مقدمه

در مقایسه با سایر رشته ها، در رشته مهندسی مکانیک تعداد دروسی که در کنکور کارشناسی ارشد از آنها سئوالات تستی مطرح می شود زیاد است و ماهیت دروس نیز به نحوی می باشد که روابط ریاضی و تجربی فراوانی در آن بکار می روند. همین ویژگی سبب می شود که با مرور زمان این روابط به سادگی فراموش گردند. هدف از ارائه این چکیده آن است که در زمان نزدیک به کنکور کارشناسی ارشد که امکان دوره کامل دروس و روابط آنها وهمچنین امکان مطالعه کتاب و جزوات کامل در بازه زمانی کم باقیمانده وجود ندارد با مرور این چکیده، روابط فراموش شده به سرعت در ذهن تداعی گردد. برای کمک به این مهم، تعدادی تست نیز گنجانده شده که پس از یادآوری نکات و روابط این دروس آمادگی و سرعت عمل مورد نیاز برای شرکت در کنکور کارشناسی ارشد فراهم آید.

با آرزوی موفقیت

در جدول ذیل دروس به سرفصلهای مهم آن طبقه بندی شده و مشخص شده است که در هر سال از هر مبحث چند تست سوال شده است و دانشجوی محترم می تواند زمان باقیمانده تا کنکور را با توجه به اهمیت مباحث مدیریت نماید.

رشته مکانیک درس: دینامیک								
ردیف	مبحث	۱۳۸۵ تعداد تست	۱۳۸۶ تعداد تست	۱۳۸۷ تعداد تست	۱۳۸۸ تعداد تست	۱۳۸۹ تعداد تست	مجموع در ۵ سال	نسبت از کل
1	حرکت مستقیم‌الخط	1	0	0	0	0	1	3%
2	حرکت منحنی‌الخط در صفحه	1	1	0	0	1	3	9%
3	قانون دوم نیوتن و قانون اویلر	0	1	1	1	1	4	12%
4	دستگاه‌های چرخان و سرعت و شتاب نسبی و مفهوم شتاب کریولیس	3	1	0	1	0	5	15%
5	کار و انرژی	2	2	2	2	2	10	30%
6	ضربه و اندازه حرکت	0	3	1	1	0	5	15%
7	سینماتیک اجسام صلب	1	0	1	0	0	2	6%
8	سینتیک اجسام صلب	1	1	0	0	1	3	9%
جمع		9	9	5	5	5	33	100%

دینامیک ذرات

حرکت مستقیم‌الخط: حرکتی که در آن ذره بر روی یک خط راست حرکت می‌کند. در این حرکت روابط زیر صادق‌اند:

$v_{av}=\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\dfrac{s_2-s_1}{t_2-t_1}$ (سرعت متوسط ذره)

$v=\dot{s}=\dfrac{ds}{dt}$ (سرعت لحظه‌ای)

$a_{av}=\dfrac{\Delta v}{\Delta t}=\dfrac{v_2-v_1}{t_2-t_1}$ (شتاب متوسط)

$a=\dot{v}=\dfrac{dv}{dt}=\ddot{s}=\dfrac{d^2s}{dt^2}$ (شتاب لحظه‌ای)

در روابط بالا s مکان ذره در زمان دلخواه t ، s_1 و s_2 به ترتیب مکان ذره در زمان‌های t_1 و t_2 می‌باشند. در ضمن v_1 و v_2 سرعت‌های لحظه‌ای ذره در زمان‌های t_1 و t_2 می‌باشند.

تعابیر هندسی سرعت و شتاب

الف) شیب خط قاطع بر منحنی مکان ـ زمان بین دو زمان t_1 و t_2 سرعت متوسط بین این دو لحظه زمان می‌باشد.
ب) شیب خط مماس بر منحنی مکان ـ زمان در هر لحظه برابر است با سرعت لحظه‌ای در آن لحظه
ج) شیب خط قاطع بر منحنی سرعت ـ زمان بین دو زمان t_1 و t_2 شتاب متوسط بین این دو لحظه زمان می‌باشد.
د) شیب خط مماس بر منحنی سرعت ـ زمان در هر لحظه برابر است با شتاب لحظه‌ای در آن لحظه
هـ) سطح زیر منحنی سرعت ـ زمان بین دو زمان t_1 و t_2 برابر است با جابه‌جایی ذره بین این دو لحظه زمان
و) سطح زیر منحنی شتاب ـ زمان بین دو زمان t_1 و t_2 برابر است با تغییرات سرعت لحظه‌ای ذره (Δv) بین این دو لحظه زمان
ز) سطح زیر منحنی شتاب ـ مکان بین دو مکان s_1 و s_2 برابر است با نصف تفاضل مجذور سرعت لحظه‌ای در این دو مکان $\left(\text{Area}=\dfrac{v_2^2-v_1^2}{2}\right)$

حرکت ذره در مسیر دایروی: حرکت است که در آن ذره بر روی یک مسیر دایروی به شعاع ثابت R و مرکز O حرکت می‌کند.
روابط حاکم بر این حرکت عبارتند از:

$\omega_{av}=\dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}=\dfrac{\theta_2-\theta_1}{\Delta t}$ (سرعت زاویه‌ای متوسط)

$\omega=\dot{\theta}=\dfrac{d\theta}{dt}$ (سرعت زاویه‌ای لحظه‌ای)

$\alpha_{av}=\dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}=\dfrac{\omega_2-\omega_1}{\Delta t}$ (شتاب زاویه‌ای متوسط)

$\alpha=\dot{\omega}=\ddot{\theta}=\dfrac{d\omega}{dt}=\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$ (شتاب زاویه‌ای لحظه‌ای)

$v=R\dot{\theta}=R\omega$ (سرعت خطی لحظه‌ای)

یادداشت:

....

....

....

....

تمامی نکات ارائه شده به عنوان تعابیر هندسی برای حرکت ذره بر روی خط راست برای حرکت ذره در مسیر دایروی نیز صادق است با این تفاوت که جابه‌جایی خطی s با جابه‌جایی زاویه‌ای θ و سرعت‌ها و شتاب‌های خطی v و a به ترتیب با سرعت‌ها و شتاب‌های زاویه‌ای ω و α جایگزین می‌گردند.

در مسائل مختلف می‌تواند شتاب تابعی از زمان، مکان، سرعت و یا ثابت باشد و این تابعیت معلوم باشد و روابط سرعت و جابه‌جایی برحسب زمان خواسته شود. در این صورت به صورت زیر عمل می‌شود.

الف) $a = \text{constant}$

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = adt \Rightarrow \int_{v_0}^{v} dv = a\int_0^t dt \Rightarrow v = v_0 + at$$

$$v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow ds = vdt \Rightarrow \int_{s_o}^{s} ds = \int_0^t (v_0 + at)dt \Rightarrow s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

ب) $a = f(t)$

$$a = \frac{dv}{dt} = f(t) \Rightarrow \int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t f(t)dt = g(t) \Rightarrow v = v_0 + g(t)$$

$$v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow ds = vdt \Rightarrow \int_{s_0}^{s} ds = \int_0^t (v_0 + g(t))dt$$

ج) $a = f(v)$

روش اول:

$$a = \frac{dv}{dt} = f(v) \Rightarrow \frac{dv}{f(v)} = dt \Rightarrow \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{f(v)} = \int_0^t dt = t$$

سرعت تابعی از زمان به دست می‌آید.

$$v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow ds = vdt \Rightarrow \int_{s_0}^{s} ds = \int_0^t vdt$$

روش دوم:

$$vdv = ads = f(v)ds \Rightarrow \int_{v_0}^{v} \frac{vdv}{f(v)} = \int_{s_0}^{s} ds = s - s_0$$

سرعت تابعی از مکان به دست می‌آید.

$$v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow dt = \frac{ds}{v} \Rightarrow \int_0^t dt = \int_{s_0}^{s} \frac{ds}{v}$$

د) $a = f(s)$

$$vdv = ads = f(s)ds \Rightarrow \int_{v_0}^{v} vdv = \int_{s_0}^{s} f(s)ds$$

سرعت تابعی از مکان به دست می‌آید.

$$v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow dt = \frac{ds}{v} \Rightarrow \int_0^t dt = \int_{s_0}^{s} \frac{ds}{v}$$

ه) اگر شتاب به طور هم زمان تابعی از چندین متغیر باشد مثلاً تابعی از زمان و مکان باشد بهتر است با جای‌گذاری $v = \dot{s}$ و $a = \dot{v} = \ddot{s}$ یک معادله دیفرانسیل تشکیل و مسئله حل شود.

یادداشت:

....

....

....

....

حرکت منحنی‌الخط در صفحه و فضا

حرکت ذره بر روی مسیر منحنی در صفحه یا فضا را می‌توان با انتخاب دستگاه مختصات مناسب بررسی نمود.

دستگاه‌های مختصاتی که معمولاً مورد استفاده قرار می‌گیرد عبارتند از:

الف) دستگاه مختصات دکارتی

ب) دستگاه مختصات قائم و مماسی

ج) دستگاه مختصات استوانه‌ای

د) دستگاه مختصات کروی

نکات زیر در بررسی حرکت ذره بر روی مسیر منحنی می‌بایستی مورد توجه قرار گیرد.

۱ـ بردار سرعت همواره مماس بر مسیر و بردار شتاب مماس بر منحنی شتابنما (Hodograph) می‌باشد.

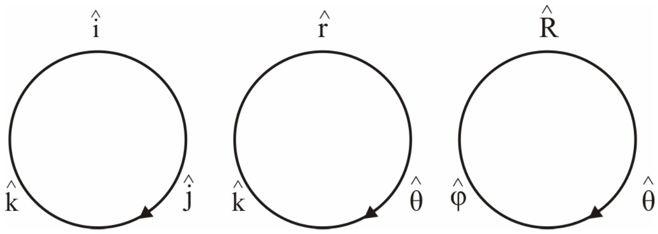
۲ـ مشتق برداری یکه $\hat{\lambda}$ نسبت به زمان در هر دستگاه مختصات از رابطه $\dot{\hat{\lambda}} = \vec{\omega} \times \hat{\lambda}$ که در آن $\vec{\omega}$ بردار سرعت زاویه‌ای است.

۳ـ در دستگاه مختصات قائم و مماسی شتاب مماسی a_t نرخ زمانی تغییر اندازه سرعت و شتاب قائم ناشی از تغییر جهت سرعت می‌باشد.

۴ـ حرکت ذره بر روی سطح مخروطی را می‌توان با هر دو دستگاه مختصات استوانه‌ای (در این صورت $r = z\tan\beta$ می‌باشد که در آن β نصف زاویه رأس مخروط است) یا دستگاه مختصات کروی (در این صورت $\varphi = \frac{\pi}{2} - \beta$) بررسی نمود.

روابط مربوط به دستگاه‌های مختصات مختلف در جدول زیر خلاصه شده است.

نکته: حاصل ضرب خارجی بردارهای یکه هر سه دستگاه مختصات دکارتی، استوانه‌ای و کروی می‌تواند با توجه به اشکال زیر به دست آیند حاصل ضرب خارجی هر دو بردار یکه اگر از بردار اول به سمت بردار دوم کوتاه‌ترین مسیر روی دایره طی شود در جهت فلش برابر بردار یکه سوم و در خلاف جهت فلش برابر منفی بردار سوم می‌باشد.



یادداشت:

....

....

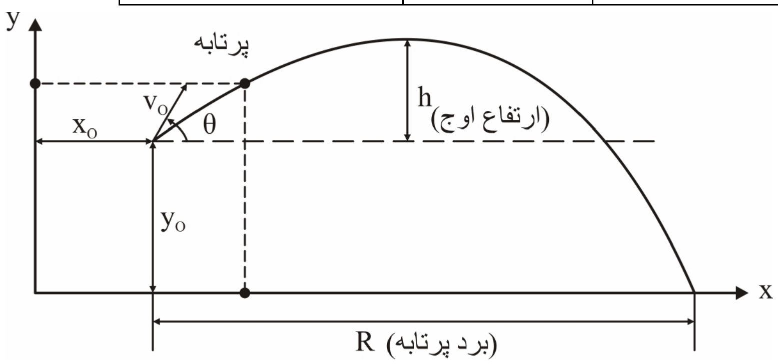
....

....

جمع‌بندی

	دستگاه مختصات دکارتی	دستگاه مختصات قائم و مماسی	دستگاه مختصات استوانه‌ای (در حالت خاص قطبی)	دستگاه مختصات کروی
بردارهای یکه و مختصات	$\hat{i}\,,\hat{j}\,,\hat{k}$ $x\,,y\,,z$	$\hat{n}\,,\hat{t}$ $\rho\,,\theta$	$\hat{r}\,,\hat{\theta}\,,\hat{k}$ $r\,,\theta\,,z$	$\hat{R}\,,\hat{\theta}\,,\hat{\varphi}$
مشتقات بردارهای یکه	$\dot{\hat{i}}=\vec{0}$ $\dot{\hat{j}}=\vec{0}$ $\dot{\hat{k}}=\vec{0}$	$\dot{\hat{n}}=-\dot{\theta}\hat{t}$ $\dot{\hat{t}}=\dot{\theta}\hat{n}$	$\dot{\hat{r}}=\dot{\theta}\hat{\theta}$ $\dot{\hat{\theta}}=-\dot{\theta}\hat{r}$ $\dot{\hat{k}}=\vec{0}$	$\dot{\hat{R}}=\left(\dot{\theta}\cos\varphi\right)\hat{\theta}+\dot{\varphi}\hat{\varphi}$ $\dot{\hat{\theta}}=-\left(\dot{\theta}\cos\varphi\right)\hat{R}+\left(\dot{\theta}\sin\varphi\right)\hat{\varphi}$ $\dot{\hat{\varphi}}=-\dot{\varphi}\hat{R}-\left(\dot{\theta}\sin\varphi\right)\hat{\theta}$
مولفه‌های سرعت	$v_x=\dot{x}$ $v_y=\dot{y}$ $v_z=\dot{z}$	$v_t=\rho\dot{\theta}$	$v_r=\dot{r}$ $v_\theta=r\dot{\theta}$ $v_z=\dot{z}$	$V_R=\dot{R}$ $V_\theta=\left(R\cos\varphi\right)\dot{\theta}=r\dot{\theta}$ $v_\varphi=R\dot{\varphi}$
مولفه‌های شتاب	$a_x=\ddot{x}$ $a_y=\ddot{y}$ $a_z=\ddot{z}$	$a_n=\frac{v_t^2}{\rho}$ $a_t=\dot{v}_t$	$a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2$ $a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}$ $a_z=\ddot{z}$	$a_R=\ldots$ $a_\theta=\ldots$ $a_\varphi=\ldots$
بردارهای سرعت زاویه‌ای	–	$\vec{\omega}=\dot{\theta}\hat{k}$	$\vec{\omega}=\dot{\theta}\hat{k}$	$\vec{\omega}=\dot{\theta}\hat{k}-\dot{\varphi}\hat{\theta}$

حرکت پرتابه: مطابق شکل مقابل حرکت پرتابه را می‌توان به دو حرکت تفکیک نمود. نخست حرکت سایه آن روی محور x که یک حرکت با سرعت ثابت است $v_x=v_{0x}=x_0\cos\theta$ و سپس می‌توان حرکت سایه عمودی آن که یک حرکت سقوط آزاد با سرعت اولیه $v_{oy}=v_0\sin\theta$ و شتاب جاذبه $-g$ می‌باشد را در نظر گرفت بنابراین



$$x=v_0\cos\theta+x_0$$

$$y=-\frac{1}{2}gt^2\left(v_0\sin\theta\right)t+y_0 \quad\Rightarrow\quad v_y=\dot{y}=-gt+v_0\sin\theta$$

با حذف زمان t بین دو معادله بالا معادله مسیر پرتابه که یک سهمی است به دست می‌آید.

$$y=\frac{-g}{2v_0^2\cos^2\theta}\left(x-x_0\right)R^2+R\tan\theta+y_0=0$$

یادداشت:

....

....

....

....

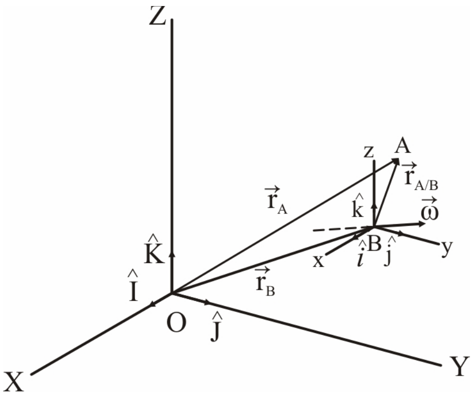
زمان رسیدن به اوج از رابطه $v_y = -gt + v_0 \sin\theta = 0$ به دست می‌آید لذا ارتفاع اوج برابر است با

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}$$

شعاع انحنای مسیر در ارتفاع اوج عبارت است از:

$$g = a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(v_0 \cos\theta)^2}{\rho} \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{v_0^2 \cos^2\theta}{g}$$

رابطه سرعت‌ها و شتاب‌های نسبی و دستگاه‌های چرخان



مطابق شکل دستگاه مختصات OXYZ ثابت است. دستگاه مختصات Bxyz به یک جسم صلب متصل است و با بردار سرعت زاویه‌ای $\vec{\omega}$ دوران می‌نماید. روابط سرعت و شتاب مطلق نقطه A از دید ناظر واقع در مبدا دستگاه ساکن برحسب سرعت و شتاب همین نقطه از دید ناظر واقع در نقطه B و متصل به دستگاه چرخان در ذیل آمده است. در این روابط مؤلفه شتاب $\vec{a}_C = 2\vec{\omega} \times \vec{V}_{Rel}$ مؤلفه شتاب کریولیس نامیده می‌شود.

جمع‌بندی

$$\boxed{\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B}} \quad , \quad \boxed{\vec{v}_{A/B} = \vec{v}_{Rel} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{A/B}}$$

$$\boxed{\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{A/B}} \quad , \quad \boxed{\vec{a}_{A/B} = \vec{a}_{Rel} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_{A/B} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{A/B}) + 2\vec{\omega} \times \vec{V}_{Rel}}$$

$$\vec{r}_{A/B} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$$\vec{v}_{Rel} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}$$

$$\vec{a}_{Rel} = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k}$$

نکته: ناظر واقع در نقطه O اختلاف سرعت دو نقطه A و B را به صورت $\vec{v}_{A/B}$ و ناظر واقع در نقطه B و چسبیده به دستگاه مختصات Bxyz اختلاف سرعت این دو نقطه را به صورت $\vec{v}_{Rel}$ احساس می‌نماید و از دید دو ناظر این اختلاف سرعت یکسان نمی‌باشد مگر این که دستگاه Bxyz چرخان نباشد. همین مطلب در مورد اختلاف شتاب دو نقطه A و B از دید دو ناظر مذکور نیز صادق است.

در تست‌های سال‌های اخیر کنکور کارشناسی ارشد مثال‌هایی از حرکت دو خودروی A و B و سرعت و شتاب نسبی آن‌ها مطرح بوده است. نکته حائز اهمیت آن است که در این مثال‌ها عموماً یکی از خودروها بر روی خط راست و دیگری بر روی مسیر منحنی حرکت می‌نماید. بنابراین اگر دستگاه مختصات بر روی خودرویی باشد که بر روی مسیر منحنی حرکت می‌کند (مثلاً خودروی B) در این صورت سرعت و شتاب خودروی دیگر از دید این خودرو یعنی $\vec{v}_{Rel}$ و $\vec{a}_{Rel}$ به ترتیب با $\vec{v}_{A/B}$ و $\vec{a}_{A/B}$ برابر نخواهند بود. چرا که دستگاه مختصات متصل به خودروی واقع بر مسیر منحنی چرخان می‌باشد.

یادداشت:

....

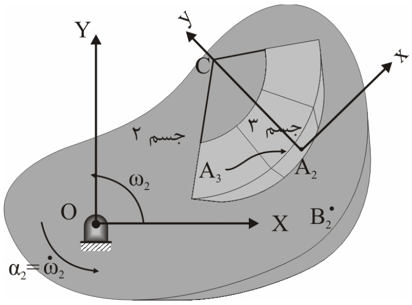
....

....

....

مفهوم شتاب کریولیس

برای نشان دادن مفهوم شتاب کریولیس دو زوج نقطه (B_2,A_2) و (A_3,A_2) با هم مقایسه می‌شوند. زوج نقطه A_2 و B_2 هر دو بر روی یک جسم صلب قرار دارند و مسیر نقطه B_2 نسبت به A_2 دایره‌ای به مرکز A_2 و شعاع A_2B_2 می‌باشد نقطه B_2 نسبت به A_2 دارای شتاب عمودی $a^n_{B_2/A_2}=\dfrac{v^2_{B_2/A_2}}{A_2B_2}=A_2B_2\omega_2^2$ و شتاب مماسی $a^t_{B_2/A_2}=\dot{v}_{B_2/A_2}=\left(A_2B_2\omega_2\right)=A_2B_2\alpha_2$ است لذا مطابق رابطه شتاب‌های نسبی نتیجه می‌شود.



$$\vec{a}_{B_2}=\vec{a}_{A_2}+\vec{a}_{B_2/A_2}=\vec{a}_{A_2}+\vec{a}_{Rel}+\dot{\vec{\omega}}_2\times r_{B_2/A_2}+\vec{\omega}_2\times\vec{\omega}_2\times\vec{r}_{B_2/A_2}+2\omega_2\times\vec{v}_{Rel}$$

چون دو نقطه B_2 و A_2 روی یک جسم صلب قرار دارند لذا $\vec{v}_{Rel}=\vec{a}_{Rel}=0$ و بنابراین $\vec{a}^n_{B_2/A_2}=\vec{\omega}_2\times\vec{\omega}_2\times\vec{r}_{B_2/A_2}$ و $\vec{a}^t_{B_2/A_2}=\dot{\vec{\omega}}_2\times\vec{r}_{B_2/A_2}$.

زوج نقطه (A_2,A_3) هر کدام بر روی جسم صلب متفاوت قرار دارند و نسبت به هم دارای سرعت نسبی $\vec{v}_{A_3/A_2}$ که مماس بر دیواره شیار است می‌باشند. مطابق رابطه شتاب‌های نسبی نتیجه می‌شود.

$$\vec{a}_{A_3}=\vec{a}_{A_2}+\vec{a}_{Rel}+\dot{\vec{\omega}}_2\times\vec{r}_{A_3/A_2}+\vec{\omega}_2\times\vec{\omega}_2\times\vec{r}_{A_3/A_2}+2\vec{\omega}_2\times\vec{v}_{Rel}$$

چون نقطه A_3 بر A_2 منطبق است. لذا $\vec{r}_{A_3/A_2}=0$ و بنابراین:

$$\vec{a}_{A_3}=\vec{a}_{A_2}+\vec{a}_{Rel}+2\vec{\omega}_2\times\vec{v}_{Rel}$$

ناظر واقع در نقطه A_2 و چسبیده به جسم صلب (متصل به دستگاه A_2xy) نقطه A_3 بر روی لغزنده را مشاهده می‌کند که با سرعت v_{A_3/A_2} از خودش دور یا نزدیک می‌شود. این ناظر برای نقطه A_3 نسبت به خودش (A_2) شتاب نرمال $a^n_{A_3/A_2}=\dfrac{v^2_{A_3/A_2}}{\rho}$ که ρ شعاع انحنای شیار می‌باشد و شتاب مماسی $a^t_{A_3/A_2}=\dot{v}_{A_3/A_2}$ را مشاهده می‌نماید. در حقیقت چون شیار منحنی شکل است سرعت v_{A_3/A_2} را به وجود می‌آورد. اگر لغزنده با سرعت متغیر داخل شیار حرکت کند آن‌گاه شتاب مماسی $a^t_{A_3/A_2}$ به وجود می‌آورد. مجموع دو شتاب $\vec{a}^n_{A_3/A_2}$ و $\vec{a}^t_{A_3/A_2}$ شتاب $\vec{a}_{Rel}$ خواهد بود. اگر جسم شیاردار دوران نماید، سرعت v_{A_3/A_2} دوران نموده و تغییر جهت می‌دهد. تغییر جهت این سرعت در اثر دوران ترم شتابی را به نام مؤلفه شتاب کریولیس ایجاد می‌نماید.

یادداشت:

....

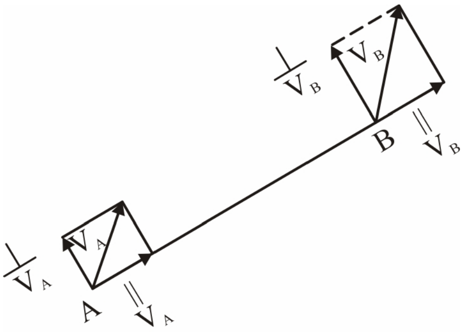
....

....

....

نکته: دو نقطه واقع بر یک جسم صلب (A_2,B_2) نسبت به هم دور و نزدیک نمی‌شوند لذا در راستای خط واصل بین این دو نقطه سرعت نسبی وجود ندارد و شتاب کریولیس برای این دو نقطه وجود ندارد. اما دو نقطه A_3 و A_2 که بر روی دو جسم صلب متفاوت قرار دارند نسبت به هم دارای شتاب کریولیس هستند که از دوران سرعت V_{A_3/A_2} در اثر دوران جسم 2 به وجود می‌آید.

نکته: اگر مطابق شکل سرعت‌های خطی دو نقطه A و B از یک جسم صلب معلوم باشند داریم



$$\overset{||}{v_A} = \overset{||}{v_B}$$

$$\omega_{AB} = \frac{\overset{\perp}{v_B} - \overset{\perp}{v_A}}{AB}$$

به طور مشابه اگر شتاب‌های خطی دو نقطه A و B از یک جسم صلب معلوم باشند نتیجه می‌شود.

$$\alpha_{AB} = \frac{\overset{\perp}{a_B} - \overset{\perp}{a_A}}{AB}$$

$$\omega_{AB}^2 = \frac{\overset{||}{a_B} - \overset{||}{a_A}}{AB}$$

قوانین نیوتن در دستگاه‌های مختصات مختلف

الف) دستگاه مختصات دکارتی

$$F_x = ma_x = m\ddot{x}$$
$$F_y = may = m\ddot{y}$$
$$F_z = ma_z = m\ddot{z}$$

ب) دستگاه مختصات استوانه‌ای

$$F_r = ma_r = m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)$$
$$F_\theta = ma_\theta = m\left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)$$
$$F_z = ma_z = m\ddot{z}$$

یادداشت:

....

....

....

....

ج) دستگاه مختصات قائم و مماسی

$$F_n = ma_n = m\frac{v^2}{\rho}$$

$$F_t = ma_t = m\dot{v}$$

کار و انرژی

کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F}$ که به ذره‌ای به جرم m اعمال می‌شود از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F}.d\vec{r} = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx + \int_{y_1}^{y_2} F_y dy + \int_{z_1}^{z_2} F_z dz$$

که در آن F_x ، F_y و F_z مولفه‌های نیروی $\vec{F}$ هستند.

کار نیروی فنر

$$W_s = -\left[V_e)_2 - V_e)_1\right] = -\left(\frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2\right)$$

که در آن $V_e = \frac{1}{2}kx^2$ تابع پتانسیل فنر می‌باشد.

کار نیروی وزن

$$W_g = -\left[V_g)_2 - V_g)_1\right] = -(mgy_2 - mgy_1)$$

که در آن $V_g = mgy$ تابع پتانسیل ثقلی می‌باشد.

کار نیروی گرانش

$$W = -(V_2 - V_1) = -\left[\left(\frac{-mg_0R^2}{r_2}\right) - \left(\frac{-mg_0R^2}{r_1}\right)\right]$$

که در آن $V = \frac{-mg_0R^2}{r}$ تابع پتانسیل گرانشی است و g_0 شتاب جاذبه در نزدیکی سطح زمین، R شعاع کره زمین و r فاصله از مرکز زمین می‌باشد.

یادداشت:

....

....

....

....

انواع نیروها

الف) نیروهای ابقائی یا پایستار: نیروهایی هستند که کار آن‌ها به مسیر حرکت بستگی ندارد، مانند نیروی وزن، نیروی فنر، نیروی گرانش، نیرو با مولفه‌های ثابت.

این نیروها را می‌توان به صورت منفی گرادیان یک تابع اسکالر به نام تابع پتانسیل (V) نوشت یعنی $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$

شرط لازم و کافی برای آنکه یک نیرو پایستار باشد آن است که کرل آن نیرو صفر باشد یعنی $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \text{cur}\ell\vec{F} = \vec{0}$

در نیرو با مولفه‌های ثابت همواره کرل نیرو صفر است لذا نیرو با مولفه‌های ثابت همواره پایستار است.

کار نیروهای وزن، فنر و گرانش به مسیر بستگی نداشت چرا که همانطور که در روابط مربوط به کار مشاهده شد کار به مقدار تابع پتانسیل در ابتدا و انتهای مسیر بستگی دارد نه به مقدار آن در طول مسیر لذا این نیروها پاستار هستند.

ب ـ نیروهای غیر ابقائی یا ناپایستار: نیروهایی هستند که کار آن‌ها به مسیر حرکت بستگی دارد مانند نیروی اصطکاک

قضیه کار و انرژی: کار انجام شده توسط نیروهای خارجی برابر است با تغییرات انرژی جبنشی یعنی $W = \Delta T$

قضیه کار و انرژی در شکل کاربردی‌تری نیر ارائه می‌شود. $W_{n.c.} = \Delta E = \Delta\left(T+V\right)$

که در آن $W_{n.c.}$ کار انجام شده توسط نیروهای ناپایستار و E انرژی مکانیکی یا مجموع انرژی‌های جنبشی و پتانسیل می‌باشد.

اندازه حرکت خطی و زاویه‌ای

روابط اندازه حرکت خطی و زاویه‌ای مطابق جدول زیر می‌باشد.

اندازه حرکت زاویه‌ای $\vec{H}_0 = \vec{r} \times \vec{G}$ Angular momentum	اندازه حرکت خطی $\vec{G} = m\vec{v}$ Linear momentum
گشتاور حول O $\vec{M}_o = \dot{\vec{H}}_o = \dfrac{d\vec{H}_o}{dt}$	نیرو $\vec{F} = \dot{\vec{G}} = \dfrac{d\vec{G}}{dt}$
ضربه زاویه‌ای $\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_o dt = \Delta\vec{H}_o$ Angular impulse	ضربه خطی $\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt = \Delta\vec{G}$ Linear impulse

قوانین بقا

الف) قانون بقای انرژی: اگر کار نیروهای غیرپایستار صفر باشد، تغییرات انرژی مکانیکی صفر بوده و انرژی مکانیکی ثابت می‌ماند به عبارت دیگر انرژی مکانیکی بقا خواهد داشت.

ب) قانون بقای اندازه حرکت خطی: اگر مجموع نیروهای خارجی در یک راستای ثابت صفر باشد بقای اندازه حرکت خطی در آن راستا برقرار است.

یادداشت:

....

....

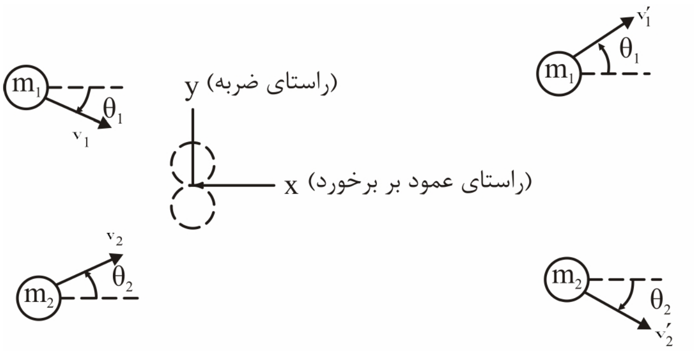
....

....

ج) قانون بقای اندازه حرکت زاویه‌ای: اگر مجموع گشتاورهای نیروهای خارجی وارد بر یک ذره حول یک نقطه ثابت صفر باشد تغییرات اندازه حرکت زاویه‌ای حول آن نقطه صفر بوده و یا اندازه حرکت زاویه‌ای حول آن نقطه بقا خواهد داشت.

برخورد ذرات

دو جرم m_1 و m_2 مطابق شکل با سرعت‌های v_1 و v_2 حرکت می‌کنند و با یکدیگر برخورد می‌کنند و پس از برخورد با سرعت‌های v_1' و v_2' از هم دوری می‌شوند.



اندازه سرعت‌های قبل از برخورد v_1 و v_2 و راستاهای قبل از برخورد θ_1 و θ_2 معلوم هستند و اندازه سرعت‌های بعد از برخورد v_1' و v_2' و راستاهای بعد از برخورد θ_1' و θ_2' مجهول هستند. برای به دست آرودن این مجهولات مجموعاً چهار معادله تشکیل می‌شود. که عبارتند از:

$$v_1' \cos\theta_1' = v_1 \cos\theta_1 \qquad (۱)$$

$$v_2' \cos\theta_2' = v_2 \cos\theta_2 \qquad (۲)$$

$$-m_1 v_1 \sin\theta_1 + m_2 v_2 \sin\theta_2 = -m_2 v_2' \sin\theta_2' + m_1 v_1' \sin\theta_1' \qquad (۳)$$

$$e = \frac{v_1' \sin\theta_1' + v_2' \sin\theta_2'}{v_1 \sin\theta_1 + v_2 \sin\theta_2} \qquad (۴)$$

(ضریب بازگشت یا برخورد)

جمع‌بندی

در مسایل برخورد ذرات در حالت کلی چهار معادله نوشته می‌شود. دو معادله در راستای عمود بر ضربه و برای هر جرم بطور جداگانه نوشته می‌شود که این دو معادله عبارتند از:

۱) مؤلفه سرعت جرم اول در راستای عمود بر ضربه تغییر نمی‌کند.

۲) مؤلفه سرعت جرم دوم در راستای عمود بر ضربه تغییر نمی‌کند.

و دو معادله دیگر که در راستای ضربه و برای مجموعه دو جرم نوشته می‌شوند عبارتند از:

۳) قانون بقای اندازه حرکت مجموعه دو جرم برخورد کننده در راستای ضربه (مجموع اندازه حرکت‌های خطی مجموعه دو جرم در راستای ضربه قبل از برخورد با مجموع اندازه حرکت‌های خطی مجموعه دو جرم در راستای ضربه بعد از برخورد برابر است).

۴) ضریب بازگشت برابر است با نسبت سرعت نسبی دو جرم در راستای ضربه بعد از برخورد به سرعت نسبی دو جرم در راستای ضربه قبل از برخورد.

یادداشت:

....

....

....

....

در حالت خاص اگر جرم دوم یک جرم وزین ساکن باشد، این چهار معادله به دو معادله زیر کاهش می‌یابد.

۱) مولفه سرعت جرم متحرک در راستای عمود بر ضربه تغییر نمی‌کند. $v_1' \cos\theta_1' = v_1 \cos\theta_1$

۲) ضریب بازگشت برابر است با نسبت سرعت جرم متحرک در راستای ضربه بعد از برخورد به سرعت جرم متحرک در راستای ضربه قبل از برخورد.

$$e = \frac{v_1' \sin\theta_1'}{v_1 \cos\theta_1}$$

در این حالت ارتباط بین زاویه برخورد θ_1 و زاویه سرعت ذره پس از برخورد θ_1' عبارت است از

$$\tan\theta_1' = e\tan\theta_1$$

دینامیک جسم صلب

حرکت صفحه‌ای (تحلیل دوبعدی): برای جسم صلب که در یک صفحه حرکت می‌کند سه نوع حرکت مطرح می‌باشد.

الف) حرکت انتقالی: حرکتی است که در آن تمامی نقاط جسم صلب با بردارهای سرعت هم‌سنگ یکدیگر (موازی و مساوی) حرکت می‌کنند.

ب) حرکت دورانی: در این حرکت جسم صلب حول نقطه ثابتی لولا شده است و تمامی نقاط جسم صلب حول لولا دوران می‌کنند.

ج) حرکت عمومی: حرکتی است که در آن جسم هم دارای انتقال و هم دوران می‌باشد. در این حرکت مرکز جرم جسم می‌تواند سرعت خطی $\vec{v}_G$ و شتاب خطی $\vec{a}_G$ را داشته باشد و در ضمن جسم صلب دارای سرعت زاویه‌ای ω و شتاب زاویه‌ای α باشد.

تحلیل دینامیکی حرکت جسم صلب در این حالت مشابه ذره بوده و می‌توان از قانون دوم نیوتن $\vec{F} = m\vec{a}_G$ و قوانین بقاء برای حل مسائل استفاده نمود. با این تفاوت که در صورت استفاده از قانون دوم نیوتن یا اصل دالامبر جهت حل مسائل می‌بایستی تعادل انتقالی و دورانی توأماً بررسی گردد. در ضمن روابط گشتاور و اندازه حرکت زاویه‌ای و نیز انرژی جنبشی برای جسم صلب مطابق توضیحات زیر به دست می‌آید.

جمع‌بندی

۱) رابطه گشتاور برای یک جسم صلب حول نقطه O که در آن O مرکز دائمی دوران یا مرکز آنی دوران (به شرطی که فاصله مرکز جرم تا مرکز آنی دوران ثابت باشد) یا مرکز جرم یا نقطه‌ای باشد که امتداد شتاب آن نقطه از مرکز جرم می‌گذرد برابر است با حاصل ضرب ممان اینرسی حول آن نقطه ضرب در شتاب زاویه‌ای جسم صلب $(M_o = I_o\alpha)$.

۲) رابطه اندازه حرکت زاویه‌ای برای یک جسم صلب حول نقطه O که در آن O مرکز دائمی دوران یا مرکز آنی دوران یا مرکز جرم یا نقطه‌ای باشد که امتداد سرعت آن نقطه از مرکز جرم می‌گذرد برابر است با حاصل ضرب ممان اینرسی حول آن نقطه ضرب در سرعت زاویه‌ای جسم صلب $(H_o = I_o\omega)$.

یادداشت:

....

....

....

....

۳) انرژی جنبشی در حالت کلی مجموع انرژی جنبشی انتقالی $\left(\frac{1}{2}mv_G^2\right)$ و انرژی جنبشی دورانی $\left(\frac{1}{2}I_G\omega^2\right)$ می‌باشد. در حالت خاص می‌تواند به صورت $T=\frac{1}{2}I_o\omega^2$ بیان شود که O مرکز دائمی یا آنی دوران می‌باشد.

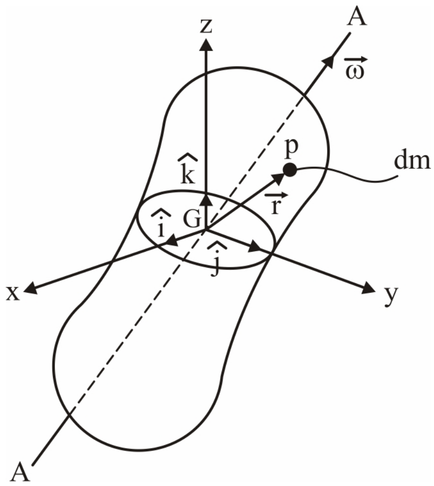
۴) اگر O یک نقطه دلخواه باشد رابطه گشتاور و اندازه حرکت زاویه‌ای به صورت زیر می‌باشند.

$\vec{M}_O=\vec{M}_G+\overrightarrow{OG}\times\left(m\vec{a}_G\right)$
$\vec{H}_O=\vec{H}_G+\overrightarrow{OG}\times\left(m\vec{v}_G\right)$

تحلیل سه‌بعدی

جسم صلب سه بعدی که حول محور $A-A$ گذرنده از مرکز جرم جسم با سرعت زاویه‌ای $\vec{\omega}$ می‌چرخد در نظر گرفته می‌شود. بنابراین سرعت مرکز جرم G صفر خواهد بود و سرعت نقطه P که در آن المان جرم dm قرار دارد $\vec{v}_P=\vec{\omega}\times\vec{r}$ خواهد بود.

$dH_G=\vec{r}\times dm\vec{v}_P=\vec{r}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right)dm$ (اندازه حرکت زاویه‌ای المان حول نقطه G)



که در آن $\vec{\omega}=\omega_x\hat{i}+\omega_z\hat{k}$ و $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$ می‌باشد.

$$\vec{H}_G=\int\vec{r}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right)dm=?$$

اگر رابطه بالا ساده گردد مؤلفه‌های بردار اندازه حرکت زاویه‌ای حول مرکز جرم G به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\{H_G\}=\left\{H_G)_x\ H_G)_y\ H_G)_z\right\}^T=[I_G]\{\omega\}=[I_G]\left\{\omega_x\omega_y\omega_z\right\}^T$$

که در آن $[I_G]$ تانسور لختی می‌باشد و از رابطه زیر به دست می‌آیند.

$$[I_G]=\begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

که

$$I_{xx}=\int\left(y^2+z^2\right)dm\quad,\quad I_{yy}=\int\left(x^2+z^2\right)dm\quad,\quad I_{zz}=\int\left(x^2+y^2\right)dm$$

و حاصل ضرب‌های لختی نیز عبارتند از:

$$I_{xy}=I_{yx}=\int xydm\quad,\quad I_{xz}=I_{zx}=\int xzdm\quad,\quad I_{yz}=I_{zy}=\int yzdm$$

یادداشت:

....

....

....

....

در حالت خاص که محورهای مختصات همان محورهای اصلی جسم صلب باشند حاصل ضرب‌های لختی صفر شده و مولفه‌های بردار اندازه حرکت زاویه‌ای حول مرکز جرم عبارتند از:

$$H_G)_x = I_{xx}\omega_x$$
$$H_G)_y = I_{yy}\omega_y$$
$$H_G)_z = I_{zz}\omega_z$$

مولفه‌های بردار گشتاور حول مرکز جرم از رابطه زیر به دست می‌آیند.

$$\vec{M}_G = \dot{\vec{H}}_G = \dot{H}_G)_x\,\hat{i} + \dot{H}_G)_y\,\hat{j} + \dot{H}_G)_z\,\hat{k} + \vec{\omega}\times\vec{H}_G$$

اگر از رابطه $\{H_G\} = [I_G]\{\omega\}$ مولفه‌های بردار اندازه حرکت زاویه‌ای برحسب ω_x ، ω_y و ω_z محاسبه و در رابطه بالا جای‌گذاری شود روابط مؤلفه‌های بردار گشتاور حول مرکز جرم G برحسب مولفه‌های بردار سرعت زاویه‌ای یعنی ω_x ، ω_y و ω_z و نیز مشتقاتشان یعنی $\dot{\omega}_x$ ، $\dot{\omega}_y$ و $\dot{\omega}_z$ به دست می‌آید که معادلات اویلر نامیده می‌شوند. در حالت خاص که محورهای اصلی بر محورهای مختصات منطبق باشند معادلات اویلر عبارتند از:

$$M_G)_x = I_{xx}\dot{\omega}_x + \omega_y\omega_z\left(I_{xx} - I_{yy}\right)$$
$$M_G)_y = I_{yy}\dot{\omega}_y + \omega_x\omega_y\left(I_{xx} - I_{zz}\right)$$
$$M_G)_z = I_{zz}\dot{\omega}_z + \omega_y\omega_z\left(I_{yy} - I_{xx}\right)$$

به عنوان حالت خاص دیگر یک جسم صلب که فقط حول محور x با سرعت زاویه‌ای ثابت ω_x دوران می‌کند درنظر گرفته می‌شود. روابط اندازه حرکت زاویه‌ای و گشتاور عبارتند از:

$$H_G)_x = I_{xx}\omega_x$$
$$H_G)_y = -I_{xy}\omega_x$$
$$H_G)_z = -I_{xz}\omega_x$$
$$M_G)_x = 0$$
$$M_G)_y = I_{xz}\omega_x^2$$
$$M_G)_z = -I_{xy}\omega_x^2$$

نکته: اگر نقطه O نقطه‌ای باشد که جسم حول آن نقطه لولا شده است اندازه حرکت زاویه‌ای حول آن نقطه نیز از رابطه $\vec{H}_O = \int \vec{r}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})dm$ به دست می‌آید که در آن $\vec{r}$ معرف بردار موقعیت المان جرم dm نسبت به نقطه O که مبدا مختصات می‌باشد است و لذا رابطه $\{H_O\} = [I_O]\{\omega\}$ صادق است.

انرژی جنبشی برای جسم صلب در حالت کلی از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}\vec{\omega}.\vec{H}_G = \frac{1}{2}\vec{v}_G.\vec{P}_G + \frac{1}{2}\vec{\omega}.\vec{H}_G$$

یادداشت:

....

....

....

....

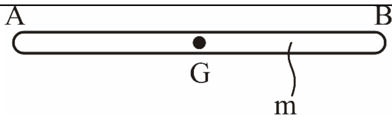
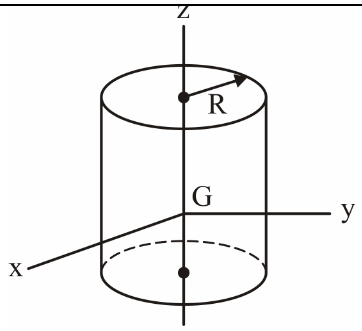
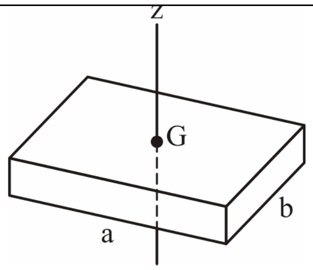
که در آن $\vec{P}_G = m\vec{v}_G$ بردار اندازه حرکت خطی مرکز جرم جسم صلب است. البته این رابطه می‌تواند به صورت زیر ساده گردد.

$$T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2}\left(I_{xx}\omega_x^2 + I_{yy}\omega_y^2 + I_{zz}\omega_z^2\right) - \left(I_{xy}\omega_x\omega_y + I_{xz}\omega_x\omega_z + I_{yz}\omega_y\omega_z\right)$$

اگر جسم حول نقطه ثابت O لولا شده و یا نقطه‌ای روی جسم موجود باشد که در یک لحظه سرعتش صفر باشد آن‌گاه

$$T = \frac{1}{2}\vec{\omega}.\vec{H}_O$$

روابط لختی چند جسم صلب

 میله یکنواخت به طول ℓ و جرم m	$I_G = \frac{1}{12} m\ell^2$ $I_A = I_B = m(GA)^2 = \frac{1}{3} m\ell^2$
 استوانه به جرم m و شعاع قاعده R	$I_{zz} = \frac{1}{2} mR^2$ $I_{yy} = I_{xx} = \frac{I_{zz}}{2} = \frac{mR^2}{4}$
 مکعب به طول و عرض a و b و جرم m	$\left.I_{zz}\right)_G = \frac{1}{12} m\left(a^2 + b^2\right)$ $\left.I_{zz}\right)_A = \frac{1}{3} m\left(a^2 + b^2\right)$

یادداشت:

....

....

....

....

نمونه سؤالات

۱ ـ رابطه بین شتاب‌ها اجرام A ، B و C چیست؟

مقدار ثابت + $\ell_1 = y_B + y_C + (y_C - y_D)$ (طول طناب اول)

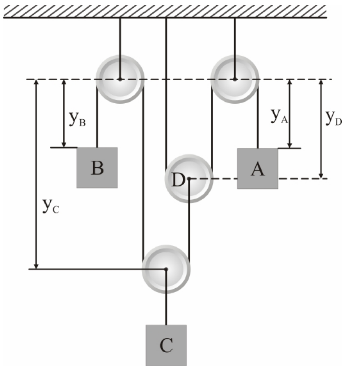
مقدار ثابت + $\ell_2 = 2y_D + y_A$ (طول طناب دوم)

۱) $2a_A + 2a_B + 4a_C = 0$

۲) $2a_A + a_B + 4a_C = 0$

۳) $a_A + 2a_B + 4a_C = 0$

۴) هیچ‌کدام



از روابط بالا نسبت به زمان مشتق می‌گیریم:

$$\begin{cases} \dot{y}_B + 2\dot{y}_C - \dot{y}_D = 0 \\ 2\dot{y}_D + \dot{y}_A = 0 \end{cases}$$

دو برابر رابطه اول را با دوم جمع می‌کنیم:

$$2\dot{y}_B + 4\dot{y}_C + \dot{y}_A = 0 \Rightarrow \boxed{v_B + 4v_C + v_A = 0}$$

$$2\dot{v}_B + 4\dot{v}_C + \dot{v}_A = 0 \rightarrow \boxed{2a_B + 4a_C + a_A = 0}$$

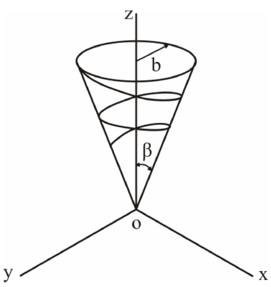
جواب گزینه (۳) می‌باشد.

۲ ـ ذره P در مسیر مارپیچی که دور سطح یک مخروط قائم دایروی به شعاع b و ارتفاع h پیچیده شده است به سمت پایین حرکت می‌کند. γ زاویه بین مماس افقی بر مخروط در هر نقطه و مماس بر مسیر در هر نقطه ثابت است و حرکت ذره طوری است که $\dot{\theta}$ ثابت است. معادلات پارامتری مسیر عبارتند از:

در مختصات استوانه‌ای برای مخروط داریم:

$$\frac{\gamma}{z} = \tan\beta$$

$$r = z\tan\beta$$



۱) $Z = he^{-(\dot{\theta}\sin\beta\tan\gamma)t}$

۲) $Z = he^{-(\dot{\theta}\cos\beta\tan\gamma)t}$

۳) $Z = he^{-(\dot{\theta}\sin\beta\cos\gamma)t}$

۴) $Z = he^{-(\dot{\theta}\cos\beta\cot\gamma)t}$

یادداشت:

....

....

....

....

حل : گزینه ۱ درست است

اگر $\vec{v}$ سرعت کل ذره باشد زاویه بین مماس بر مسیر یعنی $\vec{v}$ و بردار یکه $\hat{\theta}$ (که مماس افقی بر مخروط است) همواره γ می‌باشد. لذا داریم:

$$v_\theta = v\cos\gamma$$

$$\begin{cases} v_r = \dot{r} = \dot{z}\tan\beta \\ v_\theta = r\dot{\theta} = z\dot{\theta}\tan\beta \\ v_z = \dot{z} \end{cases} \Rightarrow \quad v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{z}^2\left(1+\tan^2\beta\right) + z^2\dot{\theta}^2\tan^2\beta}$$

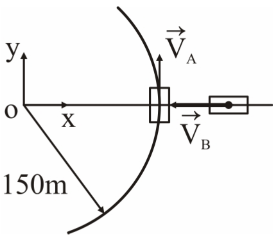
$$\Rightarrow \quad v^2\cos^2\gamma = \left[\dot{z}^2\left(1+\tan^2\beta\right) + z^2\dot{\theta}^2\tan^2\beta\right]\cos^2\gamma = v_\theta^2 = z^2\dot{\theta}^2\tan^2\beta \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\dot{z}^2\cos^2\gamma}{\cos^2\beta} = z^2\dot{\theta}^2\tan^2\beta\sin^2\gamma \quad \Rightarrow \quad \dot{z}^2\cos^2\gamma = z^2\dot{\theta}^2\sin^2\beta\sin^2\gamma \quad \Rightarrow \quad \dot{z}\cos\gamma = -z\dot{\theta}\sin\beta\sin\gamma$$ چون z کم می‌شود

$$\Rightarrow \quad \frac{\dot{z}}{z} = -\dot{\theta}\sin\beta\frac{\sin\gamma}{\cos\gamma} = -\dot{\theta}\sin\beta\tan\gamma \quad \Rightarrow \quad \int_h^z \frac{dz}{z} = -\dot{\theta}\sin\beta\tan\gamma\int_0^t dt \quad \Rightarrow \quad \boxed{z = he^{-\left(\dot{\theta}\sin\beta\tan\gamma\right)t}}$$

۳ـ خودروی A با سرعت ثابت $54\dfrac{km}{h}$ پیچی به شعاع $150\,m$ را دور می‌زند. در لحظه نشان داده شده خودروی B دارای سرعت $81\left[\dfrac{km}{h}\right]$ بوده و سرعتش را با میزان $3\left[\dfrac{m}{s^2}\right]$ کاهش می‌دهد سرعت و شتاب A از دید B عبارتند از:

$\vec{v}_A = 15\hat{j} \quad , \quad \vec{v}_B = -22.5\hat{i} \quad , \quad \vec{a}_B = 3\hat{i}$



۱) $\vec{v}_{A/B} = -15\hat{i} + 22.5\hat{j}[m/s]\,,\ \vec{a}_{A/B} = -4.5\hat{i}\left[m/s^2\right]$

۲) $\vec{v}_{A/B} = 15\hat{i} - 22.5\hat{j}[m/s]\,,\ \vec{a}_{A/B} = 4.5\hat{i}\left[m/s^2\right]$

۳) $\vec{v}_{A/B} = -15\hat{i} - 22.5\hat{j}[m/s]\,,\ \vec{a}_{A/B} = 4.5\hat{i}\left[m/s^2\right]$

۴) $\vec{v}_{A/B} = 15\hat{j} + 22.5\hat{i}\ [m/s]\,,\ \vec{a}_{A/B} = -4.5\hat{i}\left[m/s^2\right]$

حل : گزینه ۴ درست است

$$v_A = 54\frac{km}{h} = \frac{54}{3.6} = 15\left[\frac{m}{s}\right]$$

$$v_B = 81\frac{km}{h} = \frac{81}{3.6} = 22.5\left[\frac{m}{s}\right]$$

$$a_B = -3\left[\frac{m}{s^2}\right]$$

$$\begin{cases} a_A^t = 0 \quad \text{ثابت است } v_A \text{ چون} \\ a_A^n = \dfrac{v_A^2}{\rho} = \dfrac{(15)^2}{150} = 1.5\left[\dfrac{m}{s^2}\right] \end{cases} \Rightarrow \quad \vec{a}_A = -1.5\hat{i} \quad \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

$$\vec{v}_{A/B} = \vec{v}_A - \vec{v}_B = 15\hat{j} - \left(-22.5\hat{i}\right) = \boxed{15\hat{j} + 22.5\hat{i}}\left[\frac{m}{s}\right]$$

$$\vec{a}_{A/B} = \vec{a}_A - \vec{a}_B = -1.5\hat{i} - 3\hat{i} = \boxed{-4.5\hat{i}}\left[\frac{m}{s^2}\right]$$

یادداشت:

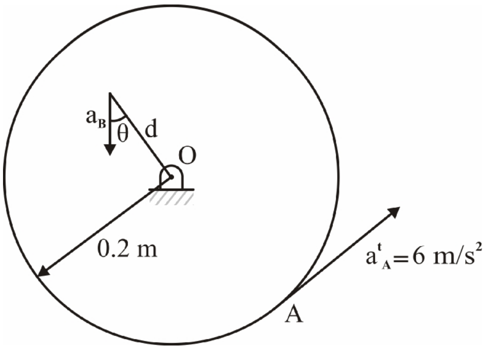
....

....

....

....

۴ ـ در شکل مقابل دیسک حول نقطه O دوران می‌کند اگر زاویه θ معلوم باشد $\left(\tan\theta=\frac{3}{4}\right)$ سرعت نقطه A برابر است با:



۱) $v_A=0.4\sqrt{10}\left[\frac{m}{s}\right]$

۲) $v_A=0.2\sqrt{10}\left[\frac{m}{s}\right]$

۳) $v_A=0.1\sqrt{10}\left[\frac{m}{s}\right]$

۴) $v_A=0.3\sqrt{10}\left[\frac{m}{s}\right]$

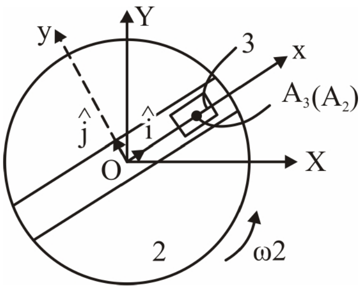
حل : گزینه ۱ درست است

$$\begin{cases} a_B^n=\frac{v_B^2}{d}=\frac{(d\omega)^2}{d}=d\omega^2 \\ a_B^t=\dot{v}_B=(d\omega)^{\cdot}=d\dot{\omega}=d\alpha=a_B\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \frac{d\omega^2}{d\alpha}=\frac{a_B\cos\theta}{a_B\sin\theta} \Rightarrow \frac{\alpha}{\omega^2}=\tan\theta=\frac{3}{4}$$

$$a_A^t=\dot{v}_A=(0.2\omega)^{\cdot}=0.2\dot{\omega}=0.2\alpha=6 \Rightarrow \alpha=\frac{6}{0.2}=30\left[\frac{rad}{s^2}\right] \Rightarrow$$

$$\omega=\sqrt{\frac{4}{3}\alpha}=\sqrt{\frac{4}{3}\times 30}=2\sqrt{10} \Rightarrow v_A=0.2\omega=0.2\left(2\sqrt{10}\right)=0.4\sqrt{10}\simeq 1.265\left[\frac{m}{s}\right]$$

۵ ـ دیسک O با سرعت زاویه‌ای $\omega_2=20\left[\frac{rad}{s}\right]$ حول محور O دوران می‌کند. لغزنده A به جرم $m=0.5\ kg$ در کشوی راهنما تحت تأثیر فنری که در شکل نشان داده نشده نوسان می‌کند و در لحظه عبور از مرکز دیسک دارای سرعت $\dot{x}=0.9\left[\frac{m}{s}\right]$ است مولفه نیروی N وارد از سوی راهنما بر لغزنده در لحظه عبور از مرکز دیسک عبارتست از:



۱) $9\,[N]$

۲) $18\,[N]$

۳) $27\,[N]$

۴) $36\,[N]$

حل : گزینه ۲ درست است.

$$OA_3=x\ ,\ \vec{a}_O=\vec{0}\ ,\ \vec{\omega}_2=20\hat{k}\ ,\ \vec{A}_{A_3/O}=x\hat{i}\ ,\ \vec{V}_{Rel}=\dot{x}\hat{i}\ ,\ \vec{a}_{Rel}=\ddot{x}\hat{i}$$

$$\vec{a}_{A_3}=\vec{a}_O+\vec{a}_{A_3/O}=\vec{a}_{Rel}+\dot{\vec{\omega}}_2\times\vec{r}_{A_3/O}+\vec{\omega}_2\times\vec{\omega}_2\times\vec{r}_{A_3/O}+2\vec{\omega}_2\times\vec{V}_{Rel}$$

$$=\ddot{x}\hat{i}+20\hat{k}\times\left(20\hat{k}\times x\hat{i}\right)+2\times 20\hat{k}\times\dot{x}\hat{i}=\ddot{x}\hat{i}+400x\left(-\hat{i}\right)+40\dot{x}\hat{j}$$

$$=\left(\ddot{x}-400x\right)\hat{i}+40\dot{x}\hat{j} \qquad N_y=ma_y=0.5\left(40\dot{x}\big|_{x=0}\right)=0.5\times 40\times 0.9=18\ N$$

یادداشت:

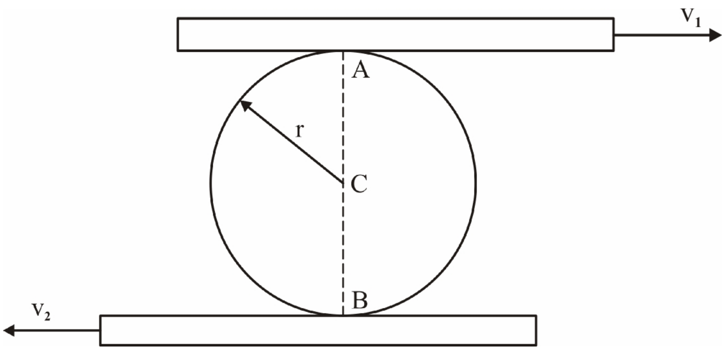
....

....

....

....

۶ـ اگر در نقاط تماس دریسک و صفحات غلتش محض داشته باشیم سرعت زاویه‌ای دیسک چقدر است. $(v_1 > v_2)$



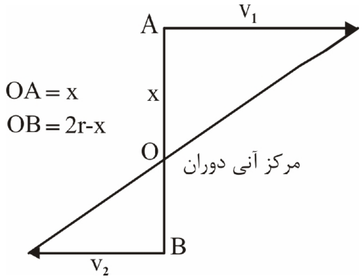
۱) $\omega_{disk} = \dfrac{2r}{v_1 + v_2}$

۲) $\omega_{disk} = \dfrac{v_1 - v_2}{2r}$

۳) $\omega_{disk} = \dfrac{v_1 + v_2}{2r}$

۴) $\omega_{disk} = \dfrac{2r}{v_1 - v_2}$

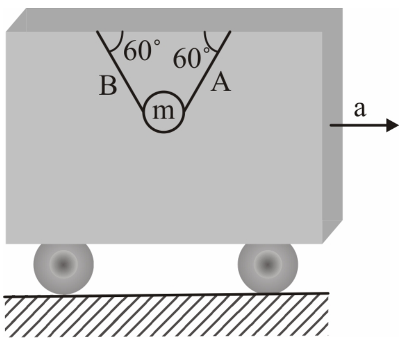
حل : گزینه ۳ درست است



$$\begin{cases} v_1 = x\omega_{disk} \\ v_2 = (2r - x)\omega_{disk} \end{cases} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{x}{2r - x} \Rightarrow 2v_1 r - v_1 x = v_2 x \Rightarrow x = \frac{2v_1 r}{v_1 + v_2}$$

$$\Rightarrow \omega_{disk} = \frac{v_1}{x} = \frac{v_1}{\dfrac{2v_1 r}{v_1 + v_2}} = \frac{v_1 + v_2}{2r} \Rightarrow \boxed{\omega_{disk} = \frac{v_1 + v_2}{2r}}$$

۷ـ شتاب a چقدر باشد تا نیروی کشش در ریسمان A دو برابر نیروی کشش در ریسمانB گردد.



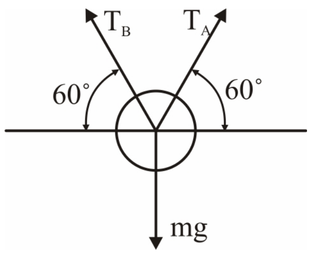
۱) $\dfrac{\sqrt{3}}{9}g$

۲) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}g$

۳) $\dfrac{\sqrt{3}}{6}g$

۴) هیچ‌کدام

حل : گزینه ۱ درست است



یادداشت:

....

....

....

....

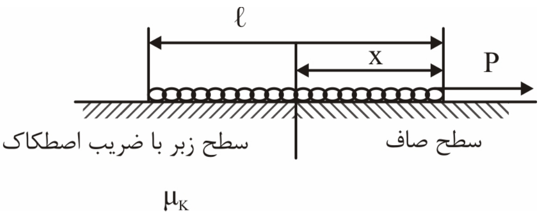
$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad T_A \sin 60 + T_B \sin 60 - mg = 0$$

$$\Rightarrow \quad (T_A + T_B)\frac{\sqrt{3}}{2} = mg \quad \Rightarrow \quad T_A + T_B = \frac{2mg}{\sqrt{3}}$$

$$\sum F_x = ma \quad \to \quad T_A \cos 60 - T_B \cos 60 = ma \quad \to \quad T_A - T_B = 2ma \quad \to \quad \frac{2\sqrt{3}}{g} mg = 2ma$$

$$\to \quad T_A + T_B = \frac{2\sqrt{3}mg}{3} \xrightarrow{T_A = 2T_B} 3T_B = \frac{2\sqrt{3}mg}{3} \quad \Rightarrow \quad T_B = \frac{2\sqrt{3}mg}{9} \quad , \quad T_A = \frac{4\sqrt{3}mg}{9} \quad \boxed{a = \frac{\sqrt{3}}{9} g}$$

۸ـ مطلوب است سرعت زنجیر در $x = \ell$



۱) $\sqrt{\frac{P\ell}{m} - \mu_k \ell}$

۲) $\sqrt{\frac{2P\ell}{m} + \mu_k g\ell}$

۳) $\sqrt{\frac{P\ell}{m} + \mu_k g\ell}$

۴) $\sqrt{\frac{2P\ell}{m} - \mu_k g\ell}$

حل : گزینه ۴ درست است

جرم زنجیر $= m$ و جرم واحد طول زنجیر $= \frac{m}{\ell}$

جرم قسمتی از زنجیر که بر روی سطح زبر قرار دارد $= \frac{m}{\ell}(\ell - x)$

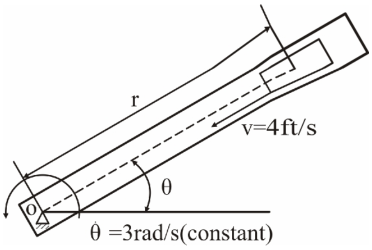
$$P - \mu_k\left[\frac{m}{\ell}(\ell - x)g\right] = ma \quad \Rightarrow a = \frac{P}{m} - \mu_k\left(\frac{\ell - x}{\ell}\right)g = \left(\frac{P}{m} - \mu_k g\right) + \frac{\mu_k}{\ell}gx$$

$$\int_0^{\overset{*}{v}} v dv = \int_0^{\ell} a d_x = \int_0^{\ell} \left[\left(\frac{P}{m} - \mu_k g\right) + \frac{\mu_k}{\ell}gx\right]dx \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\overset{*}{v}}{2} = \left[\left(\frac{P}{m} - \mu_k g\right)x + \frac{\mu_k}{2\ell}gx^2\right]_0^{\ell} = \left(\frac{P}{m} - \mu_k g\right)\ell + \frac{\mu_k g}{2}\ell = \frac{P\ell}{m} - \frac{\mu_k g\ell}{2}$$

$$\Rightarrow \quad v\big|_{x=\ell} = \overset{*}{v} = \sqrt{\frac{2P\ell}{m} - \mu_k g\ell}$$

۹ـ مطلوب است نیروی عکس‌العمل دیواره لوله روی جرم در $\theta = 30$



۱) $0.012\,\ell bf$

۲) $0.024\,\ell bf$

۳) $0.036\,\ell bf$

۴) $0.048\,\ell bf$

یادداشت:

....

....

....

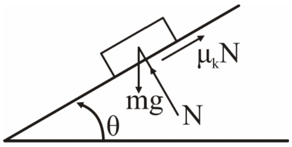
....

حل : گزینه ۲ درست است

$$mg = 0.2\,[\ell bf]$$

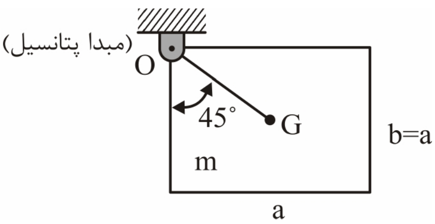
$$\begin{cases} F_\theta = N - mg\cos\theta = ma_\theta = ma_\theta = m\left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right) \\ F_r = \mu_k N - mg\sin\theta = ma_r \end{cases}$$

$$N - mg\cos 30 = 2m\dot{r}\dot{\theta}$$



$$N - 0.2\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\times 0.2}{32.2}\times -4\times 3 \quad\Rightarrow\quad N \simeq 0.024\ \ell bf$$

۱۰ ـ صفحه متجانس مربع شکل به ابعاد $a\times a$ در گوشه‌ای مفصل شده است و از حالت سکون رها می‌شود. سرعت زاویه‌ای آن بعد از 45° درجه چرخش برابر است با (کنکور سال ۸۷)



حل : گزینه ۱ درست است

$$OG = \frac{\sqrt{2}a}{2} \quad I_o = I_G + MOG^2 = \frac{m\left(a^2+a^2\right)}{12} + m\left(\frac{\sqrt{2}a}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow\quad I_o = \frac{ma^2}{6} + \frac{ma^2}{2} = \frac{4ma^2}{6} = \frac{2ma^2}{3}$$

$$\begin{cases} T_1 = 0 \\ V_g)_1 = -mg\dfrac{a}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} T_2 = \dfrac{1}{2}I_o\omega^2 \\ V_g)_2 = -mg\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}a\right) \end{cases}$$

$$\Delta E = 0 \quad\Rightarrow\quad E_1 = E_2 \quad\Rightarrow\quad 0 - mg\frac{a}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2ma^2}{3}\right)\omega^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}mga \quad\Rightarrow\quad \frac{ma^2}{3}\omega^2 = \frac{\left(\sqrt{2}-1\right)}{2}mga$$

$$\Rightarrow\quad \frac{a}{3}\omega^2 = \frac{\sqrt{2}-1}{2}g \quad\Rightarrow\quad \boxed{\omega^2 = \frac{3}{2}\left(\sqrt{2}-1\right)\frac{g}{a}} \quad\rightarrow\quad \omega = \sqrt{\frac{3}{2}\left(\sqrt{2}-1\right)\frac{g}{a}}$$

یادداشت:

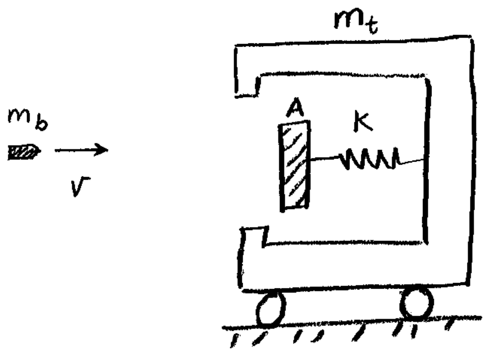
....

....

....

....

۱ـ گلوله‌ای به جرم m_b و با سرعت اولیهٔ v_0 به سیستم نشان داده شده در شکل برخورد می‌کند و در صفحهٔ A فرو می‌رود. اگر صفحهٔ A بدون جرم باشد و اتلاف انرژی نداشته باشیم، حداکثر فشردگی فنر چقدر خواهد بود؟



۱) $v_0\sqrt{\dfrac{m_b - \dfrac{m_b^2}{m_b + m_t}}{k}}$

۲) $v_0\sqrt{\dfrac{m_b^2 - \left(m_b + m_t\right)^2}{m_b k}}$

۳) $v_0\sqrt{\dfrac{m_b^2 - m_t^2}{m_b k}}$

۴) $v_0\sqrt{\dfrac{m_b^2 - m_t^2}{m_t k}}$

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

در زمان حداکثر فشردگی فنر، با استفاده از قانون بقای اندازه حرکت خطی داریم:

$$m_b v_0 = \left(m_b + m_t\right) v \Rightarrow v = \frac{m_b v_0}{m_b + m_t}$$

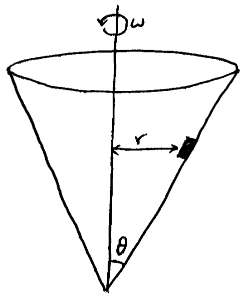
قانون بقای انرژی را برای همان لحظه می‌نویسیم:

$$T_1 = T_2 + V_2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} m_b v_0^2 = \frac{1}{2}\left(m_b + m_t\right) v^2 + \frac{1}{2} k \Delta^2$$

$$\Rightarrow \quad \Delta = \sqrt{\frac{m_b v_0^2 - \dfrac{m_b^2 v_0^2}{m_b + m_t}}{K}} = v_0 \sqrt{\frac{m_b - \dfrac{m_b^2}{m_b + m_t}}{K}}$$

۲ـ یک جعبه مکعب شکل، داخل یک ظرف مخروطی قرار دارد. حداقل سرعت زاویه مخروط برای این‌که جسم به پایین نلغزد کدام است؟



۱) $\omega^2 = \dfrac{g}{r} \dfrac{\mu\cos\theta + \sin\theta}{\sin\theta - \mu\cos\theta}$

۲) $\omega^2 = \dfrac{g}{r} \dfrac{\cos\theta + \mu\sin\theta}{\cos\theta - \mu\sin\theta}$

۳) $\omega^2 = \dfrac{g}{r} \dfrac{\sin\theta - \mu\cos\theta}{\cos\theta + \mu\sin\theta}$

۴) $\omega^2 = \dfrac{g}{r} \dfrac{\mu\cos\theta - \sin\theta}{\cos\theta + \mu\sin\theta}$

یادداشت:

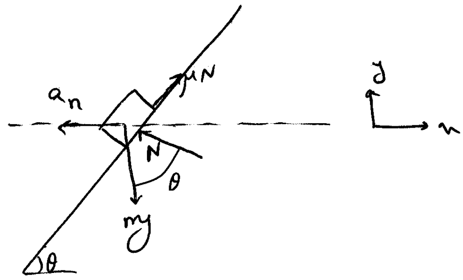
....

....

....

....

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.



در دو راستای x و y رابطه نیوتن را می‌نویسیم:

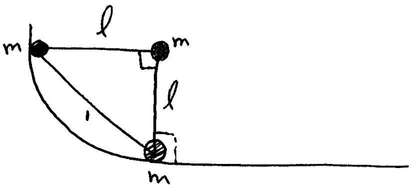
$$\sum F = ma \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} N\cos\theta + \mu N\sin\theta - mg = 0 & (I) \\ N\sin\theta - \mu N\cos\theta = mr^2\omega & (II) \end{cases}$$

$$(I) \quad \Rightarrow \quad N = \frac{mg}{\cos\theta + \mu\sin\theta}$$

با قرار دادن رابطه اخیر در معادله (II) خواهیم داشت:

$$N(\sin\theta - \mu\cos\theta) = mr\omega^2 \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{N(\sin\theta - \mu\cos\theta)}{mr} = \frac{g}{r}\frac{\sin\theta - \mu\cos\theta}{\cos\theta + \mu\sin\theta}$$

۳ـ مطابق شکل سه گلوله به جرم m به هم متصل شده‌اند. تنها میله 1 دارای جرم m است و بقیه میله‌ها بدون جرم هستند. در این لحظه سیستم را از حال سکون رها می‌کنیم. سرعت مجموعه در لحظه‌ای که میله 1 افقی شده است در کدام گزینه آمده است؟ (از اصطکاک صرف‌نظر کنید.)

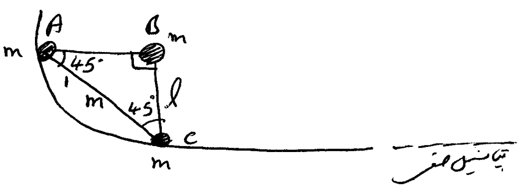


۱) $V = \sqrt{\frac{4-\sqrt{3}}{5}g\ell}$ ۲) $V = \sqrt{7g\ell}$

۳) $V = \sqrt{5g\ell}$ ۴) $V = \sqrt{\frac{5-\sqrt{2}}{4}g\ell}$

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

در لحظه‌ای که میله افقی می‌شود فقط حرکت انتقالی داریم.



در این سیستم اصل بقای انرژی صادق است بنابراین:

$$U_1 = \overbrace{mg\ell}^{\text{جرم B}} + \overbrace{mg\ell}^{\text{جرم A}} + \overbrace{mg\frac{\ell}{2}}^{\text{میله ۱}} = \frac{5}{2}mg\ell$$

$$U_2 = \underbrace{mg\ell\sin 45^\circ}_{\text{جرم B}} + \frac{1}{2}(m+m+m+m)V^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}mg\ell + 2mV^2$$

یادداشت:

....

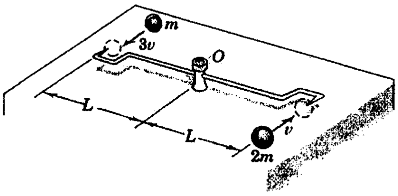
....

....

....

$$U_1 = U_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{5}{2}mg\ell = \frac{\sqrt{2}}{2}mg\ell + 2mV^2 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)g\ell = 2V^2 \quad \Rightarrow \quad V = \sqrt{\frac{5-\sqrt{2}}{4}g\ell}$$

۴ ـ گوی‌های کوچک که جرم و سرعت آن‌ها در شکل نشان داده شده است، به قلاب‌های میله‌ای اصابت می‌کنند و به آن می‌چسبند که آزادانه در نقطه o مفصل شده است. سرعت زاویه‌ای ω مجموعه پس از اصابت گوی‌ها کدام است؟



۱) $2\frac{v}{L}$ ۲) $\frac{7v}{2L}$

۳) $\frac{5v}{3L}$ ۴) $\frac{4V}{3L}$

حل : گزینه ۳ درست است.

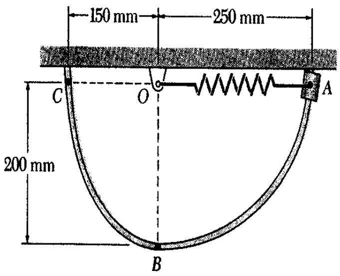
$$\Sigma M_{oz} = 0 \Rightarrow H_{oz_1} = H_{oz_2}$$

$$\begin{cases} H_{oz_1} = (2mvL + 3mvL) = 5mvL \\ H_{oz_2} = (3m\ell)v' \end{cases}$$

$$\Rightarrow 5mvL = 3mv'L \Rightarrow v' = \frac{5v}{3}$$

$$v' = L\omega \Rightarrow \frac{5v}{3} = L\omega \Rightarrow \omega = \frac{5v}{3L}$$

۵ ـ غلاف 2 کیلوگرمی آزادانه می‌تواند بر مسیر منحنی ABC که بدون اصطکاک است حرکت کند. طول آزاد فنر 200 mm است. اگر غلاف را از نقطه A رها کنیم و ثابت فنر $10\frac{kN}{m}$ باشد، سرعت غلاف در نقطه B تقریباً کدام است؟ $g \simeq 10\frac{m}{s^2}$



۱) $3\frac{m}{s}$

۲) $4\frac{m}{s}$

۳) $5\frac{m}{s}$

۴) $6\frac{m}{s}$

حل : گزینه ۲ درست است.

$$E_A = mgh + \frac{1}{2}kx_A^2 = 2\times 10\times\left(\frac{200}{1000}\right) + \frac{1}{2}\times 10^4\left(\frac{50}{1000}\right)^2$$

$$E_B = \frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{1}{2}\times 2\times v_B^2$$

$$E_A = E_B \Rightarrow 4 + \frac{25}{2} = v_B^2$$

$$v_B^2 = \frac{33}{2} \Rightarrow v_B = \sqrt{\frac{33}{2}} \simeq 4\frac{m}{s}$$

یادداشت:

....

....

....

....

۶ـ سه گلوله با ضریب بازگشت کامل $(e=1)$ به جرم‌های به ترتیب m_1 و m_2 و m_3 روی یک سطح افقی بدون اصطکاک در فواصل معین از یکدیگر قرار دارند. اولی را با سرعت V_0 به طرف دومی به حرکت در می‌آوریم که پس از برخورد به گلوله‌ی دوم آن‌را به حرکت در می‌آورد و دومی هم به نوبه خود به گلوله‌ی سوم برخورد کرده و آن‌را به حرکت در می‌آورد. به ازاء چه جرمی از m_2 گلوله‌ی سوم بیشترین سرعت را پیدا خواهد کرد؟

۱) $\frac{1}{2}\sqrt{m_1^2+m_3^2}$ ۲) $\frac{m_1+m_3}{2}$ ۳) $\left|m_1-m_3\right|$ ۴) $\sqrt{m_1 m_3}$

حل : گزینه ۱ درست است.

$$m_1 V_0+0=m_1 V_1'+m_2 V_2 \quad , \quad \frac{V_2-V_1'}{V_0-0}=1 \quad \Rightarrow \quad V_1'=V_2-V_0$$

$$m_1 V_0=m_1\left(V_2-V_0\right)+m_2 V_2 \quad \Rightarrow \quad V_2=\frac{2 m_1 V_0}{m_1+m_2}$$

$$m_2 V_2+0=m_2 V_2'+m_3 V_3 \quad , \quad \frac{V_2-0}{V_3-V_2'}=1 \quad \Rightarrow \quad V_2'=V_3-V_2$$

$$m_2 V_2=m_2\left(V_3-V_2\right)+m_3 V_3 \quad \Rightarrow \quad V_3=\frac{2m_2 V_2}{m_2+m_3}$$

$$\Rightarrow \quad V_3=\frac{4m_1 m_2 V_0}{m_1 m_2+m_2^2+m_1 m_3+m_2 m_3}$$

$$\frac{\partial V_3}{\partial m_2}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{4m_1 V_0\left[m_1 m_2+m_2^2+m_1 m_3+m_2 m_3\right]-\left[m_1+2m_2+m_3\right]4m_1 m_2 V_0}{\left(m_1 m_2+m_2^2+m_1 m_3+m_2 m_3\right)^2}=0 \quad \Rightarrow \quad m_2=\sqrt{m_1 m_3}$$

یادداشت:

....

....

....

....