www.semeng.ir

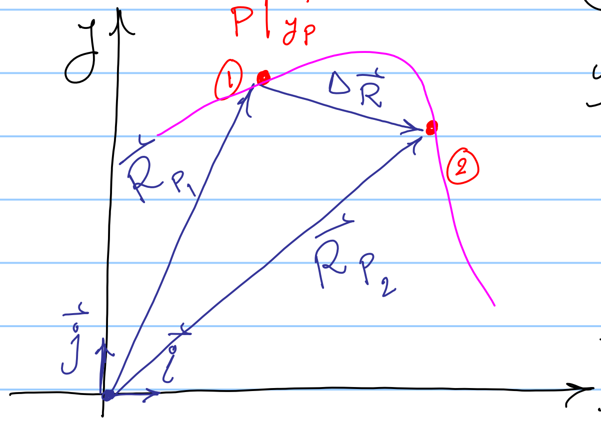
www.semeng.ir

بخش اول : سینماتیک

فصل ۱) سینماتیک ذره

۱-۱) مفهوم حرکت

در صفحه (x,y) نقطه P را بعنوان یک نقطه مادی در مختصات (x_p , y_p) فرض کنید:



✓ موقعیت نقطه P را با بردار موقعیت یا بردار مکان نمایش میدهیم.

✓ اگر نقطه P از ① به ② حرکت کند تغییر موقعیت $\Delta \vec{R}$ خواهد داشت.

$$\vec{R}_p = x_p \vec{i} + y_p \vec{j}$$

این مقدار تغییر موقعیت بستگی به مسیر ندارد.

ولی مدت زمان حرکت برای این تغییر موقعیت را هم لحاظ میکنیم.

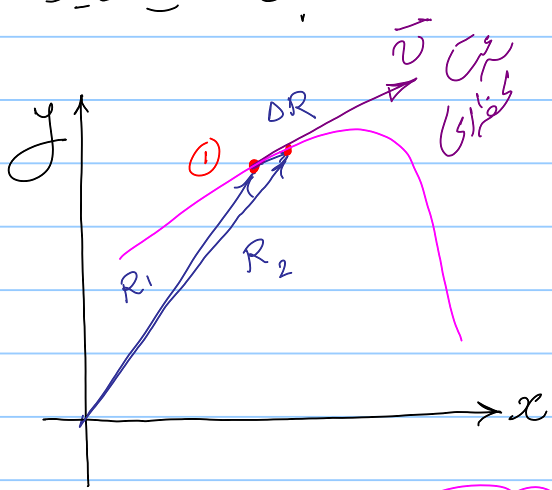
$$\Delta \vec{R} = \vec{R}_{p_2} - \vec{R}_{p_1}$$

Δt : زمان حرکت

✓ سرعت ذره P طبق تعریف تغییرات موقعیت آن در واحد زمان است.

$$\vec{V} = \frac{\Delta \vec{R}}{\Delta t}$$

$$\bar{V} = \frac{\Delta R}{\Delta t}$$ سرعت متوسط



$$\lim_{\Delta t \to 0} \Delta R = dR$$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{R}}{\Delta t} = \frac{d\vec{R}}{dt} \Rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{R}}{dt}$$

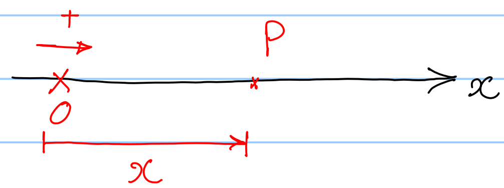
سرعت لحظه‌ای

یکی خواص مهم سرعت لحظه‌ای مماس بر مسیر حرکت.

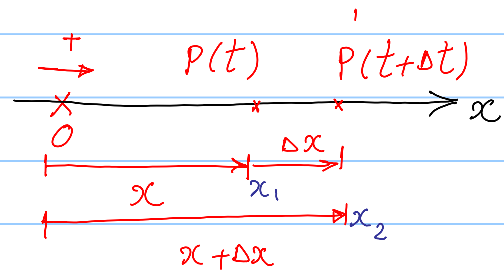
۲-۱) حرکت مستقیم الخط

وقتی یک نقطه مادی در راستای خط مستقیم حرکت کند، نوع حرکت را مستقیم الخط گویند.

در این نوع از حرکت، انتخاب مبدأ حرکت روی محور و جهت (+) حرکت اختیاری است.



در هنگام حرکت جسم، در هر لحظه از زمان (t) نقطه مادی P یک موقعیت مشخص نسبت به مبدأ



$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \text{سرعت متوسط} = \frac{x_2 - x_1}{\Delta t}$$

مثال) ذره‌ای فاصله بین دو نقطه AB را با سرعت‌های ثابت به ترتیب زیر طی می‌کند:
$1/3$ فاصله را با سرعت v، $2/3$ باقی را با سرعت $1/3\,v$، مطلوبست محاسبه سرعت متوسط:

$$\bar{v} = \frac{AB}{\Delta t_{AB}} = \frac{\frac{1}{3}AB + \frac{2}{3}AB}{\Delta t_{1/3} + \Delta t_{2/3}} = \frac{1/3\,AB + 2/3\,AB}{\frac{1/3\,AB}{v} + \frac{2/3\,AB}{1/3\,v}} = 3/7\,v$$

حال اگر تغییرات مکان نقطه مادی P را بخواهیم در مدت زمان کوتاه (dt) بررسی کنیم،
به مفهوم سرعت لحظه‌ای خواهیم رسید.

www.semeng.ir

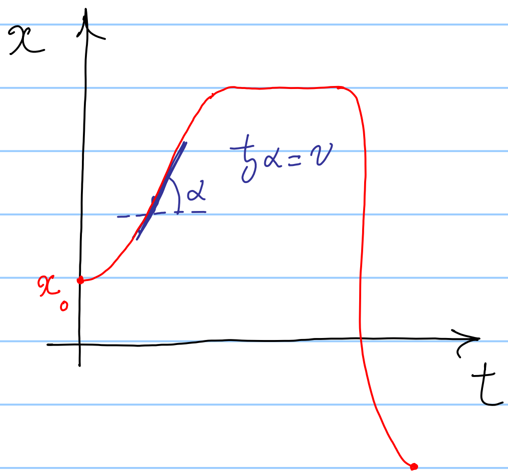
$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

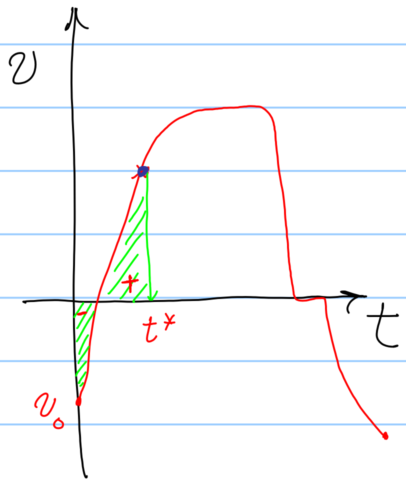
$$v = \frac{dx}{dt}$$ سرعت لحظه‌ای

$$dx = v\,dt \Rightarrow \int_{x_0}^{x} ds = \int_{t_0}^{t} v\,d\tau$$

$$x - x_0 = \int_{t_0}^{t} v\,d\tau$$

✓ منحنی تغییرات مکان برحسب زمان و منحنی تغییرات سرعت برحسب زمان:





✓ با فرض ثابت بودن v خواهیم داشت:

$$x - x_0 = \int_{t_0}^{t} v\,d\tau = v\int_{t_0}^{t} d\tau$$

$$x - x_0 = v(t - t_0)$$

$$x = v(t - t_0) + x_0$$ معادله حرکت جسم

$$t_0 = 0 \Rightarrow x = vt + x_0$$

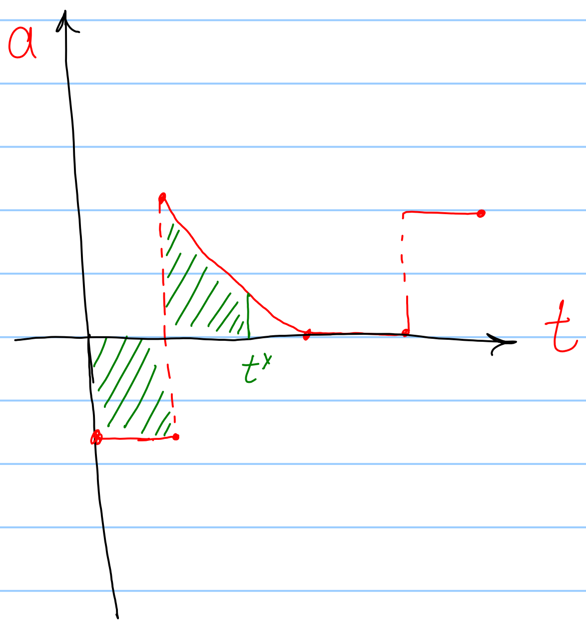
www.semeng.ir

✓ اگر در حرکت مستقیم الخط سرعت نیز تغییر کند، در آن بین دو لحظه t_1 و t_2 شتاب متوسط را
چنین تعریف شود:

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t}$$

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$ شتاب لحظه‌ای $$a = \frac{dv}{dt}$$

$$\left. \begin{aligned} v &= \frac{dx}{dt} \\ a &= \frac{dv}{dt} \end{aligned} \right\} \Rightarrow v\,dv = a\,dx$$ رابطه مستقل از زمان



$$dv = a\,dt$$

$$v - v_0 = \int_{t_0}^{t} a\,d\tau$$

www.semeng.ir

(ادامه حرکت مستقیم الخط)

۱-۲-۱ حالت‌های ممکن در حرکت مستقیم الخط

$$v = \frac{dx}{dt} \quad ; \quad a = \frac{dv}{dt}$$

الف) $a = f(t)$

فرض کنید در یک مسئله شتاب تابعی از زمان داده شده باشد.

$$a = \frac{dv}{dt} \longrightarrow dv = a\,dt \longrightarrow dv = f(t)\,dt$$

$$v - v_0 = \int_{t_0}^{t} f(\tau)\,d\tau$$

$$v = \frac{dx}{dt} \longrightarrow dx = v\,dt \longrightarrow x - x_0 = \int_{t_0}^{t} v(\tau)\,d\tau$$

ب) $a = f(x)$

$$v\,dv = a\,dx \longrightarrow \int_{v_0}^{v} v\,dv = \int_{x_0}^{x} a\,ds$$

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2 = \int_{x_0}^{x} f(s)\,ds$$

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dt = \frac{dx}{v(x)} \Rightarrow t - t_0 = \int_{x_0}^{x} \frac{ds}{v(s)}$$

www.semeng.ir

ج) $a = f(v)$

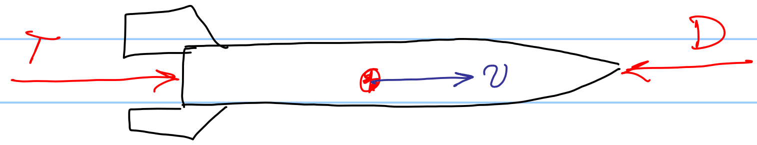
$$v\,dv = a\,dx$$

$$v\,dv = f(v)\,dx \Rightarrow dx = \frac{v\,dv}{f(v)} \Rightarrow \boxed{x - x_0 = \int_{v_0}^{v} \frac{u\,du}{f(u)}}$$

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow f(v) = \frac{dv}{dt} \Rightarrow \boxed{t - t_0 = \int_{v_0}^{v} \frac{du}{f(u)}}$$

مثال) یک موشک درحال پرواز افقی دارای سرعت v و شتاب a است. اگر در اثر مقاومت هوا تغییرات شتاب موشک بصورت $a = \alpha - \beta v^2$ که در آن α, β ثابت‌های معلوم هستند، باشد. مطلوبست تغییرات سرعت برحسب مکان.

$$a = \alpha - \beta v^2$$



$$v\,dv = a\,dx$$

$$v\,dv = (\alpha - \beta v^2)\,dx \Rightarrow x - x_0 = \int_{v_0}^{v} \frac{u}{\alpha - \beta u^2}\,du$$

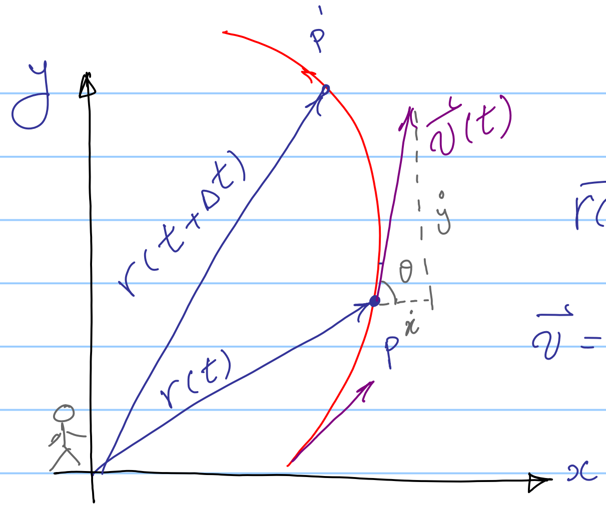
$$x - x_0 = \frac{1}{2\beta} \ln \frac{1}{\alpha - \beta u^2} \Bigg|_{v_0}^{v} \qquad x_0 = 0, \quad v_0 \neq 0$$

$$x = \frac{1}{2\beta} \ln \frac{\alpha - \beta v_0^2}{\alpha - \beta v^2} \Rightarrow \frac{\alpha - \beta v^2}{\alpha - \beta v_0^2} = e^{-2\beta x}$$

$$\alpha - \beta v^2 = (\alpha - \beta v_0^2)\, e^{-2\beta x} \Rightarrow \boxed{v = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \left\{ \alpha - (\alpha - \beta v_0^2)\, e^{-2\beta x} \right\}^{1/2}}$$

www.semeng.ir

۱-۲) حرکت در صفحه



$$\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dot{x}(t)\,\vec{i} + \dot{y}\,\vec{j}$$

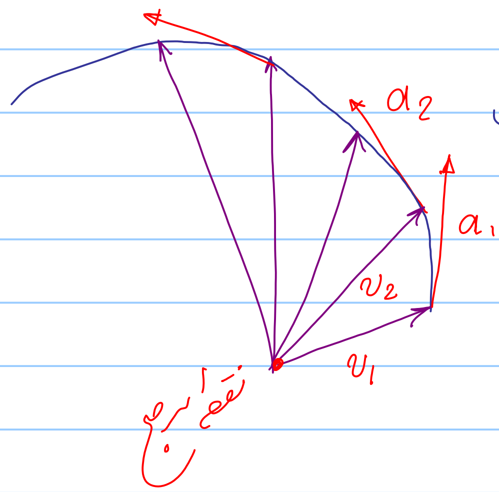
$$tg\,\theta = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \frac{dy}{dx}$$

سرعت‌های قابل محاسبه نسبت به مبدأ مختصات سنجیده می‌شوند.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \dot{\vec{r}}$$

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$$

سیر هودوگراف



در مختصات کارتزین:

$$\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$$

$$\vec{v} = \dot{x}\,\vec{i} + \dot{y}\,\vec{j} = v_x\,\vec{i} + v_y\,\vec{j}$$

$$\vec{a} = \ddot{x}\,\vec{i} + \ddot{y}\,\vec{j} = \dot{v}_x\,\vec{i} + \dot{v}_y\,\vec{j} = a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j}$$

در سال‌های دبیرستان فیزیک، جسم ابتدا شتاب را حس می‌کند، سپس سرعت آن ایجاد می‌شود و

در نهایت احساس تغییر مکان می‌کند.

www.semeng.ir

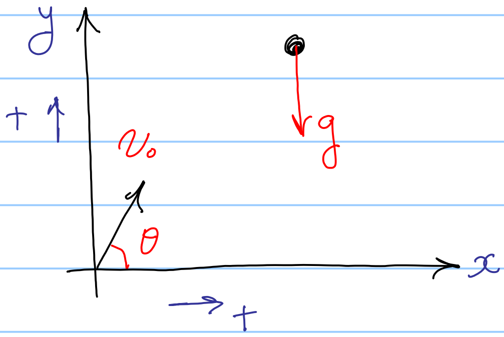
www.semeng.ir

ادامه حرکت در صفحه $(x-y)$

این حرکت را می‌توان به حالت‌های زیر که در طبیعت رخ می‌دهد تقسیم کرد:

① حرکت یک جسم بصورت پرتابه در خلاء:

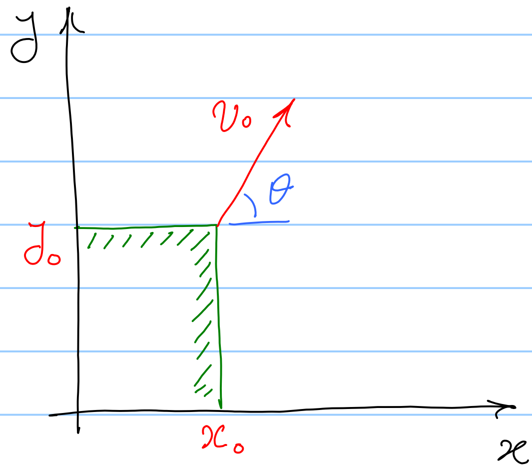
$$\begin{cases} a_x = 0 \longrightarrow \dfrac{dv_x}{dt} = 0 \longrightarrow v_x - v_{x_0} = 0 \\ a_y = -g \longrightarrow \dfrac{dv_y}{dt} = -g \longrightarrow v_y - v_{y_0} = -gt \end{cases}$$



معادلات سرعت پرتابه:

$$\begin{cases} v_x = v_{x_0} \\ v_y = -gt + v_{y_0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v_x \longrightarrow x - x_0 = v_{x_0} t \\ \dfrac{dy}{dt} = -gt + v_{y_0} \longrightarrow y - y_0 = -\frac{1}{2} g t^2 + v_{y_0} t \end{cases}$$



$$\begin{cases} x = v_{x_0} t + x_0 \\ y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_{y_0} t + y_0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{aligned} v_{x_0} &= v_0 \cos\theta \\ v_{y_0} &= v_0 \sin\theta \end{aligned}$$

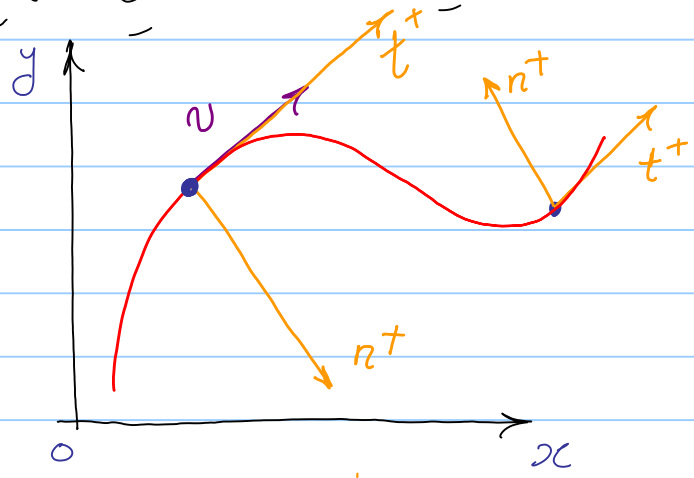
www.semeng.ir

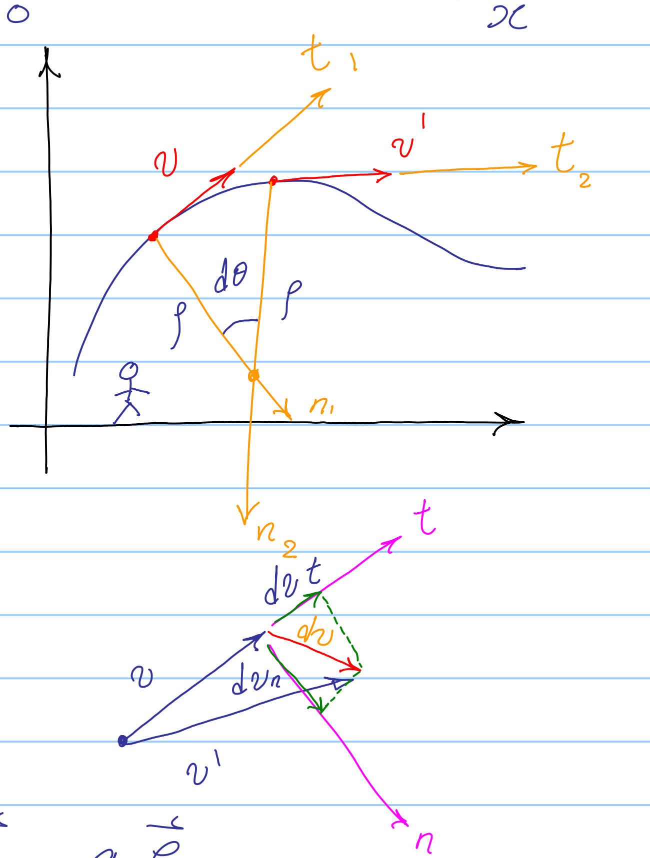
۱-۴) مختصات (n-t) یا مختصات مسیر

✓ این دستگاه مختصات یکی از مهم‌ترین دستگاه مختصات برای تحلیل دینامیک یک جسم در فضا است.

✓ این مختصات مخصوص جسم چسبیده به جسم است که روی مرکز ثقل وسیله متحرک قرار داده می‌شود.

✓ محور t آن در جهت سرعت و n عمود بر سرعت به سمت داخل منحنی است.





$$\vec{v} = v\,\vec{e}_t$$

$$v = \dot{s} = \frac{ds}{dt} = \frac{\rho\, d\theta}{dt} = \rho\,\dot{\theta}$$

ρ : انحنای مسیر

$\dot{\theta}$: سرعت زاویه‌ای نسبت به مرکز آن دوران

v : سرعت لحظه‌ای جسم

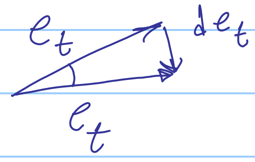
$$\begin{cases} \vec{dv} = \vec{dv}_t + \vec{dv}_n \longrightarrow \vec{a} = a_t\,\vec{e}_t + a_n\,\vec{e}_n \\ |\vec{dv}_n| = v\,d\theta \longrightarrow a_n = \dfrac{dv_n}{dt} = \dfrac{v\,d\theta}{dt} = v\dot{\theta} = \rho\dot{\theta}^2 = v^2/\rho \\ |\vec{dv}_t| = d(\rho\dot{\theta}) \longrightarrow a_t = \dfrac{dv_t}{dt} = \dfrac{d(\rho\dot{\theta})}{dt} = \dot{v} = \ddot{s} \end{cases}$$

$$\vec{a} = \dot{v}\,\vec{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\,\vec{e}_n$$

www.semeng.ir

$$\vec{v} = v\,\vec{e}_t \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(v\,\vec{e}_t\right)$$

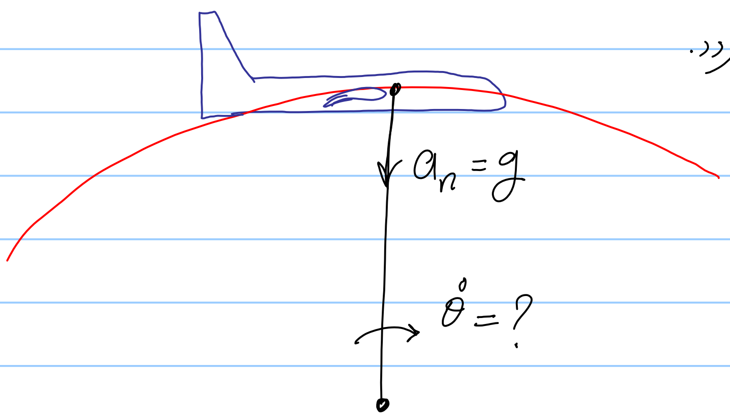
$$\vec{a} = \dot{v}\,\vec{e}_t + v\,\dot{\vec{e}}_t$$



$$\begin{cases} \dot{\vec{e}}_t = \dot{\theta}\,\vec{e}_n \\ \dot{\vec{e}}_t = v/\rho\,\vec{e}_n \end{cases}$$

$$\vec{a} = \dot{v}\,\vec{e}_t + v^2/\rho\,\vec{e}_n$$

مثال) هواپیمایی روی مسیری با سرعت $720\ km/h$ در حال حرکت است. برای آزمایش شرایط بی‌وزنی هواپیما باید $\dot{\theta}$ حرکت تا این شرایط بی‌وزنی ایجاد گردد.



$$a_n = v\dot{\theta}$$

$$g = v\dot{\theta}$$

$$\boxed{\dot{\theta} = g/v} = \frac{9.81}{720}(3.6)\ rad/s$$

تمرین‌های پیشنهادی از کتاب مریام ویرایش ۵

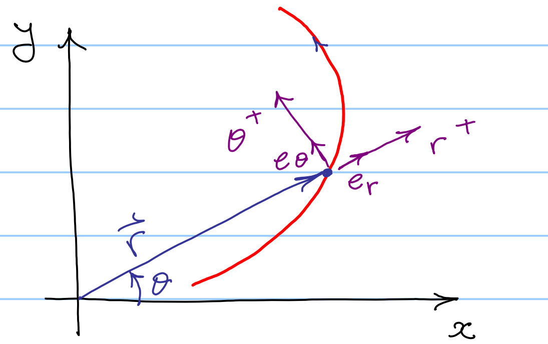
۱۱۰*	۸۷	۲-۵۶	۲-۳۶	۲-۲۲	۲-۳	۱-۷
۱۱۱	۹۴*	۲-۵۷	۲-۳۹	۲-۲۴	۲-۷	۱-۱۰
۱۱۶	۹۵	۲-۵۸	۲-۴۲	۲-۲۷	۲-۱۲	۱-۱۲
۱۲۴*	۱۰۱	۶۴	۲-۴۴	۲-۲۹	۲-۱۳	
۱۲۷*	۱۰۵	۶۹	۲-۴۶	۲-۳۱	۲-۱۴	
۱۴۰	۱۰۹*	۷۶*	۲-۴۸	۲-۳۳	۲-۱۷	
		۸۴	۲-۵۱	۲-۳۴	۲-۲۰	

www.semeng.ir

۵-۱) حرکت در مختصات (r, θ)

✓ مختصات (r,θ) مختصاتی است که به جسم چسبیده و با آن حرکت می‌کند.

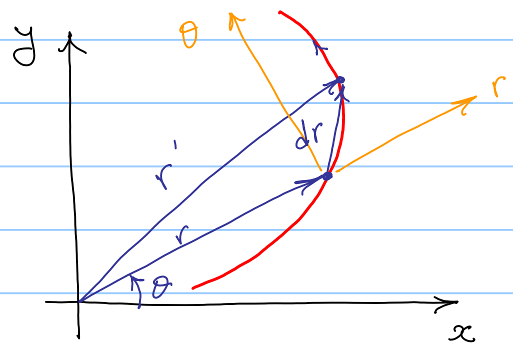
✓ جهت r^+ در امتداد بردار موقعیت جسم و جهت θ^+ عمود بر آن و در جهت قرار دادی است.



$$\boxed{\vec r = r\,\vec e_r}$$

$$\vec{dr} = \vec{dr}_r + \vec{dr}_\theta$$

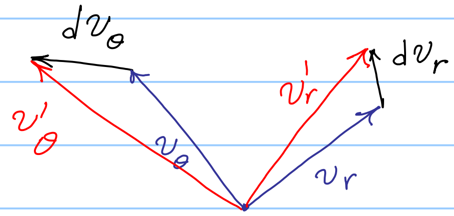
$$\vec v = \vec v_r + \vec v_\theta$$

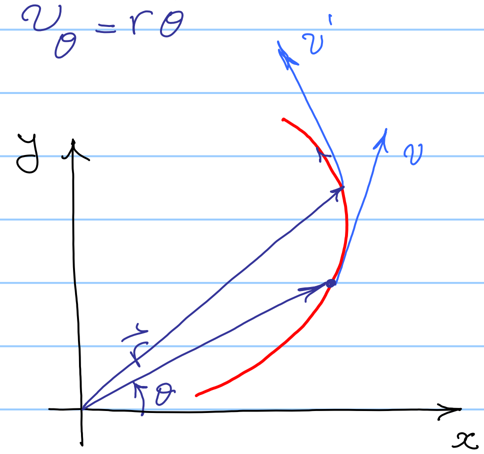


$$\dot{\vec r} = \vec v = \frac{d}{dt}(r\,\vec e_r)$$

$$\vec v = \dot r\,\vec e_r + r\,\dot{\vec e}_r \quad ; \quad \dot{\vec e}_r = \dot\theta\,\vec e_\theta$$

$$\boxed{\vec v = \dot r\,\vec e_r + r\dot\theta\,\vec e_\theta} \qquad v_r = \dot r \ , \ v_\theta = r\dot\theta$$





$$dv_r \begin{cases} (dv_r)_r = dv_r = d\dot r \\ (dv_r)_\theta = v_r\,d\theta = \dot r\,d\theta \end{cases}$$

$$dv_\theta \begin{cases} (dv_\theta)_r = dv_\theta = d(r\dot\theta) \\ (dv_\theta)_\theta = v_\theta\,d\theta = r\dot\theta\,d\theta \end{cases}$$

$$\vec a_r = a_r\,\vec e_r = (dv_r)\,\vec e_r + (dv_\theta)_r\,\vec e_r = (\ddot r - r\dot\theta^2)\,\vec e_r$$

$$\vec a_\theta = a_\theta\,\vec e_\theta = (r\ddot\theta + 2\dot r\dot\theta)\,\vec e_\theta$$

www.semeng.ir

$$\vec{a} = a_r \vec{e}_r + a_\theta \vec{e}_\theta$$
$$= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta$$

$$\vec{r} = r\vec{e}_r$$
$$\Rightarrow \vec{v} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$$

$$\vec{a} = \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \frac{d}{d\theta}(r\dot{\theta})\vec{e}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d}{dt}\vec{e}_\theta$$

$$\vec{a} = \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - r\dot{\theta}^2\vec{e}_r$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + \underbrace{2\dot{r}\dot{\theta}}_{\text{شتاب کوریولیس}})\vec{e}_\theta$$

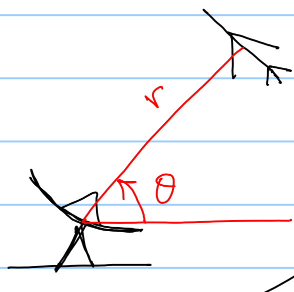
جمع بندی:

$$r = r$$

اگر $r=r(t)$ و $\theta=\theta(t)$ حرکت یک جسم مشخص باشد، آنگاه سرعت و شتاب آن را محاسبه کرد.

$$\begin{cases} v_r = \dot{r} \\ v_\theta = r\dot{\theta} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \end{cases}$$



مثال) در شکل زیر یک لغزنده داخل یک دسته شیار دار در حال حرکت و دسته نیز حول محور O در حال

دوران است. سرعت دورانی دسته شیار دار $80\ rpm$، شتاب زاویه‌ای آن $-280\ rpm/s$

موقعیت لغزنده در لحظه نشان داده شده $0.25\ m$، سرعت آن $0.3\ m/s$ - نسبت به شیار رو

شتاب نسبی نسبت به شیار صفر است.

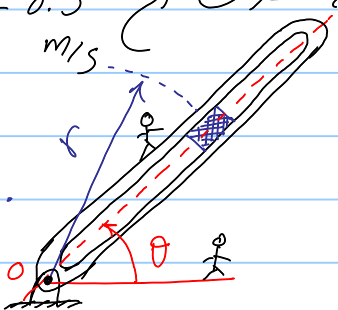
مطلوبست شتاب کل لغزنده نسبت به اینرسی

$\dot{\theta} = 80\ rpm$

$\ddot{\theta} = -280\ rpm/s$

$r = 0.25\ m \qquad \ddot{r} = 0$

$\dot{r} = -0.3\ m/s$



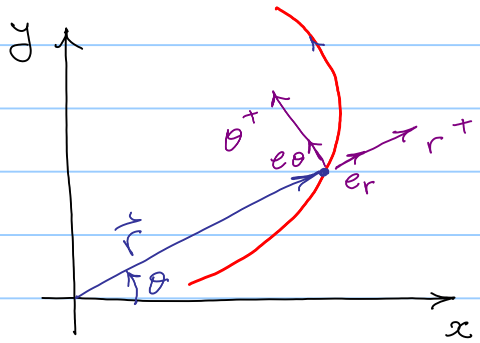
www.semeng.ir

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -17.55\ m/s^2$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = -18.36\ m/s^2$$

$$\vec{a} = -17.55\,\vec{e}_r - 18.36\,\vec{e}_\theta$$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$



$$u = \dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta$$

$$v = \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \ddot{x} = a_x = \ddot{r}\cos\theta - \dot{r}\dot{\theta}\sin\theta - \dot{r}\dot{\theta}\sin\theta - r\ddot{\theta}\sin\theta - r\dot{\theta}^2\cos\theta$$

$$\ddot{y} = a_y = \ddot{r}\sin\theta + \dot{r}\dot{\theta}\cos\theta + \dot{r}\dot{\theta}\cos\theta + r\ddot{\theta}\cos\theta - r\dot{\theta}^2\sin\theta$$

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \end{pmatrix}$$

مسائل تمرینی

۲-۱۳۱	۲-۱۵۹
۱۳۴	۲-۱۶۰
۱۳۸	۲-۱۶۳
۱۴۰	۲-۱۶۴
۱۴۸	۲-۱۶۵
۱۵۴	

www.semeng.ir

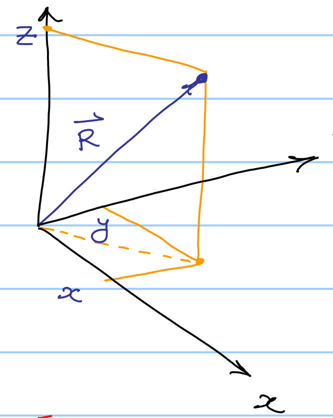
۶-۱) حرکت نقطه مادی در سه بعد

۱-۶-۱) حرکت در مختصات کارتزین

$$\vec{R} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$$

$$\vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$$



۱-۶-۲) حرکت در مختصات استوانه‌ای (r, θ, z)

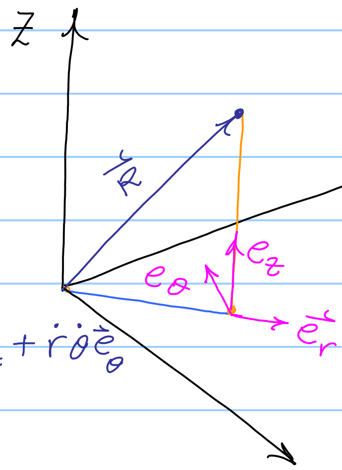
$$\vec{R} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$$

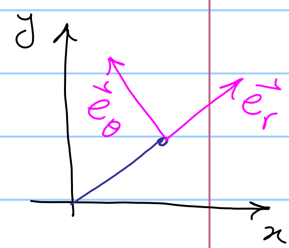
$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vec{e}}_r + \dot{z}\vec{e}_z$$

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z$$

$$\vec{a} = \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - r\dot{\theta}^2\vec{e}_r + \ddot{z}\vec{e}_z + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e}_z$$





۱-۶-۳) حرکت در مختصات کروی (r, θ, φ)

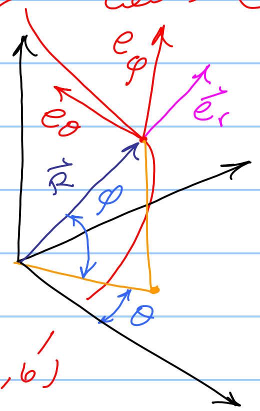
$$\vec{R} = R\vec{e}_r$$

$$\vec{v} = \dot{R}\vec{e}_r + R\dot{\vec{e}}_r$$

$$= \dot{R}\vec{e}_r + R\dot{\theta}\cos\varphi\,\vec{e}_\theta + R\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{a} = a_R\vec{e}_r + a_\theta\vec{e}_\theta + a_\varphi\vec{e}_\varphi$$

(کار در منزل)

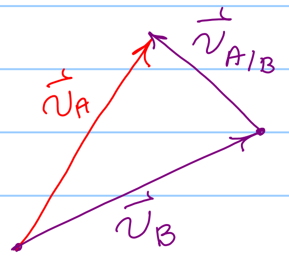


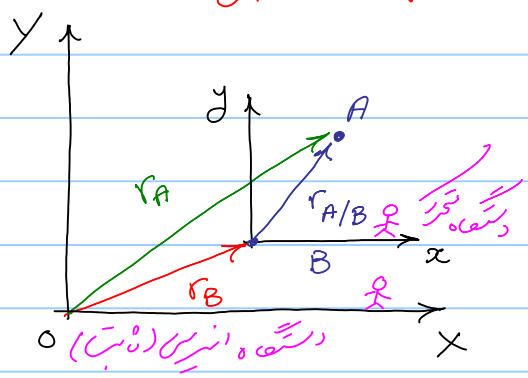
www.semeng.ir

۷-۱) حرکت نسبی

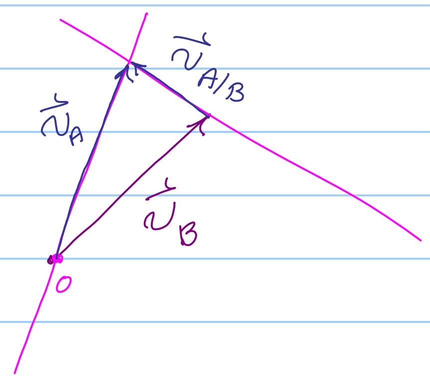
$$\vec r_A = \vec r_B + \vec r_{A/B}$$

$$\vec v_A = \vec v_B + \vec v_{A/B}$$





مثال) فرض کنید $\vec v_B$ معلوم باشد. جهت $v_{A/B}$ و v_A معلوم باشد. مطلوب است حل مسئله.

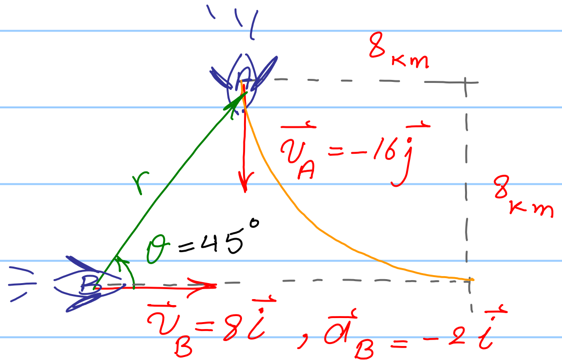


www.semeng.ir

(ادامه حرکت نسبی)

✓ سرعت A نسبت به B همیشه در جهت $\vec r_{A/B}$ نیست. بلکه می‌تواند در این جهت یک مؤلفه داشته باشد.

مثال) دو قایق نسبت به هم در حال حرکت هستند (مطابق شکل زیر).



الف) $\vec v_{A/B}$

ب) $\dot r, \dot\theta$ نسبت به ساز B

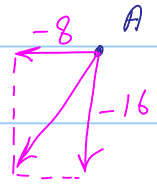
ج) $\vec a_{A/B}$

د) $\ddot r, \ddot\theta$ نسبت به B

الف)

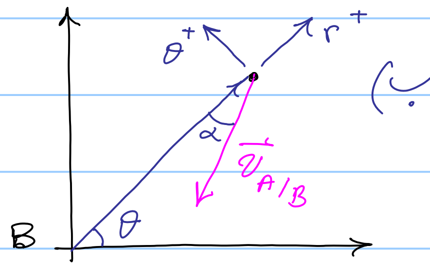
$$\vec v_A = \vec v_B + \vec v_{A/B}$$

$$-16\vec j = 8\vec i + \vec v_{A/B} \rightarrow \vec v_{A/B} = -8\vec i - 16\vec j$$



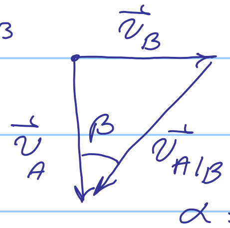
B

ب)



$$\begin{cases} \vec v_r = -v_{A/B}\cos\alpha\, \vec e_r \\ \vec v_\theta = -v_{A/B}\sin\alpha\, \vec e_\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec v_r = \dot r\, \vec e_r \rightarrow \dot r = -8.73\ m/s \\ \vec v_\theta = r\dot\theta\, \vec e_\theta \rightarrow \dot\theta = -0.686\ rad/s \times 10^{-3} \end{cases}$$



$\beta = \tan^{-1}\frac{v_B}{v_A}$

$\beta = 26.57°$

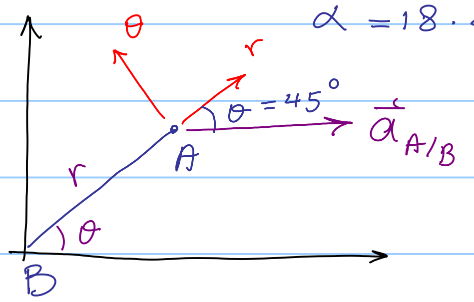
$\alpha = \theta - \beta$

$\alpha = 18.43°$

ج)

$$\vec a_{A/B} = \vec a_A - \vec a_B \quad ; \quad \begin{cases} \vec a_A = \frac{v_A^2}{\rho}\vec i \\ \vec a_B = -2\vec i \end{cases}$$

$$\vec a_{A/B} = \left(\frac{v_A^2}{\rho} + 2\right)\vec i$$



د)

$$\begin{cases} a_\theta = -0.0281\ m/s^2 = \ddot r - r\dot\theta^2 \\ a_r = 0.0281\ m/s^2 = r\ddot\theta + 2\dot r\dot\theta \end{cases}$$

$$\ddot r = 0.0301\ m/s^2$$

$$\ddot\theta = -9.44\ rad/s \times 10^{-6}$$

www.semeng.ir

۱۰-۱) حرکت اجسام متصل مقید

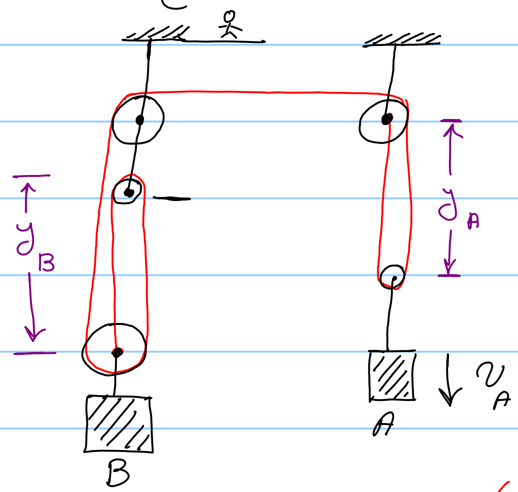
اگر مسائل اجسام متصل مقید، بشکل اتصال جرم، طناب و قرقره هستند.

در این مسائل طول طناب ثابت است.

طول هر طناب جمع جبری طول‌های تشکیل دهنده سیستم هستند.

$$L = 2y_A + 3y_B + K$$

$$0 = 2\dot{y}_A + 3\dot{y}_B \Rightarrow \begin{cases} v_A = -\frac{3}{2} v_B \\ v_B = -\frac{2}{3} v_A \end{cases}$$



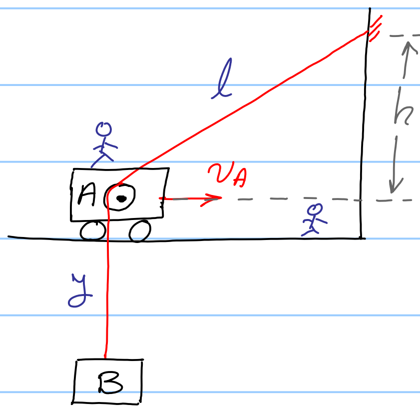
مثال)

$$L = y + l$$

$$L = y + \sqrt{x^2 + h^2}$$

$$0 = \dot{y} + \frac{2x\dot{x}}{2\sqrt{x^2+h^2}}$$

$$v_{B/A} = \dot{y} = \frac{-x\dot{x}}{\sqrt{x^2+h^2}} \quad ; \quad v_A = \dot{x}$$



$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A}$$

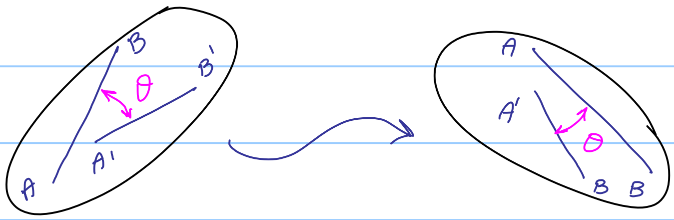
۲-۱۷۰	۲-۱۸۷	۲-۲۱۵	۲-۲۲۷
۱۷۴	۱۹۰	۲۱۶	۲۳۰
۱۷۶	۱۹۴	۲۱۹	۲۳۲
۱۸۵	۱۹۷	۲۲۱	۲۲۹
۱۸۴	۱۹۹*	۲۲۲*	۲۳۴
	۲۰۴		۲۵۶
			۲۵۹

www.semeng.ir

فصل ۲) سینماتیک اجسام صلب

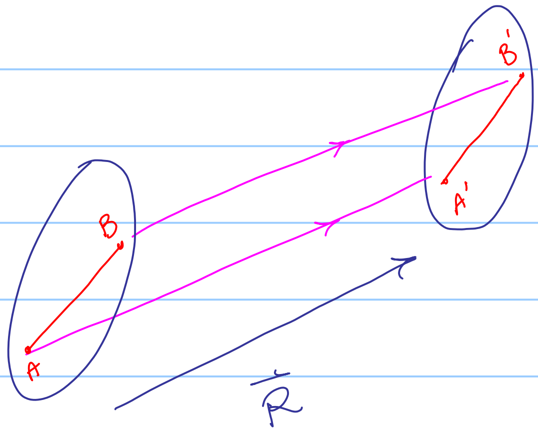
۲-۱) مقدمه

در این فصل هدف بررسی و تحلیل سینماتیک (موقعیت، سرعت و شتاب) اجسام صلب انجام می‌شود.
جسم صلب به جسمی گفته می‌شود که در فرآیند حرکت داخل جسم تغییر ابعاد داده نشود. یا به عبارت از نظر دینامیکی اگر دو خط فرضی AB و $A'B'$ دارای زاویه اولیه θ درجه باشند، بعد از فرآیند حرکت این زاویه حفظ گردد.



۲-۲) انواع حرکت

الف) حرکت مستقیم (انتقالی روی در راستای خط مستقیم)



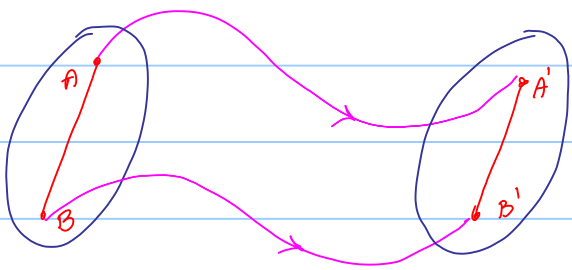
$AB \parallel A'B'$

$AA' \parallel BB'$

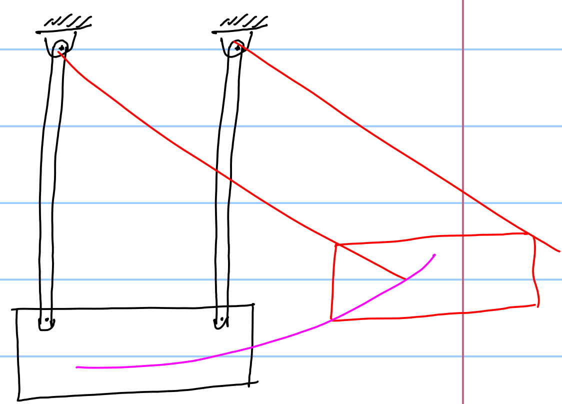
قوانین سینماتیک به قوانین مستقیم الخط نقطه جاری است.

$$v = \frac{dx}{dt} \; ; \; a = \frac{dv}{dt}$$

ب) حرکت انتقالی روی منحنی الخط

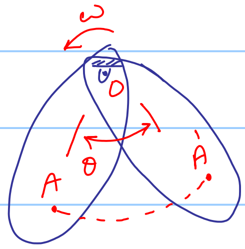


$AB \parallel A'B'$



www.semeng.ir

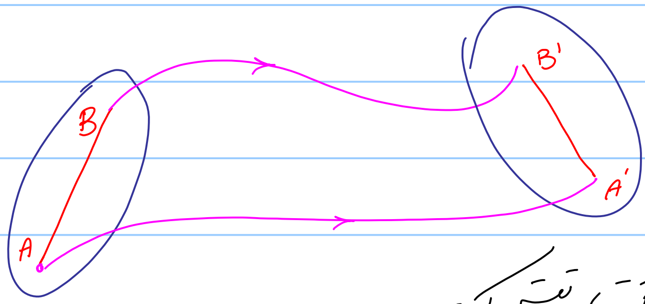
ج) حرکت دورانی

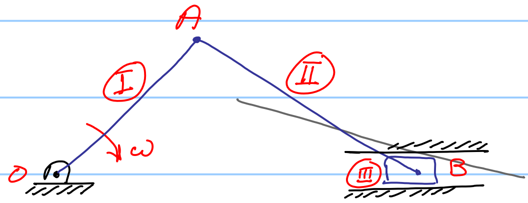


$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad ; \quad \alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

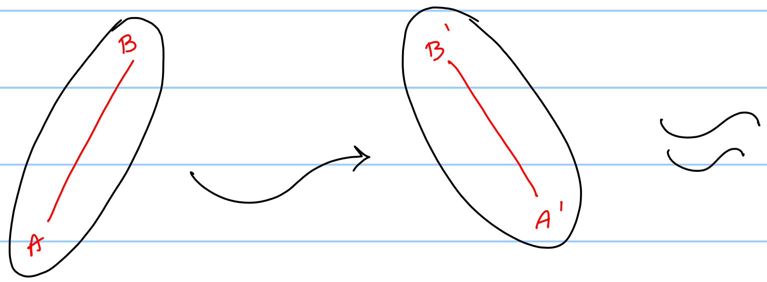
$$v = r\omega$$

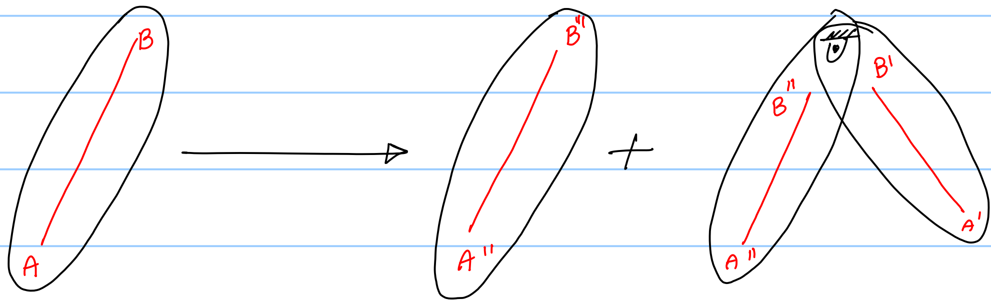
د) حرکت عمومی در صفحه





بعضی از حرکت‌های عمومی را می‌توان به دو حرکت تقسیم کرد.





www.semeng.ir

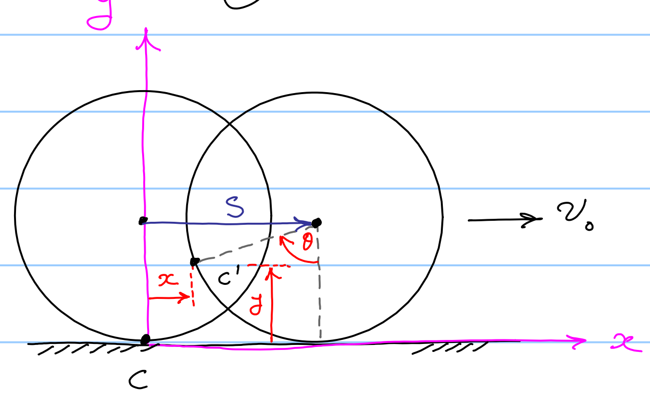
۳-۲) تحلیل سرعت اجسام صلب

برای تحلیل و بررسی سینماتیک اجسام صلب با توجه به اینکه اعضاء تشکیل دهنده یک سیستم صلب فرض می‌شود می‌توان با توجه به نوع حرکت یک رابطه هندسی برای چند نقطه نوشت. معمولاً در اکثر لینک بندی ها نقاط مهم سیستم تشکیل یک شکل را می‌دهند که بعضی از زوایا و ضلعهای آن شکل در اثر حرکت سیستم تغییر خواهند نمود. با مشتق گیری از روابط هندسی به یک رابطه جبر سرعت‌های اعضاء خواهیم رسید.

برای بررسی به شکل زیر دقت کنید.

شکل) هدف تحلیل سرعت یک نقطه اختیاری روی دیسکی که با سرعت v_0 در یک سطح افق بدون لغزش حرکت می‌کند.

تحلیل نقطه c :



$$\begin{cases} x_c = S - r\sin\theta \\ y_c = r - r\cos\theta \end{cases}$$

$$S = r\theta$$

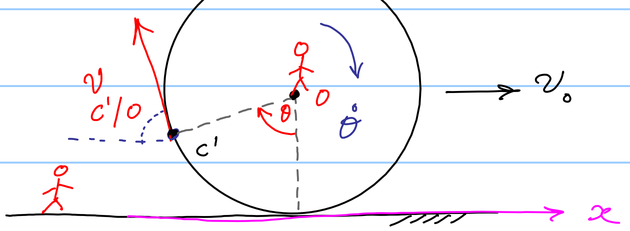
$$\dot{S} = r\dot{\theta} = v_0$$

$$\begin{cases} \dot{x}_c = \dot{S} - r\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{y}_c = 0 + r\dot{\theta}\sin\theta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{x}_c = v_0(1-\cos\theta) \\ \dot{y}_c = v_0\sin\theta \end{cases} \qquad \vec{v}_c = \dot{x}_c\,\vec{i} + \dot{y}_c\,\vec{j}$$

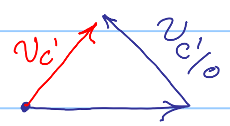
$$\ddot{x}_c = v_0(\dot{\theta}\sin\theta) = v_0\dot{\theta}\sin\theta$$

$$\ddot{y}_c = v_0\dot{\theta}\cos\theta \qquad \rightarrow \qquad \vec{a}_c = \ddot{x}_c\,\vec{i} + \ddot{y}_c\,\vec{j}$$

روش ترسیمی :



$$\vec{v}_{c'} = \vec{v}_0 + \vec{v}_{c'/0} \quad ; \quad \dot{\theta} = \frac{v_0}{r}$$

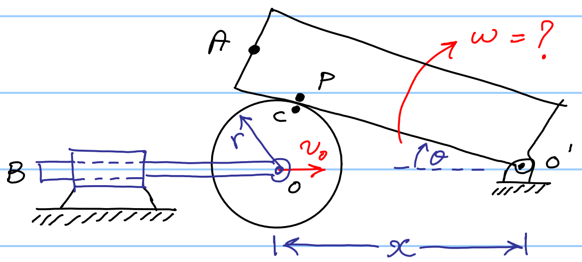


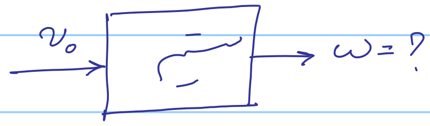
روش برداری :

$$\vec{v}_0 = v_0\,\vec{i} \quad ; \quad \vec{v}_{c'/0} = -v_0\cos\theta\,\vec{i} + v_0\sin\theta\,\vec{j} \Rightarrow \vec{v}_{c'} = v_0(1-\cos\theta)\,\vec{i} + v_0\sin\theta\,\vec{j}$$

www.semeng.ir

شکل





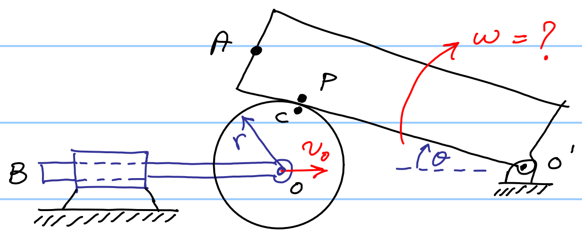
در مثلث $\overset{\Delta}{OCO'}$:
$$tg\theta = \frac{r}{PO'} = \frac{r}{\sqrt{x^2-r^2}}$$

$$\dot\theta(1+tg^2\theta) = \frac{-r\dfrac{x\dot x}{\sqrt{x^2-r^2}}}{x^2-r^2} \quad ; \quad \omega = \frac{-r x \dot x}{\left(1+\dfrac{r^2}{x^2-r^2}\right)(x^2-r^2)\sqrt{x^2-r^2}}$$

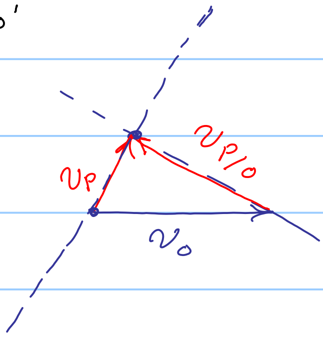
$$\omega = \frac{-r x \dot x}{(x^2-r^2)\sqrt{x^2-r^2} + r\sqrt{x^2-r^2}} = \frac{-r \cancel{x} \dot x}{x^{\cancel{2}}\sqrt{x^2-r^2}}$$

$$\boxed{\omega = \frac{-r v_0}{x\sqrt{x^2-r^2}}}$$

$$\sin\theta = \frac{r}{x} \rightarrow \dot\theta\cos\theta = \frac{-r\dot x}{x^2} \rightarrow \omega = \frac{-r\dot x}{x^2\dfrac{\sqrt{x^2-r^2}}{x}} = \frac{-r v_0}{x\sqrt{x^2-r^2}}$$



ترسیمی :



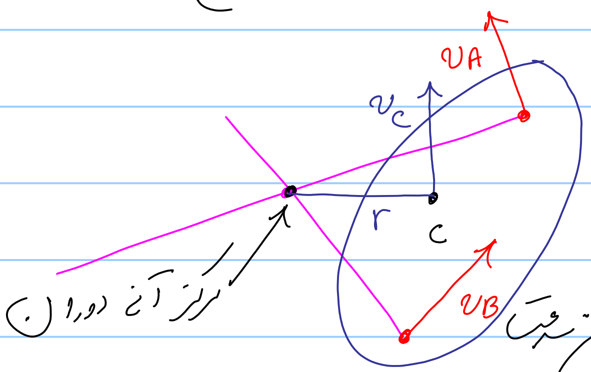
برداری توسط دانشجو

www.semeng.ir

۴-۲) مرکز آنی دوران

در کلیه حالتهای انواع حرکتهای گفته شده می‌توان مرکز آنی دوران تعریف کرد. مرکز آنی دوران نقطه یا مکان هندسی نقاطی است که در هر لحظه دارای سرعت صفر هستند.

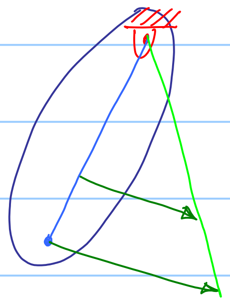
برای تعیین نقطه مرکز آنی کافیست ابتدا جهت سرعت دو نقطه مجزا روی جسم را مشخص کرده سپس دو عمود به آن دو جهت رسم کرده، محل تلاقی این دو جهت **مرکز آنی** جسم در آن لحظه است.

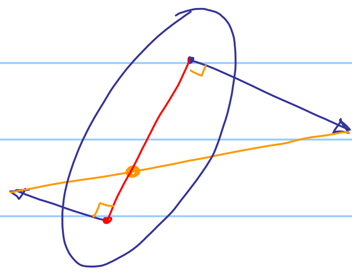


با داشتن مرکز آنی دوران سرعت سایر نقاط را می‌توان مشخص کرد.

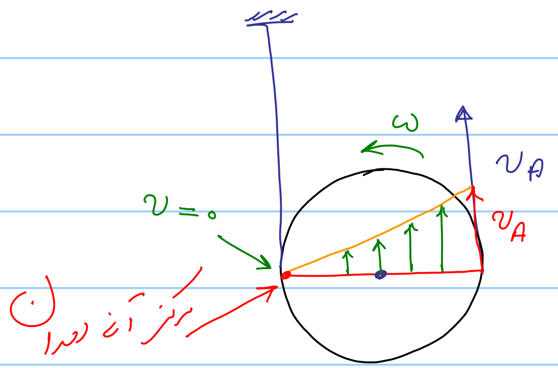
$$\vec{v}_c = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

در حرکت دورانی برای تعیین مرکز آنی دوران مشخص بودن سرعت دو نقطه کافیست (اندازه)





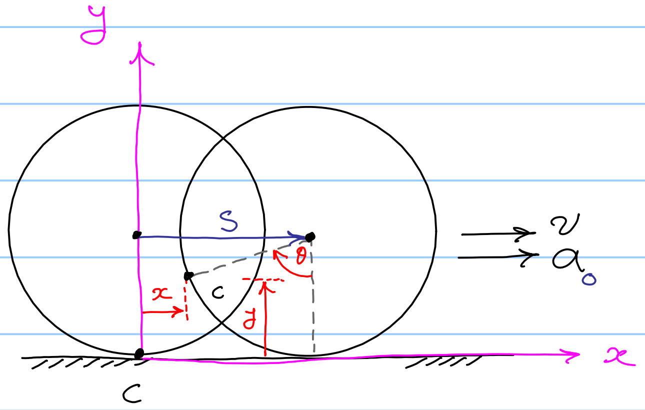
مثال)



www.semeng.ir

۵-۲) تحلیل حرکت شتاب دار

۱-۵-۲) روش اسکالر



$$\begin{cases} x_c = s - r\sin\theta & ; \; s = r\theta \\ y_c = r - r\cos\theta & ; \; \dot{s} = r\dot{\theta} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_{x_c} = \dot{x}_c = \dot{s} - r\dot{\theta}\cos\theta \\ v_{y_c} = \dot{y}_c = 0 + r\dot{\theta}\sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{x_c} = \ddot{s} - r\ddot{\theta}\cos\theta + r\dot{\theta}^2\sin\theta \\ a_{y_c} = r\ddot{\theta}\sin\theta + r\dot{\theta}^2\cos\theta \end{cases} \quad ; \; \ddot{s} = r\ddot{\theta}$$

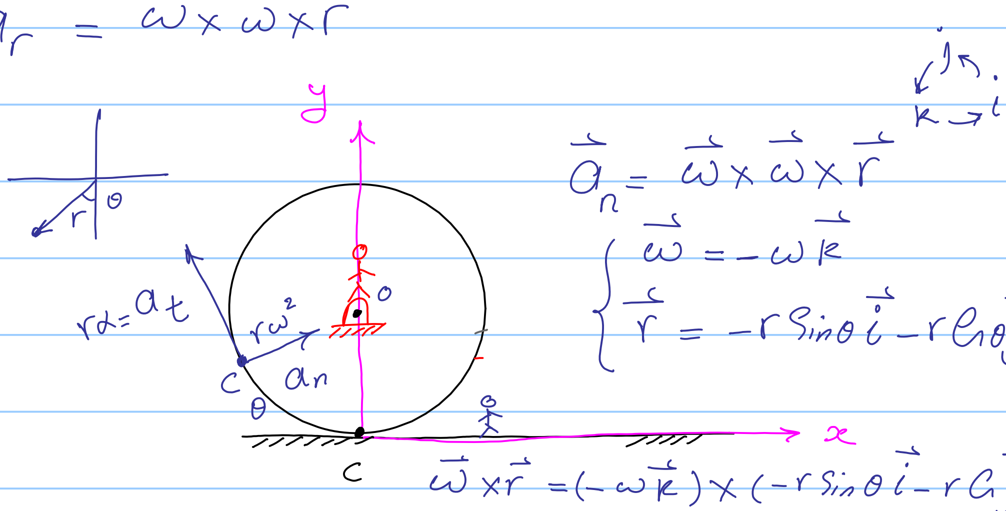
$$\vec{a}_c = [a_0(1-\cos\theta) + r\omega^2\sin\theta]\,\vec{i} + [a_0\sin\theta + r\omega^2\cos\theta]\,\vec{j}$$

۲-۵-۲) روش برداری

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$a_t = \dot{v} \quad ; \quad \vec{a}_\theta = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} \quad ;$$

$$a_n = v^2/\rho \quad ; \quad \vec{a}_r = \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}$$



$$\vec{a}_n = \vec{\omega} \times \omega \times \vec{r}$$

$$\begin{cases} \vec{\omega} = -\omega\vec{k} \\ \vec{r} = -r\sin\theta\,\vec{i} - r\cos\theta\,\vec{j} \end{cases}$$

$$\vec{a}_c = \vec{a}_0 + \vec{a}_{c/o}$$

$$\vec{a}_0 = a_0\,\vec{i}$$

$$\vec{a}_{c/o} = \vec{a}_{n_{c/o}} + \vec{a}_{t_{c/o}}$$

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = (-\omega\vec{k}) \times (-r\sin\theta\,\vec{i} - r\cos\theta\,\vec{j})$$

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = r\omega\sin\theta\,\vec{j} - r\omega\cos\theta\,\vec{i}$$

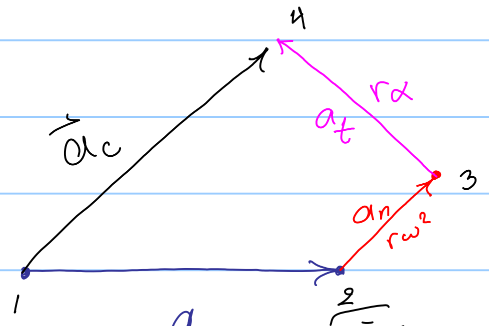
$$\vec{a}_{n_{c/o}} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = r\omega^2\sin\theta\,\vec{i} + r\omega^2\cos\theta\,\vec{j}$$

$$\vec{a}_{t_{c/o}} = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} = (-\alpha\vec{k}) \times (\vec{r})$$

$$\vec{a}_{t_{o/c}} = \alpha r \sin\theta\, \vec{j} - \alpha r \cos\theta\, \vec{i}$$

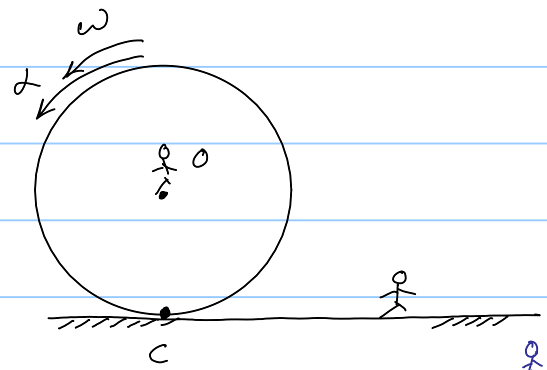
$$\vec{a}_c = (a_o + r\omega^2 \sin\theta - \alpha r \cos\theta)\,\vec{i} + (r\omega^2 \cos\theta + \alpha r \sin\theta)\,\vec{j}$$

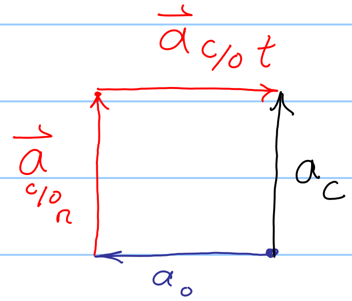
۳-۵-۲) روش ترسیمی



مثال) از روش ترسیمی شتاب c را بدست آورید.

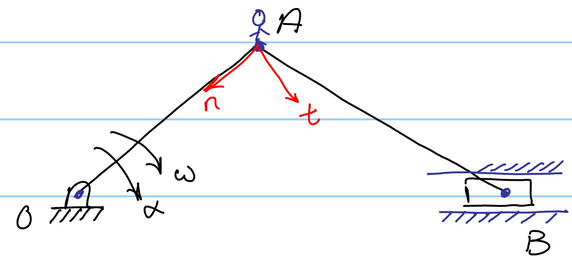
$$\vec{a}_c = \vec{a}_o + \vec{a}_{c/o}$$

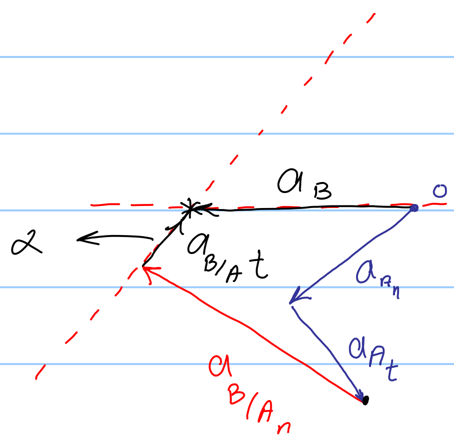


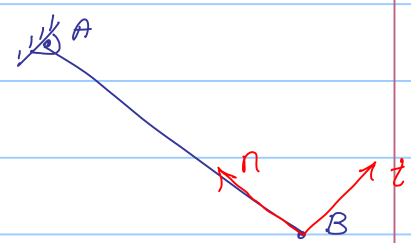


$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}$$

مثال)



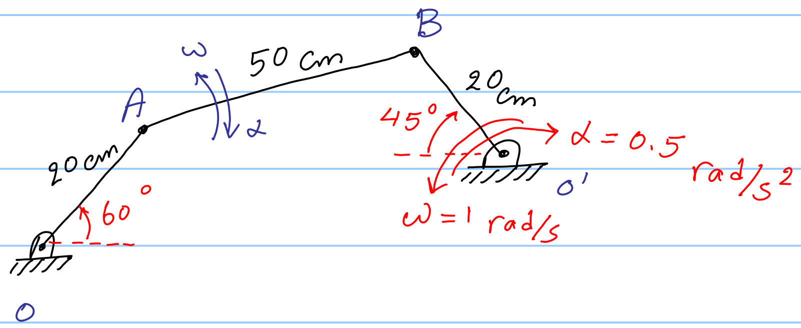




$$\vec{a}_B = \left(\vec{\omega}_{OA} \times \vec{\omega}_{OA} \times \vec{OA} + \dot{\vec{\omega}}_{OA} \times \vec{OA}\right) + \left(\vec{\omega}_{AB} \times \vec{\omega}_{AB} \times \vec{AB}\right) + \left(\dot{\vec{\omega}}_{AB} \times \vec{AB}\right)$$

www.semeng.ir

تمرین کلاسی) با استفاده از خط کش و گونیا تحلیل سرعت و شتاب انجام دهید

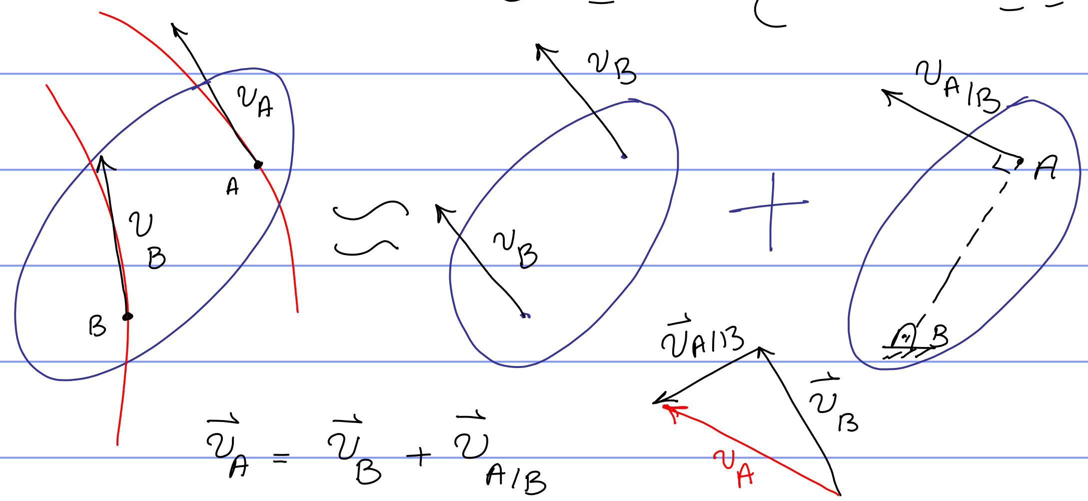


www.semeng.ir

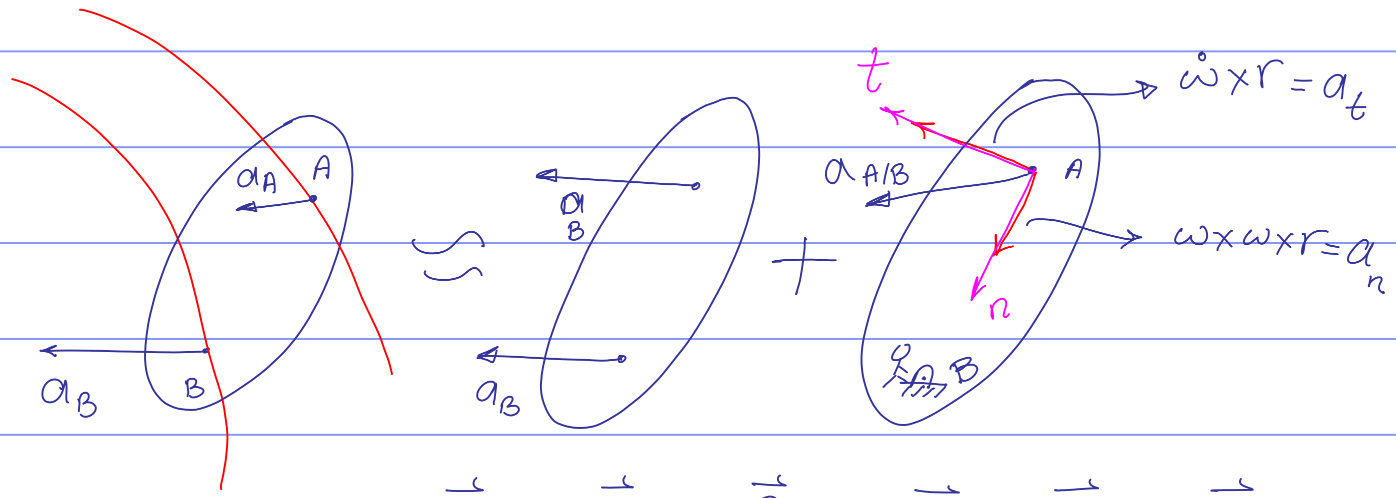
۲-۶) حرکت نسبی در دستگاه مختصات دوار

۲-۶-۱) تحلیل حرکت عمومی در حرکت نسبی

جسم صلب در نظر بگیرید که دو نقطه از آن روی دو مسیر مشخص شروع حرکت کنند.



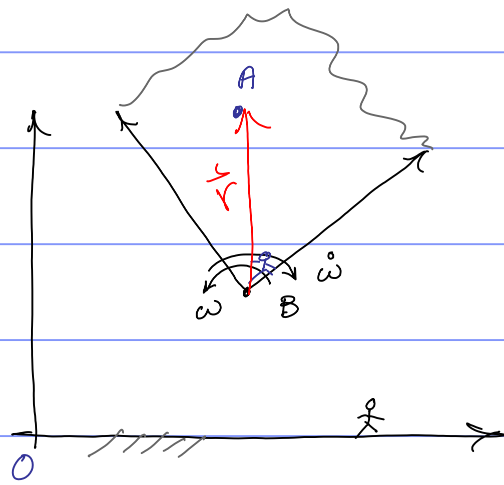
$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B}$$



$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{A/B} = \vec{a}_B + \vec{a}_{A/B_n} + \vec{a}_{A/B\,t}$$

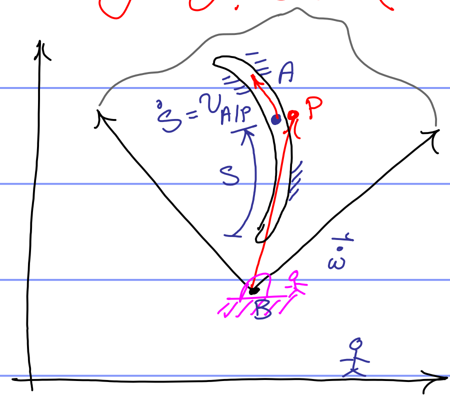
$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega}\times\vec{r}$$



www.semeng.ir

۲-۶-۲) حرکت نسبی داخل دستگاه دوار



رابطه بین سرعت A و B :

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B}$$

رابطه بین A و P :

$$\vec{v}_P = \vec{v}_B + \vec{v}_{P/B}$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/P} + \vec{v}_{P/B} \Rightarrow \vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega}\times\vec{r} + v_{rel}$$

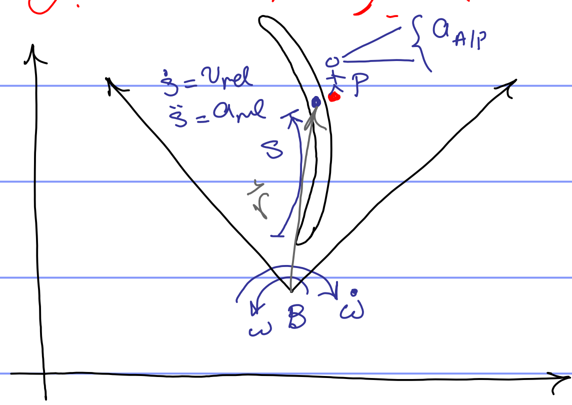
$$\vec{r}_A = \vec{r}_B + \vec{r}_{A/B} \longrightarrow \vec{v}_A = \vec{v}_B + \frac{d}{dt}(\vec{r}_{A/B}) \quad ; \quad \vec{r}_{A/B} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}_{A/B}) = \dot{x}\vec{i} + x\dot{\vec{i}} + \dot{y}\vec{j} + y\dot{\vec{j}} \quad : \quad \begin{cases} \dot{\vec{i}} = \omega\times\vec{i} \\ \dot{\vec{j}} = \omega\times\vec{j} \end{cases}$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + (\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}) + \omega\times(x\vec{i} + y\vec{j})$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \underbrace{v_{rel} + \vec{\omega}\times\vec{r}}_{v_{A/B}}$$

۲-۶-۳) تحلیل شتاب حرکت نسبی در دستگاه دوار



$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + a_{A/B}$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_P + \vec{a}_{A/P}$$

$$\vec{a}_P = \vec{a}_B + \vec{a}_{P/B}$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{A/P} + \vec{a}_{P/B}$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega}\times\vec{r} + \vec{v}_{rel}$$

مشتق $\longrightarrow$ $\vec{a}_A = \vec{a}_B + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} + \omega\times\dot{\vec{r}} + \underset{\vec{a}_{rel}}{\dot{\vec{v}}_{rel}} \quad ; \quad \dot{\vec{r}} = \omega\times\vec{r} + \vec{v}_{rel} = \vec{v}_{A/B}$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r} + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} + \underbrace{2\vec{\omega}\times\vec{v}_{re}}_{\text{شتاب کوریولیس}} + \vec{a}_{re}$$

۵-۴	۵-۲۸*	۴۵	۵-۶۲	۸۲	۵-۹۸	۵-۱۲۹
-۱۳	۳۱	۴۶*	۶۵	۸۴	۱۰۱	۱۳۳
۱۴	۳۳	۵۲*	۶۹	۸۵	۱۰۹	۱۳۵*
۱۸	۳۷	۵۴*	۷۲	۸۸	۱۱۳	۱۴۰*
۲۲	۴۱	۵۶	۷۴	۸۹	۱۱۶	۱۴۴
۲۴	۴۲		۷۸		۱۱۸	۱۴۶

۵-۱۵۲	۱۷۸	۵-۱۸۹
۱۵۸		۱۹۱
۱۶۰		۱۹۲
۱۷۱		۱۹۸
۱۷۳		۲۰۲
۱۷۷		

www.semeng.ir