبات :

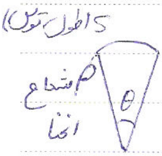


e_t ثابت به زمان تغییر می‌کند و می‌تواند در ۲ جهت حرکت کند و در اثر وصل کردن به Δe_t. تشکیل یک مثلث متساوی‌الساقین را می‌دهد که نیمساز عمود منصف نیز است.



$$\sin\frac{\Delta\theta}{2} = \frac{\frac{\Delta e_t}{2}}{e_t} \longrightarrow \Delta e_t = 2 e_t \sin\frac{\Delta\theta}{2}$$

$$\lim \frac{\Delta e_t}{\Delta\theta} = \frac{de_t}{d\theta} = \lim \frac{2 e_t \sin \Delta\theta/2}{\Delta\theta} = 1 \quad ①$$



$$s = \rho\theta \Rightarrow ds = \rho\, d\theta \Rightarrow \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\rho} \quad (2)$$

قاعده زنجیره‌ای : $\frac{de_t}{dt} = \frac{de_t}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$ (۳)

$$1,2,3 \Rightarrow \vec{e_n} \times \frac{1}{\rho} \times v = \frac{v}{\rho} e_n$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{e_t} + \frac{v^2}{\rho} e_n \Rightarrow \begin{cases} a_n = \frac{v^2}{R} & (R \text{ شعاع انحنا}) \\ a_t = \frac{dv}{dt} \end{cases}$$

$$\vec{a} = a_n \vec{e_n} + a_t \vec{e_t}$$

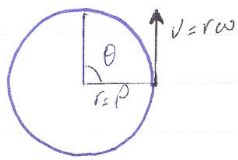
مؤلفه‌های بردار در دستگاه عمودی و مماسی

$$\Rightarrow a=\sqrt{a_n^2+a_t^2}$$

* شتاب جانب مرکز a_n همواره مثبت ($a_n = \frac{v^2}{\rho} > 0$) و جسم را در مسیر منحنی می‌گرداند.

* اگر حرکت ذره بر روی مسیر منحنی الخط با سرعت ثابت انجام شود، آنگاه $a_t=0$ ولی $a_n \neq 0$.

نمونه‌ای از این حرکت، حرکت بر روی مسیر دایره‌ای است.



اثبات:

$$\rho = r = cte$$

$$S=\rho\theta \Rightarrow S=r\theta \Rightarrow \frac{ds}{dt}=r\frac{d\theta}{dt}$$

$$\rightarrow V=r\dot{\theta}=r\omega \Rightarrow \boxed{V=r\omega}$$

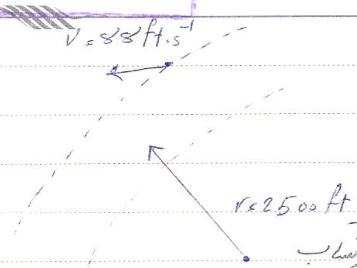
a_n در حرکت دایره‌ای:

$$a_n=\frac{v^2}{\rho}=\frac{(r\dot{\theta})^2}{r} \Rightarrow a_n=r\dot{\theta}^2$$

a_t در حرکت دایره‌ای:

$$a_t=\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}(r\dot{\theta})=r\alpha \Rightarrow a_t=r\ddot{\theta}$$

مثال: راننده اتومبیل در پیچ بزرگراه به شعاع 2500 ft با سرعت $88\ ft.s^{-1}$ حرکت می‌کند. راننده اتومبیل ناگهان ترمز می‌گیرد و سرعت اتومبیل را با آهنگ ثابتی کاهش می‌دهد. با فرض اینکه پس از 8 s سرعت اتومبیل به $66\ ft.s^{-1}$ برسد، شتاب اتومبیل را بلافاصله پس از ترمز تعیین کنید.



$$a_t = a_{VR} = \frac{66 - 88}{8} = -2.75 \ ft.s$$

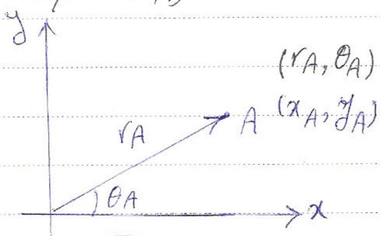
$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{88^2}{2500} = 3.1 \ ft$$

بردار شتاب $\vec{a} = a_n \vec{e}_n + a_t \vec{e}_t = 3.1 \vec{e}_n - 2.75 \vec{e}_t$

$$|a| = \sqrt{3.1^2 + 2.75^2} = 4.13 \ ft.s^{-1}$$

$$\tan\alpha = \frac{a_n}{a_t} = \frac{3.1}{2.75} = 48.4^\circ$$

۳- دستگاه قطبی (r, θ) :



$$r_A = \sqrt{x_A^2 + y_A^2}$$

$$\theta_A = \tan^{-1}\frac{y_A}{x_A}$$

$x_A = r_A \cos\theta_A$

$y_A = r_A \sin\theta_A$

e_r : بردار یکه در راستای شعاع

e_θ : بردار یکه در راستای عمود بر شعاع (چرخش ۹۰° پادساعتگرد)

$\vec{v} = \dot{r} e_r + r\dot{\theta} e_\theta$

$\vec{v} = v_r \vec{e}_r + v_\theta \vec{e}_\theta \Rightarrow$ $\vec{v}_r = \dot{r}$, $\vec{v}_\theta = r\dot{\theta}$

v کل $= \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2}$

$$\tan\alpha = \frac{v_\theta}{v_r}$$

مولفه های بردار شتاب در دستگاه قطبی :

$$a=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\vec{e_r}+(2\dot{r}\dot{\theta}+r\theta)\vec{e_\theta}$$

$$\Rightarrow \quad a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2$$

$$a=a_r\vec{e_r}+a_\theta\vec{e_\theta}$$

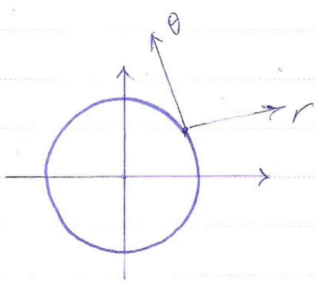
$$a_\theta=2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}$$

$$a_{کل}=\sqrt{a_r^2+a_\theta^2}$$

$$\tan\beta=\frac{a_\theta}{a_r}$$

بررسی حالات خاص قطبی :

حرکت بر روی مسیر دایره ای

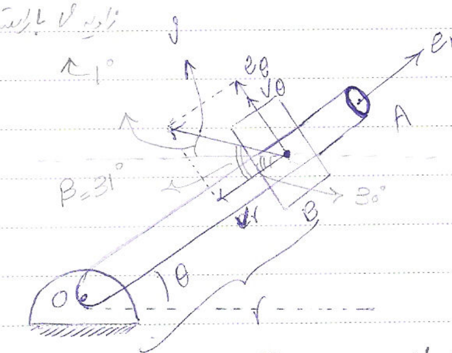


$r=cte$ $\qquad$ $\dot{r}=\ddot{r}=0$

$$\begin{cases} v_r=\dot{r}=0 \\ v_\theta=r\dot{\theta} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a_r=-r\dot{\theta}^2 \\ a_t=r\ddot{\theta} \end{cases}$$

مثال : حرکت دورانی بازوی $OA=0.9m$ حول نقطه O با رابطه $\theta=0.15t^2$ می باشد که در آن θ برحسب رادیان و t برحسب ثانیه است. طوقه B طوری روی بازو می لغزد که فاصله آن از O با رابطه $r=0.9-0.12t^2$ بیان می شود. پس از آنکه بازو به اندازه 30° چرخید مطلوب است :

زاویه V با راستای افق



الف) سرعت حامل طوقه

ب) شتاب حامل طوقه

ج) شتاب طوقه نسبت به بازو

$$\theta = 0.15t^2$$

$$r = 0.9 - 0.12t^2$$

$$\vec{V} = V_r \vec{e_r} + V_\theta \vec{e_\theta}$$

$$\vec{a} = a_r \vec{e_r} + a_\theta \vec{e_\theta}$$

$$\theta = 30^\circ \longrightarrow \theta = 0.524 \text{ rad}$$

$$\theta = 0.15t^2 \longrightarrow 0.524 = 0.15t^2$$

$$\to t = 1.869$$

$$\begin{cases} V_r = \dot{r} \\ V_\theta = r\dot{\theta} \end{cases} \qquad \begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \end{cases}$$

$$\theta = 0.15t^2 \longrightarrow \dot{\theta} = 0.3t \longrightarrow \ddot{\theta} = 0.3$$

$$r = 0.9 - 0.12t^2 \longrightarrow \dot{r} = -0.24t \longrightarrow \ddot{r} = -0.24$$

الف)

$$\begin{cases} V_r = -0.449 \\ V_\theta = 0.481(0.561) = 0.270 \end{cases}$$

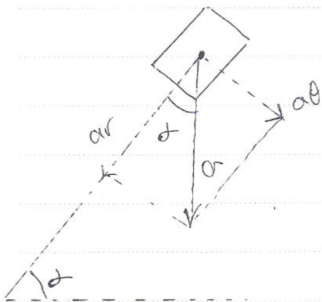
$$\vec{V} = -0.449\vec{e_r} + 0.27$$

$$|\vec{V}| = \sqrt{V_r^2 + V_\theta^2} = 0.524 \quad , \quad \beta = \tan^{-1}\frac{V_\theta}{V_r} = 31^\circ$$

ب)

$$\begin{cases} a_\theta = 0.481(0.3) + 2(-0.449)(0.561) = -0.359 \\ a_r = -0.24 - 0.481(0.561)^2 = -0.391 \end{cases}$$

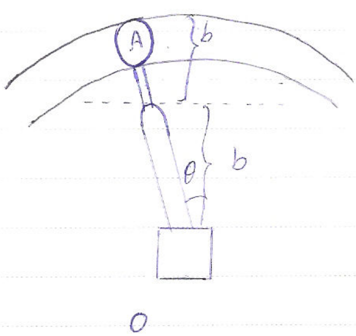
$$\alpha = 42.6^\circ$$

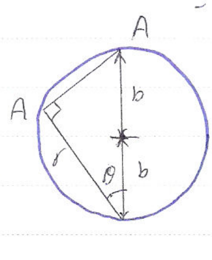


حرکت قطعه نسبت به بازو مستقیم الخط است در راستای بازو و بردار موقعیت نسبت به زمان همان r به t است پس لازم است نسبت به آن دو بار مشتق بگیریم.

$$a_{B/OA} = \ddot{r} = -0.24\,m.s^{-1}$$

مثال: حرکت غلتک A در شکاف مدور ثابت توسط بازوی OA کنترل می‌شود. قسمت فوقانی بازو می‌تواند در لوله تحتانی آن بچرخد تا به موازات تغییر θ، طول OA نیز قابلیت تغییر داشته باشد. اگر در موردی از حرکت بازو، سرعت زاویه‌ای آن در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت برابر K باشد، شتاب نقطه‌ی A را به ازای هر موقعیت از بازو تعیین کنید.





r = بردار جابجایی غلتک A نسبت به نقطه O

رابطه مثلثاتی $\cos\theta = \frac{r}{2b} \longrightarrow r = 2b\cos\theta$

$\omega = \dot{\theta} = k$ سرعت زاویه ای

در دستگاه قطبی (r,θ) :
$$\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \end{cases}$$

$r = 2b\cos\theta$

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = -2b\dot{\theta}\sin\theta = -2bk\sin\theta$$

$$\ddot{r} = -2bk\dot{\theta}\cos\theta = -2bk^2\cos\theta$$

$$\begin{cases} a_r = -2bk^2\cos\theta - 2bk^2\cos\theta = -4bk^2\cos\theta \\ a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = -4bk^2\sin\theta \end{cases}$$

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2} = -4bk^2$$

بنام خدا

Subject :
Year. Month. Date.

فصل دوم: سینتیک ذرات مادی

انواع حرکت:

۱- حرکت مستقیم الخط: ذره در راستای یک خط مستقیم حرکت می‌کند.

$\vec{a} = a_x i + a_y j$ $\qquad \sum \vec{F_x} = m\vec{a_x}$

$a_y = 0 , a_x \neq 0$

$$\sum \vec{F_y} = m\underbrace{\vec{a_y}}_{0} \Rightarrow \sum \vec{F_y} = 0$$

۲- حرکت منحنی الخط: این حرکت می‌تواند در صفحه یا در فضا انجام شود.

صفحه ۲ بعدی 2D:
- ۱- دستگاه متعامد (کارتزین) (x, y)
- ۲- « عمودی و مماسی (t, n)
- ۳- « قطبی (r, θ)

در فضا 3D:
- ۱- دستگاه متعامد (x, y, z)
- ۲- « استوانه‌ای (r, θ, z)
- ۳- « کروی (r, θ, φ)

با توجه به مطالب حل شده در فصل قبل، معادلات نیوتن را در دستگاه‌های مختلف بدست می‌آوریم

دستگاه قائم در صفحه :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \longrightarrow \begin{cases} \sum F_x = M\vec{a_x} = m\ddot{x} \\ \sum F_y = M\vec{a_y} = m\ddot{y} \end{cases}$$

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$$

دستگاه عمود و مماس : (در صفحه)

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \xrightarrow{\text{شتاب کل}} \begin{cases} a = a_n e_n + a_t e_t \\ a_t = \dfrac{dv}{dt} \quad (1) \\ a_n = \dfrac{v^2}{R} \quad (2) \end{cases}$$

$$\sum f_t e_t + \sum f_n e_n$$

$$\sum f_t = m\frac{dv}{dt}$$

$$\sum f_n = m\frac{v^2}{R}$$

اگر شتاب‌ها ادغام شوند نیروی برآیند بدست می‌آید.

دستگاه قطبی : (در صفحه)

$$\sum \vec{F} = m a \longrightarrow \sum f_r e_r + \sum f_\theta e_\theta$$

$$\vec{a} = a_r\vec{e_r} + a_\theta\vec{e_\theta}$$

$$\vec{a_r} = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$

$$\vec{a_\theta} = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \sum F_r = m.a_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$$

$$\sum F_\theta = m a_\theta = m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})$$

دستگاه متعامد در فضا :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = \sum \vec{F_x} + \sum \vec{F_y} + \sum \vec{F_z}$$

$$a = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

$$\sum F_x = m\vec{a_x} = m\ddot{x}$$

$$\sum F_y = m\vec{a_y} = m\ddot{y}$$

$$\sum F_z = m\vec{a_z} = m\ddot{z}$$

دستگاه استوانه‌ای (در فضا) :

حالت خاصی از قطبی است که مولفه Z به آن اضافه می‌شود.

$$\sum \vec{F} = M\vec{a} = \sum F_r \vec{e_r} + \sum F_\theta \vec{e_\theta} + \sum F_z \vec{k}$$

$$\vec{a} = a_r \vec{e_r} + a_\theta \vec{e_\theta} + a_z \vec{k}$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \longrightarrow \sum F_r = ma_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$$

$$a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \longrightarrow \sum F_\theta = ma_\theta = m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})$$

$a_z = \ddot{z} \longrightarrow \sum F_z = ma_z = m\ddot{z}$

قبل از بررسی معادله تعادل دینامیکی می بایستی با بعضی از نیروها آشنا شویم :

۱- نیروی اصطکاک :

$F_F = \mu . N$

ضریب اصطکاک

نیروی عکس العمل

در دو حالت

الف) سکون :

ب) حرکت :

الف) سکون

$F_S = \mu_S . N$ نیروی اصطکاک استاتیکی

ضریب اصطکاک استاتیکی

ب) حرکت :

$F_K = \mu_K . N$ نیروی اصطکاک دینامیکی

ضریب اصطکاک دینامیکی

۲- نیروی فنر : فنر همواره نیروی وارد می کند تا تغییر شکل حاصله از آن نیرو را هیچ کند و باشند ، در آن صورت به آن جسم فنر می توان گفت .

نیروی فنر

$F_S = K_S . x \rightarrow$ تغییرات طول

ثابت فنر

$x = L - L_0$

طول ثانویه

طول اولیه

برای حل مسائل دینامیک از ۳ روش می‌توان استفاده نمود که موضوع مورد بحث این فصل می‌باشند.

۱- استفاده مستقیم: هنگامی که نیرو و شتاب مستقیماً با هم در ارتباط هستند.

۲- روش کار و انرژی: این روش نتیجه‌ای از روش مستقیم است و در حالتی که تغییرات نیرو برحسب فاصله مطرح باشد، از این روش استفاده می‌کنیم.

۳- ضربه و مومنتم: اگر تغییرات نیرو برحسب زمان باشد، می‌توان از این روش استفاده نمود.

۱- روش مستقیم:

قانون دوم نیوتن: اگر برآیند نیروهای وارد بر ذره‌ای صفر نباشد، ذره شتاب متناسب با برآیند خواهد داشت. $\sum \vec{F} = m\vec{a}$

و چون جرم ثابت است: $m = \frac{F_1}{a_1} = \frac{F_2}{a_2}$ ، که با توجه به مبانی:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \xrightarrow{\text{نتیجه}} \sum \vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \xRightarrow[\text{ثابت باشد}]{\text{اگر } m} \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

* بردار $m\vec{v}$ را اندازه حرکت خطی و یا به اختصار اندازه حرکت ذره می‌گویند و راستای آن با v یکی است، و بزرگی آن $|m|$ برابر اندازه‌ی سرعت است و آن را با G نشان می‌دهیم.

اندازه حرکت $\vec{G} = m\vec{v}$

بنابراین برآیند نیروهای وارده بر ذره را می‌توان بصورت زیر نشان داد.

$\sum \vec{F} = \dot{\vec{G}} = m\vec{a}$ یعنی برآیند نیروهای وارد بر ذره برابر با آهنگ تغییرات اندازه حرکت ذره است.

رابطه فوق اصل پایستگی اندازه حرکت خطی یک ذره را بصورت زیر بیان می‌دارد:

$$\sum \vec{F} = \dot{\vec{G}} = \frac{d\vec{G}}{dt}$$

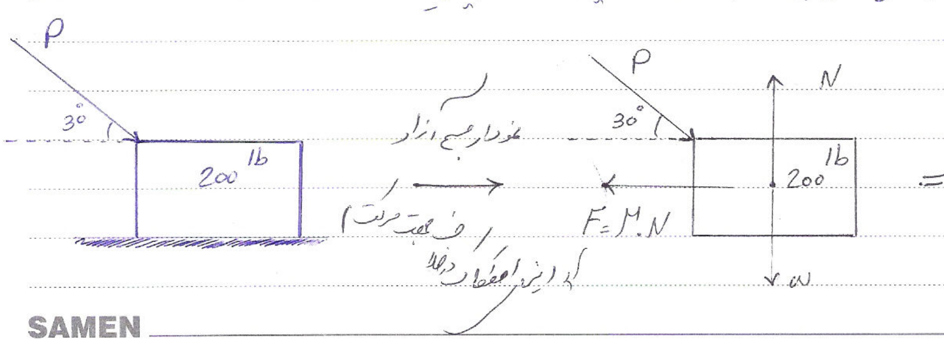
پس اگر برآیند نیروی وارد بر ذره صفر باشد، اندازه حرکت خطی ذره هم از نظر مقدار و هم از نظر جهت ثابت باقی می‌ماند.

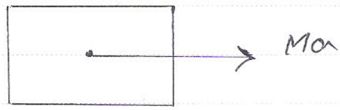
معادله تعادل دینامیکی در روش مستقیم: (با توجه به قانون دوم نیوتن)

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \longrightarrow \sum \vec{F} - m\vec{a} = 0$$

به عبارتی اگر $\overrightarrow{ma}$ - را به نیروهای وارد بر ذره اضافه کنیم، مجموع نیروهای معادل صفر بدست می‌آید.

مثال: قطعه‌ای به جرم 200^{lb} روی سطح افقی زبر ساکن قرار دارد، مقدار نیروی P لازم برای شتاب دادن به آن $10 ft/s^2$ به طرف راست این قطعه را بیابید. $\mu_k = 0.25$ ← (جسم حرکت می‌کند)





چون حرکت در راستای محور x می باشد پس $a_y = 0$.

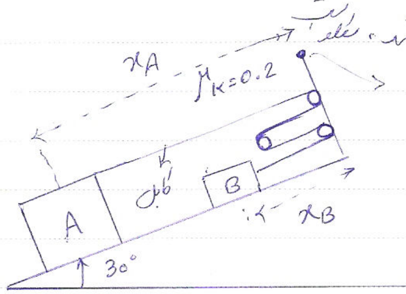
$$\sum F_y = ma_y = 0$$

$$+\uparrow \quad ① \quad N - P\sin 30^\circ - W_0 = 0 \longrightarrow N = P\sin 30^\circ + W_0$$

$$\xrightarrow{+} \sum F_x = Ma_x \Rightarrow P\cos 30^\circ - 0.25N = \frac{200}{32.2}a$$

$$\Rightarrow \boxed{P = 151 \text{ lb}} \quad ②$$

مثال: دو قطعه نشان داده شده در ابتدا ساکن هستند. از جرم قرقره ها صرف نظر می شود. با فرض اینکه ضریب اصطکاک بین قطعه ها و سطح شیبدار $\mu_s = 0.25$ باشد، مطلوب است:



الف) شتاب هر قطعه،

ب) تنش در کابل،

حرکت قطعه B نسبت به A.

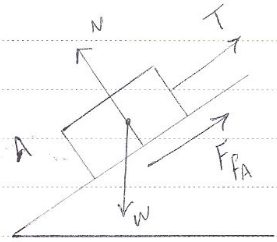
$$x_A + 3x_B = L \xrightarrow[\text{مرتبه}]{\text{2 بار مشتق}} a_A + 3a_B = 0$$

* مبدأ فرضی در نظر می گیریم. (طول طناب ثابت است.)

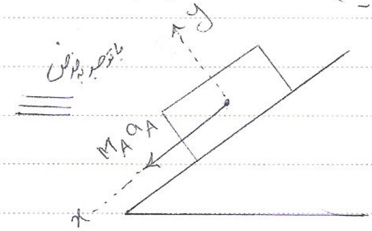
روابط وابستگی $\longrightarrow a_A = -3a_B \Rightarrow a_B = -\frac{1}{3}a_A$

نمودار جسم آزاد رسم می‌کنیم. (برای A و B)
(با این فرض که A رو به پایین می‌رود.)

نمودار جسم آزاد A
(چون حرکت آن را به سمت
پایین گرفتیم پس F_{f_A}
به سمت بالا می‌شود)



با توجه به دالامبر



$$+\swarrow \sum F_x = ma$$

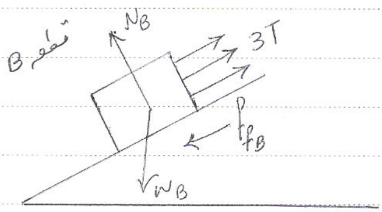
$$w_A \sin\alpha - \mu N_a - T = m_A a_A$$

با حذف N_A داریم $\Rightarrow$

$$+\nwarrow \sum F_y = 0 \longrightarrow N_A - w_A \cos 30^\circ = 0 \longrightarrow N_A = w_A \cos 30^\circ$$

$$\Rightarrow w_A (\sin 30^\circ - \mu \cos 30^\circ) - T = m_A a_A$$

قطعه B



$$+\swarrow \sum F_x = m a_B$$

$$\Rightarrow w_B \sin 30^\circ + \mu N_B - 3T = m_B a_B$$

$$= m_B \left(-\frac{1}{3} a_A\right)$$

$$+\nwarrow \sum F_y = 0 \Rightarrow N_B - w_B \cos 30^\circ = 0 \Rightarrow N_B = w_B \cos 30^\circ$$

با حذف N_B داریم:

$$w_B(\sin 30^\circ + \mu \cos 30^\circ) - 3T = m_B \frac{a_A}{3} \quad **$$

با حذف T از * و ** داریم:

$$(3w_A - w_B)\sin 30 - \mu(3w_A + w_B)\sin 30^\circ = \left(3w_A + \frac{w_B}{3}\right)\frac{a_A}{g}$$

حال مقدار μ_s را برای تعادل استاتیکی بررسی می‌کنیم.

تعادل استاتیکی زمانی برقرار است که نتیجه کل صفر باشد. بنابراین با فرض $a_A = a_B = 0$ قرار دارد.

تعادل $a_A = 0$ در رابطه بالا μ را بدست می‌آوریم.

$$\text{تعادل استاتیکی}: \quad a_A = 0 \Rightarrow \mu = \frac{(3w_A - w_B)\sin 30^\circ}{(3w_A + w_B)\cos 30^\circ} = 0/334 > \mu_s = 0.25$$

چون μ بدست آمده از مقدار μ_s بزرگتر است لذا لغزش رخ داده است. بنابراین باید از μ_K در معادلات بدست آمده استفاده کرد. بنابراین در تمام معادلات نوشته شده بجای μ از مقدار $\mu_K = 0.2$ استفاده نمود و با از اعداد مجهول شتاب و کشش را بدست آورد.

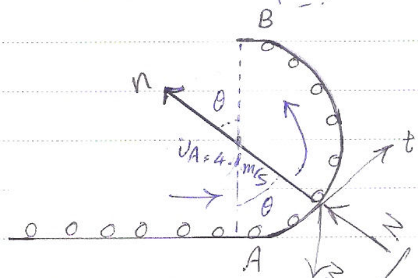
$a_A = 4.36 \ ft.cm^{-2}$

$a_B = 1.452 \ ft/cm^2$

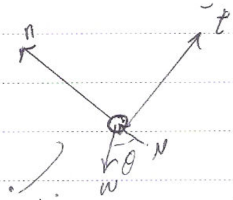
$T = 4.79 \ lb$

مثال: ساچمه های کوچک فولادی که هر کدام 65 گرم جرم دارند با سرعت افقی $4.1\,m/s$ در نقطه A وارد حفره نیم‌دایره‌ای شکل که در صفحه قائم واقع است می‌شوند. نیرویی که از طرف حفره به هر یک از ساچمه‌ها وارد می‌شود را برحسب θ بدست آورید. سرعت گلوله را در نقطه B محاسبه کنید. (اصطکاک ناچیز)

$R = 0.32$



از دستگاه (t, n) استفاده می‌کنیم.



وقتی صفحه افقی است نیروی وزن عمود بر صفحه است و در محاسبات اثر نمی‌کند. وقتی صفحه نه قائم باشد در محاسبات وارد می‌شود.

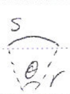
$$a_t = \frac{dv}{dt} \qquad a_n = \frac{v^2}{R}$$

$$\sum F_t = m a_t \Rightarrow -w \sin\theta = m a_t \Rightarrow a_t = -g \sin\theta$$

$$\sum F_n = m a_n \Rightarrow N - w\cos\theta = m a_n \Rightarrow N = m\left(g\cos\theta + \frac{v^2}{R}\right)$$

نیاز به معادله مستقل از زمان داریم

$$\left.\begin{array}{l} a_t = \dfrac{dv}{dt} = v\dfrac{d\theta}{ds} \\ S = r\theta \Rightarrow ds = r\,d\theta \end{array}\right\} \Rightarrow a_t\, r\, d\theta = v\, dv \overset{*}{\Longrightarrow}$$



$$\Rightarrow (-g\sin\theta)\, r\,d\theta = v\,dv \xrightarrow{\int} \int_0^{\theta} (-g\sin\theta)\, r\,d\theta = \int_{v_A}^{v} v\,dv$$

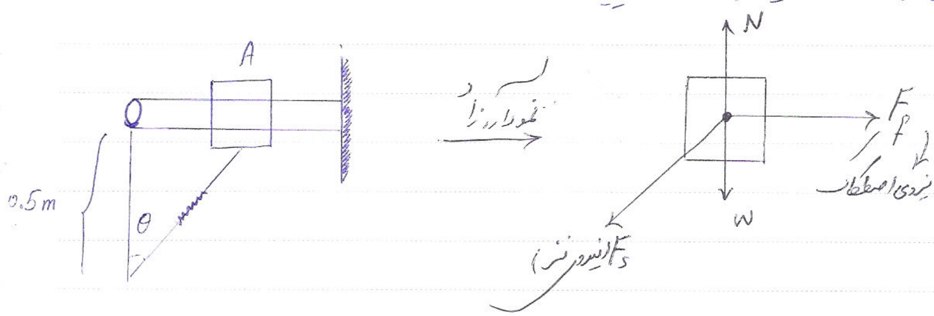
$$-2rg(\cos\theta - 1) = v^2 - v_A^2 \Rightarrow v^2 - v_A^2 + 2rg(\cos\theta - 1)$$

$$N = m\left(g\cos\theta + \frac{v^2}{R}\right) = 1.913\cos\theta + 2.14$$

$$\begin{cases} v^2 = v_A^2 + 2rg(\cos\theta - 1) \\ \theta = \pi \Rightarrow v_B = ? \end{cases} \Rightarrow v = 2.06\ m/s$$

$v_B(\theta = 180) = \sqrt{4gr + v_A^2} = 2.06\ m/sec$

مثال: طوقه A به جرم 10kg از حالت سکون در حالت $\theta=30^\circ$ رها و در طول میله ثابت افقی می‌لغزد. ضریب ثابت فنر 1750 N/m و به ازای $\theta=0$ طول آزاد خود را دارد. اگر ضریب اصطکاک بین طوقه و میله 0.2 باشد، شتاب اولیه طوقه را محاسبه نمایید.



$F_s = kx$

$x = L - L_0$

$L_0 = 0.5m$; $L = \frac{0.5}{\cos\theta}$ طول ثانویه $\Rightarrow x = \frac{0.5}{\cos 30} - 0.5 = 0.077$

$\Rightarrow F_s = 135.37$

$\sum F_x = ma \Rightarrow F_s \sin\theta - F_f = ma$ ①

$\sum F_y = 0 \Rightarrow N - W - F\cos\theta = 0 \Rightarrow N = W + F_s \cos\theta \Rightarrow N = 10 \times 9.81 + 135.37 \times \cos 30^\circ = 215.32$

$F_f = \mu N = 0.2 \times 215.32 = 43.06\,N$

معادله ① $\Rightarrow a = 2.46\ m/s$

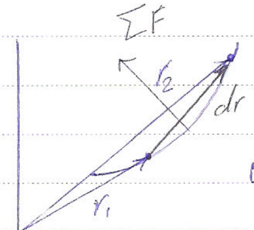
۲- روش کار و انرژی :

همانطور که قبلاً اشاره شد این روش نتیجه‌ای از روش مستقیم است به این صورت که

$\sum \vec{F} = m\vec{a}$

$a = v \cdot \frac{dv}{ds}$

$\Rightarrow \sum F \cdot ds = mv\,dv \Rightarrow \underbrace{\int_{s_0}^{s} \sum F\,ds}_{\text{کار}} = \underbrace{\int_{v_0}^{v} mv\,dv}_{\text{انرژی}}$



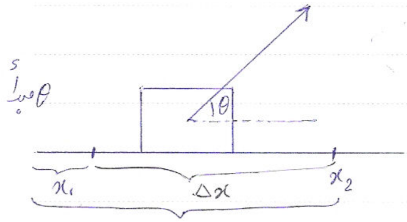
کار: حاصلضرب اسکالر یا داخلی بردار نیرو در بردار تغییر مکان است.

$U_{1-2} = \int_1^2 \sum F \cdot \vec{dr}$

اگر بردار نیرو و بردار جابجایی عمود باشند، آنگاه کار انجام شده صفر است.

حال این رابطه را برای حرکت مستقیم الخط و منحنی الخط بررسی می‌کنیم:

حرکت مستقیم الخط:



$$\sum \vec{F} = \sum F_x \vec{i} + \sum F_y \vec{j}$$

$$\vec{dr} = dx\vec{i}$$

کار

$$\Rightarrow du = \sum \vec{F}\cdot\vec{dr} = \sum \vec{F_x}\cdot dx = \sum F\cos\theta\cdot\Delta x \Rightarrow u_{1-2} = \sum F\cos\theta\cdot\Delta x$$

$\theta = 90 \longrightarrow$ برابر صفر می‌شود ، $\theta = 0, 180 \longrightarrow$ حالتی دیگر است

حرکت منحنی الخط:

بررسی این حرکت را می‌توان در دستگاه‌های کارتزین، عمود و مماس و قطبی انجام داد.

$$\sum \vec{F} = \sum F_x \vec{i} + \sum F_y \vec{j}$$

$$\vec{dr} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$$

$$du = \sum \vec{F}\cdot\vec{dr} \quad \Rightarrow u_{1-2} = \int_{x_1}^{x_2} \sum F_x \cdot dx + \int_{y_1}^{y_2} \sum F_y \cdot dy$$

محمد حسین سلیمانی

Subject :
Year. Month. Date.

۲- دستگاه عمود و مماس:

چون جابجایی ذره در این دستگاه مماس بر مسیر حرکت یعنی در راستای $\sum F_t$ می‌باشد، لذا در این

دستگاه: $du = \sum F_t . \boxed{\Delta s} \rightarrow$ طول مسیر

۳- دستگاه قطبی:

در دستگاه قطبی:

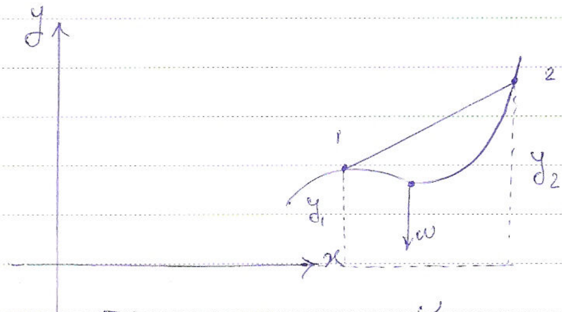
$$\vec{V} = \overset{\dot{r}}{V_r}\,\vec{e_r} + \overset{\dot{\theta}}{V_\theta}\,\vec{e_\theta}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{e_r} + \frac{d\theta}{dt}\vec{e_\theta} \Rightarrow \overset{*}{\boxed{d\vec{r} = dr\,\vec{e_r} + r\,d\theta\,\vec{e_\theta}}}$$

$$\sum \vec{F} = \sum F_r \vec{e_r} + \sum F_\theta \vec{e_\theta} \quad , * \Rightarrow du = \sum \vec{F} . d\vec{r}$$

$$u_{1-2} = \int_{r_1}^{r_2} \sum F_r . dr + \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sum F_\theta \, d\theta$$

کار انجام شده توسط نیروی وزن:



$\sum F_y = -w\vec{j}$ / بردار جابجایی: $d\vec{r} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j}$

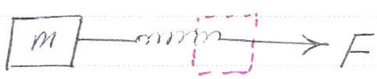
$du = -w\,dy$

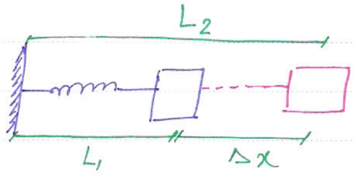
$U_{1-2} = -w(\Delta y) \longrightarrow if \begin{cases} \Delta y = y_2 - y_1 > 0 \Rightarrow U_{1-2} < 0 \\ y_2 > y_1 \\ \Delta y = y_2 - y_1 < 0 \Rightarrow U_{1-2} > 0 \end{cases}$

اگر بردار جابجا و بردار نیرو در یک جهت باشند، $(\theta = 0^\circ) \Leftarrow U > 0$

اگر بردار جابجایی و نیرو مخالف الجهت باشند، $(\theta = 180^\circ) \Leftarrow U < 0$

کار انجام شده توسط فنر:





تغییر طول اولیه فنر: $x_1 = L_1 - L_0 =$ طول آزاد - طول اولیه

تغییر طول ثانویه: $x_2 = L_2 - L_0 =$ طول آزاد - طول ثانویه

بردار نیرو و جابجایی در خلاف جهت هم

$U_{1-2} = -\int_{x_1}^{x_2} f_s\,dx$ $\qquad f_s = kx \longrightarrow f_s = K_s \Delta x$

$$\Rightarrow U_{1-2} = -\int_{x_1}^{x_2} kx\,dx = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2$$

وقتی فنر در حالت بازگشت به حالت اولیه یا وضعیت آزاد خود می‌باشد، چون نیروی فنر با بردار جابجایی جسم در یک جهت است، کار نیروی فنر مثبت است.

انرژی جنبشی ذره:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$a = v\frac{dv}{ds}$$

$$\rightarrow \sum F\cdot d\vec{r} = mv\,dv \longrightarrow \int \underbrace{\sum F\cdot dr}_{\text{کار }(U)} = \int \underbrace{mv\,dv}_{\text{انرژی جنبشی }(T)}$$

اصل کار و انرژی

$$T = \int_{v_1}^{v_2} mv\,dv \longrightarrow T_{1-2} = T_2 - T_1 = \Delta T = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_2^2$$

v_1 و v_2، سرعت جسم در موقعیت (1) و (2).

اصل کار و انرژی:

(هنگامی که بحث جابجایی پیش می‌آید از این اصل استفاده می‌کنیم)

کل کار انجام شده = تغییرات انرژی جنبشی

$$U_g + U_{e_{1-2}} + U_{1-2} = \Delta T$$

کار انجام شده توسط نیروی وزن

کار انجام شده توسط نیروی فنر

کار انجام شده توسط سایر نیروهای وارد بر جسم

تغییرات انرژی جنبشی

توان: آهنگ زمانی انجام کار را گویند.

$$\text{توان متوسط} = \frac{\Delta u}{\Delta t} \quad \left(\frac{J}{s}\right)$$

$$\text{if } \Delta T \to 0 \Rightarrow P = \text{توان} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{du}{dt} = \frac{d(\vec{F}\cdot\vec{r})}{dt} = \frac{\vec{F}\cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{V}$$

$$\Rightarrow P = \vec{F}\cdot\vec{V} = \frac{du}{dt}$$

واحد توان در SI : $\frac{J}{sec} = \frac{1N.m}{sec} = 1wat$

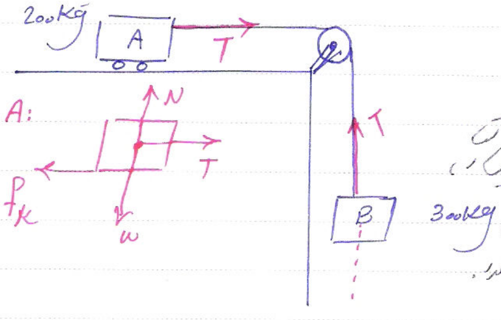
واحد توان در سیستم انگلیسی : $1(hp) = 550\frac{ft.lb}{sec} = 746\,wat$

(horse power اسب بخار)

بازده مکانیکی: معیاری جهت بررسی اتلاف انرژی های مختلف مانند گرما، اصطکاک و...

$$\text{بازده مکانیکی} = \frac{\text{توان خروجی}}{\text{توان ورودی}}$$

مثال: دستگاه زیر از حالت سکون رها می‌شود. سرعت جسم A پس از 2m چقدر است؟ ($\mu_k=0.25$) بین جسم A و سطح،



(انرژی در اصطکاک به گرما تلف شود)

چون جسم A در راستای افق حرکت می‌کند نیروی وزن در راستای پایین است،

لذا زاویه بین بردار جابجایی و نیروی 90° پس کار صفر.

نیروی اصطکاک

$$U_{g_{1-2}} + U_{e_{1-2}} + U_{1-2} = \Delta T \Rightarrow -F_k \times 2 + 2T = \frac{1}{2} m v_{1A}^2 - \cancel{\frac{1}{2} m v_{0A}^2}$$

نیرو و جابجایی خلاف جهت

$U_{g_{1-2}} = 0$ ، $U_{e_{1-2}} = 0$

نیروی کشش کابل و نیروی اصطکاک

$$\Rightarrow -2F_f + 2T = \frac{1}{2} m_A v_A^2 \quad \boxed{= 2T - 2F_f = 100v^2}$$

$$F_f = \mu_k N = \mu_k . w = 0$$

$$\boxed{N = w = 0}$$

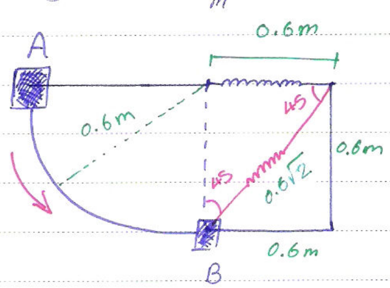
جسم B :

$$U_g + \cancel{U_{e_{1-2}}} + U_{1-2} = \Delta T$$

$$\Rightarrow 2w - 2T = \underbrace{\frac{1}{2} m v_B^2}_{150v^2} - \cancel{\frac{1}{2} m v_{0B}^2}$$

$$\Rightarrow 2\times(300\times 9.81) - 2T = 150v^2$$

مثال: لغزنده‌ای به جرم 3kg از حالت سکون روی نقطه A رها شده و با اصطکاک ناچیز در امتداد میله راهنمای خمیده که در صفحه قائم قرار دارد می‌لغزد. فنری که به لغزنده متصل است دارای $k = 350 \frac{N}{m}$ و طول آزاد 60^{cm} است. سرعت لغزنده هنگام عبور از B ؟



$$U_{g_{AB}} = 0.6mg - mgh$$

$$U_{A-B} = \Delta T_{A-B}$$

$$U_{g_{A-B}} + U_{e_{A-B}} + U_{A-B} = \frac{1}{2} m v_B^2 - \cancel{\frac{1}{2} m v_A^2}$$

$$u_{e_{A\,B}} = \frac{1}{2}k\left(x_A^2 - x_B^2\right)$$

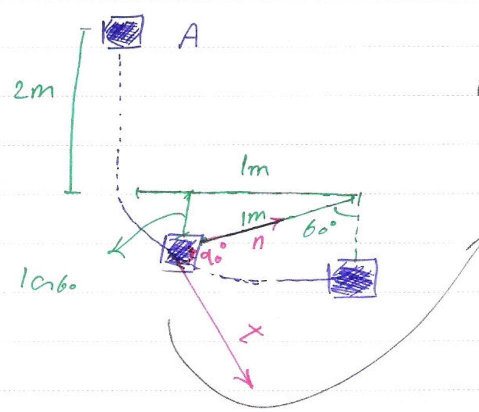
$$x_A = \ell_A - \ell_0 = 1.2 - 0.6 = 0.6$$

$$x_B = \ell_B - \ell_0 = 0.6\sqrt{2} - 0.6 = 0.25$$

$$0.6mg + \frac{1}{2}\times 350\times(0.6^2 - 0.25^2) = \frac{1}{2}mv_B^2 \Rightarrow v_B = 6.8\ m/sec$$

$m = 3kg$

مثال: بسته‌ای به جرم 5kg از حالت سکون و از نقطهٔ A در امتداد سطحی بدون اصطکاک مطابق شکل زیر می‌لغزد. نیروی وارد از طرف سطح بر بسته وقتی که: الف) به نقطهٔ B ب) به نقطهٔ C می‌رسد را بدست آورید.



$$u_{A-B} = \Delta T_{A-B}$$

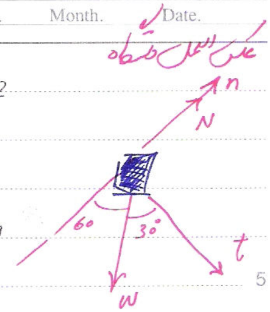
$$u_{n\,A-B} = \cos 90° = 1$$

$$u_{g_{A-B}} = (2 + 1\cos 60°)mg$$

$$(2 + \cos 60)mg = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

$$\Rightarrow (2 + \cos 60)mg = \frac{1}{2}mv_B^2 \longrightarrow \boxed{v_B = 7\,m/s}$$

$$\sum F_n = m a_n \rightarrow N - W\cos 60 = m a_n = \frac{m v_B^2}{r}$$



$$\rightarrow N = W\cos 60 + \frac{m v_B^2}{r} \Rightarrow N = 269.78\ N/m$$

ب) $U_{g_{A-C}} = 3mg$

$U_{A-C} = T_{A-C}$ ، $U_{g_{A-C}} = T_{A-C}$

$$3mg = \frac{1}{2} m v_C^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 \rightarrow v_C = 7.67\ m/sec$$

$$\sum F_n = m a_n \rightarrow N = mg + \frac{m v_C^2}{r} = 343.35\ N$$

بنام خدا

فصل سوم :

اندازه حرکت خطی : اگر جسمی دارای سرعت V باشد آنگاه اندازه حرکت خطی آن که با G نشان می‌دهیم برابر است با :

$$\vec{G} = m\vec{V}$$

اندازه حرکت زاویه‌ای : گشتاور بردار اندازه حرکت خطی حول نقطه مورد نظر است.

$$\vec{H} = \vec{r} \times m\vec{V}$$

$$\vec{r} = r_x\vec{i} + r_y\vec{j} + r_z\vec{k}$$

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

$$G = G_x\vec{i} + G_y\vec{j} + G_z\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{G} = m\vec{v} = m(v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k})$$

$$H_o = \begin{vmatrix} i & j & k \\ r_x & r_y & r_z \\ mv_x & mv_y & mv_z \end{vmatrix} \qquad H = \begin{vmatrix} i & j & k \\ r_x & r_y & r_z \\ mv_x & mv_y & mv_z \end{vmatrix}$$

$$H_{oz} = m(r_x v_y - r_y v_x) \quad / \quad H_{ox} = m(r_y v_z - r_z v_y)$$

$$H_{oy} = m(r_x v_y - r_y v_x)$$

اصل ضربه :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \sum \vec{F} = m\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d\vec{G}}{dt}$$

$$\rightarrow \sum \vec{F} dt = d\vec{G}$$

$$\rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{F} dt = \int_{G_o}^{G} dG = G_2 - G_1$$

$$Imp = \int_{t_1}^{t_2} \sum F_t \, dt = \Delta G$$

به عبارت دیگر سطح زیر نمودار نیرو بر حسب زمان معرف تغییر اندازه حرکت خطی است.

$$\sum \vec{F} = \dot{\vec{G}}$$

$$\vec{H_o} = \vec{r} \times \vec{G} \rightarrow \frac{dH_o}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{G}) = \cancel{\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{G}} + \vec{r} \times \frac{d\vec{G}}{dt}$$

$$= \vec{r} \times \dot{\vec{G}} = \vec{r} \times \sum \vec{F} = \sum M_o$$

برآیند گشتاورهای نیروهای خارجی وارد بر جسم برابر است با نرخ تغییر مومنتم زاویه‌ای.

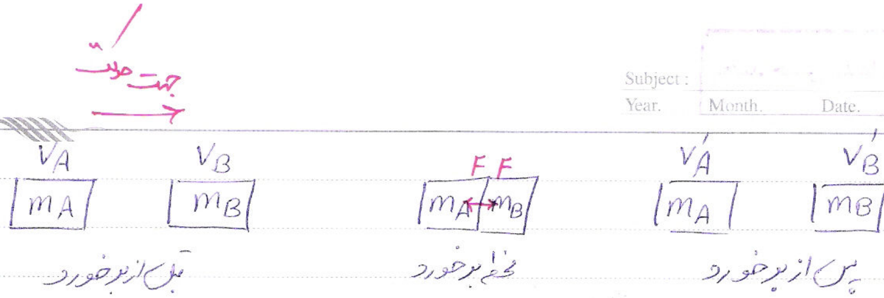
$$\frac{dH_o}{dt} = \dot{H_o} = \sum M_o$$

تغییر اندازه حرکت زاویه‌ای : $\Delta \vec{H_o} = \int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{M_o} \, dt$

با توجه به فرمول‌های بدست آمده می‌توان نتایج زیر را بدست آورد.

۱- در غیاب اثر برآیند نیروهای خارجی وارد بر سیستم، تغییر مومنتم نداریم به عبارت دیگر $G_1 = G_2$

کاربرد: در غیاب نیروهای خارجی اگر دو ذره به جرم‌های A و B به هم برخورد کنند.



سیستم قبل از برخورد $\leftarrow G = G' \longrightarrow m_A V_A + m_B V_B = m_A V'_A + m_B V'_B$

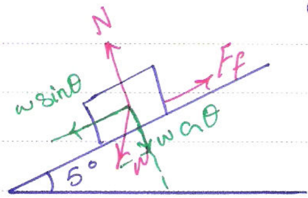
سیستم پس از برخورد

۲- در غیاب اثر برآیند گشتاور نیروهای خارجی وارد بر سیستم تکانه سیستم زاویه‌ای ثابت است، به عبارت دیگر:

$H_{o1} = H_{o2}$

مثال: اتومبیلی به جرم m با سرعت $90 km.h^{-1}$ به طرف پایین مسیری با شیب $5°$ رانده می‌شود، در این لحظه راننده ترمز می‌گیرد، زمان لازم برای توقف اتومبیل در هر یک از شرایط زیر:

الف) جاده خشک $\mu = 0.75$ ب) جاده یخ زده $\mu = 0.1$



$Imp_{1-2} = \Delta G$

$\sum F_y = 0 \longrightarrow N - w\cos\theta = 0 \Rightarrow N = w\cos\theta$

$\sum F_x = ma_x \longrightarrow w\sin\theta - \mu \underbrace{w\cos\theta}_{N} = \sum F_x$

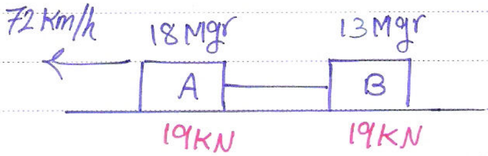
$$\to \int_0^t \sum F_x\, dt = \Delta G = G_2 - G_1 \to \int_0^t (w\sin\theta - \mu w \cos\theta)\,dt = m\cancel{v_2}^{0} - mv_1$$

$$\Rightarrow t = \frac{mv}{mg(\mu\cos\theta - \sin\theta)} \to \begin{cases} \mu = 0.75 \Rightarrow t = 3.85\ \text{sec} \\ \mu = 0.1 \Rightarrow t = 193.8\ \text{sec} \end{cases}$$

مثال: قطار سبکی از دو واگن ساخته شده است و با سرعت 72km/h حرکت می‌کند. قطار ناگهان ترمز می‌کشد و نیروی ثابت 19kN بر هر یک از واگن‌ها وارد می‌شود. مطلوبست:

الف) زمان لازم برای اینکه قطار پس از ترمز گرفتن متوقف شود.

ب) نیروی متصل کننده بین دو واگن در حال کم شدن سرعت.



$72\,km/h = 20\,m/s$

الف) معادله $Imp_{1-2} = \Delta G$ را می‌توان برای کل سیستم نوشت. سرعت ثانویه بعد از ترمز گرفتن برای کل سیستم صفر است.

$$(F_t)_A + (F_t)_B = (m_A \cancel{v_A}^{0} + m_B \cancel{v_B}^{0}) - (m_A v - m_B v) = -(m_A + m_B)v$$

$$\Rightarrow -2\times19\times10^{3}\,t=(13+18)\times10^{3}\times20\,m/s \Rightarrow t=16.315\,sec$$

ب) می‌توان رابطه $Imp_{1-2}=\Delta G$ را برای یک جسم، مثلاً جسم A نوشت تا نیروی متصل کننده بین دو جسم را بدست آورد.

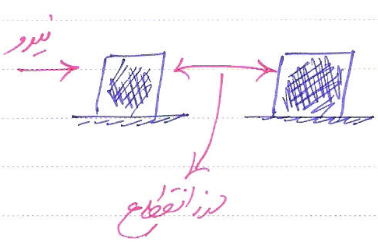
$$Imp_{1-2}=\Delta G \longrightarrow (\sum F)t=\Delta G$$

$$\Rightarrow (F+19\times10^{3})\times16.315=20\times18\times10^{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{F=3058.8\ N}$$

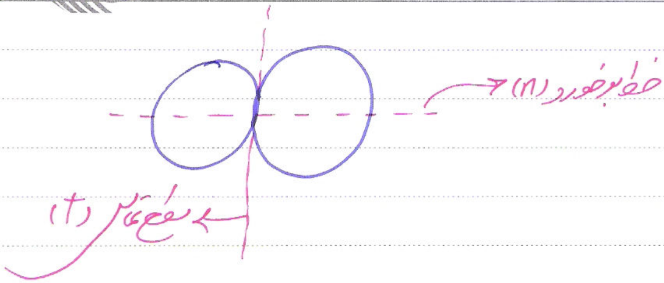
برخورد:

اصابت دو جسم در یک بازه زمانی بسیار کوچک که در آن دو جسم بر یکدیگر نیروهای خیلی بزرگی وارد می‌کنند را برخورد گویند.



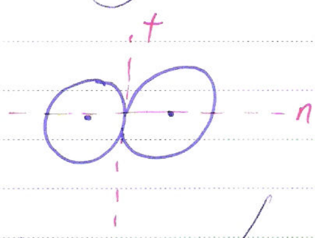
خط برخورد:

در حین برخورد، عمود مشترک بر سطوح تماس را خط برخورد گویند.

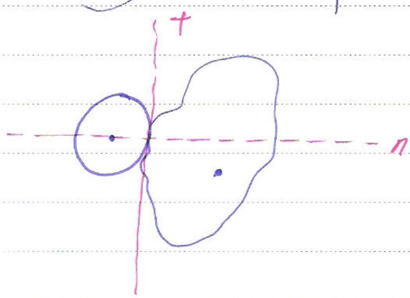


انواع برخورد:

۱- برخورد مرکزی: اگر مرکز جرم های دو جسمی که به هم برخورد می کنند بر روی خط برخورد باشند به آن برخورد، برخورد مرکزی گویند، مانند برخورد ذرات مادی.

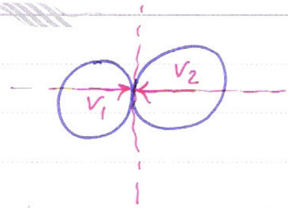


۲- برخورد خارج از مرکز: اگر مرکز جرم های دو جسمی که به هم برخورد می کنند روی خط برخورد نباشند برخورد خارج از مرکز می باشد.

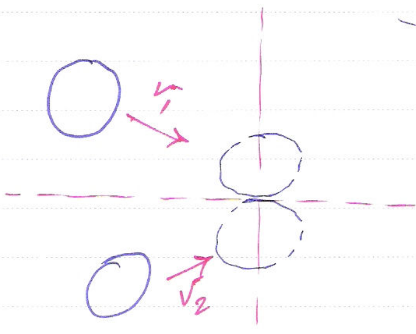


انواع برخورد مرکزی:

۱- برخورد مرکزی مستقیم: هرگاه امتداد سرعت های دو جسم در امتداد خط برخورد باشند، برخورد را مرکزی مستقیم گویند.



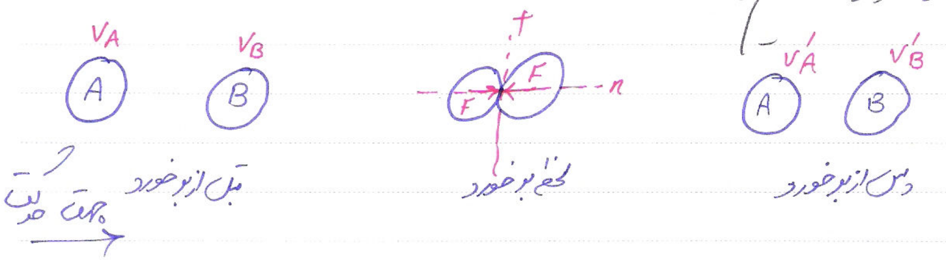
- برخورد مایل : هرگاه امتداد سرعت های دو جسم در امتداد خط برخورد نباشند، برخورد را مایل گوییم.



ضریب بازگشت (استرداد) : خاصیتی است از اثر ترکیبی جنس دو جسم و شکل دو جسم.

$$e = \frac{\text{ضربه ناشی از بازیابی تغییر شکل}}{\text{ضربه ناشی از تغییر شکل}} = \frac{\int P\,dt}{\int F\,dt} \qquad 0 \leq e \leq 1$$

برخورد مرکزی مستقیم :

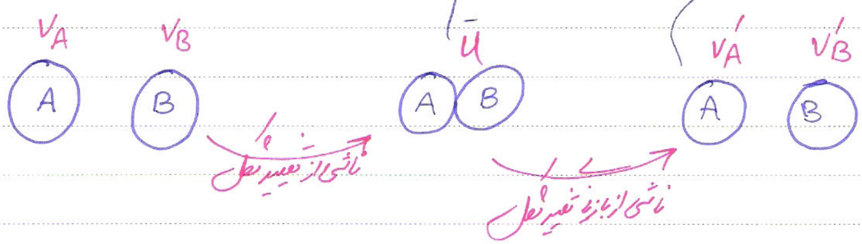


اگر سرعت ذره A از ذره B بیشتر باشد، ذره A سرانجام به ذره B برخورد می‌کند. در اثر برخورد، دو ذره تغییر شکل خواهند داد و در پایان دوره تغییر شکل، سرعت یکسان u را خواهند داشت. سپس دوره بازگشت رخ خواهد داد. که در پایان آن بسته به مقدار نیروهای برخورد و مواد سازنده ذره‌های A و B، هر ذره یا شکل اولیه خود را بازمی‌یابد یا به همان حالت تغییر شکل یافته باقی می‌ماند. در پایان دوره بازگشت دو ذره دارای سرعت‌های V'_A و V'_B خواهند بود.

از آنجایی که در سیستم (شامل دو ذره) برآیند نیروهای وارده صفر می‌باشد.

برای کل سیستم: $\underbrace{\int F\,dt}_{0} = \Delta G \rightarrow \underbrace{\vec{G}_1}_{\text{قبل از برخورد}} = \underbrace{\vec{G}_2}_{\text{پس از برخورد}} \rightarrow m_A V_A + m_B V_B = m_A V'_A + m_B V'_B$

برای بدست آوردن ضریب بازگشت (e) داریم:



ذره A: $\int F\,dt = m_A u - m_A V_A$

$\int P\,dt = m_A V'_A - m_A u \rightarrow e = \dfrac{\int P\,dt}{\int F\,dt} = \dfrac{V'_A - u}{u - V_A} = \dfrac{u - V'_A}{V_A - u}$ ①

B ذره: $\int F\,dt = m_B u - m_B v_B$

$\int P\,dt = m_B v'_B - m_B u$ $\longrightarrow$ $e = \dfrac{\int P\,dt}{\int F\,dt} = \dfrac{v'_B - u}{u - v_B}$ ②

ترکیب روابط ① و ② و حذف u از بین آنها $\longrightarrow$ $e = \dfrac{v'_B - v'_A}{v_A - v_B}$

ضریب بازگشت نسبت اختلاف سرعت‌ها بعد از برخورد به اختلاف سرعت‌ها قبل از برخورد

۱- برخورد کاملاً پلاستیک (مومسان) $(e=0)$:

در این حالت دو ذره در کنار هم می‌مانند و دو ذره بازگشت ندارد، سرعت ذره پس از برخورد یکی است.

$e = 0 \longrightarrow v'_B = v'_A$

درصد اتلاف انرژی جنبشی: $n = \dfrac{E_1 - E_2}{E_1} \times 100$

انرژی جنبشی سیستم: $E_1 = \dfrac{1}{2} m_A v_A^2 + \dfrac{1}{2} m_B v_B^2$ ،

انرژی جنبشی سیستم پس از برخورد: $E_2 = \dfrac{1}{2}(m_A + m_B) v'^2$

$v' = v'_A = v'_B$

۲- برخورد کاملاً الاستیک $(e=1)$:

$e = \dfrac{v'_B - v'_A}{v_A - v_B} = 1$ ، $e = 1 \Rightarrow v_A + v'_A = v_B + v'_B$

کل سیستم : $G_{T_1} = G_{T_2}$

$$m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B \longrightarrow m_A (v_A - v'_A) = m_B (v'_B - v_B)$$

$$\xrightarrow{v_A + v'_A = v_B + v'_B} m_A (v_A - v'_A)(v_A + v'_A) = m_B (v'_B - v_B)(v_B + v'_B)$$

$$\xrightarrow{\times \frac{1}{2}} \frac{1}{2} m_A (v_A - v'_A)(v_A + v'_A) = \frac{1}{2} m_B (v'_B - v_B)(v_B + v'_B)$$

$$\longrightarrow \frac{1}{2} m_A (v_A^2 - v'^2_A) = \frac{1}{2} m_B (v'^2_B - v_B^2)$$

$$\longrightarrow \underbrace{\frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2}_{E_1} = \underbrace{\frac{1}{2} m_B v'^2_B + \frac{1}{2} m_A v'^2_A}_{E_2}$$

$$\Rightarrow E_1 = E_2 \longrightarrow n = \frac{E_1 - E_2}{E_2} \times 100 = 0$$

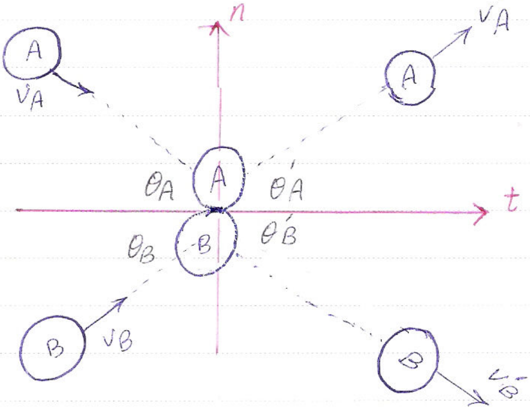
← در این حالت ثابت می‌شود انرژی جنبشی کل قبل از برخورد و بعد از برخورد باهم برابر است.

۳- حالت کلی $0 < e < 1$

$$0 < e = \frac{v'_B - v'_A}{v_A - v_B} < 1 \longrightarrow v'_B - v'_A < v_A - v_B$$

$$\Rightarrow E_1 > E_2$$

برخورد دو بعدی مایل:



در راستای (t-t) یعنی سطح تماس:

ذره A: $(G_A)_t = (G'_A)_t \Rightarrow m_A v_A \cos\theta_A = m_A v'_A \cos\theta'_A$

$$\Rightarrow v_A \cos\theta_A = v'_A \cos\theta'_A \qquad ①$$

ذره B: $(G_B)_t = (G'_B)_t \Rightarrow m_B v_B \cos\theta_B = m_B v'_B \cos\theta'_B$

$$\Rightarrow v_B \cos\theta_B = v'_B \cos\theta'_B \qquad ②$$

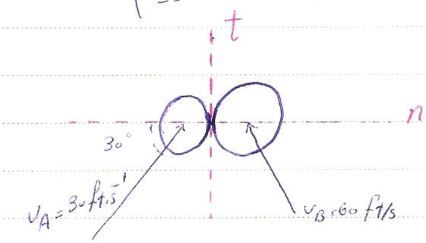
در راستای سیستم: (برای کل سیستم) (n-n)

کل سیستم قبل از برخورد: $(G)_n = (G')_n$

$$-m_A v_A \sin\theta_A + m_B v_B \sin\theta_B = m_A v'_A \sin\theta'_A + m_B v'_B \sin\theta'_B \qquad ③$$

ترکیب روابط ۱ و 2 و 3 $\longrightarrow$ $e = \dfrac{(v'_B)_n - (v'_A)_n}{(v_A)_n - (v_B)_n}$

مثال: بزرگی و جهت سرعت دو گلوله یکسان بعد از اصطکاک قبل از برخورد به یکدیگر در شکل زیر نشان داده شده است. با فرض $e = 0.9$ ، بزرگی و جهت سرعت دو گلوله را پس از برخورد تعیین کنید.

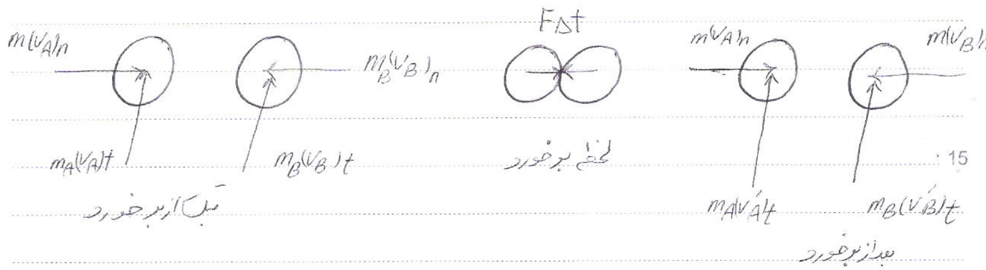


$$(v_A)_n = v_A \cos 30° = 26 \frac{ft}{sec}$$

$$(v_A)_t = v_A \sin 30° = 15 \frac{ft}{sec}$$

$$(v_B)_n = -v_B \cos 60° = -20\ ft.sec^{-1}$$

$$(v_B)_t = +v_B \sin 60 = 34.6\ ft.sec^{-1}$$



حرکت در امتداد مماس مشترک (t):

ذره A: $m_A(v_A)_t = m_A(v'_A)_t \longrightarrow (v_A)_t = (v'_A)_t = 15\ ft.sec^{-1}$

ذره B: $m_B(v_B)_t = m_B(v'_B)_t \longrightarrow (v_B)_t = (v'_B)_t = 34.6\ ft.sec^{-1}$

در این راستا به ذرات نیرویی وارد نمی‌شود

لذا اصل ضربه و اندازه حرکت را بصورت جداگانه می‌نویسیم.

حرکت در راستای خط برخورد برای کل سیستم ($\sum F=0$) :

(برای سیستم شامل دو گلوله، برآیند نیرو صفر) بعد از برخورد $G' = G$ قبل از برخورد

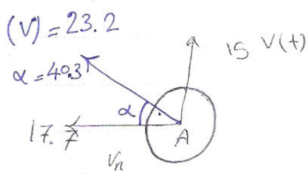
$$\cancel{m_A}(\underset{26}{v_A})_n + \cancel{m_B}(\underset{-20}{v_B})_n = \cancel{m_A}(v'_A)_n + \cancel{m_B}(v'_B)_n \Rightarrow \boxed{(v'_A)_n + (v'_B)_n = 6} \quad ①$$

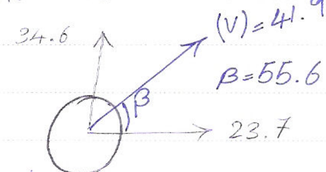
$m_A = m_B$

$$e = \frac{(v'_B)_n - (v'_A)_n}{(v_A)_n - (v_B)_n} \longrightarrow 0.9\left[26-(-20)\right] = (v'_B)_n - (v'_A)_n$$

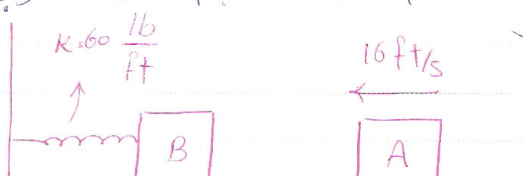
$$\Rightarrow \boxed{(v'_B)_n - (v'_A)_n = 41.4} \quad ②$$

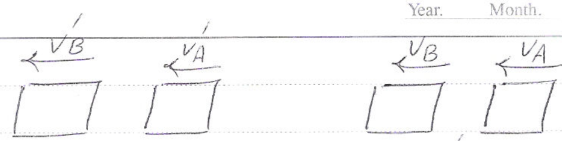
$$①,② \Rightarrow (v'_A)_n = -17.7 \quad , \quad (v'_B)_n = 23.7$$





مثال: قطعه B به وزن 3lb به فنر آزادی با ثابت $K = 60\frac{lb}{ft}$ متصل است، و روی سطح افقی بدون اصطکاک ساکن است. قطعه A با همان مشخصات قطعه B با سرعت $16\frac{ft}{sec}$ به قطعه B برخورد می‌کند. با فرض اینکه: الف) $e=1$ ب) $e=0$ ، مطلوبست ماکزیمم انحراف فنر.





برای طول بسته

استفاده از پایستاری اندازه حرکت

$$m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B \xrightarrow{m_A = m_B} v_A + v_B = v'_A + v'_B$$

$$\longrightarrow 16 + 0 = v'_A + v'_B \quad (1)$$

الف) $e = 1$: $\quad e = \dfrac{v'_B - v'_A}{v_A - v_B} = 1 \longrightarrow v'_B - v'_A = v_A - v_B$

1 و 2 $\Rightarrow v'_B = 16 \dfrac{ft}{sec} \quad , \; v'_A = 0$

$$\underbrace{U_g}_{0}{}_{1-2} + U_{e_{1-2}} + \underbrace{U_f}_{0}{}_{1-2} = \Delta T$$

$$\frac{1}{2} k x_1^2 - \frac{1}{2} k x_2^2 = \underbrace{T_2}_{\frac{1}{2} m v_2^2} - \underbrace{T_1}_{\frac{1}{2} m v_1^2} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} v_B = 0 \\ v_A = 16 \dfrac{ft}{sec} = v'_B \end{array} \right.$$

$x_1 = L_1 - L_0 = 0$ ← طول آزاد

$$-\frac{1}{2} \times 60 \times x_{MAx}^2 = -\frac{1}{2} \times \left(\frac{3\ lb}{32.2 \frac{ft}{s}} \right) \times 16^2$$

$$\Rightarrow x_{mAx} = 0.6305 \ ft$$

ب) $e=0 \longrightarrow V'_B - V'_A = 0 \longrightarrow V'_A = V'_B$

$V'_A + V'_B = 16 \Rightarrow V'_A = V'_B = 8\ ft/s$

$U_{g_{1-2}} + U_{e_{1-2}} + U_{1-2} = \Delta T_{1-2} = \cancel{T_2}^{\,0} - T_1$

$$0 - \frac{1}{2} k x_{max}^2 = -\frac{1}{2} \underbrace{(m_A + m_B)}_{\frac{3+2}{32}} V_B'^2 \longrightarrow x_{max} = 0.4458\ ft$$

چون سرعت ها با هم برابرا (جرم ها باهم جمع می شوند)

ضریب تبدیل پوند به کیلوگرم

* در برخورد مومسان دو ذره باهم یک سرعت دارند یعنی ذره ای با جرم $(m_A + m_B)$ و سرعت $V_A = V_B$.

والسلام

V_0